一個博弈遊戲，據說智商130才看的懂

程序員數學之美 今天

以下文章來源於程序員小灰， 作者王乙埜

程序員小灰
一群喜愛編程技術和算法的小倉鼠。

來自公眾號：程序員小灰

博弈論是一門非常有意思的學問，之前小灰曾經分享過兩個著名的博弈場景：囚徒困境和智豬博弈。

今天，我們來介紹一個更加燒腦的博弈遊戲：**硬幣遊戲**。

遊戲規則

小灰和大黃都有若干塊糖果。有一天大黃提議和小灰玩一個遊戲。這是個什麼遊戲呢？規則很簡單：

首先，他們各自拿出一枚硬幣，並同時亮出

- 如果同為正面，大黃給小灰3塊糖果

- 如果同為反面，大黃給小灰1塊糖果

- 如果是一正一反，小灰給大黃2塊糖果

經過若干輪遊戲，小灰的糖果都被大黃贏走了......

概率裡的陷阱

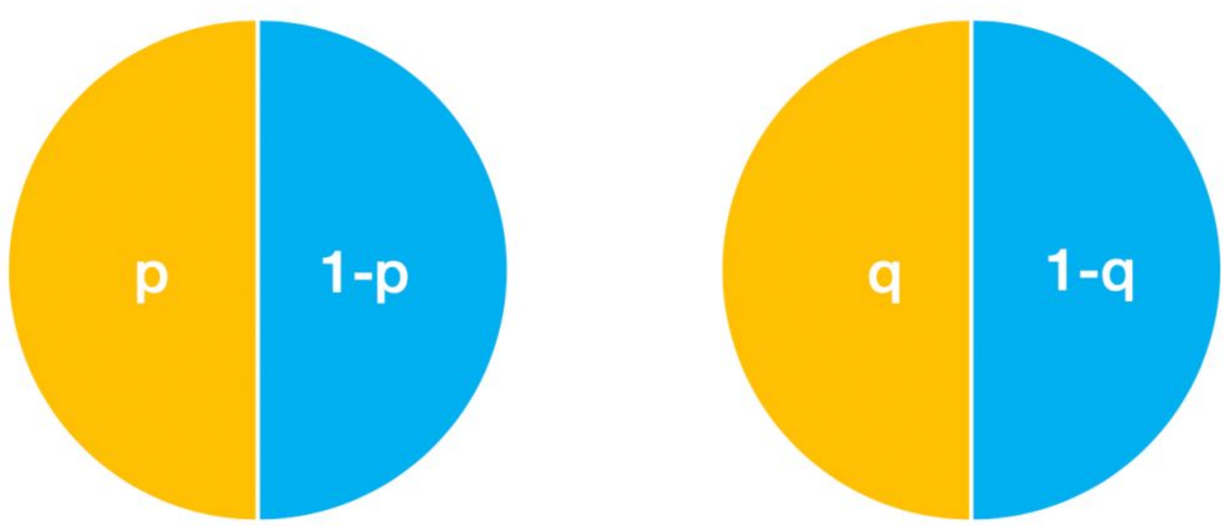
為什麼會發生這樣的事情呢？我們可以好好探究一下這個問題。讓我們試試看用一個表格表示小灰的收入：

↓小灰的選擇→大黃的選擇	亮正面	亮反面
亮正面	3	-2
亮反面	-2	1

乍一看每種情況出現的概率都是，因此這個遊戲似乎是極其公平的？那麼是因為小灰運氣不好呢？不不不，$\frac{1}{4}$這個遊戲裡，其實包含著一個隱蔽的漏洞：

如果是随机的抛硬币，那么每种情况出现的概率的确是$\frac{1}{4}$，但是不要忘了，这个游戏的规则不是随机的抛硬币，我们可以主观选择自己亮出的硬币是正面还是反面，就像在玩“石头剪子布”一样。

我们假设大黄出正面的概率为p，小灰出正面的概率为 q，那么我们可以得到下图：



左图表示大黄，右图表示小灰

可以看到，此时p表示大黄出正面的概率，$1-p$表示大黄出反面的概率，q表示小灰出正面的概率，而$1-q$表示小灰出反面的概率。

以此为基础，很容易计算出：

- 两人同时出正面的概率是 pq，小灰的收获是3
- 两人同时出反面时的概率是(1-p)(1-q)，小灰的收获是1
- 小灰出正面，大黄出反面的概率是(1-p)q，小灰的收获是-2
- 小灰出反面，大黄出正面的概率是p(1-q)，小灰的收获是-2

我们用一个字母A表示小灰的预期收获，那么A的值为：

$$A = 3pq + 1(1-p)(1-q) + [-2(1-p)q] + [-2p(1-q)]$$

（也就是把他们加在一起了）

简化之得：

$$A = 8pq - 3p - 3q + 1$$

> 下面的分析会比较烧脑，涉及到含参数不等式以及减函数的知识，一次看不明白的小伙伴可以多看几遍。

求解方程

大黄想要赢小灰，就要使小灰的收入A小于0，我们可以列出不等式：

$$A < 0$$

把A的值代入，即：

$$8pq - 3p - 3q + 1 < 0$$

大黄无法修改小灰的q值，但是他却能修改自己的p值，因此我们要求的就是p值的解集。把原式当做一个未知数为 p的含参数不等式，先将参数项移至右面，把未知数项放在左面

$$8pq - 3p < 0 + 3q - 1$$

合并同类项可得到：

$$p(8q-3) < 3q - 1$$

对于一个含参数的不等式，我们要进行分类讨论：

- 当参数>0时（两边同时除以参数，不等式符号不变）
- 当参数<0时（两边同时除以参数，不等式符号改变）
- 当参数=0时（原式有任意解）

上面所说的参数，是指 8q-3 这一项

> 注：由于p在这里表示一个概率，因此p的取值范围一定只有$[0,1]$，也就是说，当p为任意解时，p也仅仅只对任意的$p \in [0,1]$成立。

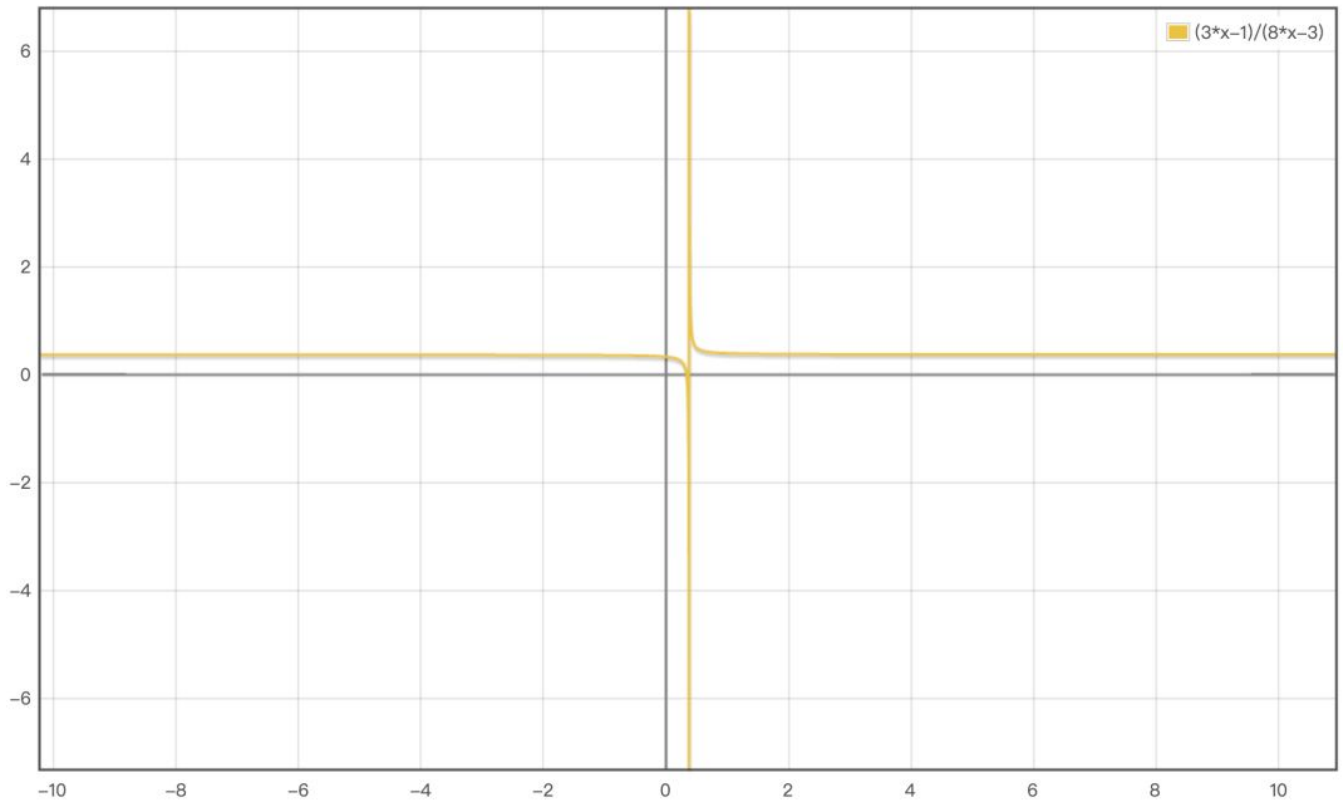
对于上面参数不等式的三种情况，让我们分别进行具体讨论：

情况A，当参数大于0，即$8q-3>0$ ，$q>\frac{3}{8}$时：

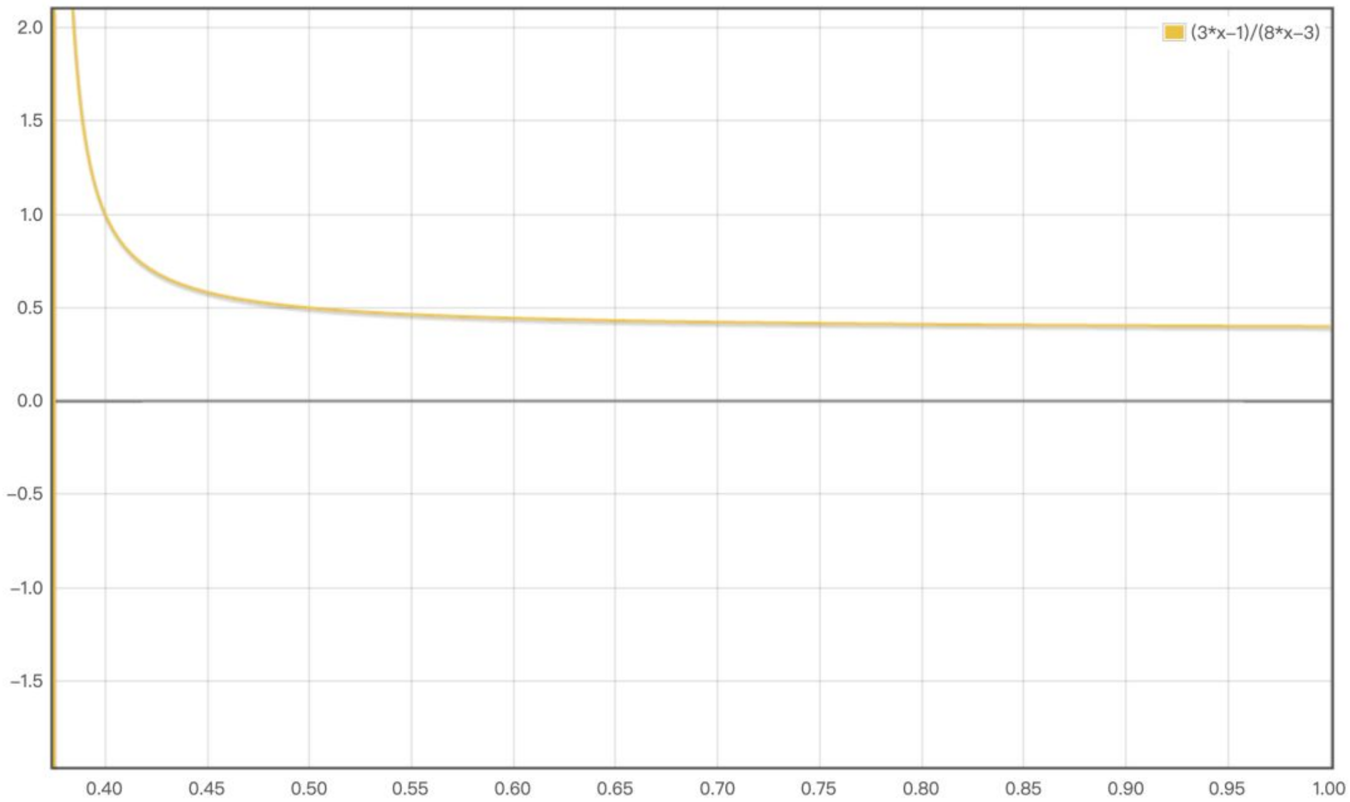
$p<\frac{3q-1}{8q-3}$（不等式符号不变）

当定义域为$(\frac{3}{8},1]$时，有函数$f(q)=\frac{3q-1}{8q-3}$

对应的函数图像为



将其不断放大，直到q的定义域为$(\frac{3}{8},1]$，发现函数图像的曲线是向下的：



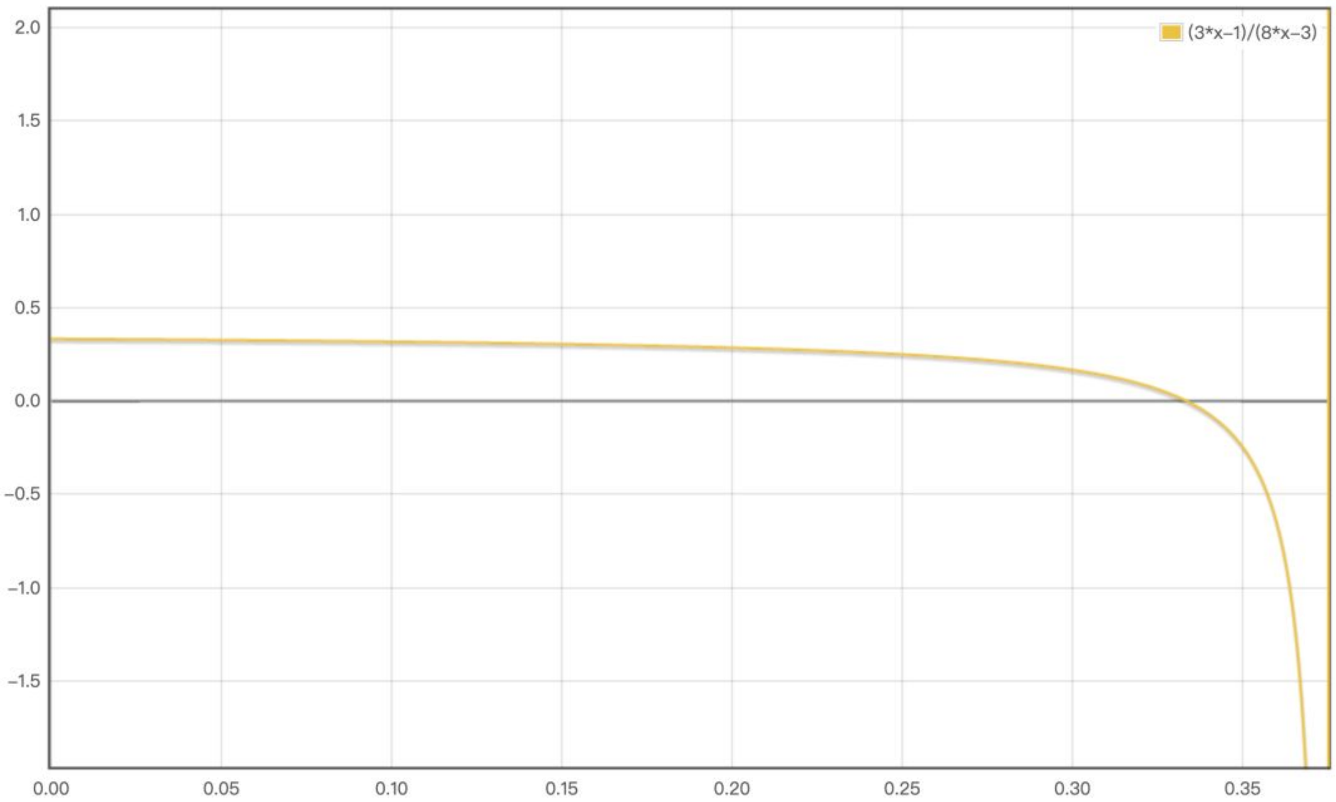
也就是说，这是一个减函数，其定义域上的任何自变量$a_1<a_2$都有对应的$f(a_1)>f(a_2)$。

为了保证（在q的定义域内）不等式成立，p必须小于f(1)，也就是$p<\frac{2}{5}$时，原式成立。

情况B，当参数小于0，即$8q-3<0$ ，$q<\frac{3}{8}$时：

$p>\frac{3q-1}{8q-3}$（不等式符号相反）

当定义域为$[0,\frac{3}{8})$时，函数$f(q)=\frac{3q-1}{8q-3}$为一个减函数，具体的函数图像可以看下图：



虽然它的曲线和刚才略有不同，不过仍然符合减函数的定义。

为了保证在（q的定义域内）不等式成立，p必须大于f(0)，也就是$p > \frac{1}{3}$时，原式成立。

情况C，当参数等于0，即$8q-3=0$ ，$q=\frac{3}{8}$时：

$p \in [0,1]$（任意解）

（仍然符合$A < 0$）

我們把情況A、情況B、情況C當中p的取值範圍求一個交集，最終得出：當大黃把亮正面的概率p控制在時，小灰一定會輸。
$p \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{5})$

應用場景

這個遊戲遠遠不止於此，其實它還能應用到生活中的很多場景裡。我們以炒股為例子，把大黃想像成莊家，把亮正面想成做空，亮反面想成做多，那麼在這個由莊家掌握的局面下，很顯然投資者（也就是小灰）一定是會吃虧的。因此，請遠離炒股，炒股有風險，投資需謹慎。

這個博弈論的問題就講解到這裡，謝謝閱讀！
