CH 7

直流暫態

直流電路具有固定的電壓及電流，若電路中含有電容器或電感器，則在接通或移除電源時，會有一小段充電或放電的過程。在這段極短的時間內，電路中的電壓與電流值將有所變動，這種情形稱為電路的**暫態現象**。本章將就電阻、電容及電感三種基本元件組合的串聯電路，深入探討其中產生的暫態現象。

學習目標

- 瞭解電阻／電容電路暫態現象的原理
- 學習電阻／電容電路暫態現象的計算
- 瞭解電阻／電感電路暫態現象的原理
- 學習電阻／電感電路暫態現象的計算
- 認識電感／電容電路暫態現象

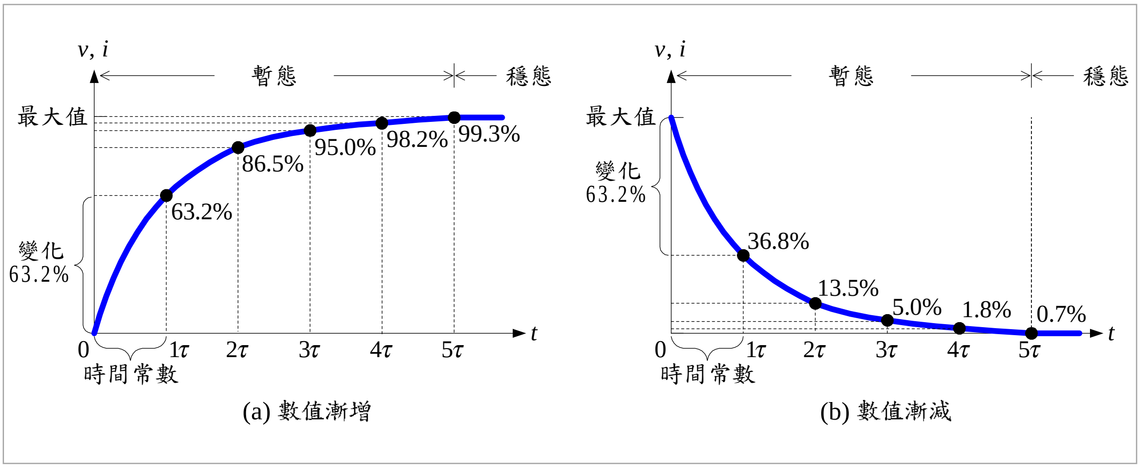
本章目錄

7-1　電阻／電容電路的暫態

當電容器一開始接上直流電源時，電荷會逐漸在電容器中累積，此時電路中的電流、電容器的電壓會持續產生變化，這種過程我們稱爲**暫態**（transient state）；在經過一段時間後，電路中電流與電壓會趨於穩定而維持定值，此時的狀態稱爲**穩態**（steady state）。同理，電容器在移除電源時，電容器中的電荷逐漸釋放，因此也會經歷一段暫態的期間，最後電路才會到達穩態。

7-1.1　*R-C* 串聯電路的時間常數

對於 *R-C* 串聯的直流電路而言，電容器在充電或放電的暫態過程中，電路的電壓及電流將分別由小變大或由大變小，且實際上是呈現指數形式的變化（下一小節將有較詳盡的說明）；電路處於此暫態期間的時間長短，將取決於其電阻值與電容值的大小。我們先定義一個**時間常數**（time constant）：電路由最初狀態到最後穩態的過程中，其間電壓或電流值改變 63.2% 所需的時間。亦即電壓或電流值由 0 增加到最大值的 63.2%（或是由最大值減少至 36.8%）時所花的時間，如圖 7-1 所示。時間常數的符號為希臘字母 τ。



▲ 圖 7-1　**時間常數的圖示**　電容器在充電或放電的暫態過程中，電路的電壓、電流呈指數形式的變化。

根據數學上的推導（在後續章節有較完整的說明），可知 R-C 串聯電路的時間常數與電阻值、電容值有關，其公式為：

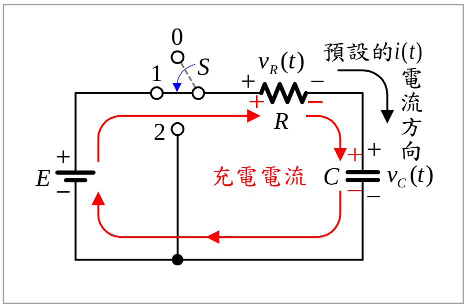
Σ 重要公式

$$\tau = RC \quad 〔s, 秒〕 \qquad (7\text{-}1\text{-}1)$$

其中電阻 R 的單位為歐姆（Ω），電容 C 的單位為法拉（F）。**當電路的電阻值或電容值愈大時，電路到達穩態所需的時間也愈久**。由上圖中亦可看出：**當時間經過 5 倍的時間常數後（$t=5\tau$），電路即已接近穩態**，因此 5 倍的時間常數常視為充放電過程中的**暫態時間**（transient time）。

7-1.2　R-C 電路之充電暫態

圖 7-2 為 R-C 串聯電路，假設電容器 C 上沒有任何電荷的儲存，在時間 $t=0$ 時，開關 S 切至位置 1，則電路形成迴路，電流開始流動。其充電過程說明如下：



▲ 圖 7-2　R-C 串聯直流充電電路

1. **R-C 電路充電瞬間**（$t=0^+$，開關 S 已經由 "0" 切換至 "1" 瞬間）

   在一開始充電瞬間，電容器尚未累積電荷，兩端的電壓 v_C 為零，電容 C 可視為**短路**。此時電路的特性為：

電容電壓	$v_C(0^+) = v_C(0) = 0$	（為最小值）
電阻電壓	$v_R(0^+) = E - v_C(0^+) = E$	（為最大值）
電路電流	$i(0^+) = \dfrac{E}{R}$	（為最大值）

2. **R-C 電路充電穩態**（$t \geq 5\tau$，開關 S 切換至 "1" 長時間後）

電容器已充電完畢，v_C 等於電源電壓 E，充電電流 i 降為零，電容 C 可視為**斷路**。此時電路的特性為：

電容電壓	$v_C(5\tau) = E$	（為最大值）
電阻電壓	$v_R(5\tau) = E - v_C(5\tau) = 0$	（為最小值）
電路電流	$i(5\tau) = 0$	（為最小值）

3. **R-C 電路充電暫態**（$0 < t < 5\tau$，開關 S 切換至 "1" 短暫時間內）

時間 $t > 0$ 時，電源向電容器充電，電荷增加，電容電壓 v_C 逐漸增大，而電阻電壓 v_R 逐漸減小，且充電電流 i 也逐漸減小。實際上描述此充電暫態過程的數學方程式為一**指數函數**，表示為：

Σ 重要公式

電容電壓 $$v_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (7\text{-}1\text{-}2)$$

電阻電壓 $$v_R(t) = E - v_C(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = v_R(0^+) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7\text{-}1\text{-}3)$$

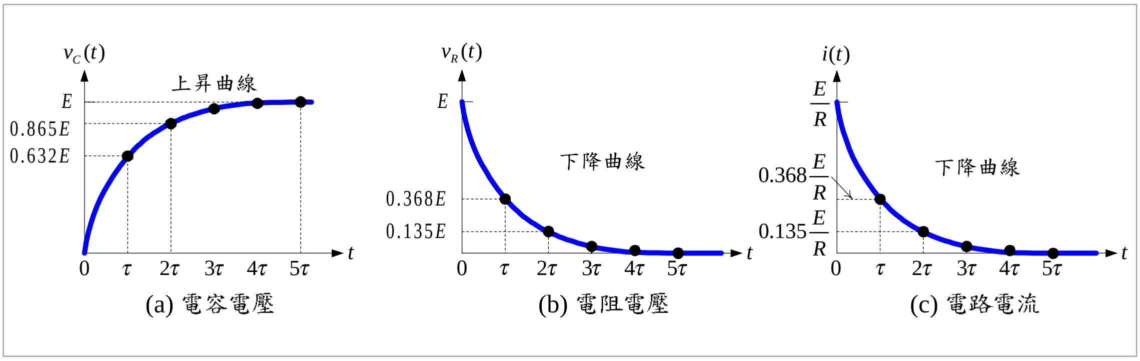
電路電流 $$i(t) = \frac{E - v_C(t)}{R} = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = i(0^+) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7\text{-}1\text{-}4)$$

註：上述公式的推導，請參見附錄 A 的說明。

式中 t 表示開關閉合後電壓、電流變化所經歷的時間，e 為自然對數的底數，其值為 2.71828⋯。以 e 為底的各項指數值如表 7-1 所列，而各方程式的曲線則如圖 7-3 所示，其中 $v_C(t)$ 為上昇曲線，$v_R(t)$、$i(t)$ 為下降曲線。

▼ 表 7-1 t 與 $e^{-\frac{t}{\tau}}$ 之對照表

t	0	1τ	2τ	3τ	4τ	5τ
$e^{-\frac{t}{\tau}}$	$e^0 = 1.0$	$e^{-1} \cong 0.368$	$e^{-2} \cong 0.135$	$e^{-3} \cong 0.050$	$e^{-4} \cong 0.018$	$e^{-5} \cong 0.007 \approx 0$

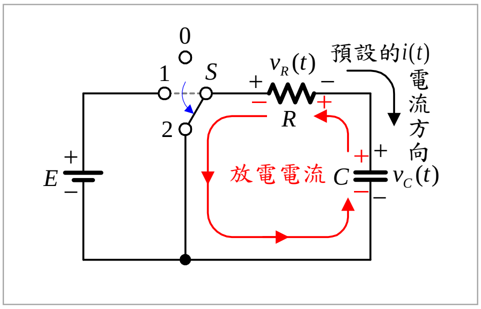


▲ 圖 7-3 *R-C* 電路的充電特性曲線

由(7-1-2)~(7-1-4)式即可看出：當 $t=RC$ 時，電路的電壓、電流值正好變化 63.2%（$\because 1-e^{-\frac{t}{RC}}=1-e^{-1}\cong 1-0.368=0.632$），此即爲電路的時間常數。當 *R*、*C* 的乘積值愈大，表示充電過程愈久（即暫態時間較長）；反之則時間愈短。

7-1.3 *R-C* 電路之放電暫態

當電容器充電完成後，將開關 *S* 切換至位置 2，如圖 7-4 所示，此時 *R* 和 *C* 自成一個封閉的迴路，電容電壓 $v_C(t)$ 成爲這個電路的電動勢，電容器所儲存的電荷開始經由電阻 *R* 放電，而放電電流 $i(t)$ 則與原先充電電流的方向相反。其放電過程說明如下：



▲ 圖 7-4 *R-C* 串聯直流放電電路

1. *R-C* 電路放電瞬間（$t=0^+$，開關 *S* 已經由 "1" 切換至 "2" 瞬間）
   在一開始放電瞬間，電容器的電荷開始準備釋放（尚未釋放出來），兩端的電壓 v_C 保持與原先相同，並成爲新的電動勢來源。此時電路的特性爲：

電容電壓 $v_C(0^+) = v_C(0) = E$

電阻電壓 $v_R(0^+) = -v_C(0^+) = -E$（負號表示與原電阻電壓極性相反）

電路電流 $i(0^+) = \dfrac{v_R(0^+)}{R} = -\dfrac{E}{R}$ （負號表示與原電路電流方向相反）

2. *R-C* 電路放電穩態（$t \geq 5\tau$，開關 S 切換至 "2" 長時間後）
電容器將全部電能釋出，稱為放電完畢，電路成為穩定的狀態。此時電路的特性為：

電容電壓 $v_C(5\tau) = 0$

電阻電壓 $v_R(5\tau) = -v_C(5\tau) = 0$

電路電流 $i(5\tau) = 0$

3. *R-C* 電路放電暫態（$0 < t < 5\tau$，開關 S 切換至 "2" 短暫時間內）
時間 $t > 0$ 時，電容器持續放電，電容電壓 v_C 逐漸減小，且電阻電壓 v_R 與放電電流 i 也逐漸減小。描述此放電暫態過程的數學方程式為：

Σ 重要公式

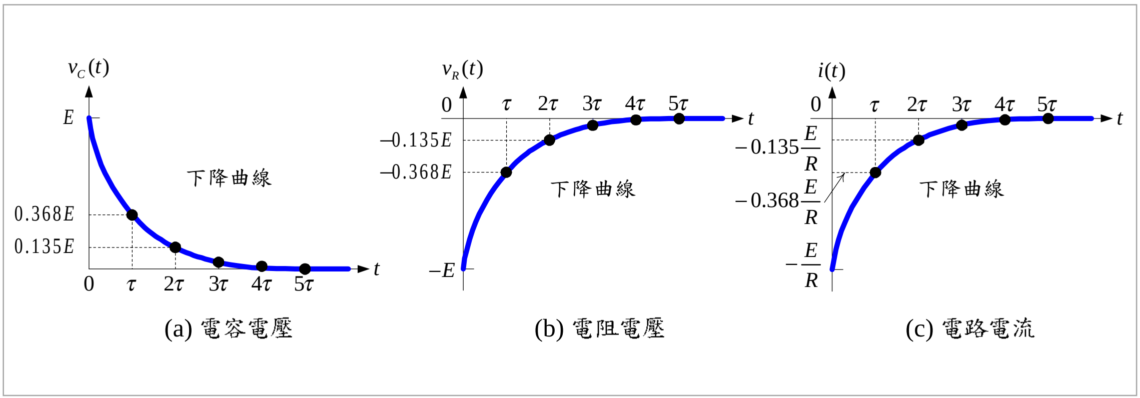
電容電壓 $v_C(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = v_C(0^+) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ (7-1-5)

電阻電壓 $v_R(t) = -v_C(t) = -E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = v_R(0^+) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ (7-1-6)

電路電流 $i(t) = \dfrac{v_R(t)}{R} = -\dfrac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = i(0^+) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ (7-1-7)

註：此處 $v_C(0^+)$、$v_R(0^+)$、$i(0^+)$ 為電容放電瞬間之初始值，不要與充電瞬間之初始值混淆。

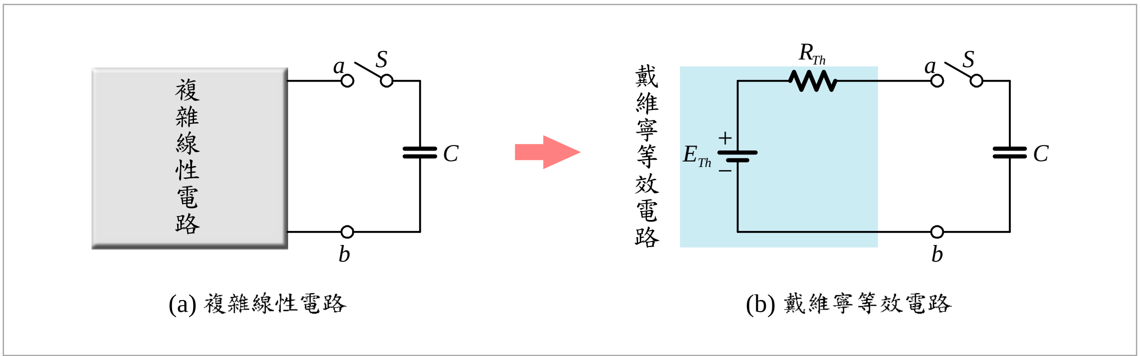
各方程式的曲線如圖 7-5 所示，其中 $v_C(t)$、$v_R(t)$、$i(t)$ 取絕對值後的大小爲下降曲線。



▲ 圖 7-5　*R*-*C* 電路的放電特性曲線

※7-1.4　複雜網路的 *R*-*C* 暫態

對於一個爲多電阻所組成的複雜線性電路而言，若欲求其 *R*-*C* 直流電路的暫態方程式時，可先求出此電容器兩端的戴維寧等效電路，最後再依前述所討論之方法計算求得，如圖 7-6 所示。實際計算過程將於後面範例中說明。

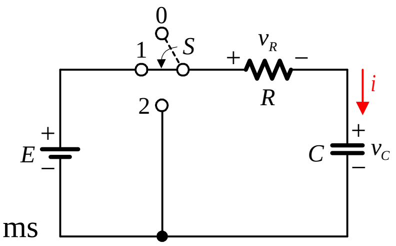


▲ 圖 7-6　複雜 *R*-*C* 線性電路之暫態　將複雜線性電路化成戴維寧等效電路。

註：電路中，電阻、電容、電感、獨立源、受控源…等稱為線性元件，由線性元件所組成的電路即為線性電路。

範例 7-1

如右圖所示電路，設 $E=100\text{V}$ ， $R=100\Omega$ ， $C=100\mu\text{F}$ ，若將開關 S 由位置 "0" 切換至 "1"，試求 (1) $t=0$ (2) $t=20\text{ms}$ (3) $t\geq 5\tau$ 時之 v_C 、 v_R 、 i 各為多少？（ $e^{-2}=0.135$ ）



【解】 $\tau = RC = 100\times(100\times10^{-6}) = 10\times10^{-3} = 10\text{ ms}$

(1) $t = 0$ 時， C 視為短路

$V_C = 0\text{ V}$ $v_R = E = 100\text{ V}$ $i = \dfrac{E}{R} = \dfrac{100}{100} = 1\text{ A}$

(2) $t = 20\text{ms} = 2\tau$ 時

$$v_C(2\tau) = E(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) = 100(1-e^{-2}) = 100\times(1-0.135) = 86.5\text{ V}$$

$$v_R(2\tau) = E\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 100\cdot e^{-2} = 100\times0.135 = 13.5\text{ V}$$

$$i(2\tau) = \frac{E}{R}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{100}{100}\cdot e^{-2} = 1\times0.135 = 0.135\text{ A}$$

(3) $t \geq 5\tau$ 時，已充電完畢， C 視為斷路

$v_C = E = 100\text{ V}$ $v_R = 0\text{ V}$ $i = 0\text{ A}$

馬上練習 承上題，若電流 $i=50\text{mA}$ 時，則經過的時間 t 為多少？

【答】 $t = 30\text{ ms}$ 。

範例 7-2

承範例 7-1，若 t 經過 5 倍的時間常數後，將開關 S 由位置 "1" 切換至 "2"，試求 (1) $t=0$ (2) $t=20\text{ms}$ (3) $t\geq5\tau$ 時之 v_C 、 v_R 、 i 各為多少？（ $e^{-2}=0.135$ ）

【解】(1) $t = 0$ 時， v_C 維持充電時的電壓

$v_C = 100\text{ V}$ $v_R = -v_C = -100\text{ V}$ $i = \dfrac{v_R}{R} = \dfrac{-100}{100} = -1\text{ A}$

(2) $t = 20\text{ms} = 2\tau$ 時

$$v_C(2\tau) = E\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 100\cdot e^{-2} = 100\times0.135 = 13.5\text{ V}$$

$v_R(2\tau) = -v_C(2\tau) = -13.5\text{ V}$（負號表示與原來電壓極性相反）

$$i(2\tau) = \frac{v_R(2\tau)}{R} = \frac{-13.5}{100} = -0.135\ \text{A}$$（負號表示與原來電流方向相反）

(3) $t \geq 5\tau$ 時，已放電完畢

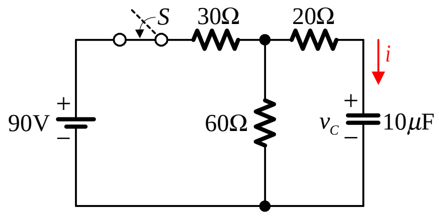
$v_C = 0\ \text{V}$　　$v_R = 0\ \text{V}$　　$i = 0\ \text{A}$

馬上練習　承上題，若電壓 $v_C = 5\text{V}$ 時，則經過的時間 t 為多少？

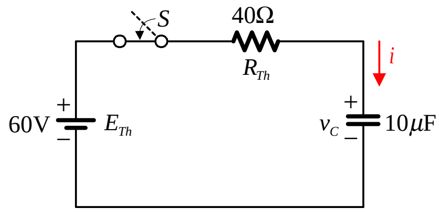
【答】$t = 30\ \text{ms}$。

範例 7-3

如右圖所示電路，當開關 S 閉合時，試求 (1)充電之時間常數 τ　(2) $t=0$ 瞬間之 i　(3) $t \geq 5\tau$ 時之 v_C　為多少？



【解】先求電容器 C 兩端之戴維寧等效電路，如右下圖所示：



$$R_{Th} = 20 + (30 // 60) = 40\ \Omega$$

$$E_{Th} = 90 \times \frac{60}{30+60} = 60\ \text{V}$$

(1) $\tau = R_{Th}C = 40 \times (10 \times 10^{-6}) = 0.4\ \text{ms}$

(2) $t = 0$ 瞬間，電容器視為短路

$$i = \frac{E_{Th}}{R_{Th}} = \frac{60}{40} = 1.5\ \text{A}$$

(3) $t \geq 5\tau$ 時，電容器充電完畢視為斷路

$$v_C = E_{Th} = 60\ \text{V}$$

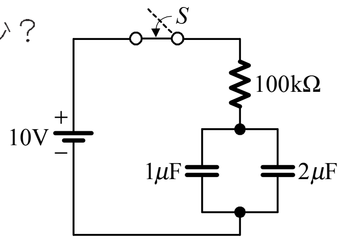
馬上練習　承上題，若 t 經過 5 倍的時間常數後，再將開關 S 打開，試求 (1)放電之時間常數 τ　(2) $t=0$ 瞬間之 i　為多少？

【答】(1) $\tau = 0.8\ \text{ms}$；

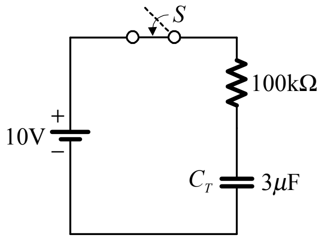
(2) $i = -0.75\ \text{A}$。

範例 7-4

如右圖所示電路，試求 $t = 0.3\text{s}$ 時，v_C、v_R、i 各為多少？



【解】先將原電路化成如右下圖所示之等效電路：



$$C_T = 1\mu + 2\mu = 3\mu\text{F}$$

$$\tau = RC_T = (100\times10^3)\times(3\times10^{-6}) = 0.3\text{ s}$$

$$v_C(0.3\text{s}) = E(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) = 10(1-e^{-\frac{0.3}{0.3}})$$

$$= 10(1-0.368) = 6.32\text{ V}$$

$$v_R(0.3\text{s}) = E - v_C(0.3\text{s}) = 10-6.32 = 3.68\text{ V}$$

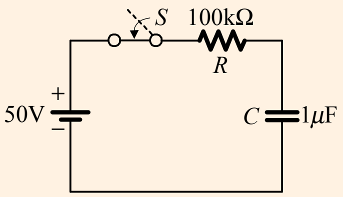
$$i(0.3\text{s}) = \frac{v_R(0.3\text{s})}{R} = \frac{3.68}{100\times10^3} = 3.68\times10^{-5}\text{ A}$$

馬上練習 承上題，試求 $t = 3\text{s}$ 時，v_C、v_R、i 各為多少？

【答】$v_C = 10\text{ V}$，$v_R = 0\text{ V}$，$i = 0\text{ A}$。

單元評量

1. $e^{-1} \cong$ ＿＿＿＿＿＿；$e^{-2} \cong$ ＿＿＿＿＿＿。
2. R-C 串聯電路中，當電容器在充電的過程，電路中的電流值會隨時間的增加而＿＿＿＿＿＿。
3. R-C 串聯電路的時間常數 τ 為＿＿＿＿＿＿。
4. R-C 串聯電路中，$C = 0.01\mu\text{F}$，$R = 50\text{k}\Omega$，其電路的時間常數為＿＿＿＿＿＿s。
5. 如圖(1)所示電路，若將開關 S 閉合，則時間經過 0.1s 後，其電容器之電壓 $v_C =$ ＿＿＿＿＿＿V。
6. 有一 12μF 的電容器，其兩端電壓為 5V，並有一大小為 1mA 的直流電加於此電容器上，使其電壓繼續上升。試求當時間經過 24ms 後，電容器兩端的電壓值變為＿＿＿＿＿＿V。



圖(1)

7-2　電阻／電感電路的暫態

當電感器接上直流電源時，電感器會通過電流而將磁能儲存其中，但通過電感器的電流並不會在電路接通的瞬間，就立即達到某一穩定值。根據楞次定律可知，**電感器會產生一感應電動勢來抗拒電流狀態的改變**，因此電路中的電流會經過一段暫態的期間，最後才到達穩態。同理，電感器在移除電源時，電感器中磁能的釋放也會有類似的狀態變化。

7-2.1　*R-L* 串聯電路的時間常數

對於 *R-L* 串聯的直流電路而言，電感器在充電（儲能）或放電（釋能）的暫態過程中，電路中電壓、電流大小變化的速率，也將取決於其電阻值與電感值的大小。我們一樣定義電壓或電流值由 0 增加到最大值的 63.2%（或是由最大值減少至 36.8%）時所花的時間為時間常數，則根據數學上的推導（在後續章節有較完整的說明），可知 *R-L* 串聯電路之時間常數的公式為：

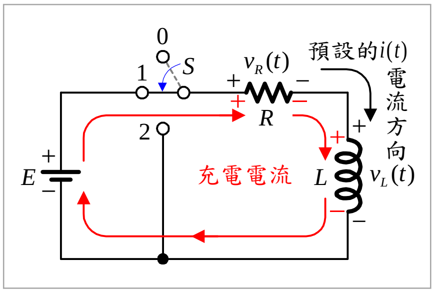
Σ 重要公式

$$\tau = \frac{L}{R} \quad \text{〔s, 秒〕} \qquad (7\text{-}2\text{-}1)$$

其中電阻 R 的單位為歐姆（Ω），電感 L 的單位為亨利（H）。**當電路的電阻值愈小或電感值愈大時，電路到達穩態所需的時間也愈久。**

7-2.2　*R-L* 電路之充電暫態

圖 7-7 為 *R-L* 串聯電路，在時間 $t=0$ 時，開關 S 切至位置 1，則電路形成迴路，電流開始流動。其儲能過程說明如下：



▲ 圖 7-7　*R-L* 串聯直流儲能電路

1. **R-L 電路儲能瞬間**（$t=0^+$，開關 S 已經由 "0" 切換至 "1" 瞬間）
在電路接通瞬間，電感器感應一反抗的電動勢（大小與電源電壓 E 相等），使電路一開始的充電電流 i 為零，電感 L 可視為**斷路**。此時電路的特性為：

電感電壓	$v_L(0^+) = E$	（為最大值）
電阻電壓	$v_R(0^+) = E - v_L(0^+) = 0$	（為最小值）
電路電流	$i(0^+) = i(0) = 0$	（為最小值）

2. **R-L 電路儲能穩態**（$t \geq 5\tau$，開關 S 切換至 "1" 長時間後）
電感器已儲能完畢，充電電流 i 維持穩定，電感器兩端的電壓 v_L 降為零，電感 L 可視為**短路**。此時電路的特性為：

電感電壓	$v_L(5\tau) = 0$	（為最小值）
電阻電壓	$v_R(5\tau) = E - v_L(5\tau) = E$	（為最大值）
電路電流	$i(5\tau) = \dfrac{E}{R}$	（為最大值）

3. **R-L 電路儲能暫態**（$0 < t < 5\tau$，開關 S 切換至 "1" 短暫時間內）
時間 $t > 0$ 時，電源向電感器充電，電感電壓 v_L 逐漸變小，而電流 i 與電阻電壓 v_R 逐漸增加。實際上描述此儲能暫態過程的數學方程式為：

Σ 重要公式

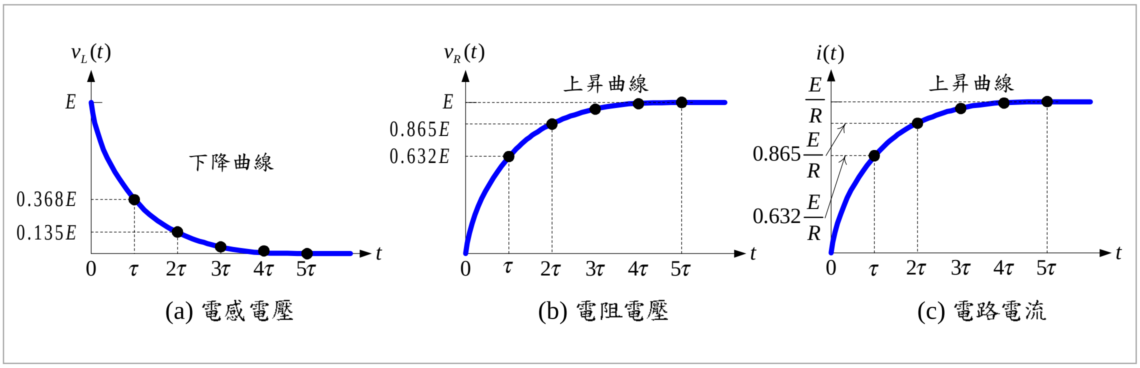
電感電壓 $$v_L(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{L/R}} = v_L(0^+) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7\text{-}2\text{-}2)$$

電阻電壓 $$v_R(t) = E - v_L(t) = E(1-e^{-\frac{t}{L/R}}) = E(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (7\text{-}2\text{-}3)$$

電路電流 $$i(t) = \frac{E - v_L(t)}{R} = \frac{E}{R}(1-e^{-\frac{t}{L/R}}) = \frac{E}{R}(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (7\text{-}2\text{-}4)$$

註：上述公式的推導，請參見附錄 A 的說明。

各方程式的曲線如圖 7-8 所示，其中 $v_L(t)$ 為下降曲線，$v_R(t)$ 、 $i(t)$ 為上昇曲線。

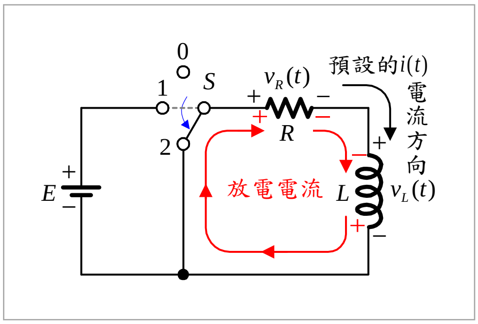


▲ 圖 7-8　*R-L* 電路的儲能特性曲線

由(7-2-2)~(7-2-4)式即可看出：當 $t=\frac{L}{R}$ 時，電路的電壓、電流值正好變化 63.2%（$\because 1-e^{-\frac{t}{L/R}}=1-e^{-1}\cong 1-0.368=0.632$），此即為電路的時間常數。當 L 、 R 相除的值愈大（L 愈大或 R 愈小），表示儲能過程愈久（即暫態時間較長）；反之則時間愈短。

7-2.3　*R-L* 電路之放電暫態

當電感器儲能完成後，將開關 S 切換至位置 2，如圖 7-9 所示，此時 R 和 L 自成一個封閉的迴路，電感電壓 $v_L(t)$ 成為這個電路的電動勢，電感器所儲存的能量開始經由電阻 R 釋放，而放電電流 $i(t)$ 與原先充電電流的方向相同。其釋能過程說明如下：



▲ 圖 7-9　*R-L* 串聯直流釋能電路

註：實際上不可將開關 S 直接由 1 切換至 2，因為在此過程中電路會有瞬間開路（將使電感器無法保持電流值），此時電感器會感應出高電壓，而可能在開關的接點處產生電弧，或甚至造成電感器燒毀。因此，實際上應加入短路線再切入開關才可以。

1. **R-L 電路釋能瞬間**（$t=0^+$，開關 S 已經由 "1" 切換至 "2" 瞬間）
在電源移除的瞬間，由楞次定律可知電感器會反對電流的變化，而感應出與電源電壓 E 相同之電動勢，使通過電感器的電流保持與原先相同。此時電路的特性為：

電感電壓　$v_L(0^+) = -E$　（負號表示與原電感電壓極性相反）

電阻電壓　$v_R(0^+) = -v_L(0^+) = E$

電路電流　$i(0^+) = \dfrac{v_R(0^+)}{R} = \dfrac{E}{R}$

2. **R-L 電路釋能穩態**（$t \geq 5\tau$，開關 S 切換至 "2" 長時間後）
電感器將全部磁能釋出，稱為釋能完畢，電路亦成為穩定的狀態。此時電路的特性為：

電感電壓　$v_L(5\tau) = 0$

電阻電壓　$v_R(5\tau) = -v_L(5\tau) = 0$

電路電流　$i(5\tau) = 0$

3. **R-L 電路釋能暫態**（$0 < t < 5\tau$，開關 S 切換至 "2" 短暫時間內）
時間 $t > 0$ 時，電感器持續釋能，電感電壓 v_L 逐漸減小，且電阻電壓 v_R 與放電電流 I 也逐漸減小。描述此釋能暫態過程的數學方程式為：

Σ 重要公式

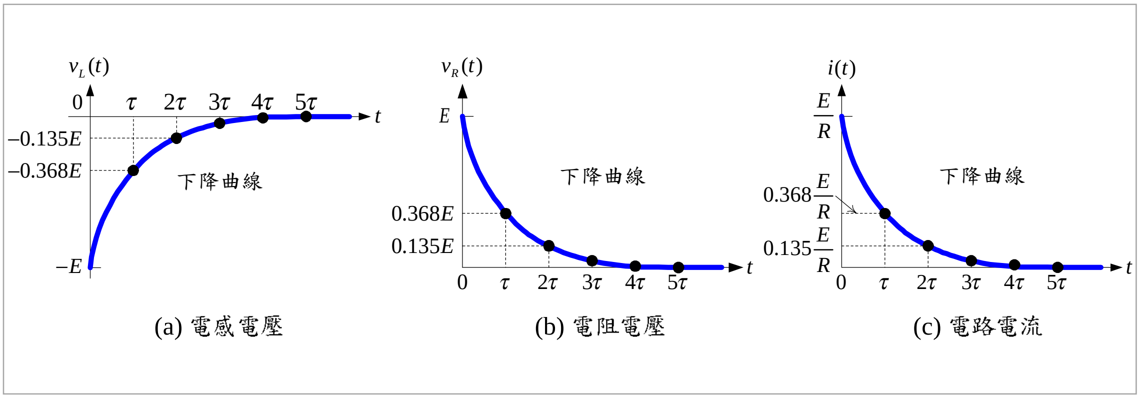
電感電壓　$v_L(t) = -E \cdot e^{-\frac{t}{L/R}} = v_L(0^+) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$　(7-2-5)

電阻電壓　$v_R(t) = -v_L(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{L/R}} = v_R(0^+) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$　(7-2-6)

電路電流　$i(t) = \dfrac{v_R(t)}{R} = \dfrac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{L/R}} = i(0^+) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$　(7-2-7)

註：此處 $v_L(0^+)$、$v_R(0^+)$、$i(0^+)$ 為電感釋能瞬間之初始值，不要與儲能瞬間之初始值混淆。

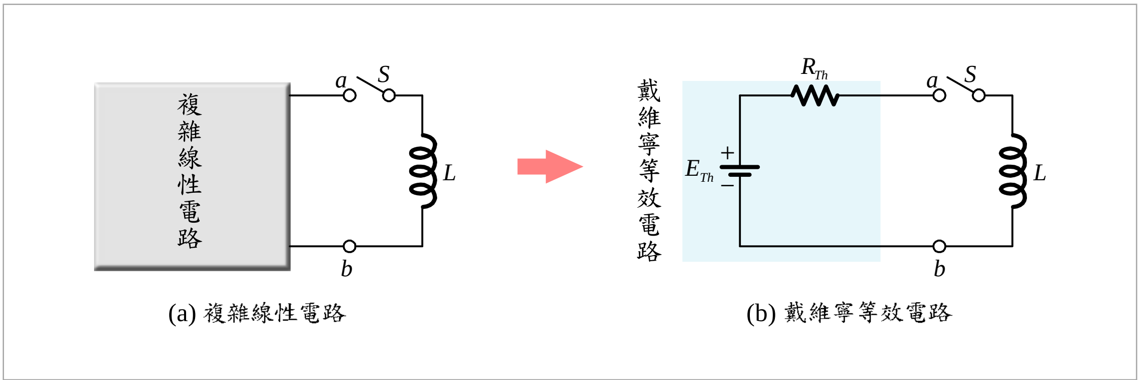
各方程式的曲線如圖 7-10 所示，其中 $v_L(t)$、$v_R(t)$、$i(t)$ 取絕對值後的大小爲下降曲線。



▲ 圖 7-10　**R-L 電路的釋能特性曲線**

※ 7-2.4　複雜網路的 R-L 暫態

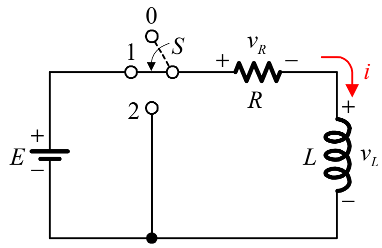
對於一個爲多電阻所組成的複雜線性電路而言，若欲求其 R-L 直流電路的暫態方程式時，可先求出此電感器兩端的戴維寧等效電路，最後再依前述所討論之方法計算求得，如圖 7-11 所示。實際計算過程將於後面範例中說明。



▲ 圖 7-11　**複雜 R-L 線性電路之暫態**　將複雜線性電路化成戴維寧等效電路。

範例 7-5

如右圖所示電路，設 $E=50\text{V}$ ，$R=10\Omega$ ，$L=1\text{H}$，若將開關 S 由位置 "0" 切換至 "1"，試求 (1) $t=0$ (2) $t=0.2\text{s}$ (3) $t\geq 5\tau$ 時之 v_L、v_R、i 各為多少？（$e^{-2}=0.135$）



【解】$\tau = \dfrac{L}{R} = \dfrac{1}{10} = 0.1\text{ s}$

(1) $t = 0$ 時，L 視為斷路

$v_L = E = 50\text{ V}$ $v_R = 0\text{ V}$ $i = 0\text{ A}$

(2) $t = 0.2\text{s} = 2\tau$ 時

$$v_L(2\tau) = E\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 50\cdot e^{-2} = 50\times 0.135 = 6.75\text{ V}$$

$$v_R(2\tau) = E(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) = 50(1-e^{-2}) = 50\times(1-0.135) = 43.25\text{ V}$$

$$i(2\tau) = \frac{E}{R}(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{50}{10}(1-e^{-2}) = 5\times(1-0.135) = 4.325\text{ A}$$

(3) $t \geq 5\tau$ 時，L 視為短路

$v_L = 0\text{ V}$ $v_R = E = 50\text{ V}$ $i = \dfrac{E}{R} = \dfrac{50}{10} = 5\text{ A}$

馬上練習 承上題，若電阻變為原來的 2 倍，則 $t=0.2\text{s}$ 時的電流 i 為多少？

【答】$i = 2.455\text{ A}$。

範例 7-6

承範例 7-5，若 t 經過 5 倍的時間常數後，將開關 S 由位置 "1" 切換至 "2"，試求 (1) $t=0$ (2) $t=0.2\text{s}$ (3) $t\geq 5\tau$ 時之 v_L、v_R、i 各為多少？（$e^{-2}=0.135$）

【解】(1) $t = 0$ 時，L 產生一反電動勢

$v_L = -E = -50\text{ V}$ $v_R = -V_L = 50\text{ V}$ $i = \dfrac{V_R}{R} = \dfrac{50}{10} = 5\text{ A}$

(2) $t = 0.2\text{s} = 2\tau$ 時

$v_L(2\tau) = -E\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = -50\cdot e^{-2} = -50\times 0.135 = -6.75\text{ V}$（負號表示與原來電壓極性相反）

$$v_R(2\tau) = E\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 50\cdot e^{-2} = 50\times 0.135 = 6.75\text{ V}$$

$$i(2\tau) = \frac{E}{R}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{50}{10}\cdot e^{-2} = 5\times 0.135 = 0.675\text{ A}$$

(3) $t \geq 5\tau$ 時

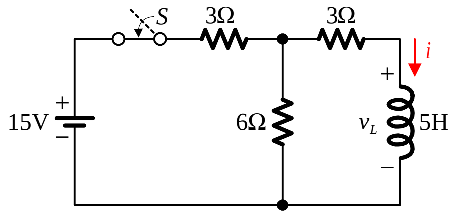
$v_L = 0\text{ V}$　　$v_R = 0\text{ V}$　　$i = 0\text{ A}$

馬上練習　承上題，若電感變為原來的 2 倍，則 $t = 0.2\text{s}$ 時的電流 i 為多少？

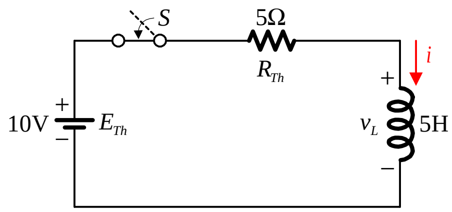
【答】$i = 1.84\text{ A}$。

範例 7-7

如右圖所示電路，當開關 S 閉合時，試求 (1)充電之時間常數 τ　(2) $t = 0$ 瞬間之 v_L　(3) $t \geq 5\tau$ 時之 i 為多少？



【解】先求電感器 L 兩端之戴維寧等效電路，如右下圖所示：



$$R_{Th} = 3 + (3 /\!/ 6) = 5\,\Omega$$

$$E_{Th} = 15\times\frac{6}{3+6} = 10\text{ V}$$

(1) $\tau = \dfrac{L}{R_{Th}} = \dfrac{5}{5} = 1\text{ s}$

(2) $t = 0$ 瞬間，電感器視為斷路

$v_L = E_{Th} = 10\text{ V}$

(3) $t \geq 5\tau$ 時，電感器視為短路

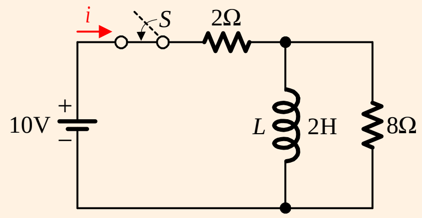
$i = \dfrac{E_{Th}}{R_{Th}} = \dfrac{10}{5} = 2\text{ A}$

馬上練習　承上題，若 t 經過 5 倍的時間常數後，再將開關 S 打開，試求 (1)放電之時間常數 τ　(2) $t = 0$ 瞬間之 v_L 為多少？

【答】(1) $\tau = 0.56\text{ s}$；(2) $v_L = -18\text{ V}$。

單元評量

1. 電感器在充電（儲能）瞬間，可視為 ________ 路狀態；當充電（儲能）完畢後，可視為 ________ 路狀態。
2. R-L 串聯電路中，當電感器在充電的過程，電路中的電流值會隨時間的增加而 ________。
3. R-L 串聯電路的時間常數 τ 為 ________。
4. R-L 串聯電路中，$\tau = 1.6\text{s}$，$R = 5\Omega$，其電路的電感值為 ________ H。
5. R-L 串聯電路中，$\tau = 0.02\text{s}$，$L = 0.2\text{H}$，其電路的電阻值為 ________ Ω。
6. R-L 串聯電路中，$L = 500\text{mH}$，$R = 100\text{k}\Omega$，其電路的時間常數為 ________ s。
7. 如右圖所示電路，若將開關 S 閉合，則時間常數 $\tau =$ ________ s；而開關 S 閉合瞬間之電流 $i =$ ________ A，電路穩態後之電流 $i =$ ________ A。



※ 7-3　電感／電容電路的暫態

有一些電路會同時使用電感器與電容器，因此在電阻、電感、電容混合的直流電路中，就會因電感與電容的充放電效應，而產生暫態現象。這些電路的組合型態有許多種不同的情況，其暫態的討論比起單獨 R-C 電路或 R-L 電路要來得複雜。

我們將以實際的範例來解析 R-L-C 電路之暫態現象，但因 R-L-C 之串、並聯電路牽涉許多較複雜的電路特性，因此我們只會著重於電路的**充放電瞬間**、**充放電完畢**之現象來分析。電路分析的基本原則如表 7-2 所示。

▼ 表 7-2　電感與電容在充、放電時之電路狀態

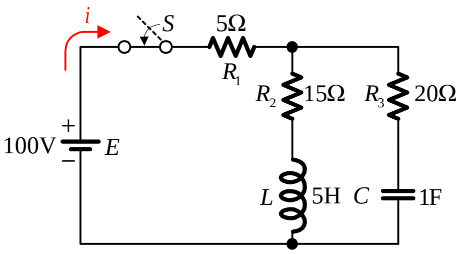
狀態	電容器 C	電感器 L
充電開始（瞬間）（ $t=0^+$ ）	電壓 $v_C=0$ ，**C 視為短路** 有最大的充電電流 i_C	有最大的感應電勢 v_L 儲能電流 $i_L=0$ ，**L 視為斷路**
充電期間（暫態）（ $0<t<5\tau$ ）	電壓 v_C 上昇 充電電流 i_C 下降	感應電勢 v_L 下降 儲能電流 i_L 上昇
充電完畢（穩態）（ $t\geq 5\tau$ ）	有最大的電壓 v_C 充電電流 $i_C=0$ ，**C 視為斷路**	感應電勢 $v_L=0$ ，**L 視為短路** 有最大的儲能電流 i_L
放電開始（瞬間）（ $t=0^+$ ）	有最大的電壓 v_C（與充電穩態時一致） 有最大的放電電流 i_C（方向與充電時相反）	有最大的感應電勢 v_L（極性與充電時相反） 有最大的釋能電流 i_L（與充電穩態時一致）
放電期間（暫態）（ $0<t<5\tau$ ）	電壓 v_C 下降 放電電流 i_C 下降（反方向）	感應電勢 v_L 下降（反方向） 釋能電流 i_L 下降
放電完畢（穩態）（ $t\geq 5\tau$ ）	電壓 $v_C=0$ 放電電流 $i_C=0$	感應電勢 $v_L=0$ 釋能電流 $i_L=0$

範例 7-8

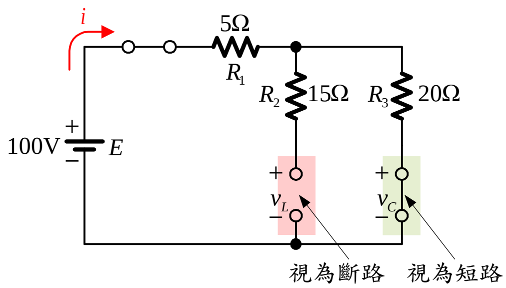
如下圖所示電路，試求

(1) 當開關 S 閉合瞬間時，i 、v_C 、v_L 各為多少？

(2) 當開關 S 閉合後，電路已達穩態時，i 、v_C 、v_L 各為多少？



【解】(1) S 閉合瞬間，L 視為斷路，C 視為短路，其等效電路如右圖所示：

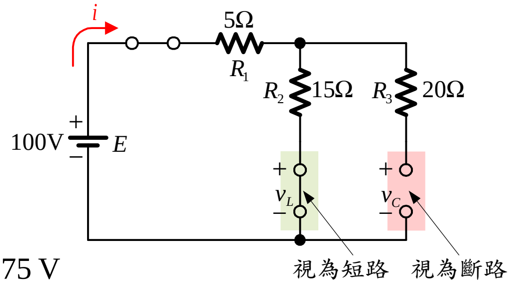


$$i = \frac{E}{R_1+R_3} = \frac{100}{5+20} = 4\ \text{A}$$

$$v_C = 0\ \text{V}$$

$$v_L = E\frac{R_3}{R_1+R_3} = 100\times\frac{20}{5+20} = 80\ \text{V}$$

(2) S閉合達穩態時，L視為短路，C視為斷路，其等效電路如右圖所示：



$$i = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{100}{5+15} = 5\ \text{A}$$

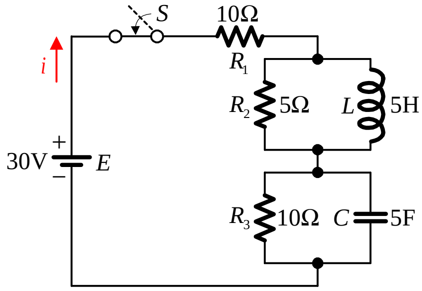
$$v_C = E\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 100 \times \frac{15}{5+15} = 75\ \text{V}$$

$$v_L = 0\ \text{V}$$

馬上練習 如右圖所示電路，試求

(1) 當開關 S 閉合瞬間時，i、v_C、v_L 各為多少？

(2) 當開關 S 閉合後，電路已達穩態時，i、v_C、v_L 各為多少？



【答】(1) $i = 2$ A，$v_C = 0$ V，$v_L = 10$ V；

(2) $i = 1.5$ A，$v_C = 15$ V，$v_L = 0$ V。

單元評量

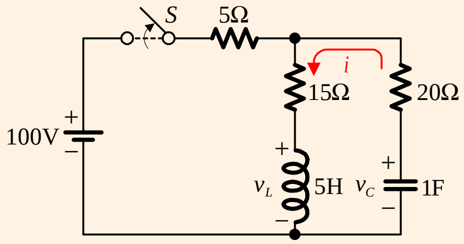
1. 在分析 L-C 電路的暫態時，充電瞬間的電容器視為 ______，電容器電壓 v_C 為 ______，充電電流 i_C 為 ______。

2. 在分析 L-C 電路的暫態時，充電完畢的電容器視為 ______，電容器電壓 v_C 為 ______，充電電流 i_C 為 ______。

3. 在分析 L-C 電路的暫態時，充電瞬間的電感器視為 ______，電感器電壓 v_L 為 ______，儲能電流 i_L 為 ______。

4. 在分析 L-C 電路的暫態時，充電完畢的電感器視為 ______，電感器電壓 v_L 為 ______，儲能電流 i_L 為 ______。

5. 如右圖所示電路，將開關 S 閉合至穩態後重新打開，則開關 S 打開瞬間時的電流 $i =$ ______ A，電壓 $v_L =$ ______ V。（可參考範例 7-8）



重點摘要

1. R-C 直流暫態電路的時間常數 $\tau = RC$。不論充電或放電，相同的 R-C 電路有相同的時間常數，時間常數愈大（即 R 與 C 值越大），代表充放電時間愈久。
2. R-C 直流暫態電路中，在開關 S 閉合的瞬間（$t=0$），電容器可視為短路；充電時間達到 5 倍時間常數時（$t=5\tau=5RC$），電容器可視為斷路。
3. R-C 串聯電路的直流暫態：

充電時的公式		放電時的公式	
$v_C(t)=E(1-e^{-\frac{t}{RC}})$ $v_R(t)=E\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ $i(t)=\frac{E}{R}\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$		$v_C(t)=E\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ $v_R(t)=-E\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ $i(t)=-\frac{E}{R}\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$	
充電時的狀態		放電時的狀態	
充電開始（瞬間）（$t=0^+$）	$v_C=0$（C 視為短路） $i=\frac{E}{R}$（為最大值）	放電開始（瞬間）（$t=0^+$）	$v_C=E$（與充電穩態時一致） $i=-\frac{E}{R}$（方向與充電時相反）
充電期間（暫態）（$0<t<5\tau$）	v_C 上昇（$0\to E$） i 下降（$\frac{E}{R}\to 0$）	放電期間（暫態）（$0<t<5\tau$）	v_C 下降（$E\to 0$） $\lvert i\rvert$ 下降（$-\frac{E}{R}\to 0$）
充電完畢（穩態）（$t\ge 5\tau$）	$v_C=E$（C 視為斷路） $i=0$	放電完畢（穩態）（$t\ge 5\tau$）	$v_C=0$ $i=0$

4. t 與 $e^{-\frac{t}{\tau}}$ 之對照表：

t	0	1τ	2τ	3τ	4τ	5τ
$e^{-\frac{t}{\tau}}$	$e^0=1.0$	$e^{-1}\cong 0.368$	$e^{-2}\cong 0.135$	$e^{-3}\cong 0.050$	$e^{-4}\cong 0.018$	$e^{-5}\cong 0.007\approx 0$

5. R-L 直流暫態電路的時間常數 $\tau=\dfrac{L}{R}$。不論充電或放電，相同的 R-L 電路有相同的時間常數，時間常數愈大（即 L 愈大、R 愈小），代表充放電時間愈久。

6. R-L 直流暫態電路中，在開關 S 閉合的瞬間（$t=0$），電感器可視為斷路；充電時間達到 5 倍時間常數時（$t=5\tau=5\dfrac{L}{R}$），電感器可視為短路。

7. R-L 串聯電路的直流暫態：

充電時的公式		放電時的公式	
$v_L(t)=E\cdot e^{-\frac{t}{L/R}}$ $v_R(t)=E(1-e^{-\frac{t}{L/R}})$ $i(t)=\dfrac{E}{R}(1-e^{-\frac{t}{L/R}})$		$v_L(t)=-E\cdot e^{-\frac{t}{L/R}}$ $v_R(t)=E\cdot e^{-\frac{t}{L/R}}$ $i(t)=\dfrac{E}{R}\cdot e^{-\frac{t}{L/R}}$	
充電時的狀態		放電時的狀態	
充電開始（瞬間） （$t=0^+$）	$v_L=E$（**L 視為斷路**） $i=0$	放電開始（瞬間） （$t=0^+$）	$v_L=-E$ （極性與充電時相反） $i=\dfrac{E}{R}$ （與充電穩態時一致）
充電期間（暫態） （$0<t<5\tau$）	v_L 下降（$E\to 0$） i 上昇（$0\to\dfrac{E}{R}$）	放電期間（暫態） （$0<t<5\tau$）	$\lvert v_L\rvert$ 下降（$-E\to 0$） i 下降（$\dfrac{E}{R}\to 0$）
充電完畢（穩態） （$t\geq 5\tau$）	$v_L=0$（**L 視為短路**） $i=\dfrac{E}{R}$（為最大值）	放電完畢（穩態） （$t\geq 5\tau$）	$v_L=0$ $i=0$

學後評量

一、選擇題

(　)1. 當電容器充電的瞬間，其兩端電壓 (A)不會立即改變 (B)會立即改變 (C)恆為外加電壓的 0.632 倍 (D)恆為外加電壓的 0.368 倍

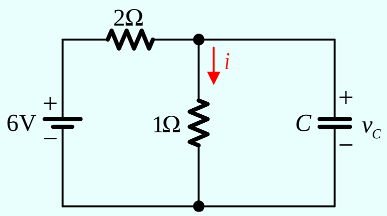
(　)2. R-C 串聯電路由暫態達到穩態，需經歷多少個時間常數？ (A)5 個 (B)4 個 (C)3 個 (D)2 個

(　)3. 直流電源 E 加於一個 R-C 串聯電路，則所產生的暫態電流為
(A) $E(1+e^{-\frac{t}{RC}})$ (B) $E(1-e^{-\frac{t}{RC}})$ (C) $\frac{E}{R}$ (D) $\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$

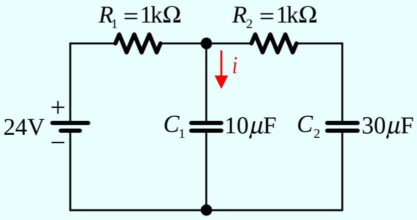
(　)4. R-C 串聯電路中，電容器充電的過程所產生的電流，其流動的方向與放電過程的電流流動方向 (A)相同 (B)相反 (C)相差 90 度 (D)相差 45 度

(　)5. R-C 串聯電路中，當時間經過一個時間常數 RC 後，電容器電壓達到穩定電路時電容電壓的 (A)63.2% (B)36.8% (C)13.5% (D)86.5%

(　)6. 如圖(1)電路中，下列何者敘述正確？ (A) v_C 穩態值為 6 伏特 (B) v_C 穩態值為 2 伏特 (C) i 穩態值為 0 安培 (D)電容在穩態時儲存的能量為零



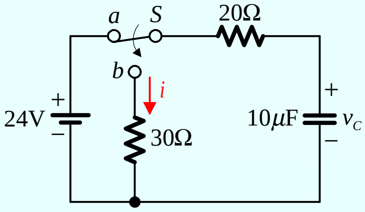
圖(1)



圖(2)

(　)7. 如圖(2)所示電路，當電路達到穩態時，各元件的電壓為
(A) $v_{R1}=24\text{V}$ (B) $v_{R2}=24\text{V}$ (C) $v_{C2}=0\text{V}$ (D) $v_{C1}=24\text{V}$

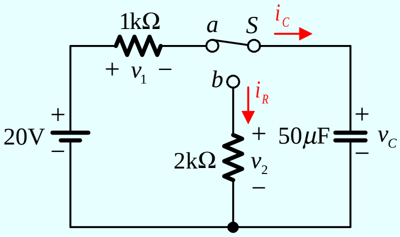
(　)8. 如圖(3)所示電路，當開關 S 已閉合一段很長的時間，於 $t=0$ 秒時，將開關由 a 切換至 b，電路在切換的瞬間，電路電流的大小為 (A)1.2A (B)0.8A (C)0.48A (D)0A



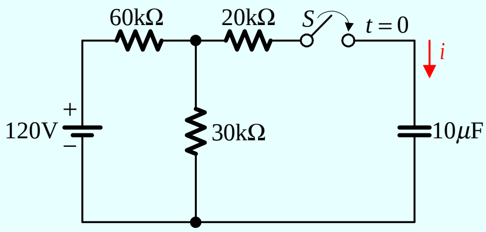
圖(3)

( )9. 續上題，當 $t=5\text{ms}$ 時，電容器上的電壓 v_C 值為 (A)24V (B)15.2V (C)8.8V (D)0V

( )10. 如圖(4)所示電路，當開關 S 置於位置 a 的時間已超過 5 個時間常數，此時電容電流值與電容器所儲存的能量分別為多少？ (A)20mA、0.001J (B)20mA、0.02J (C)0mA、0.01J (D)0mA、0.001J



圖(4)



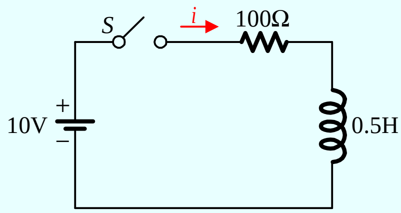
圖(5)

( )11. 如圖(5)所示電路，當開關 S 未按下時，電容器兩端的電壓為 0V，若在 $t=0$ 時將開關 S 按下，則電路在 $t=0.4$ 秒時，則電流 i 為

(A)$1-e^{-1}$mA (B)e^{-1}mA (C)$\dfrac{1-e^{-1}}{2}$mA (D)$\dfrac{e^{-1}}{2}$mA

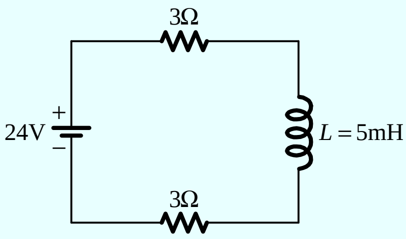
( )12. 如圖(6)所示電路，R-L 電路的時間常數為 (A)5ms (B)20ms (C)50ms (D)200ms

( )13. 如圖(6)所示電路，當開關 S 按下的瞬間，則電路的電流 i 為 (A)0.1A (B)5A (C)20A (D)0A

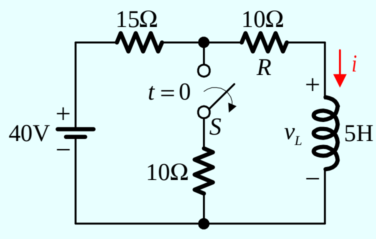


圖(6)

( )14. 如圖(7)所示電路，當電流值變為穩定時，電感器儲存的能量為 (A)0.01焦耳 (B)0.02焦耳 (C)0.03焦耳 (D)0.04焦耳



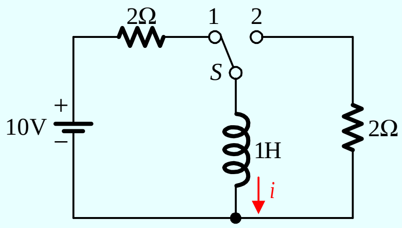
圖(7)



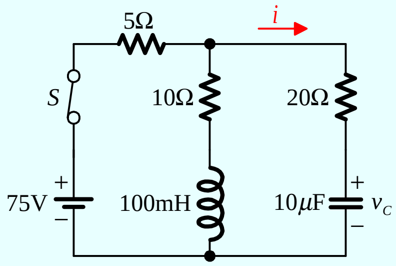
圖(8)

( )15. 如圖(8)所示電路，電路為穩定狀態，若在 $t=0$ 時將開關 S 拉起，則電路在 $t=0.2$ 秒時，電感器兩端的電壓 v_L 為 (A)$13e^{-1}$V (B)$15e^{-1}$V (C)$15e^{-2}$V (D)$13e^{-2}$V

(　)16. 如圖(9)所示電路，開關 S 在位置 1 經過一段很長的時間，將開關 S 由位置 1 切換至位置 2 後，則電流 i 的變化為
(A) $5e^{-2t}$ A　(B) 0 A　(C) $5e^{-\frac{1}{2}t}$ A　(D) $5e^{-t}$ A



圖(9)

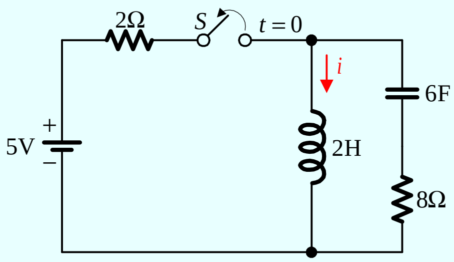


圖(10)

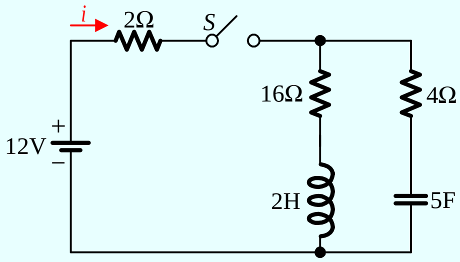
※(　)17. 如圖(10)所示電路，當電路達穩態時，電容器上的電壓 v_C 值為 (A) 0 V (B)25V (C)50V (D)75V

※(　)18. 承上題，開關 S 按下經過一段時間，當電路達穩定狀態後，將 S 切斷，電路在切斷的瞬間，電流 i 為 (A)0A (B)3A (C)−5A (D)5A

※(　)19. 如圖(11)所示電路，開關 S 按下後，經過一段很長的時間，若在 $t = 0$ 時將開關 S 切斷，則電路在切斷的瞬間，電感器上流過的電流 i 為 (A)1.2A (B)0.8A (C)0.48A (D)2.5A



圖(11)

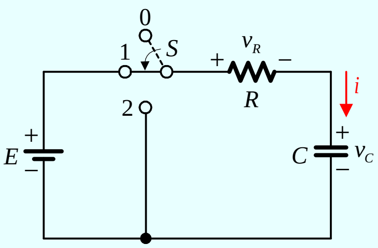


圖(12)

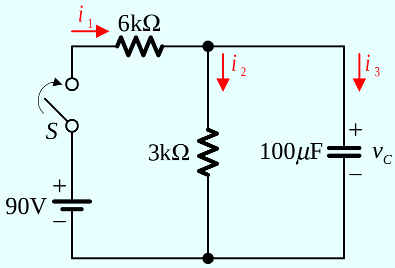
※(　)20. 如圖(12)所示電路，當開關 S 按下的瞬間，則電路的電流 i 為 (A)2.5A (B)2A (C)1.5A (D)1A

二、計算題

1. 如圖(13)所示電路，設 $E=100\text{V}$ ， $R=20\text{k}\Omega$ ， $C=50\mu\text{F}$ ，若將開關 S 由位置 "0" 切換至 "1"，試求 (1) $t=0$ (2) $t=1\text{s}$ (3) $t\geq 5\tau$ 時之 v_C 、 v_R 、 i 各為多少？



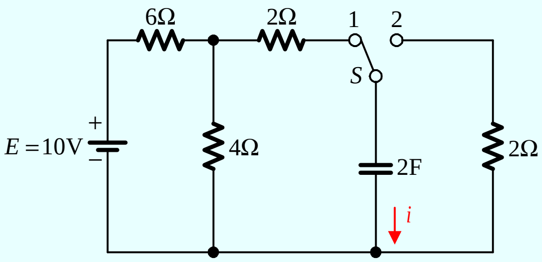
圖(13)



圖(14)

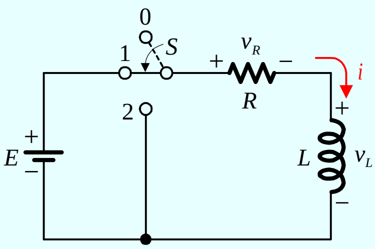
2. 如圖(14)所示電路，當開關 S 按下的瞬間，試求電容器電壓 v_C 與電流 i_1 各為多少？

3. 如圖(15)所示電路，當開關 S 由 1 的位置切換至 2 的瞬間，試求電流 i 為多少？



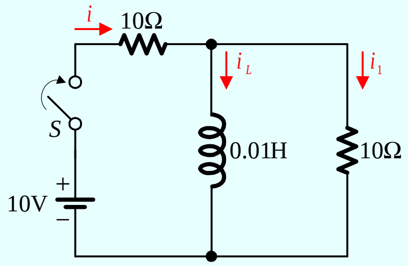
圖(15)

4. 如圖(16)所示電路，設 $E=100\text{V}$ ， $R=20\Omega$ ， $L=50\text{mH}$ ，若將開關 S 由位置 "0" 切換至 "1"，試求 (1) $t=0$ (2) $t=10\text{ms}$ (3) $t\geq 5\tau$ 時之 v_L 、 v_R 、 i 各為多少？



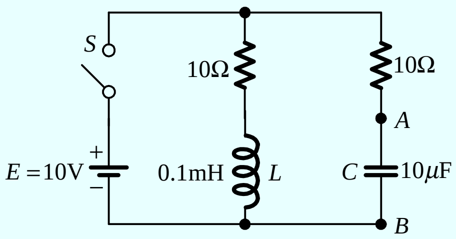
圖(16)

5.　如圖(17)所示電路，當開關 S 按下時，瞬間電流 i_1 為多少？又經過一段很長的時間後，電流 i_L 為多少？



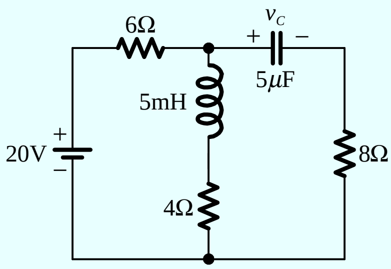
圖(17)

※6.　如圖(18)所示電路，當開關 S 關上，經過一段很長的時間後，試求 A 、 B 點間的電壓 v_{AB} 為多少？



圖(18)

※7.　如圖(19)所示電路，當電流達到穩定時，試求電容器電壓 V_C 為多少？



圖(19)

NOTE...