CH 8

交流電

電力的供應與我們的日常生活有著密不可分的關係，目前電力公司供應的工業用電或家庭用電，都是以交流電來作為電力傳輸的方式。雖然直流電可以提供穩定的功率傳輸，但在許多情況下，以交流電的方式傳輸，可以讓電力作更有效的利用。在本章中，將介紹交流電的產生方式以及電力系統的基本概念，另外也會說明交流波形的基本特性、與用來描述交流波形的向量運算，為後面各章交流電路之學習預作準備。

學習目標

- 認識交流電力系統的概念
- 瞭解各種交流波形的特性與相關基本概念
- 熟悉向量及複數的基本運算

本章目錄

8-1　電力系統概念

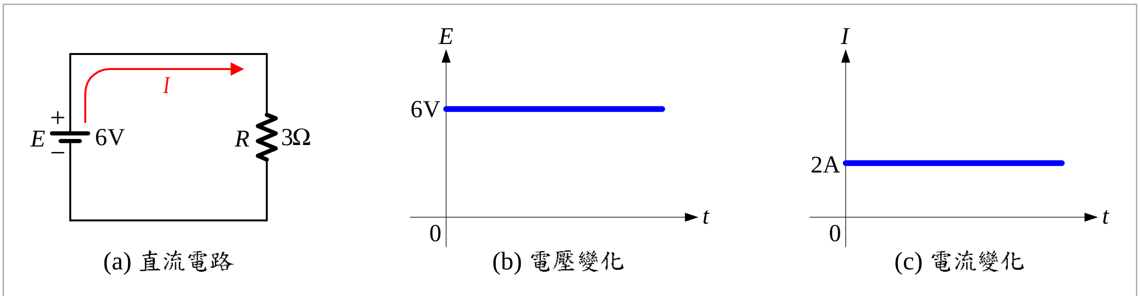
我們日常生活中主要的電力供應來源，是來自核能、火力、水力…等發電廠，但不論何種型式所產生的電能，都需要在很長距離間、經由變電所、輸配電線路，才能將電力傳送到工業或家庭用戶中。因此，相關的這些電力系統也是基本電學中一個重要的課題。本節將由直流與交流的基本概念，引入如何產生交流電，最後說明交流電在電力系統中的重要性。

8-1.1　直流與交流

目前我們所討論的各種基本電路，其電源僅止於如蓄電池所供給的直流電壓，它所提供的電壓（或電流）不會因時間的改變而變化，是一種固定的電壓源，稱爲**直流電**（**D**irect **C**urrent，簡稱 DC）。但用於工業的大量用電，與供給一般家庭的電源，則是另一種型式的電壓源，其所供給的電壓（或電流）會隨時間而改變大小與極性，當電壓極性改變，電流方向也將改變，這便是所謂的**交流電**（**A**lternating **C**urrent，簡稱 AC）。

直流

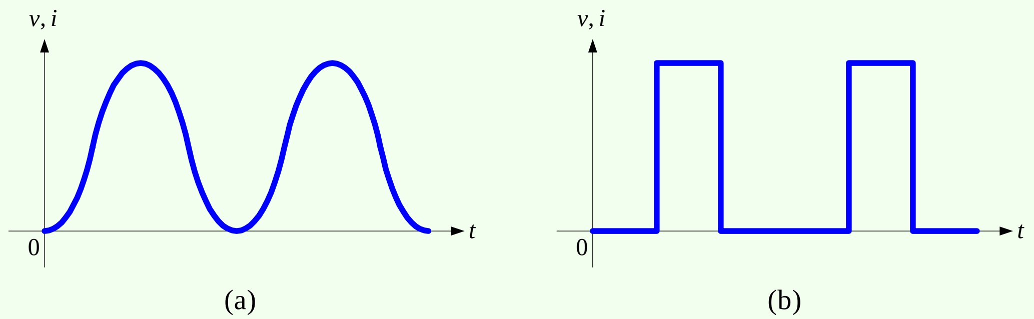
直流電源提供的電壓不會因時間的變化而改變極性，電路中的電流也只有單一方向。圖 8-1 所示即爲一穩定直流的電路，電壓或電流的大小與方向不隨時間而變化，一般是由電源供應器、乾電池或蓄電池等提供其電源，通常應用於手機、手錶、隨身聽…等多數爲可帶著走之電器。



▲ 圖 8-1　直流電路之電壓與電流　電壓與電流維持固定的大小及方向。

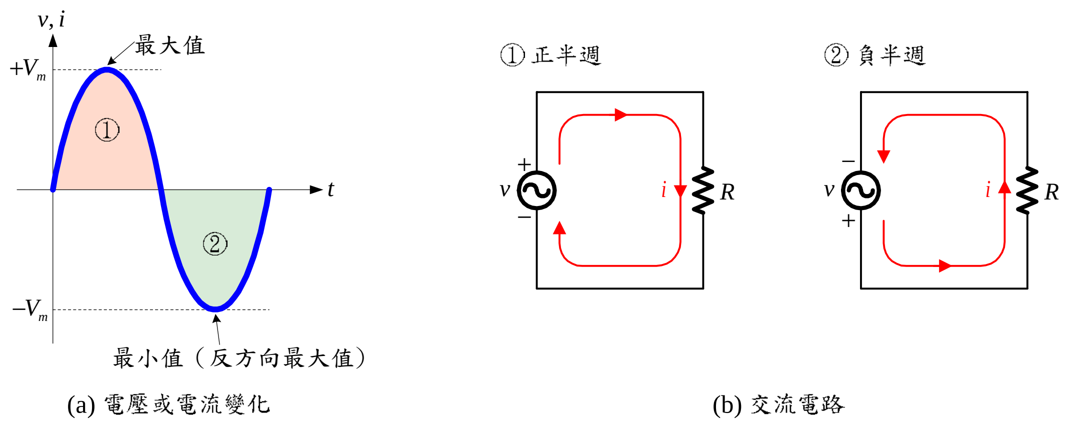
※知識充電

脈動直流（pulsating direct current）是指電壓或電流的大小會隨著時間的變化而改變，但電壓的極性或電流的方向則不會隨時間而改變，即電路中的電流永遠保持固定的方向流動，如下圖所示。



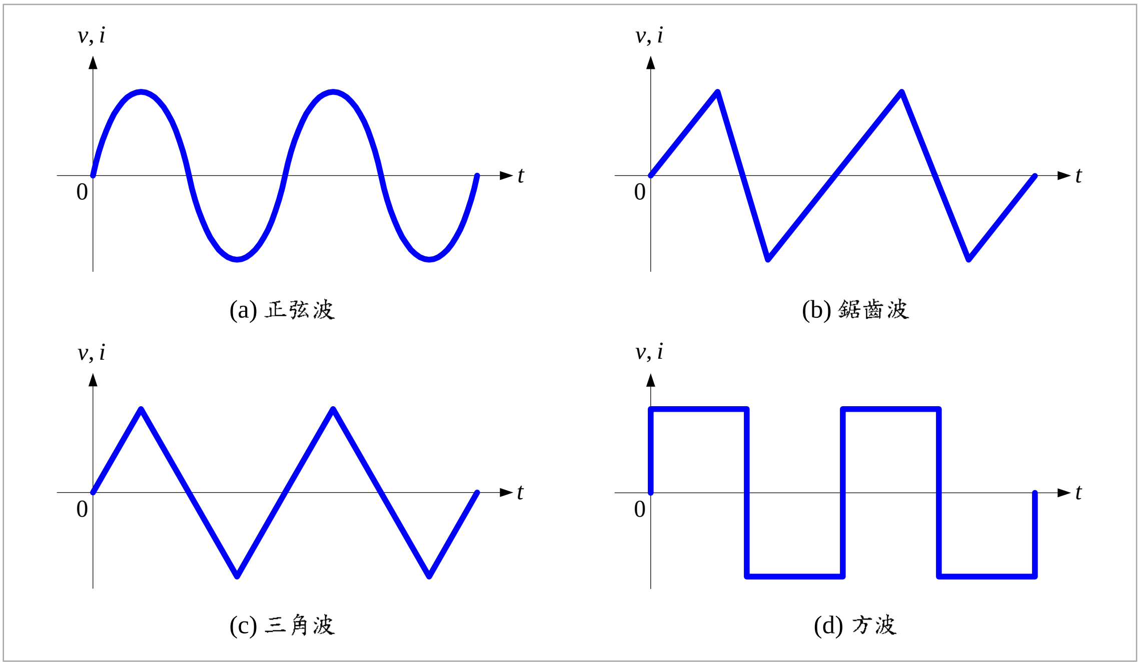
交流

交流電源提供的電壓或電流會隨時間的變化而改變它的大小與方向。如圖 8-2 所示，當交流電源提供的電壓由 0 漸增至一個最大值 V_m，然後再下降至 0，在這個過程中，電流循一個方向流動；當電壓的極性改變，電壓值由 0 往負的方向漸減（反方向漸增），至一個最小值 $-V_m$（反方向最大值）後再回到 0 值，此過程電流也往反方向改變。



▲ 圖 8-2　交流電路之電壓與電流　電壓與電流會改變大小及方向。

圖 8-3 所示為一般常見的交流電波形，其中又以**正弦波**（sinusoidal wave, sine wave）的波形最為基本，因其數值大小的變化是呈現正弦函數變化，故以此得名，在基本電路學中是最常被拿來討論以及應用的交流電波形。



▲ 圖 8-3　各種交流電波形

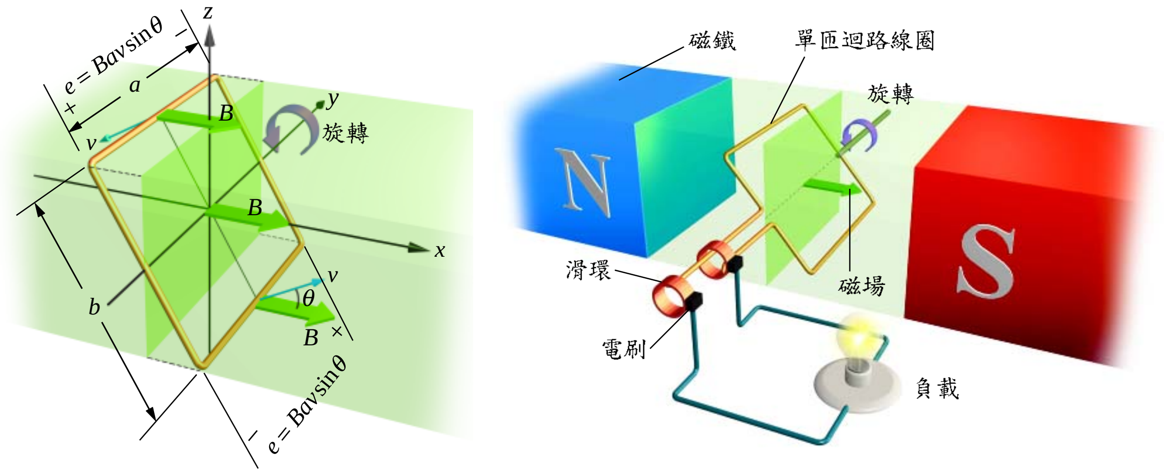
8-1.2　交流電的產生

我們在上冊第六章中曾經討論過：**根據電磁感應的原理，當導線在磁場中運動（切割磁力線）時，將會在導線兩端產生一感應電動勢**。交流發電機便是利用這項原理，把一線圈迴路置於均勻的磁場中旋轉，如圖 8-4 所示，在迴路不斷旋轉的過程中，將持續產生不同大小及方向的感應電動勢。由圖中可看出長度 a 之兩段導線所感應的電動勢為同方向串聯，而長度 b 之兩段導線則沒有貢獻。根據(6-5-3)式之感應電動勢公式：$e = B\ell v\sin\theta$，若迴路的線圈有 N 匝，則產生的感應電動勢為：

Σ 重要公式

$$e = 2NB\ell v\sin\theta \quad 〔\mathrm{V}, 伏特〕$$

e：感應電動勢，單位為伏特（V）
B：磁通密度，單位為特斯拉（T）或韋伯／平方公尺（Wb/m^2）
ℓ：導體在磁場中的有效長度，單位為公尺（m）
θ：導體運動方向與磁力線方向的夾角
$v\sin\theta$：導體在磁場中垂直切割磁力線的有效速度，單位為公尺／秒（m/s）



(a) 感應原理　　(b) 構造

▲ **圖 8-4　交流發電機**　線圈在磁場中運動時，會感應出電動勢。

對於交流發電機中之線圈迴路以均勻速度旋轉一週所造成的感應電動勢，我們以圖 8-5 說明如下：

說明：a 段導線運動方向與磁場 B 平行，$\theta = 0°$
$\therefore$ 感應電動勢 $e = 2Bav\sin 0° = 0$

(a) 初始位置（$t = 0$ 時）

說明：a段導線運動方向與磁場B垂直，$\theta = 90°$
∴感應電動勢 $e = 2Bav\sin 90° = V_m$

(b) 旋轉90°（t_1時）

說明：a段導線運動方向與磁場B平行，$\theta = 180°$
∴感應電動勢 $e = 2Bav\sin 180° = 0$

(c) 旋轉180°（t_2時）

說明：a段導線運動方向與磁場B垂直，$\theta = 270°$
∴感應電動勢 $e = 2Bav\sin 270° = -V_m$

(d) 旋轉270°（t_3時）

說明：位置回復到初始位置，感應電動勢 e 重新開始循環進行

(e) 旋轉 360°（ 0° ）（ t_4 時）

▲ 圖 8-5　線圈迴路旋轉一週產生的感應電動勢

※知識充電

從另一觀點來看線圈迴路的感應電動勢，當迴路在磁場中旋轉時，實際通過迴路的磁通量不斷變化，如下圖所示。因此根據法拉第電磁感應定律，迴路所產生的感應電動勢為：

$$e = -N\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta(BA\cos\theta)}{\Delta t}$$ 〔V，伏特〕（線圈匝數為 1 匝，故 $N = 1$ ）

(a)　　(b)

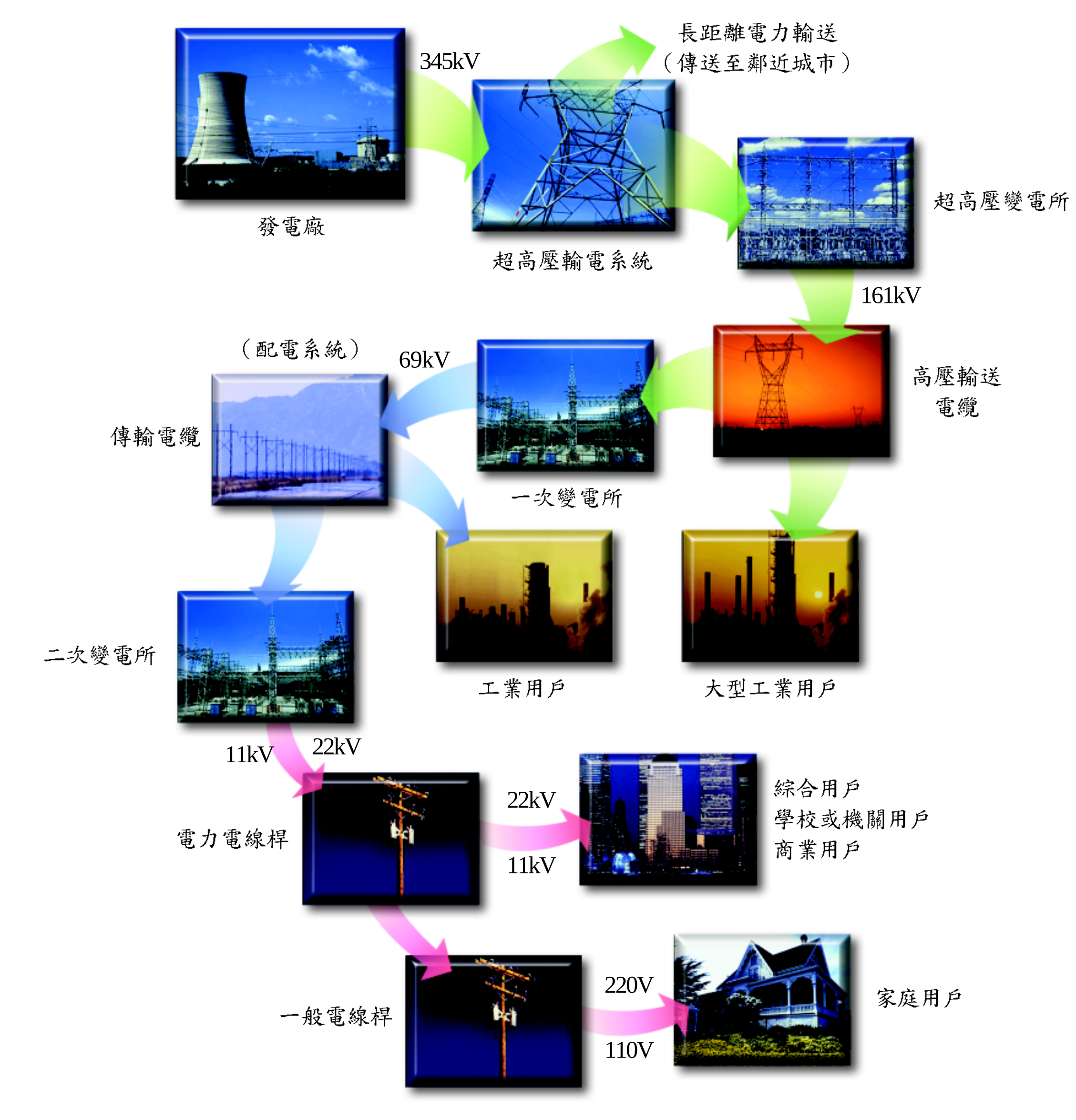
若迴路的線圈有 N 匝，長寬分別為 a 、 b ，且迴路以均勻的速度旋轉，即 $\theta = \omega t$ ，其中 ω 為轉動的角速度（後續章節有更詳盡的介紹），則上式可改寫為：

$$e = -N\frac{\Delta(BA\cos\theta)}{\Delta t} = -NBA\frac{d\cos\omega t}{dt} = NB(ab)\omega\sin\omega t = 2NBav\sin\theta$$

其中， $A = ab$ 為線圈迴路的面積， $v = \omega(\frac{b}{2})$ 為迴路 a 段的轉動速率。

8-1.3 交流電力系統

交流電的應用十分廣泛，電力系統也是以交流電爲主要的傳輸方式，發電廠內的交流發電機產生電能後，以交流電的方式經由輸電線路的傳送，提供工業及家庭用戶所需的用電，作爲各種電器設備的電力來源。如圖 8-6 所示，電力公司供電系統的基本架構是將發電廠產生的電壓經變壓器升壓後，以傳輸線經過長距離傳送至工廠或家庭用戶中。



▲ **圖 8-6 電力傳輸系統示意圖** 利用交流電，可輕易轉換成各種電壓，以供應各種類型的用戶。

發電廠所供應的電能，絕大多數以交流電的方式傳輸，以功率與成本的觀點比較直流與交流的傳輸，交流電具有以下優點：

- **大幅降低發電成本，提高經濟效益：** 交流電具有高傳輸效率，裝置高速率運轉的大型交流發電機，所產生的電能能傳輸到廣大的區域範圍，具有經濟效益；如果要以直流電傳輸，必須製造高轉速的直流發電機，不但成本較高，在整流的問題上也有實際的困難。
- **效率高，保養費用低：** 在相同的速度運轉條件下，交流發電機的效率比直流發電機的效率高，而且在維修費用上也較低廉。
- **電壓調整容易：** 發電廠產生的交流電，可以很容易地升高電壓以降低輸送電力時的電流（$\because P = IV$），如此則可降低輸電線路的能量損耗（$\because P_{loss} = I^2 R_{wire}$，$\therefore I\downarrow$ 則 $P_{loss}\downarrow$）。傳輸到各配電系統後，可再依用戶需要調整電壓，不但可節省導線的成本（輸配低電流可用線徑較小的導線），功率的損失也較低。

但由於大部分的電子電路與電子裝置，都需要供給直流電才能正常運作，因此電力公司提供的交流電，還需經過電源供應器將交流電轉換為直流電之後才能使用，這是交流電的缺點。

單元評量

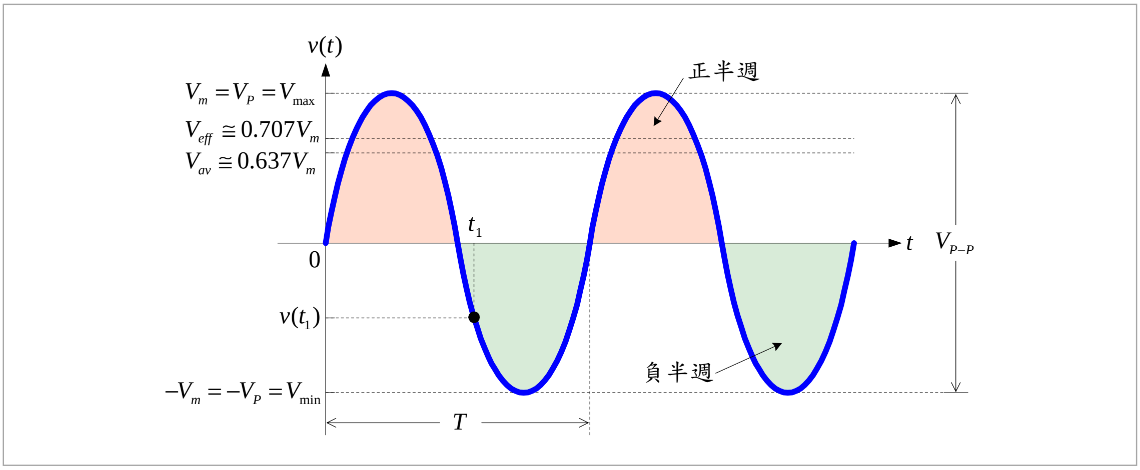
1. 電流的大小會隨時間的變化而改變，但流動方向卻能保持一定的是 ＿＿＿＿＿＿。
2. 電流的大小與流動方向不會隨時間的變化而改變的是 ＿＿＿＿＿＿＿。
3. 電流的大小與流動方向會隨時間的變化而改變的是 ＿＿＿＿＿＿＿＿。
4. 交流發電機中，感應電動勢達到負電壓的最大值時，迴路的位置與磁場呈幾度角？＿＿＿＿＿＿＿。
5. 在長距離的輸電過程中，以何種形式的電力傳送較佳？＿＿＿＿＿＿。

8-2 波形

交流電的波形有很多種型式，常見的有正弦波、方波、三角波和鋸齒波等。由前節中的說明可知，交流發電機所產生的電壓即爲正弦波的波形，且正弦波也是各種交流波形的基本波形，任何交流波形都可視爲是由許多不同型式的正弦波所組成。所以在本節中將主要說明正弦波之各種數值的表示方法，並簡單介紹其它幾種波形。

8-2.1 正弦波

圖 8-7 所示爲一正弦波的圖示，其中 T 爲正弦波形在正、負交替變化下循環一週所需的時間，稱爲**週期**，而有關波形的各項特性包括**瞬間值**、**峰對峰值**、**平均值**、**有效值**的意義說明如下：



▲ 圖 8-7　正弦波的各項數值

瞬間值

正弦波形的電壓或電流值是隨時間的變化而改變大小，所以在每一瞬間都對應某一個數值，稱此數值爲電壓或電流的**瞬間值**或**瞬時值**（instantaneous value），以 $v(t)$ 及 $i(t)$ 表示。例如： $v(3s) = 10\text{ V}$ ，表示時間在 3 秒時的瞬間電壓爲 10V；在圖 8-7 中，時間 t_1 時的瞬間值即爲 $v(t_1)$ 。

峰值與峰對峰值

在正弦波形中，正方向的最大瞬間值就稱爲**最大值**（maximum value，記爲 V_m 或 I_m）或**正峰值**（positive peak value，記爲 V_P 或 I_P）；負方向的最大瞬間值就稱爲**最小值**（minimum value，記爲 $-V_m$ 或 $-I_m$）或**負峰值**（negative peak value，記爲 $-V_P$ 或 $-I_P$）。正峰值與負峰值間的差就稱爲**峰對峰值**（peak-to-peak value，記爲 V_{P-P} 或 I_{P-P}），其數值大小爲峰值的兩倍。

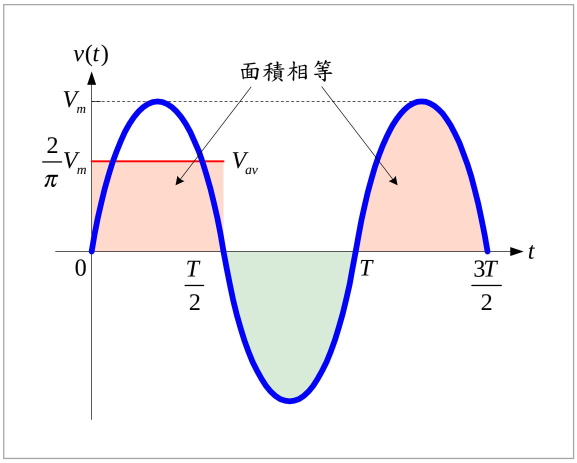
Σ 重要公式

$$V_{P-P} = V_m - (-V_m) = 2V_m = 2V_P \quad \text{〔V, 伏特〕} \quad (8\text{-}2\text{-}1a)$$

$$I_{P-P} = I_m - (-I_m) = 2I_m = 2I_P \quad \text{〔A, 安培〕} \quad (8\text{-}2\text{-}1b)$$

平均值

平均值（average value，記爲 V_{av} 或 I_{av}）是指將波形中之各瞬時值相加取總和後再求平均。對於正弦波而言，其形狀是一個對稱波形，正、負半週的波形會相互抵銷，因此正弦波在循環一個週期內的平均值會等於零。在習慣上，我們稱正弦波的平均值是指正半週之單一半週的平均值而言，如圖 8-8 所示，其大小爲：



▲ 圖 8-8　正弦波的平均值圖示

Σ 重要公式

$$V_{av} = \frac{2}{\pi}V_m \cong 0.637V_m \quad \text{〔V, 伏特〕} \quad (8\text{-}2\text{-}2a)$$

$$I_{av} = \frac{2}{\pi}I_m \cong 0.637I_m \quad \text{〔A, 安培〕} \quad (8\text{-}2\text{-}2b)$$

註：習慣上對於一對稱波形而言，求平均值時只取其正半週；而在非對稱波形時，則應該要取全週。

※知識充電

就數學上而言，一個波形的平均值是指在某個時間區段內之波形曲線所涵蓋的面積總和除以此區段時間，即（對稱）正弦波的平均值（求正半週）為：

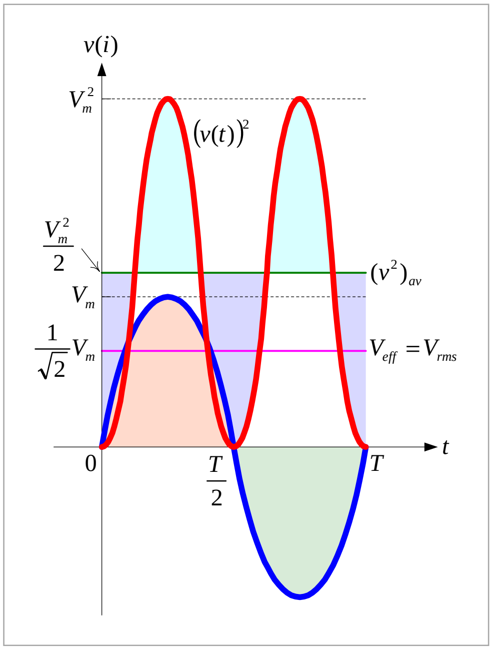
$$V_{av} = \frac{\text{正半週波形所涵蓋的面積}}{\text{正半週波形所經歷的時間}} = \frac{\int_0^{T/2} V_m \sin\omega t\, dt}{T/2} = \frac{2}{\pi} V_m$$

註：正弦波的數學表示為 $v(t) = V_m \sin\theta = V_m \sin\omega t$ 。

在量測上，**以直流電表所量測的電壓或電流的大小，就是指電壓或電流的平均值**，因此平均值也稱爲直流值（記爲 V_{dc} 或 I_{dc} ）。所以對於正、負波形對稱的交流電（正弦波、方波…）而言，使用直流電表量測的結果，其數值會爲零。

有效值

當一個交流電通過電阻 R 所產生的熱效應，與某一直流電通過相同電阻所產生的熱效應相等時，我們稱這個直流電大小爲此交流電的**有效值**（effective value，記爲 V_{eff} 或 I_{eff} 、V 或 I ）。計算的方式爲將波形中之各瞬時值平方後相加，然後取其平均值，最後再開根號，故有效值也稱爲**均方根值**（root-mean-square value，記爲 V_{rms} 或 I_{rms} ），如圖 8-9 所示，其大小爲：



▲ 圖 8-9 正弦波的有效值圖示

Σ 重要公式

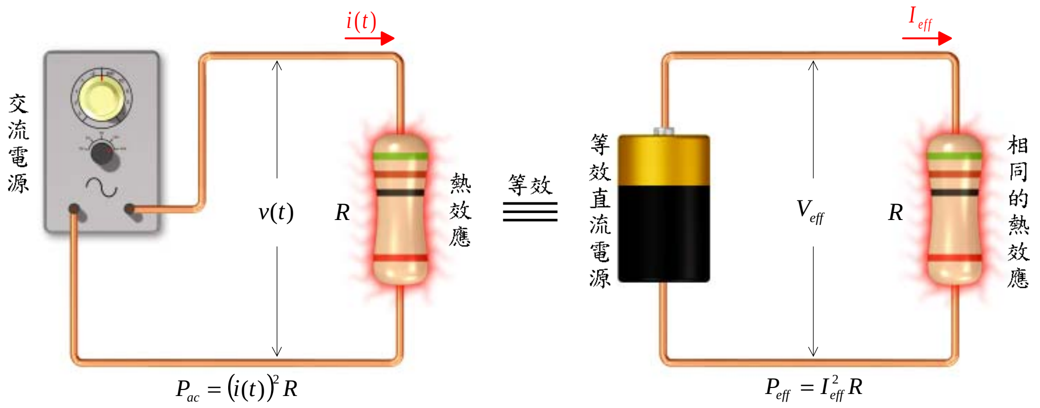
$$V = V_{eff} = V_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_m \cong 0.707 V_m \quad \text{〔V, 伏特〕} \quad (8\text{-}2\text{-}3a)$$

$$I = I_{eff} = I_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_m \cong 0.707 I_m \quad \text{〔A, 安培〕} \quad (8\text{-}2\text{-}3b)$$

一般利用交流電表量測交流電的電壓或電流值時，所測得的值即是其有效值。而平常所稱之交流電的大小，也是指其有效值而言，例如：電力公司供應的電源爲 110 伏特，即是指提供的交流電壓爲 $V = V_{eff} = V_{rms} = 110\,\mathrm{V}$。

※知識充電

交流電的有效值與其產生的熱效應有關，我們以下圖作說明：



直流電產生的熱能：$W_{eff} = P_{eff}t = I_{eff}^2 RT$　（一個週期內）

交流電產生的熱能：$W_{ac} = \int_0^T (i(t))^2 R\,dt = R\int_0^T (i(t))^2\,dt$

兩者等效 ⇒ $I_{eff} = \sqrt{\dfrac{\int_0^T (i(t))^2\,dt}{T}}$　（均方根值）

方

根

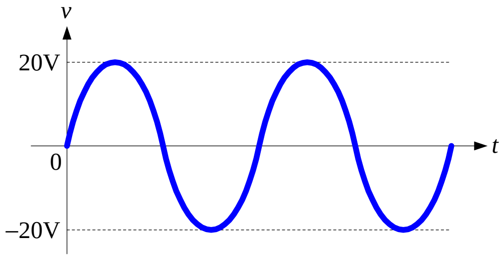
均

對於一正弦波而言，其有效值為：

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{\text{一週期之波形函數的平方曲線所涵蓋的面積}}{\text{波形循環一週所經歷的時間}}} = \sqrt{\frac{\int_0^T (V_m \sin\omega t)^2\,dt}{T}} = \frac{1}{\sqrt{2}}V_m$$

範例 8-1

如右圖所示之正弦波電壓，試求波形之 (1)最大值 V_{max} (2)最小值 V_{min} (3)峰對峰值 V_{P-P} (4)平均值 V_{av} (5)有效值 V_{eff} 各為多少？



【解】(1) $V_{max} = V_m = 20\text{ V}$

(2) $V_{min} = -V_m = -20\text{ V}$

(3) $V_{P-P} = 2V_m = 2\times 20 = 40\text{ V}$

(4) $V_{av} = \dfrac{2}{\pi}V_m \cong 0.637V_m = 0.637\times 20 = 12.74\text{ V}$

(5) $V_{eff} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}V_m \cong 0.707V_m = 0.707\times 20 = 14.14\text{ V}$

範例 8-2

電力公司提供至住家的交流電，經交流電表測量為 110V，試求此電壓之 (1)最大值 V_m (2)均方根值 V_{rms} (3)平均值 V_{av} 各為多少？

【解】電力公司提供之交流電壓為 110V，指的是電壓有效值，即

$$V = V_{eff} = V_{rms} = 110\text{ V} = \frac{1}{\sqrt{2}}V_m$$

(1) $V_m = \sqrt{2}\times 110 \cong 1.414\times 110 = 155.54\text{ V}$

(2) $V_{rms} = V_{eff} = 110\text{ V}$

(3) $V_{av} = \dfrac{2}{\pi}V_m \cong 0.637V_m = 0.637\times 155.54 \cong 99.08\text{ V}$

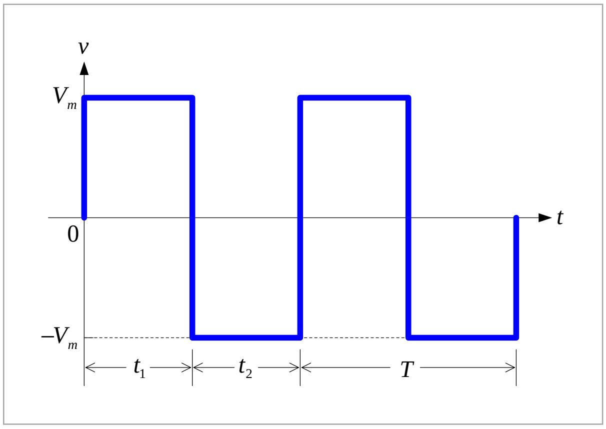
馬上練習 有一正弦波交流電源，若其峰對峰值 $V_{P-P} = 100\text{ V}$，試求此電壓之最大值 V_m、平均值 V_{av}、有效值 V_{eff} 各為多少？

【答】$V_m = 50\text{ V}$，$V_{av} \cong 31.85\text{ V}$，$V_{eff} \cong 35.35\text{ V}$。

8-2.2　方波、脈波、三角波與鋸齒波

方波

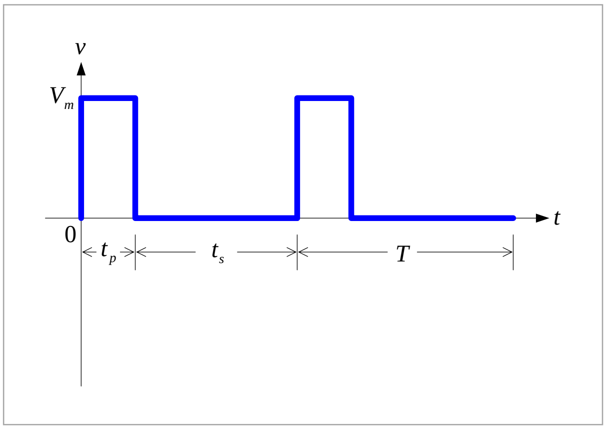
　　方波（square wave）是工業上常用的訊號，圖 8-10 為一個典型的方波波形。在一個週期內，波形有正負兩個半週的電位變化，而且兩個半週的時間相等（$t_1 = t_2$）。方波的電壓變化發生在一瞬間，急驟上升而形成的電壓波形稱為**前緣**（leading edge）；急驟下降的電壓波形稱為**後緣**（trailing edge）。理想方波的前緣和後緣的形狀都為垂直直線。



▲ 圖 8-10　方波圖示

脈波

　　脈波（pulse）是一種單極性的波形。若脈波的電壓為正值，這樣的脈波稱為正極性脈波；反之，若脈波的電壓為負值，就稱為負極性脈波。圖 8-11 所示為一理想的正極性脈波，圖中脈波有電壓產生的一段時間，稱為**脈波寬度**（pulse duration 或 pulse width，記為 t_p）；兩脈波間無電壓值的一段時間稱為**空白寬度**（space duration，記為 t_s）。



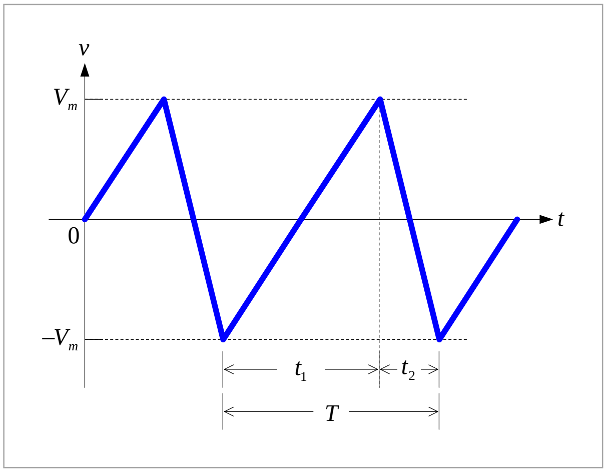
▲ 圖 8-11　脈波圖示

鋸齒波

如圖 8-12 所示，波的形狀如鋸齒狀，我們稱這樣的波形為**鋸齒波**（sawtooth wave）。

當電壓由最小值隨時間沿一定比例上升至最大值的過程稱為**掃描時間**，如圖中的 t_1 時間；當電壓再由最大值隨時間沿另一個比例下降至最小值的過程稱為**返馳時間**，如圖中的 t_2 時間。

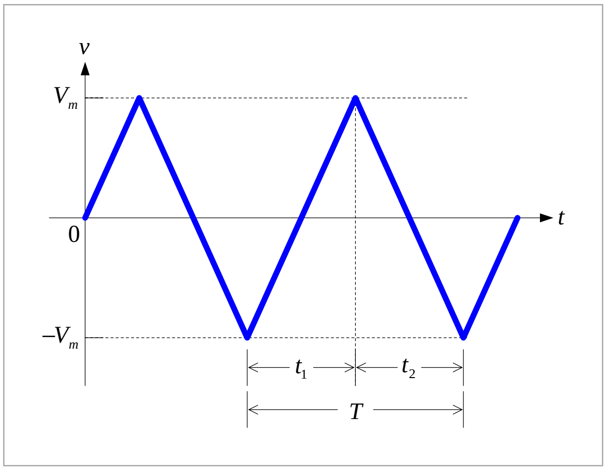
如此，電壓經歷一個掃描時間上升至最大值，再經一個返馳時間下降至最小值，而完成一個循環。



▲ 圖 8-12　鋸齒波圖示

三角波

三角波（triangular wave）可以說是鋸齒波的一個特殊情況，當掃描時間與返馳時間相等（$t_1 = t_2$）時，鋸齒波的波形將呈現一個等腰三角形，我們稱這樣的波形為三角波，如圖 8-13 所示。

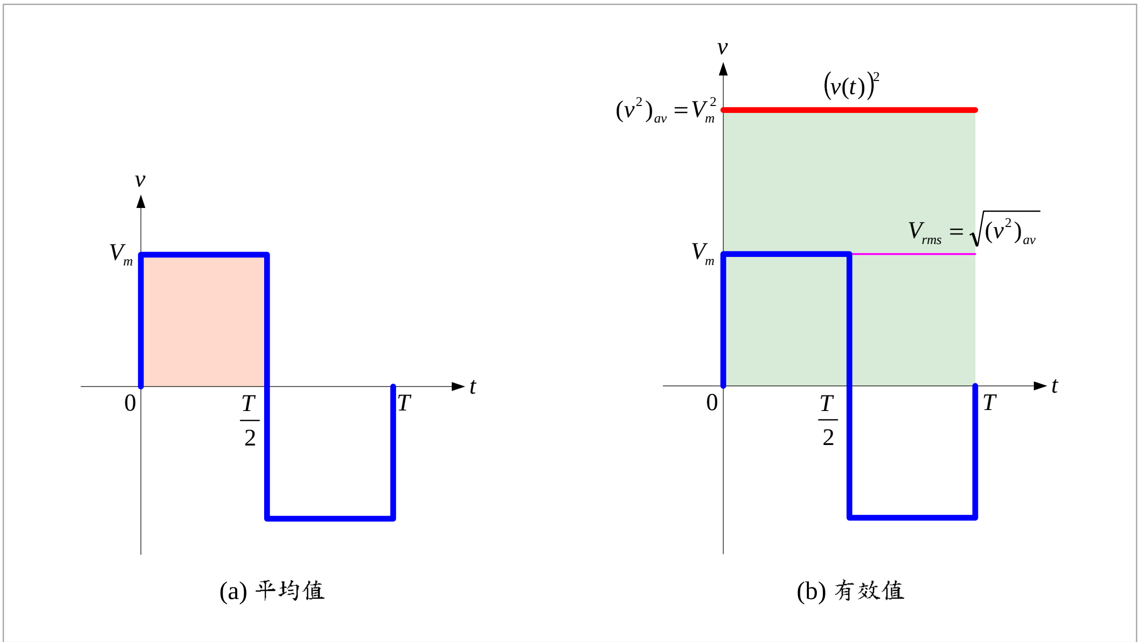


▲ 圖 8-13　三角波圖示

※ 8-2.3　波形之相關計算

方波之平均值與有效值

我們以圖 8-14 來說明方波的平均值及有效值：



▲ 圖 8-14　方波的平均值及有效值圖示

平均值：

Σ 重要公式

$$V_{av} = \frac{\text{正半週方波之波形面積}}{\text{一半週期的時間}} = \frac{V_m \cdot (T/2)}{T/2} = V_m$$

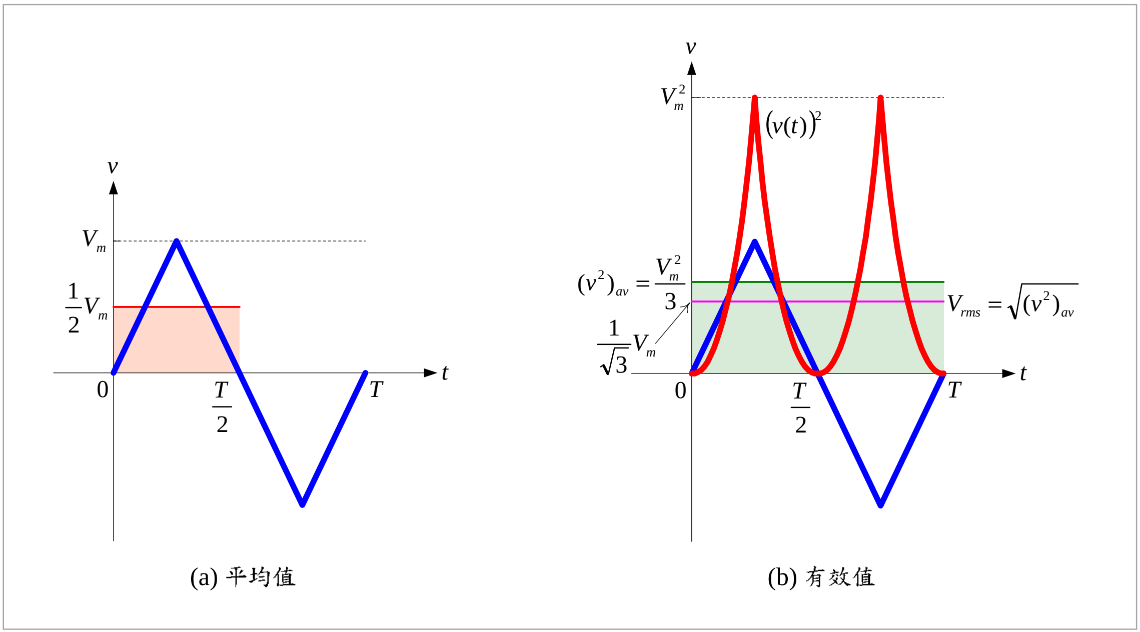
有效值：

Σ 重要公式

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{\text{一週期之方波平方曲線所涵蓋的面積}}{\text{一週期的時間}}} = \sqrt{\frac{(V_m)^2 \cdot T}{T}} = V_m$$

三角波之平均值與有效值

我們以圖 8-15 來說明三角波的平均值及有效值：



▲ 圖 8-15　三角波的平均值及有效值圖示

平均值：

Σ 重要公式

$$V_{av} = \frac{\text{正半週三角波之波形面積}}{\text{一半週期的時間}} = \frac{(1/2)\cdot V_m \cdot (T/2)}{T/2} = \frac{1}{2}V_m$$

有效值：

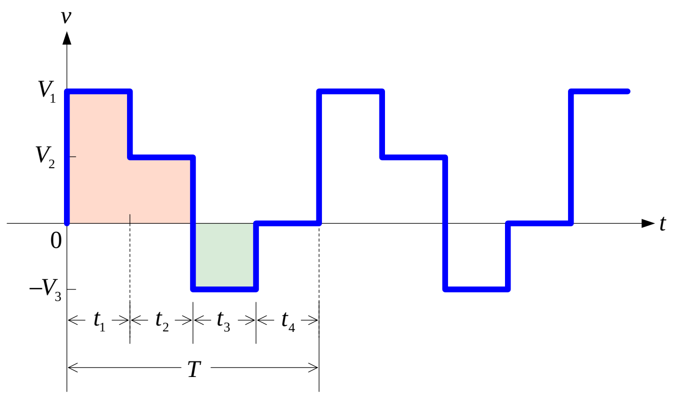
Σ 重要公式

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{\text{一週期之三角波平方曲線所涵蓋的面積}}{\text{一週期的時間}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\int_0^T (v(t))^2 dt}{T}} = \frac{1}{\sqrt{3}}V_m$$

特殊波形之平均值與有效值

如圖 8-16 所示之特殊波形圖示，其平均值及有效值可表示爲：



▲ 圖 8-16　特殊波形圖示

平均值：

Σ 重要公式

$$V_{av} = \frac{\text{一週期之波形曲線所涵蓋的面積}}{\text{一週期的時間}} = \frac{V_1 \cdot t_1 + V_2 \cdot t_2 + (-V_3) \cdot t_3 + 0 \cdot t_4}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}$$

有效值：

Σ 重要公式

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{\text{一週期之波形平方曲線所涵蓋的面積}}{\text{一週期的時間}}} = \sqrt{\frac{V_1^2 \cdot t_1 + V_2^2 \cdot t_2 + (-V_3)^2 \cdot t_3 + 0^2 \cdot t_4}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}}$$

波形因數與波峰因數

我們要說明波形中最大值、平均值、及有效值之間的關係，通常會使用**波形因數**（**F**orm **F**actor，簡寫為 F.F.）與**波峰因數**（**C**rest **F**actor，簡寫為 C.F.）來描述，它們的定義如下：

- **波形因數**：為波形有效值與平均值的比值，即

Σ 重要公式

$$F.F. = \frac{\text{有效值}}{\text{平均值}} = \frac{V_{eff}}{V_{av}} \quad \text{或} \quad \frac{V_{rms}}{V_{av}}$$

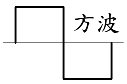
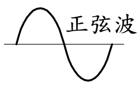
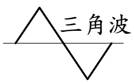
- **波峰因數**：為波形最大值與有效值的比值，即

Σ 重要公式

$$C.F. = \frac{\text{最大值}}{\text{有效值}} = \frac{V_m}{V_{eff}} \quad \text{或} \quad \frac{V_m}{V_{rms}}$$

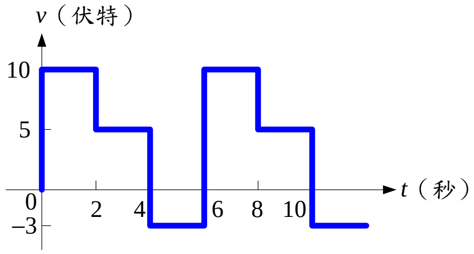
幾種常見波形的波形因數與波峰因數如表 8-1 所列。

▼ 表 8-1　常見波形的波形因數與波峰因數

波形	最大值 V_m	有效值 V_{eff}、V_{rms}	平均值 V_{av}	波形因數 $F.F.$	波峰因數 $C.F.$
 方波	V_m	V_m	V_m	1	1
 正弦波	V_m	$\frac{V_m}{\sqrt{2}}$	$\frac{2V_m}{\pi}$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cong 1.111$	$\sqrt{2} \cong 1.414$
 三角波	V_m	$\frac{V_m}{\sqrt{3}}$	$\frac{V_m}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \cong 1.155$	$\sqrt{3} \cong 1.732$

範例 8-3

如下圖所示波形，試求電壓的平均值及有效值各為多少？



【解】由圖可知週期 $T = 6$ 秒

(1) 平均值電壓

$$V_{av} = \frac{10(2-0)+5(4-2)+(-3)(6-4)}{6}$$

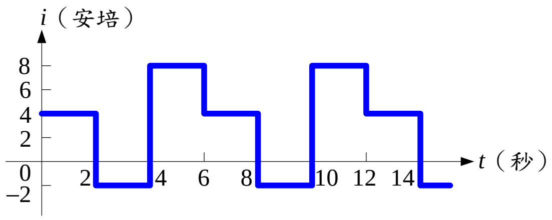
$$= \frac{20+10-6}{6} = 4\ \text{V}$$

(2) 有效值電壓

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{10^2\times2+5^2\times2+(-3)^2\times2}{6}}$$

$$= \sqrt{\frac{200+50+18}{6}} = \sqrt{\frac{134}{3}}\ \text{V}$$

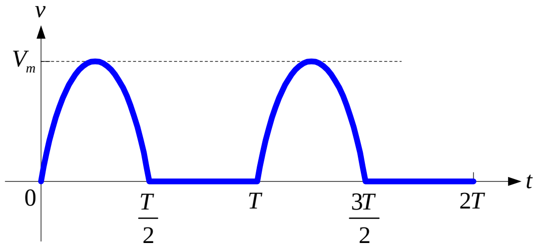
馬上練習　如下圖所示波形，試求電流的平均值及有效值各為多少？



【答】$I_{av} = \dfrac{10}{3}$ A，$I_{eff} = 2\sqrt{7}$ A。

範例 8-4

右圖所示波形為一正弦波通過半波整流器後的輸出波形，試求其波形因數與波峰因數為多少？



【解】由圖 8-8 可看出：半週期之正弦波形的面積為 $V_{av}\cdot\frac{T}{2}$

由圖 8-9 可看出：半週期之正弦平方波形的面積為 $(v^2)_{av}\cdot\frac{T}{2}=V_{rms}^2\cdot\frac{T}{2}$

所以新波形的平均值及有效值分別為：

$$V_{av}=\frac{\frac{2V_m}{\pi}\cdot\frac{T}{2}+0\cdot\frac{T}{2}}{T}=\frac{V_m}{\pi}\qquad V_{rms}=\sqrt{\frac{(\frac{V_m}{\sqrt{2}})^2\cdot\frac{T}{2}+0\cdot\frac{T}{2}}{T}}=\frac{V_m}{2}$$

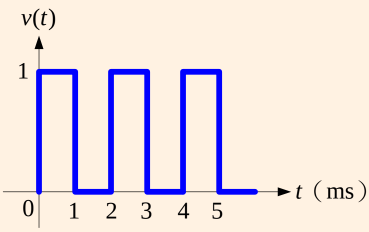
$$\therefore F.F.=\frac{V_{rms}}{V_{av}}=\frac{\frac{V_m}{2}}{\frac{V_m}{\pi}}=\frac{\pi}{2}\cong 1.571\qquad C.F.=\frac{V_m}{V_{rms}}=\frac{V_m}{\frac{V_m}{2}}=2$$

馬上練習 承上題，若將正弦波改為方波，試求其波形因數與波峰因數為多少？

【答】$F.F.\cong 1.414$，$C.F.\cong 1.414$。

單元評量

1. 波形因數 $F.F.=$ ＿＿＿＿＿＿；波峰因數 $C.F.=$ ＿＿＿＿＿＿。
2. 以交流電表測量有效值為 100 伏特的正弦交流電壓，則電壓值將指示在 ＿＿＿＿ V。
3. 已知某交流電流壓的最大值為 100V，若以直流伏特計測量時，其指示應為 ＿＿＿＿＿ V。
4. 如右圖所示波形，試求其平均值為 ＿＿＿＿ V。
5. 承上題，試求其有效值為 ＿＿＿＿ V。

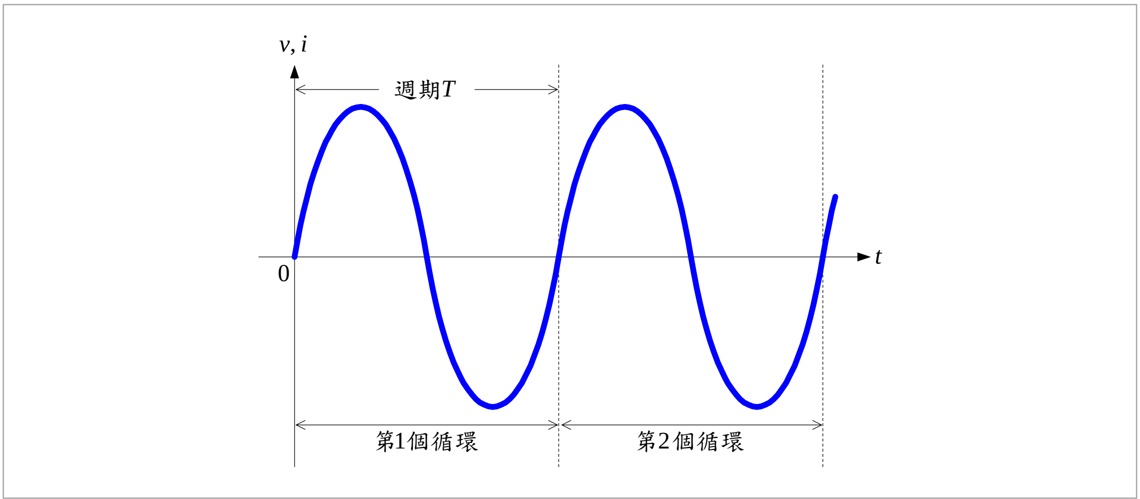


8-3　頻率與週期

我們知道電力公司提供的電源是 AC 110V/60Hz，由前面章節的說明可知 AC 110V 是指交流電壓 110 伏特，而 60Hz 指的是什麼？常聽收音機的人可能會發現，在選擇電台時必須調整到某個特定的頻道上才能收聽，如台北愛樂電台在 FM99.7MHz 等。這其中的 Hz 指的便是交流電波的頻率，以下我們將簡單說明頻率與其他相關的性質。

週期

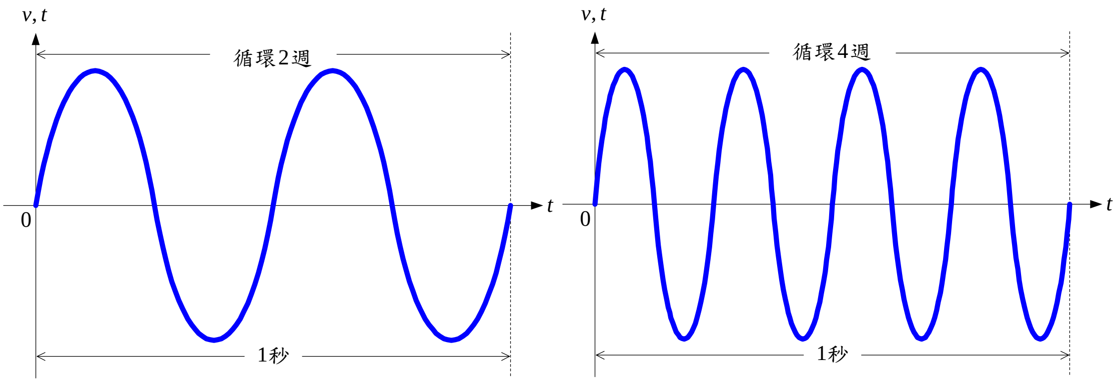
在一重複循環變化的波形中，其循環一週所花費的時間稱為**週期**（period，記為 T），單位為秒（s），此種波形也稱為週期性波形。圖 8-17 所示即為一正弦波的週期圖示。



▲ 圖 8-17　**正弦波的週期**　波形在重複變化時循環一週所花費的時間。

頻率

週期是一週期性波形循環一週所需的時間，若反過來看，一週期性波形在單位時間內重複循環的週數則稱為**頻率**（**frequency**，記為 f），單位為**赫芝**（**Hertz**，記為 Hz）。電力公司提供的交流電頻率為 60Hz，即表示電壓的循環變化為每秒 60 週。圖 8-18 所示即為一正弦波的頻率圖示。



(a) 頻率 f 較低（$f = 2$Hz）　(b) 頻率 f 較高（$f = 4$Hz）

▲ 圖 8-18　**正弦波的頻率** 在相同時間內，其循環次數愈多表示頻率愈高。

由上述的說明可知，**週期與頻率的關係互為倒數**，以數學式表示為：

Σ 重要公式

$$f = \frac{1}{T}\ \text{〔Hz, 赫芝〕 或 } T = \frac{1}{f}\ \text{〔s, 秒〕} \tag{8-3-1}$$

角速度

角度（angle）是用來量測物體做旋轉運動時在方位上的變化程度，一般用希臘字母 θ 來表示，通常採用的單位兩種，一為度（degree，記為°），另一為弧度或弳（**rad**ian，記為 rad）。當**一物體旋轉一週時，其轉動的角度為 $360° = 2\pi$**（整個圓周的角度）。弳（rad）與度（°）的換算規則如下：

Σ 重要公式

$$\theta_{\text{弳}} = (\frac{\pi}{180°})\theta_{\text{度}}\quad \text{〔rad, 弳〕} \tag{8-3-2a}$$

$$\theta_{\text{度}} = (\frac{180°}{\pi})\theta_{\text{弳}}\quad \text{〔°, 度〕} \tag{8-3-2b}$$

按照上述的換算規則，我們列出常用角度之弳（rad）與度（°）對照表如下：

▼ 表 8-2　常用角度之弳（rad）與度（°）對照表

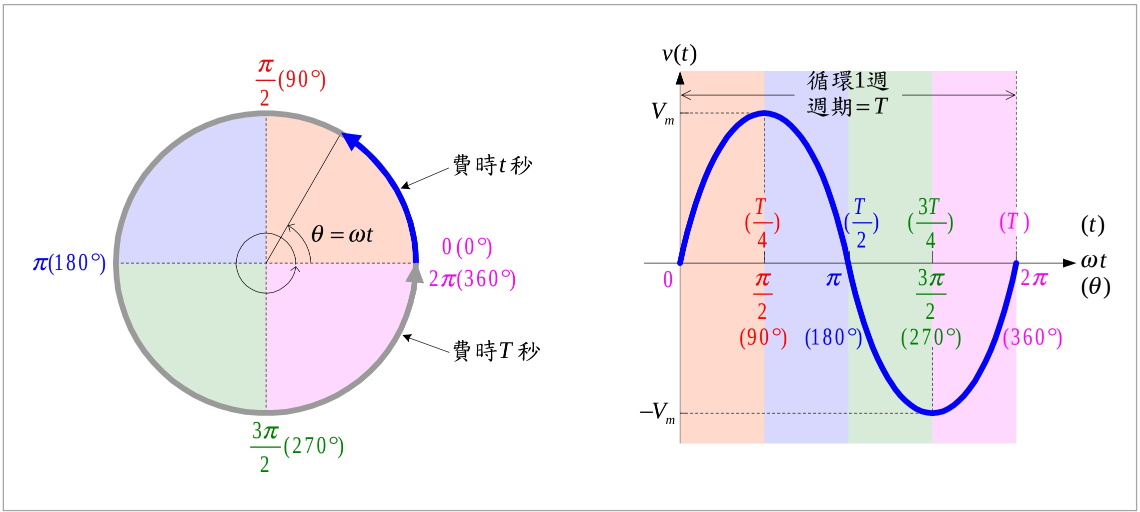
$\theta_{度}$(°)	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\theta_{弳}$(rad)	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

當一物體做旋轉運動時，其單位時間內所轉動的角度稱爲**角速度**（angular velocity），通常以希臘字母 ω 來表示，單位爲弳／秒（rad/s）。以數學式表示爲：

Σ 重要公式

$$\omega = \frac{\theta}{t} \text{〔rad/s, 弳／秒〕 或 } \theta = \omega t \text{〔rad, 弳〕} \qquad (8\text{-}3\text{-}3)$$

由 8-1 節中有關交流發電機的說明可知，正弦波形之交流電的產生與發電機中之線圈迴路的旋轉有關（如圖 8-5 所示）；當線圈迴路旋轉一週（$\theta = 360°$ 或 2π），正弦波形的交流電正好循環一個週期（$t = T$）。我們將一正弦波形在一週期的變化中，其與旋轉角度的關係繪製如圖 8-19 所示。



▲ **圖 8-19　正弦波形與旋轉角度的關係** 交流發電機的線圈旋轉一週時，所產生的正弦波交流電也正好循環一個週期。

所以(8-3-3)式可改寫成：

Σ 重要公式

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad 〔\text{rad/s, 弳／秒}〕 \qquad (8\text{-}3\text{-}4)$$

我們列出常用頻率與角速度的對照表如下：

▼ 表 8-3　常用頻率與角速度的對照表

f (Hz)	25	50	60	100	120	159
ω (rad/s)	157	314	377	628	754	1000

因此對於正弦波形而言，其數學方程式便可表示爲：

Σ 重要公式

$$v(t) = V_m \sin\theta = V_m \sin\omega t = V_m \sin 2\pi f t \quad 〔\text{V, 伏特}〕 \qquad (8\text{-}3\text{-}5)$$

範例 8-5

有一物體在 4 秒鐘內旋轉 200 週，試求 (1)其角速度為多少？ (2)若經過 10 毫秒後，則該物體旋轉多少度？

【解】(1) $f = \dfrac{200}{4} = 50\ \text{Hz}$　　$\omega = 2\pi f = 2\pi\times 50 \cong 314\ \text{rad/s}$

(2) $\theta = \omega t = (2\pi\times 50)\times(10\times 10^{-3}) = \pi\ \text{rad} = 180°$

馬上練習　台灣電力公司所提供的交流電壓為 110V 、 60Hz ，試求此交流電壓的週期為多少？

【答】$T \cong 16.7\ \text{ms}$ 。

範例 8-6

有一正弦波，其數學式表示為 $v(t) = 20\sin 628t$ V ，試求此正弦波的頻率為多少？

【解】比較(8-3-5)式可知：

$2\pi f = 628$　　$\therefore f = \dfrac{628}{2\pi} \cong 100\ \text{Hz}$

馬上練習 承上題，試求在 $t=2.5\text{ms}$ 時的瞬間電壓值為多少？

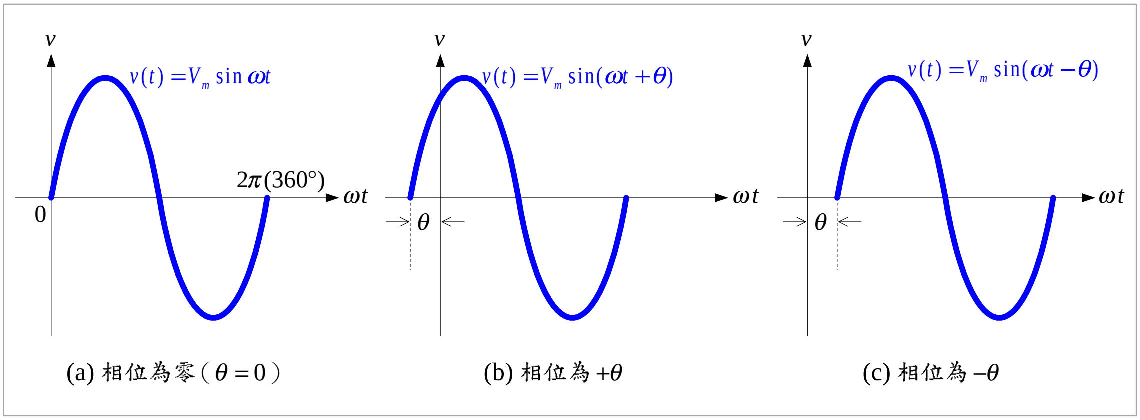
【答】$v(2.5\text{ms}) = 20\text{ V}$。

單元評量

1. 一正弦波的頻率為 100Hz，則其週期為 ＿＿＿＿＿ 秒。
2. 一週期性波形之頻率為 40Hz，則波形完成 10 個循環需時 ＿＿＿＿＿ 秒。
3. $90°=$ ＿＿＿＿＿ 弳；$30°=$ ＿＿＿＿＿ 弳；1.57 弳 $=$ ＿＿＿＿＿ 度。
4. 有一交流電壓為 $v(t)=100\sin 377t\text{ V}$，此電壓的頻率 ＿＿＿＿＿ Hz。

8-4　相位

相位（phase）是指正弦波相對於一參考座標的起始位置角度。在前一節中介紹的正弦波方程式：$v(t)=V_m \sin\omega t$，其波形的起始位置由座標的零點開始（$\omega t=0$），至 360°（2π）完成一個循環，如圖 8-20(a)所示。以此座標爲參考原點，若有任意一正弦波，其起始位置不在零點上，如圖 8-20(b)、(c)所示，則說此正弦波具有一初始相位。當波形在參考原點左側時，相位爲 $+\theta$，正弦波方程式重新表示爲：$v(t)=V_m \sin(\omega t+\theta)$；當波形在參考原點右側時，相位爲 $-\theta$，則正弦波方程式爲：$v(t)=V_m \sin(\omega t-\theta)$。

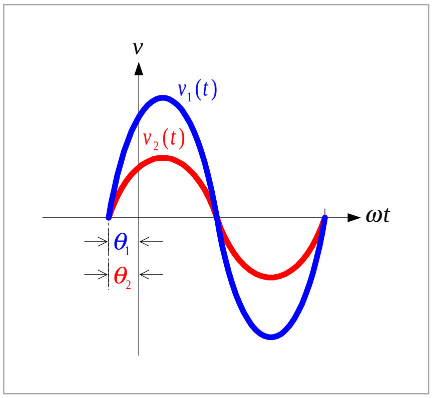


▲ **圖 8-20　正弦波的相位** 波形在原點左側，其相位為 $+\theta$；波形在原點右側，其相位為 $-\theta$。

若有兩個頻率相同的正弦波 $v_1(t)$ 與 $v_2(t)$，兩波形間相位的差值稱為**相位差**（phase difference）或**相位角**（phase angle），其間的相位關係說明如下。

同相位

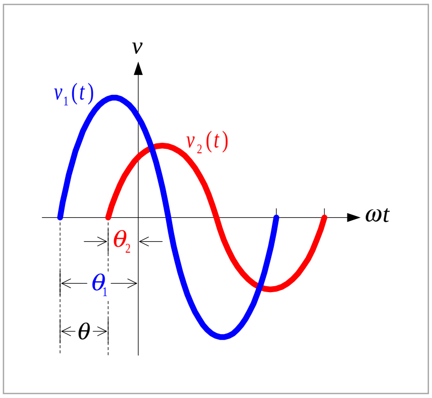
如圖 8-21 所示，當 $v_1(t)$ 及 $v_2(t)$ 的相位差 $\theta_1-\theta_2=0^\circ$ 時，我們稱 $v_1(t)$ 及 $v_2(t)$ 為**同相位**（in phase），也就是兩波形都在同一時間到達最大值與零值。



▲ 圖 8-21 v_1 及 v_2 同相位

相位超前

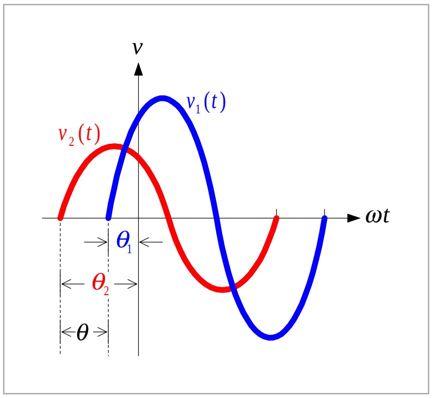
如圖 8-22 所示，當 $v_1(t)$ 與 $v_2(t)$ 間存在一個相位差時，若 $\theta_1-\theta_2>0^\circ$，即 $v_1(t)$ 比 $v_2(t)$ 先到達最大值，我們稱 $v_1(t)$ **超前**（leading）$v_2(t)$ θ 角度。



▲ 圖 8-22 v_1 相位超前 v_2 θ 角度

相位滯後

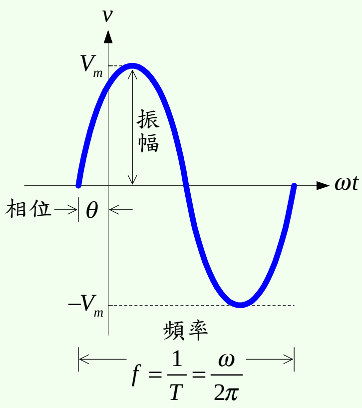
如圖 8-23 所示，當 $v_1(t)$ 與 $v_2(t)$ 間存在一個相位差時，若 $\theta_1-\theta_2<0^\circ$，即 $v_2(t)$ 比 $v_1(t)$ 先到達最大值，我們稱 $v_1(t)$ **滯後**（lagging）$v_2(t)$ θ 角度。



▲ 圖 8-23 v_1 相位滯後 v_2 θ 角度

※知識充電

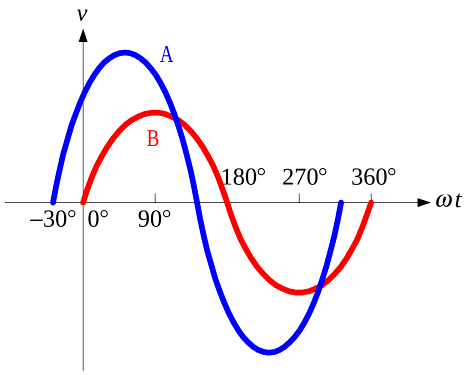
- 正弦波方程式為：
  $v(t)=V_m\sin(\omega t+\theta)=V_m\sin(2\pi ft+\theta)$，其所構成的三大要素包括：振幅 V_m（amplitude）、頻率 f 及相位 θ。
- 若要比較兩個波形方程式的相位關係，則必須注意的事項如下：
  1. 頻率要一樣，即 ω 要相同。若不同，則無法比較。
  2. 正、負號要相同。若不同，則要經過轉換。
     例如：$-\sin\omega t=\sin(\omega t+180°)=\sin(\omega t-180°)$
  3. 函數要相同。若不同，則要經過轉換。
     例如：$\cos\omega t=\sin(\omega t+90°)$



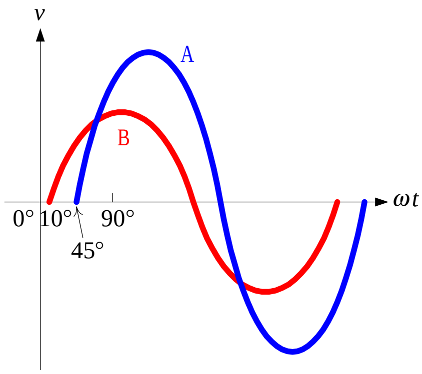
範例 8-7

如下圖所示的波形，試說明波形 A 與波形 B 的相位關係為何？

(1)



(2)



【解】(1) 波形 A 的相位為 30°，波形 B 為相位為 0°

$$\theta_A-\theta_B = 30°-0° = 30°$$

所以波形 A 超前波形 B 30°　（或波形 B 滯後波形 A 30°）

(2) 波形 A 的相位為 –45°，波形 B 為相位為 –10°

$$\theta_A-\theta_B = -45°-(-10°) = -35°$$

所以波形 A 滯後波形 B 35°　（或波形 B 超前波形 A 35°）

馬上練習 有二個正弦波，分別為 $v_1(t) = 35\sin(377t + 60°)$ 與 $v_2(t) = 15\sin(377t - 20°)$，試求此二正弦波的相位關係為何？

【答】v_1 超前 v_2 80° 。

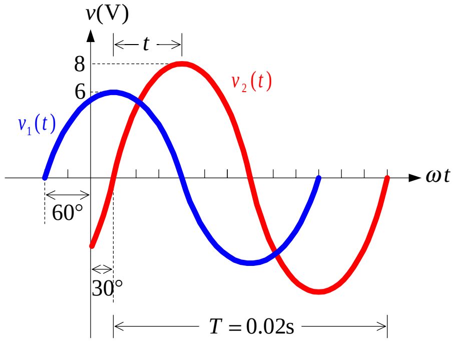
範例 8-8

如右圖所示波形，試求

(1) $v_1(t)$ 與 $v_2(t)$ 之電壓方程式，並說明其相位關係

(2) 時間為 5ms 時之瞬時電壓值

(3) 兩波形到達峰值的時間間隔 t 為多少？



【解】(1) 由圖形可知：$\theta_1 = 60°$ 、$\theta_2 = -30°$

，且 $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{0.02} = 50\text{ Hz}$

$\therefore \omega = 2\pi f = 2\pi \times 50 \cong 314\text{ rad/s}$

故 $v_1(t) = V_{m1}\sin(\omega t + \theta_1) = 6\sin(314t + 60°)\text{ V}$

$v_2(t) = V_{m2}\sin(\omega t + \theta_2) = 8\sin(314t - 30°)\text{ V}$

即 v_1 相位超前 v_2 90°（$\theta_1 - \theta_2 = 90°$），或 v_2 相位滯後 v_1 90°

(2) $v_1(5\text{ms}) = 6\sin(2\pi ft + 60°) = 6\sin(2\pi \times 50 \times 0.005 \times \dfrac{180°}{\pi} + 60°)$

$= 6\sin(90° + 60°) = 6 \times \dfrac{1}{2} = 3\text{ V}$

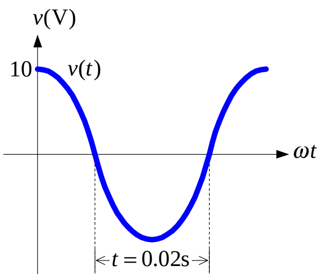
$v_2(5\text{ms}) = 8\sin(2\pi ft - 30°) = 8\sin(2\pi \times 50 \times 0.005 \times \dfrac{180°}{\pi} - 30°)$

$= 8\sin(90° - 30°) = 8 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\text{ V}$

(3) v_1 與 v_2 之相位差為 90°，即兩波形相差 $\dfrac{90°}{360°} = \dfrac{1}{4}$ 週

$\therefore$ 時間間隔 $t = \dfrac{1}{4}T = \dfrac{1}{4} \times 0.02 = 0.005 = 5\text{ ms}$

馬上練習 如右圖所示波形，試求電壓 $v(t)$ 的方程式為何？



【答】$v(t) = 10\sin(157t + 90°)\text{ V}$ 。

範例 8-9

有兩交流電流，若 $i_1(t)=20\sin(\omega t-30°)\text{A}$，$i_2(t)=-10\cos(\omega t-30°)\text{A}$，則兩者的相位關係為何？

【解】$i_1(t) = 20\sin(\omega t-30°)\ \text{A}$

$\Rightarrow$ i_1的相位 $\theta_1 = -30°$

$i_2(t) = -10\cos(\omega t-30°)$

$= -10\sin(\omega t-30°+90°) = -10\sin(\omega t+60°)$

$= 10\sin(\omega t+60°-180°) = 10\sin(\omega t-120°)\ \text{A}$

$\Rightarrow$ i_2的相位 $\theta_2 = -120°$

$\therefore \theta_1-\theta_2 = -30°-(-120°) = 90°$

即 i_1 相位超前 i_2 90°

馬上練習　有兩交流電流，其中 $i_1(t)=10\cos(\omega t-60°)\text{A}$，$i_2(t)=5\sin(\omega t+\theta_2)\text{A}$，若電流 i_1 與 i_2 為同相位，則電流 i_2 的相位 θ_2 為多少？

【答】$\theta_2 = 30°$。

單元評量

1. 一正弦波 $v(t)=100\sin(377t-30°)\text{V}$，則其振幅 $V_m=$ ____________ V，頻率 $f=$ ____________ Hz，相位 $\theta=$ ____________ 度。

2. 電壓與電流之方程式分別為 $v(t)=50\sin(\omega t+20°)\text{V}$、$i(t)=5\sin(\omega t-45°)\text{A}$，則電壓 $v(t)$ 的相位 $\theta_v=$ __________ 度，電流 $i(t)$ 的相位 $\theta_i=$ __________ 度，電壓與電流的相位關係為 ______________ 。

3. 有兩交流電流，若 $i_1=60\sin(\omega t-30°)\text{A}$，$i_2=30\cos(\omega t-60°)\text{A}$，則其相位關係為 ______________ 。

4. 有兩交流電壓，其頻率均為 100Hz，若其波形的相位差為 90°，則兩者在到達最高點的時間間隔為 __________ 秒。

8-5 向量運算

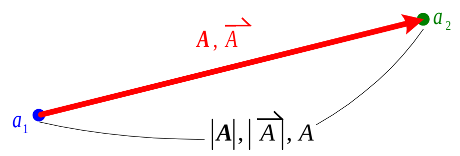
交流電路中存在有電壓或電流間的相位問題，使得應用在直流電路中的代數解析方法無法再適用，分析交流電路變得較爲複雜。本節將介紹描述交流電路的數學工具：**向量**（vector）、**複數**（complex number）與**相量圖**（phasor diagram），以做爲日後分析交流電路的基礎。

8-5.1 向量的基本概念

在物理學中，描述物體性質之物理量有兩種，分別爲**純量**（scalar）與**向量**（vector），說明如下：

1. 純量：只說明數值大小的物理量，如溫度、質量、長度…等。描述這些物理量時，只須將值的大小表示出來；例如："今天的溫度爲 24°C"、"這把尺的長度有 30cm" 等。

2. 向量：必須同時說明大小及方向才能完整描述的物理量，如力、速度、加速度…等。描述這些物理量時，除了須說明數值的大小外，還必須說明物理量的方向；例如："某颱風移動的速度爲 15km/hr，往西"。向量常用粗體的大寫英文字母表示，如向量 $\boldsymbol{A}$，而一般在手寫時則用 $\overrightarrow{A}$ 、$\dot{A}$ 來表示。圖 8-24 所示爲一向量的圖示，其中 a_1 爲向量的起點，a_2 爲終點；a_1、a_2 之間的長度代表向量的大小，以 $|\boldsymbol{A}|$、$|\overrightarrow{A}|$ 或 A 表示，而箭頭所指的方向即爲向量的方向。



▲ 圖 8-24 向量的表示 a_1 為向量起點；a_2 為向量終點。

向量和

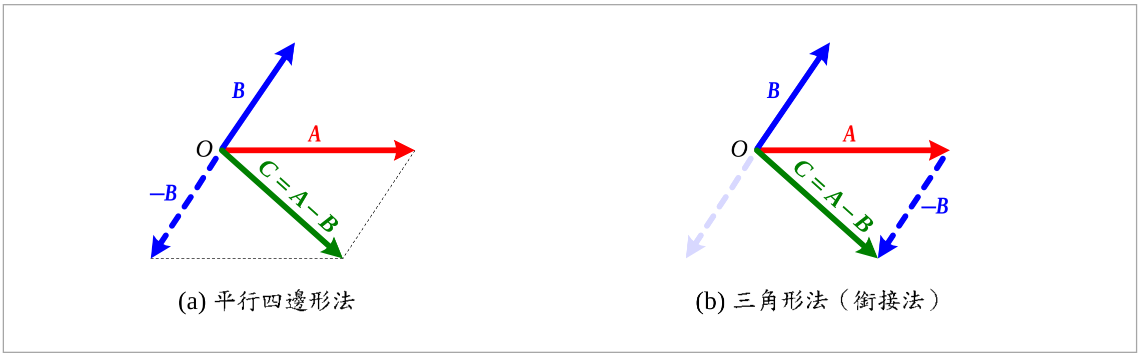
有 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 兩向量，欲求此二向量相加的結果（$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$），可採用兩種作圖的運算方式：平行四邊形法與三角形法（銜接法）。分別說明如下：

1. 平行四邊形法：將 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的起點放在同一位置 O 上，利用 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 為兩邊，繪出一平行四邊形，則由原點開始的對角線 $\boldsymbol{C}$ 便是 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 向量相加的結果，如圖 8-25(a)所示。
2. 三角形法：將 $\boldsymbol{B}$ 的起點移至 $\boldsymbol{A}$ 的終點位置（$\boldsymbol{B}$ 只是平移、方向不變），連接 $\boldsymbol{A}$ 的起點與 $\boldsymbol{B}$ 的終點，則由原點指向終點的射線 $\boldsymbol{C}$ 即為 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 向量相加的結果，如圖 8-25(b)所示。

▲ 圖 8-25　向量和的圖解

向量差

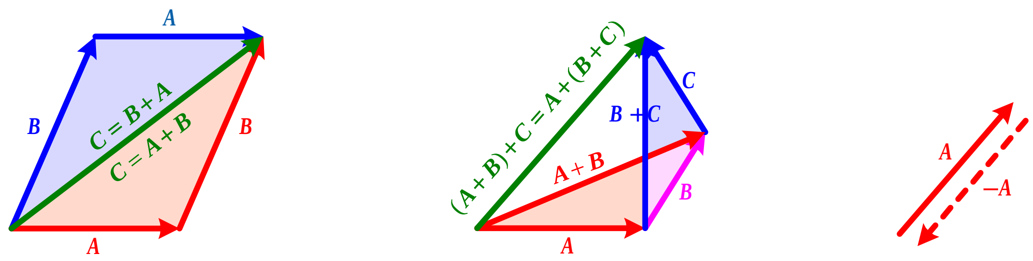
有 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 兩向量，欲求此二向量之差（$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$）時，可先將向量 $\boldsymbol{B}$ 反向求得 $-\boldsymbol{B}$，再利用平行四邊形法或三角形法求 $\boldsymbol{A}$ 與 $-\boldsymbol{B}$ 的向量和，即 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，如圖 8-26 所示。



▲ 圖 8-26　向量差的圖解

※向量的基本性質

以下各式中，若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 爲向量，m、n 爲純量，則



▲ 圖 8-27　向量的基本性質

1. 加法交換律：（如圖 8-27(a)所示）

   $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

2. 加法結合律：（如圖 8-27(b)所示）

   $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

3. 零向量：$\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$（起點與終點相同）

   $\vec{0}+\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}+\vec{0} = \boldsymbol{A}$

4. 逆向量：$-\boldsymbol{A}$（大小相等、方向相反，圖 8-27(c)所示）

   $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A}) = \mathbf{0}$

5. 乘法交換律：

   $m\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}m$

6. 乘法結合律：

   $(mn)\boldsymbol{A} = m(n\boldsymbol{A}) = n(m\boldsymbol{A})$

7. 乘法對加法的分配律：

   $m(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = m\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B}$

   $(m+n)\boldsymbol{A} = m\boldsymbol{A}+n\boldsymbol{A}$

8-5.2　向量在複數平面的表示

在上一小節中解釋向量的和與差時，是利用圖解法來說明，此法在實際的向量計算中有其不方便性。我們可以引進**複數平面**（complex plane）的觀念來表示向量，並且利用複數的運算規則來做為計算向量的方法。

複數

複數包含**實數**（real number）及**虛數**（imaginary number）兩部份，其中虛數是表示開根號的負數，舉例來說，$\sqrt{-4}$就是一個虛數。在數學上，我們定義了一個數 $j=\sqrt{-1}$，則虛數$\sqrt{-4}$可以表示如下：

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1}\times\sqrt{4} = j2$$

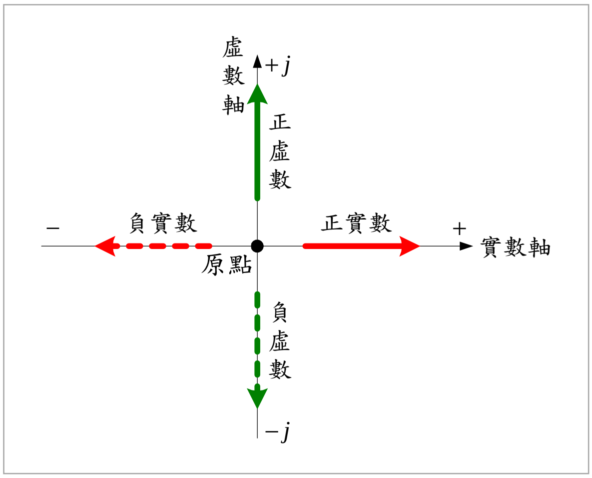
所有的虛數都可以配合符號 j 來表示，如$-\sqrt{-9}=j(-3)$、$\sqrt{-2}=j\sqrt{2}\cdots$等。如果一複數 $\overline{Z}$ 的實數部份為 a，虛數部份為 jb，則數學式表示為：

Σ 重要公式

$$\overline{Z} = a + jb \tag{8-5-1}$$

複數平面

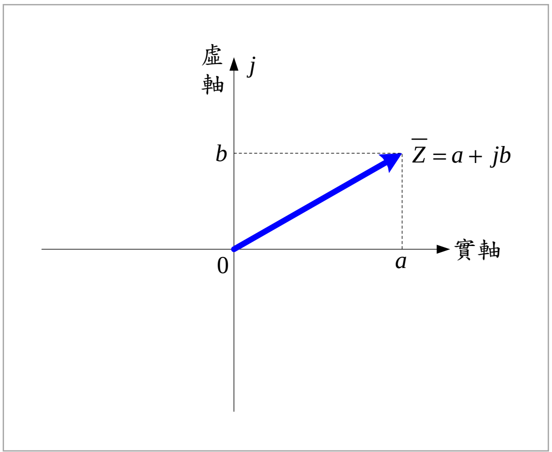
複數平面為兩條垂直的直線所構成的平面，其中水平軸代表實數，垂直軸代表虛數，如圖 8-28 所示。在原點右方的實數軸代表正實數，而左方的實數軸為負實數；原點上方的虛數軸代表正虛數，而下方的虛數軸為負虛數。



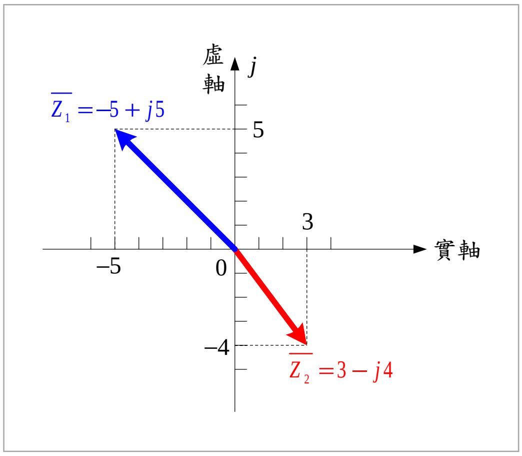
▲ 圖 8-28　複數平面

我們可以利用複數來表示向量，並於複數平面中繪出向量的大小與方向，其中複數平面座標的表示法有**直角座標系統**（rectangular coordinate）及**極座標系統**（polar coordinate）兩種，分述如下：

- **直角座標系統**：在複數平面中，以水平軸代表實數，垂直軸代表虛數，並取相同的單位長度。若有一複數 $\overline{Z} = a + jb$，則在複數平面中的位置爲實數軸上 a 與虛數軸上 b 所對應的交點，如圖 8-29 所示，而此複數所代表的向量，即爲由原點指向對應交點的射線段。



▲ 圖 8-29　直角座標表示法



▲ 圖 8-30　直角座標的向量圖例

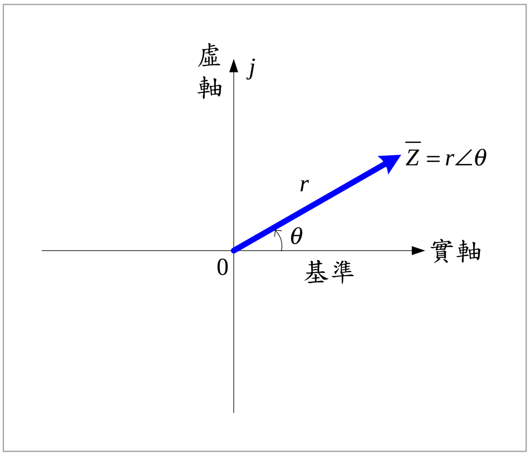
我們將兩複數 $\overline{Z_1} = -5 + j5$ 及 $\overline{Z_2} = 3 - j4$ 直接繪製於直角座標系中，其所代表的向量圖示如圖 8-30 所示。

- **極座標系統**：複數 $\overline{Z}$（向量）在複數平面中，若以長度（大小）與角度（方向）來表示，則稱爲極座標系統，如圖 8-31 所示，其數學式表示爲：

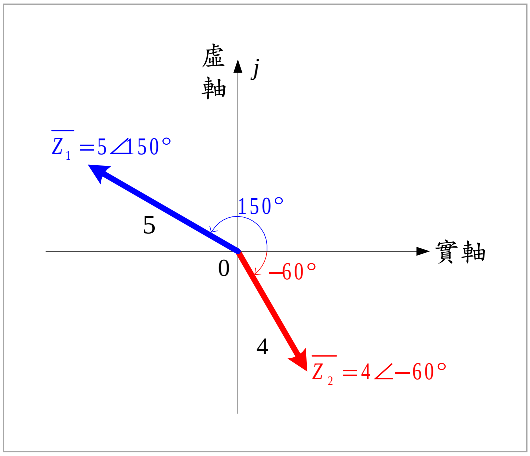
Σ 重要公式

$$\overline{Z} = r\angle\theta \qquad (8\text{-}5\text{-}2)$$

其中 r 爲複數 $\overline{Z}$ 與座標原點的距離（向量長度）；θ 爲複數 $\overline{Z}$ 與正實數軸的夾角（向量方向），稱作幅角，以逆時針方向爲正，範圍定義在 $-180° < \theta \le 180°$。



▲ 圖 8-31　極座標表示法



▲ 圖 8-32　極座標的向量圖例

我們將兩複數 $\overline{Z}_1=5\angle 150°$ 及 $\overline{Z}_2=4\angle -60°$ 直接繪製於極座標系中，其所代表的向量圖示如圖 8-32 所示。

※知識充電

以極座標系統為表示方法的複數，可以用另一種數學方式來呈現，稱為 **指數法**，即是以指數的數學形式來表示為：

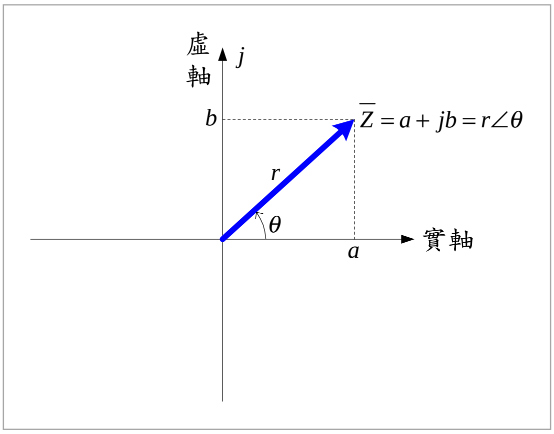
$$\overline{Z} = re^{j\theta}$$

其中 e 為自然對數中的底數（2.71828…），且 $e^{j\theta}=\cos\theta + j\sin\theta$，所以上式可改寫為

$$\overline{Z} = re^{j\theta} = r\cos\theta + jr\sin\theta$$

直角座標與極座標的轉換

複數 $\overline{Z}$ 可以利用直角座標或極座標來描述，雖然描述複數的座標系統不同，但複數 $\overline{Z}$ 的所代表的值並不會因爲座標的不同而有所變化，所以 $\overline{Z}=a+jb$ 與 $\overline{Z}=r\angle\theta$ 之間必然存在某些特定的關係，使得複數的表示法可以在直角座標與極座標間的進行轉換。



▲ 圖 8-33　直角座標與極座標的轉換

- **直角座標轉換成極座標**：如圖 8-33 所示，複數 $\overline{Z}$ 以直角座標表示爲 $\overline{Z}=a+jb$，若要以極座標表示成 $\overline{Z}=r\angle\theta$ 時，則利用畢式定理與三角函數可求得

Σ 重要公式

$$r = \sqrt{a^2+b^2} = \left|\overline{Z}\right| \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} \qquad (8\text{-}5\text{-}3)$$

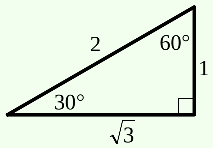
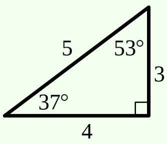
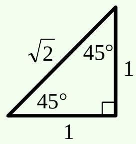
- **極座標轉換成直角座標**：如圖 8-33 所示，複數以極座標表示爲 $\overline{Z}=r\angle\theta$，若以直角座標表示成 $\overline{Z}=a+jb$時，可以將 r 乘上 $\cos\theta$ 得到複數的實數部份，將 r 乘 $\sin\theta$ 得到虛數部份，即

Σ 重要公式

$$a = r\cos\theta \qquad b = r\sin\theta \qquad (8\text{-}5\text{-}4)$$

※知識充電

在直角座標與極座標的轉換過程中，常會用到幾個直角三角形的三角關係，我們將其列表如下，請同學熟記。

常用的直角三角形		
		
$\sin 30° = \frac{1}{2} = 0.5$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0.866$ $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0.577$ $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0.866$ $\cos 60° = \frac{1}{2} = 0.5$ $\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} \cong 1.732$	$\sin 37° = \frac{3}{5} = 0.6$ $\cos 37° = \frac{4}{5} = 0.8$ $\tan 37° = \frac{3}{4} = 0.75$ $\sin 53° = \frac{4}{5} = 0.8$ $\cos 53° = \frac{3}{5} = 0.6$ $\tan 53° = \frac{4}{3} \cong 1.333$	$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.707$ $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.707$ $\tan 45° = \frac{1}{1} = 1$

範例 8-10

請將下列以直角座標表示的複數轉換成以極座標表示的複數。

(1) $\overline{Z}=3-j4$　(2) $\overline{Z}=5+j5$　(3) $\overline{Z}=-6+j8$　(4) $\overline{Z}=-3-j4$

【解】(1) $\overline{Z}=3-j4=\sqrt{3^2+(-4)^2}\angle\tan^{-1}\dfrac{-4}{3}=5\angle-53^\circ$

(2) $\overline{Z}=5+j5=\sqrt{5^2+5^2}\angle\tan^{-1}\dfrac{5}{5}=5\sqrt{2}\angle45^\circ$

(3) $\overline{Z}=-6+j8=\sqrt{(-6)^2+8^2}\angle\tan^{-1}\dfrac{8}{-6}=10\angle127^\circ$

(4) $\overline{Z}=-3-j4=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}\angle\tan^{-1}\dfrac{-4}{-3}=5\angle-127^\circ$

馬上練習　試將複數 $\overline{Z}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+j\dfrac{1}{2}$ 以極座標表示。

【答】$\overline{Z}=1\angle150^\circ$。

範例 8-11

請將下列以極座標表示的複數轉換成以直角座標表示的複數。

(1) $\overline{Z}=5\angle45^\circ$　(2) $\overline{Z}=60\angle120^\circ$　(3) $\overline{Z}=10\angle-143^\circ$　(4) $\overline{Z}=15\angle-30^\circ$

【解】(1) $\overline{Z}=5\angle45^\circ=5\cos45^\circ+j5\sin45^\circ=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}+j\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

(2) $\overline{Z}=60\angle120^\circ=60\cos120^\circ+j60\sin120^\circ=-30+j30\sqrt{3}$

(3) $\overline{Z}=10\angle-143^\circ=10\cos(-143^\circ)+j10\sin(-143^\circ)=-8-j6$

(4) $\overline{Z}=15\angle-30^\circ=15\cos(-30^\circ)+j15\sin(-30^\circ)=\dfrac{15\sqrt{3}}{2}-j\dfrac{15}{2}$

馬上練習　試將複數 $\overline{Z}=8\angle-150^\circ$ 以直角座標表示。

【答】$\overline{Z}=-4\sqrt{3}-j4$。

8-5.3 複數的運算

自下一章開始，我們在做交流電路的分析時，常會使用到複數的運算，因此有必要來瞭解一些複數運算的相關法則。說明如下：

虛數 j 的次方

依虛數 j 的定義可知：

$$
\begin{aligned}
j &= \sqrt{-1} \\
j^2 &= (\sqrt{-1})^2 = -1 \\
j^3 &= (j^2)(j) = (-1)(j) = -j \\
j^4 &= (j^2)(j^2) = (-1)(-1) = 1 \\
\frac{1}{j} &= \frac{(1)(j^3)}{(j)(j^3)} = \frac{j^3}{j^4} = \frac{-j}{1} = -j
\end{aligned}
$$

複數的四則運算

假設有兩個複數分別為 $\overline{Z_1} = a + jb = r_1\angle\theta_1$、$\overline{Z_2} = c + jd = r_2\angle\theta_2$，兩複數之間的四則運算分別為：

$$\overline{Z_1} + \overline{Z_2} = (a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d) \tag{8-5-5}$$

$$\overline{Z_1} - \overline{Z_2} = (a + jb) - (c + jd) = (a - c) + j(b - d) \tag{8-5-6}$$

$$\overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2} = (r_1\angle\theta_1) \cdot (r_2\angle\theta_2) = r_1 r_2\angle(\theta_1 + \theta_2) \tag{8-5-7}$$

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \frac{r_1\angle\theta_1}{r_2\angle\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}\angle(\theta_1 - \theta_2) \tag{8-5-8}$$

另外，複數的乘、除也可以用直角座標法表示為：

$$\overline{Z_1}\cdot\overline{Z_2} = (a+jb)\cdot(c+jd) = ac+jad+jbc-bd \qquad (8\text{-}5\text{-}9)$$
$$= (ac-bd)+j(ad+bc)$$

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \frac{a+jb}{c+jd} = \frac{(a+jb)\cdot(c-jd)}{(c+jd)\cdot(c-jd)} = \frac{ac-jad+jbc+bd}{c^2-jcd+jcd+d^2} \qquad (8\text{-}5\text{-}10)$$
$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - j\frac{ad-bc}{c^2+d^2}$$

由上面公式可知，**兩複數間的相加（或相減），通常在直角座標系統中運算會比較方便**，只需將實數部份相加（或相減）、虛數部份相加（或相減）即可；而**兩複數間的相乘（或相除），則使用極座標系統會較為便利**，將兩向量的長度相乘（或相除），角度相加（或相減）即可。

共軛複數

在利用直角座標法求複數的除法時，如(8-5-10)式所示，我們將分子、分母同乘一複數（在此例中為 $(c-jd)$），使分母**有理化**（rationalizing）成為一實數。仔細觀察此一同乘的複數，發現其與原分母的**實部相同、虛部差一負號**，我們稱此複數為原分母的**共軛複數**（complex conjugate number）。用明確的數學式來表示，若複數 $\overline{Z} = a+jb = r\angle\theta$，則其共軛複數標示為 $\overline{Z}^*$，數學式為：

Σ 重要公式

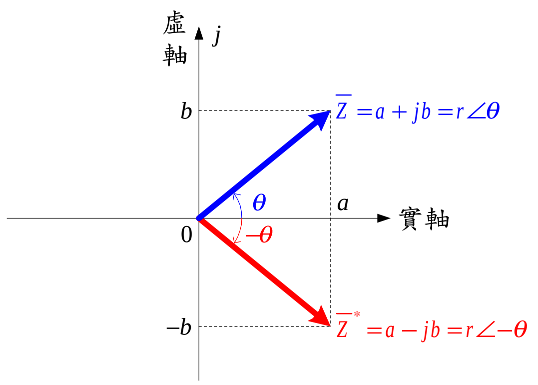
$$\overline{Z}^* = a-jb = r\angle-\theta \qquad (8\text{-}5\text{-}11)$$

若複數 $\overline{Z}$ 與本身的共軛複數 $\overline{Z}^*$ 相乘，其結果為：

Σ 重要公式

$$\overline{Z}\cdot\overline{Z}^* = (a+jb)\cdot(a-jb) = a^2+b^2 = \left|\overline{Z}\right|^2 \qquad (8\text{-}5\text{-}12)$$
$$= (r\angle\theta)\cdot(r\angle-\theta) = r^2$$

圖 8-34 所示為共軛複數的圖示，其中可以看出某一複數與其共軛複數，是以實數軸為對稱軸分布在複數平面上。



▲ 圖 8-34　共軛複數的圖示

複數的乘方、開方與倒數

運用極座標的表示法，很容易就可以求出一複數的乘方、開方與倒數，公式如下：

乘方：
$$(\overline{Z})^n=(r\angle\theta)^n=(r\angle\theta)\cdot(r\angle\theta)\cdots\cdots(r\angle\theta) \tag{8-5-13}$$
$$=(r\times r\times\cdots\times r)\angle(\theta+\theta+\cdots+\theta)=r^n\angle n\theta$$

開方：
$$\sqrt[n]{\overline{Z}}=(\overline{Z})^{\frac{1}{n}}=(r\angle\theta)^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\angle\frac{\theta}{n}=\sqrt[n]{r}\angle\frac{\theta}{n} \tag{8-5-14}$$

倒數：
$$\frac{1}{\overline{Z}}=(\overline{Z})^{-1}=(r\angle\theta)^{-1}=\frac{1}{r}\angle-\theta \tag{8-5-15}$$
$$=\frac{1}{a+jb}=\frac{a-jb}{(a+jb)\cdot(a-jb)}=\frac{a}{a^2+b^2}-j\frac{b}{a^2+b^2}$$

範例 8-12

試求 j^5 、 j^6 、 j^7 、 j^8的值為多少？

【解】 $j^5 = (j^4)(j) = (1)(j) = j$

$j^6 = (j^4)(j^2) = (1)(-1) = -1$

$j^7 = (j^4)(j^3) = (1)(-j) = -j$

$j^8 = (j^4)(j^4) = (1)(1) = 1$

由以上計算過程可知：4 次方以上的 j 值將出現重覆循環，只要牢記 $j^{4n+1} = j$ 、 $j^{4n+2} = j^2 = -1$ 、 $j^{4n+3} = j^3 = -j$ 、 $j^{4n+4} = j^4 = 1$，即可計算出所有 j 的次方值。

馬上練習　試求 j^{12} 與 j^{21} 的值為多少？

【答】 $j^{12} = 1$， $j^{21} = j$ 。

範例 8-13

兩複數分別為 $\overline{Z_1} = 6 + j8$ 、 $\overline{Z_2} = 4 - j3$，試求

(1) $\overline{Z_1} + \overline{Z_2}$　(2) $\overline{Z_1} - \overline{Z_2}$　(3) $\overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$　(4) $\dfrac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$　各為多少？

【解】(1) $\overline{Z_1} + \overline{Z_2} = (6 + j8) + (4 - j3) = 10 + j5$

(2) $\overline{Z_1} - \overline{Z_2} = (6 + j8) - (4 - j3) = 2 + j11$

(3) $\overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2} = (6 + j8) \cdot (4 - j3) = (24 + 24) + j(32 - 18) = 48 + j14$

(4) $\dfrac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \dfrac{6 + j8}{4 - j3} = \dfrac{(6 + j8) \cdot (4 + j3)}{(4 - j3) \cdot (4 + j3)} = \dfrac{24 - 24}{4^2 + 3^2} + j\dfrac{18 + 32}{4^2 + 3^2} = j2$

馬上練習　承上題，試以極座標表示法求 (1) $\overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$　(2) $\dfrac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$　為多少？

【答】(1) $\overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2} = 50\angle 16^\circ$ ；

(2) $\dfrac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = 2\angle 90^\circ$ 。

範例 8-14

試求下列運算之結果：

(1) 若 $\overline{Z}=\sqrt{3}+j1$，則 $(\overline{Z})^3=$？

(2) 若 $\overline{Z}=-16$，則 $\sqrt[4]{\overline{Z}}=$？

(3) 若 $\overline{Z}=4-j3$，則 $\dfrac{1}{\overline{Z}}=$？

【解】(1) $(\overline{Z})^3 = (\sqrt{3}+j1)^3 = (2\angle 30^\circ)^3 = 8\angle 90^\circ = j8$

(2) $\sqrt[4]{\overline{Z}} = \sqrt[4]{-16} = (16\angle 180^\circ)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16}\angle\dfrac{180^\circ}{4} = 2\angle 45^\circ$

(3) $\dfrac{1}{\overline{Z}} = \dfrac{1}{4-j3} = \dfrac{1}{5\angle -37^\circ} = \dfrac{1}{5}\angle 37^\circ$

馬上練習 承上題，試以直角座標表示法求(3)之數值為多少？

【答】$\dfrac{1}{\overline{Z}} = \dfrac{4}{25}+j\dfrac{3}{25}$。

8-5.4 相量

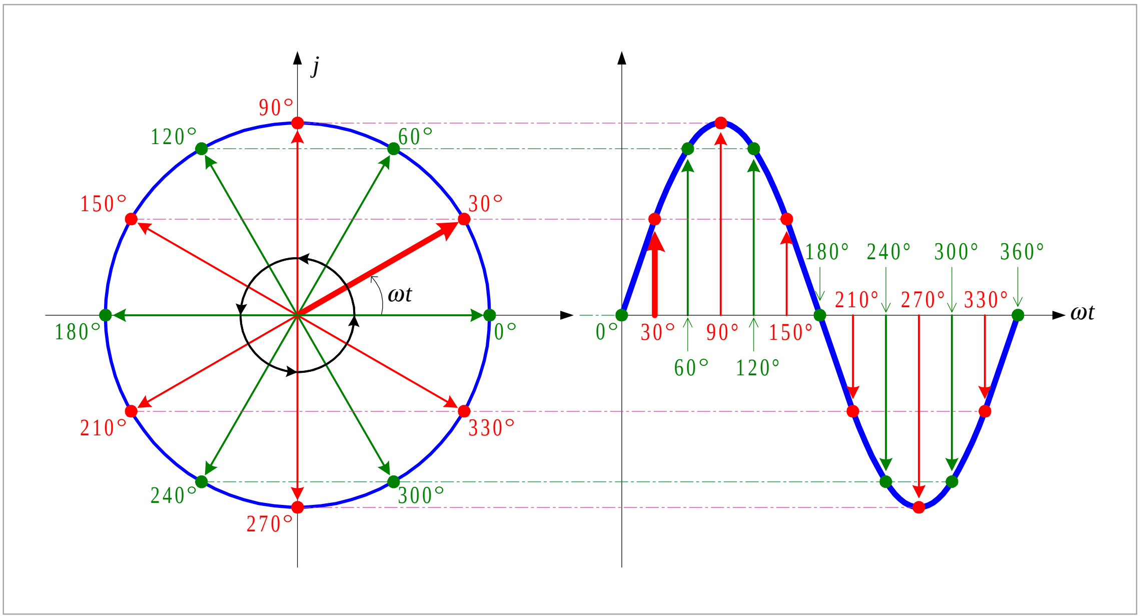
本書討論的主要是交流電路，因此常會碰到正弦波電壓或電流的計算問題，若直接使用表示正弦波的三角函數進行運算，則過程會較爲繁瑣，所以我們介紹了向量（複數）的觀念，讓它來簡化繁複的運算。

然而前面所提的向量是固定在座標平面上的一個量，要用它來描述隨時間變化的正弦波電壓或電流是不太恰當，因此必須要引進旋轉向量的概念，即是所謂的**相量**（phasor）。以下將介紹相量的基本觀念。

正弦波的相量表示法

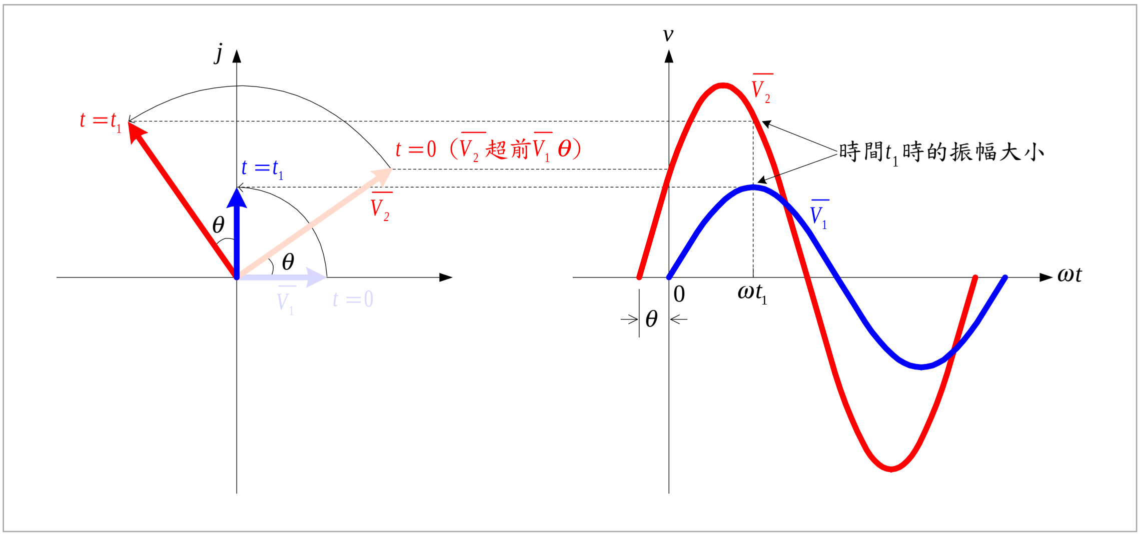
由於交流電路的電壓與電流之間具有相位關係，在分析交流電路時，數值間的運算可使用**相量表示法**（phasor representations）來正確計算出電路的電壓值、電流值、或其它數值，並利用相量圖的解析更能清楚描述出交流電路中的各種相位關係。

所謂的相量，是指一端固定在原點上，並繞著此原點作逆時針旋轉的向量。假設此旋轉向量以 ω 的角速度旋轉，則其各時間在垂直軸上的分量，恰可描述一正弦波在各時間上的振幅大小，如圖 8-35 所示即爲利用相量圖來描述一個正弦波的變化，在一個週期內，正弦波上的每一點，都可以在相量圖中找到相對應的相量表示。



▲ **圖 8-35　利用相量圖描述正弦波**　相量為一旋轉的向量，其在每個旋轉角度上的縱軸分量，皆可與正弦波上的各瞬間值相對應。

由於相量的位置不斷的隨時間變化，所以我們在相量圖上看到的相量，其實是某一瞬間時的圖像；圖 8-36 所示即爲相量 $\overline{V_1}$ 與 $\overline{V_2}$ 在不同時間下（$t=0$ 及 $t=t_1$）的相量圖示，其中 θ 爲兩相量的相位差。



▲ 圖 8-36　不同時間下的相量圖示

我們在討論相量圖時，理論上是以向量的最大值對應到正弦波上的最大值，但是以相量表示法呈現其數學式時，一般習慣的用法是取其**有效值**，所以對於一正弦波電壓 $v(t)$ 或電流 $i(t)$ 而言，其數學式表示爲：

Σ 重要公式

$$v(t) = V_m \sin(\omega t+\theta) = \sqrt{2}V_{eff}\sin(\omega t+\theta) \quad (8\text{-}5\text{-}16a)$$

或 $$i(t) = I_m \sin(\omega t+\theta) = \sqrt{2}I_{eff}\sin(\omega t+\theta) \quad (8\text{-}5\text{-}16b)$$

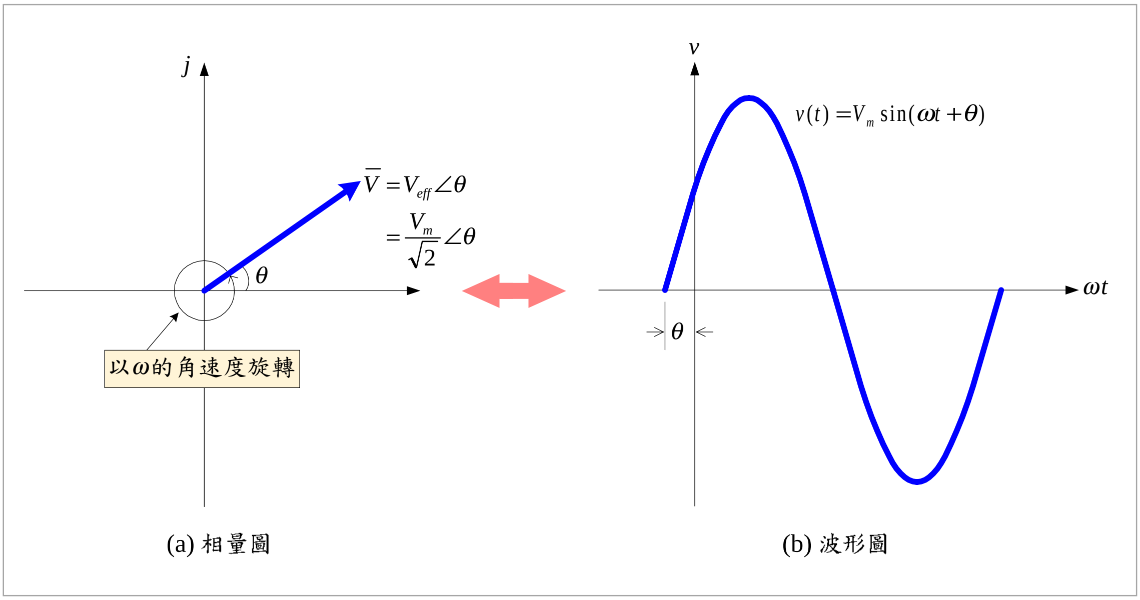
以相量表示法則寫成：

Σ 重要公式

$$\overline{V} = V_{eff}\angle\theta = V\angle\theta \quad (8\text{-}5\text{-}17a)$$

或 $$\overline{I} = I_{eff}\angle\theta = I\angle\theta \quad (8\text{-}5\text{-}17b)$$

其中 θ 爲時間 $t=0$ 時的初始相位（與參考相量的相位差），如圖 8-37 所示。另外須注意的是：**將正弦波電壓與電流化成相量表示法進行計算時，必須確定是否在相同頻率下**，否則計算的結果是毫無意義。



▲ 圖 8-37　相量圖與波形圖

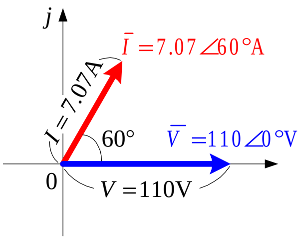
範例 8-15

試將下列正弦波以相量式及相量圖表示：

(1) $v(t)=110\sqrt{2}\sin\omega t$ V　(2) $i(t)=10\sin(\omega t+60°)$ A

【解】(1) $\bar{V}=V_{eff}\angle\theta=\dfrac{110\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=110\angle 0°$ V

(2) $\bar{I}=I_{eff}\angle\theta=\dfrac{10}{\sqrt{2}}\angle 60°\cong 7.07\angle 60°$ A



馬上練習　電源頻率為 60Hz，試將下列相量式改為正弦波的表示法：

(1) $\bar{V}=100\angle 60°$ V　(2) $\bar{I}=5\angle -45°$ A

【答】(1) $v(t)\cong 141.4\sin(377t+60°)$ V；

(2) $i(t)\cong 7.07\sin(377t-45°)$ A。

範例 8-16

有兩個正弦波分別表示為：$v_1(t)=100\sqrt{2}\sin(\omega t+37°)\,\text{V}$、$v_2(t)=100\sqrt{2}\sin(\omega t+53°)\,\text{V}$，試求兩正弦波的合成波 $v(t)=v_1(t)+v_2(t)$ 為多少？

【解】$v_1(t) = 100\sqrt{2}\sin(\omega t+37°)\,\text{V} \Rightarrow \overline{V_1} = \dfrac{100\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\angle 37° = 100\angle 37°\,\text{V}$

$v_2(t) = 100\sqrt{2}\sin(\omega t+53°)\,\text{V} \Rightarrow \overline{V_2} = \dfrac{100\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\angle 53° = 100\angle 53°\,\text{V}$

將兩相量轉換為直角座標：

$\overline{V_1} = 100\angle 37° = 80+j60\,\text{V}$　　$\overline{V_2} = 100\angle 53° = 60+j80\,\text{V}$

將兩式相加後，再轉換成極座標得：

$\overline{V_1}+\overline{V_2} = (80+j60)+(60+j80) = 140+j140 = 140\sqrt{2}\angle 45°\,\text{V}$

$\therefore v(t) = \sqrt{2}\times 140\sqrt{2}\sin(\omega t+45°) = 280\sin(\omega t+45°)\,\text{V}$

馬上練習　兩波形分別表示為：$v_1(t)=30\sin\omega t\,\text{V}$、$v_2(t)=40\cos\omega t\,\text{V}$，試求此二波形的合成波 $v(t)=v_1(t)+v_2(t)$ 為多少？

【答】$v(t) = 50\sin(\omega t+53°)\,\text{V}$。

單元評量

1. $j^{35}=$ __________。
2. 如果以極座標表示，j 的角度為 __________。
3. 若 $\overline{Z_1}=50\angle 60°$、$\overline{Z_2}=100\angle 120°$，則以直角座標法表示之 $\overline{Z_1}=$ __________、$\overline{Z_2}=$ __________。
4. 若 $\overline{Z_1}=3-j4$、$\overline{Z_2}=-4+j3$，試以極座標法表示下列之複數：

   (1) $\overline{Z_1}=$ __________　(2) $\overline{Z_2}=$ __________

   (3) $\overline{Z_1}+\overline{Z_2}=$ __________　(4) $\overline{Z_1}-\overline{Z_2}=$ __________

   (5) $\overline{Z_1}\cdot\overline{Z_2}=$ __________　(6) $\dfrac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}=$ __________
5. 有兩波形的相量式分別表示為：$\overline{V_1}=10\angle 180°\,\text{V}$、$\overline{V_2}=10\angle 90°\,\text{V}$，試求此二波形的合成波 $v(t)=v_1(t)+v_2(t)=$ __________。

重點摘要

1. 直流：電壓不會因時間的變化而改變極性，電路中的電流也只有單一方向。
   (1) 穩定直流：電壓或電流的大小與方向不隨時間而變化。
   (2) 脈動直流：電壓或電流的大小會隨著時間的變化而改變，但電壓的極性或電流的方向不會隨時間而改變。

2. 交流：電壓或電流隨時間的變化而改變它的大小與方向。

3. 正弦波峰對峰值：$V_{P-P} = V_m - (-V_m) = 2V_m = 2V_P$ 〔V, 伏特〕重要

   正弦波平均值：$V_{av} = \dfrac{2}{\pi}V_m \cong 0.637V_m$ 〔V, 伏特〕重要

   正弦波有效值：$V = V_{eff} = V_{rms} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}V_m \cong 0.707V_m$ 〔V, 伏特〕重要

4. 特殊波形之平均值與有效值：

   平均值：

$$V_{av} = \frac{\text{一週期之波形曲線所涵蓋的面積}}{\text{一週期的時間}} = \frac{V_1 \cdot t_1 + V_2 \cdot t_2 + V_3 \cdot t_3 + \cdots}{t_1 + t_2 + t_3 + \cdots}$$

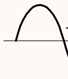
   有效值：

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{\text{一週期之波形平方曲線所涵蓋的面積}}{\text{一週期的時間}}} = \sqrt{\frac{V_1^2 \cdot t_1 + V_2^2 \cdot t_2 + V_3^2 \cdot t_3 + \cdots}{t_1 + t_2 + t_3 + \cdots}}$$

5. 波形因數：$F.F. = \dfrac{\text{有效值}}{\text{平均值}} = \dfrac{V_{eff}}{V_{av}}$ 或 $\dfrac{V_{rms}}{V_{av}}$

   波峰因數：$C.F. = \dfrac{\text{最大值}}{\text{有效值}} = \dfrac{V_m}{V_{eff}}$ 或 $\dfrac{V_m}{V_{rms}}$

6. 常見波形的有效值、平均值、波形因數與波峰因數：

波形	最大值 V_m	有效值 V_{eff}、V_{rms}	平均值 V_{av}	波形因數 $F.F.$	波峰因數 $C.F.$
 方波	V_m	V_m	V_m	1	1
 正弦波	V_m	$\frac{V_m}{\sqrt{2}}$	$\frac{2V_m}{\pi}$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cong 1.111$	$\sqrt{2}\cong 1.414$
 三角波	V_m	$\frac{V_m}{\sqrt{3}}$	$\frac{V_m}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}\cong 1.155$	$\sqrt{3}\cong 1.732$

7. 週期：在一重複循環變化的波形中，其循環一週所花費的時間。
   頻率：一週期性波形在單位時間內重複循環的週數。
   週期與頻率的關係：$f=\frac{1}{T}$ 〔Hz, 赫芝〕重要 或 $T=\frac{1}{f}$ 〔s, 秒〕重要

8. 弳（rad）與度（°）的換算規則：
   $\theta_{弳}=(\frac{\pi}{180^\circ})\theta_{度}$ 〔rad, 弳〕重要 $\theta_{度}=(\frac{180^\circ}{\pi})\theta_{弳}$ 〔°, 度〕重要

9. 角速度：單位時間內所轉動的角度。
   $\omega=\frac{\theta}{t}=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$ 〔rad/s, 弳／秒〕重要 或 $\theta=\omega t$ 〔rad, 弳〕重要

10. 正弦波方程式：$v(t)=V_m\sin(\omega t+\theta)=V_m\sin(2\pi ft+\theta)$ 重要
    其中 θ 為正弦波的初始相位

11. 兩個頻率相同的正弦波，兩波形間相位的差值稱為相位差，其間的相位關係有同相位、相位超前、相位滯後等狀況。

12. 複數的直角座標表示法：$\overline{Z}=a+jb$
    複數的極座標表示法：$\overline{Z}=r\angle\theta$
    互換規則：$r=\sqrt{a^2+b^2}=\left|\overline{Z}\right|$ $\theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}$
    $a=r\cos\theta$ $b=r\sin\theta$

13. 複數的四則運算：

$$\overline{Z_1}+\overline{Z_2} = (a+jb)+(c+jd) = (a+c)+j(b+d)$$

$$\overline{Z_1}-\overline{Z_2} = (a+jb)-(c+jd) = (a-c)+j(b-d)$$

$$\overline{Z_1}\cdot\overline{Z_2} = (r_1\angle\theta_1)\cdot(r_2\angle\theta_2) = r_1r_2\angle(\theta_1+\theta_2)$$

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \frac{r_1\angle\theta_1}{r_2\angle\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}\angle(\theta_1-\theta_2)$$

14. 複數 $\overline{Z} = a+jb = r\angle\theta$ 的共軛複數：$\overline{Z}^* = a-jb = r\angle-\theta$

15. 複數的乘方、開方與倒數

乘方：$(\overline{Z})^n = (r\angle\theta)^n = (r\angle\theta)\cdot(r\angle\theta)\cdots\cdots(r\angle\theta)$

$$= (r\times r\times\cdots\times r)\angle(\theta+\theta+\cdots+\theta) = r^n\angle n\theta$$

開方：$\sqrt[n]{\overline{Z}} = (\overline{Z})^{\frac{1}{n}} = (r\angle\theta)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\angle\frac{\theta}{n} = \sqrt[n]{r}\angle\frac{\theta}{n}$

倒數：$\frac{1}{\overline{Z}} = (\overline{Z})^{-1} = (r\angle\theta)^{-1} = \frac{1}{r}\angle-\theta$

$$= \frac{1}{a+jb} = \frac{a-jb}{(a+jb)\cdot(a-jb)} = \frac{a}{a^2+b^2}-j\frac{b}{a^2+b^2}$$

16. 相量：指一端固定在原點上，並繞著此原點作逆時針旋轉的向量。若此旋轉向量以 ω 的角速度旋轉，則其各時間在垂直軸上的分量，恰可描述一正弦波在各時間上的振幅大小。

17. 相量表示法：若 $v(t) = V_m\sin(\omega t+\theta) = \sqrt{2}V_{eff}\sin(\omega t+\theta)$，則

$\overline{V} = V_{eff}\angle\theta = V\angle\theta$ 重要

學後評量

一、選擇題

( )1. 有一電流其大小隨時間改變而方向維持不變，則此電流為 (A)穩定直流 (B)脈動直流 (C)交流電 (D)脈動交流

( )2. 一正弦波電壓波形，其平均值與有效值之間的關係為 (A)平均值 = 有效值 (B)平均值 < 有效值 (C)平均值 > 有效值 (D)無法比較

( )3. 一交流電壓峰對峰值為 10V，則有效值電壓為
(A)$\frac{10}{\pi}$ V (B)$\frac{10}{2\pi}$ V (C)$\frac{10}{\sqrt{2}}$ V (D)$\frac{10}{2\sqrt{2}}$ V

( )4. 有效值為 110V 的電壓，其最大值為 (A)78V (B)99V (C)110V (D)156V

( )5. 以直流電表測量有效值為 100 伏特的正弦交流電壓，則電壓指示為多少伏特？ (A)$100\sqrt{2}$ (B)100 (C)50 (D)0

( )6. 有一正弦波的峰對峰值為 5V，則其電壓均方根值為
(A)5V (B)$\frac{5}{2\sqrt{2}}$ V (C)$\frac{5}{\sqrt{2}}$ V (D)$\frac{5}{2}$ V

( )7. 有一交流電壓峰對峰值為 10V，則平均值電壓為
(A)$\frac{10}{\pi}$ V (B)$\frac{10}{2\pi}$ V (C)$\frac{10}{\sqrt{2}}$ V (D)$\frac{10}{2\sqrt{2}}$ V

( )8. 電壓 $v(t)=100\sqrt{2}\sin 120t$ 伏特的有效值為 (A)90V (B)100V (C)110V (D)120V

( )9. 下列有關正弦波形的敘述，何者正確？
(A)波形因數（form factor）為 $\sqrt{2}$ (B)波形因數為 $\sqrt{3}$
(C)波峰因數（crest factor）為 $\sqrt{2}$ (D)波峰因數為 $\sqrt{3}$

( )10. $v(t)=100\sin 377t$，則此正弦波的頻率為 (A)50Hz (B)60Hz (C)100Hz (D)120Hz

( )11. 角度 60 度等於 (A)$\frac{\pi}{3}$ (B)$\frac{\pi}{2}$ (C)$\frac{\pi}{5}$ (D)$\frac{\pi}{4}$

( )12. 頻率為 2kHz 的方波，其週期為多少秒？
(A)0.5ms (B)1ms (C)2ms (D)4ms

( )13. 1kHz、10 V_{P-P} 的正弦波，其瞬時值數學表示式為
(A)$10\sin(10^3 t)$ 伏特 (B)$\frac{10}{\sqrt{2}}\sin(10^3 t)$ 伏特
(C)$\frac{10}{\sqrt{2}}\sin(2\pi\times10^3 t)$ 伏特 (D)$5\sin(2\pi\times10^3 t)$ 伏特

(　)14. 有一交流電路的電壓為 $100\sin(\omega t+60°)$、電流為 $100\sin(\omega t+20°)$，則 (A)電壓滯後電流 40°　(B)電壓超前電流 40°　(C)電壓滯後電流 80°　(D)電壓超前電流 80°

(　)15. 有一電壓 $v(t)=10\sin(377t+30°)\text{V}$，則此波形第一次到達峰值的時間是 (A)2.8ms　(B)3.3ms　(C)1.4ms　(D)1.7ms

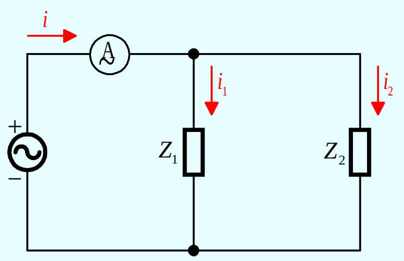
(　)16. 有一正弦波電流表示成 $i(t)=100\sin(377t-60°)$ A，求當 $t=\frac{1}{240}$ 秒時之瞬間電流值為何？ (A)-85.2 A　(B)50A　(C)86.6A　(D)100A

(　)17. 有一正弦電壓，頻率 50Hz，當 $t=13.333$ ms（$=\frac{40}{3}$ ms）時，達到負的最大值 -10 V（即最小值）則電壓之方程式為 (A)$10\sin(314t+\frac{\pi}{2})\text{V}$　(B)$10\sin(377t+\frac{\pi}{2})\text{V}$　(C)$10\sin(377t+\frac{\pi}{6})\text{V}$　(D)$10\sin(314t+\frac{\pi}{6})\text{V}$

(　)18. 將 $6+j8$ 以極座標表示為 (A)$5\angle 60°$　(B)$10\angle 53°$　(C)$10\angle 37°$　(D)$5\angle 53°$

(　)19. 若 $\overline{Z_1}=3+j2$，$\overline{Z_2}=2+j3$，則 $\overline{Z_1}+\overline{Z_2}$ 為 (A)$3\sqrt{2}\angle 30°$　(B)$4\sqrt{2}\angle 37°$　(C)$5\sqrt{2}\angle 45°$　(D)$6\sqrt{2}\angle 53°$

(　)20. 如圖(1)所示電路，若電流 $i_1=4\cos 377t$ A，$i_2=4\sin 377t$ A，試求交流電表所測得之電流值為 (A)0A　(B)4A　(C)$4\sqrt{2}$ A　(D)8A



圖(1)

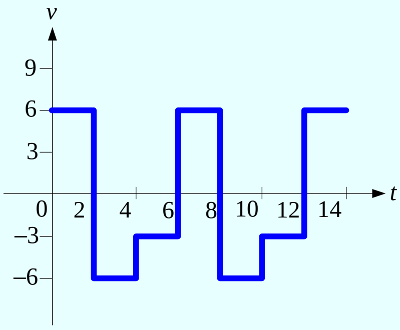
二、計算題

1. 有一正弦波以 25ms 完成 2 個週期循環，試求 1 秒內此正弦波將完成幾個循環？

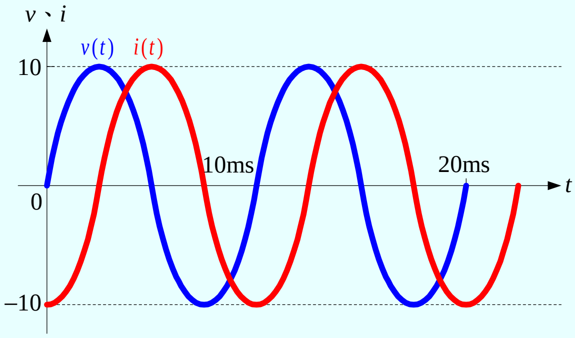
2. 有一交流電壓，其電壓有效值為 70.7V，頻率為 60Hz，則電壓的正弦波方程式為何？

3. 如圖(2)所示波形，試求電壓的平均值及有效值各為多少伏特？

4. 如圖(3)所示，試分別求電壓方程式 $v(t)=$？電流方程式 $i(t)=$？



圖(2)



圖(3)

5. 試將下列以直角座標表示的複數轉換為極座標表示：

(1) $-6+j8$　　(2) $-j8$　　(3) 2

6. 試將下列以極座標表示的複數轉換為直角座標表示：

(1) $5\angle 30^\circ$　　(2) $18\angle -30^\circ$　　(3) $44\angle 135^\circ$

7. 試計算下列複數的運算結果：

(1) $(5\angle 35^\circ)\cdot(7\angle 70^\circ)$　　(2) $(4\angle 53^\circ)\cdot(12\angle -44^\circ)$

(3) $\dfrac{60\angle 30^\circ}{30\angle 15^\circ}$　　(4) $\dfrac{100\angle 20^\circ}{5\angle -7^\circ}$

8. 試計算下列複數的運算結果：

(1) $5\angle 30^\circ - 7\angle 90^\circ$

(2) $10\angle 45^\circ + 5\angle 0^\circ$

(3) $(5+j5)-(20-j3)$

(4) $(-10+j10)+(30-j5)$

9. 若 $i_1(t)=3\sin\omega t$ A、$i_2(t)=4\cos\omega t$ A，試求 $i_1(t)+i_2(t)$ 的相角為多少？

10. 有兩個正弦波分別表示為 $v_1(t)=-3\sin\omega t$ V、$v_2(t)=4\sin(\omega t+90^\circ)$V，試求兩正弦波合成 $v_1(t)+v_2(t)=$？