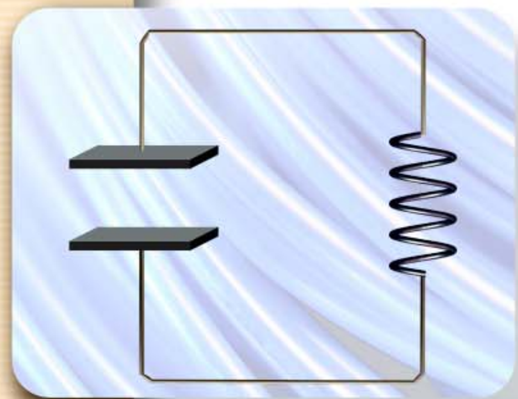
CH 11 諧振電路

在包含有電感器與電容器的交流電路中，當交流電源以某一個特定的頻率輸入電路時，如果電路的電容抗與電感抗相互抵消，此時電路將產生諧振現象，使得電源電壓與電路總電流同相，電路呈純電阻性，且功率因數為 1 。諧振在電子電路中的應用相當廣泛，尤其是通訊方面，例如：透過諧振效應，我們可以選擇出某個特定頻率的信號，將其應用在收音機或電視機的接收器上，我們即可收聽或收看到所要的電台。

學習目標

- 瞭解諧振電路的特性
- 分析電感／電容串聯諧振電路
- 分析電阻／電感／電容串聯諧振電路
- 分析電感／電容並聯諧振電路
- 分析電阻／電感／電容並聯諧振電路
- 分析電阻／電感／電容串並聯諧振電路



本章目錄

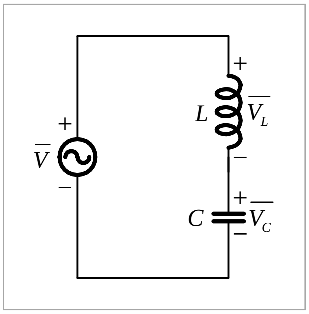
11-1　串聯諧振電路 204
11-2　並聯諧振電路 222
※11-3　串並聯諧振電路 239

11-1　串聯諧振電路

※11-1.1　電感／電容串聯諧振電路

圖 11-1 所示為基本的 L-C 串聯電路。由於串聯電路中流經各個元件的電流都相等，所以我們利用電流的相位作為參考基準，則電感器上兩端電壓的相位超前電流相位 90°，電容器上兩端電壓的相位滯後電流相位 90°。

若交流電壓源的工作頻率 f 不為定值，其輸出的頻率值由 0Hz 開始漸漸增加；由於電感器與電容器的電抗與電源的頻率有關（ $X_L = 2\pi f L$ ， $X_C = \dfrac{1}{2\pi f C}$ ），則在電源頻率變化的過程中，電路呈現的阻抗、電流等性質也將相對地改變。我們說明如下。



▲ 圖 11-1　L-C 串聯電路

阻抗

在 L-C 串聯交流電路中，阻抗 $\overline{Z}$ 是電感抗 $\overline{X_L}$ 與電容抗 $\overline{X_C}$ 的相量和，其中 X_L 與 X_C 分別為：

$$X_L = \omega L = 2\pi f L \quad 〔\Omega, 歐姆〕$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad 〔\Omega, 歐姆〕$$

在相量圖中，電感抗 $\overline{X_L}$ 位在正方向的虛數軸上，電容抗 $\overline{X_C}$ 則位在負方向的虛數軸，所以電路的總阻抗 $\overline{Z}$ 用相量表示成：

Σ 重要公式

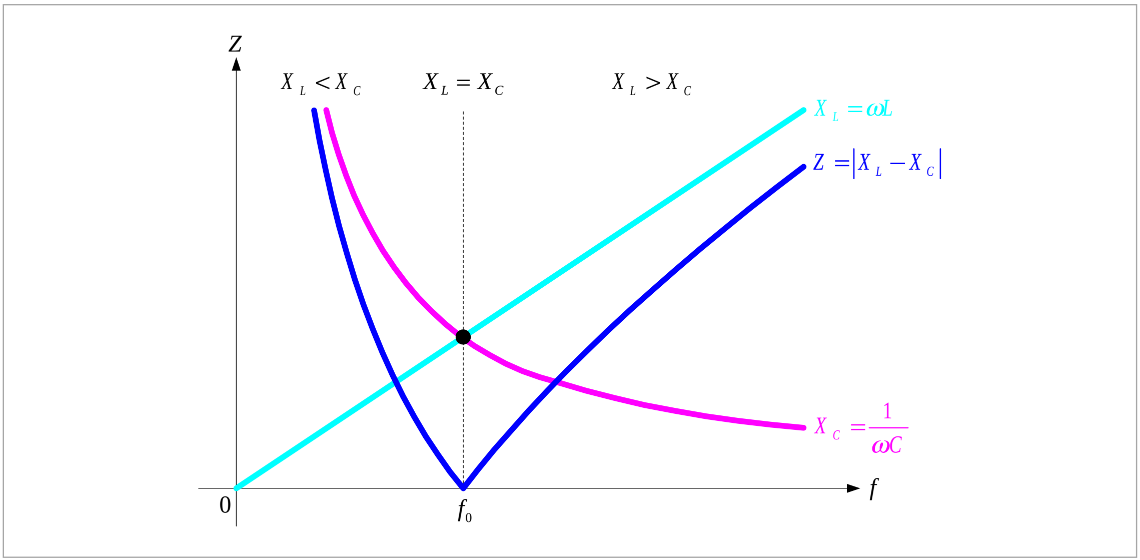
$$\overline{Z} = \overline{X_L} + \overline{X_C} = jX_L + (-jX_C) = j(X_L - X_C)$$
$$= j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = j(2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C}) \quad 〔\Omega, 歐姆〕 \text{(11-1-1)}$$

其中阻抗值 Z 的大小爲：

Σ 重要公式

$$Z = \sqrt{(X_L - X_C)^2} = |X_L - X_C| \quad〔\Omega, 歐姆〕 \qquad (11\text{-}1\text{-}2)$$

當電源頻率開始由零漸增時，電路的阻抗值將隨電源頻率開始產生變化（電感抗漸增、電容抗漸減），其曲線圖繪製如圖 11-2 所示。在圖中我們可以發現：**當電抗 $X_L = X_C$ 時，電路的總阻抗值為零，我們稱此時電路產生諧振**（resonance）。



▲ **圖 11-2　*L-C* 串聯電路的阻抗 - 頻率曲線圖**　諧振時（$f = f_0$），阻抗 $Z_0 = 0$。

電路諧振時，可由電抗的定義：$X_{L0} = \omega_0 L = 2\pi f_0 L = X_{C0} = \dfrac{1}{\omega_0 C} = \dfrac{1}{2\pi f_0 C}$，得諧振頻率 f_0（或表示成 f_r）及諧振角頻率 ω_0（或表示成 ω_r）爲：

Σ 重要公式

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad〔\text{Hz}, 赫芝〕 \qquad (11\text{-}1\text{-}3a)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad〔\text{rad/s}, 弳／秒〕 \qquad (11\text{-}1\text{-}3b)$$

電流

在 L-C 串聯電路中，流經每個元件的電流皆相等，即 $\overline{I}=\overline{I_L}=\overline{I_C}$，其電流值的大小也會受到頻率值的影響（電路的阻抗改變）。如果已知交流電源的電壓為 $\overline{V}$，利用歐姆定律可以將電流表示成：

Σ 重要公式

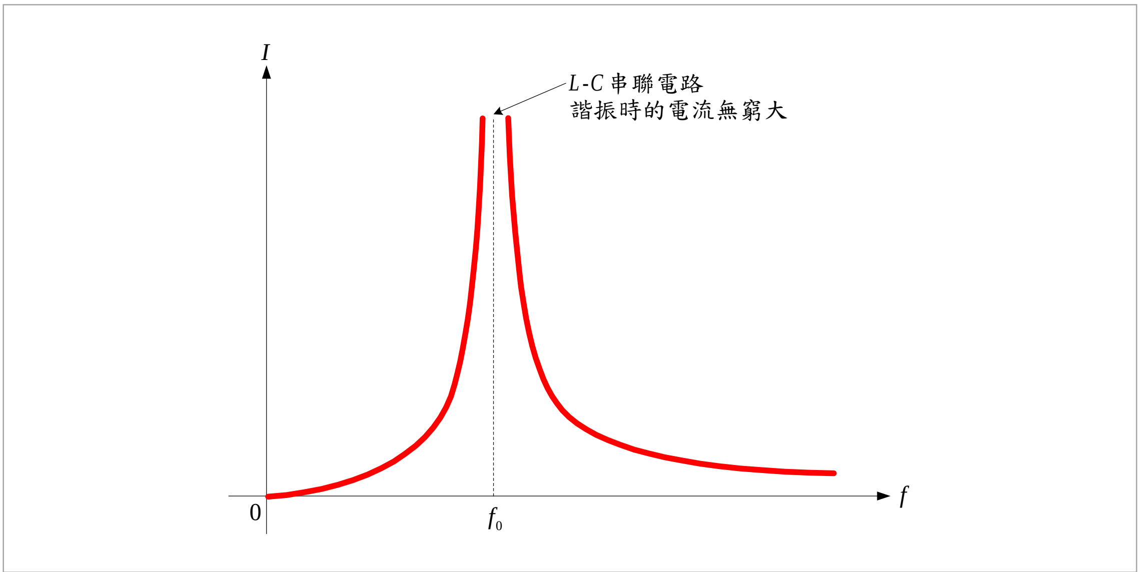
$$\overline{I}=\frac{\overline{V}}{\overline{Z}}=\frac{\overline{V}}{\overline{X_L}+\overline{X_C}}\quad〔\text{A, 安培}〕\qquad(11\text{-}1\text{-}4)$$

其中電流值 I 的大小為：

Σ 重要公式

$$I=\frac{V}{Z}=\frac{V}{|X_L-X_C|}\quad〔\text{A, 安培}〕\qquad(11\text{-}1\text{-}5)$$

由前述可知：**當電路處於諧振狀態時，阻抗 $Z_0=|X_{L0}-X_{C0}|=0$，則電路中的諧振電流將接近無窮大**。圖 11-3 所示即為電流與頻率的曲線圖。



▲ **圖 11-3 L-C 串聯電路的電流 - 頻率曲線圖** 諧振時（$f=f_0$），電流 $I_0=\infty$。

電路特性

圖 11-4 所示爲 *L-C* 串聯電路的相量圖，其電路的特性說明如下：

- **電源頻率小於諧振頻率：**

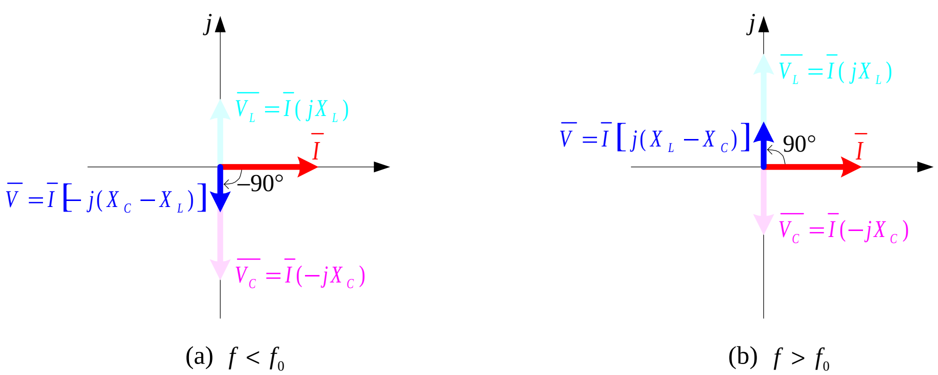
  當 $f < f_0$ 時，電抗 $X_L < X_C$（如圖 11-2 所示），電壓 $V_L < V_C$（$IX_L < IX_C$），則電壓 $\overline{V} = \overline{V_L} + \overline{V_C} = -j(V_C - V_L)$ 落於虛數軸的負方向，即電壓滯後電流相位 90°，如圖 11-4(a)所示，**電路呈電容性**。

- **電源頻率等於諧振頻率：**

  當 $f = f_0$ 時，電抗 $X_L = X_C$，電路無阻抗，產生極大的電流，**電路呈諧振現象**。

- **電源頻率大於諧振頻率：**

  當 $f > f_0$ 時，電抗 $X_L > X_C$，電壓 $V_L > V_C$（$IX_L > IX_C$），則電壓 $\overline{V} = \overline{V_L} + \overline{V_C} = j(V_L - V_C)$ 落於虛數軸的正方向，即電壓超前電流相位 90°，如圖 11-4(b)所示，**電路呈電感性**。



(a) $f < f_0$　　(b) $f > f_0$

註：當 $f = f_0$ 時，由於電流 I 極大，則 $V_L = IX_L$ 、 $V_C = IX_C$ 會遠大於電源電壓 V 。

▲ **圖 11-4　*L-C* 串聯電路的相量圖**　$f < f_0$，電路呈電容性；$f > f_0$，電路呈電感性。

範例 11-1

有一 L-C 串聯電路，若 $L = 32\ \text{mH}$、$C = 500\ \mu\text{F}$，試求電路的諧振頻率為多少？

【解】$f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \dfrac{1}{2\pi\times\sqrt{(32\times10^{-3})\times(500\times10^{-6})}} = \dfrac{1}{2\pi\times0.004}$

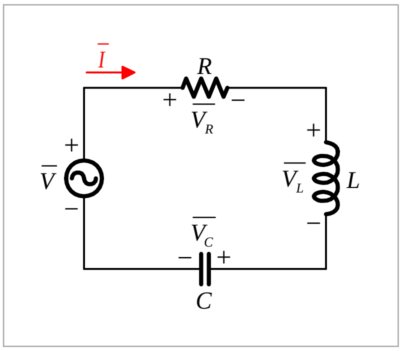
$\cong 39.8\ \text{Hz}$

馬上練習 有一 L-C 串聯電路，其電容器 $C = 200\ \mu\text{F}$，若電路在諧振時的電源角速度（角頻率）$\omega_0 = 250\ \text{rad/s}$，試問電感器的 L 值為多少？

【答】$L = 80\ \text{mH}$。

11-1.2　電阻／電感／電容串聯諧振電路

圖 11-5 所示爲 R-L-C 串聯交流電路。若交流電壓源的頻率 f 爲可變，由於電感器與電容器的電抗與電源的頻率有關，則在電源頻率變化的過程中，電路的各項性質也隨之而變。如同前面章節所述，當交流電壓的頻率調整至某一個值時，也會使得電路產生諧振現象。說明如下。



▲ 圖 11-5　R-L-C 串聯電路

阻抗

由第 9 章第 4 節中的說明可知，R-L-C 串聯電路的總阻抗爲：

Σ 重要公式

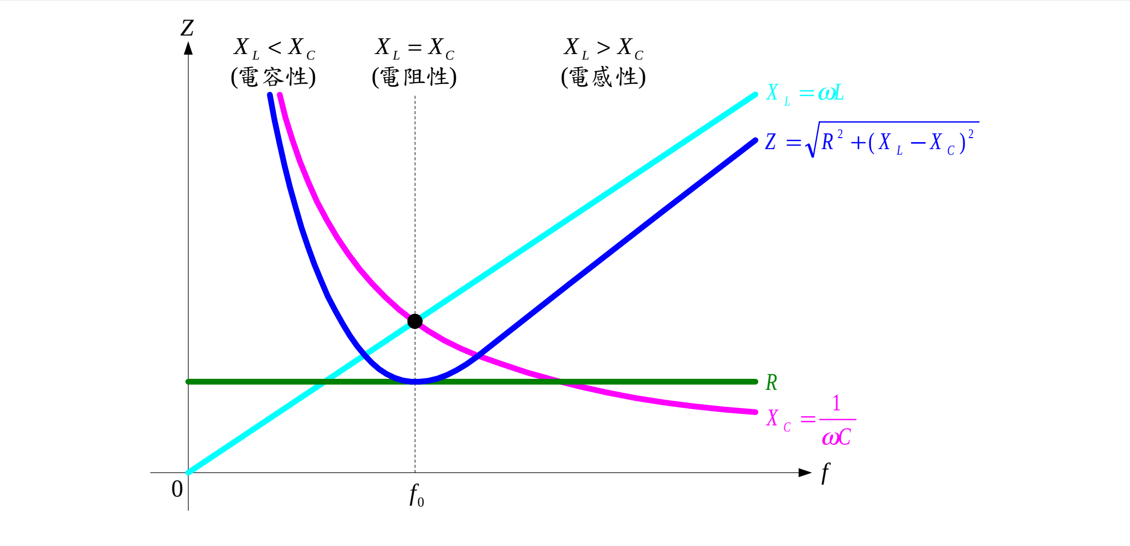
$$\overline{Z} = R + j(X_L - X_C) \quad 〔\Omega, 歐姆〕$$

其中阻抗值 Z 的大小爲：

Σ 重要公式

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad 〔\Omega, 歐姆〕$$

當電源頻率開始由零漸增時，電路的阻抗值將隨電源頻率開始產生變化（電阻值不變、電感抗漸增、電容抗漸減），其曲線圖繪製如圖 11-6 所示。在圖中我們可以發現：**當電抗 $X_L = X_C$ 時，電路的總阻抗有最小值，此時電路產生諧振現象。**



▲ 圖 11-6　*R-L-C* 串聯電路的阻抗 - 頻率曲線圖　諧振時（$f = f_0$），阻抗 $Z_0 = R$。

當電路產生諧振（$X_L = X_C$）時，電路的總阻抗為：

$$\overline{Z} = R + j(X_L - X_C) = R \quad 〔\Omega,\ 歐姆〕 \qquad (11\text{-}1\text{-}6)$$

由電抗的定義：$X_{L0} = \omega_0 L = 2\pi f_0 L = X_{C0} = \dfrac{1}{\omega_0 C} = \dfrac{1}{2\pi f_0 C}$，可得電路諧振頻率 f_0（或表示成 f_r）及諧振角頻率 ω_0（或表示成 ω_r）為：

Σ 重要公式

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad 〔\mathrm{Hz},\ 赫芝〕 \qquad (11\text{-}1\text{-}7a)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad 〔\mathrm{rad/s},\ 徑／秒〕 \qquad (11\text{-}1\text{-}7b)$$

電流

在 *R-L-C* 串聯電路中，流經每個元件的電流皆相等，即 $\overline{I}=\overline{I_R}=\overline{I_L}=\overline{I_C}$，其電流值的大小也會受到頻率值的影響（電路的阻抗改變）。如果已知交流電源的電壓爲 $\overline{V}$，利用歐姆定律可以將電流表示成：

Σ 重要公式

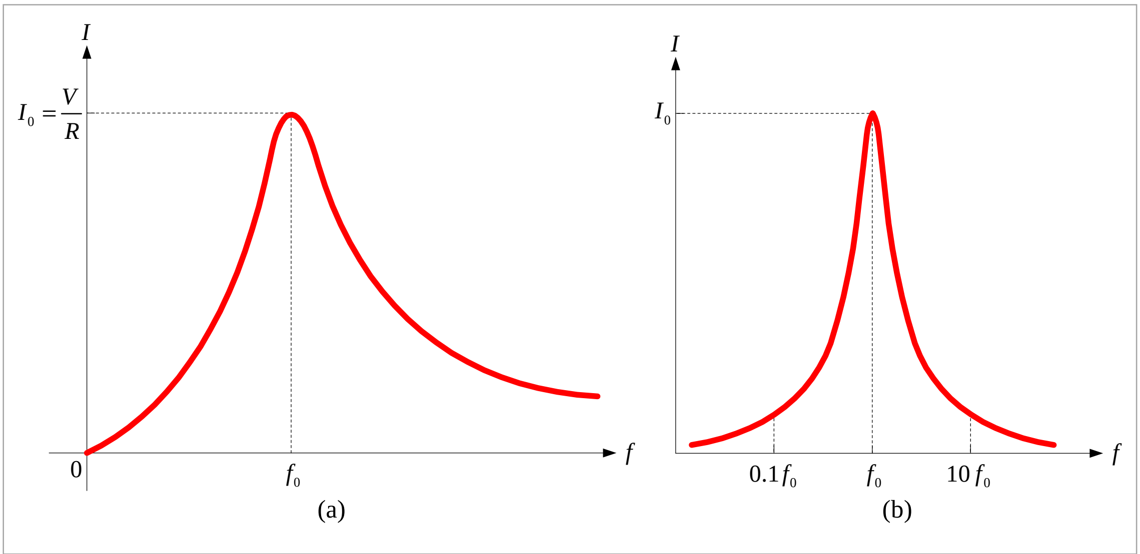
$$\overline{I}=\frac{\overline{V}}{\overline{Z}}=\frac{\overline{V}}{R+j(X_L-X_C)}\quad〔\mathrm{A},\ 安培〕\qquad(11\text{-}1\text{-}8)$$

其中電流值 I 的大小爲：

Σ 重要公式

$$I=\frac{V}{Z}=\frac{V}{\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}}\quad〔\mathrm{A},\ 安培〕\qquad(11\text{-}1\text{-}9)$$

由前述可知：當電路處於諧振狀態時，總阻抗 $Z_0=\sqrt{R^2+(X_{L0}-X_{C0})^2}=R$ 為最小值，則電路中的諧振電流 $I_0=\dfrac{V}{Z_0}=\dfrac{V}{R}$ 為最大值。圖 11-7 所示，即爲電流與頻率的曲線圖；其中若將頻率軸以**對數刻度**（logarithmic scalar）表示，則電流曲線會在諧振頻率兩邊形成對稱的圖形，如圖 11-7(b)所示。



▲ **圖 11-7 *R-L-C* 串聯電路的電流-頻率曲線圖** 諧振時（$f=f_0$），電流 I_0 為最大值。

電路特性

圖 11-8 所示為 *R-L-C* 串聯電路的相量圖，其電路的特性說明如下：

- **電源頻率小於諧振頻率：**

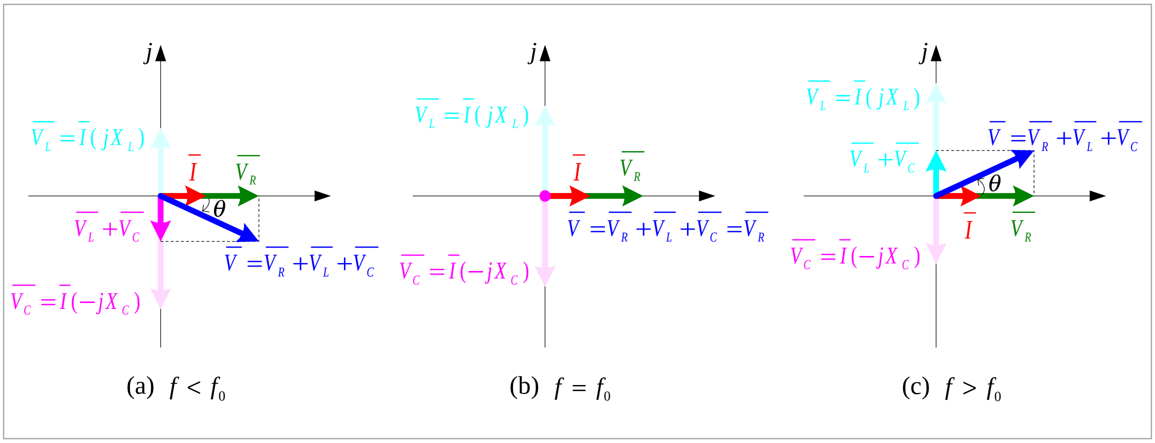
  當 $f < f_0$ 時，電抗 $X_L < X_C$（如圖 11-6 所示），電壓 $V_L < V_C$（$IX_L < IX_C$），則電壓 $\overline{V} = \overline{V_R} + \overline{V_L} + \overline{V_C} = V_R - j(V_C - V_L)$ 落於第四象限，即電壓相位滯後電流相位，如圖 11-8(a)所示，**電路呈電容性**。

- **電源頻率等於諧振頻率：**

  當 $f = f_0$ 時，電抗 $X_L = X_C$，電壓 $V_L = V_C$（$IX_L = IX_C$），則電壓 $\overline{V} = \overline{V_R} + \overline{V_L} + \overline{V_C} = \overline{V_R} = \overline{I}R$，即電壓與電流同相位，如圖 11-8(b)所示，**電路呈電阻性**。諧振時，電路阻抗 $Z_0 = R$ 為最小，產生最大的電流 $I_0 = \dfrac{V}{R}$。

- **電源頻率大於諧振頻率：**

  當 $f > f_0$ 時，電抗 $X_L > X_C$，電壓 $V_L > V_C$（$IX_L > IX_C$），則電壓 $\overline{V} = \overline{V_R} + \overline{V_L} + \overline{V_C} = V_R + j(V_L - V_C)$ 落於第一象限，即電壓相位超前電流相位，如圖 11-8(c)所示，**電路呈電感性**。



▲ **圖 11-8　*R-L-C* 串聯電路的相量圖**　$f < f_0$，電路呈電容性；$f = f_0$，電路呈電阻性；$f > f_0$，電路呈電感性。

功率與功率因數

當串聯電路發生諧振現象時，電感抗 X_L 與電容抗 X_C 相等時，串聯電路呈電阻性，電壓與電流同相位，功率因數角 $\theta_p = \theta_i - \theta_v = 0°$。所以，**功率因數最大**：

Σ 重要公式

$$PF = \cos\theta_p = \cos 0° = 1 \quad 或 \quad PF = \frac{R}{Z_0} = \frac{R}{R} = 1 \qquad (11\text{-}1\text{-}10)$$

串聯諧振電路的平均功率 P_0 即為電阻 R 所消耗的功率：

Σ 重要公式

$$P_0 = VI_0 = I_0^2 R = \frac{V^2}{R} \qquad (11\text{-}1\text{-}11)$$

※知識充電

有一 R-L-C 串聯電路，若電源頻率為 f 時的電感抗為 X_L、電容抗為 X_C，則電路的諧振頻率 f_0 可表示為：

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{2\pi fL}{f})(\frac{2\pi fC}{f})}}$$

$$= f\sqrt{\frac{\frac{1}{2\pi fC}}{2\pi fL}} = f\sqrt{\frac{X_C}{X_L}}$$

註：此公式亦可適用於 R-L-C 並聯電路。

範例 11-2

有一 R-L-C 串聯電路，若電壓 $V=100$ V 、 $R=10\,\Omega$ 、 $L=160$ mH 、 $C=100\,\mu$F ，試求電路諧振時

(1)諧振角頻率 ω_0　(2)總阻抗 Z_0　(3)總電流 I_0

(4)各元件的端電壓 V_{R0} 、 V_{L0} 、 V_{C0}　(5)平均功率 P_0　(6)功率因數 PF 為多少？

【解】(1) $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \dfrac{1}{\sqrt{(160\times10^{-3})\times(100\times10^{-6})}} = \dfrac{1}{0.004} = 250$ rad/s

(2) $Z_0 = \sqrt{R^2+(X_{L0}-X_{C0})^2} = R = 10\,\Omega$

(3) $I_0 = \dfrac{V}{Z_0} = \dfrac{V}{R} = \dfrac{100}{10} = 10$ A

(4) $X_{L0} = X_{C0} = \omega_0 L = 250\times(160\times10^{-3}) = 40\,\Omega$

$V_{R0} = I_0 R = 10\times10 = 100$ V

$V_{L0} = I_0 X_{L0} = 10\times40 = 400$ V

$V_{C0} = I_0 X_{C0} = 10\times40 = 400$ V

(5) $P_0 = I_0^2 R = 10^2\times10 = 1000$ W

(6) $PF = \dfrac{R}{Z_0} = \dfrac{10}{10} = 1$

馬上練習　有一 R-L-C 串聯電路，若電壓 $V=100$ V 、 $R=1\,\Omega$ 、 $L=20$ mH 、 $C=200\,\mu$F，試求電路諧振時

(1)諧振角頻率 ω_0　(2)電抗 X_{L0} 及 X_{C0}　(3)總電流 I_0

(4)電壓 V_{L0} 及 V_{C0}　(5)平均功率 P_0 為多少？

【答】(1) $\omega_0 = 500$ rad/s

(2) $X_{L0} = X_{C0} = 10\,\Omega$

(3) $I_0 = 100$ A

(4) $V_{L0} = V_{C0} = 1000$ V

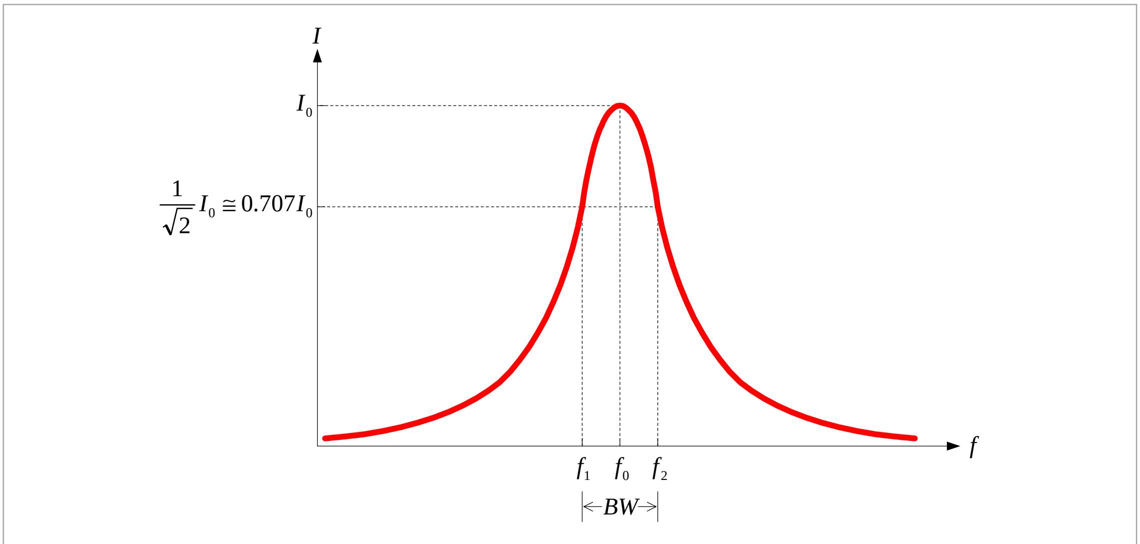
(5) $P_0 = 10000$ W

選擇性與品質因數

選擇性（selectivity）與**品質因數**（quality factor）是用來判斷交流諧振電路好壞程度的重要指標：選擇性可以用來判斷電路在特定頻率時，是否有較大訊號出現；而品質因數則可看出電路消耗功率的情況。

頻帶寬度

串聯交流電路在發生諧振現象時，電路的諧振電流 I_0 為最大值，我們定義電流值在大於或等於 $\frac{1}{\sqrt{2}}I_0$（約 $0.707I_0$ ）所對應的頻率區段為**頻帶寬度**（**B**and**W**idth ，簡記為 BW） ，簡稱為頻寬，如圖 11-9 所示。



▲ 圖 11-9 *R-L-C* 串聯電路電流對應的頻帶寬度

由圖 11-9 可以看出，對應 $0.707I_0$ 的頻率分別為 f_1 與 f_2 ，稱為**截止頻率**（cutoff frequency）。交流電壓的頻率在 f_1 與 f_2 之間時，電路有最大的電流量，表示交流訊號較容易通過，頻率較小的 f_1 稱為**下限截止頻率**（lower cutoff frequency），頻率較大的 f_2 稱為**上限截止頻率**（upper cutoff frequency）。因此，可以將頻帶寬度以數學式表示為：

Σ 重要公式

$$BW = f_2 - f_1 \quad \text{〔Hz, 赫芝〕} \qquad (11\text{-}1\text{-}12)$$

截止頻率 f_1 與 f_2 也稱爲半功率頻率（half-power frequency），因爲電路在頻率 f_1、f_2 時的平均功率，正好為諧振頻率時所達到最大功率的一半。如果電路在諧振時的平均功率爲：

$$P_0 = I_0^2 R \quad 〔\text{W, 瓦特}〕$$

則電路在截止頻率時的平均功率爲：

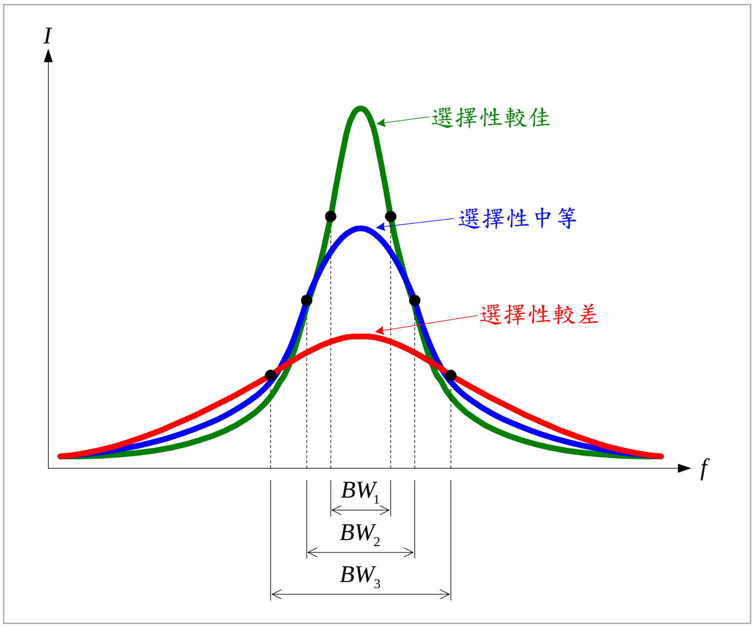
$$P_f = I_f^2 R = (\frac{1}{\sqrt{2}} I_0)^2 R = \frac{1}{2} I_0^2 R = \frac{1}{2} P_0 \quad 〔\text{W, 瓦特}〕 \qquad (11\text{-}1\text{-}13)$$

選擇性

圖 11-9 的頻率 - 電流關係曲線稱爲頻率響應特性曲線，也稱爲**選擇性**（selectivity）特性曲線。選擇性是用來判斷諧振電路是否有較佳的頻率響應，即某頻率之電流大小可以明顯與其它波段頻率的電流作區分。

如圖 11-10 所示，若頻帶寬度（BW）愈窄，表示諧振電路的選擇性愈好，我們所期望之某頻率訊號的響應程度明顯比其它波段頻率大，即可以輕易篩選出所要的訊號；反之，若頻帶寬度愈寬，則選擇性愈差。

註：以廣播的通訊為例，若頻帶寬度（BW）愈小，則只有被選擇的電台頻率有聲音輸出，而沒有其他電台頻率的聲音干擾輸出，即此電路之選擇性高。



▲ 圖 11-10　不同頻寬的選擇性曲線

品質因數

在包含電感器與電容器的交流電路中，有部分能量會儲存在電感器與電容器內，並在兩者間相互轉移，此部分即爲電路的虛功率。我們定義諧振電路的**品質因數**（quality factor，簡記爲 Q）爲諧振電路中電感抗或電容抗的虛功率（Q_L、Q_C）與平均功率（P）的比值，因此品質因數爲：

Σ 重要公式

$$Q = \frac{Q_{L0}}{P} = \frac{I_L^2 X_{L0}}{I_R^2 R} \quad \text{或} \quad Q = \frac{Q_{C0}}{P} = \frac{I_C^2 X_{C0}}{I_R^2 R} \qquad (11\text{-}1\text{-}14)$$

由於諧振電路的電感抗與電容抗大小相等，且通過串聯電路各元件的電流均相等，所以上式可以表示爲：

Σ 重要公式

$$\begin{aligned} Q &= \frac{X_{L0}}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2\pi f_0 L}{R} \\ &= \frac{X_{C0}}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{2\pi f_0 CR} \end{aligned} \qquad (11\text{-}1\text{-}15)$$

將諧振頻率 $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ 代入上式，則品質因數 Q 可表示成：

Σ 重要公式

$$Q = \frac{2\pi L}{R}(f_0) = \frac{2\pi L}{R}\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\right) = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (11\text{-}1\text{-}16)$$

R-L-C 串聯電路諧振時，各元件的端電壓可表示成：

Σ 重要公式

$$V_{R0} = I_0 R = I_0 Z_0 = V \quad \text{〔V, 伏特〕} \qquad (11\text{-}1\text{-}17a)$$

$$V_{L0} = I_0 X_{L0} = \frac{V}{R} X_{L0} = QV \quad \text{〔V, 伏特〕} \qquad (11\text{-}1\text{-}17b)$$

$$V_{C0} = I_0 X_{C0} = \frac{V}{R} X_{C0} = QV \quad \text{〔V, 伏特〕} \qquad (11\text{-}1\text{-}17c)$$

通常品質因數 Q 會遠大於 1，所以由上式可知 R-L-C 串聯電路在諧振時，電感器與電容器的電壓會升高為電源電壓的 Q 倍，造成電壓放大的作用，稱為**諧振升壓**（resonant rise of voltage）。故串聯諧振亦可稱為**電壓共振**。

在諧振頻率為 f_0 時，品質因數 Q 與頻帶寬度 BW 的關係為：

Σ 重要公式

$$Q = \frac{f_0}{BW} \qquad (11\text{-}1\text{-}18)$$

上式的證明過於複雜，在此並不打算特別說明，我們只要知道：**如果品質因數愈高，則頻帶寬度愈小，選擇性愈佳；相反地，如果品質因數愈小，則頻帶寬度則愈大，選擇性愈差**。將 $Q = \frac{X_{L0}}{R} = \frac{2\pi f_0 L}{R}$ 代入(11-1-18)式，則 R-L-C 串聯諧振電路的頻寬可表示為：

Σ 重要公式

$$BW = \frac{f_0}{Q} = \frac{f_0}{\frac{2\pi f_0 L}{R}} = \frac{R}{2\pi L} \quad \text{〔Hz, 赫芝〕} \qquad (11\text{-}1\text{-}19)$$

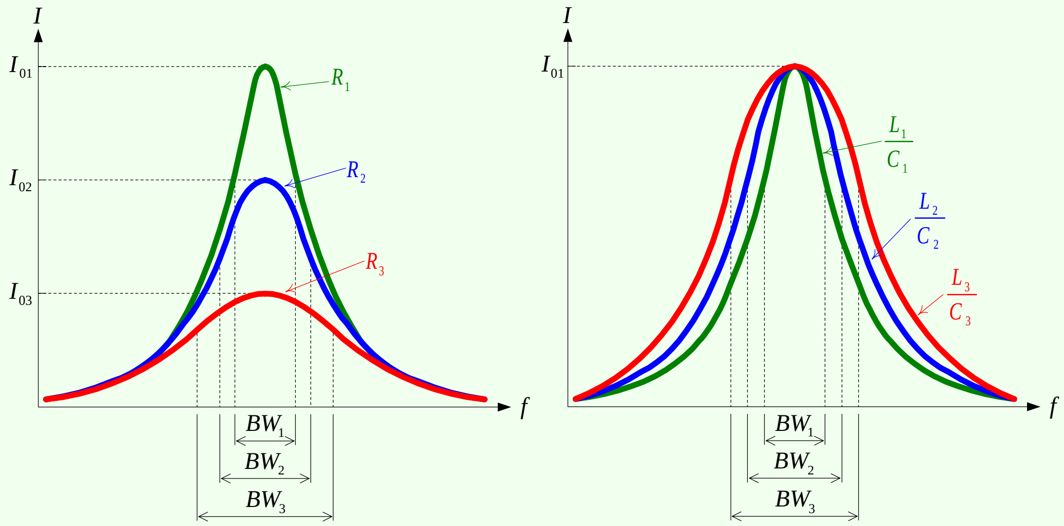
※知識充電

- 如果諧振電路的品質因數 $Q \geq 10$ 時，電路的電流 I- 頻率 f 曲線圖會接近對稱於諧振頻率 f_0，則電路的上下限截止頻率可表示為：

$$\text{下限截止頻率：} f_1 \cong f_0 - \frac{BW}{2} \quad \text{〔Hz, 赫芝〕}$$

$$\text{上限截止頻率：} f_2 \cong f_0 + \frac{BW}{2} \quad \text{〔Hz, 赫芝〕}$$

- 由(11-1-16)式：$Q=\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$，可知 R-L-C 串聯諧振電路的品質因數 Q 與 R 值、$\dfrac{L}{C}$ 值兩項因子有關。當 $\dfrac{L}{C}$ 值固定時，R 值愈大，則 Q 值愈小、BW 值愈大、選擇性愈差、諧振電流 I_0 隨 R 值增加而減小，如下圖(a)所示；當 R 值固定時，$\dfrac{L}{C}$ 值愈大，則 Q 值愈大、BW 值愈小、選擇性愈好、諧振電流 I_0 不變，如下圖(b)所示。



(a) $R_1<R_2<R_3$　　(b) $\dfrac{L_1}{C_1}>\dfrac{L_2}{C_2}>\dfrac{L_3}{C_3}$

範例 11-3

有一 R-L-C 串聯電路諧振時，若外加電壓 $V=100$ V、$R=4\,\Omega$、$X_{L0}=X_{C0}=1000\,\Omega$，此時電感器與電容器兩端的電壓為多少？

【解】$Q=\dfrac{X_{L0}}{R}=\dfrac{1000}{4}=250$

$V_{L0}=V_{C0}=QV=250\times100=25\text{ kV}$

（或 $I_0=\dfrac{V}{Z_0}=\dfrac{V}{R}=\dfrac{100}{4}=25\text{ A}$　$V_{L0}=V_{C0}=I_0X_{L0}=25\times1000=25\text{ kV}$）

範例 11-4

有一 R-L-C 串聯電路，若電壓 $V=100\text{ V}$ 、 $R=10\,\Omega$ 、 $L=160\text{ mH}$ 、 $C=100\,\mu\text{F}$ ，試求電路諧振時 (1)諧振頻率 f_0 (2)品質因數 Q (3)頻帶寬度 BW 為多少？

【解】(1) $f_0=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{(160\times10^{-3})\times(100\times10^{-6})}}=\dfrac{1}{2\pi\times0.004}=\dfrac{125}{\pi}\cong 40\text{ Hz}$

(2) $Q=\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}=\dfrac{1}{10}\sqrt{\dfrac{160\times10^{-3}}{100\times10^{-6}}}=4$

（或 $Q=\dfrac{X_{L0}}{R}=\dfrac{2\pi f_0 L}{R}=\dfrac{2\pi\times\dfrac{125}{\pi}\times(160\times10^{-3})}{10}=4$ ）

(3) $BW=\dfrac{f_0}{Q}=\dfrac{\dfrac{125}{\pi}}{4}=\dfrac{125}{4\pi}\cong 10\text{ Hz}$

（或 $BW=\dfrac{R}{2\pi L}=\dfrac{10}{2\pi\times(160\times10^{-3})}\cong 10\text{ Hz}$ ）

馬上練習　有一 R-L-C 串聯電路，若電壓 $V=100\text{ V}$ 、 $R=1\,\Omega$ 、 $L=20\text{ mH}$ 、 $C=200\,\mu\text{F}$，試求電路諧振時 (1)諧振頻率 f_0 (2)品質因數 Q (3)頻帶寬度 BW 為多少？

【答】(1) $f_0\cong 80\text{ Hz}$ ；(2) $Q=10$ ；(3) $BW\cong 8\text{ Hz}$ 。

※ 11-1.3　串聯諧振電路總結

L-C 串聯諧振電路

1. L-C 串聯諧振電路之電感抗等於電容抗，即

   $X_{L0}=X_{C0}$

2. L-C 串聯諧振電路之總阻抗（ $Z_0=X_0$ 或 $Z_r=X_r$ ）等於零，即

   $Z_0=X_0=X_{L0}-X_{C0}=0$

3. L-C 串聯諧振電路之總電流（ I_0 或 I_r ）為無窮大，即

   $I_0=\dfrac{V}{Z_0}=\infty$

4. 諧振頻率（f_0 或 f_r）：$f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

諧振角頻率（ω_0 或 ω_r）：$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

*R-L-C*串聯諧振電路

1. *R-L-C* 串聯諧振電路之總電抗（X_0 或 X_r）等於零，即

$X_{L0} = X_{C0}$；$X_0 = X_{L0} - X_{C0} = 0$

2. *R-L-C* 串聯諧振電路之總阻抗（Z_0 或 Z_r）為最小，電路呈現電阻性，即

$Z_0 = R + j(X_{L0} - X_{C0}) = R$；$\theta_Z = 0°$

3. *R-L-C* 串聯諧振電路之總電流（I_0 或 I_r）為最大，且通過各元件的電流相等，即

$I_0 = I_{R0} = I_{L0} = I_{C0} = \dfrac{V}{Z_0} = \dfrac{V}{R}$

4. *R-L-C* 串聯諧振電路之電阻器電壓（V_{R0} 或 V_{Rr}）等於總電壓，即

$V_{R0} = V$

5. *R-L-C* 串聯諧振電路之電感器電壓（V_{L0} 或 V_{Lr}）等於電容器電壓（V_{C0} 或 V_{Cr}），而相位相差180°，即

$V_{L0} = V_{C0} = QV$

6. *R-L-C* 串聯諧振電路之平均功率（P_0 或 P_r）為最大，且等於視在功率，即

$P_0 = I_0^2 R = V_{R0} I_0 = VI_0 = S_0$；$P_0 = VI_0 \cos 0° = VI_0 = S_0$

7. *R-L-C* 串聯諧振電路之電抗功率（Q_0 或 Q_r）等於零，即

$Q_{C0} = I_0^2 X_{C0} = I_0^2 X_{L0} = Q_{L0}$；$Q_0 = Q_{C0} - Q_{L0} = 0$

8. *R-L-C* 串聯諧振電路之功率因數等於 1，即

$PF = \cos 0° = 1$；$PF = \dfrac{R}{Z_0} = \dfrac{R}{R} = 1$

9. 諧振頻率（ f_0 或 f_r ）： $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = f\sqrt{\dfrac{X_C}{X_L}}$

諧振角頻率（ ω_0 或 ω_r ）： $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \omega\sqrt{\dfrac{X_C}{X_L}}$

10. 品質因數： $Q = \dfrac{X_{L0}}{R} = \dfrac{X_{C0}}{R} = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} = \dfrac{f_0}{BW}$

11. 頻帶寬度： $BW = f_2 - f_1 = \dfrac{f_0}{Q} = \dfrac{R}{2\pi L}$

註：品質因數與電抗功率都用代號 Q 來表示，當同學在看到公式時，要注意分辨清楚其代表的含意。

單元評量

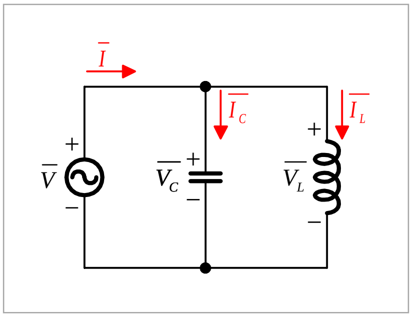
1. 在 L-C 串聯電路中，電路的諧振頻率為 ________。
2. 有一 L-C 串聯電路，若 $L = 500$ mH、 $C = 450\,\mu$F，則電路的諧振角頻率為 ________ rad/s。
3. 有一 L-C 串聯電路，若 $L = 100$ mH 、 $C = 0.1\,\mu$F，則電路的諧振頻率為 ________ kHz。
4. 有一 L-C 串聯諧振電路，已知 $L = 100$ mH，若諧振頻率為 $\dfrac{1000}{\pi}$ Hz，則電路諧振時的電感抗 X_L 為 ________ Ω。
5. 承上題，電路的電容值 C 為 ________ μF。
6. 在 R-L-C 串聯電路中，電路的諧振頻率為 ________；電壓相位 ________ 電流相位；電路呈 ________ 性；功率因數為 ________。
7. 將一電壓 $v(t) = 120\sin(1000t + 30°)$ V 加於一 R-L-C 串聯電路，若 $C = 100\,\mu$F，則當電路達諧振頻率時，電感值 L 應為 ________ mH。
8. 有一 R-L-C 串聯交流諧振電路，若電源電壓 $V = 200$ V、 $R = 100\,\Omega$、 $L = 40$ mH、 $C = 0.01\,\mu$F，則電路的諧振頻率 $f_0 =$ ________ Hz；總電流 $I_0 =$ ________ A；品質因數 $Q =$ ________；頻帶寬度 $BW =$ ________ Hz；電感器電壓 $V_{L0} =$ ________ V；電容器電壓 $V_{C0} =$ ________ V。
9. 有一 R-L-C 串聯電路，若其電源頻率為 60Hz、 $R = 10\,\Omega$、 $X_L = 100\,\Omega$、 $X_C = 4\,\Omega$，則電路諧振時的頻率 $f_0 =$ ________ Hz；品質因數 $Q =$ ________。
10. 有一 R-L-C 串聯交流電路，若諧振時的電源頻率為 500Hz， $R = 5\,\Omega$、 $X_{L0} = 100\,\Omega$，則此諧振電路的頻寬 $BW =$ ________ Hz。

11-2　並聯諧振電路

※11-2.1　電感／電容並聯諧振電路

圖 11-11 所示為基本的 *L-C* 並聯電路。由於並聯電路中各個元件的電壓都相等，所以我們利用電源電壓的相位作為參考基準，則通過電感器上的電流相位滯後電壓相位 90°，電容器上的電流相位超前電壓相位 90°。

若交流電壓源的工作頻率 f 不為定值，其輸出的頻率值由 0 Hz 開始漸漸增加；由於電感器與電容器的電納（電抗）與電源的頻率有關（$B_L = \dfrac{1}{X_L} = \dfrac{1}{2\pi fL}$，$B_C = \dfrac{1}{X_C} = 2\pi fC$），則在電源頻率變化的過程中，電路呈現的導納、電流等性質也將相對地改變。我們說明如下。



▲ 圖 11-11　*L-C* 並聯電路

導納

導納是阻抗的倒數，在分析並聯電路時，利用導納作為計算的工具是比較方便的。在 *L-C* 並聯交流電路中，導納 $\overline{Y}$ 是電感納 $\overline{B_L}$ 與電容納 $\overline{B_C}$ 的相量和，其中 B_L 與 B_C 分別為：

$$B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{2\pi fL} \quad 〔℧, 姆歐〕$$

$$B_C = \frac{1}{X_C} = \omega C = 2\pi fC \quad 〔℧, 姆歐〕$$

在相量圖中，電感納 $\overline{B_L}$ 位在負方向的虛數軸上，電容納 $\overline{B_C}$ 則位在正方向的虛數軸，所以電路的總導納 $\overline{Y}$ 用相量表示成：

Σ 重要公式

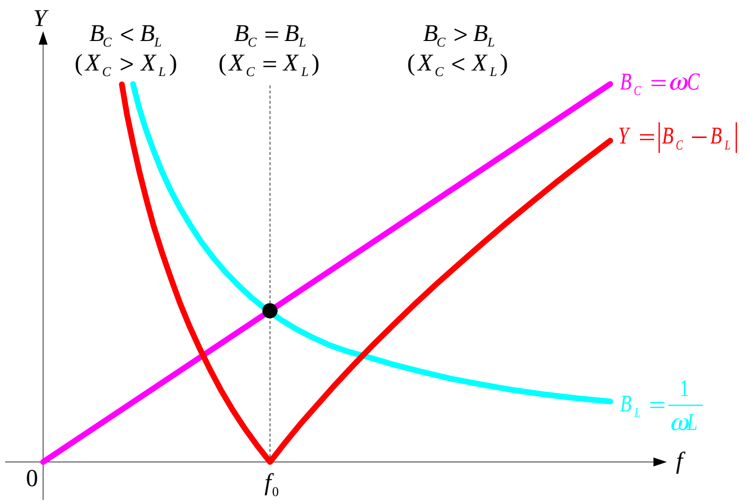
$$\begin{aligned}\overline{Y} &= \overline{B_L} + \overline{B_C} = (-jB_L) + jB_C = j(B_C - B_L) \\ &= j(\omega C - \frac{1}{\omega L}) = j(2\pi f C - \frac{1}{2\pi f L})\end{aligned}$$ 〔℧, 姆歐〕 (11-2-1)

其中導納值 Y 的大小為：

Σ 重要公式

$$Y = \sqrt{(B_C - B_L)^2} = |B_C - B_L|$$ 〔℧, 姆歐〕 (11-2-2)

當電源頻率開始由零漸增時，電路的導納值將隨電源頻率開始產生變化（電感納漸減、電容納漸增），其曲線圖繪製如圖 11-12 所示。在圖中我們可以發現：**當電納 $B_C = B_L$ 時，電路的總導納值為零，即總阻抗無窮大，此時電路產生諧振。**



▲ **圖 11-12 *L-C* 並聯電路的導納 - 頻率曲線圖** 諧振時（$f = f_0$），導納 $Y_0 = 0$。

電路諧振時，可由電納的定義：$B_{C0} = \omega_0 C = 2\pi f_0 C = B_{L0} = \dfrac{1}{\omega_0 L} = \dfrac{1}{2\pi f_0 L}$，得諧振頻率 f_0（或表示成 f_r）及諧振角頻率 ω_0（或表示成 ω_r）為：

Σ 重要公式

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad 〔\mathrm{Hz}, 赫芝〕 \qquad (11\text{-}2\text{-}3a)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad 〔\mathrm{rad/s}, 弳／秒〕 \qquad (11\text{-}2\text{-}3b)$$

電流

在 L-C 並聯電路中，每個元件的電壓皆相等，即 $\overline{V} = \overline{V_L} = \overline{V_C}$，其電流值的大小也會受到頻率值的影響（電路的阻抗改變）。如果已知交流電源的電壓爲 $\overline{V}$，利用歐姆定律可以將電流表示成：

Σ 重要公式

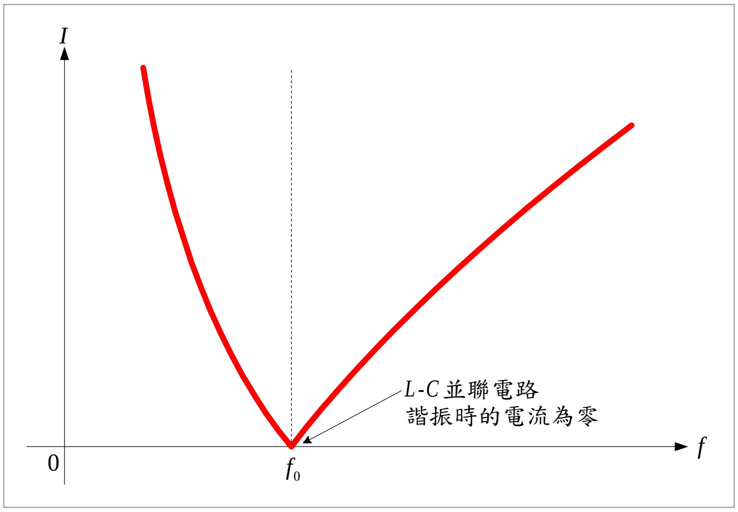
$$\overline{I} = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}} = \overline{V}\cdot\overline{Y} = \overline{V}\cdot(\overline{B_L}+\overline{B_C}) \quad 〔\mathrm{A}, 安培〕 \qquad (11\text{-}2\text{-}4)$$

其中電流值 I 的大小爲：

Σ 重要公式

$$I = \frac{V}{Z} = VY = V\left|B_C - B_L\right| \quad 〔\mathrm{A}, 安培〕 \qquad (11\text{-}2\text{-}5)$$

由前述可知：**當電路處於諧振狀態時，導納 $Y_0 = \left|B_{C0} - B_{L0}\right| = 0$（阻抗為無窮大），則電路中的諧振電流將為零。**圖 11-13 所示即爲電流與頻率的曲線圖。



▲ 圖 11-13　L-C 並聯電路的電流 - 頻率曲線圖　諧振時（$f = f_0$），電流 $I_0 = 0$。

電路特性

圖 11-14 所示為 *L-C* 並聯電路的相量圖，其電路的特性說明如下：

電源頻率小於諧振頻率：

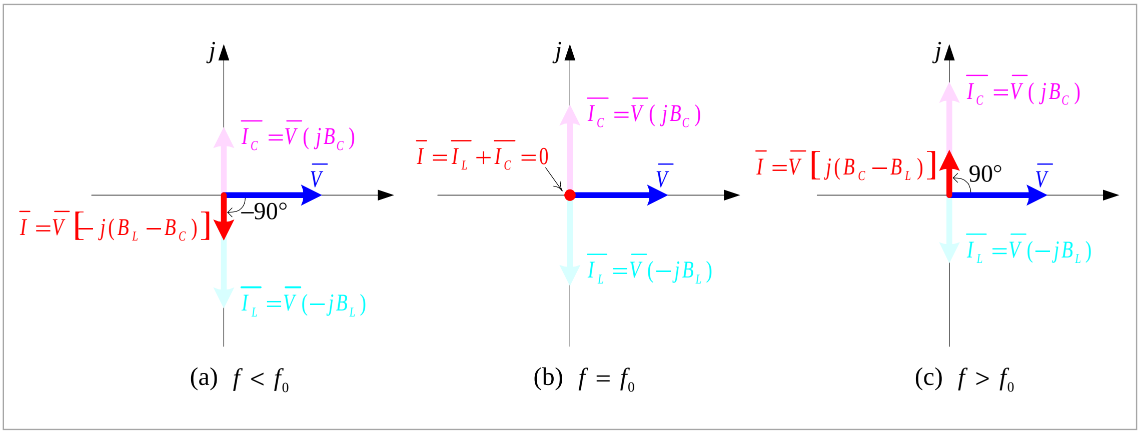
當 $f<f_0$ 時，電納 $B_C<B_L$（電抗 $X_C>X_L$，如圖 11-12 所示），電流 $I_C<I_L$（$VB_C<VB_L$），則電流 $\overline{I}=\overline{I_L}+\overline{I_C}=-j(I_L-I_C)$ 落於虛數軸的負方向，即電流滯後電壓相位 90°，如圖 11-14(a)所示，**電路呈電感性**。

電源頻率等於諧振頻率：

當 $f=f_0$ 時，電納 $B_C=B_L$（電抗 $X_C=X_L$），電路的總導納為零，即阻抗無窮大，所產生電流為零，如圖 14-14(b)所示，**電路呈諧振現象**。

電源頻率大於諧振頻率：

當 $f>f_0$ 時，電納 $B_C>B_L$（電抗 $X_C<X_L$），電流 $I_C>I_L$（$VB_C>VB_L$），則電壓 $\overline{I}=\overline{I_L}+\overline{I_C}=j(I_C-I_L)$ 落於虛數軸的正方向，即電流超前電壓相位 90°，如圖 11-14(c)所示，**電路呈電容性**。



▲ **圖 11-14 *L-C* 並聯電路的相量圖**　$f<f_0$，電路呈電感性；$f>f_0$，電路呈電容性。

範例 11-5

有一 L-C 並聯電路，若電壓 $V=100$ V 、 $L=0.5$ H 、 $C=8\,\mu$F，試求電路諧振時 (1)諧振角頻率 ω_0 (2)總導納 Y_0 (3)總電流 I_0 (4)各元件電流 I_{L0} 、 I_{C0} 為多少？

【解】(1) $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \dfrac{1}{\sqrt{0.5\times(8\times10^{-6})}} = 500$ rad/s

(2) $Y_0 = \sqrt{(B_{C0}-B_{L0})^2} = 0$ ℧

(3) $I_0 = VY_0 = 100\times0 = 0$ A

(4) $B_{C0} = B_{L0} = \omega_0 C = 500\times(80\times10^{-6}) = 40$ m℧

$I_{L0} = VB_{L0} = 100\times(40\times10^{-3}) = 4$ A

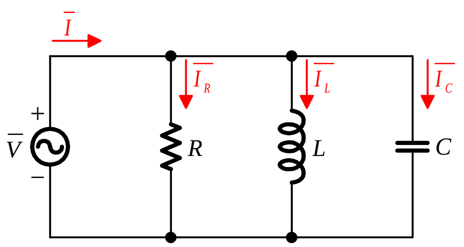
$I_{C0} = VB_{C0} = 100\times(40\times10^{-3}) = 4$ A

馬上練習 承上題，若電感 L 變為 4H，而諧振頻率不改變，則電容 C 的大小應變為多少？

【答】$C = 1\,\mu$F。

11-2.2 電阻／電感／電容並聯諧振電路

圖 11-15 所示爲 R-L-C 並聯交流電路。若交流電壓源的頻率 f 爲可變，由於電感器與電容器的電納（電抗）與電源的頻率有關，則在電源頻率變化的過程中，電路的各項性質也隨之而變。如同前面章節所述，當交流電壓的頻率調整至某一個值時，也會使得電路產生諧振現象。我們說明如下。



▲ 圖 11-15 R-L-C 並聯電路

導納

由第 9 章第 7 節中的說明可知，*R-L-C* 並聯電路的總導納為：

Σ 重要公式

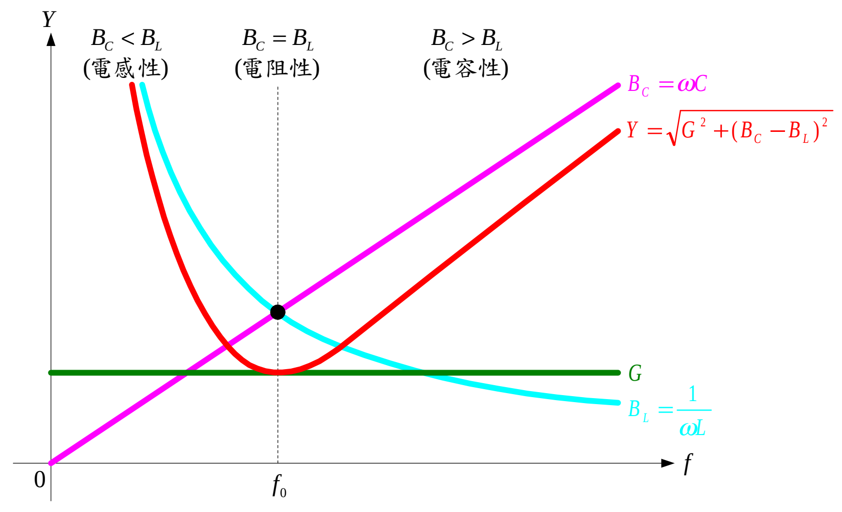
$$\overline{Y} = G + j(B_C - B_L) \quad 〔℧, 姆歐〕$$

其中導納值 Y 的大小為：

Σ 重要公式

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2} \quad 〔℧, 姆歐〕$$

當電源頻率開始由零漸增時，電路的導納值將隨電源頻率開始產生變化（電導值不變、電容納漸增、電感納漸減），其曲線圖繪製如圖 11-16 所示。在圖中我們可以發現：**當電納 $B_C = B_L$（即電抗 $X_C = X_L$）時，電路的總導納有最小值，此時電路產生諧振現象。**



▲ 圖 11-16　*R-L-C* 並聯電路的導納 - 頻率曲線圖　諧振時（$f = f_0$），導納 $Y_0 = G$ 。

當電路產生諧振（ $B_C = B_L$ ）時，電路的總導納爲：

$$\overline{Y} = G + j(B_C - B_L) = G \quad〔℧, 姆歐〕 \qquad (11\text{-}2\text{-}6)$$

由電納的定義： $B_{C0} = \dfrac{1}{X_{C0}} = \omega_0 C = 2\pi f_0 C = B_{L0} = \dfrac{1}{X_{L0}} = \dfrac{1}{\omega_0 L} = \dfrac{1}{2\pi f_0 L}$ ，可得電路諧振頻率 f_0（或表示成 f_r ）及諧振角頻率 ω_0（或表示成 ω_r ）爲：

Σ 重要公式

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad〔\text{Hz}, 赫芝〕 \qquad (11\text{-}2\text{-}7a)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad〔\text{rad/s}, 弳／秒〕 \qquad (11\text{-}2\text{-}7b)$$

電流

在 *R-L-C* 並聯電路中，每個元件兩端的電壓皆相同，如果已知交流電源的電壓爲 $\overline{V}$ ，則 $\overline{V} = \overline{V}_R = \overline{V}_L = \overline{V}_C$ ，利用歐姆定律可以將電流表示成：

Σ 重要公式

$$\overline{I} = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}} = \overline{V} \cdot \overline{Y} = \overline{V} \cdot [G + j(B_C - B_L)] \quad〔\text{A}, 安培〕 \qquad (11\text{-}2\text{-}8)$$

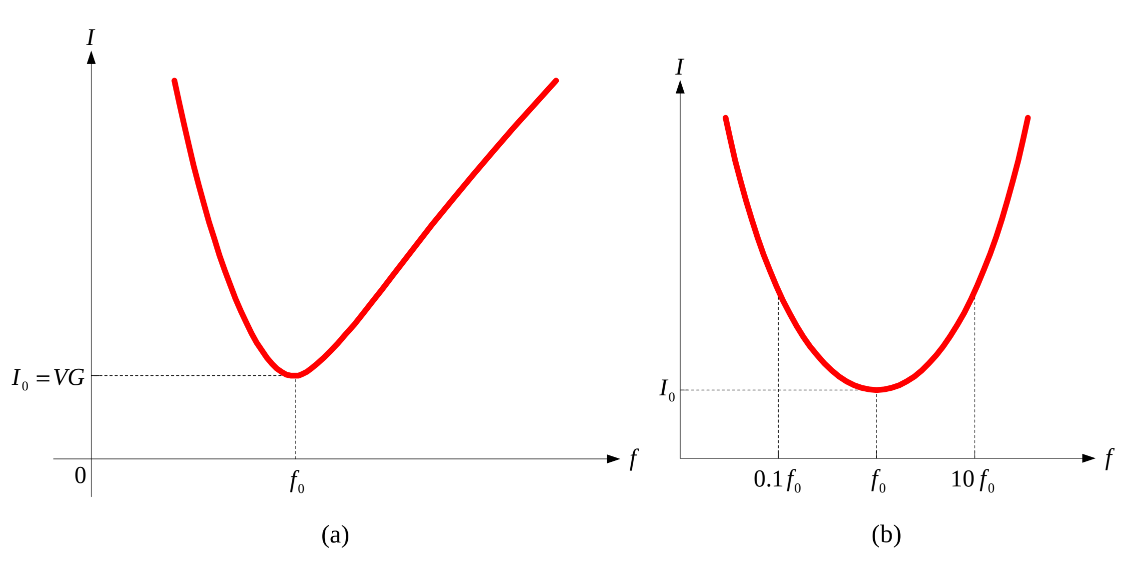
其中電流值 I 的大小爲：

Σ 重要公式

$$I = VY = V\sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2} \quad〔\text{A}, 安培〕 \qquad (11\text{-}2\text{-}9)$$

由前述可知：**當電路處於諧振狀態時，總導納 $Y_0 = \sqrt{G^2 + (B_{C0} - B_{L0})^2} = G = \dfrac{1}{R}$ 為最小值（即總阻抗 $Z_0 = \dfrac{1}{Y_0} = R$ 為最大值），則電路中的諧振電流 $I_0 = VY_0 = VG$ 為最小值**。圖 11-17 所示即爲電流與頻率的曲線圖；其中若將頻

率軸以**對數刻度**表示，則電流曲線會在諧振頻率兩邊形成對稱的圖形，如圖 11-17(b)所示。



▲ **圖 11-17** ***R-L-C* 並聯電路的電流 - 頻率曲線圖**　諧振時（$f = f_0$），電流 I_0 為最小值。

電路特性

圖 11-18 所示爲 *R-L-C* 並聯電路的相量圖，其電路的特性說明如下：

- **電源頻率小於諧振頻率：**

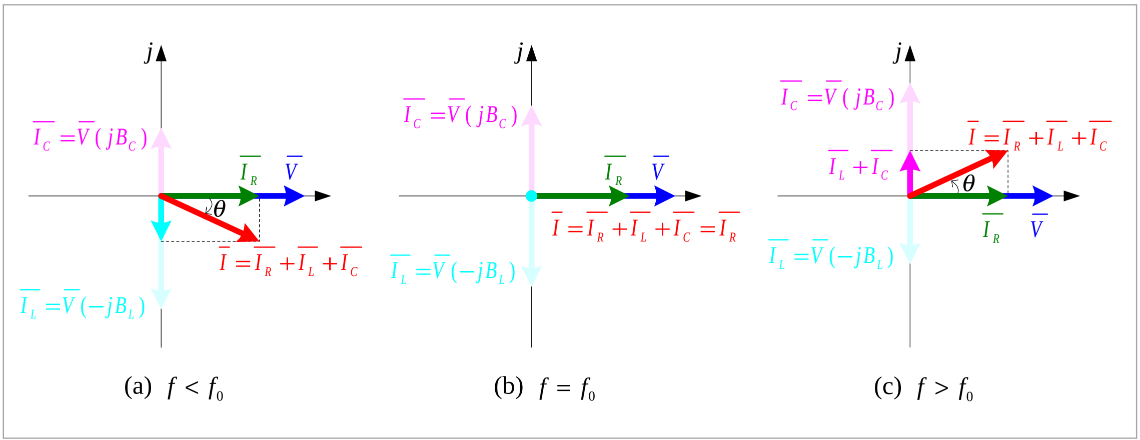
  當 $f < f_0$ 時，電納 $B_C < B_L$（如圖 11-16 所示），電流 $I_C < I_L$（$VB_C < VB_L$），則電流 $\overline{I} = \overline{I_R} + \overline{I_L} + \overline{I_C} = I_R - j(I_L - I_C)$ 落於第四象限，即電流相位滯後電壓相位，如圖 11-18(a)所示，**電路呈電感性**。

- **電源頻率等於諧振頻率：**

  當 $f = f_0$ 時，電納 $B_C = B_L$，電流 $I_C = I_L$（$VB_C = VB_L$），則電流 $\overline{I} = \overline{I_R} + \overline{I_L} + \overline{I_C} = \overline{I_R} = \overline{V}G$，即電流與電壓同相位，如圖 11-18(b)所示，**電路呈電阻性**。諧振時，電路導納 $Y_0 = G$ 爲最小（阻抗 $Z_0 = R$ 爲最大），產生最小的電流 $I_0 = VG = \dfrac{V}{R}$。

- **電源頻率大於諧振頻率：**

  當 $f > f_0$ 時，電納 $B_C > B_L$，電流 $I_C > I_L$（$VB_C > VB_L$），則電流 $\overline{I} = \overline{I_R} + \overline{I_L} + \overline{I_C} = I_R + j(I_C - I_L)$ 落於第一象限，即電流相位超前電壓相位，如圖 11-18(c)所示，**電路呈電容性**。



▲ **圖 11-18 *R-L-C* 並聯電路的相量圖** $f < f_0$，電路呈電感性；$f = f_0$，電路呈電阻性；$f > f_0$，電路呈電容性。

功率與功率因數

當並聯電路發生諧振現象時，電容納 B_C 與電感納 B_L 相等時，並聯電路呈電阻性，電流與電壓同相位，功率因數角 $\theta_p = \theta_i - \theta_v = 0°$。所以，**功率因數最大：**

Σ 重要公式

$$PF = \cos\theta_p = \cos 0° = 1 \quad 或 \quad PF = \frac{G}{Y_0} = \frac{G}{G} = 1 \qquad (11\text{-}2\text{-}10)$$

並聯諧振電路的平均功率 P_0 即為電阻 R 所消耗的功率：

Σ 重要公式

$$P_0 = VI_0 = I_0^2 R = \frac{V^2}{R} = V^2 G \qquad (11\text{-}2\text{-}11)$$

範例 11-6

有一 R-L-C 並聯電路，若電壓 $V = 100$ V 、 $R = 20\Omega$ 、 $L = 40$ mH 、 $C = 400\,\mu$F，試求電路諧振時

(1)諧振頻率 f_0　(2)總導納 Y_0　(3)總電流 I_0

(4)各元件的電流 I_{R0} 、 I_{L0} 、 I_{C0}　(5)平均功率 P_0　(6)功率因數 PF 為多少？

【解】(1) $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{(40\times10^{-3})\times(400\times10^{-6})}}$

$= \dfrac{1}{2\pi\times0.004} = \dfrac{125}{\pi} \cong 40$ Hz

(2) $Y_0 = \sqrt{G^2 + (B_{C0} - B_{L0})^2} = G = \dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{20} = 0.05$ ℧

(3) $I_0 = VY_0 = VG = 100\times0.05 = 5$ A

(4) $B_{C0} = B_{L0} = 2\pi\times\dfrac{125}{\pi}\times(400\times10^{-6}) = 0.1$ ℧

$I_{R0} = VG = 10\times0.05 = 5$ A

$I_{L0} = VB_{L0} = 100\times0.1 = 10$ A

$I_{C0} = VB_{C0} = 100\times01 = 10$ A

(5) $P_0 = \dfrac{V^2}{R} = \dfrac{100^2}{20} = 500$ W

(6) $PF = \dfrac{G}{Y_0} = \dfrac{0.05}{0.05} = 1$

馬上練習　有一 R-L-C 並聯電路，若電壓 $V = 100$ V 、 $R = 10\,\Omega$ 、 $L = 10$ mH 、 $C = 400\,\mu$F，試求電路諧振時 (1)諧振頻率 f_0 (2)電納 B_{C0} 及 B_{L0} (3)總電流 I_0 (4)電流 I_{C0} 及 I_{L0} (5)平均功率 P_0 為多少？

【答】(1) $f_0 \cong 80$ Hz

(2) $B_{C0} = B_{L0} = 0.2$ ℧

(3) $I_0 = 10$ A

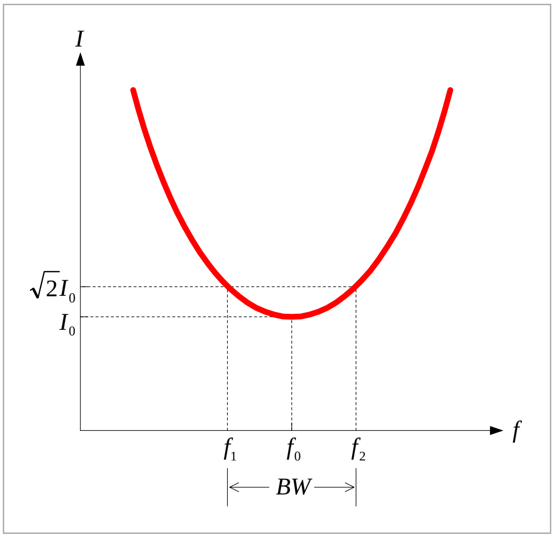
(4) $I_{C0} = I_{L0} = 20$ A

(5) $P_0 = 1000$ W

選擇性與品質因數

頻帶寬度

並聯交流電路在發生諧振現象時，電路的諧振電流 I_0 爲最小值，我們定義電流值在小於或等於 $\sqrt{2}I_0$ 所對應的頻率區段爲 R-L-C 並聯諧振電路的頻帶寬度，如圖 11-19 所示。



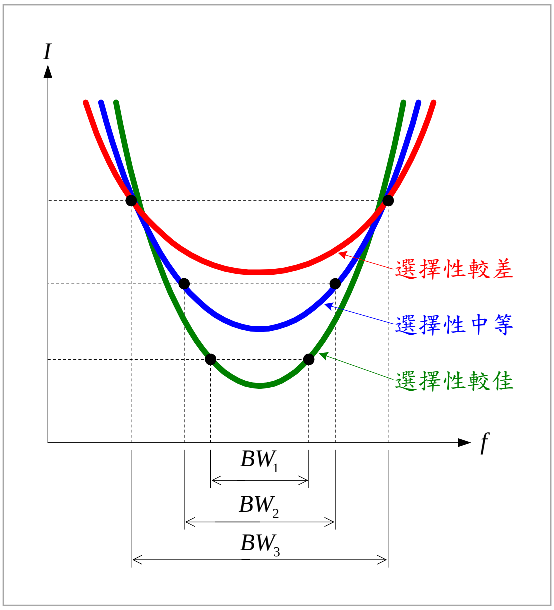
▲ 圖 11-19　R-L-C 並聯電路電流對應的頻帶寬度

由圖 11-19 可以看出，對應 $\sqrt{2}I_0$ 的頻率分別爲 f_1 與 f_2，其中頻率較小的 f_1 即爲下限截止頻率，頻率較大的 f_2 即爲上限截止頻率。因此，頻帶寬度以數學式表示爲：

$$BW = f_2 - f_1 \text{〔Hz, 赫芝〕} \qquad (11\text{-}2\text{-}12)$$

選擇性

如圖 11-20 所示，若頻帶寬度（BW）愈窄，表示此諧振電路對某頻率的選擇性愈好，我們可以明顯區分出某頻率訊號的響應程度，即可以輕易篩選出所要的訊號；反之，若頻帶寬度愈寬，則選擇性愈差。



▲ 圖 11-20　不同頻寬的選擇性曲線

品質因數

如同 R-L-C 串聯諧振電路一樣，我們也將 R-L-C 並聯諧振電路

的品質因數定義爲諧振電路中電感抗或電容抗的虛功率（Q_L 、Q_C）與平均功率（P）的比值，因此品質因數爲：

Σ 重要公式

$$Q = \frac{Q_{L0}}{P} = \frac{V_L^2 B_{L0}}{V_R^2 G} \quad 或 \quad Q = \frac{Q_{C0}}{P} = \frac{V_C^2 B_{C0}}{V_R^2 G} \qquad (11\text{-}2\text{-}13)$$

由於諧振電路的電感納與電容納大小相等，且並聯電路各元件的端電壓均相等，所以上式可以表示爲：

Σ 重要公式

$$Q = \frac{B_{L0}}{G} = \frac{R}{X_{L0}} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{R}{2\pi f_0 L} = \frac{B_{C0}}{G} = \frac{R}{X_{C0}} = \frac{R}{\frac{1}{\omega_0 C}} = 2\pi f_0 CR \qquad (11\text{-}2\text{-}14)$$

將諧振頻率 $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ 代入上式，則品質因數 Q 可表示成：

Σ 重要公式

$$Q = 2\pi CR(f_0) = 2\pi CR\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\right) = R\sqrt{\frac{C}{L}} \qquad (11\text{-}2\text{-}15)$$

R-L-C 並聯電路諧振時，通過各元件的電流可表示成：

Σ 重要公式

$$I_{R0} = VG = VY_0 = I_0 \quad〔\text{A, 安培}〕 \qquad (11\text{-}2\text{-}16a)$$

$$I_{L0} = VB_{L0} = \frac{I_0}{G} B_{L0} = QI_0 \quad〔\text{A, 安培}〕 \qquad (11\text{-}2\text{-}16b)$$

$$I_{C0} = VB_{C0} = \frac{I_0}{G} B_{C0} = QI_0 \quad〔\text{A, 安培}〕 \qquad (11\text{-}2\text{-}16c)$$

通常品質因數 Q 會遠大於 1，所以由上式可知 R-L-C 並聯電路在諧振時，通過電感器與電容器的電流會為總電流（電阻器電流）的 Q 倍，造成電流放大的作用，故並聯諧振亦可稱為**電流共振**。又並聯諧振時電路之阻抗及電流大小與串聯諧振時之特性相反，所以並聯諧振也稱為**反諧振**或**反共振**（antiresonance）。

在諧振頻率為 f_0 時，品質因數 Q 與頻帶寬度 BW 的關係也表示為：

Σ 重要公式

$$Q = \frac{f_0}{BW} \tag{11-2-17}$$

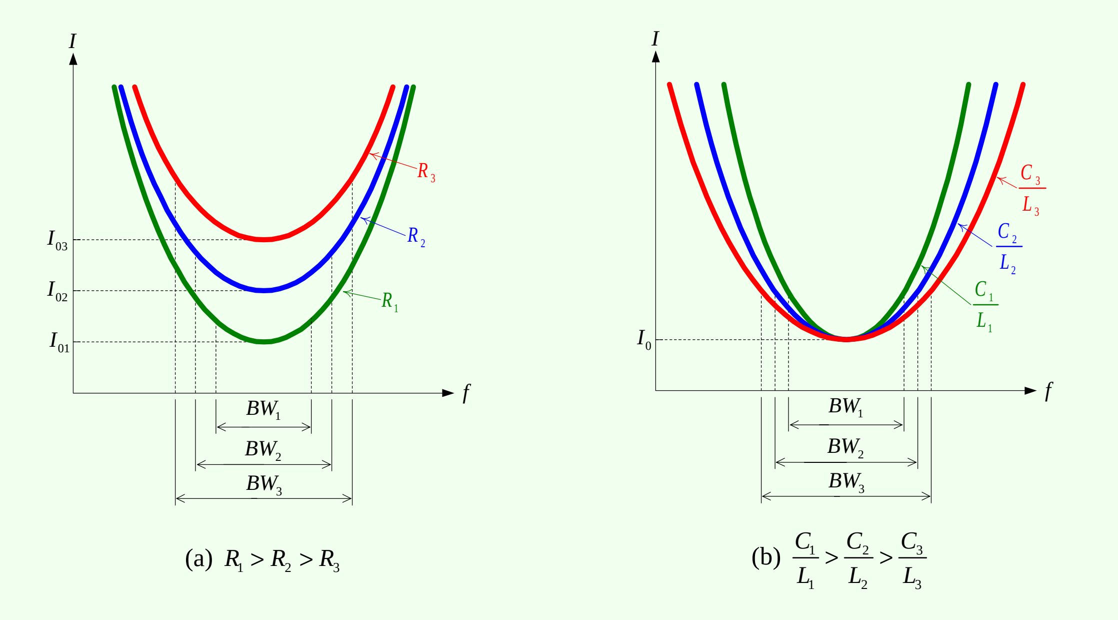
由上式可知：**如果品質因數愈高，則頻帶寬度愈小，選擇性愈佳；相反地，如果品質因數愈小，則頻帶寬度則愈大，選擇性愈差**。將 $Q = \frac{B_{C0}}{G} = \frac{R}{X_{C0}} = 2\pi f_0 CR$ 代入(11-2-17)式，則 R-L-C 並聯諧振電路的頻寬可表示為：

Σ 重要公式

$$BW = \frac{f_0}{Q} = \frac{f_0}{2\pi f_0 CR} = \frac{1}{2\pi CR} \ \text{〔Hz, 赫芝〕} \tag{11-2-18}$$

※知識充電

由(11-2-15)式：$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$，可知 R-L-C 並聯諧振電路的品質因數 Q 與 R 值、$\frac{C}{L}$ 值兩項因子有關。當 $\frac{C}{L}$ 值固定時，R 值愈大，則 Q 值愈大、BW 值愈小、選擇性愈好、諧振電流 I_0 隨 R 值增加而減小，如下圖(a)所示；當 R 值固定時，$\frac{C}{L}$ 值愈大，則 Q 值愈大、BW 值愈小、選擇性愈好、諧振電流 I_0 不變，如下圖(b)所示。



範例 11-7

有一 R-L-C 並聯電路諧振時，若外加電壓 $V=100\text{ V}$ 、 $R=400\ \Omega$ 、 $X_{L0}=X_{C0}=20\ \Omega$ ，此時電路的總電流及通過電感器、電容器的電流為多少？

【解】$Q=\dfrac{R}{X_{L0}}=\dfrac{400}{20}=20$

$$I_0=VY_0=\frac{V}{Z_0}=\frac{V}{R}=\frac{100}{400}=0.25\text{ A}$$

$$I_{L0}=I_{C0}=QI_0=20\times 0.25=5\text{ A}$$

範例 11-8

有一 R-L-C 並聯電路，若電壓 $V=100\text{ V}$ 、 $R=1000\ \Omega$ 、 $L=160\text{ mH}$ 、 $C=100\ \mu\text{F}$ ，試求電路諧振時 (1)諧振頻率 f_0 (2)品質因數 Q (3)頻帶寬度 BW 為多少？

【解】(1) $f_0=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{(160\times 10^{-3})\times(100\times 10^{-6})}}$

$$=\frac{1}{2\pi\times 0.004}=\frac{125}{\pi}\cong 40\text{ Hz}$$

(2) $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}} = 1000\sqrt{\dfrac{100\times10^{-6}}{160\times10^{-3}}} = 25$

（或 $Q = \dfrac{R}{X_{L0}} = \dfrac{R}{2\pi f_0 L} = \dfrac{1000}{2\pi\times\dfrac{125}{\pi}\times(160\times10^{-3})} = 25$）

(3) $BW = \dfrac{f_0}{Q} = \dfrac{\dfrac{125}{\pi}}{25} = \dfrac{5}{\pi} \cong 1.6\ \text{Hz}$

（或 $BW = \dfrac{1}{2\pi CR} = \dfrac{1}{2\pi\times(160\times10^{-3})\times1000} \cong 1.6\ \text{Hz}$）

馬上練習 有一 R-L-C 並聯電路，若電壓 $V = 200\ \text{V}$ 、 $R = 200\ \Omega$ 、 $L = 20\ \text{mH}$ 、 $C = 200\ \mu\text{F}$，試求電路諧振時 (1)諧振頻率 f_0 (2)品質因數 Q (3)頻帶寬度 BW 為多少？

【答】(1) $f_0 \cong 80\ \text{Hz}$ ；(2) $Q = 20$ ；(3) $BW \cong 4\ \text{Hz}$

※11-2.3 並聯諧振電路總結

*L-C*串聯諧振電路

1. L-C 並聯諧振電路之電容納等於電感納，即

$$B_{C0} = B_{L0}$$

2. L-C 並聯諧振電路之總導納（ $Y_0 = B_0$ 或 $Y_r = B_r$ ）等於零，即

$$Y_0 = B_0 = B_{C0} - B_{L0} = 0$$

3. L-C 並聯諧振電路之總阻抗（ Z_0 或 Z_r ）爲無窮大，即

$$Z_0 = \frac{1}{Y_0} = \infty$$

4. L-C 並聯諧振電路之總電流（ I_0 或 I_r ）等於零，即

$$I_0 = \frac{V}{Z_0} = VY_0 = 0$$

5. 諧振頻率（ f_0 或 f_r ）： $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

諧振角頻率（ ω_0 或 ω_r ）： $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

R-L-C 並聯諧振電路

1. R-L-C 並聯諧振電路之總電納（ B_0 或 B_r ）等於零，即

$B_{C0} = B_{L0}$；$B_0 = B_{C0} - B_{L0} = 0$

2. R-L-C 並聯諧振電路之總導納（ Y_0 或 Y_r ）爲最小，而等效阻抗（ Z_0 或 Z_r ）爲最大，電路呈現電阻性，即

$Y_0 = G + j(B_{C0} - B_{L0}) = G = \dfrac{1}{R}$；$Z_0 = \dfrac{1}{Y_0} = R$；$\theta_Y = 0°$

3. R-L-C 並聯諧振電路之總電流（ I_0 或 I_r ）爲最小，即

$I_0 = VY_0 = \dfrac{V}{Z_0} = \dfrac{V}{R}$

4. R-L-C 並聯諧振電路之電阻器電流（ I_{R0} 或 I_{Rr} ）等於總電流，即

$I_{R0} = I_0$

5. R-L-C 並聯諧振電路之電感器電流（ I_{L0} 或 I_{Lr} ）等於電容器電流（ I_{C0} 或 I_{Cr} ），而相位相差 180°，即

$I_{L0} = I_{C0} = QI_0$

6. R-L-C 並聯諧振電路之平均功率（ P_0 或 P_r ）爲定值（∵ V、R 不隨頻率而變），且等於視在功率，即

$P_0 = V^2G = VI_{R0} = VI_0 = S_0$；$P_0 = VI_0\cos 0° = VI_0 = S_0$

7. R-L-C 並聯諧振電路之電抗功率（ Q_0 或 Q_r ）等於零，即

$Q_{C0} = V^2B_{C0} = V^2B_{L0} = Q_{L0}$；$Q_0 = Q_{C0} - Q_{L0} = 0$

8. R-L-C 並聯諧振電路之功率因數等於 1，即

$PF = \cos 0° = 1$；$PF = \dfrac{G}{Y_0} = \dfrac{Z_0}{R} = \dfrac{R}{R} = 1$

9. 諧振頻率（f_0 或 f_r）：$f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = f\sqrt{\dfrac{X_C}{X_L}}$

諧振角頻率（ω_0 或 ω_r）：$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \omega\sqrt{\dfrac{X_C}{X_L}}$

10. 品質因數：$Q = \dfrac{B_{L0}}{G} = \dfrac{B_{C0}}{G} = \dfrac{R}{X_{L0}} = \dfrac{R}{X_{C0}} = R\sqrt{\dfrac{C}{L}} = \dfrac{f_0}{BW}$

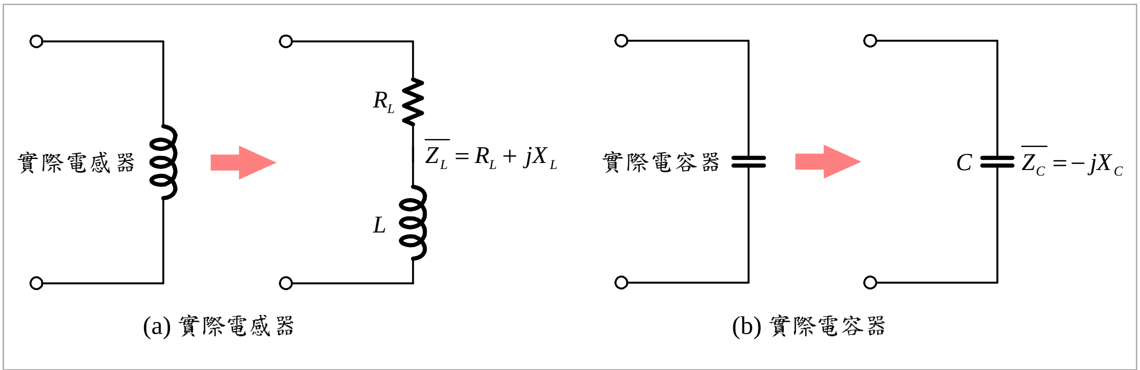
11. 頻帶寬度：$BW = f_2 - f_1 = \dfrac{f_0}{Q} = \dfrac{1}{2\pi CR}$

單元評量

1. 在 L-C 並聯電路中，電路的諧振頻率為 __________。
2. 有一 L-C 並聯電路，若 $L = \dfrac{100}{\pi}$ mH、$C = \dfrac{10}{\pi}\mu$F，則電路的諧振頻率為 __________ Hz。
3. 承上題，電路的電容抗 X_C 為 __________ Ω。
4. 有一 L-C 並聯諧振電路，已知 $C = 10\,\mu$F，電路的諧振角頻率為 1000 rad/s，則電感值 L 為 __________ mH。
5. 承上題，電路的電感抗 X_L 為 __________ Ω。
6. 在 R-L-C 並聯電路中，電路的諧振頻率為 ________；諧振時的導納為 ________；電路的電流為 __________；電感器功率 __________ 電容器功率；功率因數為 ________。
7. 有一 R-L-C 並聯諧振電路，若品質因數愈大，則頻帶寬度 __________、選擇性 __________；若電阻 R 值愈小，則品質因數 __________；若數值 $\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 愈小，則品質因數 __________。
8. 有一 R-L-C 並聯交流諧振電路，若電源電壓 $V = 200$ V、$R = 100\,\Omega$、$L = 50$ mH、$C = 80\,\mu$F，則電路的諧振頻率 $f_0 =$ __________ Hz；總電流 $I_0 =$ __________ A；品質因數 $Q =$ __________；頻帶寬度 $BW =$ __________ Hz；電感器電流 $I_{L0} =$ __________ A；電容器電流 $I_{C0} =$ __________ A。
9. 有一 R-L-C 並聯電路，若其電源頻率為 60Hz、$R = 300\,\Omega$、$X_L = 36\,\Omega$、$X_C = 25\,\Omega$，則電路諧振時的頻率 $f_0 =$ __________ Hz；品質因數 $Q =$ ______。
10. 有一 R-L-C 並聯交流電路，若諧振時的電源頻率為 500Hz，$R = 5\,\text{k}\Omega$、$X_{L0} = 100\,\Omega$，則此諧振電路的頻寬 $BW =$ __________ Hz。

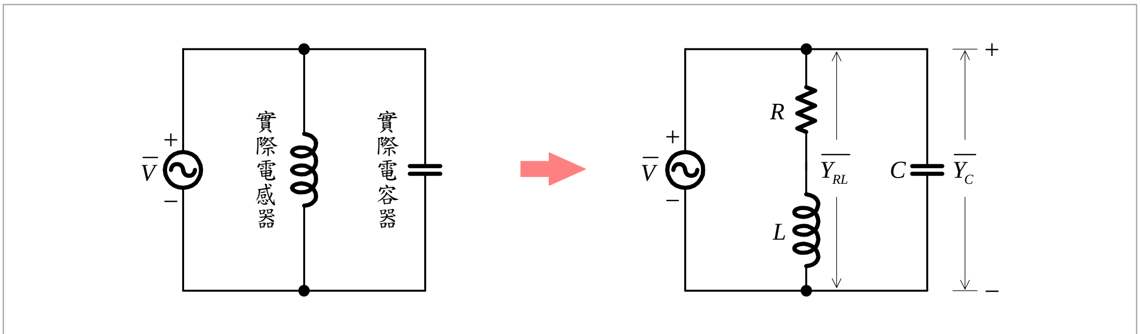
※11-3　串並聯諧振電路

前面所討論的電感器 L 及電容器 C，皆為零電阻之理想純電感器及理想純電容器。但實際之電感器是由導線所繞成的線圈，其線圈導線本身是有電阻值存在，因此**實際的電感器可視為由一電阻 R_L 與純電感 L 相串聯之等效電路**，如圖 11-21(a)所示；而實際之電容器是由極板及引線所構成，其存在的電阻值很小而可以忽略，因此**實際的電容器可視為零電阻之理想電容器**，如圖 11-21(b)所示。



▲ 圖 11-21　實際電感器與電容器的等效電路

所以，我們前面所討論過的 L-C 並聯交流電路，其實際的等效電路則形成如圖 11-22 所示的 R-L-C 串並聯交流電路。



▲ 圖 11-22　R-L-C 串並聯電路

總導納

並聯電路的總導納為各分路之導納的和。所以實際 *L-C* 並聯電路的總導納為實際電感器之導納與實際電容器之導納的和，其中實際電容器分路的導納為：

$$\overline{Y_C} = jB_C = j\frac{1}{X_C} = j\omega C \quad 〔℧, 姆歐〕$$

而實際電感器分路的導納由電阻與電感串聯所組成，以 Y_{RL} 表示，用相量表示為：

$$\begin{aligned}\overline{Y_{RL}} &= \frac{1}{\overline{Z_{RL}}} = \frac{1}{R+jX_L} = \frac{R-jX_L}{(R+jX_L)(R-jX_L)} \\ &= \frac{R-jX_L}{R^2+X_L^2} = \frac{R}{R^2+X_L^2} - j\frac{X_L}{R^2+X_L^2}\end{aligned} \quad 〔℧, 姆歐〕$$

註：詳細之解說可參見本書附錄 B。

所以，電路的總導納可表示為：

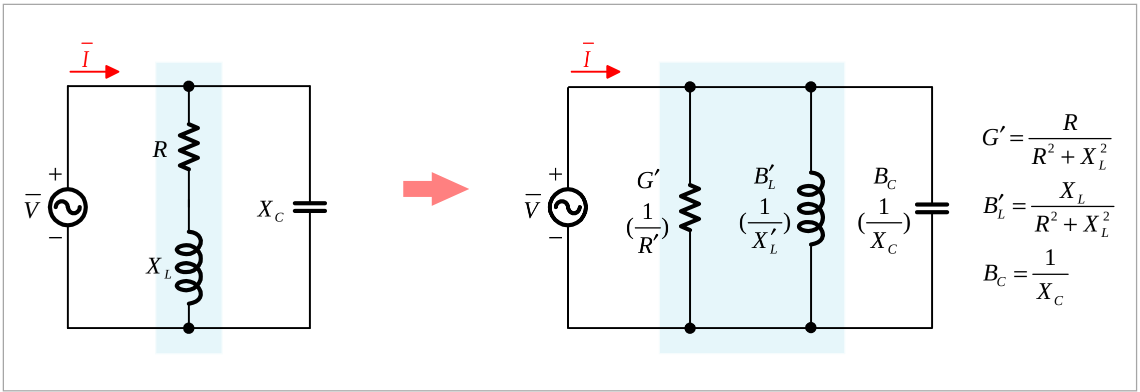
Σ 重要公式

$$\begin{aligned}\overline{Y} &= \overline{Y_{RL}} + \overline{Y_C} = (\frac{R}{R^2+X_L^2} - j\frac{X_L}{R^2+X_L^2}) + j\frac{1}{X_C} \\ &= \frac{R}{R^2+X_L^2} + j(\frac{1}{X_C} - \frac{X_L}{R^2+X_L^2}) \\ &= \frac{R}{R^2+(\omega L)^2} + j(\omega C - \frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}) \\ &= G' + j(B_C - B_L')\end{aligned} \quad 〔℧, 姆歐〕 \quad (11\text{-}3\text{-}1)$$

由上式可知，實際 *L-C* 並聯電路中電感器分路的部分，可再視為一 *R-L* 並聯的等效電路，如圖 11-23 所示，其中的等效電阻值 R' 與電感抗 X_L' 分別為：

$$R' = \frac{1}{G'} = \frac{R^2 + X_L^2}{R} = \frac{R^2 + (\omega L)^2}{R} \quad 〔\Omega, 歐姆〕$$

$$X_L' = \frac{1}{B_L'} = \frac{R^2 + X_L^2}{X_L} = \frac{R^2 + (\omega L)^2}{\omega L} \quad 〔\Omega, 歐姆〕$$



▲ 圖 11-23　等效之實際 L-C 並聯電路

諧振條件

當電路發生諧振時（ $B_C = B_L'$ 或 $X_C = X_L'$ ），電路爲電阻性，即(11-3-1)式的虛數部分爲 0。所以，電路的諧振條件爲：

$$\omega_0 C - \frac{\omega_0 L}{R^2 + (\omega_0 L)^2} = 2\pi f_0 C - \frac{2\pi f_0 L}{R^2 + (2\pi f_0 L)^2} = 0$$

整理上式，可得電路的諧振頻率 f_0（或表示成 f_r ）及諧振角頻率 ω_0（或表示成 ω_r ）爲：

Σ 重要公式

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}} \quad 〔\text{Hz, 赫芝}〕 \qquad (11\text{-}3\text{-}2a)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}} \quad 〔\text{rad/s, 弳／秒}〕 \qquad (11\text{-}3\text{-}2b)$$

※知識充電

由(11-3-2)式可看出：實際的 L-C 並聯電路的諧振頻率與電路的電阻值有關，若是電路中的 R 值太大，有可能使得 $\frac{R^2C}{L}>1$，則(11-3-2)式中根號內的值為負，即表示此電路無諧振頻率的存在。

諧振導納與阻抗

當諧振發生時，(11-3-1)式的虛數部分爲 0 ，則電路諧振時的導納 Y_0 爲最小，即：

Σ 重要公式

$$Y_0 = G' = \frac{R}{R^2+X_{L0}^2} = \frac{R}{R^2+(\omega_0 L)^2} \quad 〔\mho, 姆歐〕 \qquad (11\text{-}3\text{-}3)$$

諧振阻抗 Z_0 爲諧振導納 Y_0 的倒數，其值最大，即：

Σ 重要公式

$$Z_0 = \frac{1}{Y_0} = \frac{R^2+X_{L0}^2}{R} = \frac{R^2+(\omega_0 L)^2}{R} \quad 〔\Omega, 歐姆〕 \qquad (11\text{-}3\text{-}4)$$

諧振電流

若交流電源的電壓爲 $\overline{V}$ ，則利用歐姆定律可得到諧振電流 I_0 爲最小，即：

Σ 重要公式

$$I_0 = \frac{V}{Z_0} = VY_0 = V\frac{R}{R^2+X_{L0}^2} \quad 〔A, 安培〕 \qquad (11\text{-}3\text{-}5)$$

電路特性

- 當 $f<f_0$時，電路爲電感性電路，電流相位滯後電壓相位。

- 當 $f = f_0$時，電路爲電阻性電路，電流與電壓同相位。
- 當 $f > f_0$時，電路爲電容性電路，電流相位超前電壓相位。

功率與功率因數

當諧振發生時，電路呈電阻性，電流與電壓同相位，功率因數角 $\theta_p = \theta_i - \theta_v = 0°$。所以，功率因數最大，即：

Σ 重要公式

$$PF = \cos\theta_p = \cos 0° = 1 \quad \text{或} \quad PF = \frac{G'}{Y_0} = \frac{G'}{G'} = 1 \qquad (11\text{-}3\text{-}6)$$

平均功率 P_0爲：

Σ 重要公式

$$P_0 = VI_0 = I_0^2 R' = \frac{V^2}{R'} = \frac{V^2 R}{R^2 + X_{L0}^2} \quad \text{〔W, 瓦特〕} \qquad (11\text{-}3\text{-}7)$$

品質因數

由並聯電路的品質因數定義可知：

Σ 重要公式

$$Q = \frac{R'}{X'_{L0}} = \frac{\dfrac{R^2 + X_{L0}^2}{R}}{\dfrac{R^2 + X_{L0}^2}{X_{L0}}} = \frac{X_{L0}}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2\pi f_0 L}{R} \qquad (11\text{-}3\text{-}8)$$

由上式可知：$X_{L0} = QR$，代入(11-3-4)式，可得：

Σ 重要公式

$$Z_0 = \frac{R^2 + X_{L0}^2}{R} = \frac{R^2 + (QR)^2}{R} = R(1 + Q^2) \quad \text{〔Ω, 歐姆〕} \qquad (11\text{-}3\text{-}9)$$

利用上式，可將(11-3-2)式之諧振頻率與諧振角頻率改寫成：

Σ 重要公式

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\sqrt{1-\frac{R^2C}{L}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{Q^2}{1+Q^2}} \quad \text{〔Hz, 赫芝〕} \qquad (11\text{-}3\text{-}10a)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1-\frac{R^2C}{L}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{Q^2}{1+Q^2}} \quad \text{〔rad/s, 弳／秒〕} \qquad (11\text{-}3\text{-}10b)$$

如果電路的品質因數 $Q \geq 10$ 時（或 $L >> R^2C$ 時），則由(11-3-9)及(11-3-10)式可得：

Σ 重要公式

$$Z_0 = R(1+Q^2) \cong Q^2R = QX_{L0} \quad \text{〔}\Omega\text{, 歐姆〕} \qquad (11\text{-}3\text{-}11)$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{Q^2}{1+Q^2}} \cong \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{〔Hz, 赫芝〕} \qquad (11\text{-}3\text{-}12)$$

※知識充電

電路諧振時：$B_{C0} = B'_{L0} \Rightarrow X_{C0} = X'_{L0} = \dfrac{R^2+X_{L0}^2}{X_{L0}} \Rightarrow X_{L0}X_{C0} = R^2+X_{L0}^2$

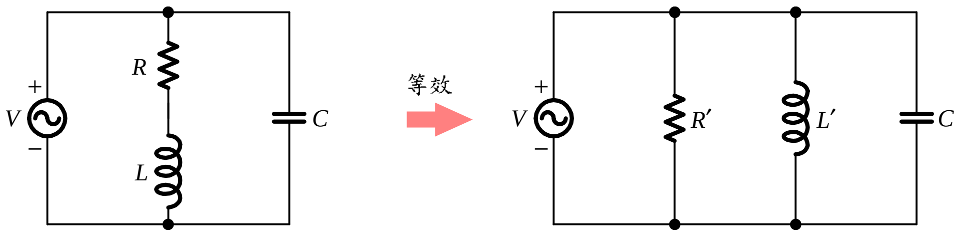
$$\therefore \sqrt{1-\frac{R^2C}{L}} = \sqrt{1-\frac{R^2\omega_0 C}{\omega_0 L}} = \sqrt{1-\frac{R^2}{X_{L0}X_{C0}}} = \sqrt{1-\frac{R^2}{R^2+X_{L0}^2}}$$

將(11-3-9)式：$\dfrac{R^2}{R^2+X_{L0}^2} = \dfrac{1}{1+Q^2}$ 代入上式，可得：

$$\sqrt{1-\frac{R^2C}{L}} = \sqrt{1-\frac{R^2}{R^2+X_{L0}^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{1+Q^2}} = \sqrt{\frac{Q^2}{1+Q^2}}$$

範例 11-8

如下圖所示電路，若電壓 $V = 100\text{ V}$、$R = 10\,\Omega$、$L = 50\text{ mH}$、$C = 180\,\mu\text{F}$，試求電路諧振時 (1)諧振頻率 f_0 (2)電感抗 X_{L0}、電容抗 X_{C0} (3)等效電阻 R'、電感抗 X'_{L0} (4)總阻抗 Z_0 (5)總電流 I_0 (6)平均功率 P_0 (7)品質因數 Q (8)頻帶寬度 BW 為多少？



【解】(1)

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\sqrt{1-\frac{R^2C}{L}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{(50\times10^{-3})\times(180\times10^{-6})}}\sqrt{1-\frac{10^2\times(180\times10^{-6})}{50\times10^{-3}}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\times0.003}\sqrt{1-0.36} = \frac{500}{3\pi}\times0.8 = \frac{400}{3\pi} \cong 42.4\text{ Hz}$$

(2)

$$X_{L0} = 2\pi f_0 L = 2\pi\times\frac{400}{3\pi}\times(50\times10^{-3}) = \frac{40}{3}\,\Omega$$

$$X_{C0} = \frac{1}{2\pi f_0 C} = \frac{1}{2\pi\times\frac{400}{3\pi}\times(180\times10^{-6})} = \frac{125}{6}\,\Omega$$

(3)

$$R' = \frac{R^2+X_{L0}^2}{R} = \frac{10^2+(\frac{40}{3})^2}{10} = \frac{250}{9}\,\Omega$$

$$X'_{L0} = \frac{R^2+X_{L0}^2}{X_{L0}} = \frac{10^2+(\frac{40}{3})^2}{\frac{40}{3}} = \frac{125}{6}\,\Omega$$

（註：$X_{C0} = X'_{L0}$）

(4)

$$Z_0 = R' = \frac{250}{9}\,\Omega$$

(5)

$$I_0 = \frac{V}{Z_0} = \frac{100}{\frac{250}{9}} = \frac{18}{5} = 3.6\text{ A}$$

(6) $P_0 = I_0^2 R' = 3.6^2 \times \dfrac{250}{9} = 360\ \text{W}$

(7) $Q = \dfrac{X_{L0}}{R} = \dfrac{\frac{40}{3}}{10} = \dfrac{4}{3}$ （或 $Q = \dfrac{R'}{X'_{L0}} = \dfrac{\frac{250}{9}}{\frac{125}{6}} = \dfrac{4}{3}$）

(8) $BW = \dfrac{f_0}{Q} = \dfrac{\frac{400}{3\pi}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{100}{\pi} \cong 31.8\ \text{Hz}$

馬上練習 承上題所示電路，若 $R = 10\,\Omega$ 、 $L = 200\ \text{mH}$ ，且電路在電壓為 $v(t) = 100\sin 100t\ \text{V}$ 時產生諧振，試求 (1)電容器之電容量 C (2)品質因數 Q (3)總阻抗 Z_0 為多少？

【答】(1) $C = 400\ \mu\text{F}$ ；(2) $Q = 2$ ；(3) $Z_0 = 50\ \Omega$ 。

單元評量

1. 在實際 L-C 並聯電路中，電路的諧振頻率為 ______________ ；諧振時的阻抗為 __________ ；電路的電流為 __________ ；電感器功率 __________ 電容器功率；若電路諧振時電阻值為 R 、電感抗為 X_{L0} ，則電容抗 $X_{C0} =$ ______________ 。

2. 如圖(1)所示電路，已知 $V = 100\,\text{V}$ 、 $R = 5\,\Omega$ 、 $L = \dfrac{4}{\pi}\ \text{mH}$ 、 $C = \dfrac{40}{\pi}\ \mu\text{F}$ ，則電路諧振時的

頻率 $f_0 =$ ________ Hz；

電感抗 $X_{L0} =$ ________ Ω；

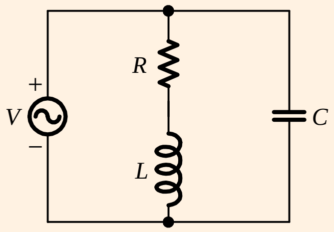
電容抗 $X_{C0} =$ ________ Ω；

總阻抗 $Z_0 =$ ________ Ω；

總電流 $I_0 =$ ________ A；

平均功率 $P_0 =$ ________ W；

品質因數 $Q =$ ________ 。

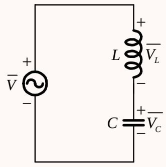
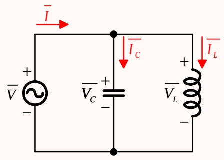


圖(1)

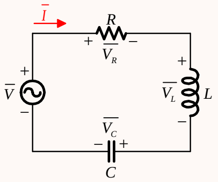
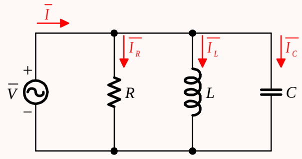
3. 如圖(1)所示電路，若電路發生諧振時的角頻率 $\omega_0 = 1000\ \text{rad/s}$ 、品質因數 $Q = 10$ 、電感抗 $X_{L0} = 50\ \Omega$ ，則電路的總阻抗 $Z_0 =$ __________ Ω；電容器的電容量 $C =$ __________ μF 。

重點摘要

1.　*L-C* 諧振電路：

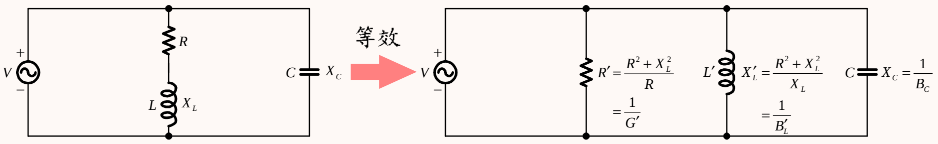
	串聯	並聯
電路圖		
諧振條件	電抗：$X_{L0} = X_{C0}$ 總阻抗：$Z_0 = X_{L0} - X_{C0} = 0$ 總電流：$I_0 = \dfrac{V}{Z_0} = \infty$ 諧振頻率：$f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$	電納：$B_{C0} = B_{L0}$ 總導納：$Y_0 = B_{C0} - B_{L0} = 0$ $\left(Z_0 = \dfrac{1}{Y_0} = \infty \right)$ 總電流：$I_0 = \dfrac{V}{Z_0} = VY_0 = 0$ 諧振頻率：$f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

2.　*R-L-C* 諧振電路：

	串聯	並聯
電路圖		
諧振條件	總電抗：$X_0 = X_{L0} - X_{C0} = 0$ 總阻抗：$Z_0 = R + j(X_{L0} - X_{C0}) = R$ 總電流：$I_0 = \dfrac{V}{Z_0} = \dfrac{V}{R}$　（最大值） 各元件電壓：$V_{R0} = V$ $V_{L0} = V_{C0} = QV$ 平均功率：$P_0 = I_0^2 R = V_{R0} I_0$ $= VI_0 = S_0$ 電抗功率：$Q_{C0} = I_0^2 X_{C0}$ $= I_0^2 X_{L0} = Q_{L0}$	總電納：$B_0 = B_{C0} - B_{L0} = 0$ 總導納：$Y_0 = G + j(B_{C0} - B_{L0}) = G = \dfrac{1}{R}$ $\left(Z_0 = \dfrac{1}{Y_0} = R \right)$ 總電流：$I_0 = VY_0 = \dfrac{V}{Z_0} = \dfrac{V}{R}$　（最小值） 各元件電流：$I_{R0} = I_0$ $I_{L0} = I_{C0} = QI_0$ 平均功率：$P_0 = V^2 G = VI_{R0}$ $= VI_0 = S_0$ 電抗功率：$Q_{C0} = V^2 B_{C0}$ $= V^2 B_{L0} = Q_{L0}$

	串聯	並聯
諧振條件	功率因數：$PF = \dfrac{R}{Z_0} = \dfrac{R}{R} = 1$ 諧振頻率：$f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = f\sqrt{\dfrac{X_C}{X_L}}$ 品質因數：$Q = \dfrac{X_{L0}}{R} = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} = \dfrac{f_0}{BW}$ 頻帶寬度：$BW = f_2 - f_1 = \dfrac{f_0}{Q} = \dfrac{R}{2\pi L}$	功率因數：$PF = \dfrac{G}{Y_0} = \dfrac{Z_0}{R} = \dfrac{R}{R} = 1$ 諧振頻率：$f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = f\sqrt{\dfrac{X_C}{X_L}}$ 品質因數：$Q = \dfrac{B_{L0}}{G} = \dfrac{R}{X_{L0}} = R\sqrt{\dfrac{C}{L}} = \dfrac{f_0}{BW}$ 頻帶寬度：$BW = f_2 - f_1 = \dfrac{f_0}{Q} = \dfrac{1}{2\pi CR}$

3. R-L-C 串並聯諧振電路：

<table>
<tr><th></th><th>串並聯</th></tr>
<tr><td>電路圖</td><td>
</td></tr>
<tr><td>諧振條件</td><td>電納：$B_C = B'_L$（$X_C = X'_L$）
總導納：$Y_0 = G' = \dfrac{R}{R^2 + X_{L0}^2}$　（$Z_0 = \dfrac{1}{Y_0} = \dfrac{R^2 + X_{L0}^2}{R}$）
總電流：$I_0 = \dfrac{V}{Z_0} = VY_0 = V\dfrac{R}{R^2 + X_{L0}^2}$　（最小值）
平均功率：$P_0 = VI_0 = I_0^2 R' = \dfrac{V^2}{R'} = \dfrac{V^2 R}{R^2 + X_{L0}^2}$
功率因數：$PF = \dfrac{G'}{Y_0} = \dfrac{G'}{G'} = 1$
品質因數：$Q = \dfrac{R'}{X'_{L0}} = \dfrac{X_{L0}}{R} = \dfrac{\omega_0 L}{R} = \dfrac{2\pi f_0 L}{R}$
諧振頻率：$f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \dfrac{R^2 C}{L}} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\sqrt{\dfrac{Q^2}{1+Q^2}}$
總阻抗：$Z_0 = R' = R(1+Q^2)$
若品質因數 $Q \geq 10$（或 $L >> R^2 C$）時：
(1) $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\sqrt{\dfrac{Q^2}{1+Q^2}} \cong \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$
(2) $Z_0 = R(1+Q^2) \cong Q^2 R = QX_{L0}$</td></tr>
</table>

學後評量

一、選擇題

(　)1. R-L-C 串聯電路中，若電源頻率大於諧振頻率，則電阻器兩端的電壓相位 (A)超前電流相位 (B)滯後電流相位 (C)與電流同相 (D)視電阻器的大小而定

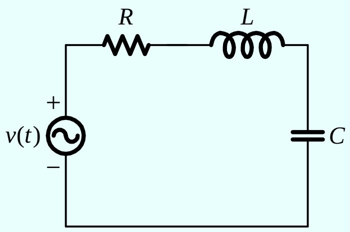
(　)2. R-L-C 串聯電路，$R=1\,\Omega$、$L=2\,\mu\text{H}$、$C=50\text{ pF}$，電路在諧振時的品質因數 Q 為 (A)2000 (B)200 (C)20 (D)2

(　)3. 在 R-L-C 串聯電路，$v(t)=100\sin 1000t\text{ V}$、$R=10\,\Omega$、$L=2\text{ mH}$，當電路發生諧振時，電容器兩端的最大電壓為 (A)10V (B)15V (C)20V (D)25V

(　)4. R-L-C 串聯電路，電源為 100V，$R=1\,\Omega$、$L=0.1\text{ mH}$、$C=0.0001\text{ F}$，電路在諧振時的功率因數為 (A)0.6 (B)0.8 (C)0.9 (D)1

(　)5. 如圖(1)所示電路，欲產生 $f_0=1\text{ MHz}$ 的諧振頻率，若 $L=10\,\mu\text{H}$，必須使用電容值約為 (A)25pF (B) $25\mu\text{F}$ (C)2500pF (D) $2500\mu\text{F}$

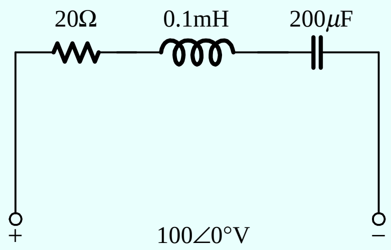
(　)6. R-L-C 串聯電路，$R=500\,\Omega$、$L=20\text{ mH}$、C 未知，若電壓源為 $300\sin 2000t\text{ V}$，電路產生諧振，電容為 (A) $25\mu\text{F}$ (B) $12.5\mu\text{F}$ (C) $10\mu\text{F}$ (D) $5\mu\text{F}$



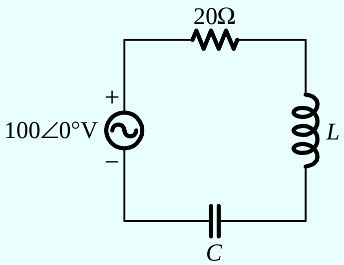
圖(1)

(　)7. 如圖(2)所示電路，當電路發生諧振時，電路的電流為 (A)2.5A (B)5A (C)10A (D)20A

(　)8. 如圖(3)所示電路，在頻率為 500Hz 時電路產生諧振，已知其半功率頻寬為 100Hz，則品質因數 Q 的值為 (A)1 (B)2 (C)5 (D)10



圖(2)



圖(3)

(　)9. R-L-C 串聯電路，$R=2\,\Omega$、$L=2\text{ mH}$、$C=0.2\,\mu\text{F}$，電路在諧振時的諧振頻率為 (A) $\dfrac{100}{4\pi}$ kHz (B) $\dfrac{125}{4\pi}$ kHz (C) $\dfrac{125}{2\pi}$ kHz (D) $\dfrac{100}{2\pi}$ kHz

(　)10. R-L-C 串聯電路，$R = 20\ \Omega$、$L = 50\ \text{mH}$、$C = 5\ \mu\text{F}$，電路在諧振時的品質因數 Q 為 (A)25 (B)50 (C)35 (D)5

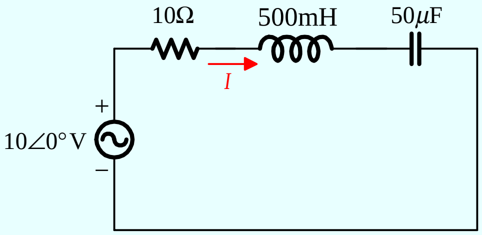
(　)11. 如圖(4)所示電路，當電流 $I = 1\angle 0^\circ$ A，此時電源頻率應為

(A)$\dfrac{100}{\pi}$ Hz

(B)$\dfrac{50}{\pi}$ Hz

(C)50π Hz

(D)100π Hz



圖(4)

(　)12. R-L-C 串聯電路，若電壓 $v(t) = 100\sin 1000t$ V，$R = 10\ \Omega$、$L = 2\ \text{mH}$，電路產生諧振，電容兩端的峰值電壓為 (A)10V (B)15V (C)20V (D)25V

(　)13. R-L-C 串聯電路，電路在諧振時的品質因數 Q 可能為

(A)$\dfrac{2\pi fC}{R}$ (B)$\dfrac{2\pi fL}{R}$ (C)$\dfrac{C}{2\pi fR}$ (D)$\dfrac{L}{2\pi fR}$

(　)14. R-L-C 並聯諧振電路，下列何者不正確？ (A)$X_L = X_C$ (B)總電流最大 (C)總導納最小 (D)諧振角頻率為 $\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

(　)15. R-L-C 並聯諧振電路，具有下列何特性？ (A)功率因數為 1 (B)電流為最大 (C)功率為最大 (D)阻抗最小

(　)16. R-L-C 並聯諧振電路，電阻為 R、電感抗為 X_L，在諧振頻率下的總電流 I_0、總電量 Q_0，則此並聯電路的電壓為 (A)Q_0R (B)I_0R (C)Q_0X_L (D)I_0X_L

(　)17. R-L-C 並聯電路，$R = 20\ \Omega$、$C = 10^{-3}$ F，若已知電路在諧振時的品質因數 $Q = 10$，則電感 L 的大小為 (A)2mH (B)4mH (C)6mH (D)8mH

(　)18. R-L-C 並聯諧振電路中，下列敘述何者錯誤？ (A)阻抗最大 (B)阻抗最小 (C)電流最小 (D)$\cos\theta = 1$

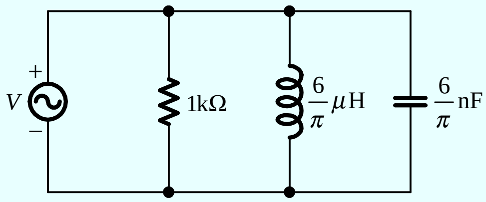
(　)19. 如圖(5)所示，R-L-C 並聯諧振電路，試求此電路的上限截止頻率與下限截止頻率各為

(A)854kHz與812kHz

(B)875kHz與791kHz

(C)896kHz與770kHz

(D)916kHz與750kHz



圖(5)

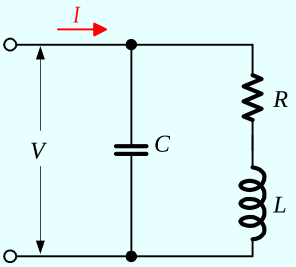
(　)20. 如圖(6)所示電路中，若 C 可變，則諧振時，C 之值為

(A) $\dfrac{1}{\omega^2 L}$

(B) $\dfrac{1}{\omega L}$

(C) $\dfrac{L}{R^2+\omega^2 L^2}$

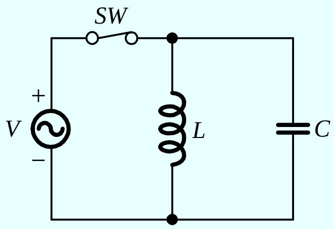
(D) $\dfrac{\omega L}{R^2+\omega^2 L^2}$



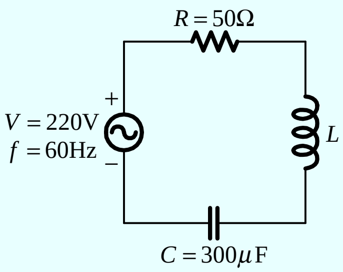
圖(6)

二、計算題

1. 如圖(7)所示，有一 L-C 並聯諧振電路，若將電感值增加為原電感值 2 倍，電容值減少為原電容值 1/8 倍，則此時振盪器的振盪頻率變為原振盪頻率之幾倍？



圖(7)

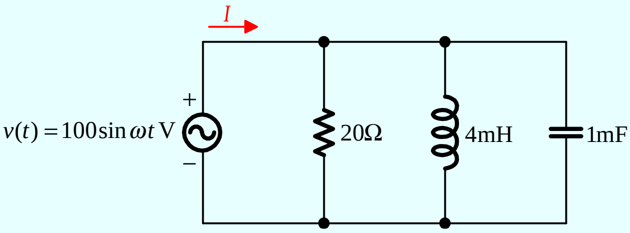


圖(8)

2. R-L-C 串聯電路，已知電路諧振時 $Q=30$，若電阻 $R=3\,\Omega$，試求電感抗 X_L 為多少？
3. 如圖(8)所示電路，當電感為 23.45mH 時，電路產生最大電流，試求此電流量為多少？
4. 諧振頻率為 1000Hz 的 R-L-C 串聯電路，若頻率可變，則當 $X_C=4X_L$ 時，頻率為多少 Hz？
5. R-L-C 串聯電路，$R=20\,\Omega$、$L=0.2\,\text{H}$、$C=0.2\,\mu\text{F}$，交流電壓為 110V，若電路發生諧振時，電路的總電流為多少？
6. R-L-C 串聯電路，若電壓源為 200V 的交流電壓，$R=2\,\Omega$、$L=0.1\,\text{H}$、$C=0.00001\,\text{F}$，當電路產生諧振時，試求諧振頻率、電路的電容抗、品質因數、與電路的平均功率為多少？
7. 在 R-L-C 並聯電路中，已知交流電源的有效值為 100V，$R=20\,\Omega$、$L=16\,\text{mH}$、$C=12\,\mu\text{F}$，求電路在諧振時的功率因數及平均功率分別為多少？

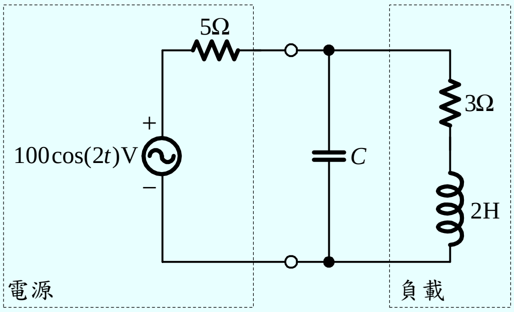
8. R-L-C 並聯電路，$R = 20\ \Omega$、$L = 0.2\ \text{H}$、$C = 20\ \mu\text{F}$，若諧振時電路的總電流為 2A，試求電路的諧振頻率、電源的電壓、與流過電容器的電流為多少？

9. 如圖(10)所示，並聯諧振電路的頻寬（BW）為多少？



圖(10)

※10. 如圖(11)所示電路，為使電源外之阻抗功因值為 1，求 C 值為多少？



圖(11)