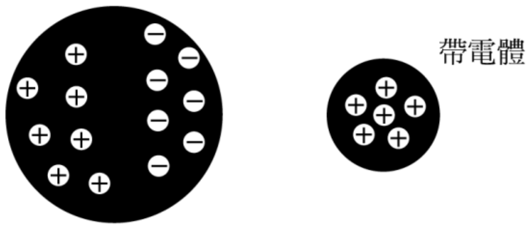
第七章　電容與靜電

7-1　電場與電位

一、靜電的產生

(1) 摩擦起電

(2) 靜電感應：若有一帶正電的導體靠近，則電子受到正電荷的吸引而聚集在靠近帶正電的導體這邊，而另一邊則因電子的缺少成為帶正電，這種現象即稱為「靜電感應」。



靜電感應

二、靜電力

異性電荷間有吸引力，同性電荷間有排斥力，這種靜電荷之間的作用力稱為「靜電力」。

1、庫侖定律（庫侖靜電力定律）:

兩帶電體間之作用力（吸力或斥力）與兩帶電體之帶電量成正比；而與兩帶電體間之距離平方成反比。

$$F = K\frac{Q_1Q_2}{r^2}$$

	F	K（係數）		Q_1、Q_2	r
	（作用力）	真空、空氣中	其他介質	（電荷）	（距離）
MKS 制	牛頓	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=9\times10^9$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}$	庫侖	公尺
CGS 制	達因	1	$\frac{1}{\varepsilon}$	靜庫	公分

EX：在空氣中兩電荷 $Q_1 = 3\times10^{-6}$ 庫侖，$Q_2 = 9\times10^{-6}$ 庫侖，相距 0.3 公尺，則其作用力為多少？（88 年）

◆詳解：$Q_1 = 3\times10^{-6}$，$Q_2 = 9\times10^{-6}$，$r = 0.3(\mathrm{m})$

$$F = k\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{r^2} = 9\times10^9\times\frac{Q_1\cdot Q_2}{\varepsilon_r\cdot 1^2} = 9\times10^9\times\frac{3\times10^{-6}\times9\times10^{-6}}{1\times0.3^2}$$

$$= 9\times10^9\times\frac{3\times9\times10^{-12}}{1\times9\times10^{-2}} = 2.7\times10^{-1}(\mathrm{NT}) = 2.7(\mathrm{NT})$$

三、電場強度（*E*）

(1)定義：單位正電荷在電場中所受的力即為該點之電場強度，

單位正電荷所受力之方向即為電場之方向。

(2)公式：$E = \dfrac{F}{q}$，$F = Eq$

符號	*E*	*F*	*q*
名稱	電場強度	作用力	電荷
MKS 制	牛頓/庫侖	牛頓	庫侖
CGS 制	達因/靜庫	達因	靜庫

(3)點電荷的電場強度：與 *Q* 電荷相距 *r* 處的電場強度

公式：$E = \dfrac{F}{q} = K\dfrac{Q}{r^2}$

EX：有一個正 10×10^{-6} 庫侖的點電荷，距其 10 公尺遠的電場強度多少？（89 年）

◆詳解：$E = \dfrac{F}{q} = 9\times10^9\times\dfrac{Q}{\varepsilon_r\times r^2} = 9\times10^9\times\dfrac{10\times10^{-6}}{1\times10^2} = 9\times10^2(\mathrm{NT/C})$

四、電通密度（*D*）

(1)定義：單位面積通過的電力線數目。

(2)公式：$D = \dfrac{\phi}{A} = \dfrac{Q}{4\pi d^2}$

稱號	*D*	*A*	ϕ
名稱	電通密度	面積	電力線
MKS 制	庫侖/平方公尺	平方公尺	庫侖
CGS 制	線/平方公分	平方公分	線

EX：空間中有一 +5C 電荷，求相距 50cm 的電通密度？（91 年）

◆詳解： $D=\frac{\phi}{A}=\frac{Q}{4\pi d^2}=\frac{5}{4\pi\times(0.5)^2}$

$=1.59\ c/m^2$

五、電位（V）

(1)定義：以無限遠處之電位定為 0 電位，則將單位正電荷自無限遠處移至某點所需的功，即為該點之電位。

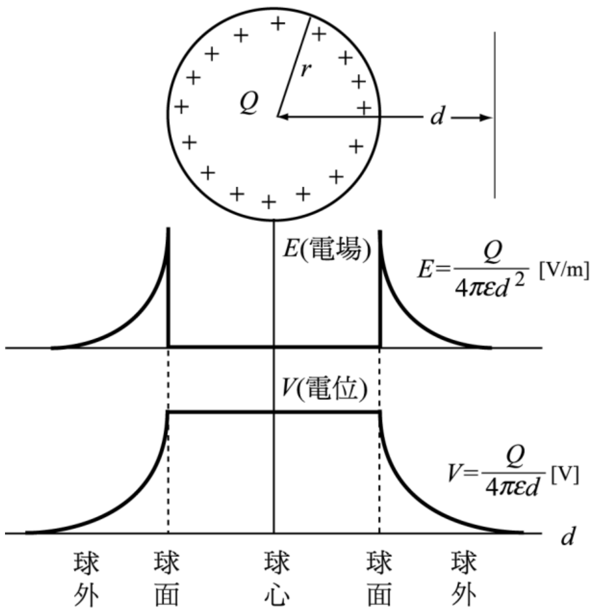
(2)公式： $V=\frac{W}{Q}=\frac{F\cdot d}{Q}=K\frac{Q}{d}$

單位：伏特（V）

EX：有一 2×10^{-5}庫侖之電荷，求距其 50cm 遠的 A 點電位為多少？（90 年）

◆詳解： $V=\frac{W}{Q}=K\frac{Q}{d}=9\times10^9\frac{2\times10^{-5}}{0.5}=36\times10^4=360kV$

六、帶電金屬球體之電場與電位



位置	電場強度[V/m]	電位[V]
球外部 $d>r$	$E_0=\frac{Q}{4\pi\varepsilon d^2}=9\times10^9\times\frac{Q}{\varepsilon_r d^2}$	$V_0=\frac{Q}{4\pi\varepsilon d}=9\times10^9\times\frac{Q}{\varepsilon_r d}$
球面 $d=r$	$E_r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}=9\times10^9\times\frac{Q}{\varepsilon_r r^2}$	$V_r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon r}=9\times10^9\times\frac{Q}{\varepsilon_r r}$
球內部 $d<r$	$E_i=0$	$V_i=V_r$

7-2 電容量

一、電容器之構造：在兩平行導電極板之間，隔以絕緣物體而成。

公式：$C = \varepsilon \dfrac{A}{d}$

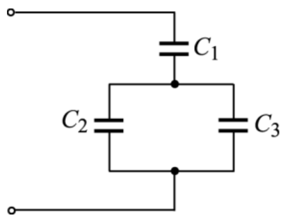
符號	C	A	D	ε	ε_0	ε_r	Q	V
名稱	電容量	極板面積	極板間距	介電係數	真空中介電係數	相對介電係數	電荷	電位
單位	法拉(F)	平方公尺	公尺	法拉/公尺	法拉/公尺	無	庫侖	伏特

$C = \dfrac{Q}{V}$ → Q=CV

Q=It=CV → $t = \dfrac{CV}{I}$

單位：法拉（F）

1μF = 10^{-6}F，1pF = 10^{-12}F



EX：如圖所示，若 C_1 上之電荷為 5000 μC，C_2 上之電荷為 3000 μC，$C_1 = 30\,\mu$F，$C_2 = 15\,\mu$F，求 $C_3 =$？（91 年）

◆詳解：$Q_3 = Q_1 - Q_2 = 5000\mu - 3000\mu = 2000\mu$

$$V_3 = V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{3000\mu}{15\mu} = 200(\mathrm{V})$$

$$\therefore C_3 = \frac{Q_3}{V_3} = \frac{2000\mu}{200} = 10\,\mu(\mathrm{F})$$

二、電容量的標示方式

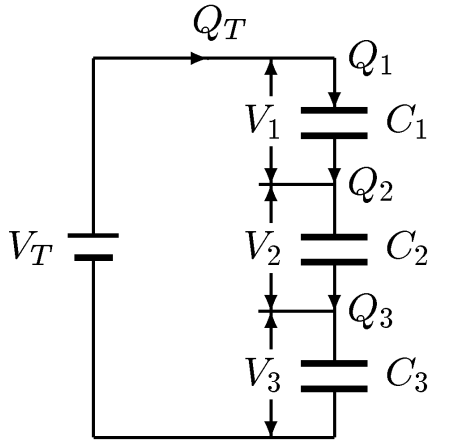
(1) 直接標示法：470μF/100MV，表示電容量 470μF，工作電壓 100V。

(2) 數碼標示法：其中第一位數及第二位數為數字，第三位數為 10 的乘冪數，單位為 pF，字母則表示其誤差值。

104M 表示 10×10^4 pF，M 表示誤差 $\pm 20\%$，M：$\pm 10\%$，J：$\pm 5\%$

三、電容器的串聯

(1) 電荷： $Q_T = Q_1 = Q_2 = Q_3$



(2) 電壓： $V_T = V_1 + V_2 + V_3$

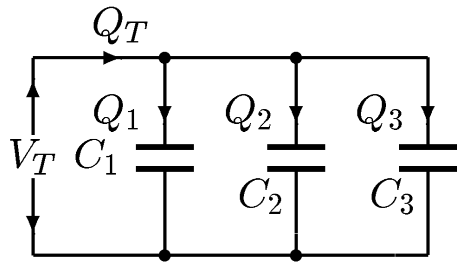
(3) 電容： $\dfrac{1}{C_T} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \dfrac{1}{C_3}$

兩個電容串聯時總電容：

$$C_T = \frac{C_1 \times C_2}{C_1 + C_2}$$ （相當於電阻並聯）

- 電容器串聯可以增加其耐電壓值。

四、電容器的並聯



(1) 電荷： $Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3$

(2) 電壓： $V_T = V_1 = V_2 = V_3$

(3) 電容： $C_T = C_1 + C_2 + C_3$

- 電容器並聯可以增加其電容量及儲存電荷量。

五、電容器可用以儲存能量，儲能公式如下：

$$W = \frac{1}{2}VQ = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

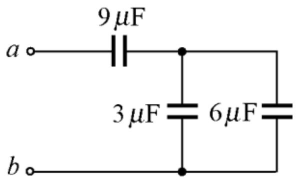
符號	*W*	*V*	*Q*	*C*
名稱	儲存的能量	外加電壓	電荷量	電容量
單位	焦耳（J）	伏特（V）	庫侖（C）	法拉（F）

單位互換：

1 焦耳（J） = 10^7 爾格

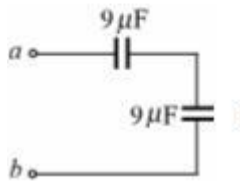
1 伏特（V） = 1/300 靜伏

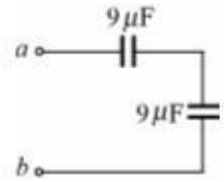
1 庫侖（C） = 3×10^9 靜庫

EX：如圖所示 

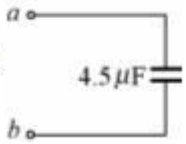
，ab 兩端的電容量為？（89 年）

◆詳解：

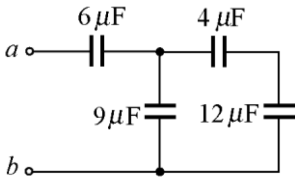


=


$6\mu+3\mu=9\mu\mathrm{F}$

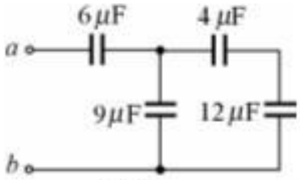
=


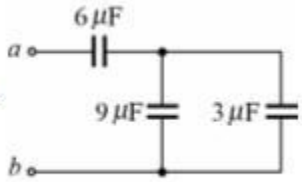
$C_{ab}=\dfrac{9\mu\times 9\mu}{9\mu+9\mu}=4.5\mu(\mathrm{F})$

EX：如圖所示 

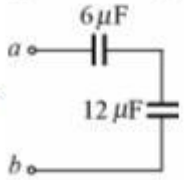
，求 C_{ab} 電量為多少 ？（88 年）

◆詳解：

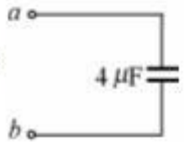


=


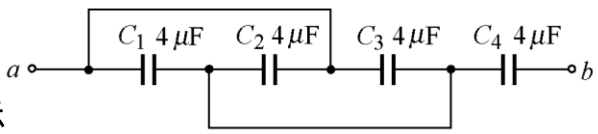
$\dfrac{4\mu\times 12\mu}{4\mu+12\mu}=3\mu(\mathrm{F})$

=


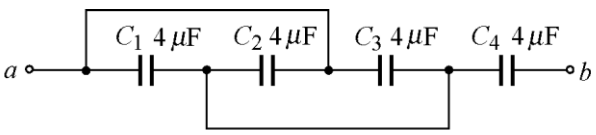
$9\mu+3\mu=12\mu(\mathrm{F})$

=


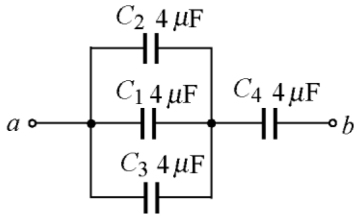
$C_{ab}=\dfrac{6\mu\times 12\mu}{6\mu+12\mu}=4\mu(\mathrm{F})$

EX：如圖所示 

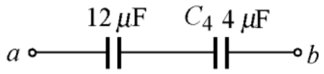
，$C_1=C_2=C_3=C_4=4\mu\mathrm{F}$，求 C_{ab}=？（86、92 年）

◆詳解：


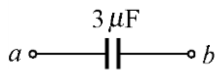
=



=



=



$C_{ab}=\dfrac{12\mu\times 4\mu}{12\mu+4\mu}=3\,\mu\,(\mathrm{F})$

EX：有一個 50μF 的電容器，將跨接於 100V 的直流電壓，試求電容器儲存的能量有多少？（89 年）

◆詳解：$Q=V\cdot C$

$$W=\frac{1}{2}\cdot Q\cdot V=\frac{1}{2}\cdot V^2\cdot C$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 100^2\cdot 50\cdot 10^{-6}=\frac{1}{2}\cdot 10^4\cdot 50\cdot 10^{-6}=25\cdot 10^{-2}(\mathrm{J})=0.25(\mathrm{J})$$

EX：0.01μF 之電容器與 0.04μF 之電容器並聯後，施加 500V 之直流電壓，求電容器之總儲存量？（87 年）

◆詳解：$W_c=\frac{1}{2}C_pV^2=\frac{1}{2}(0.01+0.04)\times 10^{-6}\times(500)^2=6.25\mathrm{m}(\mathrm{J})$

EX：兩電容器之電容量及耐壓分別為 20μF/100V 及 40μF/200V，則兩者串聯後可耐壓？（88 年）

◆詳解：$\because Q_s=M_{in}(Q_1，Q_2)=Q_1=C_1V_1$

$$=20\,\mu\times 100=2000\,\mu$$

$$\therefore V_{\max}=\frac{Q_s}{C_1 // C_2}=\frac{2000\mu}{20\mu.// 40\mu}=150(\mathrm{V})$$

第八章　　電感

8-1　磁之基本概念

一、庫侖磁力定律

定義：兩磁極間之相吸或相斥作用力大小與兩磁極強度乘積成正比；而與兩磁極間之距離平方成反比，即稱為庫侖磁力定律

$$F=K\frac{m_1m_2}{d^2}$$

名稱 / 制別	F	K(常數)		m_1、m_2	d
	作用力	真空、空氣中	其他介質	磁極強度	距離
MKS 制	牛頓	$\frac{1}{4\pi\mu_0}=6.33\times10^4$	$\frac{1}{4\pi\mu_0\mu_r}$	韋伯	公尺
CGS 制	達因	1	$\frac{1}{\mu_r}$	靜磁	公分

導磁係數 $\mu=\mu_0\cdot\mu_r$。

μ_0：真空、空氣中的導磁係數，$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$。

μ_r：相對導磁係數。

EX：$m_1=6\times10^{-3}Wb$，$m_2=3\times10^{-2}Wb$，且兩者距離 30cm，則 m_1 受力？（89 年）

◆詳解：$f_1=6.33\times10^4\times\frac{m_1\cdot m_2}{d^2}$

$$=6.33\times10^4\times\frac{(6\times10^{-3})\cdot(3\times10^{-2})}{0.3^2}=126.6(NT)$$

二、磁場強度（H）：單位磁極（m）在磁場中所受的力（F）

單位磁極所受力之方向即為磁場強度之方向

$$H=\frac{F}{m}$$

符號	H	F	m
名稱	磁場強度	作用力	磁極強度
MKS 制	牛頓/韋伯	牛頓	韋伯
CGS 制	奧斯特	達因	靜磁

EX：某磁極 $m = 2\times10^{-6} Wb$ 於空間某點 P，受力 $8\times10^{-4} NT$，則點 P 的磁極強度為？

（90 年）

◆詳解：$H = \dfrac{F}{m} = \dfrac{8\times10^{-4}}{2\times10^{-6}} = 400(NT/Wb)$

三、磁通密度（B）: 單位面積（A）垂直通過的磁力線數(ϕ)

$B = \dfrac{\phi}{A}$

符號	B	ϕ	A
名稱	磁通密度	磁通（磁力線）	面積
MKS 制	韋伯/平方公尺	韋伯	平方公尺

其中 ϕ 為通過磁路的磁力線總數

1 韋伯/平方公尺 = 10^4 高斯 = 10^4 線/平方公分

EX：若有磁力線φ=1.8 韋伯，垂直通過 6cm 之方形截面，則其磁通密度為？（92 年）

◆詳解：A=6×6=36（ cm^2 ））=0.036（ m^2）

$$B = \frac{\phi}{A} = \frac{1.8}{0.036} = 50(Wb/m^2)$$

四、導磁係數(μ)：

公式：$\mu = \dfrac{B}{H} = \mu_0\mu_r$。

五、電容、電感比較

電　場	磁　場
庫侖電荷定律 $F=K\dfrac{Q_1Q_2}{d^2}$ $K=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r}$，空氣中，$K=9\times10^9$	庫侖磁力定律 $F=K\dfrac{m_1m_2}{d^2}$ $K=\dfrac{1}{4\pi\mu_o\mu_r}$，空氣中 $K=6.33\times10^4$
電場強度 $E=\dfrac{F}{Q}=9\times10^9\dfrac{Q}{r^2}$	磁場強度 $H=\dfrac{F}{m}=6.33\times10^4\dfrac{M}{r^2}$
電通密度 $D=\dfrac{\phi}{A}$	磁通密度 $B=\dfrac{\phi}{A}$
介電係數 $\varepsilon=\dfrac{D}{E}$	導磁係數 $\mu=\dfrac{B}{H}$
介電係數 $\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$ $\varepsilon_0=\dfrac{1}{36\pi\times10^9}$ 法拉／公尺	導磁係數 $\mu=\mu_o\cdot\mu_r$ $\mu_o=4\pi\times10^{-7}$ 亨利／公尺
電動勢(emf) $E=IR$	磁動勢(mmf) $F=\phi R=H\ell$
電阻 $R=\rho\dfrac{\ell}{A}=\dfrac{\ell}{\sigma A}$	磁阻 $R=\dfrac{\ell}{\mu A}$

8-2　電磁感應

一、各種不同形式電感器電感量的計算

$$L=\frac{\mu AN^2}{\ell}$$

符號	L	μ	A	N	ℓ
名稱	電感量	導磁係數	截面積	匝數	磁路長度
MKS 制	亨利（H）	亨利/公尺	m^2	T	m

二、自感量（L）: 單位電流（ΔI）所產生的磁交鏈變化（$N\Delta$）。

公式：$L=\dfrac{N\Delta\phi}{\Delta I}$

自感應電勢（e）

公式：$e=-N\dfrac{\Delta\phi}{\Delta t}=-L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$

三、電感器串聯

$L_T=L_1+L_2+L_3+\ldots+L_n$

四、電感器並聯

$$\frac{1}{L_T}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}+\frac{1}{L_3}+\cdots+\frac{1}{L_n}$$

五、互感量（M）:

一線圈有電流變化時，除本身產生自感應外，同時鄰近線圈的磁通鏈（$N_2\phi\Delta_2$） 也產生變化，而感應電動勢，此現象稱為互感應。

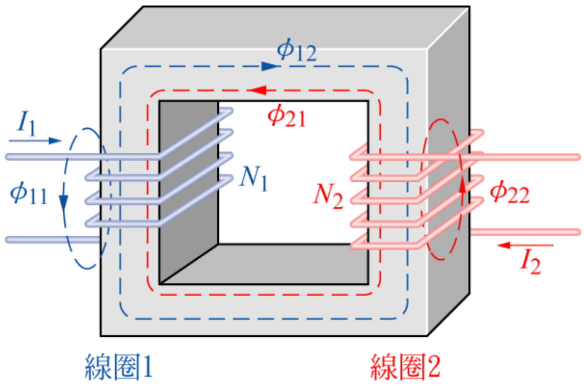
線圈 1 對線圈 2 的互感 $M_{12}=\frac{N_2\phi_{12}}{I_1}$

線圈 2 對線圈 1 的互感 $M_{21}=\frac{N_1\phi_{21}}{I_2}$

$M_{12}=M_{21}=M$

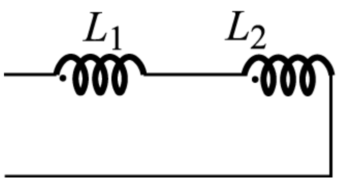
耦合係數 $K=\frac{\phi_{12}}{\phi_1}=\frac{\phi_{21}}{\phi_2}$

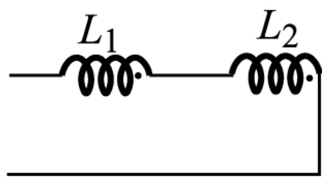
$M=K\sqrt{L_1L_2}$



六、電感器串聯—含互感

⌗電感器串聯互助：

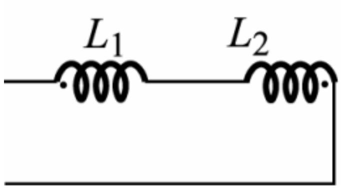


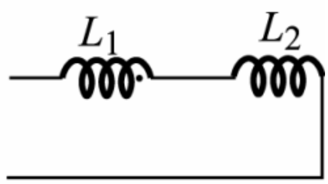


$L_A=L_1+M$　　$L_B=L_2+M$

$L_T=L_A+L_B=L_1+L_2+2M$

⌗電感器串聯互消：

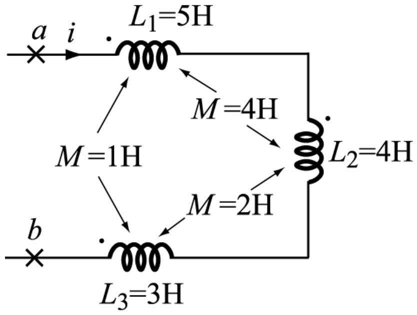




$L_A=L_1-M$　　$L_B=L_2-M$

$L_T=L_A+L_B=L_1+L_2-2M$

EX：如圖所示，M 為互感量，則 L_{ab} 值為多少亨利？



◆詳解：

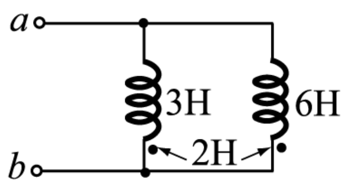
$$L_{ab}=L_1+L_2+L_3+2(M_{12}-M_{23}-M_{13})$$
$$=5+4+3+2(4-2-1)$$
$$=14\text{H}$$

七、感器並聯—含互感

電感器並聯互助：$L_T=\dfrac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}$

電感器並聯互消：$L_T=\dfrac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2+2M}$

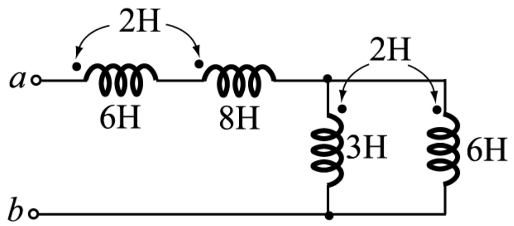
EX：如圖所示電路中 L_{ab} 為多少 H？（86 年）



◆ 詳解：L_1 與 L_2 為並聯互助連接

$$L_{ab}=\frac{L_1\times L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}=\frac{3\times6-2^2}{3+6-2\times2}=2.8(\text{H})$$

EX：如圖所示 ，$a-b$ 端之等效電感為多少 H？



◆詳解：

$$C_{ab}=6+8+2\times2+\frac{3\times6-2^2}{3+6-2\times2}$$
$$=20.8\text{H}$$

EX：兩個不同磁性材料之鐵心電感器 L_1 及 L_2，已知其鐵心上所繞之線圈匝數均為 100 匝，若分別通以 1A 之電流，其產生之磁通分別為 ϕ_1=1mWb 及 ϕ_2=4mWb，再將此兩電感器串聯，若其磁通互助且耦合係數為 0.1，則此兩電感器串聯之總電感量 L_T=？（92 年）

◆詳解：$N\phi=LI\Rightarrow L=\dfrac{N\phi}{I}$

$$L_1=\frac{N_1\phi_1}{I_1}=\frac{100\times10^{-3}}{1}=0.1(\text{H})$$

$$L_2=\frac{N_2\phi_2}{I_2}=\frac{100\times4\times10^{-3}}{1}=0.4(\text{H})$$

$$M=k\sqrt{L_1\times L_2}=0.1\times\sqrt{0.1\times0.4}=0.02\text{H}$$

又串聯互助，$\therefore L_T=L_1+L_2+2M=0.1+0.4+0.04=0.54(\text{H})$

第九章　　直流暫態

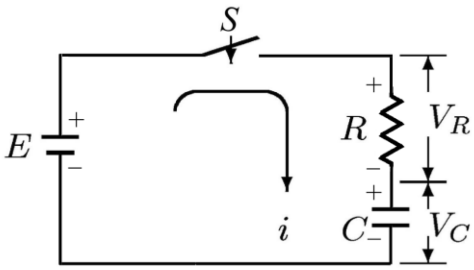
9-1　電阻 - 電容電路的暫態現象

一、*R-C* 直流之充、放電暫態電路

❖ 暫態：R-C 或 R-L 電路在電源接通或切斷的瞬間，產生充放電電流的瞬間變化情形。

穩態：上述的變化達到穩定時（5 倍時間常數），電壓或電流的狀態。

1、R-C 充電



(1) 充電電流（下降曲線）

$$i(t)=\frac{E}{R}\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$ 安培

(2) 電阻器端電壓（下降曲線）

$$V_R(t)=i(t)\times R=E\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$ 伏特

(3) 電容器充電電壓（上昇曲線）

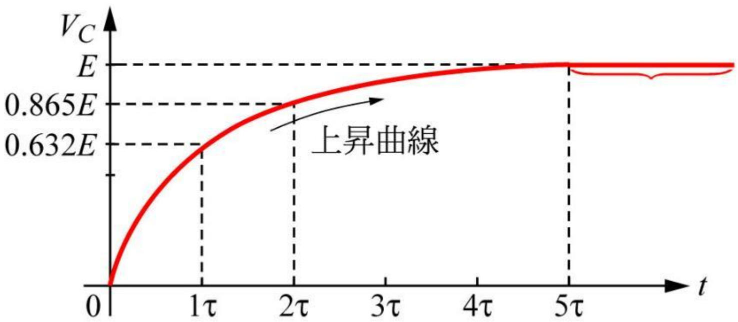
$$V_C(t)=E-V_R(t)=E(1-e^{-\frac{t}{RC}})$$ 伏特

t：充電時間。

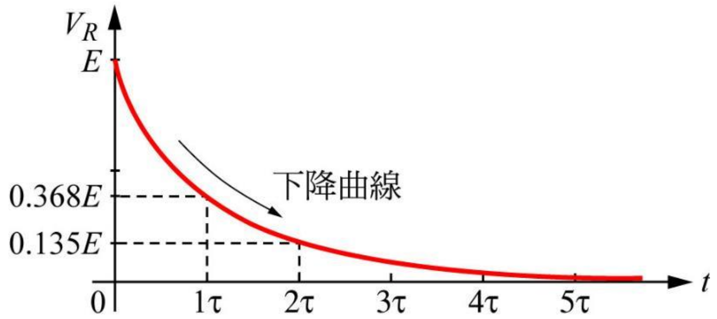
RC：電阻值(R)乘以電容量(C)稱為時間常數，即：

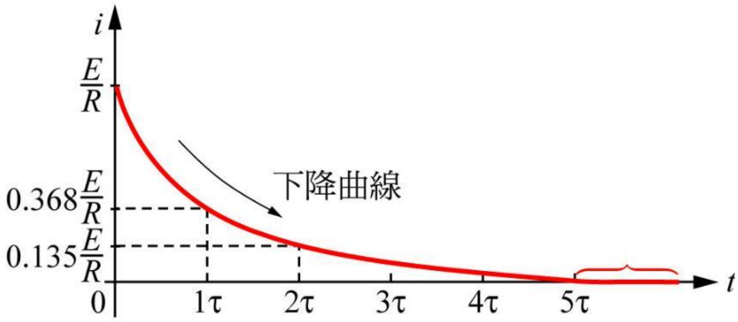
時間常數　$\tau=RC$ 秒

(4) 充電時的曲線



t>5RC 時，達穩定狀態 $V_C=E$，不再變化





t>5RC 時，線路電流等於 0。

(5) t 為某一值的電壓、電流變化情形

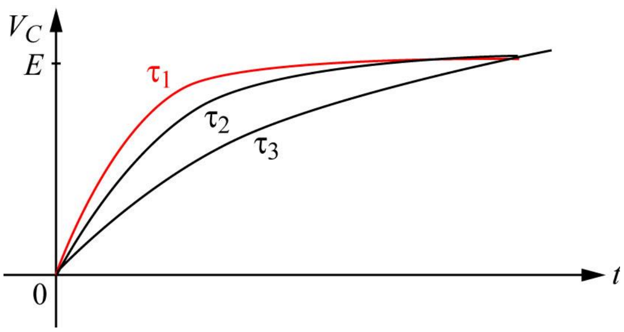
(a) $t = 0$ 時：$I = \dfrac{E}{R}$ 最大，$V_R = E$ $V_C = 0$（此時電容器 C 視為短路）

(b) $t = 1RC$ 時：$I = 0.368\dfrac{E}{R}$ ，$V_R = 0.368E$ $V_C = 0.632E$

(c) $t = 5RC$ 時（穩態）: $I = 0$，$V_R = 0$，$V_C = E$（此時電容器 C 視為開路）

(6) RC 大小與充電速度的比較

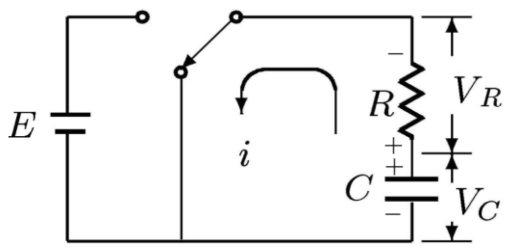
當電阻值(R)或電容量(C)愈小時，電容器兩端的充電電壓愈快達到穩定，也就是很快就可以充滿電。



時間常數：τ3>τ2>τ1

充電快慢：τ1>τ2>τ3

2、*R-C* 放電



(1) 電容器放電電壓 （下降曲線）

$$V_C(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

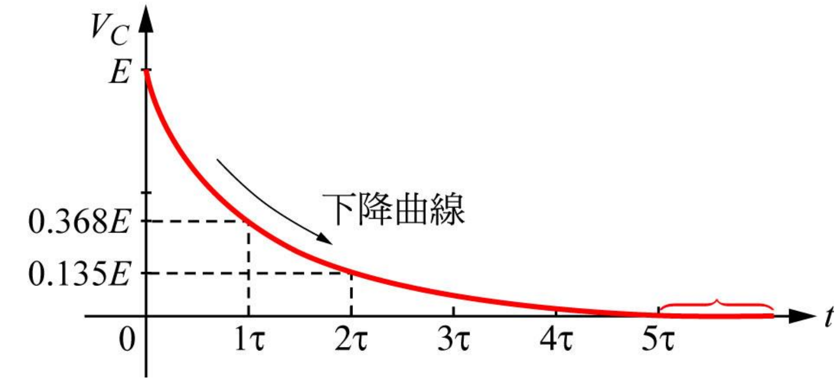
(2) 電阻器端電壓 （上昇曲線）

$$V_R(t) = -V_C(t) = -E \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

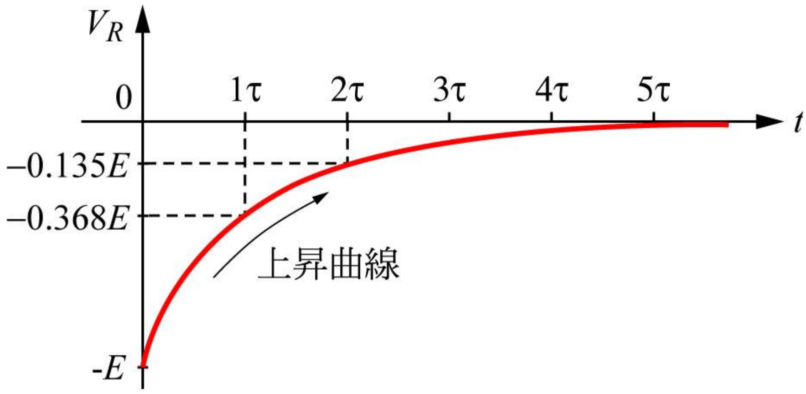
(3) 放電電流 （上昇曲線）

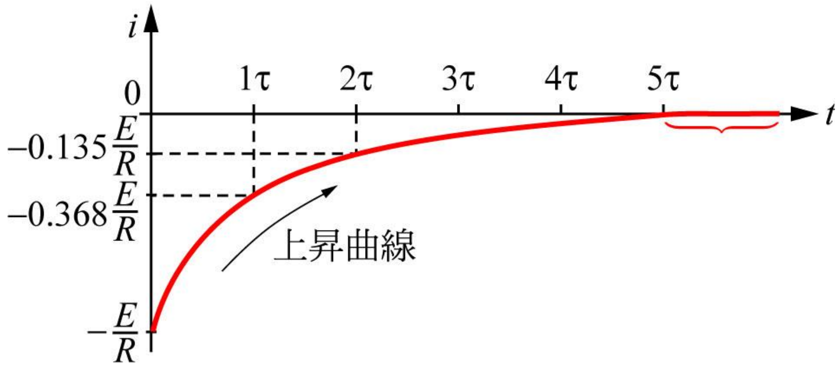
$$i(t) = \frac{V_R}{R} = -\frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

(4) 放電時的曲線



t>5RC 時，$V_C = 0$。





t>5RC 時，$i = 0$

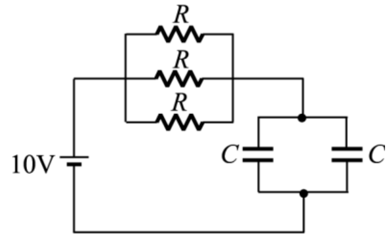
(5) t 為某一值的電壓、電流變化情形

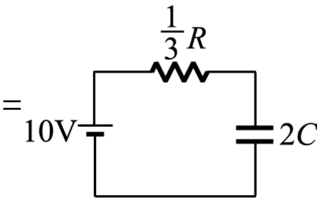
(a) $t = 0$ 時：$I = -\frac{E}{R}$ ，$V_R = -E$　$V_C = E$

(b) $t = 1RC$ 時：$I = -0.368\frac{E}{R}$ ，$V_R = -0.368E$　$V_C = 0.368E$

(c) $t = 5RC$ 時（穩態）：$I = 0$，$V_R = 0$ ，$V_C = 0$

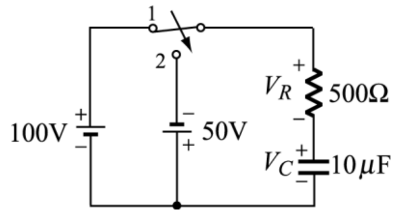
EX：如右圖所示，$R = 6\text{k}\Omega$，$C = 1\,\mu\text{F}$，則時間常數等於多少？（89 年）



◆詳解：原圖=


$$\tau = \frac{R}{3} \times 2C = \frac{6\text{k}}{3} \times 2 \times 1\,\mu = 4\text{m(s)}$$

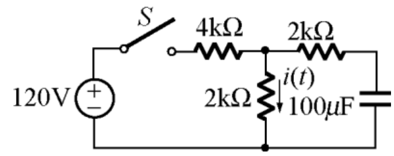
EX：如圖所示，若電路已達穩態，當 t = 0 時，開關 S 由 1 到 2，則 V_R 值為多少伏特？（91 年）



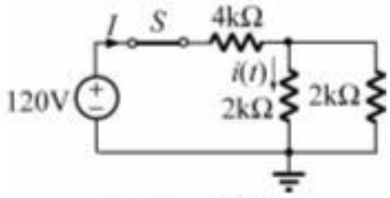
◆詳解：$V_R(0) = -(V_C + E_2) = -150\text{V}$

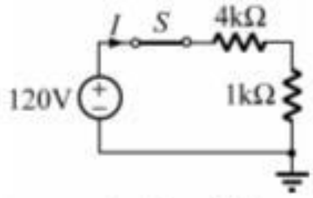
$$V_R(t) = V_R(0) \times e^{-\frac{1}{RC}t} = -150e^{-200t}\,\text{V}$$

EX：如圖所示，電容器的初值電壓為 0V，在 t_1 的時間將開關 S 閉合（ON），則 $i(t_1)$為？（89 年）

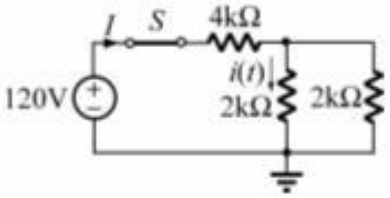


◆詳解：$t_1 = 0$，C 視為短路

原圖=


=


$$I = \frac{120}{4\text{k} + 1\text{k}} = 24\text{m(A)}$$

=


$$i(t_1) = 24\text{m} \times \frac{2\text{k}}{2\text{k} + 2\text{k}} = 12\text{m(A)}$$

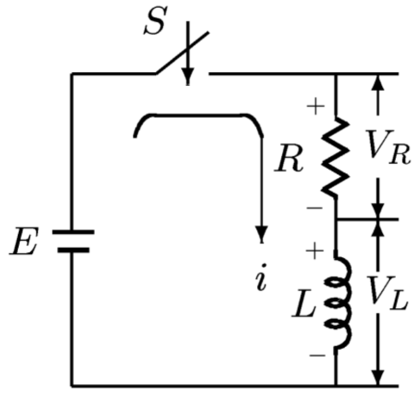
9-2　電阻 - 電感電路的暫態現象

一、*R-L* 直流之充、放電暫態電路

1**、*****R-L*** 充電

(1) 充電電流　（上昇曲線）

$$i(t)=\frac{E}{R}\cdot(1-e^{-\frac{t}{L/R}})$$



(2) 電阻器端電壓　（上昇曲線）

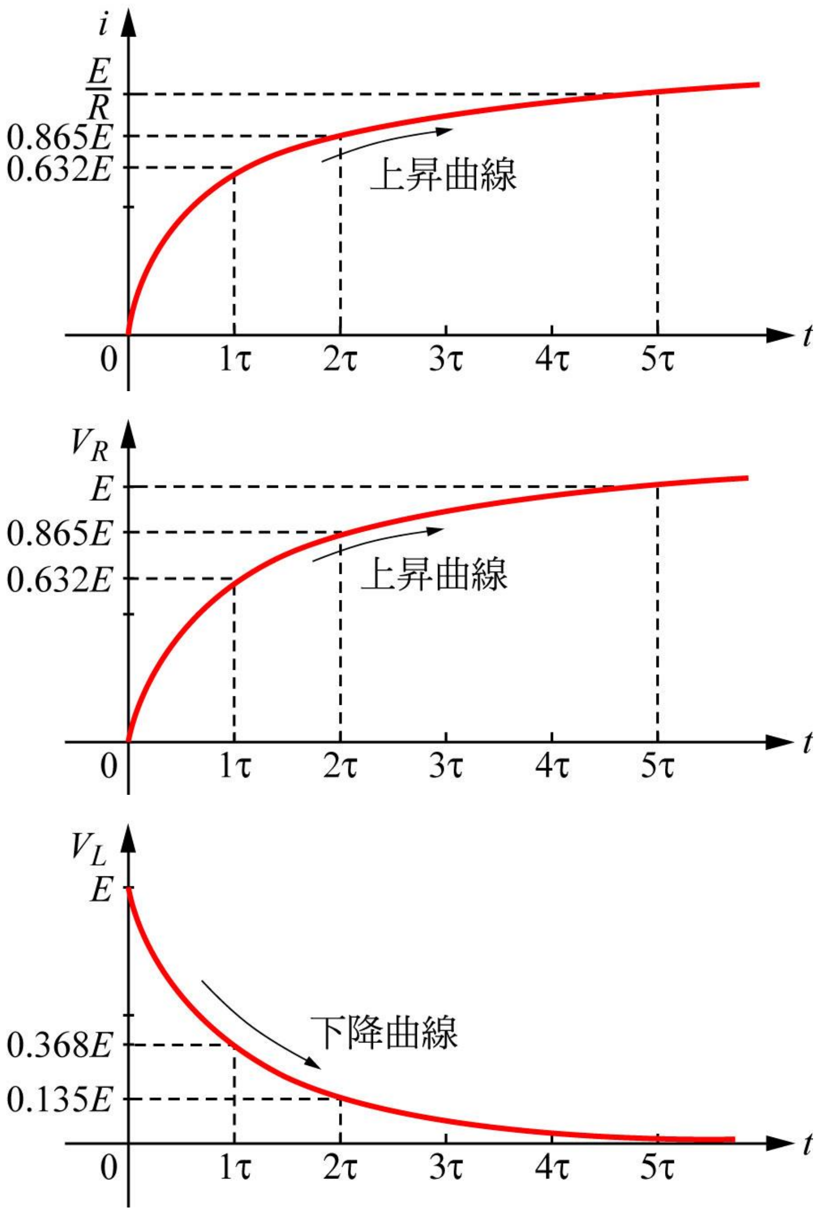
$$V_R(t)=i(t)\times R=E\cdot(1-e^{-\frac{t}{L/R}})$$

(3) 電感器充電電壓　（下降曲線）

$$V_L(t)=E-V_R(t)=E\cdot e^{-\frac{t}{L/R}}$$

時間常數 $\tau=\dfrac{L}{R}$ 秒

(4) 充電時的曲線



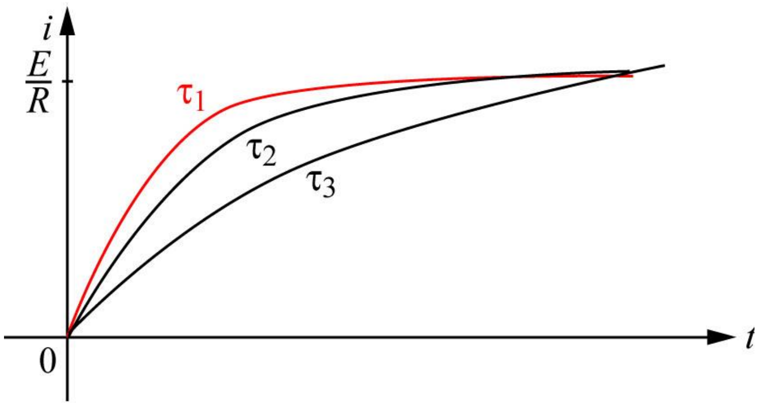
(5) t 為某一值的電壓、電流變化情形

(a) $t=0$ 時（開始瞬間）: $i=0$，$V_R=0$，$V_L=E$（此時電感器 L 視為開路）

(b) $t=\dfrac{L}{R}$ 時： $I=0.632\dfrac{L}{R}$，$V_R=0.632E$，$V_L=0.368E$

(c) $t=5\dfrac{L}{R}$ 時（穩態）: $I=\dfrac{L}{R}$，$V_R=E$，$V_L=0$（此時電感器 L 視為短路）

(6) RL 大小與充電速度的比較



時間常數：τ3>τ2>τ1

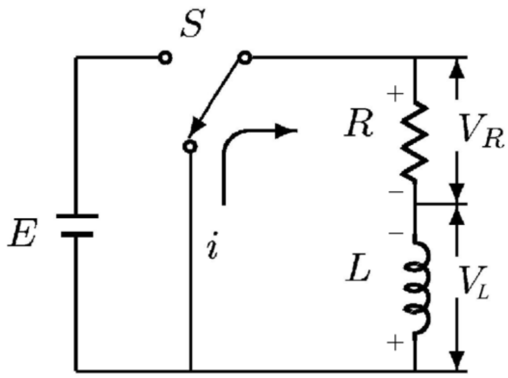
充電快慢：τ1>τ2>τ3

R 愈大，L 愈小，則 τ 愈小

R 愈小，L 愈大，則 τ 愈大

2、*R-L* 放電

(1) 放電電流 （下降曲線）



$$i(t)=\frac{E}{R}\cdot e^{-\frac{t}{L/R}}$$

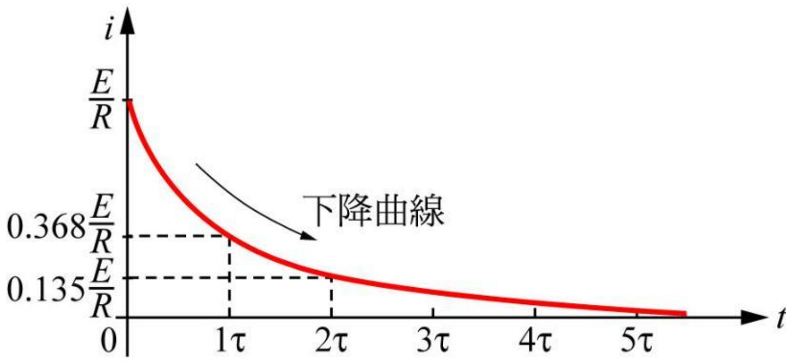
(2) 電阻器端電壓 （下降曲線）

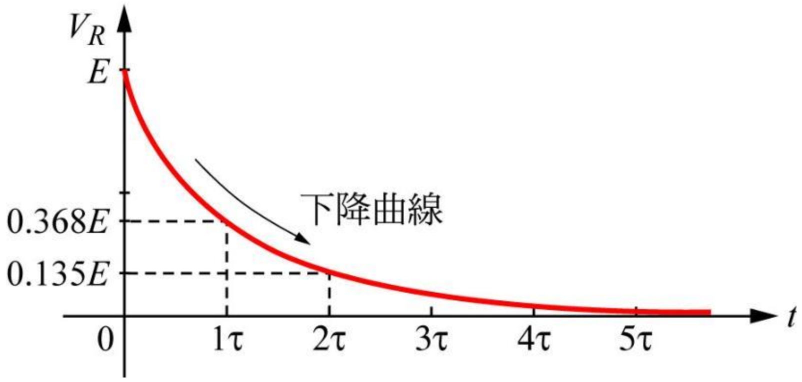
$$V_R(t)=i(t)\times R=E\cdot e^{-\frac{t}{L/R}}$$

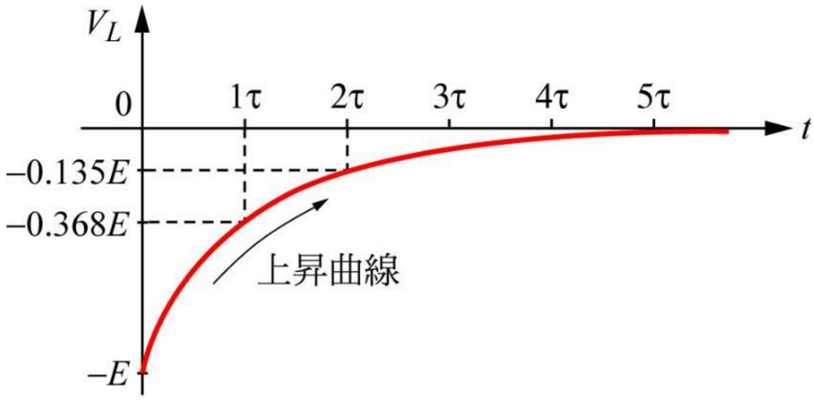
(3) 電感器放電電壓 （上昇曲線）

$$V_L(t)=-V_R(t)=-E\cdot e^{-\frac{t}{L/R}}$$

(4) 放電時的曲線







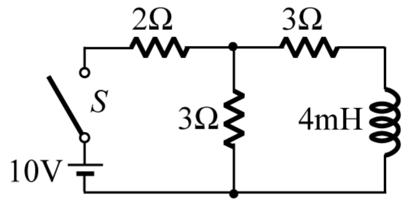
(5) t 為某一值的電壓、電流變化情形

(a) t = 0 時： $I=\frac{L}{R}$ ，$V_R=E$ ，$V_L=-E$

(b) $t=\frac{L}{R}$ 時：$I=0.368\frac{L}{R}$ ，$V_R=0.368E$ ，$V_L=-0.368E$

(c) $t=5\frac{L}{R}$ 時（穩態）: $i=0$，$V_R=0$ ，$V_L=0$

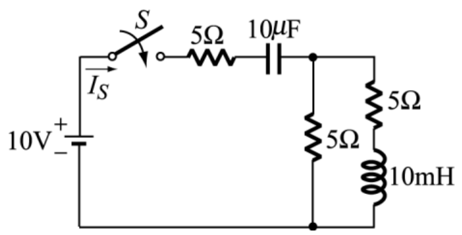
EX：如圖所示，開關 S 在接通瞬間，流經 2Ω 的電流為多少？（89 年）



◆詳解：S 接通瞬間電感器視同開路，所以此時

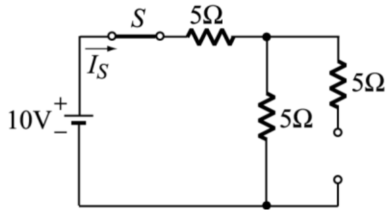
$$I_{2\Omega}=\frac{10}{2+3}=2$$

EX：如圖所示電路之電感及電容均無儲能，則在開關 S 閉合瞬間，電源電流 I_S 應為若干 A？（91 年）



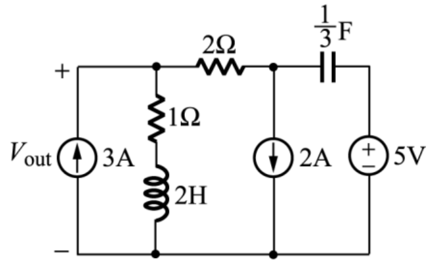
◆詳解：S 閉合瞬間：

C 視為短路，L 視為開路

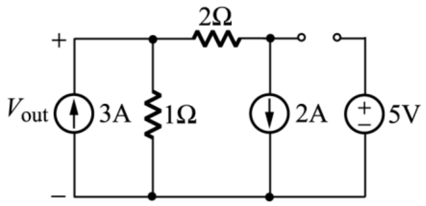
原圖= 

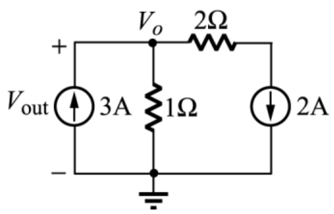
$$I_S(0) = \frac{10}{5+5} = 1$$

EX：如圖所示，求穩態時之 V_{out} =？（87 年）



◆詳解：直流電穩態⇒L 視為短路，C 視為開路

原圖= 

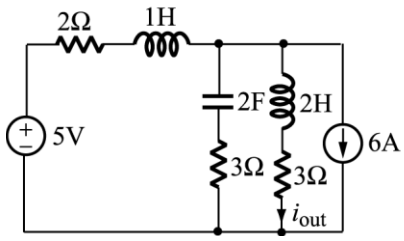


利用節點電壓法：

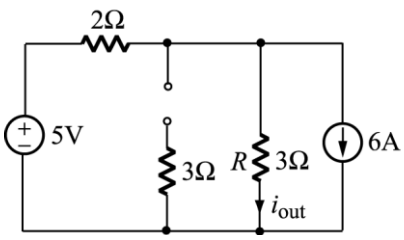
$$-3+\frac{V_o}{1}+2 = 0$$

$V_o = 1$ ＝ $V_{out} = 1(V)$

EX：如圖所示，求穩定電路，求穩態時之 i_{out} =？（87 年）



◆詳解：直流充電穩態⇒L 視為短路，C 視為開路

原圖= 

利用節點電壓法：

$$\frac{V_o-5}{2}+\frac{V_0}{3}+6=0 \quad V_0=-\frac{21}{5}V$$

$$i_{out}=\frac{V_0}{R}=\frac{-\frac{21}{5}}{3}=-\frac{7}{5}A$$

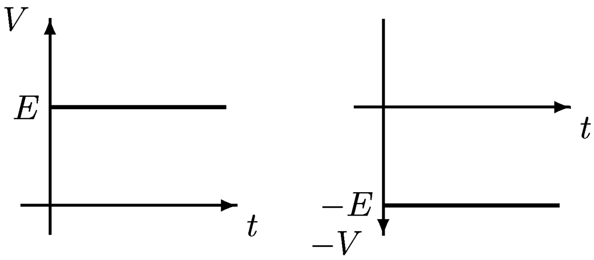
第十章　　交流電

10-1　交流與直流

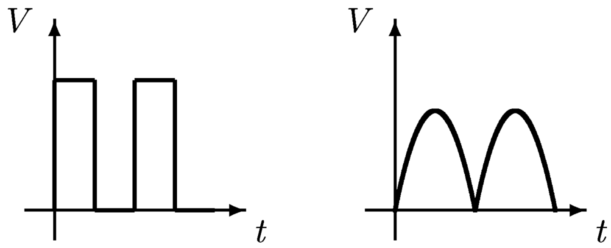
一、直流電

直流電定義：電壓極性或電流方向不隨時間而變化者。

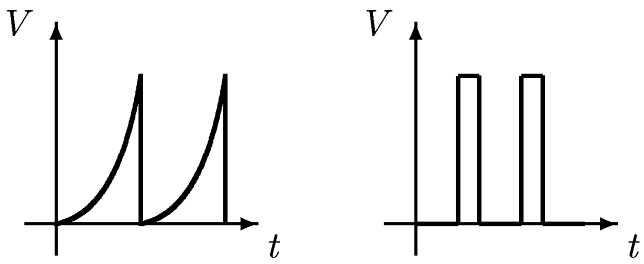
(1) 理想直流：極性和大小都不隨時間而變者。



(2) 脈動直流：極性不變、但大小會隨時間而變者。

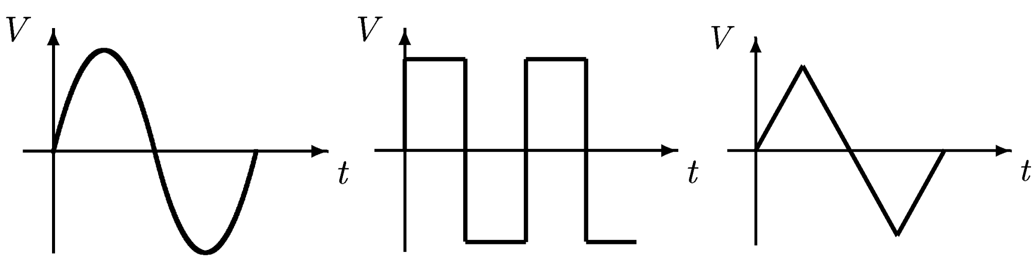


(3) 脈衝直流：極性不變、但振幅高、平均值小者。



二、交流電

交流電定義：電壓極性或電流方向會隨時間作週期性的變化者 。



(a) 正弦波交流　　(b) 方波交流　　(c) 三角波交流

三、交流和直流的轉換

(1)交流電轉→直流電：透過整流電路。

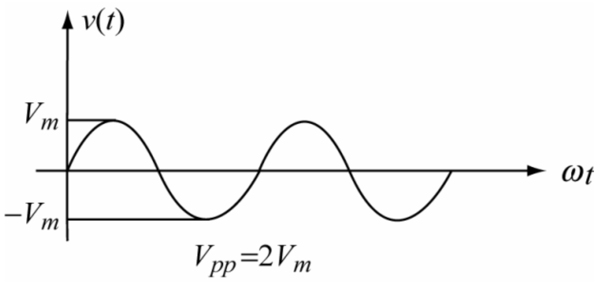
(2)直流電轉→交流電：使用振盪電路。

10-2　振幅大小

一、振幅值的定義

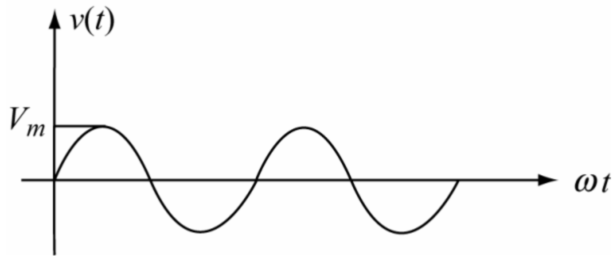
(1) 峰對峰值（peak to peak value）

一完整週期內，波形之最低點與最高點間之大小即稱之。



(2)最大值（maximum value）

一完整週期內振幅最大（波形最高）之點，其值即稱為最大值。

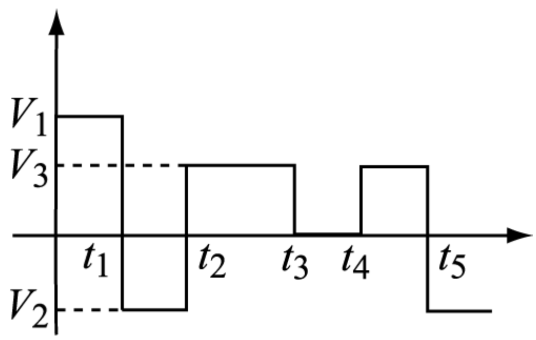


(3) 有效值（effective value）

若一交流電流和一直流電流加於同一負載，若產生相等之熱量，則此直流之量值，即為此交流電流之有效值。有效值亦稱為均方根值（簡稱 rms）。

一般電表測得電壓值均為有效值。

$$V_{rms}=\sqrt{\frac{{V_1}^2\Delta t_1+{V_2}^2\Delta t_2+{V_3}^2\Delta t_3+\cdots}{T}}$$



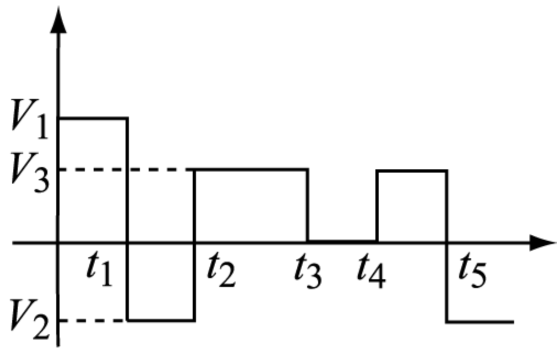
T：週期，完成完整一個波形所需的時間。

$\Delta t_1 = t_1$， $\Delta t_2 = t_2 - t_1$，$\Delta t_3 = t_3 - t_2$，$\Delta t_4 = t_4 - t_3$

(4) 平均值（average value）

一週期內電壓或電流波形曲線下所含**面積總和**對**總週期**之平均值。

$$V_{av} = \frac{V_1 \Delta t_1 + V_2 \Delta t_2 + V_3 \Delta t_3 + \cdots}{T}$$



(5)波形因數（*F.F.*）、波峰因數（*C.F.*）

$$波形因數(F.F.) = \frac{有效值}{平均值} = \frac{V_{rms}}{V_{av}} \text{ or } \frac{I_{rms}}{I_{av}}$$

$$波峰因數(C.F.) = \frac{最大值}{有效值} = \frac{V_m}{V_{rms}} \text{ or } \frac{I_m}{I_{rms}}$$

各種波形的波形因數與波峰因數都不同，故由波形因數或波峰因數之值，可判斷出其為何種波形。

(6) 基本波形各振幅值間的關係

	正弦波	三角波	方波
峰對峰值	$2V_m$	$2V_m$	$2V_m$
最大值	V_m	V_m	V_m
有效值	$\frac{1}{\sqrt{2}}V_m$	$\frac{1}{\sqrt{3}}V_m$	V_m
平均值	$\frac{2}{\pi}V_m$	$\frac{1}{2}V_m$	V_m
波峰因數 *C.F.*	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	1
波形因數 *F.F.*	1.11	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

EX：一正弦交波電壓之有效值為 110V，則此正弦波形之峰對峰值為？（87 年）

◆ 詳解： $有效值 = \frac{1}{\sqrt{2}} V_m = 110$

$V_m = 110\sqrt{2}$

$V_{P-P} = 2V_m = 2\times 110\sqrt{2} \fallingdotseq 311.1(\text{V})$

EX：有一交流電壓 v(t) = 100sin(377t)V，則此電壓的頻率及正半週平均值分別為？

◆ 詳解：$v(t) = V_m \sin\omega t$ （89 年）

$V_{av} = V_m \times \frac{2}{\pi} = 100\times 0.636 = 63.6(\text{V})$

$\omega = 2\pi f$

$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{377}{2\times 3.14} \fallingdotseq 60(\text{Hz})$

EX：某交流正弦波電源之頻率為 60Hz，正半週期電壓為 100V，則交流電壓瞬間方程式應接近為？（88 年）

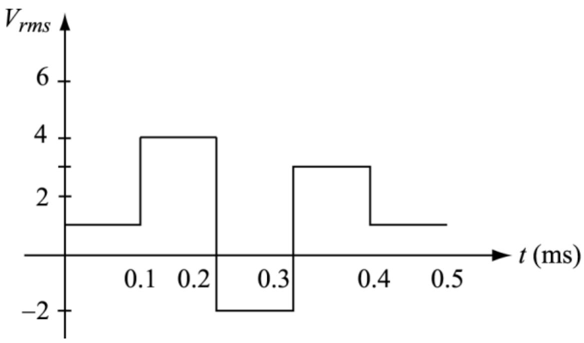
◆ 詳解：$v(t) = V_m \sin\omega t$

$V_{av} = V_m \times \frac{2}{\pi} \rightarrow 100 = V_m \times \frac{2}{\pi} \rightarrow V_m = \frac{100}{2/\pi} = 157$

$\omega = 2\pi f = 2\pi\times 60 = 377$

$v(t) = 157\sin 377t$

EX：如圖所示，週期為 0.4ms 的波形，其電壓的有效值（rms）為？（89 年）

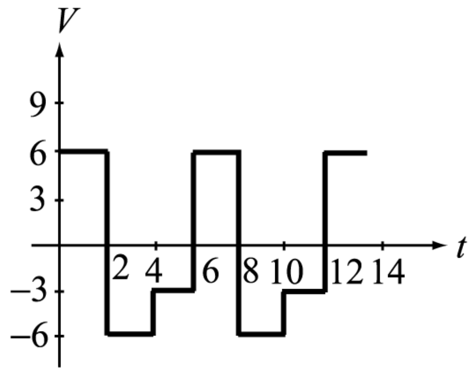


◆ 詳解：$V_{rms} = \sqrt{\frac{V_1^{\,2}\Delta t_1 + V_2^{\,2}\Delta t_2 + \cdots}{T}}$

$= \sqrt{\frac{1^2\times 0.1 + 4^2\times 0.1 + (-2)^2\times 0.1 + 3^2\times 0.1}{0.4}}$

$= \sqrt{\frac{3}{0.4}} = \sqrt{\frac{30}{4}} = \frac{\sqrt{30}}{2}(\text{V})$

EX：如圖所示　，a 為平均值，b 為有效值，則 a, b 的電壓各為多少伏特？（91 年）



◆詳解：$a = V_{ac} = \frac{6\times 2 - 6\times 2 - 3\times 2}{6} = -1\text{V}$

$$b = V_{rms} = \sqrt{\frac{(\frac{6}{1})^2 \times 2 + (-\frac{6}{1})^2 \times 2 + (-\frac{3}{1})^2 \times 2}{6}} = 3\sqrt{3}\,\text{V}$$

10-3　週期、頻率與波長

一、週期：交變電壓或電流，完成一週所需時間，以 T 表示，單位為秒（s）。

二、頻率：週期性波形，每一秒中所重覆出現的週數稱為頻率，其符號為 f，單位為赫芝(Hz)或「週/秒」。目前台電供電頻率為 60 Hz。

$$f = \frac{1}{T}$$

三、角速度（angle speed，簡寫為 ω ）

交流發電機中，線圈旋轉的角速度。單位：弳 / 秒（rad/sec）。

$$角速度\omega = \frac{角度}{時間} = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

四、發電機極數、轉速與頻率的關係

(1) 線圈在磁場中歷經 N-S 兩個磁極(pole 簡稱 P)，即可感應一個正弦波。

(2) 發電機極數(P)、轉速(N)與頻率(f)三者的關係為：

$f = \frac{P}{2} \times \frac{N}{60} = \frac{PN}{120}$ (Hz 或 週/秒)（註：N 為 rpm 每分鐘轉速）

五、波長(λ)、波速(v)與頻率

(1)波長(λ)：週期性波形每完成一週所移動的距離；單位為公尺

(2)波速(v)：電波每一秒鐘所傳送的距離，為 3×10^8 公尺/秒。亦即：

$$\text{波速}(v) = \frac{\text{波長}}{\text{時間}} = \frac{\lambda}{t} = f\lambda$$

$$\text{波長}(\lambda) = \frac{v}{f} = \frac{3\times10^8}{f}$$ (公尺/秒)

關係：波長和頻率成反比例；頻率愈高者，其波長愈短、週期也愈短。

EX：有 GSM 無線手機頻率為 900MHz，則該頻率之週期及波長分別為？（89 年）

◆詳解：$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{900\text{m}} \fallingdotseq 1.1\times10^{-9}(\text{s})$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3\times10^8}{900\times10^6} = \frac{1}{3}(\text{m})$$

10-4　複數運算

一、複數（complex number）的定義

虛數的基本單位為： $j = \sqrt{-1}$

$j^2 = -1$

$j^3 = j^2 \cdot j = -j$

$j^4 = j^2 \cdot j^2 = 1$

複數包含實數部份與虛數部份，即如式 $\vec{A} = a + jb$ 所示，$\vec{A}$ 為複數用向量表示，

而 *a* 為實數部份的大小，*b* 為虛數部份的大小。

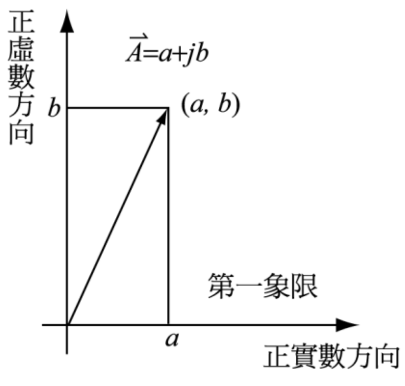
二、複數表示法

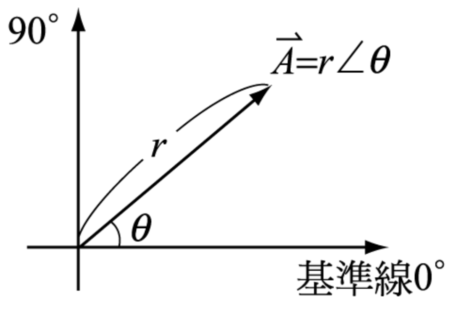
(1) 直角座標表示法

$\vec{A} = a + jb$

(2) 極座標表示法

$\vec{A} = r\angle\theta$





三、極座標和直角座標的互換

(1) 極座標→直角座標

$$\begin{aligned} a &= r\cos\theta \\ b &= r\sin\theta \end{aligned} \quad \rightarrow \quad a + jb = r(\cos\theta + j\sin\theta)$$

(2) 直角座標→極座標

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta &= \tan^{-1}\frac{b}{a} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad r\angle\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\angle\tan^{-1}\frac{b}{a}$$

四、向量的運算：

(1)直角座標式（若 $\vec{A} = a + jb$ ，$\vec{B} = c + jd$ ）

加法：將實數及虛數分別分開相加。

$$\begin{aligned} &\vec{A} + \vec{B} = (a + jb) + (c + jd) \\ &= (a + c) + j(b + d) \end{aligned}$$

減法：將實數及虛數分別分開相減。

$$\begin{aligned} &\vec{A} - \vec{B} = (a + jb) - (c + jd) \\ &= (a - c) + j(b - d) \end{aligned}$$

乘法：交叉相乘，實數及虛數分別集中

$$\begin{aligned} &\vec{A} \times \vec{B} = (a + jb) \times (c + jd) \\ &= (ac - bd) + j(ad + bc) \end{aligned}$$

除法：將分子及分母同時乘以分母的共軛複數，有理化後再加以運算即可。

$$\begin{aligned} &\frac{\vec{A}}{\vec{B}} = \frac{(a + jb)}{(c + jd)} = \frac{(a + jb)(c - jd)}{(c + jd)(c - jd)} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

(2) 極座標式（若 $\vec{A} = A\angle\theta_1$ ，$\vec{B} = B\angle\theta_2$ ）

乘法：大小相乘，相角相加

$$\vec{A} \times \vec{B} = A\angle\theta_1 \times B\angle\theta_2 = A \times B\angle(\theta_1 + \theta_2)$$

除法：大小相除，相角相減

$$\frac{\vec{A}}{\vec{B}}=\frac{A\angle\theta_1}{B\angle\theta_2}=\frac{A}{B}\angle(\theta_1-\theta_2)$$

EX：$\vec{V}_1=10\angle 0°$，$\vec{V}_2=5\angle 90°$，$\vec{V}_3=5\angle -90°$，則$\vec{V}_1+\vec{V}_2+\vec{V}_3=$？

◆詳解：$\vec{V}_1+\vec{V}_2+\vec{V}_3=10\angle 0°+5\angle 90°+5\angle -90°=10+j5-j5=10=10\angle 0°(\text{V})$

EX：設 $i_1=3\sin\omega t[\text{A}]$，$i_2=-4\cos\omega t[\text{A}]$，則 i_1+i_2 等於多少 A？

◆詳解：$i_1+i_2=3\sin\omega t-4\cos\omega t$

$=\sqrt{3^2+4^2}\sin(\omega t-\tan^{-1}\frac{4}{3})$[$i_1$ 與 i_2 相位差 90°]

$=5\sin(\omega t-53.1°)$