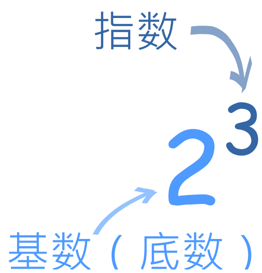
指数与对数

什么是指数？



一个数的指数代表把**多少个**这个数 乘在一起。

例子：$\mathbf{2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8}$

（*3*个 *2* 乘在一起得到 *8*）

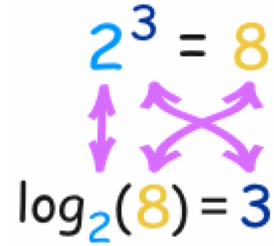
什么是对数？

对数与指数相反。

它是这个问题的答案："什么指数会得到这个结果？"：

$$2^{?} = 8$$

这问题的答案是：

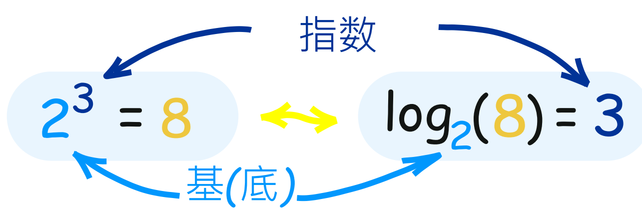


用以上的例子：

- 指数用 **2 和 3** 来得到 **8** （*2*乘*3*次为*8*）
- 对数用 **2 和 8** 来得到 **3** （*2* 成为 *8*，当把*3*个*2*乘在一起时）

> 对数的意思是： **用几个** 数与自己乘在一起会得到另一个数

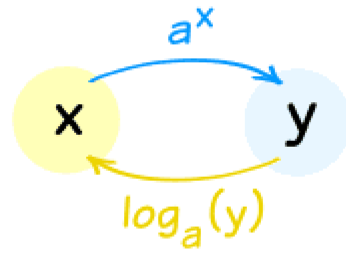
所以对数的答案是指数：



（去这里看看[指数、根和对数](#)的关系。）

一起用

指数与对数时常用在一起，因为它们的效果是"相反"的（但底"a"要相同）：



指数与对数互为"反函数"

先做一个，然后做另一个，就还原了：

- 取 a^x，然后取对数，得回 x: $\log_a(a^x) = x$
- 取对数，然后取 a^x，得回 x： $a^{\log_a(x)} = x$

但光看名字不能猜到它们是相反的……

你可以这样想：a^x "向上"，$\log_a(x)$ "向下"：

- 向上走，然后向下走，你回到原处：**向下(向上p(x)) = x**，
- 向下走，然后向上走，你回到原处：**向上(向下(x)) = x**

无论如何，重点是：

指数函数可以"还原"对数函数的效果。.

（反过来也一样）

看这个例子：

举例： $\mathbf{\log_3(x) = 5}$，**x** 是什么？

我们可以用以3为底的指数来"还原"对数：

开始 $\log_3(x) = 5$

我们想"还原"对数以得到 "$x =$"

每边都用指数函数： $3^{\log_3(x)} = 3^5$

我们知道$3^{\log_3(x)} = x$，所以： $x = 3^5$

答案： $x = 243$

再来一个：

例子：**$y=\log_4(1/4)$**，求 y

开始 $y = \log_4(\frac{1}{4})$

每边都用指数函数： $4^y = 4^{\log_4(\frac{1}{4})}$

简化： $4^y = 1/4$

小窍门：*$1/4 = 4^{-1}$*

所以： $4^{y} = 4^{-1}$

故此： $y = -1$

对数的特性

对数的其中一个强大功能是把**乘变成加**。

$$\log_a(m \times n) = \log_a m + \log_a n$$

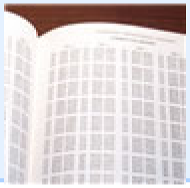
"乘的对数是对数的和"

为什么是这样？看附注。

用这特性和指数定律，我们得到以下有用的特性：

$\log_a(m \times n) = \log_a m + \log_a n$	乘的对数是对数的和
$\log_a(m/n) = \log_a m - \log_a n$	除乘的对数是对数的差
$\log_a(1/n) = -\log_a n$	这是以上"除"特性的结果，因为 $\log_a(1) = 0$
$\log_a(m^r) = r (\log_a m)$	m的r次幂 的对数 是 r 和 m的对数 的积

记着：底 "a" 一定要相同！



历史： 以前没有计算器时，对数非常有用……例如，要乘两个很大的数，你可以用对数来把乘变为加（容易得多！）

以前甚至有专门为此而设的对数表书。

我们来玩玩：

例子：简化 $\log_a((x^2+1)^4\sqrt{x})$

开始： $\log_a((x^2+1)^4\sqrt{x})$

用 $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$： $\log_a((x^2+1)^4) + \log_a(\sqrt{x})$

用 $\log_a(m^r) = r (\log_a m)$： $4 \log_a(x^2+1) + \log_a(\sqrt{x})$

同时 $\sqrt{x} = x^{½}$： $4 \log_a(x^2+1) + \log_a(x^{½})$

再用 $\log_a(m^r) = r (\log_a m)$ ： $4 \log_a(x^2+1) + ½ \log_a(x)$

不能再简化下去了……不能简化这个：$\log_a(x^2+1)$.

答案：$4 \log_a(x^2+1) + ½ \log_a(x)$

注意：没有处理 $\log_a(m+n)$ 或 $\log_a(m-n)$的规则

我们也可以"反过来"用对数的特性来组合对数：

例子：把$\mathbf{\log_a(5) + \log_a(x) - \log_a(2)}$ 变成一个对数：

开始： $\log_a(5) + \log_a(x) - \log_a(2)$

用 $\mathbf{\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n}$： $\log_a(5x) - \log_a(2)$

用 $\mathbf{\log_a(m/n) = \log_a m - \log_a n}$： $\log_a(5x/2)$

答案：$\log_a(5x/2)$

自然对数和自然指数函数

底是e（"欧拉数"= **2.718281828459**……）的对数叫：

- 自然对数 $\mathbf{\log_e(x)}$

  通常写为 $\ln(x)$

- 自然指数函数 e^x

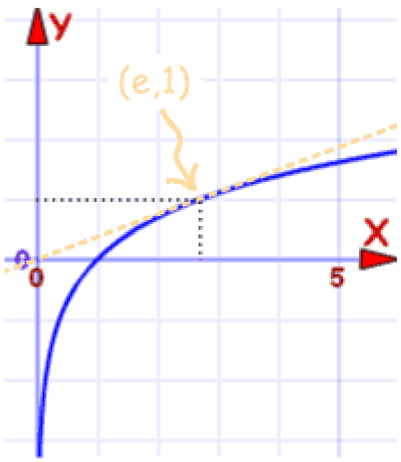
它们仍然可以互相还原：

$$\ln(e^x) = x$$

$$e^{(\ln x)} = x$$

这是它们的图：

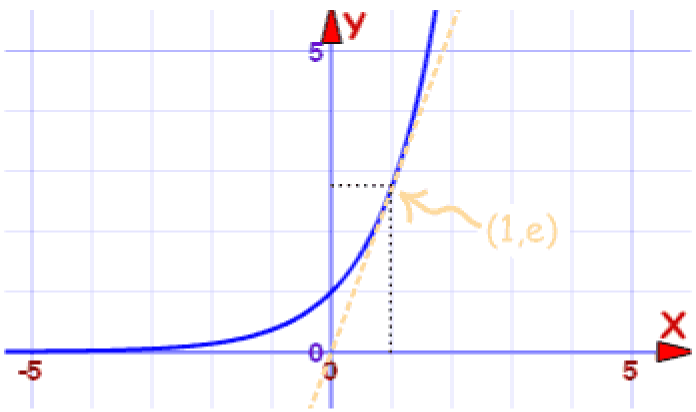
自然对数



f(x) = ln(x)的图

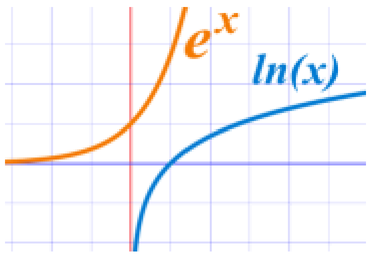
穿过 **(1,0)** 和 **(e,1)**

自然指数函数



f(x) = e^x的图

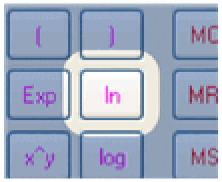
穿过 **(0,1)** 和 **(1,e)**



它们是同一条曲线，不过**x轴 和 y轴 对调了**。

这也显示出它们是反函数。

在计算器上，自然对数是 "ln" 键。



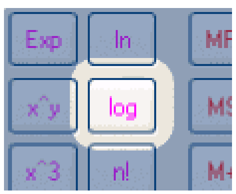
你应该尽量使用自然对数和自然指数函数。

常用对数

底是**10**的对数叫：

- 常用对数 $\log_{10}(x)$，有时写为 $\log(x)$

工程师时常用到它，但数学里很少用。



在计算器上，常用对数是 "log" 键。

它的有用之处是告诉你数在十进制里 "有多大"（你要乘几个10）。

例子：计算 $\log_{10} 100$

$10 \times 10 = 100$，所以**2**个 10乘在一起的积是 100：

$$\log_{10} 100 = 2$$

同样， $\log_{10} 1{,}000 = 3$，$\log_{10} 10{,}000 = 4$，依此类推。

例子：计算 $\log_{10} 369$

这个最好用计算器的 "log" 键：

$$\log_{10} 369 = 2.567\ldots\ldots$$

改变底

如果我们想改变对数的底呢？

容易！用这个公式：

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

"x 增大，a 减小"

你也可以把 $\mathbf{log_b\ a}$ 作为 "转换因数"（公式如上）：

$$\log_a x = \log_b x \,/\, \mathbf{\log_b a}$$

用这个公式，我们可以转换为任何的底。

另一个有用的特性是：

$$\log_a x = 1 / \log_x a$$

看到 "x" 和 "a" 换位吗？

例子：计算 $1 / \log_8 2$

$$1 / \log_8 2 = \log_2 8$$

2 × 2 × 2 = 8，所以**3**个 2乘在一起的积是 8：

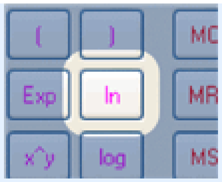
$$1 / \log_8 2 = \log_2 8 = 3$$

我们常用自然对数，所以最好记着：

$$\log_a x = \ln x / \ln a$$

例子：计算 $\log_4 22$

我的计算器没有 "**$\log_4$**" 键……



……但它有 "**ln**" 键。我们来用它：

$\log_4 22 = \ln 22 / \ln 4 = 3.09.../1.39... = 2.23$ （保留三位小数）

这答案的意思是什么？它的意思是 4的2.23次幂等于22。我们来检测：

检测：$4^{2.23} = 22.01$（差不多了！）

再来一个例子：

例子：计算 $\log_5 125$

$\log_5 125 = \ln 125 / \ln 5 = 4.83.../1.61... = 3$ （绝对精确）

我知道 $5 \times 5 \times 5 = 125$（**3**个 5 的积是 125），所以答案应该是 **3**。对了！

现实应用

在现实世界里应用对数的实例：

地震

地震的振幅是以对数尺度显示。

著名的"里氏地震规模"用这个公式：

$$M = \log_{10} A + B$$

其中： **A** 是地震仪测量的振幅（单位为毫米）
B 是距离校正系数

现今有更复杂的公式，但都是用对数尺度。

声音

响度的单位是分贝（简写为dB）：

$$\text{响度（dB）} = 10 \log_{10} (p \times 10^{12})$$

其中 **p** 是声压

酸性的或碱性的

酸性（或碱性）的测量单位是 pH：

$$pH = -\log_{10} [H^+]$$

其中 $\mathbf{H^+}$ 是溶解的氢离子的摩尔浓度。
注意：在化学，[ ] 代表摩尔浓度（克 / 升）。

更多例子

例子：解 $2 \log_8 x = \log_8 16$

开始： $2 \log_8 x = \log_8 16$

把 "2" 带进对数：： $\log_8 x^2 = \log_8 16$

拿走对数（对数的底相同）： $x^2 = 16$

解： $x = -4$ or $+4$

可是……可是……可是……不能有负数的对数！

所以 –4 的解是未定义的

答案：4

检验：用计算器来检验……也用 "-4"来试试看。

例子：解 $e^{-w} = e^{2w+6}$

开始： $e^{-w} = e^{2w+6}$

每边取 **ln**： $\ln(e^{-w}) = \ln(e^{2w+6})$

$\ln(e^w)=w$： $-w = 2w+6$

简化： $-3w = 6$

解： $w = 6/-3 = -2$

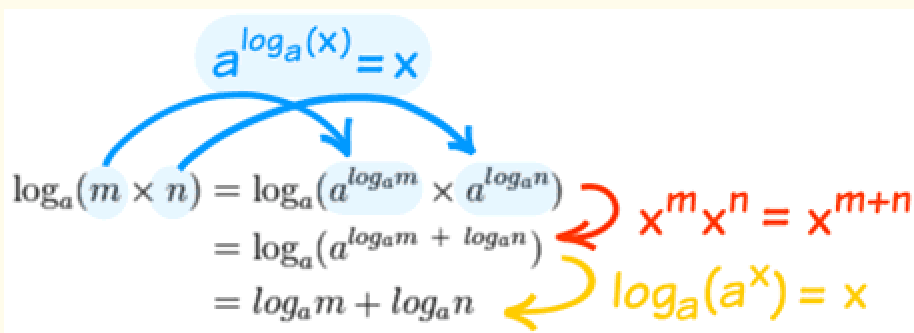
答案：$w = -2$

检验：$e^{-(-2)} = e^2$ and $e^{2(-2)+6} = e^2$

附注：为什么 $\log(m \times n) = \log(m) + \log(n)$？

要知道**为什么**，我们需要用 $a^{\log_a(x)} = x$ and $\log_a(a^x) = x$：

首先把 **m** 和 **n** 变成 "对数的指数"：



然后用指数定律

最后把指数还原。

这是数学里时常用到的"高招"："这里做不行，我们就去**那边**做，然转换回来"

到你了：
（英语）

问题1 问题2 问题3 问题4 问题5 问题6 问题7 问题8 问题9 问题10

English :: 关于 :: 联系 :: 隐私