Taller semana 2

2.1.5. - 10)

a) Demostración axiomal. Para los P_n con cuerpo en los reales

a. con $a = \{a_0, a_1x, a_2x^2, \dots a_nx^n\}$

y $b = \{b_0, b_1x, b_2x^2, \dots b_nx^n\}$

$a+b = \{a_0+b_0, b_1x + a_1x, b_2x^2 + a_2x^2 \dots b_nx^n + a_nx^n\}$

$\{a_0+b_0, (a_1+b_1)x, (a_2+b_2)x^2 \dots (a_n+b_n)x^n\}$

$a_i + b_i \in \mathbb{R}$ Entonces

$C = a+b = \{C_0, C_1x, C_2x^2, \dots C_nx^n\}$

$C \in P_n$ ✓

b. $a+b \overset{?}{=} b+a$

$a+b = \{a_0+b_0, (a_1+b_1)x, (a_2+b_2)x^2, \dots (a_n+b_n)x^n\}$

$b+a = \{b_0+a_0, (b_1+a_1)x, \dots (b_n+a_n)x^n\}$

como $b_i, a_i \in \mathbb{R}$ son conmutativos respecto a la suma, entonces

$b+a = \{a_0+b_0, (b_1+a_1)x, \dots (a_n+b_n)x^n\} = a+b$

cumple ✓

c. con $d = \{d_0, d_1x, \dots d_nx^n\}$

$(a+b)+d \overset{?}{=} a+(b+d)$

$(a+b) = \{a_0+b_0, (a_1+b_1)x, \dots (a_n+b_n)x^n\}$

$(a+b)+d = \{a_0+b_0+d_0, (a_1+b_1+d_1)x, \dots (a_n+b_n+d_n)x^n\}$

$b+d = \{b_0+d_0, (b_1+d_1)x, \dots (b_n+d_n)x^n\}$

$a+(b+d) = \{a_0+b_0+d_0, (a_1+b_1+d_1)x, \dots (a_n+b_n+d_n)x^n\}$

Por ende

$(a+b)+d = a+(b+d)$ es verdad, cumple ✓

d. ¿Existen un solo elemento neutro?

tomando en cuenta a $\in z, x$ como elementos neutros, sabemos que $a+z=a \vee a+x=a$ Entonces

igualamos $a+z = a+x$

$\{a_0+z_0, (a_1+z_1)x, \dots (a_n+z_n)x^n\} = \{a_0+x_0, (a_1+x_1)x, \dots (a_n+x_n)x^n\}$

Restando "a" a ambos lados

$\{z_0, z_1 x, \dots z_n x^n\} = \{x_0, x_1 x, \dots x_n x^n\}$

$z = x \Rightarrow 0_{P_n}$ = elemento neutro

Por ende existe un único elemento neutro

e. definimos $e = \{-a_0, -a_1 x, \dots -a_n x^n\}$

Entonces $a+e = \{a_0-a_0, (a_1-a_1)x, \dots (a_n-a_n)x^n\}$

$a+e = \{0, 0x, \dots 0x^n\}$

$a+e = 0_{P_n}$, entonces e es el elemento simétrico de a

f. con $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha a = \{\alpha a_0, \alpha a_1 x, \dots \alpha a_n x^n\}$

$\alpha a \in \mathbb{R}$ por ende

$\alpha a = \{k_0, k_1 x, \dots k_n x^n\}$.

$\alpha a \in P_n$ cumple

G. $\alpha(\beta a) \overset{?}{=} (\alpha\beta)a$

$\beta a = \{\beta a_0, \beta a_1 x, \ldots \beta a_n x^n\}$

$\alpha(\beta a) = \{\alpha\beta a_0, \alpha\beta a_1 x, \ldots \alpha\beta a_n x^n\}$

$\alpha\beta = \alpha\beta \in \mathbb{R}$

$(\alpha\beta)a = \{\alpha\beta a_0, \alpha\beta a_1 x \ldots \alpha\beta a_n x^n\}$

$(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$ Cumple ✓

H. $(\alpha+\beta)a \overset{?}{=} \alpha a + \beta a$

$(\alpha+\beta)a = \{(\alpha+\beta)a_0, (\alpha+\beta)a_1 x, \ldots (\alpha+\beta)a_n x^n\}$

$\{\alpha a_0 + \beta a_0, \alpha a_1 x + \beta a_1 x, \ldots \alpha a_n x^n + \beta a_n x^n\}$

$(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$ Cumple ✓

i. $\alpha(a+b) \overset{?}{=} \alpha a + \alpha b$

$\alpha(a+b) = \{\alpha(a_0+b_0), \alpha(a_1+b_1)x, \ldots \alpha(a_n+b_n)x^n\}$

$\{\alpha a_0 + \alpha b_0, \alpha a_1 x + \alpha b_1 x, \ldots \alpha a_n x^n + \alpha b_n x^n\}$

$\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$ Cumple

J. $1 \cdot a \overset{?}{=} a$

$1 \cdot a = \{1 \cdot a_0, 1 \cdot a_1 x, \ldots 1 \cdot a_n x^n\}$

$1 \cdot a = \{a_0, a_1 x, \ldots a_n x^n\}$

$1 \cdot a = a$ Cumple

b) No, porque entonces ya no sería cerrado bajo la multiplicación por un escalar

c) 1. 1) El polinomio 0 está

2) Con $a, b \in P_{n-1}$ $\quad a+b = \{\underbrace{a_0+b_0}_{\in \mathbb{R}}, (a_1+b_1)x, \dots, (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}\}$

$a+b \in P_{n-1}$

3) Con $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha a = \{a_0\alpha, \alpha a_1 x, \dots, \alpha a_{n-1}x^{n-1}\}$

$\alpha a \in P_{n-1}$

2. 1) El polinomio 0 está

2) Con $a, b \in P_{2n}$ $\quad a+b = \{\underbrace{a_0+b_0}_{\text{Reales}}, (a_1+b_1)x^2, \dots, (a_n+b_n)x^{2n}\}$

$a+b \in P_{2n}$

3) Con $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha a = \{\underbrace{\alpha a_0}_{\in \mathbb{R}}, \alpha a_1 x^2, \dots, \alpha a_n x^{2n}\}$

$\alpha a \in P_{2n}$

3. 1) Con $z = \{0x, 0x^2, 0x^3, \dots, 0x^n\}$

$z = \{0, 0, 0, \dots\}$

z es el elemento neutro

2) Con $a, b \in P_{n(n>1)}$

$a+b = \{(a_1+b_1)x, \dots, \underbrace{(a_n+b_n)}_{\in \mathbb{R}}x^n\}$

$a+b \in P_{n(n>1)}$

3) Con $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha \cdot a = \{\underbrace{\alpha a_1}_{\in \mathbb{R}}x, \dots, \alpha a_n x^n\}$

$\alpha \cdot a \in P_{n(n>1)}$

4. 1) Con $z = \{(x-1)\cdot 0\}$

$z = 0 \in P_{(x-1)\cdot n}$ ✓

2) Con $a = (x-1)a_0 + (x-1)a_1 x + \dots (x-1)a_n x^n$

$b = (x-1)b_0 + (x-1)b_1 x + \dots (x-1)b_n x^n$

$a+b = (x-1)[a_0 + b_0 + (a_1+b_1)x \dots (a_n+b_n)x^n]$

$a+b \in P_{(x-1)\cdot n}$

3) Con $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha a = (x-1)\cdot[\alpha a_0 + \alpha a_1 x + \dots \alpha a_n x^n]$

$\alpha \cdot a \in P_{(x-1)\cdot n}$

2.2.7 6) a)

Demostración axiomática

1) Con $a = a_0 + a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$

$b = b_0 + b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$

$a+b = \underbrace{(a_0+b_0)}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{(a_x+b_x)}_{\in\mathbb{R}}\hat{i} + \underbrace{(a_y+b_y)}_{\in\mathbb{R}}\hat{j} + \underbrace{(a_z+b_z)}_{\in\mathbb{R}}\hat{k}$

$a+b = k_0 + k_x(q_1) + k_y(q_2) + k_z(q_3)$

$a+b \in \mathbb{H}$

2) Con $c = c_0 + c_x(q_1) + c_y(q_2) + c_z(q_3)$

$(a+b)+c \overset{?}{=} a+(b+c)$

$a+b = (a_0+b_0) + (a_x+b_x)(q_1) + (a_y+b_y)(q_2) + (a_z+b_z)q_3$

$(a+b)+c = a_0+b_0+c_0 + (a_x+b_x+c_x)(q_1) + (a_y+b_y+c_y)(q_2) + (a_z+b_z+c_z)(q_3)$

$a_0 + (b_0+c_0) + (a_x+(b_x+c_x))(q_1) + (a_y+(b_y+c_y))(q_2) + (a_z+(b_z+c_z))(q_3)$

$(a+b)+c = a+(b+c)$. Es asociativo ✓

3) $a+b \stackrel{?}{=} b+a$

$a+b = a_0+b_0 + (a_x+b_x)(q_1) + (a_y+b_y)(q_2) + (a_z+b_z)(q_3)$

$b_0+a_0 + (b_x+a_x)(q_1) + (b_y+a_y)(q_2) + (a_z+b_z)(q_3)$

$a+b = b+a$ Es conmutativa

4) Si existen z, y tal que

$a+z = a \wedge a+y = a$

Entonces

$a+z = a+y$

$a_0+z_0 + (a_x+z_x)q_1 + (a_y+z_y)q_2 + (a_z+z_z)q_3 = a_0+y_0 + (a_x+y_x)q_1 + (a_y+y_y)q_2 + (a_z+b_z)q_3$

Restando a ambos lados a

$z_0 + z_x q_1 + z_y q_2 + z_z q_3 = y_0 + y_x q_1 + y_y q_2 + y_z q_3$

$z_0 = y_0$
$z_x = y_x$
$z_y = y_y$
$z_z = y_z$

$z = y$ Existe un único elemento neutro

5) Pensando en un $f = -a$

Entonces

$a+f = a_0+f_0 + (a_x+f_x)q_1 + (a_y+f_y)q_2 + (a_z+f_z)q_3$

$a_0 - a_0 + (a_x - a_x)q_1 + (a_y - a_y)q_2 + (a_z - a_z)q_3$

$a+f = 0 + (0)q_1 + (0)q_2 + (0)q_3$

$a+f = 0_H$ Existe un elemento simétrico para todo a

6) Con $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha a = \underbrace{\alpha a_0 + \alpha a_x q_1 + \alpha a_y q_2 + \alpha a_z q_3}_{\in \mathbb{R}}$

$\alpha a \in \mathbb{H}$

7) $\alpha(\beta a) \stackrel{?}{=} \alpha\beta(a)$

$\beta a = \beta a_0 + \beta a_x q_1 + \beta a_y q_2 + \beta a_z q_3$

$\alpha(\beta a) = \alpha\beta a_0 + \alpha\beta a_x q_1 + \alpha\beta a_y q_2 + \alpha\beta a_z q_3$

$\alpha\beta(a_0 + a_x q_1 + a_y q_2 + a_z q_3)$

$\alpha(\beta a) = (\alpha\beta) a$

8) $(\alpha+\beta) a \stackrel{?}{=} \alpha a + \beta a$

$(\alpha+\beta) a = (\alpha+\beta) a_0 + (\alpha+\beta) a_x q_1 + (\alpha+\beta) a_y q_2 + (\alpha+\beta) a_z q_3$

$\alpha a_0 + \beta a_0 + \alpha a_x q_1 + \beta a_x q_1 + \alpha a_y q_2 + \beta a_y q_2 + \alpha a_z q_3 + \beta a_z q_3$

$(\alpha a_0 + \alpha a_x q_1 + \alpha a_y q_2 + \alpha a_z q_3) + (\beta a_0 + \beta a_x q_1 + \beta a_y q_2 + \beta a_z q_3)$

$(\alpha+\beta) a = \alpha a + \beta a$ comprobado

9) $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$

$\alpha(a+b) = \alpha(a_0+b_0) q\ \alpha(a_x+b_x) q_1 + \alpha(a_y+b_y) q_2 + \alpha(a_z+b_z) q_3$

$\alpha a_0 + \alpha b_0 + \alpha a_x q_1 + \alpha b_x q_1 + \alpha a_y q_2 + \alpha b_y q_2 + \alpha a_z q_3 + \alpha b_z q_3$

$(\alpha a_0 + \alpha a_x q_1 + \alpha a_y q_2 + \alpha a_z q_3) + (\alpha b_0 + \alpha b_x q_1 + \alpha b_y q_2 + \alpha b_z q_3)$

$\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$

10.) $1 \cdot a \stackrel{?}{=} a$

$1 \cdot a = 1 \cdot a_0 + 1 \cdot a_x q_1 + 1 \cdot a_y q_2 + 1 \cdot a_z q_3$

$a_0 + a_x q_1 + a_y q_2 + a_z q_3$

$1 \cdot a = a$

b) $|b\rangle = (b_0, b)$ $\quad |r\rangle = (r_0, r)$

$d = |b\rangle \odot |r\rangle$

$(b_0 + b_x q_1 + b_y q_2 + b_z q_3)(r_0 + r_x q_1 + r_y q_2 + r_z q_3)$

$(b_0 + b_i e_i)(r_0 + r_j e_j)$

$b_0 r_0 + b_i e_i r_0 + b_0 r_j e_j + r_j e_j b_i e_i$

$e_j \cdot e_i$ cuando $j = i$ $= -1$ y dependiendo si es ciclica o no es $+$ o $-$

$b_0 r_0 + b \cdot e r_0 + b_0 r \cdot e + r_j b_i (e_j e_i)$

$r_j b_i (-\delta_i^j + \varepsilon_{ijk} e_k)$

$b_0 r_0 + r_0 b \cdot e + b_0 r \cdot e \quad - r_j b_i \delta_i^j + \underbrace{\varepsilon_{ijk} \cdot r_j b_i e_k}_{\text{Producto Vectorial}}$

$b_0 r_0 - r \cdot \vec{b} + r_0 \vec{b} \cdot e + b_0 \vec{r} \cdot e + (b \times r)$

$d = \{d_0, d\} = \{b_0 r_0 - r \cdot \vec{b}, r_0 b \cdot e + b_0 r \cdot e + b \times r\}$

c) $b \odot r = r_0 b_0 - r \cdot b + r_0 \vec{b} \cdot e + b_0 \vec{r} \cdot e + (b \times r) e$

$\varepsilon_{ijk} = A^{ijk}$

$\underbrace{r_0 b_0 - r_k b_k}_{} + \underbrace{(r_0 \vec{b} + b_0 \vec{r})}_{} e_j + \varepsilon_{ijk} b_j r_k e_i$

$a_0 \langle q_0) + S^{\alpha j} e_j + A^{jik} b_j r_k | e_i \rangle$

Por Simetria

$a_0 \langle q_0) + S^{\alpha j} \delta_\alpha^0 | q_j) + A^{ijk} b_j r_k | q_i \rangle$

$b \odot r = a_0 \langle q_0) + S^{\alpha j} \delta_\alpha^0 | q_j) + A^{jki} b_j r_k | q_i)$

d) Por lo ya visto en la parte anterior, tenemos que, tiene una parte vectorial $\underbrace{(a_0 | q_0) + S^{\alpha j} \delta_\alpha^0 | q_j)}_{\text{Productos escalares con vectores unitarios}}$, y una pseudovectorial $\underbrace{A^{jki} b_j r_k | q_i)}_{\text{Producto cruz}}$

Por ende el producto es ninguno de los anteriores

e) 1. $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\alpha_1 0 + \alpha_2 0 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$$
$$\alpha_1 + (-i)\alpha_2 = 0$$
$$\alpha_1 + i\alpha_2 = 0$$
$$\alpha_3 - \alpha_4 = 0$$

$\alpha_1 = i\alpha_2 \wedge \alpha_1 = -i\alpha_2$ $\alpha_3 = \alpha_4 \wedge \alpha_3 = -\alpha_4$

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$

Es independiente linealmente, por ende es base de las matrices 2×2, ahora, para que tenga isomorfismo con los cuaterniones hacemos la relación

$$q_i = -i\sigma_i \Rightarrow \text{nos permite representar como} =$$
$$q_0 = I$$

ya que así,

como $\sigma_i^2 = I$ entonces

$i^2\sigma_i^2 = -I$ que $a_0(I) + a_1(-i\sigma_1) + a_2(-i\sigma_2) + a_3(-i\sigma_3)$ (cumpliendo la tabla de multiplicación)

de acá

e.2) $|b\rangle = \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -a_1 i \\ -a_1 i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -a_2 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_3 i & 0 \\ 0 & a_3 i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_0 - a_3 i & -a_2 - a_1 i \\ -a_1 i + a_2 & a_0 + a_3 i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 - a_3 i & -a_2 - a_1 i \\ -(-a_2 - a_1 i)^* & (a_0 - a_3 i)^* \end{pmatrix}$$

$$|b\rangle = \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$$

f) I ; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$|q_1\rangle^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \wedge |q_2\rangle^2 = |q_3\rangle^2 = -I$$

Pero al agregar el componente imaginario, esta igualdad no se cumple, por ende, este conjunto matricial no puede ser usado como base para $\mathbb{H}$

g) $\widetilde{\langle a|b\rangle} = |a^*\rangle \odot |b\rangle$

$$(a_0 - (a_1|q_1\rangle + a_2|q_2\rangle + a_3|q_3\rangle))(b_0 + b_1|q_1\rangle + b_2|q_2\rangle + b_3|q_3\rangle)$$

$$a_0 b_0 + a_0 \vec{b} - \vec{a} b_0 - \vec{a}\cdot\vec{b} + a \times b$$

Esto es un cuaternión, no un escalar, por ende, no es un producto interno

h) $\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}\left[\widetilde{\langle a|b\rangle} - q_1 \widetilde{\langle a|b\rangle} \odot q_1\right]$

$$\frac{1}{2}\left[n - (-n_1 + n_0 q_1 - n_3 q_2 + n_2 q_3) \odot q_1\right]$$

$$n - (-n_0 - n_1 q_1 + \cancel{n_2 q_2} + \cancel{n_3 q_3})$$

$$\frac{1}{2}(2n_0 + 2n_1 q_1) = \underbrace{n_0 + n_1 q_1}_{\text{un complejo}}$$

$$\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}\left[\langle \widetilde{a|b}\rangle - |q_1\rangle \odot \langle \widetilde{a|b}\rangle \odot |q_1\rangle\right]$$

1) $\langle a|a\rangle = \frac{1}{2}\left[\langle \widetilde{a|a}\rangle - |q_1\rangle \odot \langle \widetilde{a|a}\rangle \odot |q_1\rangle\right]$

$$\langle \widetilde{a|a}\rangle = (a_0 - a_i q_i)(a_0 + a_i q_i)$$

$$(a_0)^2 - (a_i)^2 q_i \cdot q_i$$

$$\langle \widetilde{a|a}\rangle = (a_0)^2 + a_i^2$$

$$\langle a|a\rangle = \frac{1}{2}\left[(a_0)^2 + a_i^2 - |q_1\rangle \odot (a_0^2 + a_i^2) \odot q_1\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[(a_0)^2 + a_i^2 - (-a_0^2 - a_i^2)\right]$$

$\langle a|a\rangle = (a_0)^2 + (a_i)^2 > 0$ comprobado ✓

2) $\langle a|b\rangle \stackrel{?}{=} \langle b|a\rangle^*$

$$\langle a|b\rangle = n_0 + n_1 q_1$$

$$\langle b|a\rangle = \frac{1}{2}\left[\langle \widetilde{b|a}\rangle - q_1 \odot \langle b|a\rangle q_1\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\langle \widetilde{a|b}\rangle^* - q_1 \odot \langle \widetilde{a|b}\rangle^* \odot q_1\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[n^* - q_1 \odot n^* \odot q_1\right]$$

$$n_0 - n_1 q_1 = \langle a|b\rangle^*$$

Comprobado

nótese primero que

$\langle \widetilde{a|b}\rangle = a_0 b_0 - a \cdot b +$
$a_0 b_i - b_0 a_i + a \times b$
$= c_0 + c_i q_i$

$\langle \widetilde{b|a}\rangle = b_0 a_0 + b \cdot a$
$b_0 a_i - a_0 b_i +$
$a \times b$

$\langle \widetilde{b|a}\rangle = c_0 - c_i q_i$

$\langle \widetilde{b|a}\rangle^* = \langle \widetilde{a|b}\rangle$

negativo por el cambio de índices pues el producto cruz usa levi-civita el cual es antisimétrico

3) $\langle a | \alpha b + \beta c \rangle \overset{?}{=} \alpha \langle a | b \rangle + \beta \langle a | c \rangle$

$$\frac{1}{2}\left[\widetilde{\langle a | \alpha b + \beta c \rangle} - q_1 \odot \widetilde{\langle a | \alpha b + \beta c \rangle} \odot q_1\right]$$

$$\widetilde{\langle a | \alpha b + \beta c \rangle} = a_0(\alpha b_0 + \beta c_0) + a \cdot (b\alpha + \beta c) + a_0(\alpha b + \beta c) - (\alpha b_0 + \beta c_0) a + (a \times (\alpha b + \beta c))$$

$$(\alpha a_0 b_0 + \alpha a \cdot b + \alpha a_0 b - \alpha b_0 a + \alpha (a \times b)) + (\beta a_0 c_0 + \beta a \cdot c + \beta a_0 c - \beta c_0 a + \beta (a \times c))$$

$$\alpha \widetilde{\langle a | b \rangle} + \beta \widetilde{\langle a | c \rangle}$$

$$\frac{1}{2}\left[\widetilde{\langle a | b \rangle}\alpha + \beta \widetilde{\langle a | c \rangle} - q_1 \odot (\widetilde{\langle a | b \rangle}\alpha \widetilde{\langle a | c \rangle}\beta) \odot q_1\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\widetilde{\langle a | b \rangle}\alpha - \alpha q_1 \odot \widetilde{\langle a | b \rangle} \odot q_1\right] + \frac{1}{2}\left[\beta \widetilde{\langle a | c \rangle} - \beta q_1 \odot \widetilde{\langle a | c \rangle} \odot q_1\right]$$

$$\frac{\alpha}{2}\left[\widetilde{\langle a | b \rangle} - q_1 \odot \widetilde{\langle a | b \rangle} \odot q_1\right] + \frac{\beta}{2}\left[\widetilde{\langle a | c \rangle} - q_1 \odot \widetilde{\langle a | c \rangle} \odot q_1\right]$$

$$\alpha \langle a | b \rangle + \beta \langle a | c \rangle = \langle a | \alpha b + \beta c \rangle \;//$$

Complet ✓

4) $\langle \alpha a + \beta b | c \rangle \overset{?}{=} \alpha^* \langle a | c \rangle + \beta^* \langle a | b \rangle$

$$\langle \alpha a + \beta b | c \rangle \overset{\text{Por } (2)}{=} \langle c | \alpha a + \beta b \rangle^* \overset{\text{Por } (3)}{=} (\alpha \langle c | a \rangle + \beta \langle c | b \rangle)^*$$

Por propiedades de los complejos (ya que estos productos dan $c \in \mathbb{C}$

$$\alpha^* \langle c | a \rangle^* + \beta^* \langle c | b \rangle^* = \alpha^* \langle a | c \rangle + \beta^* \langle b | c \rangle$$

5) $\langle a|0\rangle = 0$ $\quad \langle \tilde{a}|0\rangle = a^* \circ 0 \, q_1$

$\langle a|0\rangle = \frac{1}{2}[\langle \tilde{a}|0\rangle + q_1 \circ \langle \tilde{a}|0\rangle \circ q_1]$

$\langle a|0\rangle = \frac{1}{2}[0 + q_1 \, 0 \, \cancel{0 \circ q_1}]$

$\langle a|0\rangle = \langle 0|a\rangle = 0$

asi comprobando que ese producto interno es valido para $\mathbb{H}$

i) $n(|b\rangle) = n(|a\rangle) = \sqrt{(a|a)} = \sqrt{|a\rangle^* \circ |a\rangle}$

$|a\rangle^* \circ |a\rangle = (a_0 - a_i q_j)(a_0 + a_i q_j)$

$a_0^2 - a_i a_i q_j \circ q_j$

$\underline{a_0^2 + a \cdot a} \to$ escalar

1) Por lo anterior, $n(|a\rangle) \geq 0$ excepto si todos los vectores son 0

2) $\alpha n(|a\rangle) \stackrel{?}{=} n(|\alpha a\rangle)$

$\alpha \cdot \sqrt{a_0^2 + a \cdot a} = \alpha n(|a\rangle)$

$n(|\alpha a\rangle) = (\alpha|a\rangle^* \circ \alpha|a\rangle)^{1/2}$

$(\alpha^2(a_0^2 + a \cdot a))^{1/2}$

$\alpha \sqrt{a_0^2 + a \cdot a} = \alpha \cdot n(|a\rangle)$

3) $n(|a\rangle + |b\rangle) \leq n(|a\rangle) + n(|b\rangle)$

$n(|a\rangle + |b\rangle) = \sqrt{(|a\rangle + |b\rangle)^* \odot (|a\rangle + |b\rangle)}$

$n(|a\rangle) + n(|b\rangle) = \sqrt{|a\rangle^* \odot |a\rangle} + \sqrt{|b\rangle^* \odot |b\rangle}$

$(n(|a\rangle) + n(|b\rangle))^2 = |a\rangle^* \odot |a\rangle + 2\sqrt{|a\rangle^* \odot |a\rangle \odot |b\rangle^* \odot |b\rangle}$
$+ |b\rangle^* \odot |b\rangle$

$n(|a\rangle + |b\rangle)^2 = |a\rangle^* \odot |a\rangle + |b\rangle^* \odot |b\rangle + |a\rangle^* \odot |b\rangle +$
$|b\rangle^* \odot |a\rangle$

$2\sqrt{(a_0^2 + a \cdot a)(b_0^2 + b \cdot b)} \geq 2a_0 b_0 - 2a \cdot b$

Cumple ✓

$(a_0 - a q_j)(b_0 + b q_j) +$

$(a_0 + a q_j)(b_0 - b q_j)$

la definición de norma sí es válida

J) $|\bar{a}| = \dfrac{|a\rangle^*}{\||a\rangle\|^2}$ ¿inverso de a? respecto a $\odot$

$|a\rangle \odot \dfrac{|a\rangle^*}{a_0^2 + a \cdot a}$

$|a\rangle \odot |a\rangle^* = \||a\rangle\|^2$

Entonces

$\dfrac{|a\rangle \odot |a\rangle^*}{\||a\rangle\|^2} = 1$ Entonces $|\bar{a}|$ si es el inverso de $|a\rangle$

k) $|a\rangle$ grupo respecto a $\odot$?

1) $|a\rangle \odot |b\rangle = \underbrace{a_0 b_0 - a \cdot b + a_0 b_j q_j + b_0 a_i q_i + b \times a}_{\in \mathbb{H}}$

Es cerrado ✓

2) $|a\rangle \odot |b\rangle \stackrel{?}{=} |b\rangle \odot |a\rangle$

$|a\rangle \odot |b\rangle = (a_0 + a_i q_i)(b_0 + b_j q_j)$

$(b_0 + b_j q_j)(a_0 + a_i q_i) = |b\rangle \odot |a\rangle$

$|a\rangle \odot |b\rangle = |b\rangle \odot |a\rangle$

4) $|a\rangle \odot |\bar{a}| \stackrel{?}{=} 1$

Usamos como elemento inverso la definición dada en i) la cual ya está comprobada, por ende $\exists$ un inverso bajo $\odot$

3) $|a\rangle \odot |c\rangle \stackrel{?}{=} |a\rangle$

$|c\rangle = 1 q_0$

$(a_0 + a_j q_j)(1 q_0) = a_0 + a_j q_j = |a\rangle$

$\exists$ un elemento neutro

$q_i \odot q_j$	1	q_1	q_2	q_3
1	1	$\vert q_1\rangle$	$\vert q_2\rangle$	$\vert q_3\rangle$
$\vert q_1\rangle$	$\vert q_1\rangle$	-1	$\vert q_3\rangle$	$-\vert q_2\rangle$
$\vert q_2\rangle$	$\vert q_2\rangle$	$-\vert q_3\rangle$	-1	$\vert q_1\rangle$
$\vert q_3\rangle$	$\vert q_3\rangle$	$\vert q_2\rangle$	$\vert q_1\rangle$	-1

L)

$$\| |v'\rangle \|^2 = v_{11}^2 + v_{21}^2 + v_{31}^2$$

$$v' = \overbrace{\frac{a^*}{\| |a\rangle \|^2} \odot v \odot a}^{=1}$$

$$n(|v'\rangle) = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

$$\| |v'\rangle \|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \| |v\rangle \|^2$$

El producto conserva la norma