Demuestre que:

3) a) $A^{i'}_{k}\tilde{A}^{J}_{i'} = \delta^{J}_{k}$

teniendo en cuenta que

$$X^{i'} = A^{i'}_{k} X^{J}$$

considerando que la inversa de $A^{i'}_{k}$ es $\tilde{A}^{k}_{i'}$, vemos que

$$X^{i'}\tilde{A}^{k}_{i'} = X^{J}$$

Por ende

$$X^{J} = \tilde{A}^{k}_{i'} A^{i'}_{k} X^{k}$$

$$X^{J} = X^{k}\delta^{J}_{k}$$

$$\delta^{J}_{k} = A^{i'}_{k}\tilde{A}^{k}_{i'}$$

ya que $J=k$ se puede ver como

$$\delta^{J}_{k} = A^{i'}_{k}\tilde{A}^{J}_{i'}$$

$\theta_{i'1} = \theta_{11'}$

Ya que el sistema es ortonormal

B) ya que $A^{i'}_{J} = \cos(\theta_{i'J})$

$\tilde{A}^{J}_{i'} = \cos(\theta_{Ji'})$

Como $A^{i'}_{k}\tilde{A}^{J}_{i'} = \delta^{J}_{k} \rightarrow A^{i'}_{J}\tilde{A}^{J}_{i'} = \cos(\theta_{1'1})\cos(\theta_{11'}) + \cos(\theta_{2'2})\cos(\theta_{22'}) + \cos(\theta_{3'3})\cos\theta_{33'})$

Entonces $1 = \cos^2(\theta_{1'1}) + \cos^2(\theta_{2'2}) + \cos^2(\theta_{3'3})$ //

4) $r = x^i \hat{I}_i \equiv x\hat{I} + y\hat{J}$ en 2 Dimensiones

a) $(x, y) \to (-y, x)$

$$A^{i'}_{j} = \begin{pmatrix} \partial x'/\partial x & \partial x'/\partial y \\ \partial y'/\partial x & \partial y'/\partial y \end{pmatrix}$$

$x' = -y$

$y' = x$

$$A^{i'}_{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(x', y')^T = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$J\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Entonces se sabe que obedecen la ley de trans.

Ya que se satisface que $A^{i'}_{j} x^j = (x', y')^T$

b) $(x, y) \to (x, -y)$

$$A^{i'}_{j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(x', y')^T = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = A^{i'}_{j} x^j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Cumple ✓

c) $(x, y) \to (x-y, x+y)$

$$A^{i'}_{j} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(x', y')^T \to \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$$

$$A^{i'}_{j} x^j = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x^{i'} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$$

Entonces sí cumple ✓

d) $(x, y) \to (x+y, x-y)$

$$A^{i'}_{j} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(x', y')^T = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = A^{i'}_{j} x^j = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$$

Sí cumple