# WSTĘP DO TEORII OBLICZALNOŚCI

## Laboratorium 2

OPRACOWANIE

KRZYSZTOF BORZĘCKI

Laboratorium 2/15

# Laboratorium 2. Podstawy teoretyczne maszyny Turinga oraz zadania

## 1.1 Notacje do opisu maszyny Turinga

Określanie funkcji przejścia $\delta$ dla maszyny Turinga przeważnie podaje się przez:

1. **Diagram przejść**, będący grafem.
2. **Tabelę przejść (tablicę przejść)**, będąca tabelaryzacją funkcji $\delta$, z której możemy odczytać zbiór stanów i alfabet wejściowy.
3. **Notację wyliczającą**, dla której wypisujemy poszczególne instrukcje.

Określanie maszyny Turinga jako siódemki ze szczegółowym opisem funkcji przejścia $\delta$ jest żmudne i mało czytelne. Istnieją dwie notacje preferowane do opisu maszyny Turinga:

1. **Diagram przejść**.
2. **Tabela przejść (tablica przejść)**.

### Diagramy przejść

Diagram przejść dla maszyny Turinga jest grafem zdefiniowanym następująco:

1. Każdemu stanowi z $Q$ odpowiada wierzchołek.
2. Niech dla jakiegoś stanu $p \in Q$ i jakiegoś symbolu wejściowego $x \in \Sigma$ funkcja $\delta(p, x) = (q, y, d)$. Wtedy diagram przejść zawiera łuk z wierzchołka $p$ do $q$. Łuk jest etykietowany przez $x/y\,d$. Jeśli istnieje kilka różnych symboli wejściowych powodujących przejście z $p$ do $q$, to diagram przejść może zawierać jeden łuk etykietowany listą symboli.
3. Istnieje strzałka prowadząca do stanu początkowego $q_0$. Strzałka ta nie wychodzi z żadnego wierzchołka. Niektórzy autorzy etykietują tę strzałkę słowem start.
4. Wierzchołki odpowiadające stanom akceptującym (czyli należące do $F$) oznaczone są podwójnym kółkiem. Stany nienależące do $F$ są oznaczone pojedynczym kółkiem. Stan odrzucający jest oznaczony podwójnym kółkiem, w którym zewnętrzne kółko jest narysowane linią ciągłą, a wewnętrzne kółko linią przerywaną.

**Tablice przejść dla maszyny jednotaśmowej**

Tablica przejść dla jednotaśmowej maszyny Turinga to zwyczajowa tablicowa reprezentacja funkcji przejścia $\delta$, przyjmującej dwa argumenty i zwracającej jakąś wartość. Pierwsza kolumna zawiera wszystkie stany ze zbioru $Q$. Nagłówki następnych kolumn zawierają wszystkie symbole taśmy. Wpis w komórce tabeli dla wiersza odpowiadającego stanowi $p$ i kolumnie z symbolem $x$ odpowiada wartości $(q, y, d)$.

## 1.2 Konfiguracja (opis chwilowy) maszyny Turinga

### 1.2.1 Konfiguracja jednotaśmowej maszyny Turinga

Podczas obliczeń maszyny Turinga zmiany zachodzą w bieżącym stanie, bieżącej zawartości taśmy i bieżącym położeniu głowicy. Zmiany te możemy zawrzeć w matematycznej formie w postaci konfiguracji (opisu chwilowego).

**Definicja 1.1. Konfiguracja (opis chwilowy, OC)** jest to pełny opis ustalonej chwili obliczeń maszyny Turinga w notacji

$$\omega_l q \omega_p, \tag{1.1}$$

gdzie

1. $\omega_l$ jest to łańcuch symboli z lewej strony głowicy.
2. $q$ jest to bieżący stan.
3. $\omega_p$ jest to łańcuch symboli z prawej strony głowicy od symbolu pod głowica (głowica taśmy obserwuje pierwszy od lewej symbol łańcucha $\omega_p$).

Do łańcuchów $\omega_l$ i $\omega_p$ nie włączamy nieskończonych ciągów $\bigtriangledown$.

**Zad 1.1.** Niech $101011q_50110$ reprezentuje konfigurację, gdy taśma zawiera 1010110110, bieżący stan to $q_5$, a głowica znajduje się obecnie na trzecim 0. Wyznacz $\omega_l$ i $\omega_p$

Mamy $\omega_l = 101011$, $\omega_p = 0110$ Rysunek przedstawia maszynę Turinga z taką konfiguracją.

### 1.2.2 Przestrzeń konfiguracji jednotaśmowej maszyny Turinga

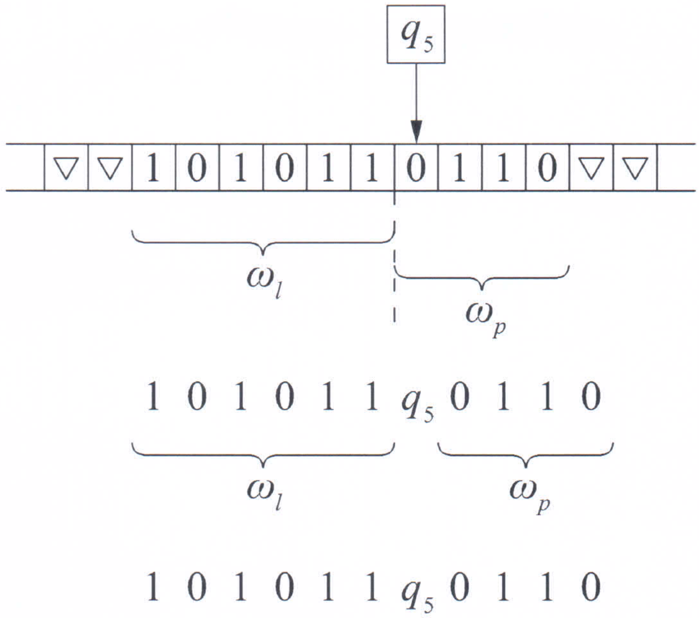
Konfigurację $\omega_l q \omega_p$ jednotaśmowej maszyny Turinga będziemy oznaczać literą $K$.

Mamy

$$K = \omega_l q \omega_p \in \Gamma^* \times Q \times \Gamma^*, \tag{1.2}$$

czyli $\omega_l, \omega_p \in \Gamma^*$ oraz $q \in Q$.

Konfiguracja maszyny Turinga.




Rysunek 1.1: Konfiguracja (opis chwilowy) maszyny Turinga.

**Przestrzeń konfiguracji** jednotaśmowej maszyny Turinga jest zdefiniowana przez

$$C = \Gamma^* \times \mathbb{N} \times Q \tag{1.3}$$

Funkcja przejścia $\delta\colon Q \setminus \{q_f\} \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times K$ może być przeformułowana na funkcję

$$\delta^*: C \to C. \tag{1.4}$$

operującą na przestrzeni konfiguracji.

## 1.3 Ruchy maszyny Turinga

Niech $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \nabla, F)$. Do zapisu **ruchów maszyny Turinga** będziemy używać symbolu $\underset{M}{\vdash}$ lub w przypadku, gdy wiadomo o jaką maszynę Turinga chodzi $\vdash$. Do wskazania zero, jednego lub więcej ruchów MT $M$ używać będziemy $\overset{*}{\vdash}$ lub $\overset{*}{\underset{M}{\vdash}}$.

Przypuśćmy, że $\delta(p, x_i) = (q, y, \leftarrow)$, tzn. następny ruch jest ruchem w lewo. Wtedy

$$x_1x_2 \ldots x_{i-2}x_{i-1}\, p\, x_ix_{i+1} \ldots x_n \vdash x_1x_2 \ldots x_{i-2}\, q\, x_{i-1}\, y\, x_{i+1} \ldots x_n. \tag{1.5}$$

Zauważmy, jak ruch ten odzwierciedla zmianę stanu na $q$ i fakt, że głowica taśmowa znajduje się teraz nad komórką $i-1$. Istnieją dwa ważne wyjątki:

1. Jeżeli $i = 1$, to $M$ przesuwa się do symbolu pustego na lewo od $x_1$. W tym przypadku

$$p\, x_1x_2 \ldots x_n \vdash q \nabla yx_2 \ldots x_n. \tag{1.6}$$

2. Jeżeli $i = n$ i $y = \nabla$, to symbol $\nabla$ nadpisany na $x_n$ dołącza do nieskończonego ciągu symboli pustych na prawym końcu taśmy i nie pojawia się w następnym OC. Zatem

$$x_1x_2 \ldots x_{n-2}x_{n-1}\, p\, x_n \vdash x_1x_2 \ldots x_{n-2}\, q\, x_{n-1}. \tag{1.7}$$

Przypuśćmy, że $\delta(p, x_i) = (q, y, \rightarrow)$, tzn. następny ruch jest ruchem w prawo. Wtedy

$$x_1x_2 \ldots x_{i-1}\, p\, x_ix_{i+1} \ldots x_n \vdash x_1x_2 \ldots x_{i-1}\, y\, q\, x_{i+1} \ldots x_n. \tag{1.8}$$

W tym przypadku ruch odzwierciedla fakt, że głowica przesunęła się do komórki $i+1$. I znów mamy dwa ważne wyjątki:

1. Jeżeli $i = n$, to $(i+1)$-sza komórka zawiera symbol pusty, a komórka ta nie wchodziła w skład poprzedniego OC. Zatem zamiast tego mamy

$$x_1x_2 \ldots x_{n-1}\, p\, x_n \vdash x_1x_2 \ldots x_{n-1}\, y\, q \nabla. \tag{1.9}$$

2. Jeżeli $i = 1$ i $y = \nabla$, to symbol $\nabla$ nadpisany na $x_1$ dołącza do nieskończonego ciągu symboli pustych na lewym końcu taśmy i nie pojawia się w następnym OC. Zatem

$$p\, x_1x_2 \ldots x_n \vdash qx_2 \ldots x_n. \tag{1.10}$$

## 1.4 Język maszyny Turinga

Niech maszyna Turinga będzie określona przez $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \nabla, F)$. Język maszyny Turinga (język akceptowany przez maszynę Turinga) to

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \colon q_0w \overset{*}{\vdash} \alpha p \beta,\ p \in F,\ \alpha, \beta \in \Gamma^*\}. \tag{1.11}$$

## 1.5 Ogólne zagadnienia związane z maszyną Turinga

### 1.5.1 Czas działania maszyny Turinga

Czas działania deterministycznej maszyny Turinga podczas wprowadzania słowa $w$ to liczba kroków, które ta maszyna wykonuje, aż osiągnie stan końcowy. Czas pracy jest mierzony jako funkcja $t(n)$ w odniesieniu do długości wejścia, tj

$$t(n) = \max_{w \in \Sigma^n} \{T(w)\colon T(w) \text{ to czas pracy maszyny przy wejściu } w\}. \tag{1.12}$$

## 1.6 Maszyna Turinga jako urządzenie obliczające funkcje na liczbach naturalnych

**Konwencja nazewnicza.** Jak będziemy analizować Maszynę Turinga, to **setem jedynkowy dla maszyny Turinga będziemy określać jako alfabet unarny**, a **setem dwójkowy dla maszyny Turinga będziemy określać jako alfabet binarny**.

Maszynę Turinga możemy wykorzystywać jako:

1. Urządzenie akceptujące (rozpoznające) języki.
2. Urządzenie obliczające funkcje z liczb naturalnych w liczby naturalne.

#### Maszyna Turinga operująca na alfabecie unarmnym

Traktując maszynę Turinga jako urządzenie obliczające funkcje na liczbach naturalnych w najprostszym przypadku wykorzystuje się podejście polegające na reprezentowaniu liczb naturalnych za pomocą zapisu unarnego, gdzie liczba całkowita $n \geqslant 0$ jest reprezentowana za pomocą łańcucha $0^n$ (lub $1^n$). Jeżeli obliczana funkcja ma $k$ argumentów, będących liczbami naturalnymi

$$i_1, i_2, \ldots, i_k, \tag{1.13}$$

to liczby te umieszczane są początkowo na taśmie, przedzielone jedynkami (ewentualnie zerami) w postaci łańcucha

$$0^{i_1}10^{i_2}\cdots 0^{i_k}, \tag{1.14}$$

(ewentualnie

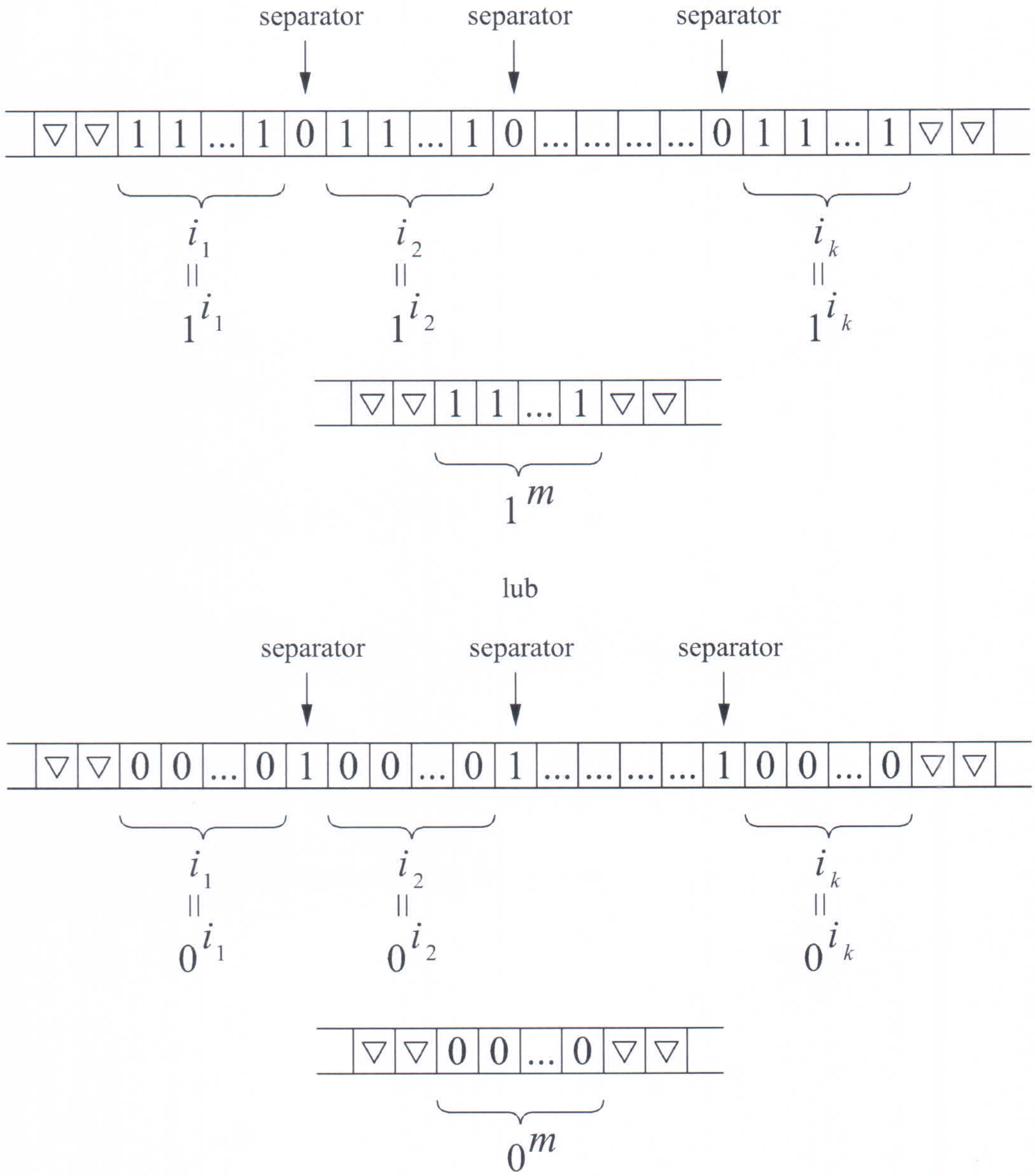
$$1^{i_1}01^{i_2}\cdots 1^{i_k}). \tag{1.15}$$

Jeśli maszyna Turinga zatrzymuje się (w stanie akceptującym lub nie) z taśmą zawierającą $0^m$ (ewentualnie $1^m$) dla pewnego $m$, to

$$f(i_1, i_2, \ldots, i_k) = m, \tag{1.16}$$

gdzie $f$ jest funkcją o $k$ argumentach obliczaną przez tę maszynę Turinga. Zauważmy, że jedna i ta sama maszyna Turinga może obliczać pewną funkcję jednoargumentową, jakąś inną funkcję dwuargumentową, i tak dalej. Zauważmy też, że jeśli maszyna Turinga M oblicza funkcję o $k$ argumentach, to $f$ nie musi mieć określonej wartości dla wszystkich różnych $k$-tek liczb naturalnych $i_1, i_2, \ldots, i_k$.

Maszyna Turinga operująca na alfabecie unarmnym.




Rysunek 1.2: Maszyna Turinga operująca na alfabecie unarmnym.

**Maszyna Turinga operująca na alfabecie binarnym**

Mówimy, że maszyna Turinga oblicza funkcję $f$, jeśli po uruchomieniu z dowolną liczbą naturalną $n$ w zapisie binarnym na taśmie zatrzyma się ona (w dowolnym sianie) z $f(n)$ w zapisie binarnym na taśmie.

## 1.7 Zadania z maszyny Turinga operującej na alfabecie unarmnym

### 1.7.1 Maszyna Turinga obliczająca poprzednik

**Zad 1.2.** Zaprojektuj maszynę Turinga obliczającą poprzednik w alfabecie unarnym z zerem. Wykonaj obliczenia maszyny Turinga dla $q_0 \bigtriangledown 1$ oraz $q_0 \bigtriangledown$ 11111.

Musimy skonstruować funkcję $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taką, że

$$\begin{cases} p(n_{(10)} + 1_{(10)}) = n_{(10)}, & \text{jeżeli } n_{(10)} \geqslant 1_{(10)}, \\ p(n_{(10)}) = 0_{(10)}, & \text{jeżeli } n_{(10)} = 0_{(10)}. \end{cases} \tag{1.17}$$

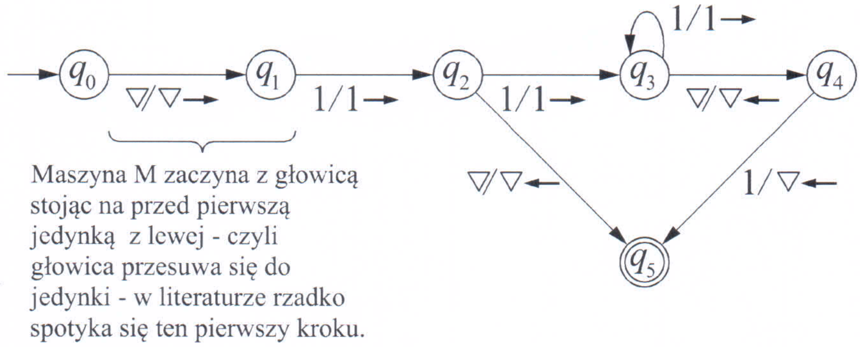
Maszyna jest dana przez

$$\begin{aligned} M &= (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) = \\ &= (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{1\}, \{1, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \bigtriangledown, \{q_5\}). \end{aligned} \tag{1.18}$$

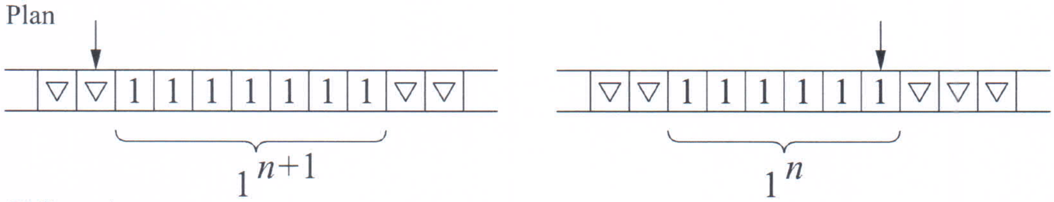
Funkcja przejścia $\delta\colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$ jest określona przez

$$\delta(q_0, \bigtriangledown) = (q_1, \bigtriangledown, \rightarrow), \tag{1.19}$$
$$\delta(q_1, 1) = (q_2, 1, \rightarrow), \tag{1.20}$$
$$\delta(q_2, 1) = (q_3, 1, \rightarrow), \tag{1.21}$$
$$\delta(q_2, \bigtriangledown) = (q_5, \bigtriangledown, \leftarrow), \tag{1.22}$$
$$\delta(q_3, 1) = (q_3, 1, \rightarrow), \tag{1.23}$$
$$\delta(q_3, \bigtriangledown) = (q_4, \bigtriangledown, \leftarrow), \tag{1.24}$$
$$\delta(q_4, 1) = (q_5, \bigtriangledown, \leftarrow). \tag{1.25}$$

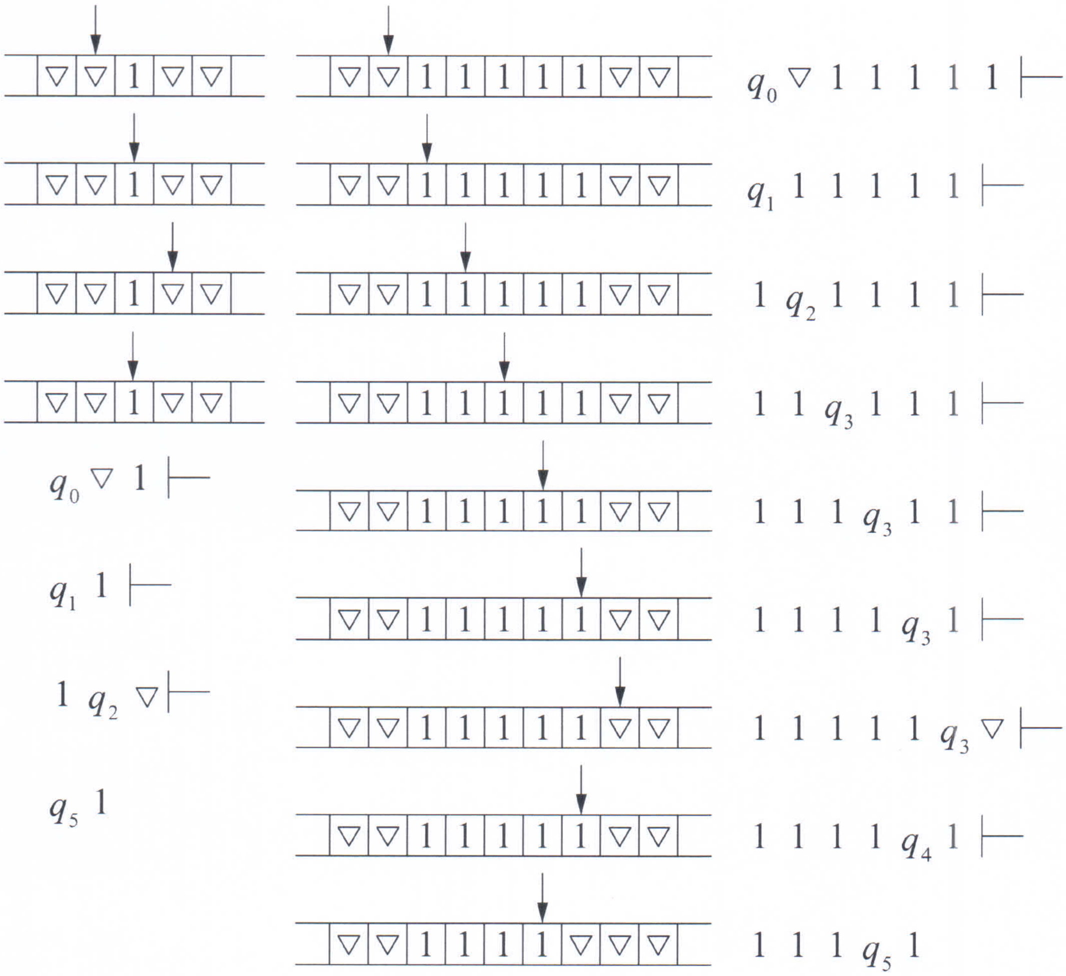
Maszyna Turinga obliczająca poprzednik w alfabecie unarnym z zerem.




Plan




Obliczenia




Rysunek 1.3: Maszyna Turinga obliczająca poprzednik w alfabecie unarnym.

### 1.7.2 Maszyna Turinga wykonująca dodawanie w alfabecie unarnym bez zera

**Zad 1.3.** Zaprojektuj maszynę Turinga wykonującą dodawanie w alfabecie unarnym bez zera. Wykonaj obliczenia maszyny Turinga dla $q_0 111011$.

Musimy skonstruować $d\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taką, że

$$d(m_{(10)}, n_{(10)}) = m_{(10)} + n_{(10)}. \tag{1.26}$$

W zapisie jedynkowym mamy

$$d\left(1^m, 1^n\right) = 1^m + 1^n = 1^{m+n}. \tag{1.27}$$

Zapiszmy nasze obliczenia w postaci bardziej formalnej. Niech reprezentacje liczb $m$ i $n$ w postaci $w(m)$ i $w(n)$ znajdują się na taśmie w notacji unarnej i będą oddzielone pojedynczym 0, z głowicą do odczytu i zapisu na lewym symbolu $w(m)$. Po obliczeniu na taśmie pojawi się $w(m+n)$. Te obliczenia mają formę

$$q_0 w(m) 0 w(n) \overset{*}{\vdash} 1^{m+n-1} q_f 1, \tag{1.28}$$

gdzie $q_f$ to stan finalny.

$$\begin{aligned} M &= (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \triangledown, F) = \\ &= (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \triangledown\}, \delta, q_0, \triangledown, \{q_3\}). \end{aligned} \tag{1.29}$$

Funkcja przejścia

$$\delta(q_0, 1) = (q_0, 1, \rightarrow) \tag{1.30}$$
$$\delta(q_0, 0) = (q_1, 1, \rightarrow) \tag{1.31}$$
$$\delta(q_1, 1) = (q_1, 1, \rightarrow) \tag{1.32}$$
$$\delta(q_1, \triangledown) = (q_2, \triangledown, \leftarrow) \tag{1.33}$$
$$\delta(q_2, 1) = (q_3, \triangledown, \rightarrow) \tag{1.34}$$

Tabelka przejścia to

| | Symbol | | |
|---|---|---|---|
| Stan | 0 | 1 | $\triangledown$ |
| $q_0$ | $(q_1, 1, \rightarrow)$ | $(q_0, 1, \rightarrow)$ | – |
| $q_1$ | – | $(q_1, 1, \rightarrow)$ | $(q_2, \triangledown, \leftarrow)$ |
| $q_2$ | – | $(q_3, \triangledown, \rightarrow)$ | – |
| $q_3$ | – | – | – |

Tabela 1.1: Tabela dla funkcji przejścia maszyny Turinga wykonującej dodawanie.

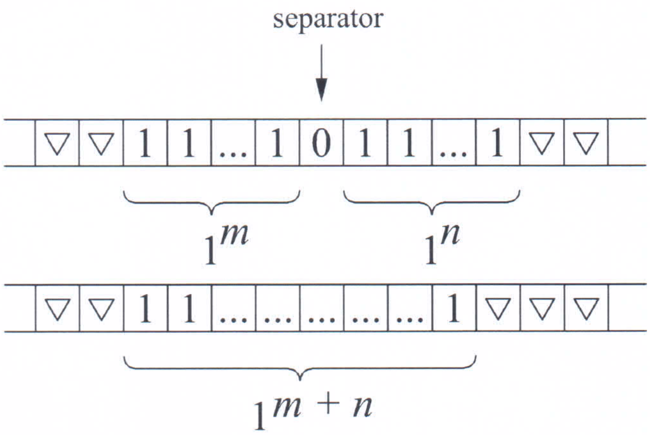
Przykładowe obliczenie maszyny $M$ dla wejścia 111011 ma postać

$$q_0111011 \vdash 1q_011011 \vdash 11q_01011 \vdash 111q_0011 \vdash \\ 1111q_111 \vdash 11111q_11 \vdash 111111q_1\triangledown \vdash 11111q_21 \vdash 1111q_31. \tag{1.35}$$

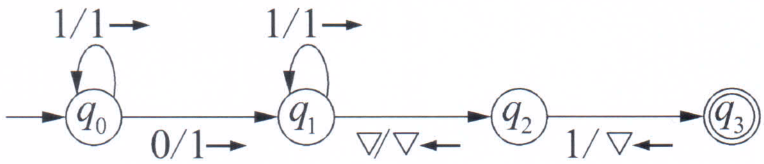
Maszyna Turinga wykonująca dodawanie dwóch liczb w alfabecie unarnym bez zera.

początkowy łańcuch na taśmie $1^m \, 0 \, 1^n$

końcowy łańcuch na taśmie $1^{m+n}$




Maszyna M zaczyna pracę z głowicą stojąc na pierwszej jedynce z lewej.

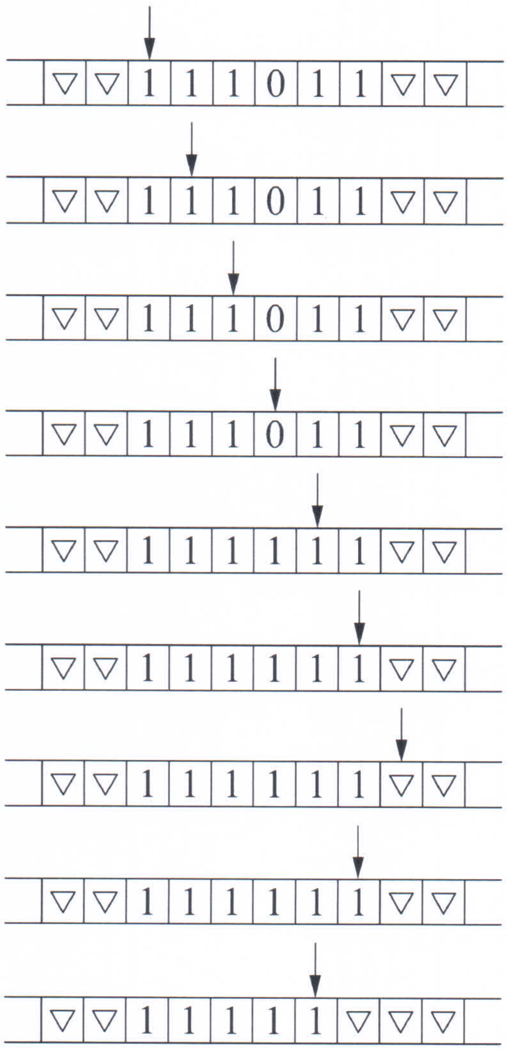



| | Symbol | | |
|---|---|---|---|
| Stan | 0 | 1 | ▽ |
| $q_0$ | $(q_1, 1, \rightarrow)$ | $(q_0, 1, \rightarrow)$ | |
| $q_1$ | | $(q_1, 1, \rightarrow)$ | $(q_2, \triangledown, \leftarrow)$ |
| $q_2$ | | $(q_3, \triangledown, \leftarrow)$ | |
| $q_3$ | | | |

Rysunek 1.4: Maszyna Turinga wykonująca dodawanie w alfabecie unarnym bez zera.

Maszyna Turinga wykonująca dodawanie dwóch liczb w alfabecie unarnym bez zera.

Obliczenia



$q_0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \vdash$

$1\ q_0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \vdash$

$1\ 1\ q_0\ 1\ 0\ 1\ 1 \vdash$

$1\ 1\ 1\ q_0\ 0\ 1\ 1 \vdash$

$1\ 1\ 1\ 1\ q_1\ 1\ 1 \vdash$

$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ q_1\ 1 \vdash$

$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ q_1\ \triangledown \vdash$

$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ q_2\ 1 \vdash$

$1\ 1\ 1\ 1\ q_3\ 1$

Rysunek 1.5: Obliczenia maszyny Turinga wykonującej dodawanie w alfabecie unarnym bez zera.

## 1.8 Maszyny Turinga porównujące liczby na alfabecie unarnym

**Zad 1.4.** Zaprojektuj maszynę Turinga porównującą liczby $m$ i $n$ w alfabecie unarnym. Wykonaj obliczenia maszyny Turinga dla dowolnie wybranego wejścia.

Na taśmie umieszczamy liczby $m$ i $n$. Reprezentacją liczb $m$ i $n$ są $w(m)$ i $w(n)$ w notacji unarnej i są oddzielone pojedynczym 0, z głowicą do odczytu i zapisu na lewym symbolu $w(m)$.

Rozwiązanie.

Dla przypadku $m < n$ obliczenia przebiegają według

$$q_0 w(m) 0 w(n) \overset{*}{\vdash} X^m 0 X^m 1 q_f 1^{n-m-1}, \tag{1.36}$$

gdzie $q_f$ to stan finalny.

Dla przypadków $m > n$ i $m = n$ obliczenia mają podobny charakter.

Maszyny to

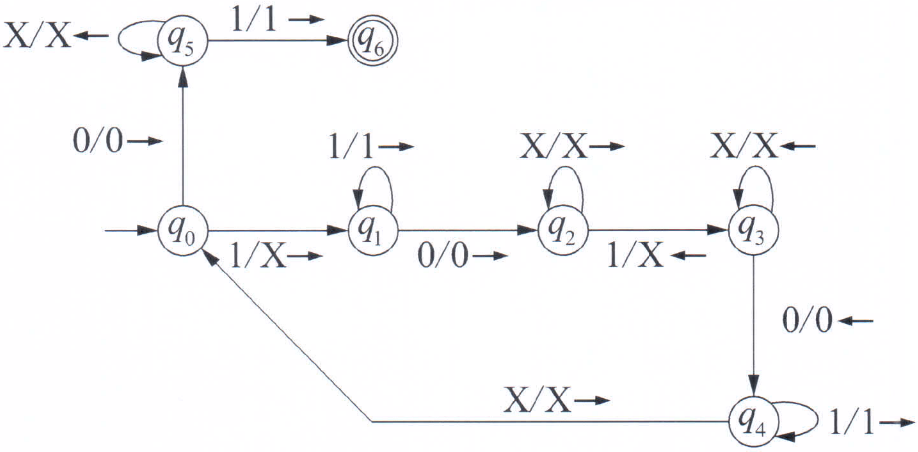
$$\begin{aligned} M_{m<n} &= (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) = \\ &= (\{q_0, q_1, q_2, , q_3, , q_4, q_5, q_6\}, \{0, 1, X\}, \{0, 1, X, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \bigtriangledown, \{q_6\}). \end{aligned} \tag{1.37}$$

$$\begin{aligned} M_{m=n} &= (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) = \\ &= (\{q_0, q_1, q_2, , q_3, , q_4, q_5, q_6\}, \{0, 1, X\}, \{0, 1, X, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \bigtriangledown, \{q_6\}). \end{aligned} \tag{1.38}$$

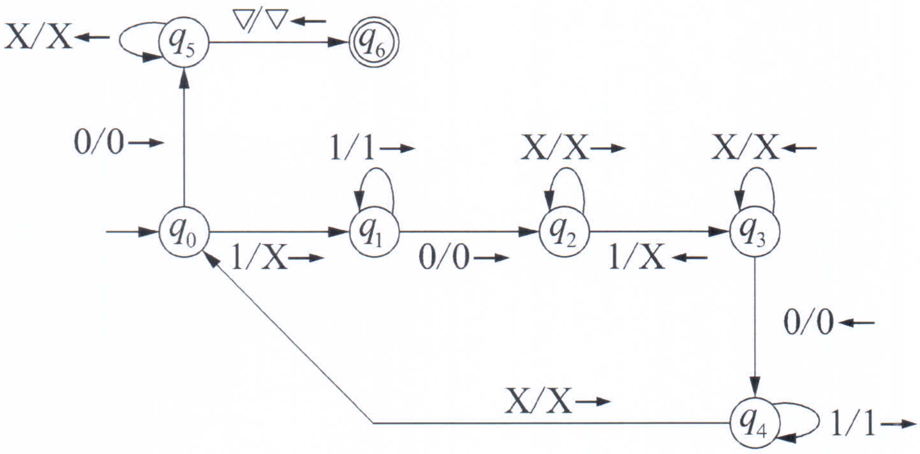
$$\begin{aligned} M_{m>n} &= (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) = \\ &= (\{q_0, q_1, q_2, , q_3, , q_4, q_5\}, \{0, 1, X\}, \{0, 1, X, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \bigtriangledown, \{q_5\}). \end{aligned} \tag{1.39}$$

Maszyna Turinga porównująca liczby.

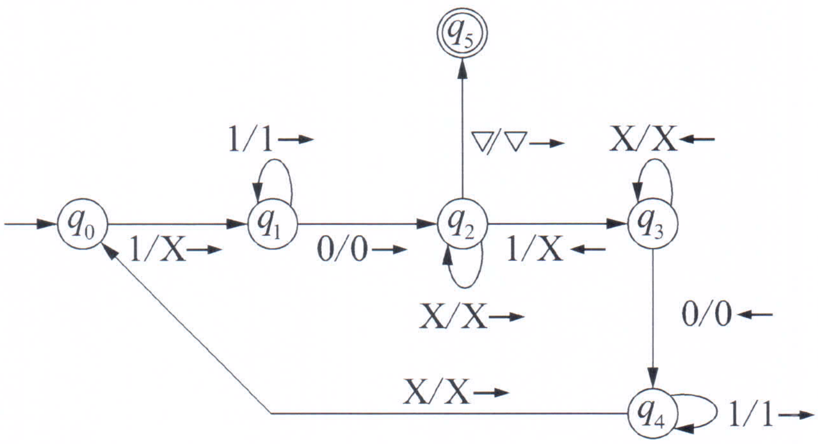
a) Maszyna Turinga porównująca liczby dla $m < n$.




b) Maszyna Turinga porównująca liczby dla $m = n$.




c) Maszyna Turinga porównująca liczby dla $m > n$.




Rysunek 1.6: Maszyny Turinga porównująca liczby.

Plan do projektu.

MT porównująca liczby dla $m < n$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\triangledown$ | $\triangledown$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | $\triangledown$ | $\triangledown$ |

• • •

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\triangledown$ | $\triangledown$ | X | 0 | X | 1 | 1 | $\triangledown$ | $\triangledown$ |

MT porównująca liczby dla $m = n$.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\triangledown$ | $\triangledown$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | $\triangledown$ | $\triangledown$ |

• • •

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\triangledown$ | $\triangledown$ | X | X | 0 | X | X | $\triangledown$ | $\triangledown$ |

MT porównująca liczby dla $m > n$.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\triangledown$ | $\triangledown$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | $\triangledown$ | $\triangledown$ |

• • •

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\triangledown$ | $\triangledown$ | X | X | X | 0 | X | $\triangledown$ | $\triangledown$ |

Obliczenia maszyny Turinga porównującej liczby dla $m < n$.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\triangledown$ | $\triangledown$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $q_0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1 \vdash$ |
| $\triangledown$ | $\triangledown$ | X | 0 | 1 | 1 | 1 | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $X\ q_1\ 0\ 1\ 1\ 1 \vdash$ |
| $\triangledown$ | $\triangledown$ | X | 0 | 1 | 1 | 1 | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $X\ 0\ q_2\ 1\ 1\ 1 \vdash$ |
| $\triangledown$ | $\triangledown$ | X | 0 | X | 1 | 1 | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $X\ q_3\ 0\ X\ 1\ 1 \vdash$ |
| $\triangledown$ | $\triangledown$ | X | 0 | X | 1 | 1 | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $q_4\ X\ 0\ X\ 1\ 1 \vdash$ |
| $\triangledown$ | $\triangledown$ | X | 0 | X | 1 | 1 | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $X\ q_0\ 0\ X\ 1\ 1 \vdash$ |
| $\triangledown$ | $\triangledown$ | X | 0 | X | 1 | 1 | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $X\ 0\ q_5\ X\ 1\ 1 \vdash$ |
| $\triangledown$ | $\triangledown$ | X | 0 | X | 1 | 1 | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $X\ 0\ X\ q_5\ 1\ 1 \vdash$ |
| $\triangledown$ | $\triangledown$ | X | 0 | X | 1 | 1 | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $X\ 0\ X\ 1\ q_6\ 1$ |

Rysunek 1.7: Obliczenia maszyn Turinga porównujących liczby.

# 1.9 Maszyna Turinga operująca na systemie binarnym

## 1.9.1 Dodawanie i odejmowanie pisemne w systemie binarnym

**Zad 1.5.** Obliczmy pisemnie sumę $10111 + 11$.
Rozwiązanie. Mamy

$$\begin{array}{r} 10111 \\ + \quad 11 \\ \hline 11010 \end{array} \tag{1.40}$$

**Zad 1.6.** Obliczmy pisemnie różnicę $101001 - 111$.
Rozwiązanie. Mamy

$$\begin{array}{r} 101001 \\ - \quad 111 \\ \hline 100010 \end{array} \tag{1.41}$$

**Zad 1.7.** Zamień liczbę $1010_{(2)}$ w systemie dwójkowym na liczbę w systemie dziesiętnym.
Rozwiązanie. Mamy

$$1010_{(2)} = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 = 2 + 8 = 10_{(10)}. \tag{1.42}$$