WSTĘP DO TEORII OBLICZALNOŚCI

Laboratorium 1

OPRACOWANIE

KRZYSZTOF BORZĘCKI

Laboratorium 1. Maszyna Turinga

1.1 Pojęcia wstępne

Symbol jest obiektem abstrakcyjnym, którego nie definiujemy w sposób formalny, podobnie jak punkt i prosta w geometrii. Często używanymi symbolami są na przykład litery i cyfry np a, b, x, y, 0, 1.

Łańcuch (lub słowo) jest skończonym ciągiem zestawionych razem symboli. Podamy przykład, a, b i c są symbolami, a $abcbab$ jest łańcuchem. Łańcuchy będziemy oznaczać przez w lub literami greckimi, na przykład

$$w = ababb, \tag{1.1}$$

$$\alpha = 01ab22. \tag{1.2}$$

Długość łańcucha w, oznaczana przez $|w|$, jest to liczba symboli tworzących ten łańcuch. Podamy przykład łańcuch $abcab$ ma długość 5, co możemy zapisać

$$|w| = |ababb| = 5. \tag{1.3}$$

Łańcuch pusty, który jest oznaczany symbolem ε, jest zbiorem złożonym z zera symboli. Tak więc $|\varepsilon| = 0$.

Złożeniem (konkatenacją) dwóch łańcuchów jest łańcuch powstały poprzez wypisanie pierwszego z nich, a następnie drugiego, bez żadnej przestrzeni oddzielającej. Dla przykładu, złożeniem łańcuchów xyz i ab jest $xyzab$.

Jako **operator składania łańcuchów używane jest ich zestawianie**. Tak wiec, jeśli w i x są łańcuchami, to ich złożeniem jest wx. Łańcuch pusty jest **jedynką dla operatora składania**, czyli

$$\bigwedge_{w} \varepsilon w = w\varepsilon = w. \tag{1.4}$$

Alfabet to skończony zbiór symboli. Alfabet przeważnie oznaczamy przez Σ.

Język (formalny) jest zbiorem łańcuchów złożonych z symboli jakiegoś jednego alfabetu. Zarówno zbiór pusty $\emptyset$, jak i zbiór ε składający się jedynie z łańcucha pustego, są językami. Należy zauważyć, że są one różne, bo drugi z nich zawiera jakiś element, a pierwszy — nie. Język formalny przeważnie oznaczamy przez L.

Zbiór palindromów, czy łańcuchów, które można odczytać tak samo od początku i od końca nad alfabetem $\{0, 1\}$ jest językiem nieskończonym. Elementami tego języka są np.: ε, 0, 1, 00, 11, 010 i 1101011.

Zauważmy, że zbiór wszystkich palindromów nad nieskończonym zbiorem symboli nie jest, formalnie biorąc, językiem, gdyż należące do niego łańcuchy nie są wszystkie zbudowane nad jakimś jednym alfabetem.

Innym przykładem języka jest **zbiór wszystkich łańcuchów nad ustalonym alfabetem** Σ. Język ten będziemy oznaczać symbolem Σ^*.

Na przykład, jeżeli $\Sigma = \{a\}$, to

$$\Sigma^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \ldots\}. \tag{1.5}$$

Jeśli zaś $\Sigma = \{0, 1\}$, to

$$\Sigma^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \ldots\}. \tag{1.6}$$

Niech Σ będzie skończonym zbiorem symboli i niech L, L_1, L_2 będą zbiorami łańcuchów z Σ^*.

Złożeniem L_1 i L_2, oznaczanym: L_1L_2, nazywamy

$$L_1L_2 = \{xy\colon x \in L_1 \wedge y \in L_2\}. \tag{1.7}$$

Innymi słowy, łańcuchy należące do L_1L_2 tworzone są poprzez wypisanie łańcucha z L_1, a następnie łańcucha z L_2, we wszystkich możliwych kombinacjach.

Niech $L^0 = \varepsilon$ i $L^i = LL^{i-1}$ dla $i \geqslant 1$.

Domknięciem Kleeneego L, oznaczanym symbolem L^*, nazywamy zbiór

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i. \tag{1.8}$$

W bardziej zwięzłej formie domknięcie Kleeneego zbioru definiuje się rekurencyjnie przez

$$L^0 = \varepsilon, \tag{1.9}$$

$$L^{i+1} = \{wv : w \in L^i \wedge v \in L\} \quad \text{dla} \quad i \in \mathbb{N}_0, \tag{1.10}$$

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{+\infty} L^i, \tag{1.11}$$

gdzie ε oznacza słowo puste.

Wyjaśnijmy, że L^i to i-ta potęga zbioru L i jest skrótem na konkatenację zbioru L ze sobą i razy. Oznacza to, że L^i można rozumieć jako zbiór wszystkich łańcuchów, które można przedstawić jako konkatenację i łańcuchów w L.

Domknięciem dodatnim L, oznaczanym symbolem L^+, nazywamy zbiór

$$L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i. \tag{1.12}$$

A więc L^* jest zbiorem wszystkich słów otrzymanych w wyniku złożenia dowolnej liczby słów z L. L^+ jest zdefiniowane tak samo, z tym, że wykluczamy przypadek zera słów, których złożenie określa się jako ε.

Zad 1.1. Niech $L_1 = \{10, 1\}$ i $L_2 = \{011, 11\}$. Wyznacz L_1L_2.
Mamy

$$L_1L_2 = \{10011, 1011, 111\}. \tag{1.13}$$

Zad 1.2. Niech $L = \{001, 10, 111\}$ i $M = \{\varepsilon, 001\}$. Wyznacz LM.
Mamy

$$LM = \{001, 10, 111, 001001, 10001, 111001\}. \tag{1.14}$$

Zad 1.3. Niech $L = \{10, 11\}$. Wyznacz $L^* = \{10, 11\}^*$.
Wtedy

$$\{10, 11\}^* = \{\varepsilon, 10, 11, 1010, 1011, 1110, 1111, \ldots\}. \tag{1.15}$$

Niech Σ będzie alfabetem. **Potęga alfabetu** jest oznaczana Σ^k. **Potęga alfabetu** jest to zbiór łańcuchów o długości k.

Zad 1.4. Niech $\Sigma = \{0, 1\}$. Wyznacz Σ^1, Σ^2, Σ^3.

$$\Sigma^1 = \{0, 1\}, \tag{1.16}$$
$$\Sigma^2 = \{00, 01, 10, 11\}, \tag{1.17}$$
$$\Sigma^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}, \tag{1.18}$$
$$\ldots \tag{1.19}$$

Potęgę alfabetu Σ^k można zdefiniować rekurencyjnie

$$\Sigma^0 = \varepsilon, \tag{1.20}$$
$$\Sigma^{k+1} = \Sigma^k\Sigma. \tag{1.21}$$

Potęgę zbioru L^k można zdefiniować rekurencyjnie

$$L^0 = \varepsilon, \tag{1.22}$$
$$L^{k+1} = L^kL. \tag{1.23}$$

Zbiór wszystkich łańcuchów nad alfabetem Σ to

$$\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \ldots. \tag{1.24}$$

Zbiór wszystkich niepustych łańcuchów nad alfabetem Σ to

$$\Sigma^+ = \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \ldots. \tag{1.25}$$

Możemy zapisać

$$\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \varepsilon. \tag{1.26}$$

1.2 Systemy liczbowe wykorzystywane na zajęciach

1.2.1 Jedynkowy system liczbowy (jedynkowy system liczbowy bez zera)

W systemie jedynkowym liczba jest reprezentowana przez same jedynki lub same zera. Najmniejszą liczbą jaką możemy zapisać jest liczba jeden. Na przykład 4 będzie reprezentowane przez ciąg czterech zer lub czterech jedynek.

Aby zapisać liczbę dziesiętną w systemie jedynkowym, wykorzystujemy

$$n_{(10)} = 1^n \tag{1.27}$$

lub

$$n_{(10)} = 0^n. \tag{1.28}$$

Rozważając jedynkowy system liczbowy jako system pozycyjny, zakładamy, że jego podstawą pozycji jest liczba 1. Dla przykładu zapiszmy liczbę 4 według

$$1 \cdot 1^0 + 1 \cdot 1^1 + 1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^3 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4_{(10)}. \tag{1.29}$$

1.2.2 Jedynkowy system liczbowy z zerem

W systemie jedynkowym z zerem liczba jest reprezentowana przez same jedynki lub same zera z warunkiem, że liczba zero jest zapisywane przez jedną jedynkę lub jedno zero. Na przykład 4 będzie reprezentowane przez ciąg pięciu zer lub pięciu jedynek.

Aby zapisać liczbę dziesiętną w systemie jedynkowym z zerem, wykorzystujemy

$$n_{(10)} = 1^{n+1} \tag{1.30}$$

lub

$$n_{(10)} = 0^{n+1}. \tag{1.31}$$

1.2.3 Porównanie zapisu liczb w różnych systemach liczbowych

Rozważmy tabelę

Jedynkowy	Jedynkowy z zerem	Dwójkowy	Dziesiętny
	1	0	0
1	11	1	1
11	111	10	2
111	1111	11	3
1111	11111	100	4
⋮	⋮	⋮	⋮

Tabela 1.1: Zapis liczb w różnych systemach liczbowych.

1.3 Maszyna Turinga

1.3.1 Jednotaśmowa maszyna Turinga

Poniżej zaprezentujemy najczęściej przyjmowaną definicję maszyny Turinga.

Definicja 1.1. Maszyna Turinga M jest to siódemka uporządkowana

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \triangledown, F), \tag{1.32}$$

gdzie:

1. Q jest skończonym **zbiorem stanów** sterowania skończonego.
2. Σ jest skończonym **zbiorem symboli wejściowych (alfabetem)**, mamy $\Sigma \subset \Gamma$.
3. Γ jest skończonym **zbiorem dopuszczalnych symboli taśmy**, mamy $\Gamma = \Sigma \cup \triangledown$.
4. Funkcja δ jest nazywana **funkcją następnego ruchu** lub **funkcją przejścia**. Funkcja δ jest dana przez $\delta\colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times D$, gdzie D jest zbiorem możliwych kierunków głowicy. Możemy zapisać

   $$\delta(p, x) = (q, y, d), \tag{1.33}$$

   gdzie stany $p, q \in Q$, x, y to symbol odczytywany i zapisywany do komórki oraz kierunek głowicy $d \in D$. W podstawowej wersji maszyny Turinga podanej przez Hopcrofta i Ullmana głowica może przesuwać się w lewo lub prawo, co oznaczmy przez $\leftarrow$ i $\rightarrow$, czyli $D = \{\leftarrow, \rightarrow\}$. W innej wersji maszyny Turinga głowica dodatkowo może stać w miejscu, co oznaczmy przez $-$, czyli zbiór $D = \{\leftarrow, -, \rightarrow\}$. Jeśli funkcja przejścia nie jest zdefiniowana na bieżącym stanie i bieżącym symbolu taśmy, to maszyna zatrzymuje się.
5. q_0 jest to **stan początkowy**, czyli stan, w którym znajduje się sterowanie skończone na starcie.
6. $\triangledown$ jest to **symbol pusty**, który z angielskiego nazywamy **blankiem**. Symbol pusty znajduje się we wszystkich komórkach taśmy poza skończoną ilością komórek, które zawierają symbole wejściowe.
7. F jest to zbiór **stanów akceptujących** i jest nazywany też zbiorem **stanów końcowych**, $F \subset Q$.

□

Jednotaśmową maszynę Turinga zaprezentowano na rysunku ??.

Poniżej zaprezentujemy definicję maszyny Turinga podaną przez J. Myckę. W definicji tej mamy wprowadzone stany akceptujący i odrzucający.

Definicja 1.2. (J. Mycka) **Maszyna Turinga** M jest to siódemka uporządkowana

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_A, q_R), \tag{1.34}$$

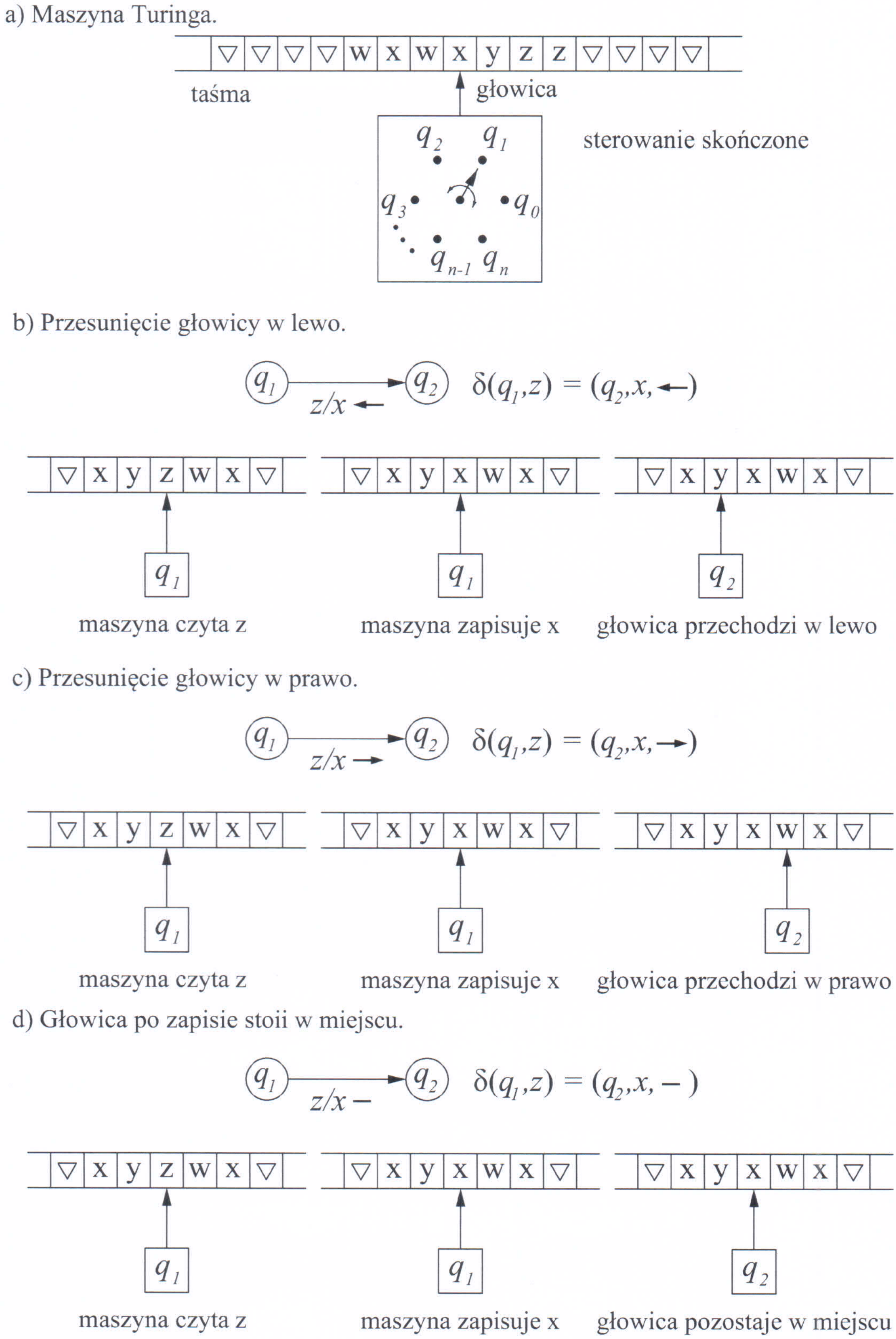
gdzie:

1. Q jest skończonym **zbiorem stanów** sterowania skończonego.
2. Σ jest skończonym **zbiorem symboli wejściowych (alfabetem)**, mamy $\Sigma \subset \Gamma$.
3. Γ jest skończonym **zbiorem dopuszczalnych symboli taśmy**, mamy $\Gamma = \Sigma \cup \bigtriangledown$, gdzie $\bigtriangledown$ jest to **symbol pusty**. Symbol pusty znajduje się we wszystkich komórkach taśmy poza skończoną ilością komórek, które zawierają symbole wejściowe.
4. Funkcja δ jest nazywana **funkcją następnego ruchu** lub **funkcją przejścia**. Funkcja δ jest dana przez $\delta\colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times D$, gdzie D jest zbiorem możliwych kierunków głowicy. Możemy zapisać

$$\delta(p, x) = (q, y, d), \tag{1.35}$$

   gdzie stany $p, q \in Q$, x, y to symbol odczytywany i zapisywany do komórki oraz kierunek głowicy $d \in D$. W podstawowej wersji maszyny Turinga podanej przez Hopcrofta i Ullmana głowica może przesuwać się w lewo lub prawo, co oznaczmy przez $\leftarrow$ i $\rightarrow$, czyli $D = \{\leftarrow, \rightarrow\}$. W innej wersji maszyny Turinga głowica dodatkowo może stać w miejscu, co oznaczmy przez $-$, czyli zbiór $D = \{\leftarrow, -, \rightarrow\}$. Jeśli funkcja przejścia nie jest zdefiniowana na bieżącym stanie i bieżącym symbolu taśmy, to maszyna zatrzymuje się.
5. q_0 jest to **stan początkowy**, czyli stan, w którym znajduje się sterowanie skończone na starcie.
6. q_A jest to **stan akceptujący**.
7. q_R jest to **stan odrzucający**.

□



Rysunek 1.1: Maszyna Turinga. Przejścia maszyny Turinga — instrukcje maszyny Turinga.

1.3.2 Maszyna Turinga obliczająca następnik

Zad 1.5. Zaprojektuj maszynę Turinga obliczającą następnik w alfabecie unarnym. Wykonaj obliczenia maszyny Turinga dla q_0111 lub $q_0111111$.

Musimy skonstruować $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taką, że

$$f(n_{(10)}) = n_{(10)} + 1_{(10)}. \tag{1.36}$$

W zapisie jedynkowym mamy

$$f\left(1^{n+1}\right) = 1^{n+2}. \tag{1.37}$$

PIERWSZA WERSJA ROZWIĄZANIA

$$M_1 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \triangledown, F) = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{1\}, \{1, \triangledown\}, \delta, q_0, \triangledown, \{q_2\}). \tag{1.38}$$

Funkcja przejścia $\delta\colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, -, \rightarrow\}$ jest określona przez

$$\delta(q_0, 1) = (q_0, 1, \rightarrow) \tag{1.39}$$
$$\delta(q_0, \triangledown) = (q_1, 1, \rightarrow) \tag{1.40}$$
$$\delta(q_1, \triangledown) = (q_2, \triangledown, -) \tag{1.41}$$

DRUGA WERSJA ROZWIĄZANIA

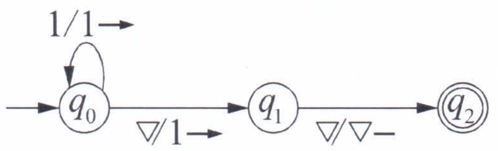
$$M_2 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \triangledown, F) = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{1\}, \{1, \triangledown\}, \delta, q_0, \triangledown, \{q_3\}). \tag{1.42}$$

Funkcja przejścia $\delta\colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, -, \rightarrow\}$ jest określona przez

$$\delta(q_0, \triangledown) = (q_1, \triangledown, \rightarrow) \tag{1.43}$$
$$\delta(q_1, 1) = (q_1, 1, \rightarrow) \tag{1.44}$$
$$\delta(q_1, \triangledown) = (q_2, 1, \rightarrow) \tag{1.45}$$
$$\delta(q_2, \triangledown) = (q_3, \triangledown, -) \tag{1.46}$$

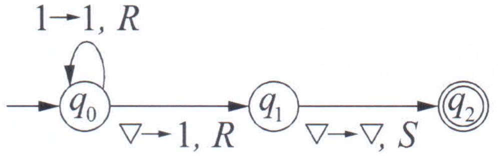
Maszyna Turinga obliczająca następnik w alfabecie unarnym.

a) Pierwsza wersja rozwiązania



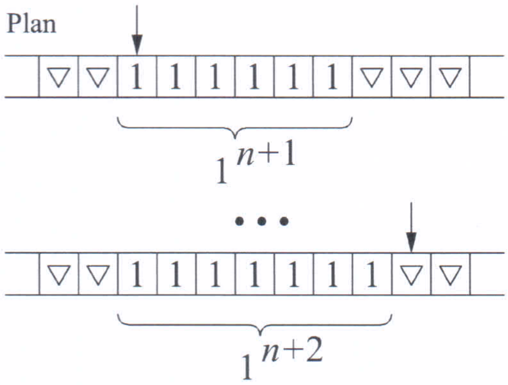
$$\delta(q_0,1) = (q_0,1,\rightarrow)$$
$$\delta(q_0,\triangledown) = (q_1,1,\rightarrow)$$
$$\delta(q_1,\triangledown) = (q_2,\triangledown,-)$$

Alternatywna konwencja rysunkowa (rzadko stosowana)



Maszyna M zaczyna z głowicą stojąc na pierwszej jedynce z lewej.

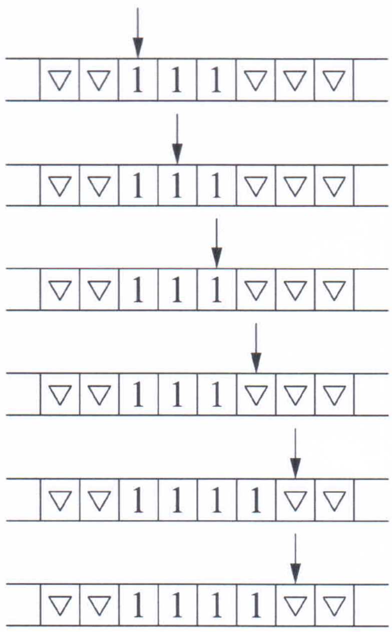
Plan



q_1 1 1 1 1 1 1

1 1 1 1 1 1 1 1 q_2 ▽

Obliczenia



q_0 1 1 1 ⊢

1 q_0 1 1 ⊢

1 1 q_0 1 ⊢

1 1 1 q_0 ▽ ⊢

1 1 1 1 q_1 ▽ ⊢

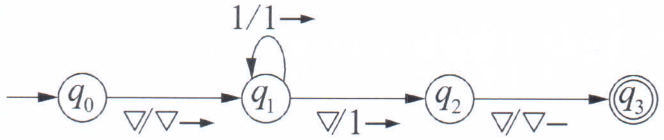
1 1 1 1 q_2 ▽

Rysunek 1.2: Maszyna Turinga obliczająca następnik.

Maszyna Turinga obliczająca następnik w alfabecie unarnym.

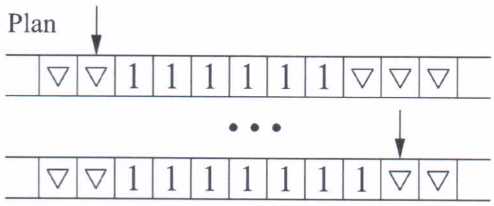
b) Druga wersja rozwiązania

Maszyna M zaczyna z głowicą stojąc na przed pierwszą jedynką z lewej - czyli głowica przesuwa się do jedynki - w literaturze rzadko spotyka się ten pierwszy kroku.



$$\delta(q_0,\triangledown) = (q_1,\triangledown,\rightarrow)$$
$$\delta(q_1,1) = (q_1,1,\rightarrow)$$
$$\delta(q_1,\triangledown) = (q_2,1,\rightarrow)$$
$$\delta(q_2,\triangledown) = (q_3,\triangledown,-)$$

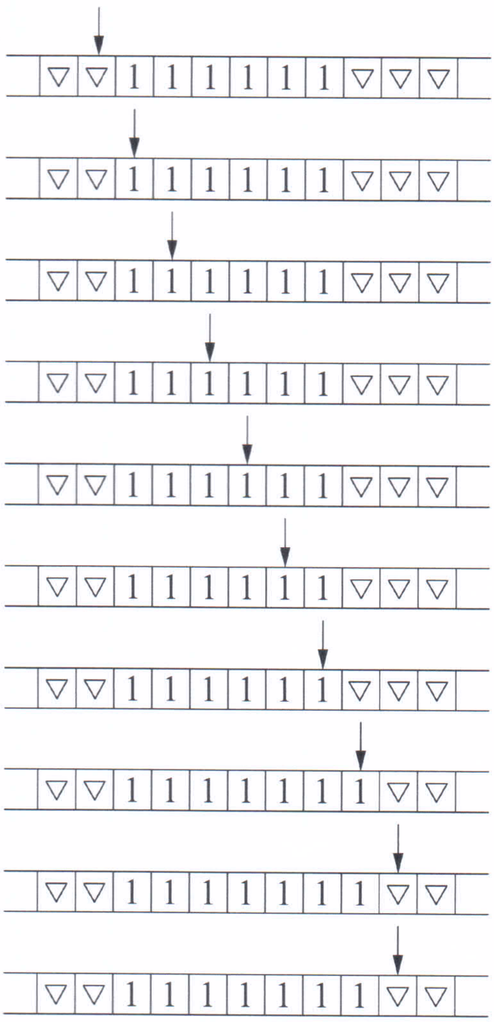
Plan



$q_0 \triangledown\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \vdash$

$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ q_3 \triangledown \vdash$

Obliczenia



$q_0 \triangledown\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \vdash$

$q_1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \vdash$

$1\ q_1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \vdash$

$1\ 1\ q_1\ 1\ 1\ 1\ 1 \vdash$

$1\ 1\ 1\ q_1\ 1\ 1\ 1 \vdash$

$1\ 1\ 1\ 1\ q_1\ 1\ 1 \vdash$

$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ q_1\ 1 \vdash$

$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ q_1 \triangledown \vdash$

$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ q_2 \triangledown \vdash$

$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ q_3 \triangledown$

Rysunek 1.3: Maszyna Turinga obliczająca następnik.