WSTĘP DO TEORII OBLICZALNOŚCI

Laboratorium 3

OPRACOWANIE

KRZYSZTOF BORZĘCKI

LABORATORIUM 3/15

Laboratorium 3. Maszyny Turinga działające na alfabecie binarnym oraz rozszerzenia modelu podstawowego maszyny

1.1 Przypomnienie podstawowych informacji o systemie binarnym

1.1.1 Dodawanie i odejmowanie pisemne w systemie binarnym

Zad 1.1. Obliczmy pisemnie sumę 10111 + 11.

Rozwiązanie. Mamy

$$\begin{array}{r} 10111 \\ +\quad 11 \\ \hline 11010 \end{array} \tag{1.1}$$

Zad 1.2. Obliczmy pisemnie różnicę 101001 − 111.

Rozwiązanie. Mamy

$$\begin{array}{r} 101001 \\ -\quad 111 \\ \hline 100010 \end{array} \tag{1.2}$$

Zad 1.3. Zamień liczbę $1010_{(2)}$ w systemie dwójkowym na liczbę w systemie dziesiętnym.

Rozwiązanie. Mamy

$$1010_{(2)} = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 = 2 + 8 = 10_{(10)}. \tag{1.3}$$

1.2 Jednotaśmowa maszyna Turinga działająca na alfabecie binarnym

1.2.1 Maszyna Turinga obliczająca następnik w alfabecie binarnym

Zad 1.4. Zaprojektuj maszynę Turinga obliczającą następnik w alfabecie binarnym. Wykonaj obliczenia maszyny Turinga dla $q_0 111$.

Musimy skonstruować funkcję $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taką, że

$$f(n_{(2)}) = n_{(2)} + 1_{(2)}. \tag{1.4}$$

Przykładowe, pisemne obliczenia następnika liczby binarnej

$$\begin{array}{r} 11 \\ 10011 \\ +\quad 1 \\ \hline 10100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11 \\ 11 \\ +\quad 1 \\ \hline 100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 111 \\ 111 \\ +\quad 1 \\ \hline 1000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \\ 100 \\ +\quad 1 \\ \hline 101 \end{array} \tag{1.5}$$

(1.6)

$$M_n = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \triangledown, F) = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \triangledown\}, \delta, q_0, \triangledown, \{q_2\}).$$

Funkcja przejścia $\delta\colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, -, \to\}$ jest określona przez

$$\delta(q_0, 0) = (q_0, 0, \to), \tag{1.7}$$
$$\delta(q_0, 1) = (q_0, 1, \to), \tag{1.8}$$
$$\delta(q_0, \triangledown) = (q_1, \triangledown, \leftarrow), \tag{1.9}$$
$$\delta(q_1, 1) = (q_1, 0, \leftarrow), \tag{1.10}$$
$$\delta(q_1, \triangledown) = (q_2, 1, -), \tag{1.11}$$
$$\delta(q_1, 0) = (q_2, 1, -), \tag{1.12}$$

Przykładowe obliczenie maszyny M dla wejścia 111 ma postać

$$q_0 111 \vdash 1 q_0 11 \vdash 11 q_0 1 \vdash 111 q_0 \triangledown \vdash \\ 11 q_1 1 \vdash 1 q_1 10 \vdash 1 q_1 100 \vdash q_1 \triangledown 000 \vdash q_2 1000. \tag{1.13}$$

Obliczenia możemy zapisać jako

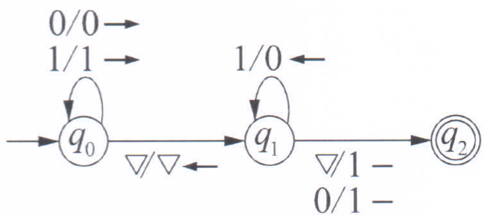
$$K_0 = q_0 111, \tag{1.14}$$
$$K_1 = 1 q_0 11, \tag{1.15}$$
$$K_2 = 11 q_0 1, \tag{1.16}$$
$$K_3 = 111 q_0 \triangledown, \tag{1.17}$$
$$K_4 = 11 q_1 1, \tag{1.18}$$
$$K_5 = 1 q_1 10, \tag{1.19}$$
$$K_6 = q_1 100, \tag{1.20}$$
$$K_7 = q_1 \triangledown 000, \tag{1.21}$$
$$K_8 = q_2 1000, \tag{1.22}$$
$$K_0 \vdash K_1 \vdash K_2 \vdash K_3 \vdash K_4 \vdash K_5 \vdash K_6 \vdash K_7 \vdash K_8. \tag{1.23}$$

Maszyna Turinga obliczająca następnik w alfabecie binarnym.

$$\begin{array}{r} 10010 \\ +\quad 1 \\ \hline 10011 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11 \\ 10011 \\ +\quad 1 \\ \hline 10100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11 \\ 11 \\ +\ 1 \\ \hline 100 \end{array}$$

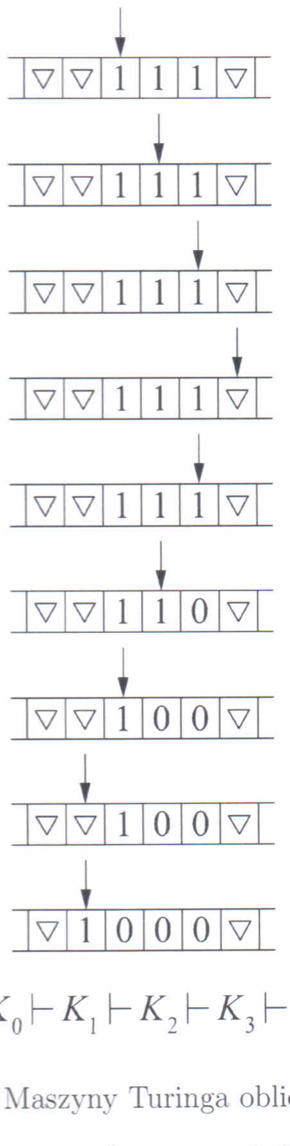
przeniesienie

Diagram przejść



Maszyna M zaczyna pracę z głowicą stojąc na najbardziej lewej cyfrze.

Obliczenia



$K_0 \quad q_0\ 1\ 1\ 1 \vdash$

$K_1 \quad 1\ q_0\ 1\ 1 \vdash$

$K_2 \quad 1\ 1\ q_0\ 1 \vdash$

$K_3 \quad 1\ 1\ 1\ q_0 \triangledown \vdash$

$K_4 \quad 1\ 1\ q_1\ 1 \vdash$

$K_5 \quad 1\ q_1\ 1\ 0 \vdash$

$K_6 \quad q_1\ 1\ 0\ 0 \vdash$

$K_7 \quad q_1 \triangledown\ 0\ 0\ 0 \vdash$

$K_8 \quad q_1\ 1\ 0\ 0\ 0$

$$K_0 \vdash K_1 \vdash K_2 \vdash K_3 \vdash K_4 \vdash K_5 \vdash K_6 \vdash K_7 \vdash K_8$$

Rysunek 1.1: Maszyny Turinga obliczające następnik w alfabecie binarnym.

1.2.2 Maszyna Turinga obliczająca poprzednik w alfabecie binarnym

Zad 1.5. Zaprojektuj maszynę Turinga obliczającą poprzednik $p(n)$ w alfabecie binarnym, przyjmując uproszczoną wersję funkcji $p\colon \{1, 10, 11, 100, \dots\} \to \{1, 10, 11, 100, \dots\}$. Wykonaj obliczenia maszyny Turinga dla $q_0 111$.

Rozwiązanie.

Musimy skonstruować funkcję $p\colon \{1, 10, 11, 100, \dots\} \to \{1, 10, 11, 100, \dots\}$ taką, że

$$p(n_{(2)} + 1_{(2)}) = n_{(2)}, \quad \text{jeżeli } n_{(2)} \geqslant 1_{(2)}. \tag{1.24}$$

Przykładowe, pisemne obliczenia poprzednika liczby binarnej

$$\begin{array}{r} \\ 10011 \\ -\quad 1 \\ \hline 10010 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ 1010 \\ -\quad 1 \\ \hline 1001 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 112 \\ 100 \\ -\quad 1 \\ \hline 11 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \\ 101 \\ -\quad 1 \\ \hline 100 \end{array} \tag{1.25}$$

(1.26)

$$M_p = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \bigtriangledown, \{q_2\}).$$

Funkcja przejścia $\delta\colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, -, \rightarrow\}$ jest określona przez

$$\delta(q_0, 0) = (q_0, 0, \rightarrow), \tag{1.27}$$
$$\delta(q_0, 1) = (q_0, 1, \rightarrow), \tag{1.28}$$
$$\delta(q_0, \bigtriangledown) = (q_1, \bigtriangledown, \leftarrow), \tag{1.29}$$
$$\delta(q_1, 0) = (q1, 1, \leftarrow), \tag{1.30}$$
$$\delta(q_0, 1) = (q_0, 0, -), \tag{1.31}$$

Przykładowe obliczenie maszyny M dla wejścia 111 ma postać

$$q_0 111 \vdash 1q_0 11 \vdash 11q_0 1 \vdash 111q_0\bigtriangledown \vdash 11q_1 1 \vdash 11q_2 0. \tag{1.32}$$

Obliczenia możemy zapisać jako

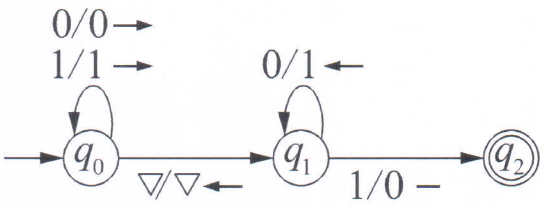
$$K_0 = q_0 111, \tag{1.33}$$
$$K_1 = 1q_0 11, \tag{1.34}$$
$$K_2 = 11q_0 1, \tag{1.35}$$
$$K_3 = 111q_0\bigtriangledown, \tag{1.36}$$
$$K_4 = 11q_1 1, \tag{1.37}$$
$$K_5 = 11q_2 0, \tag{1.38}$$
$$K_0 \vdash K_1 \vdash K_2 \vdash K_3 \vdash K_4 \vdash K_5. \tag{1.39}$$

Uwaga do zadania. Powyższe zadanie można zmodyfikować przyjmując funkcję poprzednika $p\colon \{0, 1, 10, 11, 100, \dots\} \to \{0, 1, 10, 11, 100, \dots\}$. **Taka zmiana wymaga modyfikacji podanej funkcji przejścia.**

Maszyna Turinga obliczająca poprzednik w alfabecie binarnym.

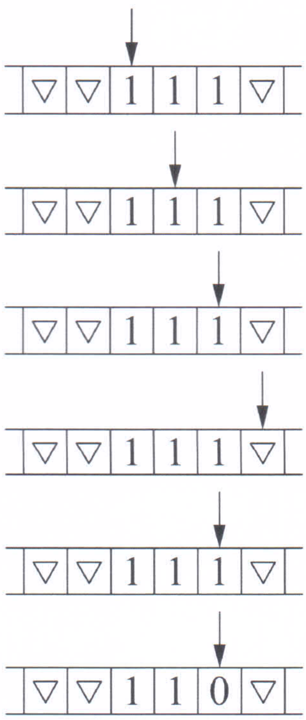
$$
\begin{array}{r}
10011 \\
- \quad 1 \\
\hline
10110
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
11\,2 \\
100 \\
- \quad 1 \\
\hline
11
\end{array}
\quad \text{pożyczka}
$$

Diagram przejść



Maszyna M zaczyna pracę z głowicą stojąc na najbardziej lewej cyfrze.

Obliczenia



$K_0 \quad q_0\,1\;1\;1 \vdash$

$K_1 \quad 1\;q_0\,1\;1 \vdash$

$K_2 \quad 1\;1\;q_0\,1 \vdash$

$K_3 \quad 1\;1\;1\;q_0\,\triangledown \vdash$

$K_4 \quad 1\;1\;q_1\,1 \vdash$

$K_5 \quad 1\;1\;q_2\,0$

$$K_0 \vdash K_1 \vdash K_2 \vdash K_3 \vdash K_4 \vdash K_5$$

Rysunek 1.2: Maszyna Turinga obliczająca poprzednik w alfabecie binarnym z zadania.

1.2.3 Maszyna Turinga obliczająca funkcję podłogi

Zad 1.6. Zaprojektuj maszynę Turinga obliczającą funkcję w alfabecie binarnym

$$f\colon \{10, 11, 100, \ldots\} \to \{10, 11, 100, \ldots\} \tag{1.40}$$

daną wzorem w zapisie dziesiętnym

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad n \geqslant 2 \tag{1.41}$$

lub w zapisie dwójkowym

$$f(n_{(2)}) = \left\lfloor \frac{n_{(2)}}{10} \right\rfloor, \quad n_{(2)} \geqslant 10. \tag{1.42}$$

Wykonaj obliczenia maszyny Turinga dla $q_0 111$.

Rozwiązanie.

(1.43)
$$M_n = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \triangledown, F) = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \triangledown\}, \delta, q_0, \triangledown, \{q_2\}).$$

Funkcja przejścia $\delta\colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, -, \rightarrow\}$ jest określona przez

$$\delta(q_0, 0) = (q_0, 0, \rightarrow), \tag{1.44}$$
$$\delta(q_0, 1) = (q_0, 1, \rightarrow), \tag{1.45}$$
$$\delta(q_0, \triangledown) = (q_1, \triangledown, \leftarrow), \tag{1.46}$$
$$\delta(q_1, 1) = (q_2, \triangledown, \leftarrow), \tag{1.47}$$
$$\delta(q_1, 0) = (q_2, \triangledown, \leftarrow). \tag{1.48}$$

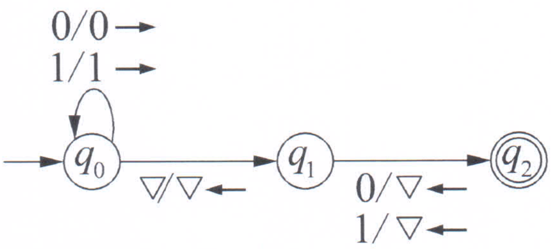
Przykładowe obliczenie maszyny M dla wejścia 111 ma postać

$$q_0 111 \vdash 1 q_0 11 \vdash 11 q_0 1 \vdash 111 q_0 \triangledown \vdash 11 q_1 1 \vdash 1 q_2 1. \tag{1.49}$$

Obliczenia możemy zapisać jako

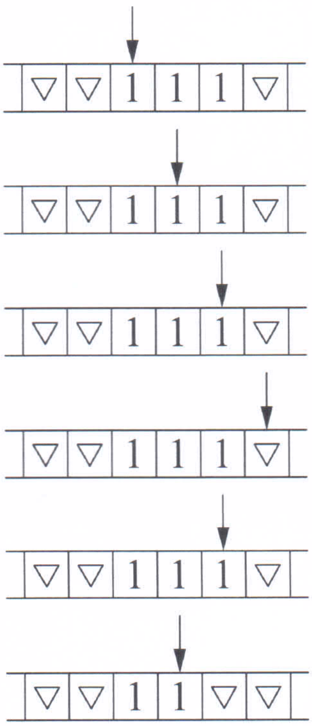
$$K_0 = q_0 111, \tag{1.50}$$
$$K_1 = 1 q_0 11, \tag{1.51}$$
$$K_2 = 11 q_0 1, \tag{1.52}$$
$$K_3 = 111 q_0 \triangledown, \tag{1.53}$$
$$K_4 = 11 q_1 1, \tag{1.54}$$
$$K_5 = 1 q_2 1. \tag{1.55}$$

Diagram przejść



Maszyna M zaczyna pracę z głowicą ustawioną na najbardziej lewej cyfrze.

Obliczenia



$K_0 \quad q_0\ 1\ 1\ 1 \vdash$

$K_1 \quad 1\ q_0\ 1\ 1 \vdash$

$K_2 \quad 1\ 1\ q_0\ 1 \vdash$

$K_3 \quad 1\ 1\ 1\ q_0\ \triangledown \vdash$

$K_4 \quad 1\ 1\ q_1\ 1 \vdash$

$K_5 \quad 1\ q_2\ 1$

Rysunek 1.3: Maszyna Turinga obliczająca $f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, n \geqslant 2$ w alfabecie binarnym z zadania.

1.3 Wielotaśmowa maszyna Turinga

1.3.1 Opis wielotaśmowej maszyny Turinga

Innym z wariantów maszyny Turinga jest maszyna, w której mamy wiele taśm i wiele głowic. **Wielotaśmowa maszyna Turinga** jest to maszyna, w której mamy k taśm i k głowic.

W wielotaśmowej maszynie Turinga rejestr stanu maszyny jest połączony z więcej niż jedną taśmą, a każda taśma ma własną niezależną głowicę do odczytu i zapisu.

Przeważnie **wielotaśmową maszynę Turinga** (k-taśmowa maszyna Turinga) M określa się jako siódemkę uporządkowaną

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) \tag{1.56}$$

z odpowiednio określoną funkcją przejścia.

Funkcja δ (**funkcja następnego ruchu** lub **funkcja przejścia**) jest dana przez

$$\delta \colon Q \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times D^k. \tag{1.57}$$

Zapiszmy

$$\delta(p, [x_1, x_2, \ldots, x_k]) = (q, [y_1, y_2, \ldots, y_k], [d_1, d_2, \ldots, d_k]), \tag{1.58}$$

gdzie stany $p, q \in Q$, a $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$, $[y_1, y_2, \ldots, y_k]$ to wektory odczytywany i zapisywany do komórek oraz $[d_1, d_2, \ldots, d_k]$ to kierunki przesunięcia głowic. W podstawowej wersji maszyny Turinga głowica może przesuwać się w lewo lub prawo, co oznaczmy przez $\leftarrow$ i $\rightarrow$, czyli $D = \{\leftarrow, \rightarrow\}$. W innej wersji maszyny Turinga głowica dodatkowo może pozostawać w miejscu, czyli zbiór $D = \{\leftarrow, -, \rightarrow\}$. Jeśli funkcja przejścia nie jest zdefiniowana na bieżącym stanie i bieżących symbolach taśm, to maszyna zatrzymuje się. Jeśli funkcja przejścia nie jest zdefiniowana na bieżącym stanie i bieżącym symbolu taśmy, to maszyna zatrzymuje się.

Nowy (rozszerzony) działający alfabet to

$$\Gamma' = \Gamma^k. \tag{1.59}$$

1.3.2 Konfiguracja wielotaśmowej maszyny Turinga

Zbiór konfiguracji

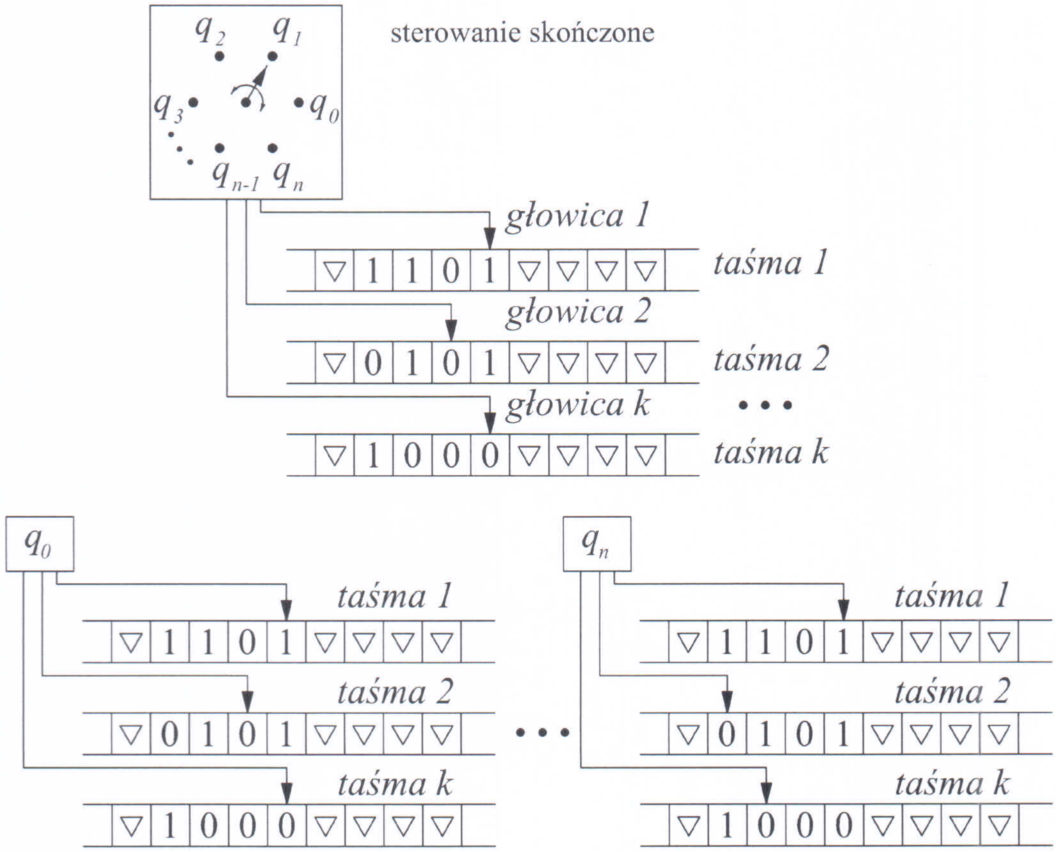
Zbiór konfiguracji wielotaśmowej maszyny Turinga jest określony przez

$$ZC = Q \times (\Gamma^* \circ \{\uparrow\} \circ \Gamma^*)^k = Q \times (\Gamma^* \uparrow \Gamma^*)^k \tag{1.60}$$

lub niektórzy podają

$$ZC = Q \times (\Gamma^* \circ \{\uparrow\} \circ \Gamma^+)^k = Q \times (\Gamma^* \uparrow \Gamma^+)^k. \tag{1.61}$$

Wielotaśmowa Maszyna Turinga.



Rysunek 1.4: Wielotaśmowa maszyna Turinga.

Zapis konfiguracji wielotaśmowej maszyny Turinga

Konfiguracja wielotaśmowej maszyny Turinga

$$K = (q, \alpha_1 \uparrow \beta_1, \ldots, \alpha_i \uparrow \beta_i, \ldots, \alpha_k \uparrow \beta_k) \tag{1.62}$$

opisuje, że maszyna jest w stanie q, zawartość i-tej taśmy jest równa $\alpha_i\beta_i$, a głowica taśmy i znajduje się nad symbolem $\beta_i[1]$.

Konfiguracja k-taśmowej maszyny Turinga może być też zapisana w postaci

$$K = (\alpha_1 q\beta_1, \ldots, \alpha_i q\beta_i, \ldots, \alpha_k q\beta_k), \tag{1.63}$$

gdzie stan q w zapisie oznacza położenie głowic do odczytu/zapisu na wszystkich k taśmach dla stanu q.

Konfiguracja wielotaśmowej maszyny Turinga z przesuwaniem taśm

Niektórzy autorzy stosują też inną notację, w której przesuwają taśmy w celu wyrównania położenia głowic, tak aby otrzymać konfigurację. Taką notację podamy za pomocą przykładów

$$K = \begin{bmatrix}1\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\\triangledown\end{bmatrix} q_4 \begin{bmatrix}\triangledown\\0\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\triangledown\\1\\\triangledown\end{bmatrix} \tag{1.64}$$

lub

$$K = \begin{bmatrix}\triangledown\\1\\\triangledown\end{bmatrix} q_2 \begin{bmatrix}\triangledown\\0\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}. \tag{1.65}$$

Te trzy powyższe notacje będziemy stosować na zajęciach.

Zapis konfiguracji wielotaśmowej maszyny Turinga niewykorzystywany na zajęciach

Niektórzy autorzy dla konfiguracji stosują notacje

$$K = (q\#\alpha_1 \uparrow \beta_1\# \ldots \#\alpha_i \uparrow \beta_i\# \ldots \#\alpha_k \uparrow \beta_k), \tag{1.66}$$

której nie będziemy stosować. Zapis podaję dla tych, którzy chcą studiować różne fachowe publikacje.

1.3.3 Wielotaśmowa maszyna Turinga działająca na systemie binarnym

Zad 1.7. Zaprojektuj 3-taśmową maszynę Turinga wykonującą dodawanie dwóch liczb w alfabecie binarnym. Wykonaj dodawanie 11 i 1010.

Rozwiązanie.

Musimy skonstruować $d\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taką, że

$$d(m_{(2)}, n_{(2)}) = m_{(2)} + n_{(2)}. \tag{1.67}$$

Przykładowe, pisemne obliczenia sumy liczb binarnych to

$$
\begin{array}{r} 111 \\ 1010011 \\ +\quad 101 \\ \hline 1011000 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} \\ 110100 \\ +\quad 1010 \\ \hline 111110 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 111 \\ 111 \\ +\quad 1 \\ \hline 1000 \end{array}
\tag{1.68}
$$

Na początku dwie wejściowe liczby są przechowywane w pierwszych dwóch taśmach. Dane wyjściowe są przechowywane w trzeciej taśmie.

W stanie q_0 maszyna przesuwa głowice dwóch taśm na prawe końce wejść. Po przesunięciu dwóch głowic na prawe końce wejść, głowice znajdują się na ostatnich cyfrach wejścia. Do faktycznego dodawania służą dwa stany q_1 i q_2. Stan q_1 odpowiada dodawaniu dwóch liczb bez przeniesienia z poprzedniego kroku, a stan q_2 odpowiada uwzględnieniu przeniesienia z ostatniego kroku.

Funkcja przejścia $\delta\colon Q \times \Gamma^3 \to Q \times \Gamma^3 \times \{\leftarrow, -, \rightarrow\}^3$ może być określona dla poszczególnych stanów bieżących.

Funkcja przejścia dla bieżącego stanu q_0

$$\delta(q_0, [\triangledown, 0, \triangledown]) = (q_0, [\triangledown, 0, \triangledown], [-, \rightarrow, -]), \tag{1.69}$$
$$\delta(q_0, [\triangledown, 1, \triangledown]) = (q_0, [\triangledown, 1, \triangledown], [-, \rightarrow, -]), \tag{1.70}$$
$$\delta(q_0, [0, \triangledown, \triangledown]) = (q_0, [0, \triangledown, \triangledown], [\rightarrow, -, -]), \tag{1.71}$$
$$\delta(q_0, [0, 0, \triangledown]) = (q_0, [0, 0, \triangledown], [\rightarrow, \rightarrow, -]), \tag{1.72}$$
$$\delta(q_0, [0, 1, \triangledown]) = (q_0, [0, 1, \triangledown], [\rightarrow, \rightarrow, -]), \tag{1.73}$$
$$\delta(q_0, [1, \triangledown, \triangledown]) = (q_0, [1, \triangledown, \triangledown], [\rightarrow, -, -]), \tag{1.74}$$
$$\delta(q_0, [1, 0, \triangledown]) = (q_0, [1, 0, \triangledown], [\rightarrow, \rightarrow, -]), \tag{1.75}$$
$$\delta(q_0, [1, 1, \triangledown]) = (q_0, [1, 1, \triangledown], [\rightarrow, \rightarrow, -]), \tag{1.76}$$
$$\delta(q_0, [\triangledown, \triangledown, \triangledown]) = (q_1, [\triangledown, \triangledown, \triangledown], [\leftarrow, \leftarrow, -]). \tag{1.77}$$
$$\tag{1.78}$$

Funkcja przejścia dla bieżącego stanu q_1

$$\delta(q_1, [\triangledown, 0, \triangledown]) = (q_1, [\triangledown, 0, 0], [-, \leftarrow, \leftarrow]), \tag{1.79}$$
$$\delta(q_1, [\triangledown, 1, \triangledown]) = (q_1, [\triangledown, 1, 1], [-, \leftarrow, \leftarrow]), \tag{1.80}$$
$$\delta(q_1, [0, \triangledown, \triangledown]) = (q_1, [0, \triangledown, 0], [\leftarrow, -, \leftarrow]), \tag{1.81}$$
$$\delta(q_1, [0, 0, \triangledown]) = (q_1, [0, 0, 0], [\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]), \tag{1.82}$$
$$\delta(q_1, [0, 1, \triangledown]) = (q_1, [0, 1, 1], [\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]), \tag{1.83}$$
$$\delta(q_1, [1, \triangledown, \triangledown]) = (q_1, [1, \triangledown, 1], [\leftarrow, -, \leftarrow]), \tag{1.84}$$
$$\delta(q_1, [1, 0, \triangledown]) = (q_1, [1, 0, 1], [\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]), \tag{1.85}$$
$$\delta(q_1, [1, 1, \triangledown]) = (q_2, [1, 1, 0], [\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]), \tag{1.86}$$
$$\delta(q_1, [\triangledown, \triangledown, \triangledown]) = (q_3, [\triangledown, \triangledown, \triangledown], [\rightarrow, \rightarrow, \rightarrow]). \tag{1.87}$$

Funkcja przejścia dla bieżącego stanu q_2

$$\delta(q_2, [\triangledown, 0, \triangledown]) = (q_1[\triangledown, 0, 1], [-, \leftarrow, \leftarrow]), \tag{1.88}$$
$$\delta(q_2, [\triangledown, 1, \triangledown]) = (q_2[\triangledown, 1, 0], [-, \leftarrow, \leftarrow]), \tag{1.89}$$
$$\delta(q_2, [0, \triangledown, \triangledown]) = (q_1[0, \triangledown, 1], [\leftarrow, -, \leftarrow]), \tag{1.90}$$
$$\delta(q_2, [0, 0, \triangledown]) = (q_1[0, 0, 1], [\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]), \tag{1.91}$$
$$\delta(q_2, [0, 1, \triangledown]) = (q_2[0, 1, 0], [\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]), \tag{1.92}$$
$$\delta(q_2, [1, \triangledown, \triangledown]) = (q_2[1, \triangledown, 0], [\leftarrow, -, \leftarrow]), \tag{1.93}$$
$$\delta(q_2, [1, 0, \triangledown]) = (q_2[1, 0, 0], [\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]), \tag{1.94}$$
$$\delta(q_2, [1, 1, \triangledown]) = (q_2[1, 1, 1], [\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]), \tag{1.95}$$
$$\delta(q_2, [\triangledown, \triangledown, \triangledown]) = (q_3[\triangledown, \triangledown, 1], [\rightarrow, \rightarrow, -]). \tag{1.96}$$

Funkcja przejścia $\delta\colon Q \times \Gamma^3 \to Q \times \Gamma^3 \times \{\leftarrow, -, \rightarrow\}^3$ może być określona przez tabele przejść dla poszczególnych stanów bieżących (tabele 1.1, 1.2, 1.3).

Rozważmy tabele

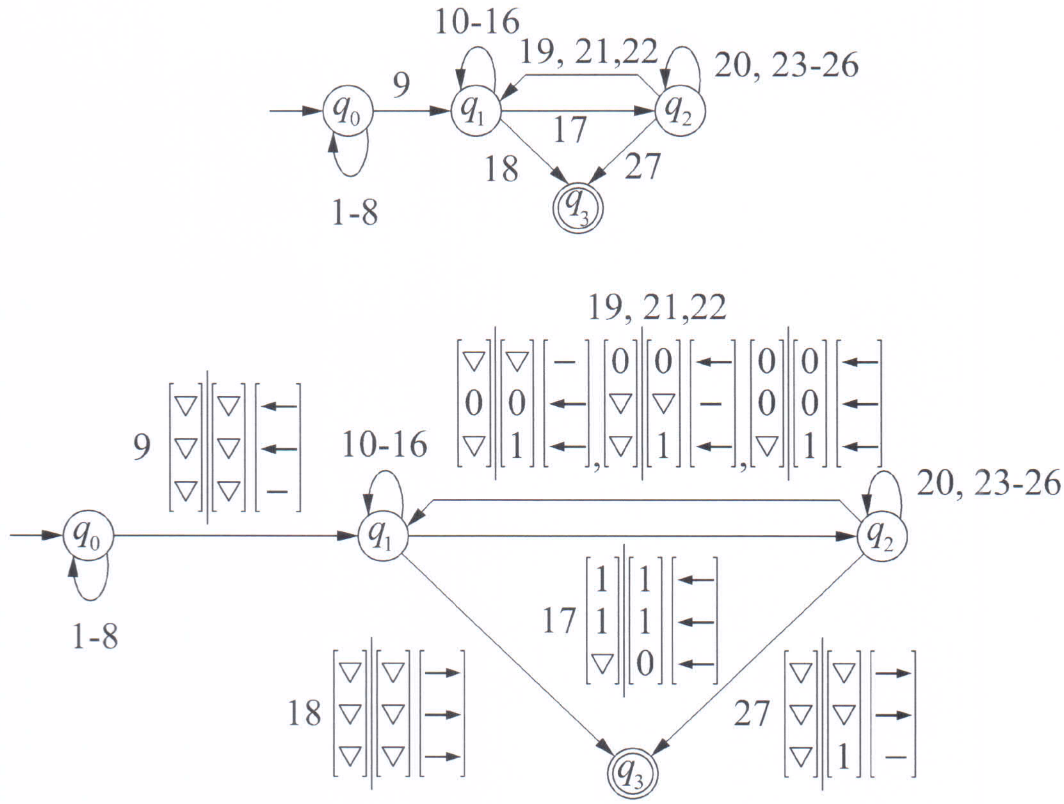
Nr	Stan bieżący	Czytany symbol	Nowy symbol	Nowy stan	Kierunki głowic
1	q_0	$[\triangledown, 0, \triangledown]$	$[\triangledown, 0, \triangledown]$	q_0	$[-, \rightarrow, -]$
2	q_0	$[\triangledown, 1, \triangledown]$	$[\triangledown, 1, \triangledown]$	q_0	$[-, \rightarrow, -]$
3	q_0	$[0, \triangledown, \triangledown]$	$[0, \triangledown, \triangledown]$	q_0	$[\rightarrow, -, -]$
4	q_0	$[0, 0, \triangledown]$	$[0, 0, \triangledown]$	q_0	$[\rightarrow, \rightarrow, -]$
5	q_0	$[0, 1, \triangledown]$	$[0, 1, \triangledown]$	q_0	$[\rightarrow, \rightarrow, -]$
6	q_0	$[1, \triangledown, \triangledown]$	$[1, \triangledown, \triangledown]$	q_0	$[\rightarrow, -, -]$
7	q_0	$[1, 0, \triangledown]$	$[1, 0, \triangledown]$	q_0	$[\rightarrow, \rightarrow, -]$
8	q_0	$[1, 1, \triangledown]$	$[1, 1, \triangledown]$	q_0	$[\rightarrow, \rightarrow, -]$
9	q_0	$[\triangledown, \triangledown, \triangledown]$	$[\triangledown, \triangledown, \triangledown]$	q_1	$[\leftarrow, \leftarrow, -]$

Tabela 1.1: Tabela przejścia dla bieżącego stanu q_0.

Nr	Stan bieżący	Czytany symbol	Nowy symbol	Nowy stan	Kierunki głowic
10	q_1	$[\triangledown, 0, \triangledown]$	$[\triangledown, 0, 0]$	q_1	$[-, \leftarrow, \leftarrow]$
11	q_1	$[\triangledown, 1, \triangledown]$	$[\triangledown, 1, 1]$	q_1	$[-, \leftarrow, \leftarrow]$
12	q_1	$[0, \triangledown, \triangledown]$	$[0, \triangledown, 0]$	q_1	$[\leftarrow, -, \leftarrow]$
13	q_1	$[0, 0, \triangledown]$	$[0, 0, 0]$	q_1	$[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]$
14	q_1	$[0, 1, \triangledown]$	$[0, 1, 1]$	q_1	$[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]$
15	q_1	$[1, \triangledown, \triangledown]$	$[1, \triangledown, 1]$	q_1	$[\leftarrow, -, \leftarrow]$
16	q_1	$[1, 0, \triangledown]$	$[1, 0, 1]$	q_1	$[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]$
17	q_1	$[1, 1, \triangledown]$	$[1, 1, 0]$	q_2	$[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]$
18	q_1	$[\triangledown, \triangledown, \triangledown]$	$[\triangledown, \triangledown, \triangledown]$	q_3	$[\rightarrow, \rightarrow, \rightarrow]$

Tabela 1.2: Tabela przejścia dla bieżącego stanu q_1.

3-taśmowa maszyna Turinga wykonująca dodawanie dwóch liczb binarnych.



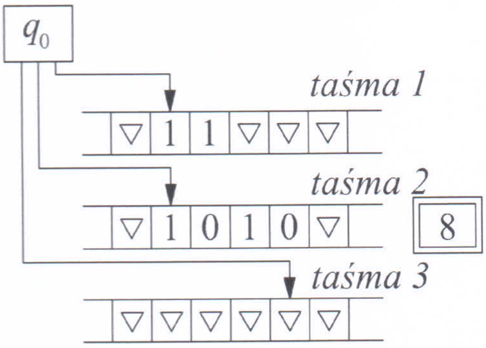
Rysunek 1.5: Wielotaśmowa maszyna Turinga z zadania.

Nr	Stan bieżący	Czytany symbol	Nowy symbol	Nowy stan	Kierunki głowic
19	q_2	$[\triangledown, 0, \triangledown]$	$[\triangledown, 0, 1]$	q_1	$[-, \leftarrow, \leftarrow]$
20	q_2	$[\triangledown, 1, \triangledown]$	$[\triangledown, 1, 0]$	q_2	$[-, \leftarrow, \leftarrow]$
21	q_2	$[0, \triangledown, \triangledown]$	$[0, \triangledown, 1]$	q_1	$[\leftarrow, -, \leftarrow]$
22	q_2	$[0, 0, \triangledown]$	$[0, 0, 1]$	q_1	$[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]$
23	q_2	$[0, 1, \triangledown]$	$[0, 1, 0]$	q_2	$[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]$
24	q_2	$[1, \triangledown, \triangledown]$	$[1, \triangledown, 0]$	q_2	$[\leftarrow, -, \leftarrow]$
25	q_2	$[1, 0, \triangledown]$	$[1, 0, 0]$	q_2	$[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]$
26	q_2	$[1, 1, \triangledown]$	$[1, 1, 1]$	q_2	$[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]$
27	q_2	$[\triangledown, \triangledown, \triangledown]$	$[\triangledown, \triangledown, 1]$	q_3	$[\rightarrow, \rightarrow, -]$

Tabela 1.3: Tabela przejścia dla bieżącego stanu q_2.

Obliczenia 3-taśmowej maszyny Turinga wykonująca dodawanie dwóch liczb binarnych.

1.

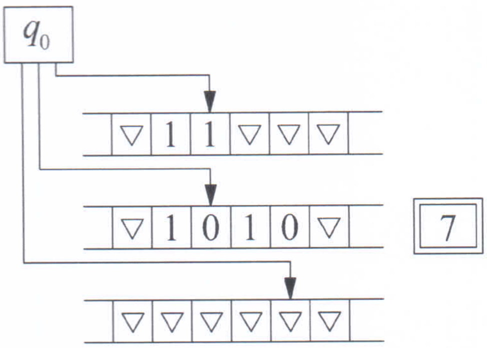


$$K_0=(q_0,\bigtriangledown\uparrow 11,\bigtriangledown\uparrow 1010,\bigtriangledown\uparrow\bigtriangledown)$$

$$K_0=q_0\begin{bmatrix}1\\1\\\bigtriangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\\bigtriangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bigtriangledown\\1\\\bigtriangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bigtriangledown\\0\\\bigtriangledown\end{bmatrix}$$

$$K_0=(q_0 11, q_0 1010, q_0\bigtriangledown)$$

2.

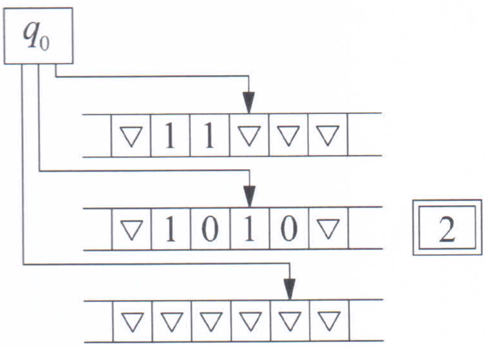


$$K_1=(q_0,1\uparrow 1,\ 1\uparrow 010,\bigtriangledown\uparrow\bigtriangledown)$$

$$K_1=\begin{bmatrix}1\\1\\\bigtriangledown\end{bmatrix}q_0\begin{bmatrix}1\\0\\\bigtriangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bigtriangledown\\1\\\bigtriangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bigtriangledown\\0\\\bigtriangledown\end{bmatrix}$$

$$K_1=(1q_0 1,\ 1q_0 010,\ q_0\bigtriangledown)$$

3.

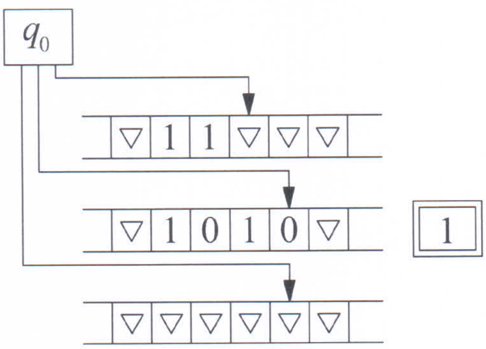


$$K_2=(q_0,11\uparrow\bigtriangledown,\ 10\uparrow 10,\bigtriangledown\uparrow\bigtriangledown)$$

$$K_2=\begin{bmatrix}1\\1\\\bigtriangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\\bigtriangledown\end{bmatrix}q_0\begin{bmatrix}\bigtriangledown\\1\\\bigtriangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bigtriangledown\\0\\\bigtriangledown\end{bmatrix}$$

$$K_2=(11q_0\bigtriangledown,\ 10q_0 10,\ q_0\bigtriangledown)$$

4.



$$K_3=(q_0,11\uparrow\bigtriangledown,\ 101\uparrow 0,\bigtriangledown\uparrow\bigtriangledown)$$

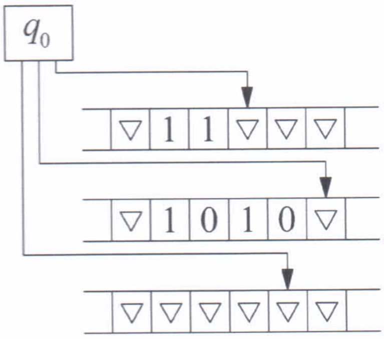
$$K_3=\begin{bmatrix}\bigtriangledown\\1\\\bigtriangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\\bigtriangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\bigtriangledown\end{bmatrix}q_0\begin{bmatrix}\bigtriangledown\\0\\\bigtriangledown\end{bmatrix}$$

$$K_3=(11q_0\bigtriangledown,\ 101\,q_0 0,\ q_0\bigtriangledown)$$

Rysunek 1.6: Wielotaśmowa maszyna Turinga z zadania.

Obliczenia 3-taśmowej maszyny Turinga wykonująca dodawanie dwóch liczb binarnych.

5.



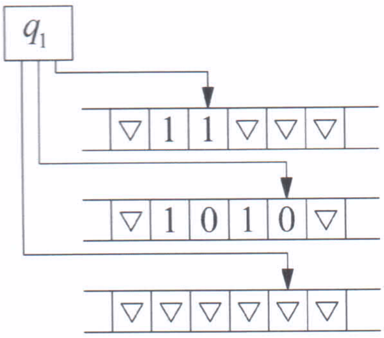
9

$$K_4=(q_0,11\uparrow\triangledown,\ 1010\uparrow\triangledown,\triangledown\uparrow\triangledown)$$

$$K_4=\begin{bmatrix}\triangledown\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\triangledown\\0\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\\triangledown\end{bmatrix}q_0\begin{bmatrix}\triangledown\\\triangledown\\\triangledown\end{bmatrix}$$

$$K_4=(11q_0\triangledown,\ 1010q_0\triangledown,\ q_0\triangledown)$$

6.



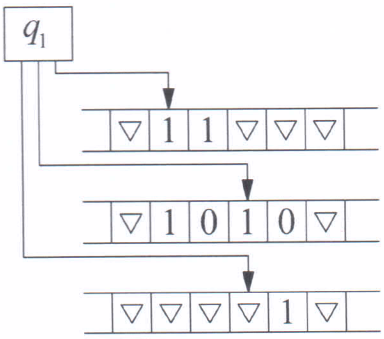
16

$$K_5=(q_1,1\uparrow1,\ 101\uparrow0,\triangledown\uparrow\triangledown)$$

$$K_5=\begin{bmatrix}\triangledown\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\triangledown\\0\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\triangledown\end{bmatrix}q_1\begin{bmatrix}1\\0\\\triangledown\end{bmatrix}$$

$$K_5=(1q_11,\ 101q_10,\ q_1\triangledown)$$

7.



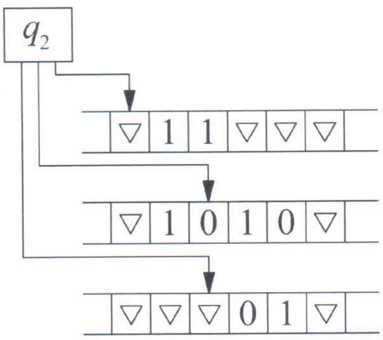
17

$$K_6=(q_1,\triangledown\uparrow11,\ 10\uparrow10,\triangledown\uparrow1)$$

$$K_6=\begin{bmatrix}\triangledown\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\triangledown\\0\\\triangledown\end{bmatrix}q_1\begin{bmatrix}1\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$K_6=(q_111,\ 10q_110,\ q_1\triangledown1)$$

8.



19

$$K_7=(q_2,\triangledown\uparrow\triangledown11,\ 1\uparrow010,\triangledown\uparrow\triangledown01)$$

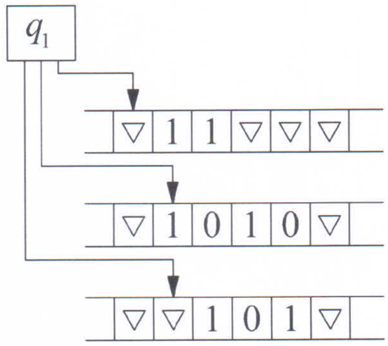
$$K_7=\begin{bmatrix}\triangledown\\1\\\triangledown\end{bmatrix}q_2\begin{bmatrix}\triangledown\\0\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$K_7=(q_2\triangledown11,\ 1q_2010,\ q_2\triangledown01)$$

Rysunek 1.7: Wielotaśmowa maszyna Turinga z zadania.

Obliczenia 3-taśmowej maszyny Turinga wykonująca dodawanie dwóch liczb binarnych.

9.



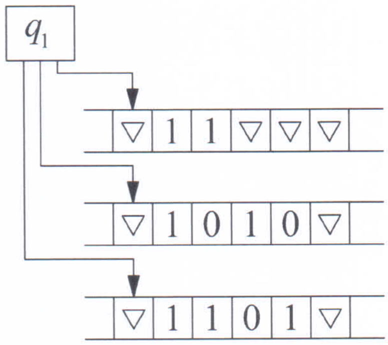
$K_8=(q_1, \triangledown\uparrow\triangledown 11, \triangledown\uparrow 1010, \triangledown\uparrow\triangledown 101)$

$\boxed{11}$

$$K_8 = q_1 \begin{bmatrix}\triangledown\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\triangledown\\0\\1\end{bmatrix}$$

$K_8=(q_1\triangledown 11, q_1 1010, q_1\triangledown 101)$

10.



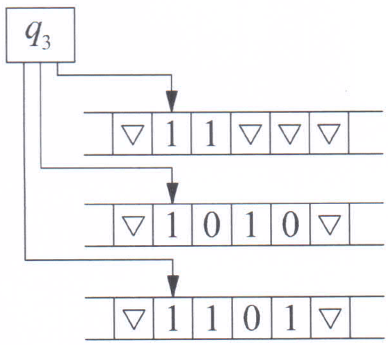
$K_9=(q_1, \triangledown\uparrow\triangledown 11, \triangledown\uparrow\triangledown 1010, \triangledown\uparrow\triangledown 1101)$

$\boxed{18}$

$$K_9 = q_1 \begin{bmatrix}\triangledown\\\triangledown\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\triangledown\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\triangledown\\0\\1\end{bmatrix}$$

$K_9=(q_1\triangledown 11, q_1\triangledown 1010, q_1\triangledown 1101)$

11.



$K_{10}=(q_3, \triangledown\uparrow 11, \triangledown\uparrow 1010, \triangledown\uparrow 1101)$

$$K_{10} = q_3 \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\triangledown\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\triangledown\\0\\1\end{bmatrix}$$

$K_{10}=(q_3 11, q_3 1010, q_3 1101)$

$$K_0 \vdash K_1 \vdash K_2 \vdash K_3 \vdash K_4 \vdash K_5 \vdash K_6 \vdash K_7 \vdash K_8 \vdash K_9 \vdash K_{10}$$

Rysunek 1.8: Wielotaśmowa maszyna Turinga z zadania.

Obliczmy sumę liczb 11 i 1010.

Konfiguracja początkowa to

$$K_0 = q_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \triangledown \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \triangledown \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix} \tag{1.97}$$

Dalsze obliczenia to

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} q_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \triangledown \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \triangledown \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix} \tag{1.98}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix} q_0 \begin{bmatrix} \triangledown \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \triangledown \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix} \tag{1.99}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} \triangledown \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} q_0 \begin{bmatrix} \triangledown \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix} \tag{1.100}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} \triangledown \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \triangledown \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix} q_0 \begin{bmatrix} \triangledown \\ \triangledown \\ \triangledown \end{bmatrix} \tag{1.101}$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} \triangledown \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \triangledown \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} q_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix} \tag{1.102}$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} \triangledown \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \triangledown \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix} q_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.103}$$

$$K_7 = \begin{bmatrix} \triangledown \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} q_2 \begin{bmatrix} \triangledown \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.104}$$

$$K_8 = q_1 \begin{bmatrix} \triangledown \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \triangledown \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.105}$$

$$K_9 = q_1 \begin{bmatrix} \triangledown \\ \triangledown \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \triangledown \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \triangledown \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.106}$$

$$K_{10} = q_3 \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\bigtriangledown\\1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\bigtriangledown\\0\\1\end{bmatrix}. \tag{1.107}$$

A więc

$$K_0 \vdash K_1 \vdash K_2 \vdash K_3 \vdash K_4 \vdash K_5 \vdash K_6 \vdash K_7 \vdash K_8 \vdash K_9 \vdash K_{10}. \tag{1.108}$$

Obliczenia możemy zapisać też jako

$$\begin{gathered} q_0 \begin{bmatrix}1\\1\\\bigtriangledown\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\0\\\bigtriangledown\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\bigtriangledown\\1\\\bigtriangledown\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\bigtriangledown\\0\\\bigtriangledown\end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix}1\\1\\\bigtriangledown\end{bmatrix} q_0 \begin{bmatrix}1\\0\\\bigtriangledown\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\bigtriangledown\\1\\\bigtriangledown\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\bigtriangledown\\0\\\bigtriangledown\end{bmatrix} \vdash \\ \begin{bmatrix}1\\1\\\bigtriangledown\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\0\\\bigtriangledown\end{bmatrix} q_0 \begin{bmatrix}\bigtriangledown\\1\\\bigtriangledown\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\bigtriangledown\\0\\\bigtriangledown\end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix}\bigtriangledown\\1\\\bigtriangledown\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\0\\\bigtriangledown\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\1\\\bigtriangledown\end{bmatrix} q_0 \begin{bmatrix}\bigtriangledown\\0\\\bigtriangledown\end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix}\bigtriangledown\\1\\\bigtriangledown\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\bigtriangledown\\0\\\bigtriangledown\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\1\\\bigtriangledown\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\0\\\bigtriangledown\end{bmatrix} q_0 \begin{bmatrix}\bigtriangledown\\\bigtriangledown\\\bigtriangledown\end{bmatrix} \vdash \\ \begin{bmatrix}\bigtriangledown\\1\\\bigtriangledown\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\bigtriangledown\\0\\\bigtriangledown\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\1\\\bigtriangledown\end{bmatrix} q_1 \begin{bmatrix}1\\0\\\bigtriangledown\end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix}\bigtriangledown\\1\\\bigtriangledown\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\bigtriangledown\\0\\\bigtriangledown\end{bmatrix} q_1 \begin{bmatrix}1\\1\\\bigtriangledown\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix}\bigtriangledown\\1\\\bigtriangledown\end{bmatrix} q_2 \begin{bmatrix}\bigtriangledown\\0\\\bigtriangledown\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \vdash \\ q_1 \begin{bmatrix}\bigtriangledown\\1\\\bigtriangledown\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\bigtriangledown\\0\\1\end{bmatrix} \vdash q_1 \begin{bmatrix}\bigtriangledown\\\bigtriangledown\\\bigtriangledown\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\bigtriangledown\\1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\bigtriangledown\\0\\1\end{bmatrix} \vdash q_3 \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\bigtriangledown\\1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\bigtriangledown\\0\\1\end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{1.109}$$

W innych zapisach mamy

$$K_0 = (q_0, \bigtriangledown \uparrow 11, \bigtriangledown \uparrow 1010, \bigtriangledown \uparrow \bigtriangledown), \tag{1.110}$$
$$K_1 = (q_0, 1 \uparrow 1, 1 \uparrow 010, \bigtriangledown \uparrow \bigtriangledown), \tag{1.111}$$
$$K_2 = (q_0, 11 \uparrow \bigtriangledown, 10 \uparrow 10, \bigtriangledown \uparrow \bigtriangledown), \tag{1.112}$$
$$K_3 = (q_0, 11 \uparrow \bigtriangledown, 101 \uparrow 0, \bigtriangledown \uparrow \bigtriangledown), \tag{1.113}$$
$$K_4 = (q_0, 11 \uparrow \bigtriangledown, 101 \uparrow 0, \bigtriangledown \uparrow \bigtriangledown), \tag{1.114}$$
$$K_5 = (q_1, 1 \uparrow 1, 101 \uparrow 0, \bigtriangledown \uparrow \bigtriangledown), \tag{1.115}$$
$$K_6 = (q_1, \uparrow 11, 10 \uparrow 10, \bigtriangledown \uparrow \bigtriangledown 1), \tag{1.116}$$
$$K_7 = (q_2, \bigtriangledown \uparrow \bigtriangledown 11, 1 \uparrow 010, \bigtriangledown \uparrow \bigtriangledown 01), \tag{1.117}$$
$$K_8 = (q_1, \bigtriangledown \uparrow \bigtriangledown 11, \bigtriangledown \uparrow 1010, \bigtriangledown \uparrow \bigtriangledown 101), \tag{1.118}$$
$$K_9 = (q_1, \bigtriangledown \uparrow \bigtriangledown 11, \bigtriangledown \uparrow \bigtriangledown 1010, \bigtriangledown \uparrow \bigtriangledown 1101), \tag{1.119}$$
$$K_{10} = (q_3, \bigtriangledown \uparrow 11, \bigtriangledown \uparrow 1010, \bigtriangledown \uparrow 1101). \tag{1.120}$$

A więc

$$K_0 \vdash K_1 \vdash K_2 \vdash K_3 \vdash K_4 \vdash K_5 \vdash K_6 \vdash K_7 \vdash K_8 \vdash K_9 \vdash K_{10}. \tag{1.121}$$

W innych zapisach mamy

$$K_0 = (q_0 11, q_0 1010, q_0 \triangledown), \tag{1.122}$$
$$K_1 = (1q_0 1, 1q_0 010, q_0 \triangledown), \tag{1.123}$$
$$K_2 = (11q_0 \triangledown, 10q_0 10, q_0 \triangledown), \tag{1.124}$$
$$K_3 = (11q_0 \triangledown, 101q_0 0, q_0 \triangledown), \tag{1.125}$$
$$K_4 = (11q_0 \triangledown, 1010q_0 \triangledown, q_0 \triangledown), \tag{1.126}$$
$$K_5 = (1q_1 1, 101q_1 0, q_1 \triangledown), \tag{1.127}$$
$$K_6 = (q_1 11, 10q_1 10, q_1 \triangledown 1), \tag{1.128}$$
$$K_7 = (q_2 \triangledown 11, 1q_2 010, q_2 \triangledown 01), \tag{1.129}$$
$$K_8 = (q_1 \triangledown 11, q_1 1010, q_1 \triangledown 101), \tag{1.130}$$
$$K_9 = (q_1 \triangledown 11, q_1 \triangledown 1010, q_1 \triangledown 1101), \tag{1.131}$$
$$K_{10} = (q_3 11, q_3 1010, q_3 1101). \tag{1.132}$$

A więc

$$K_0 \vdash K_1 \vdash K_2 \vdash K_3 \vdash K_4 \vdash K_5 \vdash K_6 \vdash K_7 \vdash K_8 \vdash K_9 \vdash K_{10}. \tag{1.133}$$

1.4 Wielościeżkowa maszyna Turinga

Jednym z wariantów maszyny Turinga jest maszyna, w której taśma może mieć wiele ścieżek. **Wielościeżkowa maszyna Turinga** posiada taśmę podzieloną na k ścieżek. Taśma może być obustronnie lub jednostronnie nieskończona.

Przeważnie **wielościeżkowa maszyna Turinga** (k-ścieżkowa maszyna Turinga) M jest określana jako siódemka uporządkowana

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \triangledown, F) \tag{1.134}$$

z odpowiednio określoną funkcją przejścia.

Funkcja δ (**funkcja następnego ruchu** lub **funkcja przejścia**) jest dana przez

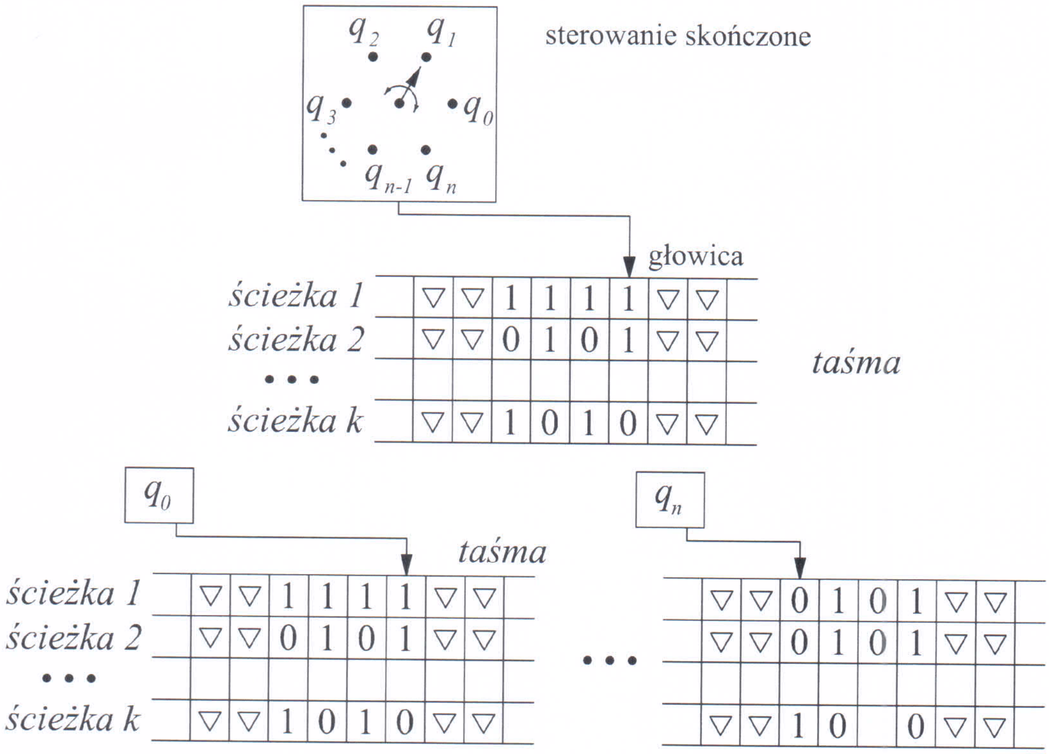
$$\delta \colon Q \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times D. \tag{1.135}$$

Zapiszmy

$$\delta(p, [x_1, x_2, \ldots, x_k]) = (q, [y_1, y_2, \ldots, y_k], d), \tag{1.136}$$

gdzie stany $p, q \in Q$, a $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$, $[y_1, y_2, \ldots, y_k]$ to wektory odczytywany i zapisywany do komórki oraz d to kierunek przesunięcia głowicy. W podstawowej wersji maszyny Turinga głowica może przesuwać się w lewo lub prawo, co oznaczmy przez $\leftarrow$ i $\rightarrow$, czyli $D = \{\leftarrow, \rightarrow\}$. W innej wersji maszyny Turinga głowica dodatkowo może pozostawać w miejscu, czyli zbiór $D = \{\leftarrow, -, \rightarrow\}$. Jeśli funkcja przejścia nie jest zdefiniowana na bieżącym stanie i bieżących symbolach taśm, to maszyna zatrzymuje się. Jeśli funkcja przejścia nie jest zdefiniowana na bieżącym stanie i bieżącym symbolu taśmy, to maszyna zatrzymuje się.

Wielościeżkowa maszyna Turinga.



Rysunek 1.9: Wielościeżkowa maszyna Turinga.

1.4.1 Wielościeżkowa maszyna Turinga działająca na systemie binarnym

Zad 1.8. Zaprojektuj 3-ścieżkową maszynę Turinga wykonującą dodawanie dwóch liczb w alfabecie binarnym.

Musimy skonstruować $d\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taką, że

$$d(m_{(2)}, n_{(2)}) = m_{(2)} + n_{(2)}. \tag{1.137}$$

Przykładowe, pisemne obliczenia sumy liczb binarnych

$$\begin{array}{rr} & 111 \\ & 1010011 \\ + & 101 \\ \hline & 1011000 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 110100 \\ + & 1010 \\ \hline & 111110 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 111 \\ & 111 \\ + & 1 \\ \hline & 1000 \end{array} \tag{1.138}$$

Na początku dwie wejściowe liczby są przechowywane w pierwszych dwóch ścieżkach. Dane wyjściowe są przechowywane w trzeciej ścieżce.

W stanie q_0 maszyna przesuwa głowicę na prawy koniec wejścia.

Do faktycznego dodawania służą dwa stany q_1 i q_2. Stan q_1 odpowiada dodawaniu dwóch liczb bez przeniesienia, a stan q_2 odpowiada uwzględnieniu pożyczki.

Funkcja przejścia $\delta\colon Q \times \Gamma^3 \to Q \times \Gamma^3 \times \{\leftarrow, -, \rightarrow\}$ może być określona dla poszczególnych stanów bieżących.

Funkcja przejścia dla bieżącego stanu q_0

(1.139) $$\delta(q_0, [0, 0, \bigtriangledown]) = (q_0, [0, 0, \bigtriangledown], \rightarrow),$$
(1.140) $$\delta(q_0, [0, 1, \bigtriangledown]) = (q_0, [0, 1, \bigtriangledown], \rightarrow),$$
(1.141) $$\delta(q_0, [1, 0, \bigtriangledown]) = (q_0, [1, 0, \bigtriangledown], \rightarrow),$$
(1.142) $$\delta(q_0, [1, 1, \bigtriangledown]) = (q_0, [1, 1, \bigtriangledown], \rightarrow),$$
(1.143) $$\delta(q_0, [\bigtriangledown, \bigtriangledown, \bigtriangledown]) = (q_1, [\bigtriangledown, \bigtriangledown, \bigtriangledown], \leftarrow).$$

Funkcja przejścia dla bieżącego stanu q_1

(1.144) $$\delta(q_1, [0, 0, \bigtriangledown]) = (q_1, [0, 0, 0], \leftarrow),$$
(1.145) $$\delta(q_1, [0, 1, \bigtriangledown]) = (q_1, [0, 1, 1], \leftarrow),$$
(1.146) $$\delta(q_1, [1, 0, \bigtriangledown]) = (q_1, [1, 0, 1], \leftarrow),$$
(1.147) $$\delta(q_1, [1, 1, \bigtriangledown]) = (q_2, [1, 1, 0], \leftarrow),$$
(1.148) $$\delta(q_1, [\bigtriangledown, \bigtriangledown, \bigtriangledown]) = (q_3, [\bigtriangledown, \bigtriangledown, \bigtriangledown], \rightarrow).$$

Funkcja przejścia dla bieżącego stanu q_2

(1.149) $$\delta(q_2, [0, 0, \bigtriangledown]) = (q_1, [0, 0, 1], \leftarrow),$$
(1.150) $$\delta(q_2, [0, 1, \bigtriangledown]) = (q_2, [0, 1, 0], \leftarrow),$$
(1.151) $$\delta(q_2, [1, 0, \bigtriangledown]) = (q_2, [1, 0, 0], \leftarrow),$$
(1.152) $$\delta(q_2, [1, 1, \bigtriangledown]) = (q_2, [1, 1, 1], \leftarrow),$$
(1.153) $$\delta(q_2, [\bigtriangledown, \bigtriangledown, \bigtriangledown]) = (q_3, [\bigtriangledown, \bigtriangledown, 1], -).$$

Funkcja przejścia $\delta\colon Q \times \Gamma^3 \rightarrow Q \times \Gamma^3 \times \{\leftarrow, -, \rightarrow\}$ może być określona przez tabele przejść dla poszczególnych stanów bieżących (tabele 1.4, 1.5, 1.6).

Rozważmy tabele

Nr	Stan bieżący	Czytany symbol	Nowy symbol	Nowy stan	Kierunek głowicy
1	q_0	$[0, 0, \bigtriangledown]$	$[0, 0, \bigtriangledown]$	q_0	$\rightarrow$
2	q_0	$[0, 1, \bigtriangledown]$	$[0, 1, \bigtriangledown]$	q_0	$\rightarrow$
3	q_0	$[1, 0, \bigtriangledown]$	$[1, 0, \bigtriangledown]$	q_0	$\rightarrow$
4	q_0	$[1, 1, \bigtriangledown]$	$[1, 1, \bigtriangledown]$	q_0	$\rightarrow$
5	q_0	$[\bigtriangledown, \bigtriangledown, \bigtriangledown]$	$[\bigtriangledown, \bigtriangledown, \bigtriangledown]$	q_1	$\leftarrow$

Tabela 1.4: Tabela przejścia dla bieżącego stanu q_0.

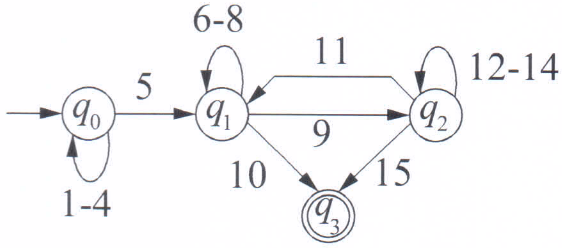
Nr	Stan bieżący	Czytany symbol	Nowy symbol	Nowy stan	Kierunek głowicy
6	q_1	$[0, 0, \bigtriangledown]$	$[0, 0, 0]$	q_1	$\leftarrow$
7	q_1	$[0, 1, \bigtriangledown]$	$[0, 1, 1]$	q_1	$\leftarrow$
8	q_1	$[1, 0, \bigtriangledown]$	$[1, 0, 1]$	q_1	$\leftarrow$
9	q_1	$[1, 1, \bigtriangledown]$	$[1, 1, 0]$	q_2	$\leftarrow$
10	q_1	$[\bigtriangledown, \bigtriangledown, \bigtriangledown]$	$[\bigtriangledown, \bigtriangledown, \bigtriangledown]$	q_3	$\rightarrow$

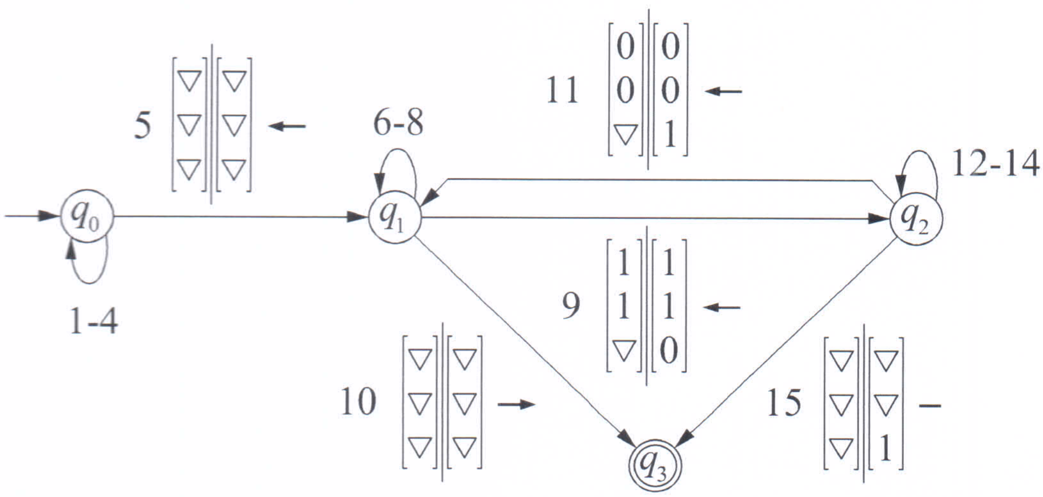
Tabela 1.5: Tabela przejścia dla bieżącego stanu q_1.

Nr	Stan bieżący	Czytany symbol	Nowy symbol	Nowy stan	Kierunek głowicy
11	q_2	$[0, 0, \bigtriangledown]$	$[0, 0, 1]$	q_1	$\leftarrow$
12	q_2	$[0, 1, \bigtriangledown]$	$[0, 1, 0]$	q_2	$\leftarrow$
13	q_2	$[1, 0, \bigtriangledown]$	$[1, 0, 0]$	q_2	$\leftarrow$
14	q_2	$[1, 1, \bigtriangledown]$	$[1, 1, 1]$	q_2	$\leftarrow$
15	q_2	$[\bigtriangledown, \bigtriangledown, \bigtriangledown]$	$[\bigtriangledown, \bigtriangledown, 1]$	q_3	$-$

Tabela 1.6: Tabela przejścia dla bieżącego stanu q_2.

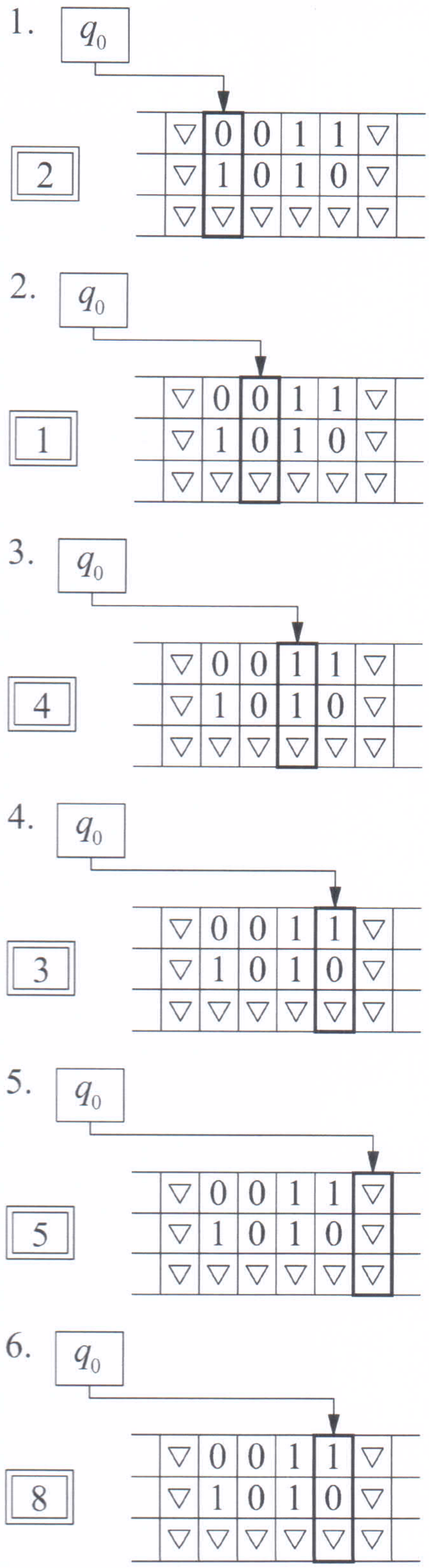
3-ścieżkowa maszyna Turinga wykonująca dodawanie dwóch liczb binarnych.





Rysunek 1.10: Wielościeżkowa maszyna Turinga z zadania.

Obliczenia 3-ścieżkowej maszyny Turinga wykonująca dodawanie dwóch liczb binarnych.



$$K_0 = q_0 \begin{bmatrix}0\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\\triangledown\end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\\triangledown\end{bmatrix} q_0 \begin{bmatrix}0\\0\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\\triangledown\end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\triangledown\end{bmatrix} q_0 \begin{bmatrix}1\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\\triangledown\end{bmatrix}$$

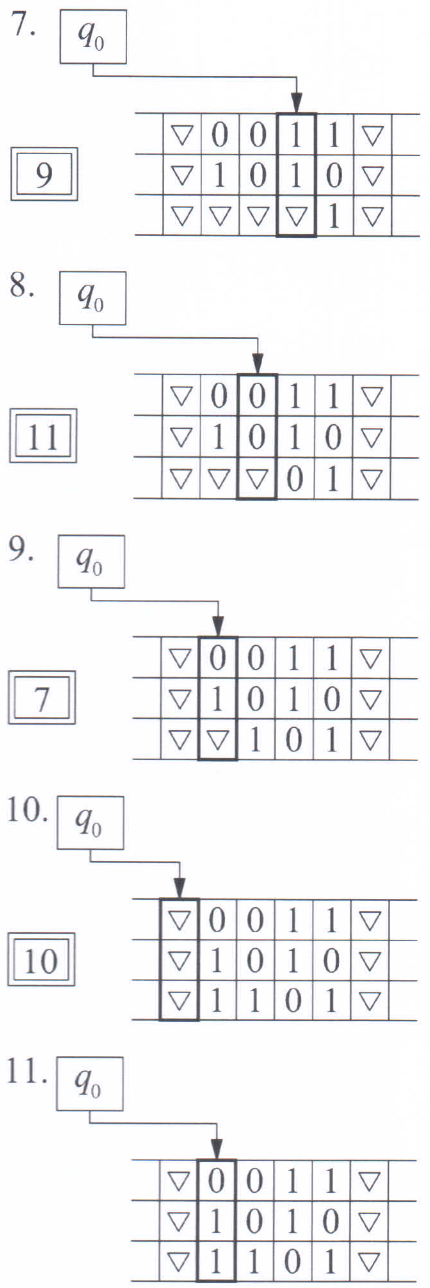
$$K_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\triangledown\end{bmatrix} q_0 \begin{bmatrix}1\\0\\\triangledown\end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix}0\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\\triangledown\end{bmatrix} q_0 \begin{bmatrix}\triangledown\\\triangledown\\\triangledown\end{bmatrix}$$

$$K_5 = \begin{bmatrix}0\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\triangledown\end{bmatrix} q_1 \begin{bmatrix}1\\0\\\triangledown\end{bmatrix}$$

Rysunek 1.11: Wielościeżkowa maszyna Turinga z zadania.

Obliczenia 3-ścieżkowej maszyny Turinga wykonująca dodawanie dwóch liczb binarnych.



$$K_6 = \begin{bmatrix}0\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\triangledown\end{bmatrix} q_1 \begin{bmatrix}1\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$K_7 = \begin{bmatrix}0\\1\\\triangledown\end{bmatrix} q_2 \begin{bmatrix}0\\0\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$K_8 = q_1 \begin{bmatrix}0\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$K_9 = q_1 \begin{bmatrix}\triangledown\\\triangledown\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$K_{10} = q_3 \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$K_0 \vdash K_1 \vdash K_2 \vdash K_3 \vdash K_4 \vdash K_5 \vdash K_6 \vdash K_7 \vdash K_8 \vdash K_9 \vdash K_{10}$$

Rysunek 1.12: Wielościeżkowa maszyna Turinga z zadania.

Obliczenia sumy liczb 11 i 1010 przez 3-ścieżkową maszynę Turinga przebiegają zgodnie z

(1.154) $$K_0 = q_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix}$$

(1.155) $$K_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} q_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix}$$

(1.156) $$K_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix} q_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix}$$

(1.157) $$K_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} q_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix}$$

(1.158) $$K_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix} q_0 \begin{bmatrix} \triangledown \\ \triangledown \\ \triangledown \end{bmatrix}$$

(1.159) $$K_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} q_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix}$$

(1.160) $$K_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix} q_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1.161) $$K_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} q_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1.162) $$K_8 = q_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1.163) $$K_9 = q_1 \begin{bmatrix} \triangledown \\ \triangledown \\ \triangledown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$K_{10} = q_3 \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \tag{1.164}$$

A więc

$$K_0 \vdash K_1 \vdash K_2 \vdash K_3 \vdash K_4 \vdash K_5 \vdash K_6 \vdash K_7 \vdash K_8 \vdash K_9 \vdash K_{10}. \tag{1.165}$$

Obliczenia sumy liczb 11 i 1010 przez 3-ścieżkową maszynę Turinga można też zapisać zgodnie z

(1.166)

$$q_0 \begin{bmatrix}0\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\\triangledown\end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix}0\\1\\\triangledown\end{bmatrix} q_0 \begin{bmatrix}0\\0\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\\triangledown\end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix}0\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\triangledown\end{bmatrix} q_0 \begin{bmatrix}1\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\\triangledown\end{bmatrix} \vdash$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\triangledown\end{bmatrix} q_0 \begin{bmatrix}1\\0\\\triangledown\end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix}0\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\\triangledown\end{bmatrix} q_0 \begin{bmatrix}\triangledown\\\triangledown\\\triangledown\end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix}0\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\triangledown\end{bmatrix} q_1 \begin{bmatrix}1\\0\\\triangledown\end{bmatrix} \vdash$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\triangledown\end{bmatrix} q_1 \begin{bmatrix}1\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix}0\\1\\\triangledown\end{bmatrix} q_2 \begin{bmatrix}0\\0\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \vdash q_1 \begin{bmatrix}0\\1\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \vdash$$

$$q_1 \begin{bmatrix}\triangledown\\\triangledown\\\triangledown\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \vdash q_3 \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}.$$