WSTĘP DO TEORII OBLICZALNOŚCI

Laboratorium 4

OPRACOWANIE

KRZYSZTOF BORZĘCKI

Laboratorium 4/15

Laboratorium 4. Maszyny Turinga działające na zbiorach słów

1.1 Wyrażenia regularne

1.1.1 Definicja wyrażeń regularnych

Składnia wyrażeń regularnych określa, jak wyglądają wyrażenia regularne.

Definicja 1.1. Niech Σ będzie alfabetem. Wyrażenia regularne nad Σ i zbiory przez nie reprezentowane definiujemy rekursywnie w następujący sposób:

1. $\varnothing$ jest wyrażeniem regularnym reprezentującym zbiór pusty.
2. ε jest wyrażeniem regularnym reprezentującym zbiór $\{\varepsilon\}$.
3. Dla każdego $a \in \Sigma$, $\mathbf{a}$ jest wyrażeniem regularnym reprezentującym zbiór $\{a\}$.
4. Jeżeli r i s są wyrażeniami regularnymi reprezentującymi, odpowiednio, języki R i S, to
   (a) suma $r+s$ jest wyrażeniem regularnym reprezentującym zbiór $R \cup S$
   (b) konkatenacja rs jest wyrażeniem regularnym reprezentującym zbiór RS
   (c) domknięcie Kleene'ego r^* jest wyrażeniem regularnym reprezentującym zbiór R^*
   (d) grupowanie (r) jest wyrażeniem regularnym

Jeśli $\mathbf{r}$ jest wyrażeniem regularnym, to $\mathbf{r}^i$ oznacza $\mathbf{rr}\ldots\mathbf{r}$ (i razy).
Możemy skracać wyrażenia $\mathbf{rr}^*$ do $\mathbf{r}^+$.
Priorytety operatorów:

1. * ma wyższy priorytet niż złożenie lub +
2. złożenie ma wyższy priorytet niż + .

1.1.2 Definicja języka określanego przez wyrażenie regularne

Każde wyrażenie regularne definiuje pewien język formalny.
Język definiowany przez wyrażenie regularne jest definiowany indukcyjnie.

Niech $L(\mathbf{r})$ oznacza **język definiowany przez r**.

Pamiętamy, że **język formalny** to zbiór słów (łańcuchów).

Semantyka wyrażeń regularnych precyzyjnie definiuje formalne znaczenie składni wyrażeń regularnych.

Definicja 1.2. Język określający wyrażenie regularne definiujemy przez indukcję.

Podstawa indukcji:

1. $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$.
2. $L(\varnothing) = \varnothing$.
3. Dla każdego a z alfabetu zachodzi $L(\mathbf{a}) = \{a\}$.

Krok indukcyjny:

Jeżeli $\mathbf{r}, \mathbf{s}$ są wyrażeniami regularnymi, to

1. $L(\mathbf{r} + \mathbf{s}) = L(r) \cup L(s)$ (suma języków)
2. $L(\mathbf{r}^*) = (L(\mathbf{r}))^*$ (domknięcie Kleene'ego języka)
3. $L(\mathbf{rs}) = \{xy : x \in L(r) \wedge y \in L(s)\}$ (konkatenacja języków)
4. $L((\mathbf{r})) = L(\mathbf{r})$ (język grupowania)

Zad 1.1. Co oznaczają wyrażenia: $(\mathbf{aa}+\mathbf{bb})$, $(\mathbf{aa}+\mathbf{bb})^*$, $\mathbf{a}+\mathbf{ba}^*$, $(\mathbf{b}^*\mathbf{ab}^*\mathbf{ab}^*)^* + \mathbf{b}^*$, $(\mathbf{b} + \mathbf{ab})^*(\mathbf{a} + \varepsilon)$.

Rozwiązanie.

Wyrażenie

$$(\mathbf{aa} + \mathbf{bb}) \tag{1.1}$$

opisuje dwa łańcuchy aa i bb, czyli

$$\{aa, bb\}. \tag{1.2}$$

Wyrażenie

$$(\mathbf{aa} + \mathbf{bb})^* \tag{1.3}$$

opisuje łańcuchy składające się z aa i/lub bb skonkatenowanych razem, czyli

$$\{\varepsilon, aa, bb, aaaa, aabb, bbaa, bbbb, \ldots\}. \tag{1.4}$$

Wyrażenie

$$\mathbf{a} + \mathbf{ba}^* \tag{1.5}$$

opisuje łańcuchy składające się z a lub łańcuchy zawierające jedno b, po którym następuje zero lub więcej a, czyli

$$\{a, b, ba, baa, baaa, \ldots\}. \tag{1.6}$$

Wyrażenie

$$(\mathbf{b}^*\mathbf{ab}^*\mathbf{ab}^*)^* + \mathbf{b}^* \tag{1.7}$$

opisuje zbiór wszystkich łańcuchów zawierające parzystą liczbę a, czyli

$$\{\varepsilon, aa, bb, aab, aba, baa, bbb, aaaa, aabb, abab, abba, baab, baba, bbaa, bbbb, \ldots\}. \tag{1.8}$$

Wyrażenie

$$(\mathbf{b} + \mathbf{ab})^*(\mathbf{a} + \varepsilon) \tag{1.9}$$

opisuje zbiór wszystkich łańcuchów nie zawierających aa, czyli

$$\{\varepsilon, a, b, ab, ba, bb, aba, abb, bab, bba, bbb, \ldots\}. \tag{1.10}$$

Zad 1.2. Co oznaczają wyrażenia: $(\mathbf{00}+\mathbf{01}+\mathbf{10}+\mathbf{11})$, $(\mathbf{0}+\varepsilon)(\mathbf{1}+\varepsilon)$, $(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*$, $(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{00}(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*$, $(\mathbf{0}+\mathbf{10})^*$, $(\mathbf{0}+\varepsilon)(\mathbf{0}+\mathbf{10})^*$, $\mathbf{00}^*\mathbf{11}^*\mathbf{22}^*$?

Rozwiązanie.

Wyrażenie

$$(\mathbf{00} + \mathbf{01} + \mathbf{10} + \mathbf{11}) \tag{1.11}$$

opisuje cztery łańcuchy 00, 01, 10 i 11, czyli

$$\{00, 01, 10, 11\}. \tag{1.12}$$

Wyrażenie

$$(\mathbf{0} + \varepsilon)(\mathbf{1} + \varepsilon) \tag{1.13}$$

opisuje cztery łańcuchy ε, 0, 1 i 01, czyli

$$\{\varepsilon, 0, 1, 01\}. \tag{1.14}$$

Wyrażenie

$$(\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \tag{1.15}$$

opisuje zbiór wszystkich łańcuchów złożonych z zer i jedynek, czyli

$$\{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \ldots\}. \tag{1.16}$$

Wyrażenie

$$(\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\mathbf{00}(\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \tag{1.17}$$

opisuje zbiór wszystkich łańcuchów zer i jedynek, zawierających przynajmniej dwa kolejne zera, czyli

$$\{00, 000, 001, 100, 0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 1100, 1000, 1001, \ldots\}. \tag{1.18}$$

Wyrażenie

$$(\mathbf{0} + \mathbf{10})^* \tag{1.19}$$

reprezentuje zbiór wszystkich łańcuchów zer i jedynek, które rozpoczynają się od jedynki i nie zawierają dwóch kolejnych zer.

Wyrażenie

$$(\mathbf{0} + \varepsilon)(\mathbf{0} + \mathbf{10})^* \tag{1.20}$$

opisuje zbiór wszystkich łańcuchów zer i jedynek, dowolnego kształtu, ale nie zawierających dwóch kolejnych zer.

Wyrażenie

$$\mathbf{00}^*\mathbf{11}^*\mathbf{22}^* \tag{1.21}$$

opisuje te spośród łańcuchów należących do $\mathbf{0}^*\mathbf{1}^*\mathbf{2}^*$, które zawierają przynajmniej po jednym egzemplarzu każdego z symboli. Wyrażenie $\mathbf{00}^*\mathbf{11}^*\mathbf{22}^*$ można zapisać zgodnie z

$$\mathbf{00}^*\mathbf{11}^*\mathbf{22}^* = \mathbf{0}^+\mathbf{1}^+\mathbf{2}^+. \tag{1.22}$$

Zad 1.3. Niech $\Sigma = \{x, y, z\}$. Dla składni $\mathbf{x}^* + \mathbf{y}^*$, $\mathbf{x}(\mathbf{x}^* + \mathbf{y}^* + \mathbf{z}^*)$, $\mathbf{xz}^*\mathbf{x}$ wyznacz semantykę języków i opisz słownie języki.

Rozwiązanie.

Język wszystkich słów złożonych z dowolnej liczby symboli x lub z dowolnej liczby symboli y to

$$L(\mathbf{x}^* + \mathbf{y}^*) = \{\mathbf{x}\}^* \cup \{\mathbf{y}\}^*. \tag{1.23}$$

Język wszystkich słów zaczynających się od x to

$$L(\mathbf{x}(\mathbf{x}^* + \mathbf{y}^* + \mathbf{z}^*)) = \{xu : u \in \Sigma^*\}. \tag{1.24}$$

Język wszystkich słów zaczynających się od x i kończących się na x oraz zawierających dowolną liczbę symboli z pomiędzy to

$$L(\mathbf{xz}^*\mathbf{x}) = \{xux : u \in \{z\}^*\}. \tag{1.25}$$

Suma dwóch języków formalnych.

Suma $R \cup S$ dwóch języków formalnych R i S to zbiór elementów, które należą do języka R lub S lub do obu.

Zad 1.4. Dla języków $R = \{a, ba\}$ i $S = \{ab, ba, b\}$ wyznacz $R \cup S$.

Rozwiązanie.

Wyznaczamy

$$R \cup S = \{a, ba\} \cup \{ab, ba, b\} = \{a, ab, ba, b\} \tag{1.26}$$

Zad 1.5. Dla języków $R = \{001, 10, 111\}$ i $S = \{\varepsilon, 001\}$ wyznacz $R \cup S$.

Rozwiązanie.

Wyznaczamy

$$R \cup S = \{001, 10, 111\} \cup \{\varepsilon, 001\} = \{\varepsilon, 10, 001, 111\}. \tag{1.27}$$

Zad 1.6. Niech $\Sigma = \{a, b\}$. Zaprojektuj maszynę Turinga akceptującą język

$$L((\mathbf{a}+\mathbf{b})^*\mathbf{aa}(\mathbf{a}+\mathbf{b})^*). \tag{1.28}$$

Wykonaj obliczenia maszyny dla konfiguracji początkowej $K_0 = q_0 \bigtriangledown aabb$.
Rozwiązanie.

$$\begin{aligned} M &= (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) = \\ &= (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \{a, b, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \bigtriangledown, \{q_3\}). \end{aligned} \tag{1.29}$$

Funkcja przejścia $\delta\colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$ jest określona przez

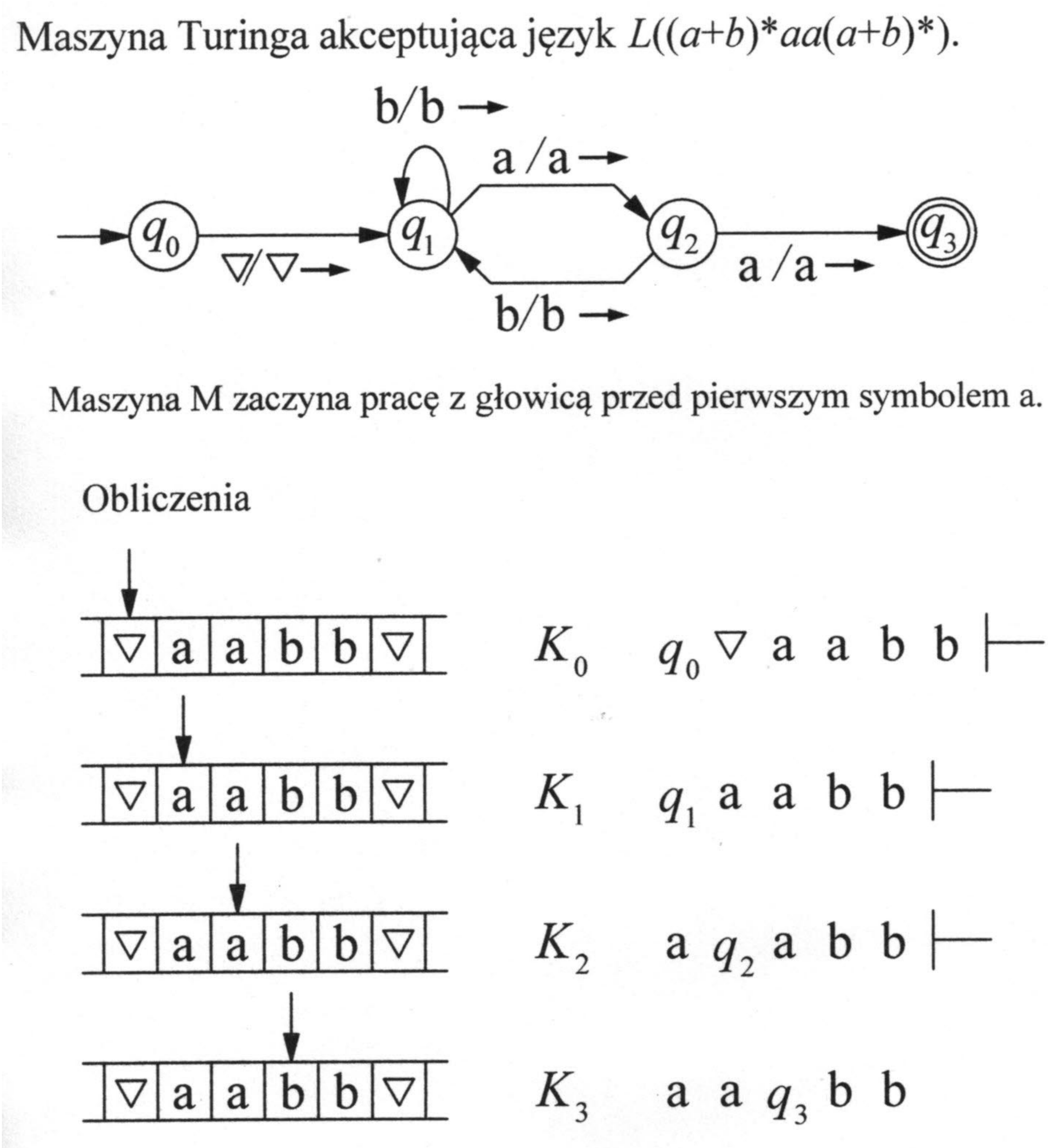
$$\delta(q_0, \bigtriangledown) = (q_1, \bigtriangledown, \rightarrow), \tag{1.30}$$
$$\delta(q_1, a) = (q_2, a, \rightarrow), \tag{1.31}$$
$$\delta(q_1, b) = (q_1, b, \rightarrow), \tag{1.32}$$
$$\delta(q_2, b) = (q_1, b, \rightarrow), \tag{1.33}$$
$$\delta(q_2, a) = (q_3, a, \rightarrow). \tag{1.34}$$

Obliczenia możemy zapisać jako

$$K_0 = q_0 \bigtriangledown aabb, \tag{1.35}$$
$$K_1 = q_1 aabb, \tag{1.36}$$
$$K_2 = a q_2 abb, \tag{1.37}$$
$$K_3 = aa q_3 bb. \tag{1.38}$$

A więc

$$K_0 \vdash K_1 \vdash K_2 \vdash K_3. \tag{1.39}$$



Maszyna Turinga akceptująca język $L((a+b)^*aa(a+b)^*)$.

Maszyna M zaczyna pracę z głowicą przed pierwszym symbolem a.

Obliczenia

$K_0 \quad q_0 \triangledown\ a\ a\ b\ b \vdash$

$K_1 \quad q_1\ a\ a\ b\ b \vdash$

$K_2 \quad a\ q_2\ a\ b\ b \vdash$

$K_3 \quad a\ a\ q_3\ b\ b$

Rysunek 1.1: Maszyna Turinga akceptująca język $L((\mathbf{a}+\mathbf{b})^*\mathbf{aa}(\mathbf{a}+\mathbf{b})^*)$.

Zad 1.7. Niech $\Sigma = \{a, b\}$. Zaprojektuj maszynę Turinga akceptującą język

$$L((\mathbf{a}+\mathbf{b})^*\mathbf{ab}(\mathbf{a}+\mathbf{b})^* + (\mathbf{a}+\mathbf{b})^*\mathbf{ba}), \tag{1.40}$$

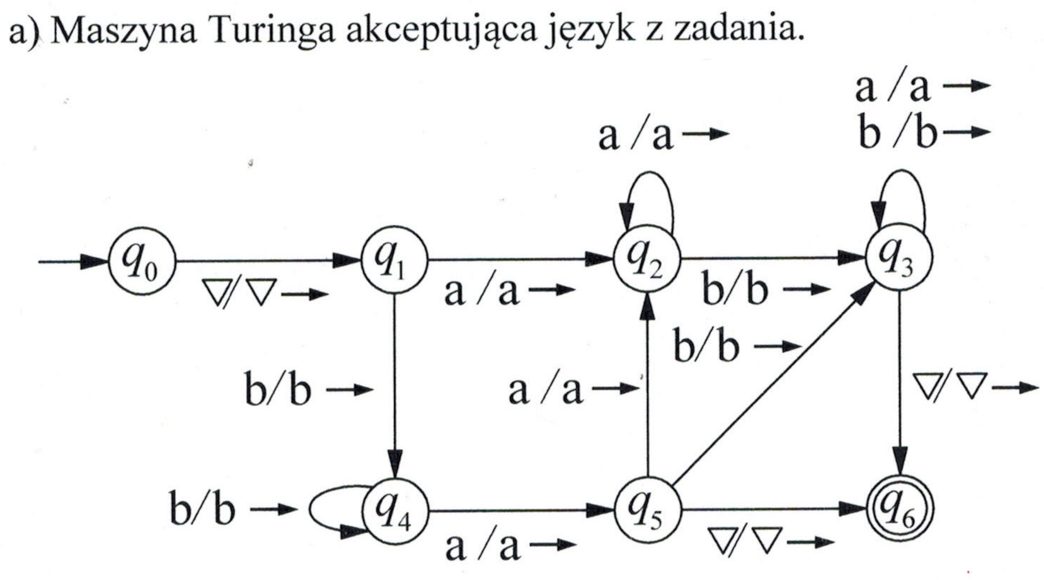
czyli

$$L = \{a, b\}^*\{ab\}\{a, b\}^* \cup \{a, b\}^*\{ba\}. \tag{1.41}$$

Zakładamy, że głowica dla łańcucha wejściowego jest ustawiona przed komórką z symbolem najbardziej po lewej.

Rozwiązanie.

Stwierdzamy, że język opisany w zadaniu, to język wszystkich łańcuchów nad $\Sigma^* = \{a, b\}^*$, które zawierają podłańcuch ab lub takich, które są zakończone na ba. Diagram maszyny przedstawiono na dołączonym rysunku.



Rysunek 1.2: Maszyna Turinga akceptująca język $L = \{a, b\}^*\{ab\}\{a, b\}^* \cup \{a, b\}^*\{ba\}$.

1.2 Wielogłowicowa maszyna Turinga

1.2.1 Opis wielogłowicowej maszyny Turinga

Przeważnie **wielogłowicowa maszyna Turinga** (k-głowicowa maszyna Turinga) M jest określana jako siódemka uporządkowana

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) \tag{1.42}$$

z odpowiednio określoną funkcją przejścia.

Funkcja δ (**funkcja następnego ruchu** lub **funkcja przejścia**) jest dana przez

$$\delta\colon Q \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times D^k, \tag{1.43}$$

gdzie D jest zbiorem możliwych przemieszczeń głowicy. Zapiszmy

$$\delta(p, [x_1, x_2, \ldots, x_k]) = (q, [y_1, y_2, \ldots, y_k], [d_1, d_2, \ldots, d_k]), \tag{1.44}$$

gdzie stany $p, q \in Q$, a $[x_1, x_2, \ldots, x_k], [y_1, y_2, \ldots, y_k]$ to wektory odczytywany i zapisywany do komórek oraz $[d_1, d_2, \ldots, d_k]$ to kierunki przesunięcia głowic. W podstawowej wersji maszyny Turinga głowica może przesuwać się w lewo lub prawo, co oznaczmy przez $\leftarrow$ i $\rightarrow$, czyli $D = \{\leftarrow, \rightarrow\}$. W innej wersji maszyny Turinga głowica dodatkowo może stać w miejscu, co oznaczmy przez $-$, czyli zbiór $D = \{\leftarrow, -, \rightarrow\}$. Jeśli funkcja przejścia nie jest zdefiniowana na bieżącym stanie i bieżącym symbolu taśmy, to maszyna zatrzymuje się.

1.2.2 Konfiguracja wielogłowicowej maszyny Turinga

Aby wskazać położenie k głowic, przyjmujemy konwencję raportowania indeksu głowicy pod symbolem, nad którym się znajduje.

Konfiguracja będzie reprezentowana przez

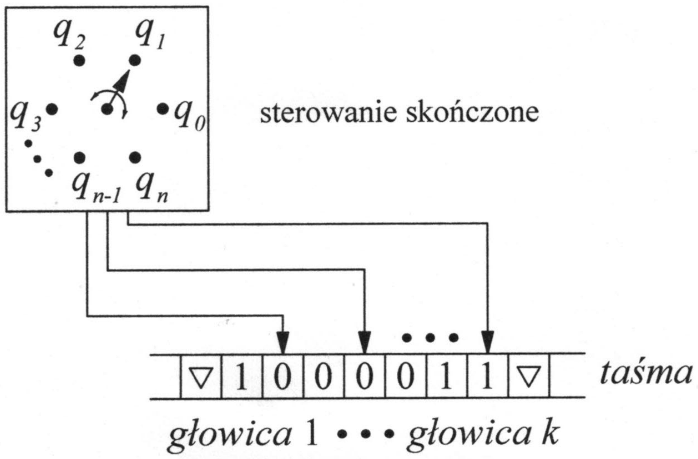
$$K = (q, x_1 \underset{1}{x_2} x_3 x_4 \underset{2}{x_5} x_6 x_7 x_8 x_9 \underset{\cdots}{\ldots} x_{n-2} \underset{k}{x_{n-1}} x_n). \tag{1.45}$$

Dla przykładu, w zadaniu rozpoznania wielogłowicowego maszyna z 4 głowicami, która działa na łańcuchu $aabbccddee$ i jest w stanie q_3 oraz ma głowice w położeniach 3, 5, 5, 9, konfiguracja będzie wyglądać następująco

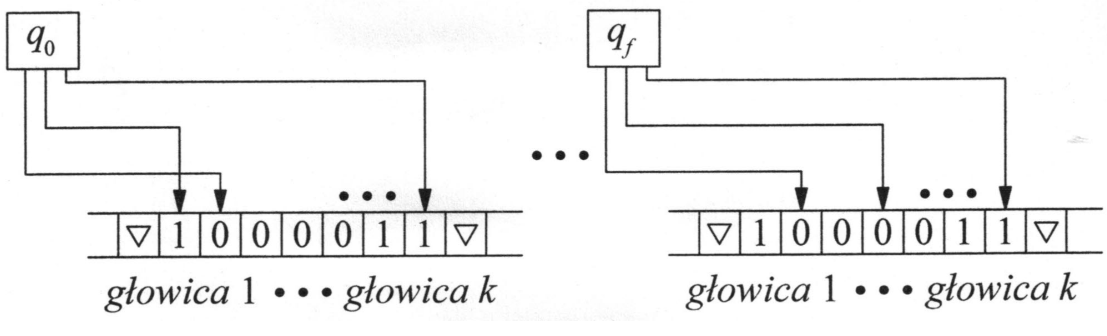
$$K = (q_3, aa\underset{1}{b}b \underset{2,3}{c} cdd\underset{4}{e}e). \tag{1.46}$$

Jak zwykle, o dwóch konfiguracjach K_1 i K_2 mówi się, że następują po sobie, jeśli możliwe jest przejście z jednej konfiguracji do następnej w jednym cyklu roboczym modelu obliczeniowego. Zatem obie konfiguracje będą połączone relacją przejścia i możemy zapisać $K_1 \vdash K_2$.

Wielogłowicowa maszyna Turinga.



Schemat obliczeń dla wielogłowicowej maszyny Turinga.



Rysunek 1.3: Wielogłowicowa maszyna Turinga.

1.2.3 Zagadnienia z użyciem wielogłowicowej maszyny Turinga

Zad 1.8. Zaprojektuj 3-głowicową maszynę Turinga rozpoznającą język

$$L = \{a^n b^n c^n : n > 0\}. \tag{1.47}$$

Założyć, że trzy głowice dotyczą określonego typu symbolu (głowica 1 poświęcona symbolom a, głowica 2 poświęcona symbolom b, głowica 3 poświęcona symbolom c). Głowica 1 jest początkowo umieszczona na komórce zawierającej pierwsze wystąpienie symbolu a, podczas gdy głowica 2 będzie na komórce zawierającej pierwsze wystąpienie symbolu b i głowica 3 zostanie umieszczona na pierwszym c. Głowice są poruszane zgodnie w prawo.

Wykonaj obliczenia dla

$$K_0 = (q_0, \underset{1}{a}\underset{2}{b}\underset{3}{c}) \tag{1.48}$$

i

$$K_0 = (q_0, \underset{1}{a}a\underset{2}{b}b\underset{3}{c}c). \tag{1.49}$$

Rozwiązanie.

Maszynę można określić zgodnie z

$$\begin{aligned} M &= (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \triangledown, F) = \\ &= (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, \triangledown\}, \delta, q_0, \triangledown, \{q_1\}), \end{aligned} \tag{1.50}$$

która to definicja jest mniej odpowiednia w tym przypadku.

Korzystając z alternatywnej lepszej definicji w tym przypadku mamy

$$\begin{aligned} M &= (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_A, q_R) = \\ &= (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, \triangledown\}, \delta, q_0, \{q_1\}, \{q_2\}). \end{aligned} \tag{1.51}$$

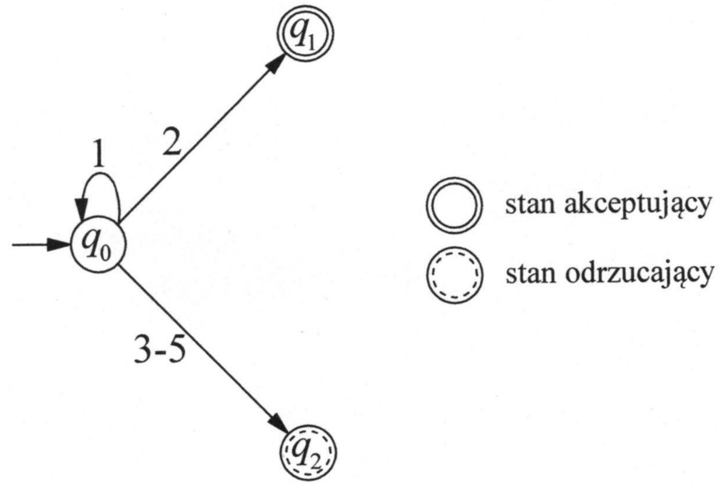
Funkcja przejścia $\delta\colon Q \times \Gamma^3 \to Q \times \Gamma^3 \times \{\leftarrow, \rightarrow\}^3$ może być określona przez tabelę przejść dla stanu bieżącego (tabela 1.1).

Poniższa tabela przedstawia funkcję przejścia.

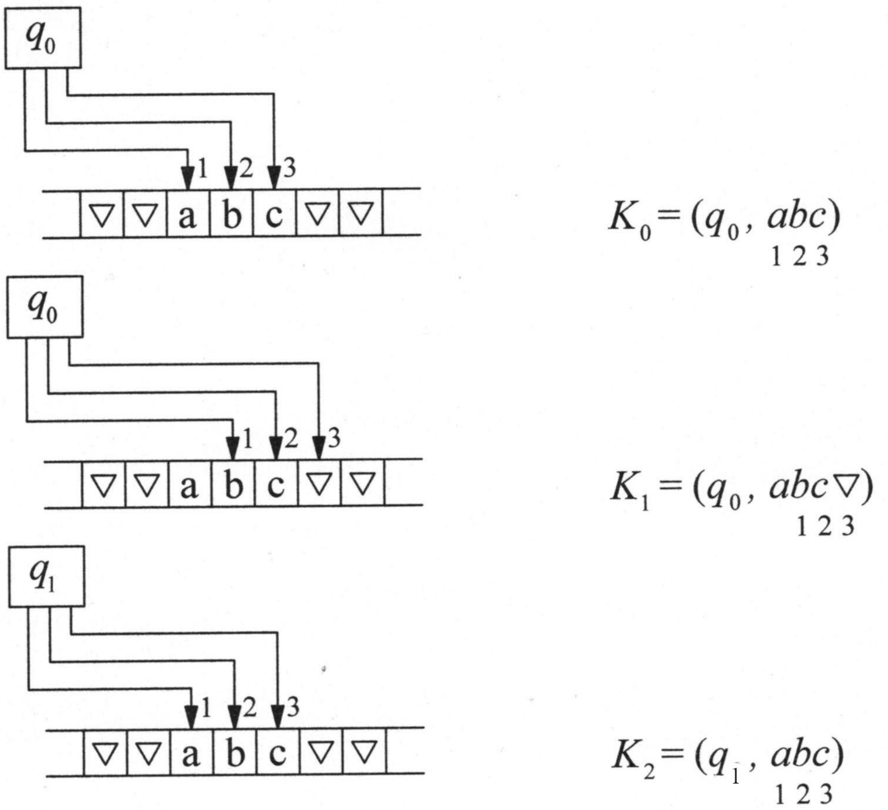
Nr	Stan bieżący	Czytany symbol	Nowy symbol	Nowy stan	Kierunki głowic
1	q_0	$[a,\ b,\ c]$	$[a,\ b,\ c]$	q_0	$[\ \rightarrow,\rightarrow,\rightarrow\ ]$
2	q_0	$[b,\ c,\ \triangledown]$	$[b,\ c,\ \triangledown]$	q_1	$[\ \leftarrow,\leftarrow,\leftarrow\ ]$
3	q_0	$[b,\ b,\ c]$	$[b,\ b,\ c]$	q_2	$[\ \leftarrow,\leftarrow,\leftarrow\ ]$
4	q_0	$[a,\ c,\ c]$	$[a,\ c,\ c]$	q_2	$[\ \leftarrow,\leftarrow,\leftarrow\ ]$
5	q_0	$[a,\ b,\ \triangledown]$	$[a,\ b,\ \triangledown]$	q_2	$[\ \leftarrow,\leftarrow,\leftarrow\ ]$

Tabela 1.1: Tabela przejścia dla bieżącego stanu q_0.

Wielogłowicowa maszyna Turinga akceptująca język $L = \{a^n b^n c^n : n > 0\}$.

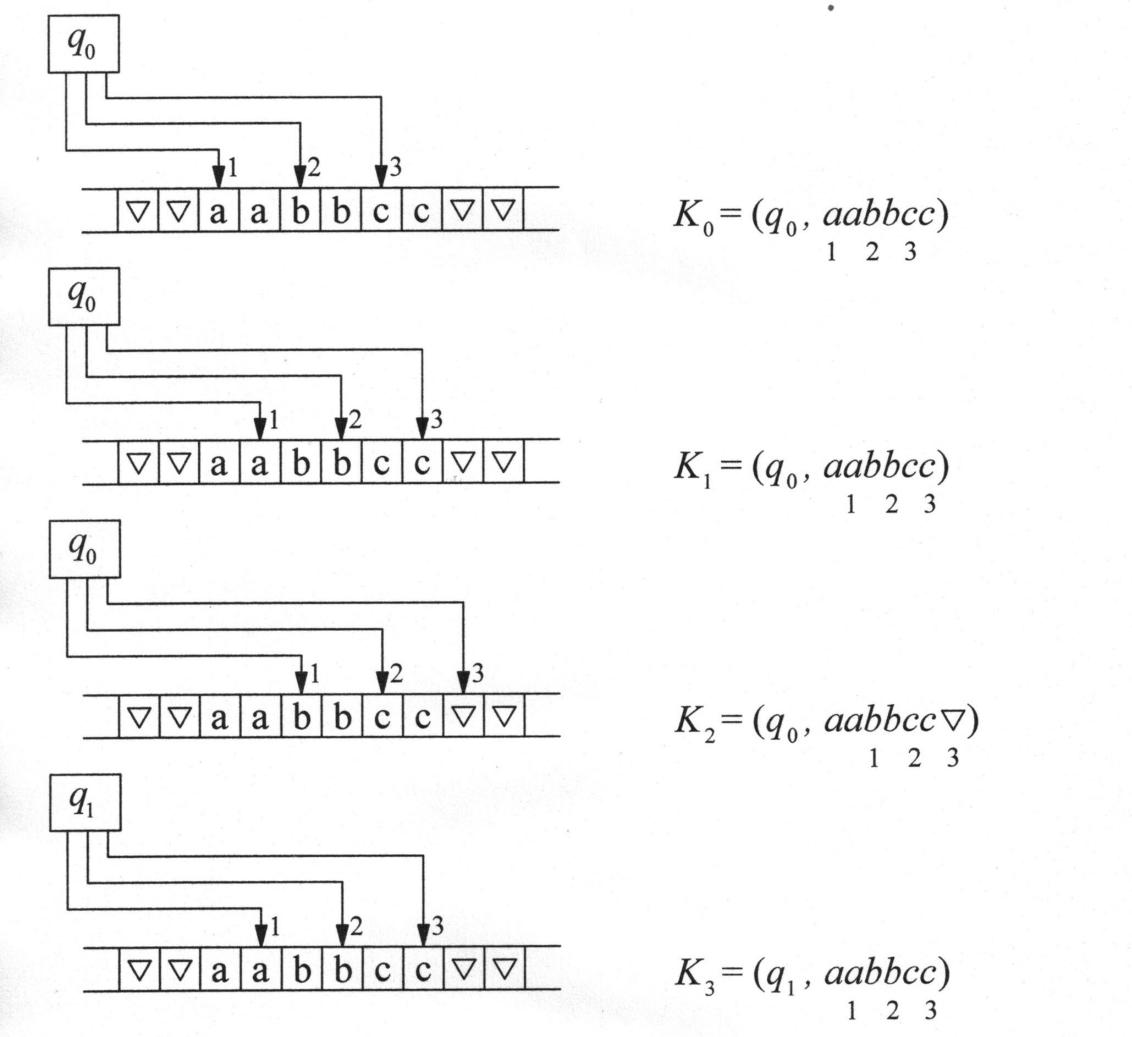


Obliczenia wielogłowicowej maszyny Turinga akceptującej język z zadania.



Rysunek 1.4: Wielogłowicowa maszyna Turinga akceptująca język z zadania.

Obliczenia wielogłowicowej maszyny Turinga akceptującej język $L = \{a^n b^n c^n : n > 0\}$.



Rysunek 1.5: Wielogłowicowa maszyna Turinga akceptująca język z zadania.

1.3 Dwutaśmowa i jednotaśmowa maszyna Turinga akceptujące palindromy

1.3.1 Dwutaśmowa maszyna Turinga akceptująca palindromy

Zad 1.9. Zaprojektuj 2-taśmową maszynę Turinga akceptującą palindromy nad alfabetem $\Sigma = \{a, b\}$. Zastosuj taśmy jednostronnie nieskończone.

Rozwiązanie

Opiszmy działanie maszyny.

1. Pierwszą komórkę na taśmie 2 oznaczona specjalny symbol X; dane są kopiowane z taśmy 1, gdzie początkowo występują (rys.), na taśmę 2 (rys.).
2. Następnie głowica taśmy 2 jest przesuwana na X (rys.),
3. Głowica taśmy 2 jest wielokrotnie przesuwana o jedną komórkę w prawo, głowica taśmy 1, o jedną komórkę w lewo, i porównywane są odpowiednie symbole. Jeżeli wszystkie symbole pasują, dane tworzą palindrom i maszyna wchodzi w stan akceptujący q_5. W przeciwnym razie maszyna Turinga nie będzie mogła w pewnej chwili zrobić żadnego poprawnego ruchu; zatrzyma się bez akceptowania.

Opiszmy stany.

Stan q_0.

Jeżeli dana nie jest pusta, drukuj X na taśmie 2 i przesuń głowicę w prawo; przejdź do stanu q_1. W przeciwnym razie przejdź do stanu q_5.

Stan q_1.

Pozostawaj w stanie q_1, kopiując taśmę 1 na 2, aż dotrzesz do $\bigtriangledown$ na taśmie 1. Wtedy przejdź do stanu q_2.

Stan q_2.

Pozostaw bez ruchu głowicę taśmy 1, a 2 przesuwaj w lewo, aż dotrzesz do X. Wtedy przejdź do stanu q_3.

Stany q_3 i q_4.

Sterowanie na przemian w stanie q_3 i q_4. W q_3 porównaj symbole na obu taśmach, przesuń głowicę taśmy 2 w prawo i przejdź do q_4. W q_4 przejdź do q_5 i akceptuj, jeżeli głowica dotarła do $\bigtriangledown$ na taśmie 2. W przeciwnym razie przesuń głowicę taśmy 1 w lewo i wróć do q_3. Alternacja q_3, q_4 zapobiega przekroczeniu lewego końca taśmy przez głowicę wejściową.

Stan q_5.

Akceptuj

Maszynę określamy zgodnie z

$$
\begin{aligned}
M_p &= (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) = \\
&= (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{a, b\}, \{a, b, X, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \bigtriangledown, \{q_5\}).
\end{aligned}
\tag{1.52}
$$

Funkcja przejścia $\delta\colon Q \times \Gamma^2 \to Q \times \Gamma^2 \times \{\leftarrow, -, \rightarrow\}^2$ jest określona przez tabelę przejścia 1.2.

Nr	Stan bieżący	Czytany symbol	Nowy symbol	Nowy stan	Kierunki głowic
1	q_0	[a,$\bigtriangledown$]	[a, X]	q_1	[$-$,$\rightarrow$]
2	q_0	[b,$\bigtriangledown$]	[b, X]	q_1	[$-$,$\rightarrow$]
3	q_0	[$\bigtriangledown$,$\bigtriangledown$]	[$\bigtriangledown$, $\bigtriangledown$]	q_5	[$-$,$-$]
4	q_1	[a,$\bigtriangledown$]	[a, a]	q_1	[$\rightarrow$,$\rightarrow$]
5	q_1	[b,$\bigtriangledown$]	[b, b]	q_1	[$\rightarrow$,$\rightarrow$]
6	q_1	[$\bigtriangledown$,$\bigtriangledown$]	[$\bigtriangledown$, $\bigtriangledown$]	q_2	[$-$,$\leftarrow$]
7	q_2	[$\bigtriangledown$,a]	[$\bigtriangledown$, a]	q_2	[$-$,$\leftarrow$]
8	q_2	[$\bigtriangledown$,b]	[$\bigtriangledown$. b]	q_2	[$-$,$\leftarrow$]
9	q_2	[$\bigtriangledown$,X]	[$\bigtriangledown$, X]	q_3	[$\leftarrow$,$\rightarrow$]
10	q_3	[a,a]	[a, a]	q_4	[$-$,$\rightarrow$]
11	q_3	[b,b]	[b, b]	q_4	[$-$,$\rightarrow$]
12	q_4	[a,a]	[a, a]	q_3	[$\leftarrow$,$-$]
13	q_4	[a,b]	[a, b]	q_3	[$\leftarrow$,$-$]
14	q_4	[b,a]	[b, a]	q_3	[$\leftarrow$,$-$]
15	q_4	[b,b]	[b, b]	q_3	[$\leftarrow$,$-$]
16	q_4	[a,$\bigtriangledown$]	[a, $\bigtriangledown$]	q_5	[$-$,$-$]
17	q_4	[b,$\bigtriangledown$]	[b, $\bigtriangledown$]	q_5	[$-$,$-$]
18	q_5				

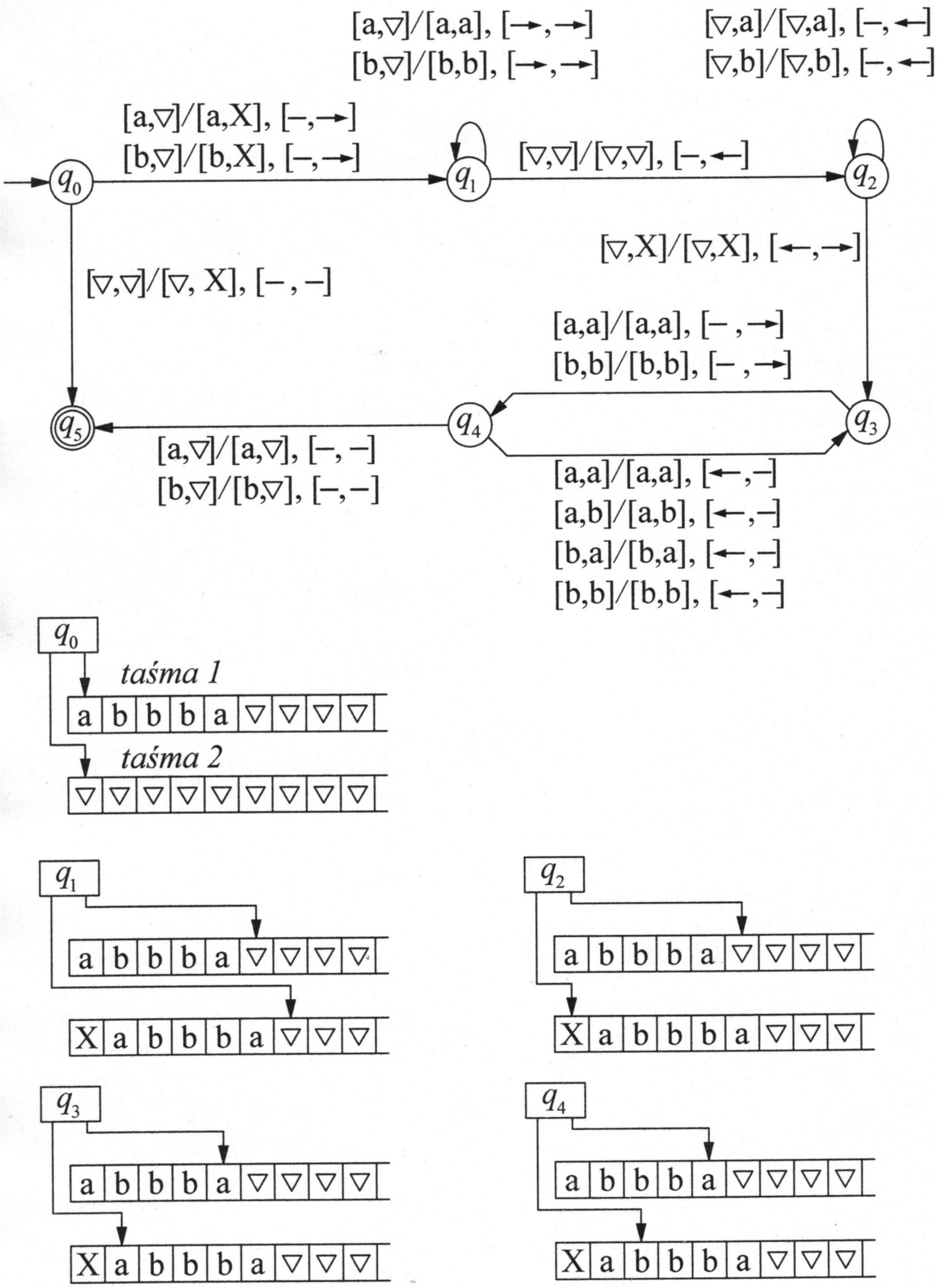
Tabela 1.2: Tabela przejścia dla dwutaśmowej maszyny akceptującej palindromy

$$
\begin{array}{ll}
(q_0\ \mathrm{aba},\ q_0\ \bigtriangledown) & \vdash (q_1\ \mathrm{aba},\ \mathrm{X}\ q_1\ \bigtriangledown) \\
 & \vdash (\mathrm{a}\ q_1\ \mathrm{ba},\ \mathrm{Xa}\ q_1\ \bigtriangledown) \\
 & \vdash (\mathrm{ab}\ q_1\ \mathrm{a},\ \mathrm{Xab}\ q_1\ \bigtriangledown) \\
 & \vdash (\mathrm{aba}\ q_1\ \bigtriangledown,\ \mathrm{Xaba}\ q_1\ \bigtriangledown) \\
 & \vdash (\mathrm{aba}\ q_2\ \bigtriangledown,\ \mathrm{Xab}\ q_2\ \mathrm{a}) \\
 & \vdash (\mathrm{aba}\ q_2\ \bigtriangledown,\ \mathrm{Xa}\ q_2\ \mathrm{ba}) \\
 & \vdash (\mathrm{aba}\ q_2\ \bigtriangledown,\ \mathrm{X}\ q_2\ \mathrm{aba}) \\
 & \vdash (\mathrm{aba}\ q_2\ \bigtriangledown,\ q_2\ \mathrm{Xaba}) \\
 & \vdash (\mathrm{ab}\ q_3\ \mathrm{a},\ \mathrm{X}\ q_3\ \mathrm{aba}) \\
 & \vdash (\mathrm{ab}\ q_4\ \mathrm{a},\ \mathrm{Xa}\ q_4\ \mathrm{ba}) \\
 & \vdash (\mathrm{a}\ q_3\ \mathrm{ba},\ \mathrm{Xa}\ q_3\ \mathrm{ba}) \\
 & \vdash (\mathrm{a}\ q_4\ \mathrm{ba},\ \mathrm{Xab}\ q_4\ \mathrm{a}) \\
 & \vdash (q_3\ \mathrm{aba},\ \mathrm{Xab}\ q_3\ \mathrm{a}) \\
 & \vdash (q_4\ \mathrm{aba},\ \mathrm{Xaba}\ q_4\ \bigtriangledown) \\
 & \vdash (q_5\ \mathrm{aba},\ \mathrm{Xaba}\ q_5\ \bigtriangledown)
\end{array}
$$

Tabela 1.3: Obliczenia dwutaśmowej maszyny akceptującej palindromy

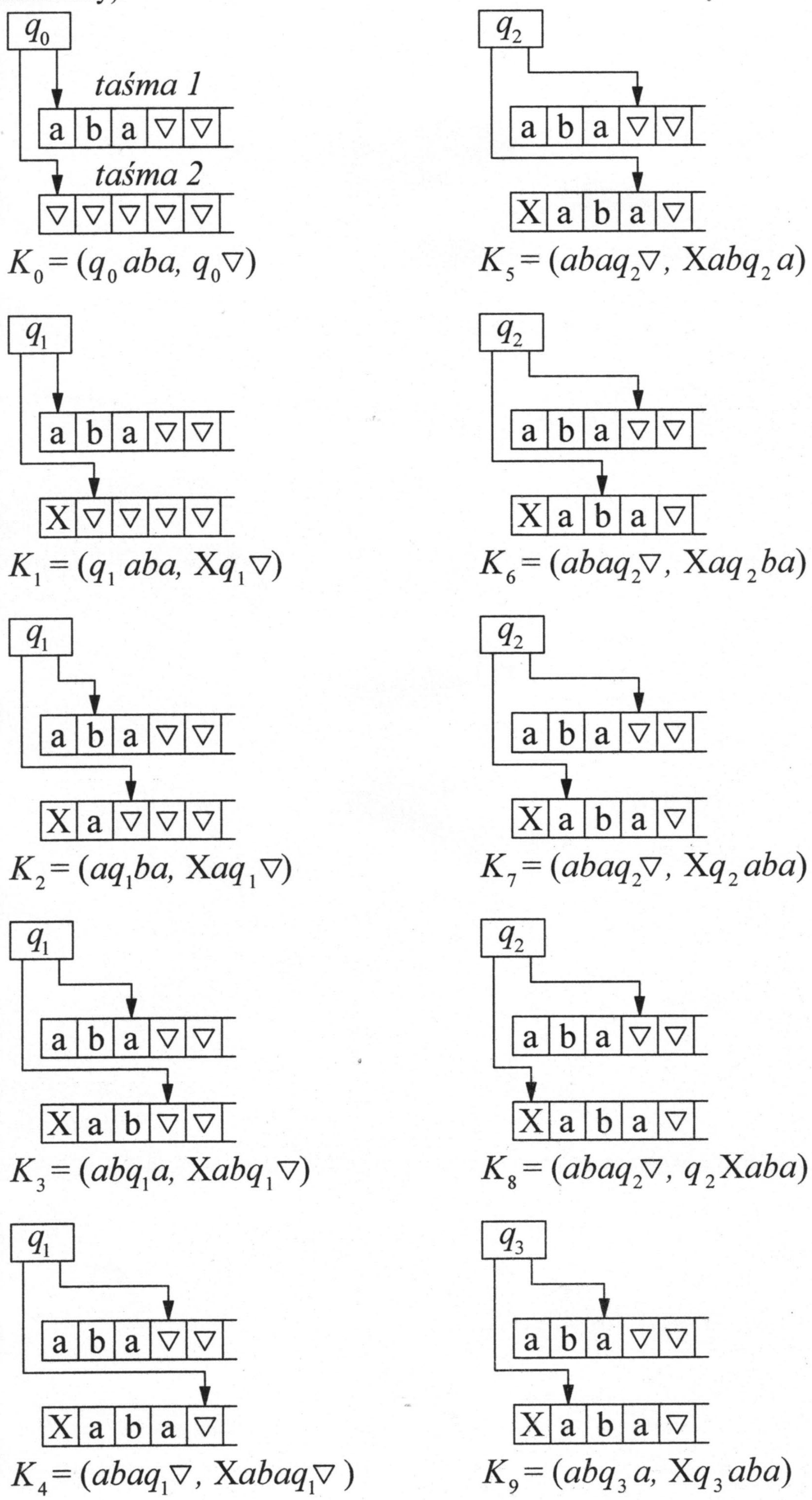
2-taśmowa maszyna Turinga rozpoznająca palindromy (akceptująca palindromy).

notacja: [s taśma 1, s taśma 2]/[n s taśma 1, n s taśma 2], [→ , →]



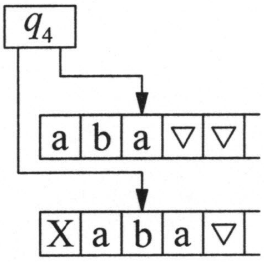
Rysunek 1.6: Dwutaśmowa maszyna Turinga akceptująca palindromy.

Obliczenia 2-taśmowej maszyny Turinga rozpoznającej palindromy (akceptującej palindromy).

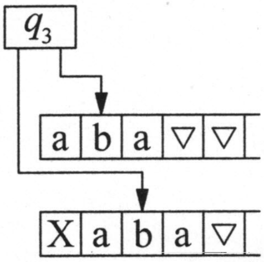


Rysunek 1.7: Dwutaśmowa maszyna Turinga akceptująca palindromy.

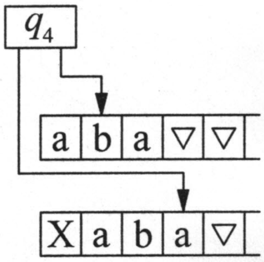
Obliczenia 2-taśmowej maszyny Turinga rozpoznającej palindromy (akceptującej palindromy).



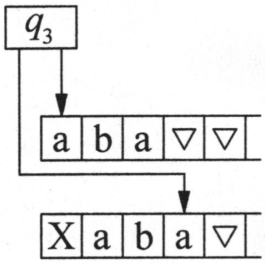
$K_{10} = (abq_4a,\ \mathrm{X}aq_4ba)$



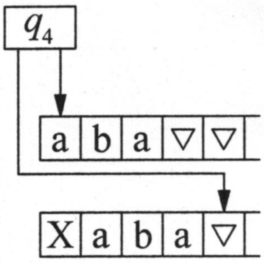
$K_{11} = (aq_3ba,\ \mathrm{X}aq_3ba)$



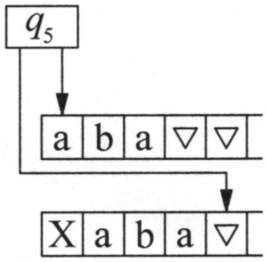
$K_{12} = (aq_4ba,\ \mathrm{X}abq_4a)$



$K_{13} = (q_3aba,\ \mathrm{X}abq_3a)$



$K_{14} = (q_4aba,\ \mathrm{X}abaq_4\triangledown)$



$K_{15} = (q_5aba,\ \mathrm{X}abaq_5\triangledown)$

Rysunek 1.8: Dwutaśmowa maszyna Turinga akceptująca palindromy.

1.3.2 Jednotaśmowa maszyna Turinga akceptująca palindromy

Zad 1.10. Zaprojektuj jednotaśmową maszynę Turinga akceptującą palindromy nad alfabetem $\Sigma = \{a, b\}$.

Rozwiązanie

Maszynę możemy określić zgodnie z

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) = \\ = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}, \{a, b\}, \{a, b, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \bigtriangledown, \{q_6\}), \tag{1.53}$$

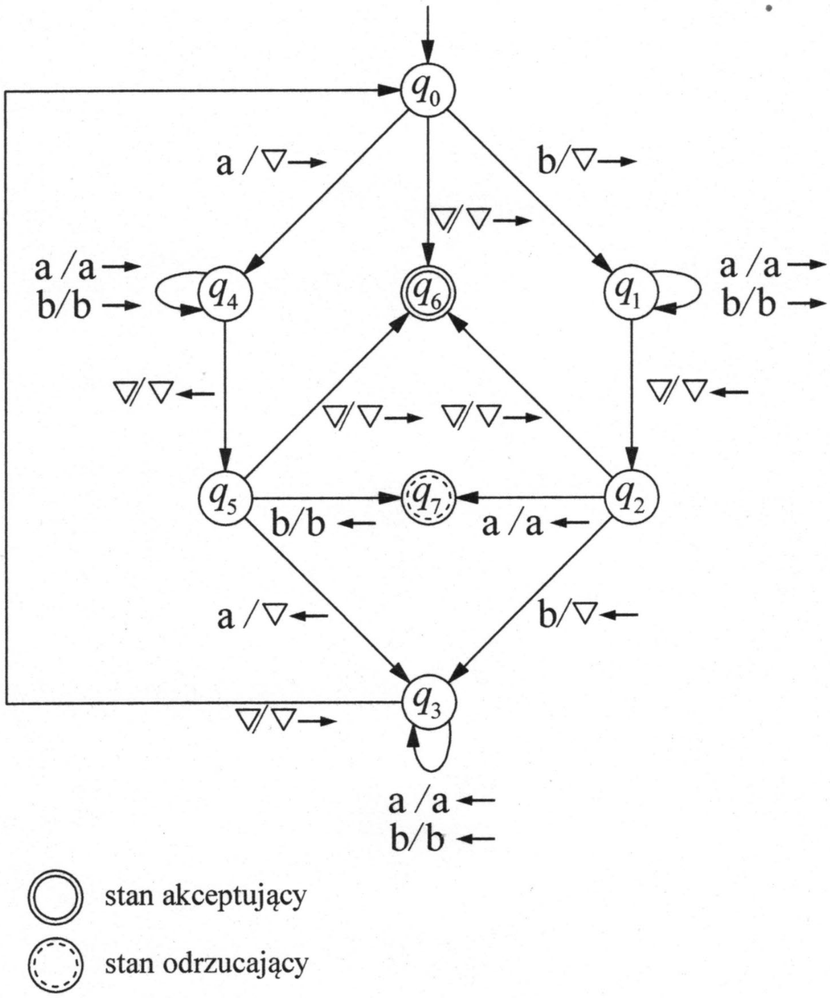
która to definicja jest mniej odpowiednia w tym przypadku.

Korzystając z alternatywnej lepszej definicji w tym przypadku otrzymujemy

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_A, q_R) = \\ = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}, \{a, b\}, \{a, b, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \{q_6\}, \{q_7\}). \tag{1.54}$$

Funkcja przejścia $\delta \colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$ może być określona przez diagram przejść.

Jednotaśmowa maszyna Turinga rozpoznająca palindromy (akceptująca palindromy).



Łańcuchy będące palindromami:

- palindrom o nieparzystej długości

▽	▽	a	b	b	b	a	▽	▽

- palindrom o parzystej długości

▽	▽	a	b	b	a	▽	▽

Łańcuchy nie będące palindromami:

- łańcuch o nieparzystej długości

▽	▽	a	b	b	a	a	▽	▽

- łańcuch o parzystej długości

▽	▽	b	b	b	a	▽	▽

Po zastąpieniu przez symbole puste:

- palindrom o nieparzystej długości

▽	▽	▽	▽	▽	▽	▽	▽	▽

- palindrom o parzystej długości

▽	▽	▽	▽	▽	▽	▽	▽

Po zastąpieniu przez symbole puste:

- łańcuch o nieparzystej długości

▽	▽	▽	▽	b	a	▽	▽	▽

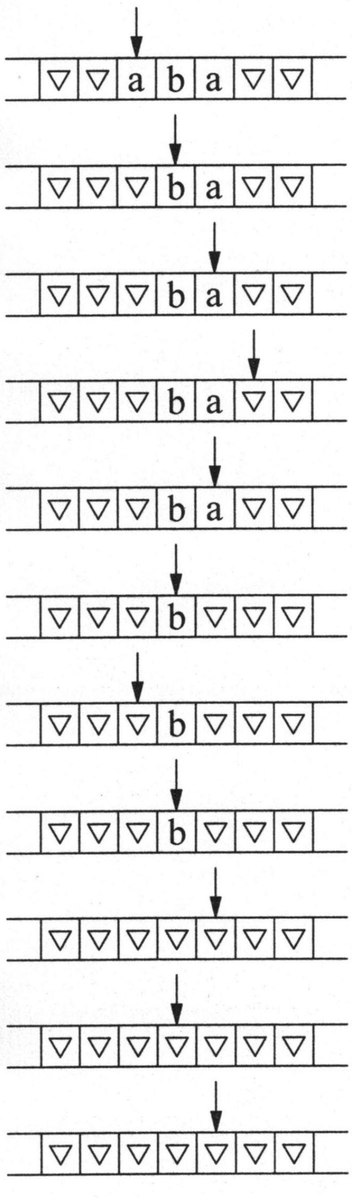
- łańcuch o parzystej długości

▽	▽	▽	b	b	a	▽	▽

Rysunek 1.9: Jednotaśmowa maszyna Turinga akceptująca palindromy z zadania.

Obliczenia jednotaśmowej maszyny Turinga rozpoznającej palindromy (akceptującej palindromy).

Obliczenia



K_0 q_0 a b a

K_1 q_4 b a

K_2 b q_4 a

K_3 b a q_4 ▽

K_4 b q_5 a

K_5 q_3 b

K_6 q_3▽ b

K_7 q_0 b

K_8 q_1▽

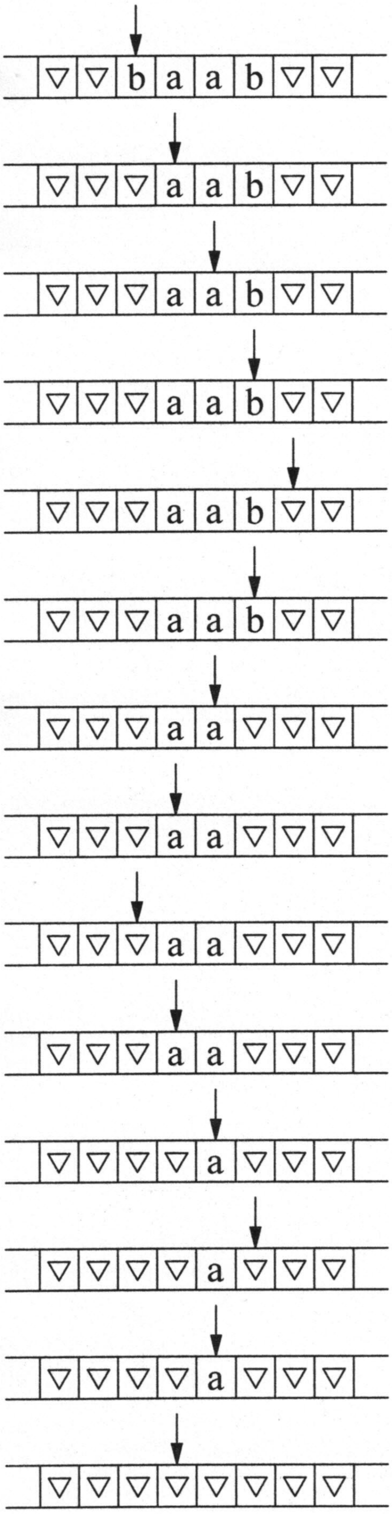
K_9 q_2▽

K_{10} q_6▽

Rysunek 1.10: Obliczenia jednotaśmowej maszyny Turinga akceptującej palindromy z zadania.

Obliczenia jednotaśmowej maszyny Turinga rozpoznającej palindromy (akceptującej palindromy).

Obliczenia



K_0 q_0 b a a b

K_1 q_1 a a b

K_2 a q_1 a b

K_3 a a q_1 b

K_4 a a b q_1 ▽

K_5 a a q_2 b

K_6 a q_3 a

K_7 q_3 a a

K_8 q_3▽ a a

K_9 q_0 a a

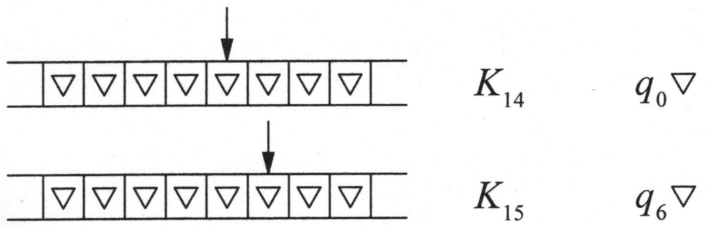
K_{10} q_4 a

K_{11} a q_4▽

K_{12} q_5 a

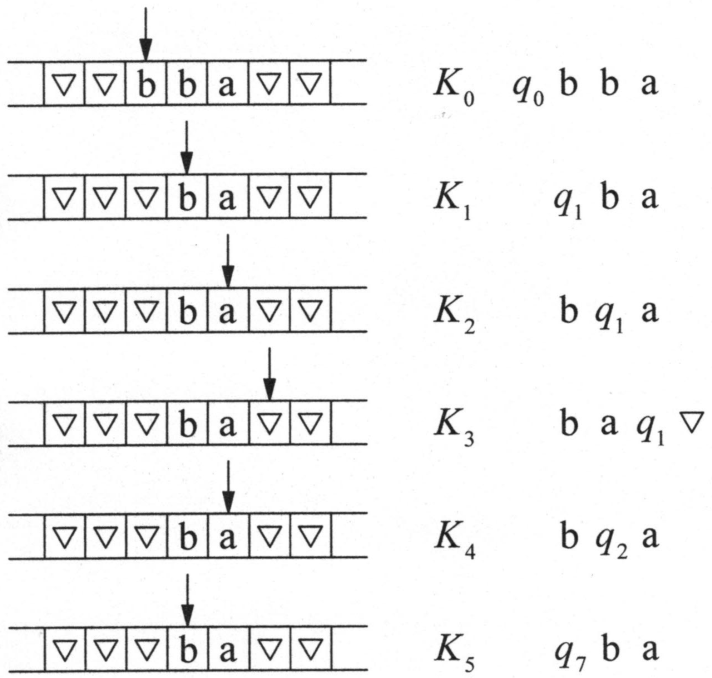
K_{13} q_3▽

Rysunek 1.11: Obliczenia jednotaśmowej maszyny Turinga akceptującej palindromy z zadania.



Obliczenia 1-taśmowej maszyny Turinga rozpoznającej palindromy (akceptującej palindromy).

Obliczenia



Rysunek 1.12: Obliczenia jednotaśmowej maszyny Turinga akceptującej palindromy z zadania.