

Metody Numeryczne

Projekt 2 – Układy równań liniowych

Jędrzej Jasiniecki s197993 gr.1a

1.Wstęp

Celem niniejszego sprawozdania jest analiza metody numerycznych służących do rozwiązywania układów liniowych. W ramach którego zaimplementowano i porównano skuteczność oraz zbieżność trzech podejść: metody Jacobiego, metody Gaussa-Seidela, oraz metody bezpośredniej LU. Wszystkie powyższe metody służą do rozwiązywania układów równań liniowych w postaci $Ax=b$.

Rozwiązania badano dla następujących danych: Rozmiar macierzy $N = 1293$, $e = 9$, oraz $f = 7$. Z tego wynika, że macierz systemowa wyglądała w ten sposób

$$A = \begin{bmatrix} a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a3 & a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a3 & a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a3 & a2 & a1 \end{bmatrix}$$

Gdzie $a1=14$, $a2=-1$, $a3=-1$, a wektor pobudzenia b o rozmiarze N został zdefiniowany jako $b_i = \sin(i * 8)$.

2.Opis metod

Przedstawiony opis jest dla równania $Ax = b$

2.1 Metoda Jacobiego

Opiera się na rozkładzie macierzy A na sumę:

$$A = D + L + U$$

gdzie:

- D to macierz diagonalna
- L to macierz trójkątna dolna
- U to macierz trójkątna górna

Początkowe przybliżenie rozwiązania przyjmujemy jako wektor $x(0)$ którego każdy element jest równy 1.

Następnie w każdej iteracji wyznaczamy wektor:

$$x^{k+1} = -D^{-1}(L + U)x^k + D^{-1}b$$

Po każdej iteracji obliczana jest norma residuum definiowana jako:

$$r(k) = Ax(k) - b \text{ oraz } \|r(k)\| = \sqrt{\sum (Ax(k) - b)^2}$$

Proces iteracyjny jest kontynuowany do momentu spełnienia jednego z warunków zakończenia:

- -ilość iteracji nie przekroczy 8000
- norma residuum będzie mniejsza niż 10^{-6}

2.2 Metoda Gaussa-Seidla

Opiera się na rozkładzie macierzy A na sumę:

$$A = D + L + U$$

gdzie:

- D to macierz diagonalna
- L to macierz trójkątna dolna
- U to macierz trójkątna górna

Początkowe przybliżenie rozwiązania przyjmujemy jako wektor $x(0)$ którego każdy element jest równy 1.

Następnie w każdej iteracji wyznaczamy wektor:

$$x^{k+1} = -(D + L)^{-1}(Ux)^k + (D + L)^{-1}b$$

Po każdej iteracji obliczana jest norma residuum definiowana jako:

$$r(k) = Ax(k) - b \text{ oraz } \|r(k)\| = \sqrt{\sum (Ax(k) - b)^2}$$

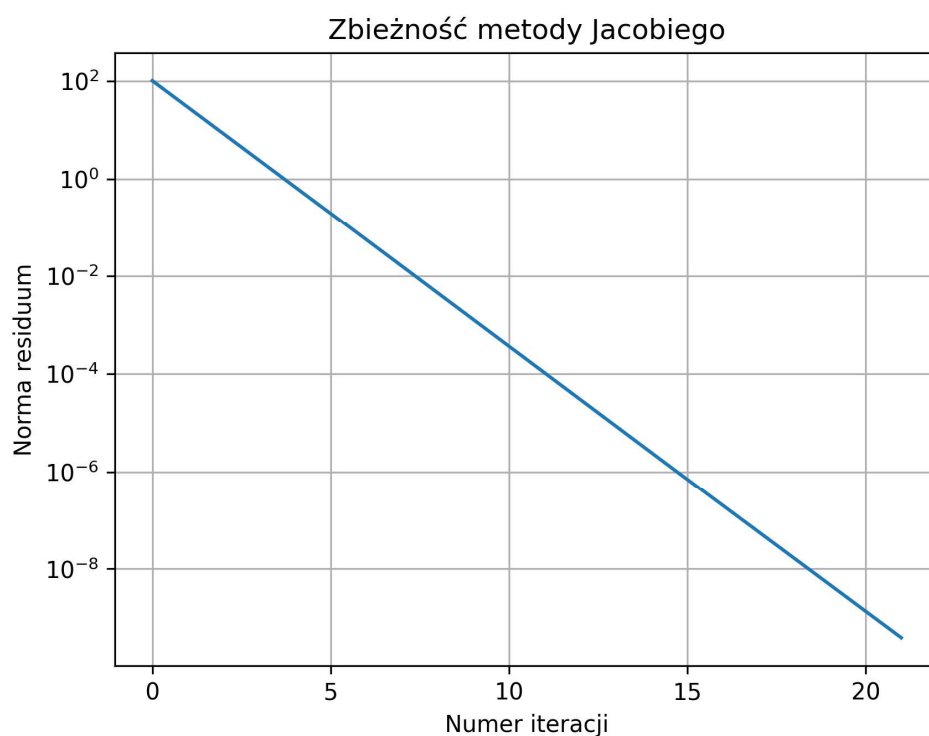
Proces iteracyjny jest kontynuowany do momentu spełnienia jednego z warunków zakończenia:

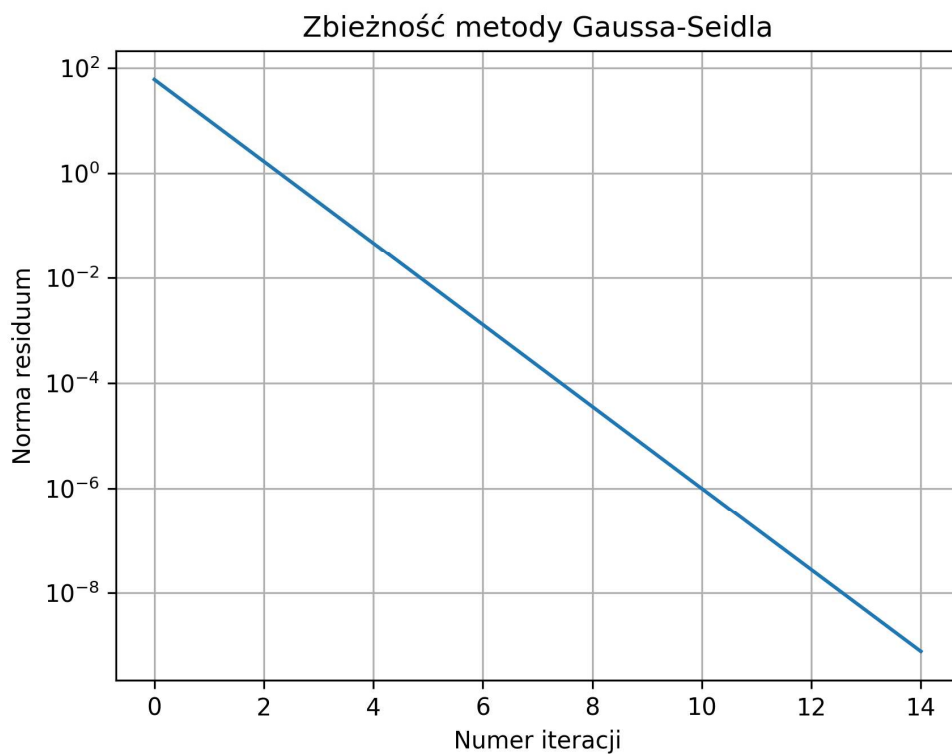
- -ilość iteracji nie przekroczy 8000
- norma residuum będzie mniejsza niż 10^{-6}

2.3 Metoda LU

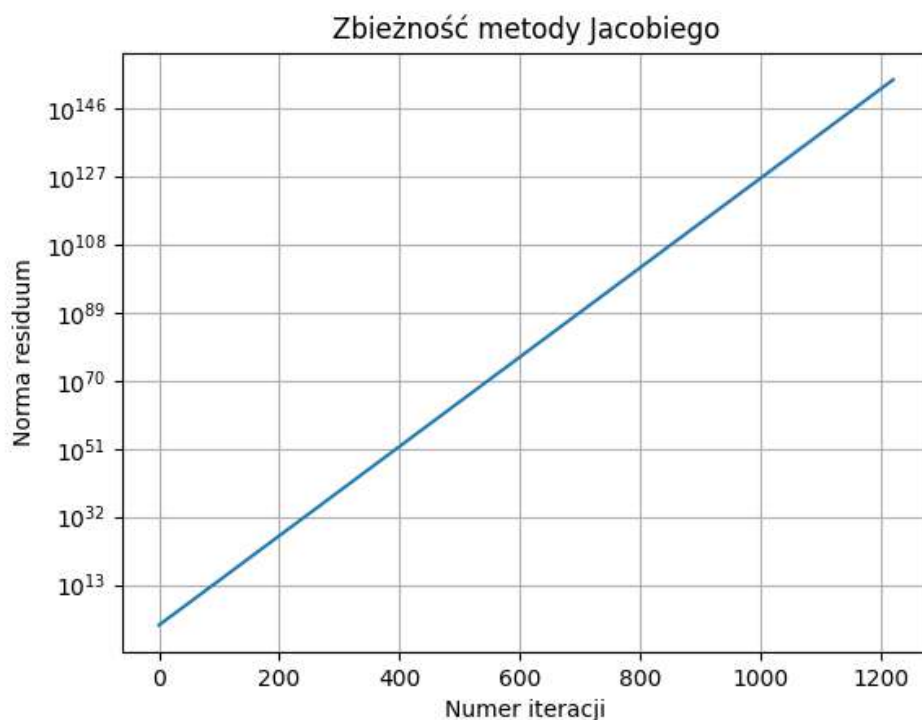
Metoda bezpośrednia LU polega na rozkładzie macierzy A na iloczyn dwóch macierzy trójkątnych: dolnej L i górnej U, tak że $A=LU$. Rozwiązanie układu $Ax=b$ sprowadza się do dwóch etapów: rozwiązania układu $Lz=b$ metodą podstawiania w przód, a następnie $Ux=z$ metodą podstawiania wstecz.

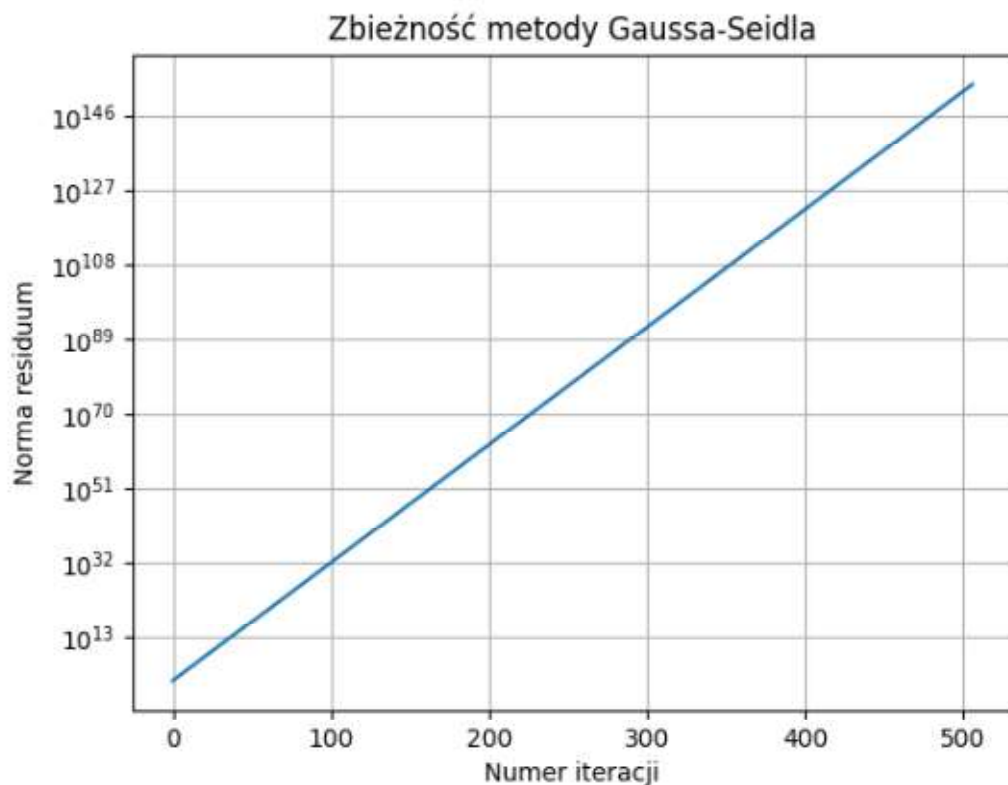
3.Wyniki





Powyższe dwa wykresy przedstawiają zależność między normą residuum a liczbą iteracji dla danego układu równań. Metoda Jacobiego osiągnęła założoną dokładność po 21 iteracjach, natomiast metoda Gaussa-Seidla wymagała jedynie 14 iteracji. Obie metody wykazują zbieżność wykładniczą, co potwierdza liniowy przebieg wykresów w skali logarytmicznej. W analizowanym przypadku metoda Gaussa-Seidla okazała się korzystniejsza pod względem szybkości zbieżności. Wynika to z faktu, że metoda ta podczas każdej iteracji natychmiast wykorzystuje najnowsze obliczone wartości elementów wektora x , podczas gdy metoda Jacobiego bazuje wyłącznie na danych z poprzedniego kroku.



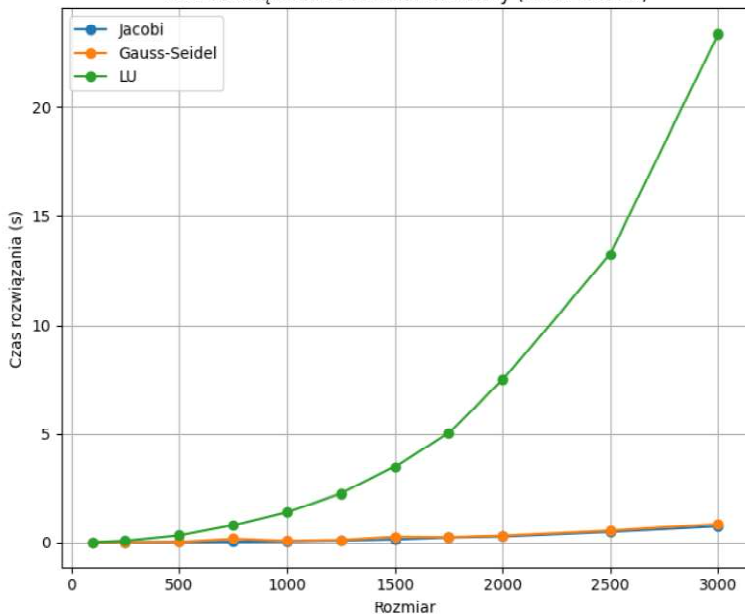


Powyższe dwa wykresy przedstawiają działanie metod Jacobiego oraz Gaussa-Seidla dla zmodyfikowanej macierzy A , w której elementy diagonalne przyjmują wartość $a_{ii}=3$. W odróżnieniu od poprzednich przykładów, zauważalny jest brak zbieżności — norma residuum nie maleje, lecz przeciwnie — gwałtownie rośnie z każdą kolejną iteracją. Dla metody Jacobiego norma residuum osiąga wartość 10^{146} już po około 1200 iteracjach. W przypadku metody Gaussa-Seidla podobna rozbieżność pojawia się jeszcze szybciej — po zaledwie 500 iteracjach. Przyczyną tego zjawiska jest brak dominacji diagonalnej w macierzy A , co stanowi istotny warunek dla zbieżności metod iteracyjnych. W analizowanym przypadku metody Jacobiego i Gaussa-Seidla nie są w stanie znaleźć poprawnego rozwiązania, co skutkuje ich rozbieżnością.

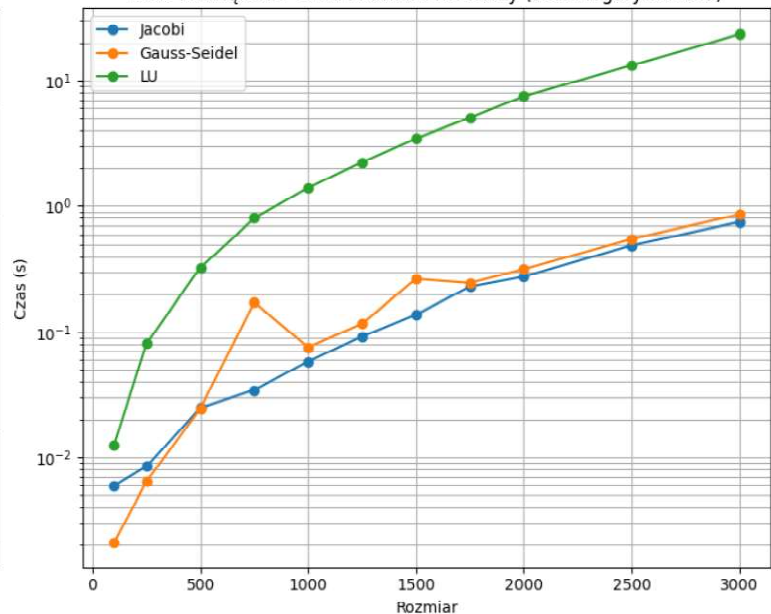
Dla metody LU:

Jednakże dla tych samych macierzy metoda LU działa poprawnie i umożliwia wyznaczenie rozwiązania układu. Otrzymana norma residuum wynosi $6.96337680888519 \times 10^{-13}$, co oznacza, że rozwiązanie jest bardzo dokładne. Wynik ten potwierdza, że metoda LU radzi sobie znacznie lepiej z układami trudnymi dla metod iteracyjnych, które w tym przypadku prowadziły do rozbieżności.

Czas rozwiązania vs rozmiar macierzy (skala liniowa)



Czas rozwiązania vs od rozmiaru macierzy (skala logarytmiczna)



Na powyższych wykresach przedstawiono porównanie czasu działania trzech metod rozwiązywania układów równań liniowych: Jacobiego, Gaussa-Seidla oraz metody bezpośredniej LU, w zależności od rozmiaru macierzy N . Wykres po lewej stronie prezentuje zależność w skali liniowej, natomiast po prawej – w skali logarytmicznej, co umożliwia lepszą ocenę złożoności obliczeniowej.

Na podstawie wykresów można zauważyć, że:

- Metoda LU ma największą złożoność czasową — czas jej działania rośnie wykładniczo, co jest zgodne z teorią (rzędowo $O(n^3)$)
- Metody iteracyjne (Jacobi i Gauss-Seidel) działają znacznie szybciej, a ich czas wzrasta wolniej, co sugeruje złożoność rzędu $O(n^2)$ lub lepszą.

4. Podsumowanie

Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów i analizy wykresów można sformułować następujące wnioski:

Metody iteracyjne — Jacobiego i Gaussa-Seidla — mają bardzo zbliżoną złożoność czasową i wykazują dobre właściwości zbieżności dla dobrze uwarunkowanych macierzy. Jednak nie gwarantują zbieżności w każdym przypadku, co zostało zauważone w zadaniu C, gdzie macierz A nie posiadała dominacji diagonalnej.

W przeciwieństwie do nich, metoda LU pozwala na dokładne rozwiązanie układu równań niezależnie od warunków macierzy. Jej główną wadą jest jednak zdecydowanie wyższa złożoność obliczeniowa w porównaniu do metod iteracyjnych.

Dla dobrze uwarunkowanych macierzy, gdzie istotny jest czas obliczeń, bardziej efektywne okazują się metody Jacobiego i Gaussa-Seidla. Z kolei w sytuacjach, w których kluczowa jest wysoka dokładność lub macierz jest trudna numerycznie, metoda LU stanowi lepszy wybór, mimo większego kosztu czasowego.