

Metody Numeryczne

Projekt 2 – Układy równań liniowych

Jędrzej Jasiniecki s197993 gr.1a

1.Wstęp

Celem niniejszego sprawozdania jest analiza metody numerycznych służących do rozwiązywania układów liniowych. W ramach którego zaimplementowano i porównano skuteczność oraz zbieżność trzech podejść: metody Jacobiego, metody Gaussa-Seidela, oraz metody bezpośredniej LU. Wszystkie powyższe metody służą do rozwiązywania układów równań liniowych w postaci $Ax=b$.

Rozwiązania badano dla następujących danych: Rozmiar macierzy $N = 1293$, $e = 9$, oraz $f = 7$. Z tego wynika, że macierz systemowa wyglądała w ten sposób

$$A = \begin{bmatrix} a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a3 & a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a3 & a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a3 & a2 & a1 \end{bmatrix}$$

Gdzie $a1=14$, $a2=-1$, $a3=-1$, a wektor pobudzenia b o rozmiarze N został zdefiniowany jako $b_i = \sin(i * 8)$.

2.Opis metod

Przedstawiony opis jest dla równania $Ax = b$

2.1 Metoda Jacobiego

Opiera się na rozkładzie macierzy A na sumę:

$$A = D + L + U$$

gdzie:

- D to macierz diagonalna
- L to macierz trójkątna dolna
- U to macierz trójkątna górna

Początkowe przybliżenie rozwiązania przyjmujemy jako wektor $x(0)$ którego każdy element jest równy 1.

Następnie w każdej iteracji wyznaczamy wektor:

$$x^{k+1} = -D^{-1}(L + U)x^k + D^{-1}b$$

Po każdej iteracji obliczana jest norma residuum definiowana jako:

$$r(k) = Ax(k) - b \text{ oraz } \|r(k)\| = \sqrt{\sum (Ax(k) - b)^2}$$

Proces iteracyjny jest kontynuowany do momentu spełnienia jednego z warunków zakończenia:

- -ilość iteracji nie przekroczy 8000
- norma residuum będzie mniejsza niż 10^{-6}

2.2 Metoda Gaussa-Seidla

Opiera się na rozkładzie macierzy A na sumę:

$$A = D + L + U$$

gdzie:

- D to macierz diagonalna
- L to macierz trójkątna dolna
- U to macierz trójkątna górna

Początkowe przybliżenie rozwiązania przyjmujemy jako wektor $x(0)$ którego każdy element jest równy 1.

Następnie w każdej iteracji wyznaczamy wektor:

$$x^{k+1} = -(D + L)^{-1}(Ux)^k + (D + L)^{-1}b$$

Po każdej iteracji obliczana jest norma residuum definiowana jako:

$$r(k) = Ax(k) - b \text{ oraz } \|r(k)\| = \sqrt{\sum (Ax(k) - b)^2}$$

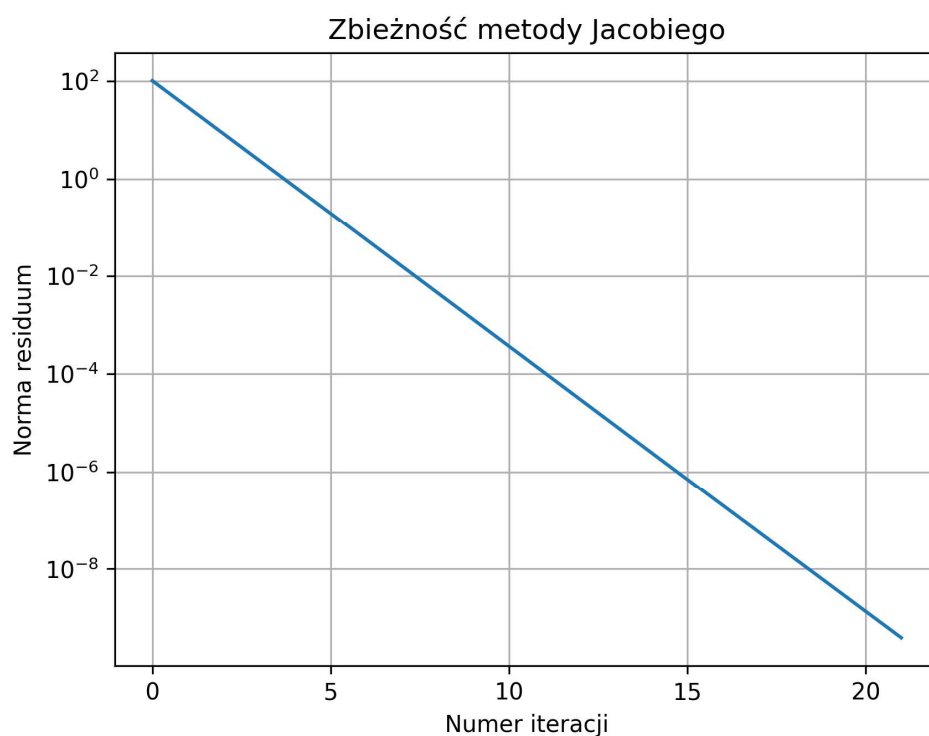
Proces iteracyjny jest kontynuowany do momentu spełnienia jednego z warunków zakończenia:

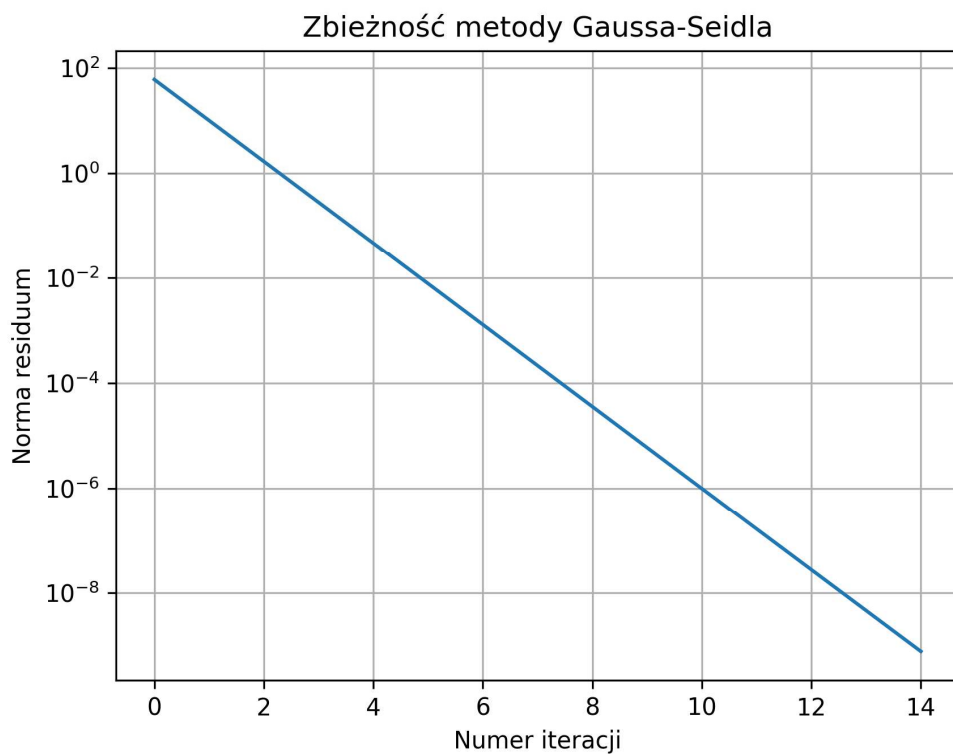
- -ilość iteracji nie przekroczy 8000
- norma residuum będzie mniejsza niż 10^{-6}

2.3 Metoda LU

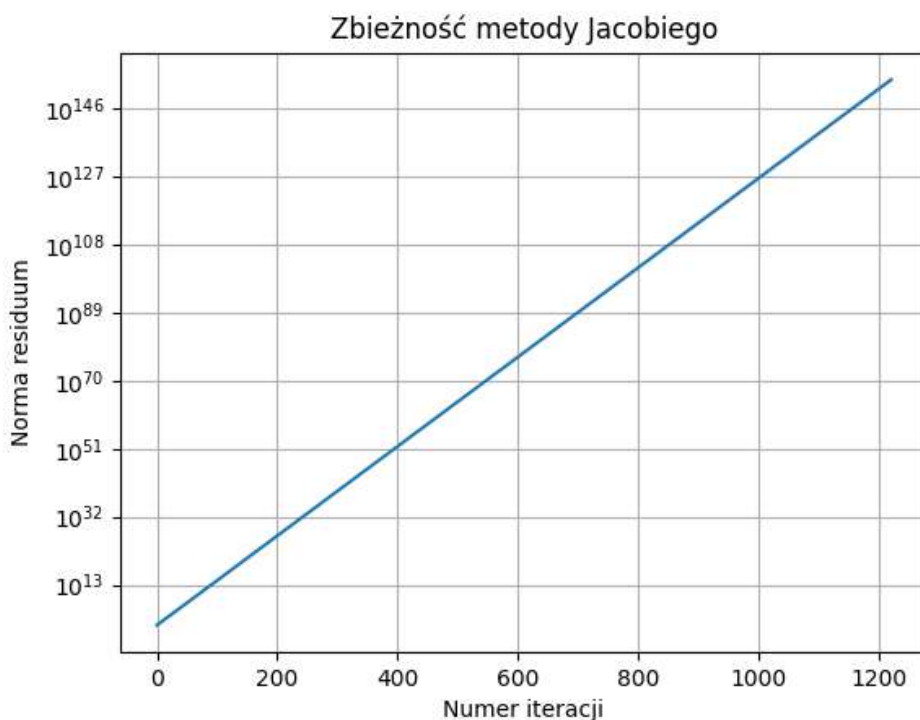
Metoda bezpośrednia LU polega na rozkładzie macierzy A na iloczyn dwóch macierzy trójkątnych: dolnej L i górnej U, tak że $A=LU$. Rozwiązanie układu $Ax=b$ sprowadza się do dwóch etapów: rozwiązania układu $Lz=b$ metodą podstawiania w przód, a następnie $Ux=z$ metodą podstawiania wstecz.

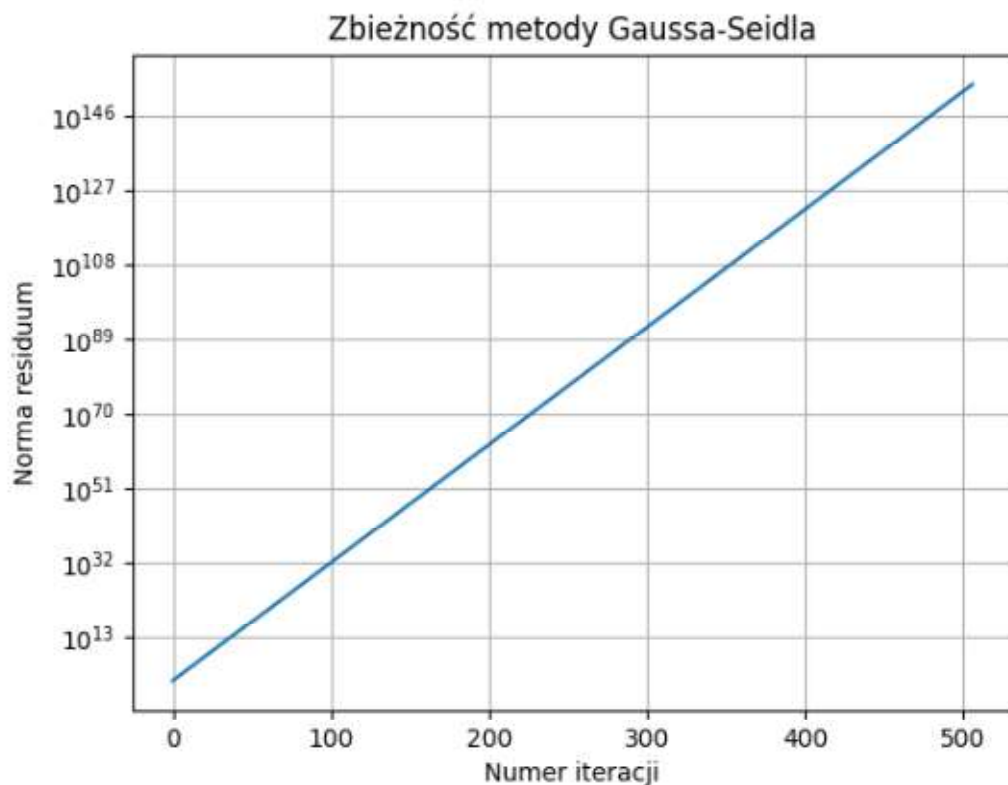
3.Wyniki





Powyższe dwa wykresy przedstawiają zależność między normą residuum a liczbą iteracji dla danego układu równań. Metoda Jacobiego osiągnęła założoną dokładność po 21 iteracjach, uzyskując czas działania 0.087 s. Z kolei metoda Gaussa-Seidla wymagała jedynie 14 iteracji, jednak czas jej działania był dłuższy i wyniósł 0.54 s. Obie metody wykazują zbieżność wykładniczą, co potwierdza liniowy charakter wykresów w skali logarytmicznej. Choć metoda Gaussa-Seidla charakteryzuje się szybszą zbieżnością w ujęciu liczby iteracji, w tym przypadku metoda Jacobiego okazała się korzystniejsza pod względem całkowitego czasu obliczeń. Różnica ta może wynikać z bardziej złożonych operacji wykonywanych w każdej iteracji metody Gaussa-Seidla, która na bieżąco wykorzystuje najnowsze wartości wektora \mathbf{x} , w przeciwieństwie do metody Jacobiego, która bazuje wyłącznie na wartościach z poprzedniej iteracji.

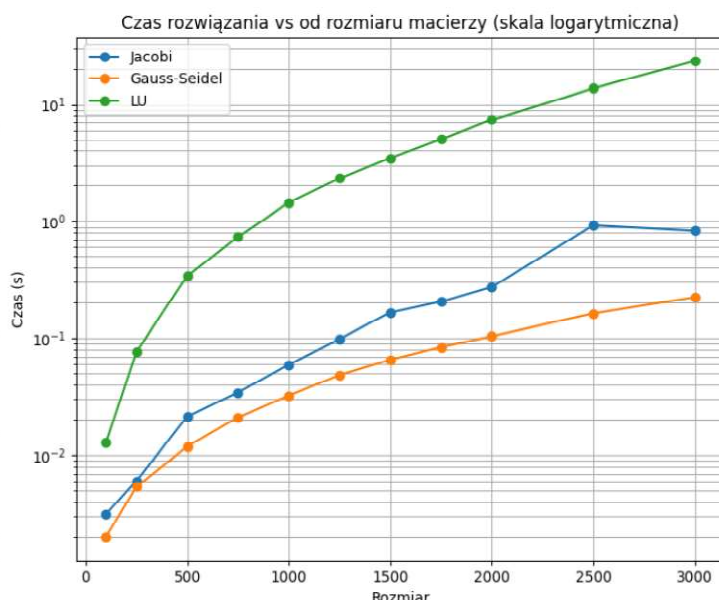
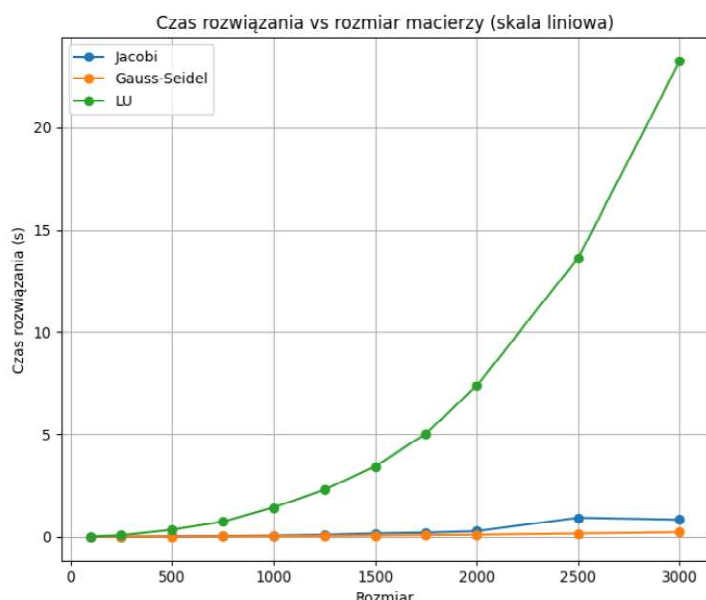




Powyższe dwa wykresy przedstawiają działanie metod Jacobiego oraz Gaussa-Seidla dla zmodyfikowanej macierzy A , w której elementy diagonalne przyjmują wartość $a_{11}=3$. W odróżnieniu od poprzednich przykładów, zauważalny jest brak zbieżności — norma residuum nie maleje, lecz przeciwnie — gwałtownie rośnie z każdą kolejną iteracją. Dla metody Jacobiego norma residuum osiąga wartość 10^{146} już po około 1200 iteracjach. W przypadku metody Gaussa-Seidla podobna rozbieżność pojawia się jeszcze szybciej — po zaledwie 500 iteracjach. Przyczyną tego zjawiska jest brak dominacji diagonalnej w macierzy A , co stanowi istotny warunek dla zbieżności metod iteracyjnych. W analizowanym przypadku metody Jacobiego i Gaussa-Seidla nie są w stanie znaleźć poprawnego rozwiązania, co skutkuje ich rozbieżnością.

Dla metody LU:

Jednakże dla tych samych macierzy metoda LU działa poprawnie i umożliwia wyznaczenie rozwiązania układu. Otrzymana norma residuum wynosi $6.96337680888519e-13$, co oznacza, że rozwiązanie jest bardzo dokładne. Wynik ten potwierdza, że metoda LU radzi sobie znacznie lepiej z układami trudnymi dla metod iteracyjnych, które w tym przypadku prowadziły do rozbieżności.



Na powyższych wykresach przedstawiono porównanie czasu działania trzech metod rozwiązywania układów równań liniowych: Jacobiego, Gaussa-Seidla oraz metody bezpośredniej LU, w zależności od rozmiaru macierzy N . Wykres po lewej stronie prezentuje zależność w skali liniowej, natomiast po prawej – w skali logarytmicznej, co umożliwia lepszą ocenę złożoności obliczeniowej.

Na podstawie wykresów można zauważyć, że:

- Metoda LU ma największą złożoność czasową — czas jej działania rośnie wykładniczo, co jest zgodne z teorią (rzędowo $O(n^3)$)
- Metody iteracyjne (Jacobi i Gauss-Seidel) działają znacznie szybciej, a ich czas wzrasta wolniej, co sugeruje złożoność rzędu $O(n^2)$ lub lepszą.
- Metoda Gaussa ma najlepszą złożoność czasową

4. Podsumowanie

Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów i analizy wykresów można sformułować następujące wnioski:

Metody iteracyjne — Jacobiego i Gaussa-Seidla — mają zbliżoną złożoność czasową, jednak w praktyce metoda Gaussa-Seidla zwykle zbiega szybciej, dzięki wykorzystaniu aktualizowanych wartości podczas jednej iteracji. Obie metody wykazują dobrą zbieżność dla dobrze uwarunkowanych macierzy, ale nie gwarantują jej w każdym przypadku. Zostało to potwierdzone w zadaniu C, gdzie macierz A nie spełniała warunku dominacji diagonalnej i metody iteracyjne prowadziły do rozbieżności.

W przeciwieństwie do nich, metoda LU umożliwia dokładne rozwiązanie układu równań niezależnie od właściwości macierzy. Jej wadą jest jednak znacznie większy koszt obliczeniowy — szczególnie dla dużych macierzy.

W praktyce, dla dobrze uwarunkowanych układów i gdy kluczowy jest czas, bardziej efektywne okazują się metody Jacobiego i Gaussa-Seidla. Z kolei w sytuacjach wymagających wysokiej dokładności lub w przypadku trudnych macierzy, metoda LU stanowi lepszy wybór — mimo większego kosztu obliczeniowego.

