

## 1. INHALT

### S. 4 Reguläre Sprachen

**S. 9** Regulären Ausdruck für  $L$  finden

Ist die Sprache regulär? auch «soll mit einem regulären Ausdruck geprüft werden, ...»

JA: **S. 4** DEA, **S. 6** NEA, **S. 8** regulärer Ausdruck

NEIN: **S. 6** Pumping Lemma 1

### S. 10 Kontextfreie Sprachen

**S. 11** kontextfreie Grammatik in Chomsky Normalform finden

Ist die Sprache kontextfrei? Können Sie eine kontextfreie Grammatik angeben? (1 Ja, 1 Nein)

JA: **S. 12** Stackautomat, **S. 11** Chomsky Normalform, Grammatik

NEIN: **S. 14** Pumping Lemma 2

### S. 14 Turing-Maschine

**S. 14** Zustandsdiagramm analysieren & Lösungen am Ende

**S. 15** Wie lange braucht eine TM bis zum Stop? Berechnungsgeschichte

### S. 16 Entscheidbarkeit

Kann Problem von einem Computer gelöst werden? → Halteproblem/Haltetheorem (Reduktion z.B. mit Debugger) *Nichtentscheidbarkeit & Turing-Vollständigkeit der Sprache erwähnen*

Kann ein Programm entscheiden, ob die zulässigen Inputs eines beliebigen Programms M eine bestimmte Eigenschaft haben?

NEIN: **S. 17** Satz von Rice

### S. 18 Komplexität

**S. 19** Kann eine nicht deterministische Turing-Maschine ...? → NP-Verifizierer

**S. 20** Warum skaliert Problem nicht? → 1-zu-1 Reduktion auf ein NP vollständiges Problem, Karp

### S. 26 Turing-Vollständig

**S. 26** Ist eine Sprache Turing-vollständig, d.h. unbegrenzter grosser Speicher und unendliche

Schleife (z.B. auch bei Rekursion) möglich

JA: **S. 16** Turing-Maschinen-Simulator in dieser Sprache

NEIN: Haltetheorem

### Ablauf Prüfungsaufgaben

1. eine reguläre Sprache **S. 4**
2. eine nichtreguläre Sprache (Pumping Lemma) **S. 6**
3. eine kontextfreie Sprache (oft mit CNF) **S. 10**
4. eine nicht kontextfreie Sprache (Pumping Lemma) **S. 14**
5. ein nicht entscheidbares Problem (Rice oder Halteproblem) **S. 17**
6. ein Problem in NP (polynomieller Verifizierer) **S. 19**
7. ein NP-vollständiges Problem (polynomielle Reduktion) **S. 20**
8. etwas über Turing Maschinen **S. 14**

## 2. LOGIK & QUANTOREN

### 2.1. JUNKTOREN / VERKNÜPFUNGEN

¬ Negation *nicht* ⇒ Implikation *wenn ... dann ...*

∧ Konjunktion *und*

↔ Äquivalenz ... genau dann, wenn ...

∨ Disjunktion *oder*

### 2.2. QUANTOREN

Bei Aussagen, die Variablen enthalten, sind 2 Fälle besonders wichtig:

- **Allquantor:**  $\forall n \in \mathbb{N}$  gilt  $S(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$  «für alle  $n$  aus den natürlichen Zahlen gilt...»
- **Existenzquantor:**  $\exists n \in \mathbb{N}$  gilt  $S(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$  «es gibt eine natürliche Zahl  $n$ , für die gilt...»

### 2.3. BEWEISEN

Ein Beweis zeigt die Gültigkeit einer Behauptung unter gewissen Voraussetzungen und Annahmen:

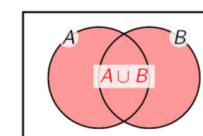
- **Direkter Beweis:**  $A \Rightarrow B$
- **Indirekter Beweis:**  $\neg B \Rightarrow \neg A$
- **Widerspruchsbeweis:**  $A \wedge \neg B \Rightarrow F$
- **Vollständige Induktion:**  $A(1) \wedge (A(n) \Rightarrow A(n+1)) \Rightarrow A(m), m \in \mathbb{N}$
- **Vollständige Fallunterscheidung:** Wenn  $A \Leftrightarrow A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$  und es gilt, dass  $(A_1 \Rightarrow B) \wedge (A_2 \Rightarrow B) \wedge \dots \wedge (A_n \Rightarrow B)$  ist, dann gilt auch  $A \Rightarrow B$
- **Schubfachprinzip:** Wenn  $n + 1$  Gegenstände (Objekte) auf  $n$  Schubladen (Kategorien) verteilt werden, dann befinden sich in mindestens einem Schubfach 2 Gegenstände.
- **Diagonalverfahren (Georg Cantor):** Anzahl rationaler Zahlen ist genau so gross wie die Anzahl natürlicher Zahlen.

## 3. MENGENLEHRE

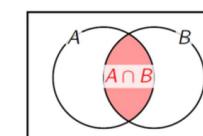
«Primitive Datentypen der Mathematik», **Zusammenfassung bestimmter Objekte**.

Konstruktion: Grundmenge  $G$ , Prädikat  $P(x)$ ,  $A = \{x \in G \mid P(x)\}$

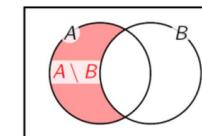
Vereinigung ODER



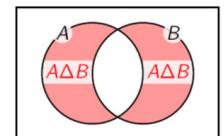
Schnittmenge UND



Differenzmenge



Symmetrische Differenz XOR



### 3.1. PAARE, TUPEL & GRAPHEN

- **Tupel:** Zusammengesetzte Datentypen der Mathematik

- **Paare (2-Tupel):**  $A, B$  sind Mengen, Menge aller Paare:  $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

- **N-Tupel:** Mengen  $A_0, \dots, A_n$ , Menge aller n-Tupel

## 4. SPRACHEN

### 4.1. ALPHABET UND WORT

Eine nichtleere endliche Menge  $\Sigma$  heisst **Alphabet**. Die Elemente von  $\Sigma$  heissen **Zeichen**.

#### Wort

Eine Zeichenkette der Länge n ist ein n-Tupel in  $\Sigma^n = \Sigma x \dots x \Sigma$ . Ein Element von  $\Sigma^n$  heisst «Wort der Länge n».

#### Abgekürzte Schreibweisen:

$(A, u, t, o, S, p, r) = AutoSpr$

$a^3b^5 = aaabbbb$

#### Leeres Wort

Die Zeichenkette  $\varepsilon \in \Sigma^0 = \{\varepsilon\}$  der Länge 0 heisst das leere Wort.

#### Menge aller Wörter

$$\Sigma^* = \{\varepsilon\} \cup \Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \dots = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Sigma^k$$

### 4.2. WORTLÄNGE

Wörter haben immer endliche Länge.

- **Länge des Wortes w:**  $w \in \Sigma^n \Rightarrow |w| = n$
- **Anzahl Zeichen im Wort w:** Sei  $w \in \Sigma^n$  und  $a \in \Sigma$ , dann ist  $|w|_a$  die Anzahl Zeichen im Wort w.

#### Beispiele

- $|\varepsilon| = 0$
- $|01010|_0 = 3$
- $|01010|_1 = 2$
- $|a^3b^5| = 8$
- $|(1291)^7| = 7|1291| = 7 * 4 = 28, |w^n| = n * |w|$

### 4.3. SPRACHE

Eine Sprache besteht aus diesen Wörtern. Eine Teilmenge von  $\Sigma^*$  ist eine Sprache.

#### Beispiele

- $L = \Sigma^* \subset \Sigma^*$
- $L = \emptyset \subset \Sigma^*$ , die leere Sprache
- $\Sigma = \{0,1\}$ , Sprache aller Binärstrings :  $L = \Sigma^*$
- $\Sigma = \{0,1\}, L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_0 = |w|_1\} \Rightarrow$  Alle Wörter beinhalten gleich viele Einsen und Nullen

### 4.4. SPRACHEN UND MASCHINEN

Der Compiler entscheidet, welche Speicherketten zur Sprache gehören.

**M eine «Maschine»:**  $L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ wird von } M \text{ akzeptiert}\}$

**Beispiel:**  $\Sigma = Unicode, J = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ wird vom Java-Compiler akzeptiert}\}$

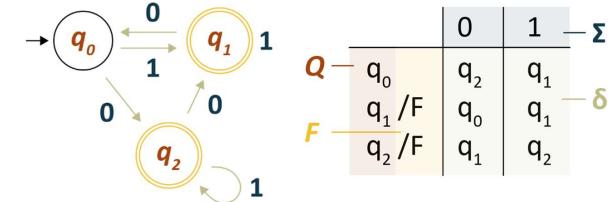
Zu jeder Maschine gibt es eine Sprache.

## 5. DETERMINISTISCHE ENDLICHE AUTOMATEN (DEA) UND REGULÄRE SPRACHEN

### 5.1. DEFINITION

$A = (\mathcal{Q}, \Sigma, \delta, q_0, F)$

- Zustände:  $\mathcal{Q} = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$
- Alphabet:  $\Sigma$
- Übergangsfunktion:  $\delta: \mathcal{Q} \times \Sigma \rightarrow \mathcal{Q}$
- Startzustand:  $q_0 \in \mathcal{Q}$
- Akzeptierzustände:  $F \subset \mathcal{Q}$



**Achtung:** Nach Erstellung immer nachkontrollieren, ob der DEA vollständig ist!

### 5.2. AKZEPTIERTE SPRACHE EINES DEA

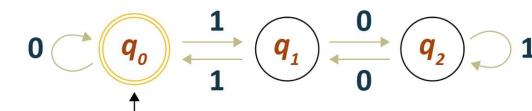
Der DEA  $A = (\mathcal{Q}, \Sigma, \delta, q_0, F)$  akzeptiert das Wort  $w \in \Sigma^*$ , wenn er A vom Startzustand in einen Akzeptierzustand  $\delta(q_0, w) \in F$  überführt.

Die von A akzeptierte Sprache ist  $L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid A \text{ akzeptiert } w\} = \{w \in \Sigma^* \mid \delta(q_0, w) \in F\}$

Die Sprache  $L \subset \Sigma^*$  heisst regulär, wenn es einen DEA A gibt, mit  $L(A) = L$ .

### 5.3. BEISPIEL: DURCH DREI TEILBARE BINÄRZAHLEN

- Zustände: Rest bei Teilung durch 3
- Übergänge: ein Bit anhängen (Shift) = Multiplikation mit 2



#### 5.3.1. Zustandsmenge aus der Sprache ableiten

Wie findet man heraus, wie viele Zustände ein DEA wirklich braucht?

**Bei diesem Beispiel:**  $L = \{\varepsilon, 0, 00, 11, 000, 011, 110, 0000, 0011, 0110, 1001, 1100, 1111, 00000, 00011, 00110, 01001, 01100, 01111, 10010, 10101, 11000, 11011, 11110, \dots\}$

Alle Werte durchprobieren, in Tabelle schreiben. Es wird Wiederholungen geben. Jede Wiederholung ist der Gleiche Zustand.

Daraus lässt sich der DEA generieren.

#### Myhill-Nerode Automat

Gestattet es uns, zu einer beliebigen regulären Sprache den endlichen Automaten zu konstruieren. Nicht immer praktisch, da man zum Teil mit grossen Mengen hantieren muss.

Auch nützlich, um redundante Zustände in einem bestehenden DEA zu finden.

Für ein Wort  $w \in \Sigma^*$  setze  $L(w) = \{w' \mid ww' \in L\}$ . Insbesondere  $L(\varepsilon) = L$ .

Gegeben: reguläre Sprache L über  $\Sigma$ . Rekonstruiere A mit:

W	L(w)	Q (Start)
$\varepsilon$	$\{\varepsilon, 0, 00, 11, 000, \dots\}$	$q_0$
0	$\{\varepsilon, 0, 00, 11, 000, \dots\}$	$q_0$
1	$\{1, 10, 001, 100, 111, \dots\}$	$q_1$
00	$\{\varepsilon, 0, 00, 11, 000, \dots\}$	$q_0$
01	$\{1, 10, 001, 100, 111, \dots\}$	$q_1$
10	$\{01, 010, 101, \dots\}$	$q_2$
11	$\{\varepsilon, 0, 00, 11, 000, \dots\}$	$q_0$
000	$\{\varepsilon, 0, 00, 11, 000, \dots\}$	$q_0$
001	$\{1, 10, 001, 100, 111, \dots\}$	$q_1$
010	$\{01, 010, 101, \dots\}$	$q_2$
011	$\{\varepsilon, 0, 00, 11, 000, \dots\}$	$q_0$
100	$\{1, 10, 001, 100, 111, \dots\}$	$q_1$
101	$\{01, 010, 101, \dots\}$	$q_2$
110	$\{\varepsilon, 0, 00, 11, 000, \dots\}$	$q_0$

- $Q = \{L(w) \mid w \in \Sigma^*\}$
- $q_0 = L(\epsilon) = L$
- $F = \{L(w) \in Q \mid \epsilon \in L(w)\}$
- $\delta(L(w), a) = L(wa)$

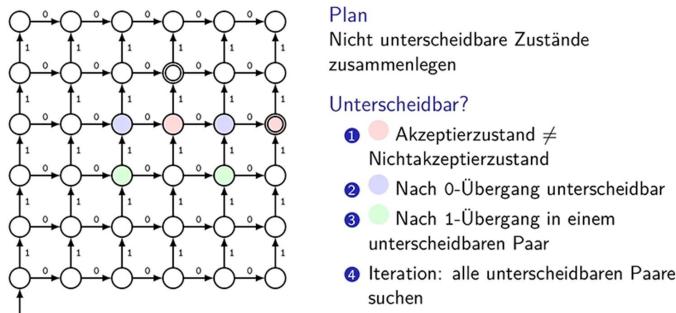
Beispiel:  $\Sigma = \{0,1\}$ ,  $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_0 \text{ gerade}\}$

$w$	$L(w)$	$Q$
$\epsilon$	$L(\epsilon) = L$	$q_0$
0	$L(0) = \{w \in \Sigma^* \mid  w _0 \text{ ungerade}\}$	$q_1$
1	$L(1) = \{w \in \Sigma^* \mid  w _0 \text{ gerade}\} = L$	$q_0$
...	...	...

Eine nicht-reguläre Sprache benötigt unendliche Zustände. Deshalb lässt sich für eine nicht-reguläre Sprache kein endlicher Automat erstellen.

#### Alternative Art, einen Automaten zu vereinfachen

Zustandspaare finden, die sich nicht zusammenlegen lassen.



#### Plan

Nicht unterscheidbare Zustände zusammenlegen

#### Unterscheidbar?

- ① Akzeptierzustand  $\neq$  Nichtakzeptierzustand
- ② Nach 0-Übergang unterscheidbar
- ③ Nach 1-Übergang in einem unterscheidbaren Paar
- ④ Iteration: alle unterscheidbaren Paare suchen

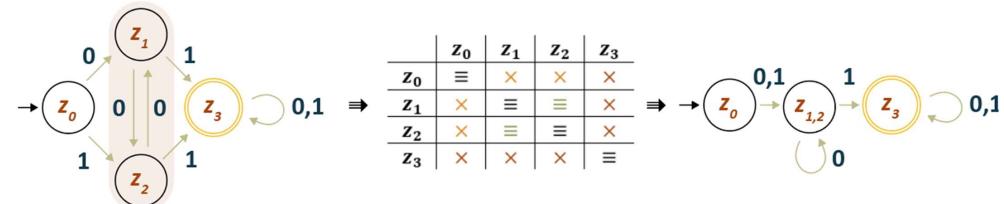
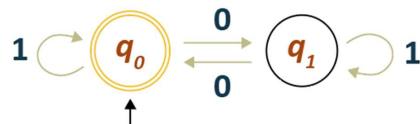
#### «Kreuzchenalgorithmus» - Minimalautomat finden

Dient als Beweis, ob zwei Automaten die gleiche Sprache akzeptieren.

Tabelle erstellen, in der erkennbar ist, ob sich zwei Zustände unterscheiden. Ablauf:

- Alle Zustände zu sich selber äquivalent markieren:  $\equiv$
- Paare aus einem Akzeptier- und einem Nichtakzeptierzustand (Zwei Zustände können nicht gleich sein, wenn einer davon ein Akzeptierzustand ist, der andere aber nicht):  $\times$
- Zweifingertechnik: Von einem Paar alle Übergänge testen, führt zu einem Paar mit  $\times$ ? Falls ja – ebenfalls ein  $\times$  eintragen. Wiederholen für alle Paare ohne Zuordnung.  
Bsp.  $z_0$  und  $z_1$ :  $z_1$  führt mit einem 1-Übergang zu einem Akzeptierzustand,  $z_0$  hingegen nicht.  $\times$
- Restliche Zustände sind Äquivalent  $\equiv$  und können minimiert werden.

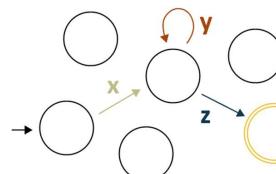
Ergibt folgenden Automaten



## 6. PUMPING LEMMA, NEA, MENGENOPERATIONEN

### 6.1. PUMPING LEMMA

Wenn ein Wort länger sein kann als die Anzahl Zustände, dann muss mindestens **ein Zustand mehrmals vorkommen im endlichen Automaten**: Ein Wort ist aufpumpbar (oder abpumpbar). Man kann damit **nachweisen**, dass eine Sprache **nicht regulär** ist, wenn sie mindestens ein Wort enthält, das nicht aufpumpbar ist. **Widerspruchsbeweis**.



Ist  $L$  eine reguläre Sprache, dann gibt es  $N \in \mathbb{N}$ , die pumping length so, dass jedes Wort  $w \in L$  mit  $|w| \geq N$  in drei Teile  $w = xyz$  zerlegt werden kann mit:

- $|xy| \leq N$  also  $xy$  auf linker Seite von  $N$ ,  $x$  und  $z$  dürfen 0 sein
- $|y| > 0$
- $xy^kz \in L, \forall k \in \mathbb{N}$

#### 6.1.1. Widerspruch Beweis/Ablauf (beweisen das Sprache NICHT regulär)

1. Annahme:  $L$  ist regulär
2. Es gibt die Pumping Length  $\exists N \in \mathbb{N}$
3. Wähle ein Wort  $w \in L$  mit  $|w| \geq N$ , Definition mit  $N$  (nicht mit  $n$ ) schreiben
4. Aufteilung des Wortes gemäss Pumping Lemma  $w = xyz$ ,  $|xy| \leq N$ ,  $|y| > 0$
5. Auswirkung des Pumpens mit Begründung
6. Widerspruch und Schlussfolgerung

#### Beispiele

$$L = \{w^n 1^n \mid n \geq 0\}$$

- Annahme:  $L$  ist regulär
- Pumping Length:  $\exists N \in \mathbb{N}$
- $w = 0^N 1^N$ ,  $N = \text{Pumping Length}$
- Aufteilung  $w = xyz$ :

0	$N$	1	$2N$
x	y	z	

0	$N+ y $	1	$2N+ y $
x	y	y	z

Zuerst  $N$  aufteilen und dazwischen die Aktionen / Zeichen/Buchstaben schreiben. Dann xyz schreiben

- Pumpen erhöht nur die Anzahl 0, jedoch nicht Anzahl 1
- Widerspruch:  $xy^kz \notin L$ , für  $k \neq 1$ ,  $L$  ist also nicht regulär

$$L = \{w = w \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

- Annahme:  $L$  ist regulär
- Pumping Length:  $\exists N \in \mathbb{N}$
- $w = 10^N$ ,  $N = \text{Pumping Length}$
- Aufteilung  $w = xyz$

1	0	=	$N$	1	0
x	y	z			

1	0	=	$N+ y $	1	0
x	y	y	z		

Zuerst  $N$  aufteilen und dazwischen die Aktionen / Zeichen/Buchstaben schreiben. Dann xyz schreiben

- Pumpen: Auf der linken Seite des Gleichheitszeichens wird eine grössere Binärzahl wie auf der rechten Seite stehen.
- Widerspruch:  $L$  ist nicht regulär

## 6.2. NICHTDETERMINISTISCHE ENDLICHE AUTOMATEN

Ein DEA kann sich aufhängen. Jede Verzweigung muss einzeln geprüft werden.

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

- Zustände:  $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$
- Alphabet:  $\Sigma$
- Übergangsfunktion:  $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow P(Q)$
- Startzustand:  $q_0 \in Q$
- Akzeptierzustände:  $F \subset Q$

### Definition Akzeptieren

Ein NEA A akzeptiert das Wort  $w \in \Sigma^*$ , wenn es eine Wahl von Übergängen gibt, derart, dass das Wort w den Automaten in einen Akzeptierzustand überführt.

### Faustregel

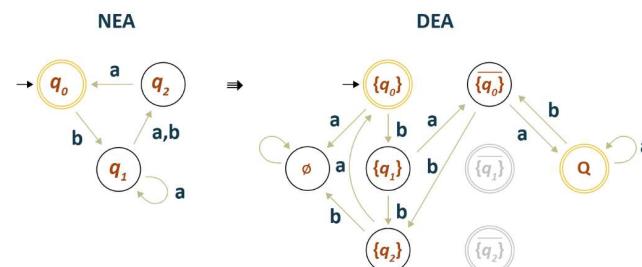
Nur genau diejenigen Pfeile einzeichnen, die man zum Akzeptieren braucht.

#### 6.2.1. Thompson-NEA: Transformation von NEA zu DEA («Könnte»-Automat)

- Alle Kombinationszustände einzeichnen
- Alle Zustände mit einem enthaltenen Akzeptierzustand sind Akzeptierzustände
- Vom Startzustand ausgehend alle Übergänge einzeichnen

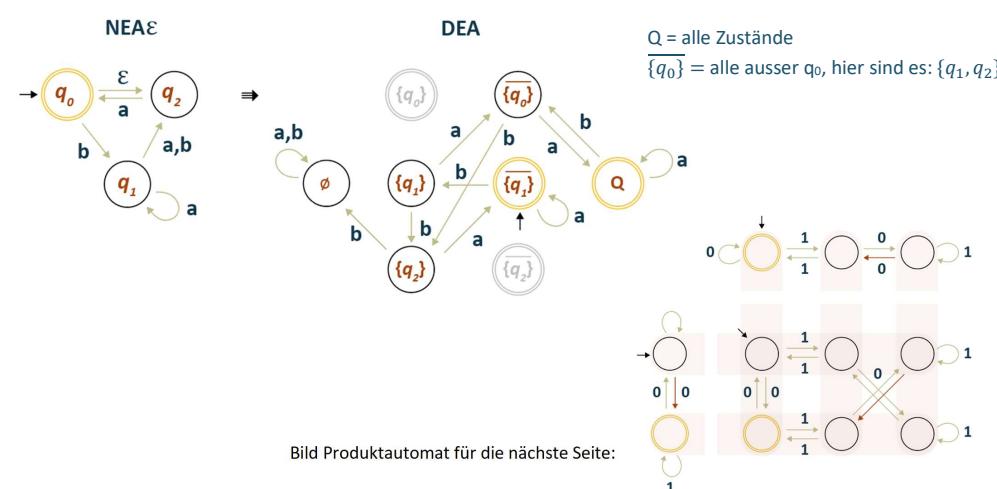
DEA hat die Potenzmenge der Zustände vom NEA also  $P(Q)$ .

$$\delta: P(Q) \times \Sigma : (R, a) \mapsto \bigcup_{q \in R} \delta(q, a)$$



$\epsilon$ -Übergänge Können ohne Verarbeitung eines Zeichens genommen werden. Sind gratis! Jeder NEA $\epsilon$  kann in einen NEA umgewandelt werden.

#### Beispiel Thompson NEA $\epsilon$ zu DEA



## 6.3. PRODUKTAUTOMAT

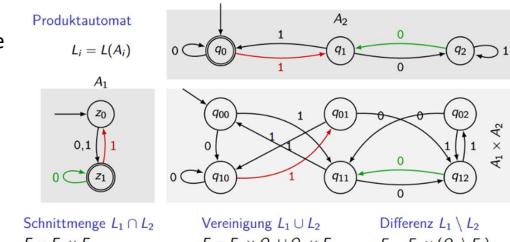
Beispiel im Bild ist die Schnittmenge

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_0 \text{ ungerade}\} \cap \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ ist eine durch drei teilbare Binärzahl}\}$$

- Beide Automaten auf eine Linie strecken / dehnen (falls möglich)
- Alle Übergänge einzeln eintragen, Zustandswechsel des einen Automaten wirkt sich auf die Horizontale aus, die des andern auf die Vertikale.
- Akzeptierzustand ist bei der Schnittmenge dort, wo beide Automaten einen Akzeptierzustand haben.

### Andere Akzeptierzustände:

- Vereinigung  $L_1 \cup L_2$ : Alle Zustände, welche bei mindestens einem Automaten ein Akzeptierzustand sind.
- Differenz  $L_1 \setminus L_2$ : Alle Zustände, welche nur beim ersten Automaten ein Akzeptierzustand sind.



## 6.4. MENGENOPERATIONEN

Wenn A1 und A2 DFA's sind, so kann man

Mengenoperationen darauf anwenden und erhält so immer wieder einen DFA, also wieder eine reguläre Sprache.

### Operationen:

- Schnittmenge:  $L_1 \cap L_2: F = F_1 \times F_2$
- Vereinigung:  $L_1 \cup L_2: F = F_1 \times Q_2 \cup Q_1 \times F_2$
- Differenz:  $L_1 \setminus L_2: F = F_1 \times (Q_2 \setminus F_2)$

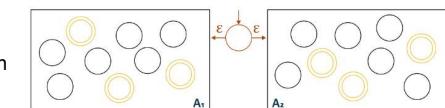
## 7. REGULÄRE OPERATIONEN UND REGULÄRE AUSDRÜCKE

### 7.1. REGULÄRE OPERATIONEN

#### - Vereinigung/Alternative (Oder):

$$L = L_1 \cup L_2 = L(A_1) \cup L(A_2)$$

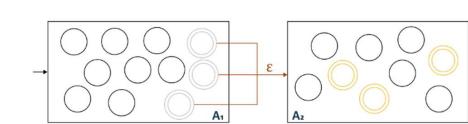
Neuer Startzustand mit  $\epsilon$ -Übergängen zu den einzelnen Automaten. Man kann entweder in den einen oder anderen Automaten gehen (ODER). Muss nicht wissen, was die einzelnen Automaten machen.



#### - Verkettung:

$$L = L_1 L_2 = L(A_1)L(A_2) = \{w_1 w_2 \mid w_i \in L_i\}$$

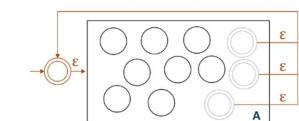
$A_1$  Akzeptierzustände mit  $\epsilon$ -Übergängen zu Startzugang  $A_2$ . Aus den vorherigen Akzeptierzuständen von  $A_1$   $\epsilon$ -Verknüpfung in  $A_2$ .  $A_1$  hat keine Akzeptierzustände mehr.



#### - \*-Operation:

$$L^* = \{\epsilon\} \cup L \cup L^2 \cup \dots = \bigcup_{k=0}^{\infty} L^k$$

Neuer Startzugang mit  $\epsilon$ -Übergang zum alten Startzustand,  $\epsilon$ -Verknüpfung aus den vorherigen Akzeptierzuständen von  $A$  zum neuen Startzugang. Leeres Wort ist ebenso akzeptiert.



## 7.2. REGULÄRE AUSDRÜCKE

VNEA ist ein NEA, dessen Pfeile mit regulären Ausdrücken angeschrieben sind.

Zu jedem regulären Ausdruck gibt es einen DEA.

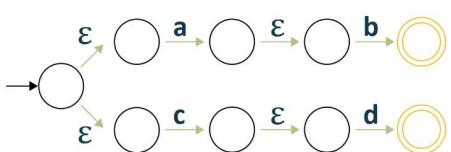
Ausdruck $r$	Sprache $L = L(r)$	Bedeutung	NEA
$\emptyset$	$\emptyset$	Die leere Sprache	
$\varepsilon$	$\{\varepsilon\}$	Sprache, die nur das leere Wort enthält	
$a$	$\{a\}$	Sprache, die nur $a \in \Sigma$ enthält	
$[a - s]$	$\{a, b, \dots, s\}$	Sprache, die bestimmte Buchstaben enthält	
.	$\Sigma$	Jedes Zeichen aus $\Sigma$ wird akzeptiert	
$r_1   r_2$	$L(r_1) \cup L(r_2)$	$r_1$ oder $r_2$ Alternative / Vereinigung von zwei Sprachen	
$r_1 r_2$	$L(r_1)L(r_2)$	$r_1 r_2$ Verkettung von zwei Sprachen	
$r_1^*$	$L(r_1)^*$	Beliebig viele $r_1$	
$r^+$	$rr^*$	Mindestens ein $r$ plus beliebig viele $r$	
$r?$	$\varepsilon   r =  r$	Das leere Wort oder ein Mal $r$	
$r\{2\}$	$rr$	Genau zwei Mal $r$	
$r\{2,3\}$	$rr   rrr$	Zwei oder drei Mal $r$	
$r\{3\}$	$\varepsilon   r   rr   rrr$	Höchstens drei Mal $r$	
$r\{3,\}$	$rrrr^*$	Mindestens drei Mal $r$	

## 7.3. UMWANDLUNG REGEX -> NEA

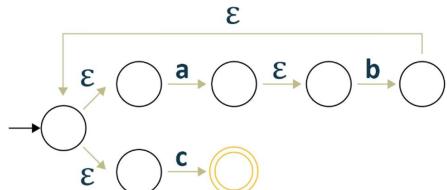
- Von innen nach aussen übersetzen (Klammern zuerst)
- Einzelne Teile mittel  $\varepsilon$ -Übergängen verbinden

### Beispiele

$ab | cd$

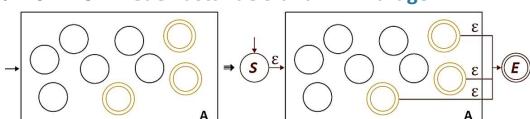


$(ab)^* c$

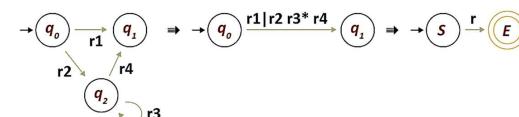


## 7.4. UMWANDLUNG VNEA ZU REGULÄREM AUSDRUCK

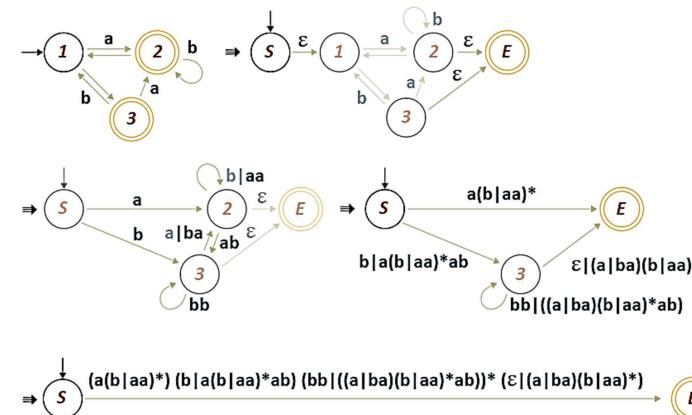
- Sichergehen, dass vom Startzugang zur Pfeile wegführen und beim Akzeptierzustand nur Pfeile ankommen: **Neue Zustände S und E hinzufügen**



- Alle Zwischenzustände der Reihe nach entfernen



### 7.4.1. Beispiel



## 8. KONTEXTFREIE SPRACHEN

Kontextfreie Sprachen können nur von nichtdeterministischen Stackautomaten erkannt werden. Existiert ein Stackautomat, Regex oder eine Grammatik, ist die Sprache kontextfrei.

Kontextfrei bedeutet, dass bei den Regeln bei der Variable auf der linken Seite der Kontext nicht relevant ist.

- **Regeln ohne Kontext:**  $S \rightarrow A | C, A \rightarrow a, A \rightarrow aAb, C \rightarrow bA$
- **Regeln mit Kontext:**  $S \rightarrow C | aC | bC, aC \rightarrow A, bC \rightarrow B$

expression  $\rightarrow$  expression+term

$\rightarrow$  term

term  $\rightarrow$  term\*factor

$\rightarrow$  factor

factor  $\rightarrow$  (expression)

$\rightarrow N$

Beispiel einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik:  $G = (V, \Sigma, R, S)$

- $V$ : Endliche Menge von Variablen
- $\Sigma$ : Endliche Menge von Zeichen, Terminalssymbole (Alphabet)
- $R$ : Eine Menge von Regeln der Form  $A \rightarrow x_1x_2 \dots x_n$  mit  $A \in V \cup \Sigma$
- $S \in V$ : Startvariable

### 8.1.1. Beispiele

$L = \{w \in \{(, )\} \mid w \text{ gültige Klammerung}\}$

- $V = \{K\}$
- $\Sigma = \{(, )\}$
- $R = \{K \rightarrow \varepsilon, K \rightarrow KK, K \rightarrow (K)\}$
- $S = K$

$L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

- $V = \{Q\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $R = \{Q \rightarrow \varepsilon, Q \rightarrow 0Q1\}$
- $S = Q$

## 8.1.2. Grammatik für reguläre Operationen

$L_1$  und  $L_2$  sind kontextfreie Sprachen mit Grammatiken  $G_i = (V_i, \Sigma_i, R_i, S_i)$ . Grammatik für reguläre Operationen:

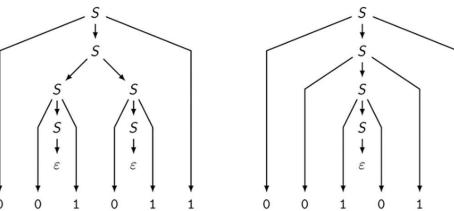
- Neue Startvariable  $S_0$
  - Variablen  $V = V_1 \cup V_2 \cup \{S_0\}$
  - Geeignet erweiterte Regeln  $R$
- $\Rightarrow G = (V, \Sigma, R, S_0)$

- **Alternative / OR:** Regeln für  $L_1 \cup L_2$ :  
 $R = R_1 \cup R_2 \cup \{S_0 \rightarrow S_1, S_0 \rightarrow S_2\}$
- **Verkettung / AND:** Regeln für  $L_1 L_2$   
 $R = R_1 \cup R_2 \cup \{S_0 \rightarrow S_1 S_2\}$
- **\*-Operation:** Regeln für  $L_1^*$   
 $R = R_1 \cup \{S_0 \rightarrow S_0 S_1, S_0 \rightarrow \epsilon\}$

## 8.2. PARSE-TREE

Zwei Ableitungen eines Wortes  $w$  einer kontextfreien Sprache  $L$  heißen **äquivalent**, wenn sie den **gleichen Ableitungsbaum** (Parse-Tree) haben. Hat eine Sprache Wörter **mit verschiedenen Parse-Trees**, heißt sie **mehrdeutig**.

**Beispiel mehrdeutiger Parse Tree**  
 $S \rightarrow 0S1 \mid 1S0 \mid SS \mid \epsilon$



## 8.3. CHOMSKY-NORMALFORM (CNF)

Eine Regel ist in der Chomsky-Normalform, wenn **S auf der rechten Seite nicht vorkommt** und jede Regel von der Form  $A \rightarrow BC$  oder  $A \rightarrow a$  ist. Zusätzlich ist noch die Regel  $S \rightarrow \epsilon$  erlaubt.

### 8.3.1. Umwandlung in Chomsky-Normalform

- Neue Startvariable  $S_0 \rightarrow S$  (die erste Variable muss nicht zwingend  $S$  heißen)
- $\epsilon$ -Regeln:  $\frac{A \rightarrow \epsilon}{B \rightarrow AC} \rightarrow A$  kann weggelassen werden  $\Rightarrow \frac{B \rightarrow AC}{\epsilon}$
- Unit-Rules:  $\frac{A \rightarrow B}{B \rightarrow CD} \rightarrow$  aus  $A$  kann man wie aus  $B$  auch  $CD$  machen  $\Rightarrow \frac{A \rightarrow CD}{B \rightarrow CD}$
- Verkettungen:  $A \rightarrow u_1 u_2 \dots u_n$  ersetzen durch  $A \rightarrow u_1 A_1, A_1 \rightarrow u_2 A_2, \dots A_{n-2} \rightarrow u_{n-1} u_n$  und falls  $u_i$  ein Terminalsymbol ist:  $A_{i-1} \rightarrow U_i A_i, U_i \rightarrow u_i$

### 8.3.2. Beispiel

#### Ausgangsgrammatik

- $S \rightarrow ASA \mid aB$
- $A \rightarrow B \mid S$
- $B \rightarrow b \mid \epsilon$

#### Schritt 1: Neue Startvariable

- $S_0 \rightarrow S$
- $S \rightarrow ASA \mid aB$
- $A \rightarrow B \mid S$
- $B \rightarrow b \mid \epsilon$

#### Schritt 2: $\epsilon$ nur aus Startvariable, das heißt A und B sind fakultativ

- $S_0 \rightarrow S$
- $S \rightarrow ASA \mid SA \mid AS \mid S \mid aB \mid a$
- $A \rightarrow B \mid S$
- $B \rightarrow b$

#### Schritt 3: Keine Unit-Rules

- $S_0 \rightarrow ASA \mid SA \mid AS \mid aB \mid a$
- $S \rightarrow ASA \mid SA \mid AS \mid aB \mid a$
- $A \rightarrow b \mid ASA \mid SA \mid AS \mid aB \mid a$
- $B \rightarrow b$

#### Schritt 4: Auf rechten Seite genau 2 Variablen oder genau ein Terminalsymbol

(Nicht Variable und Terminalsymbole gemischt)

- $S_0 \rightarrow AA_1 \mid SA \mid AS \mid UB \mid a$
- $S \rightarrow AA_1 \mid SA \mid AS \mid UB \mid a$
- $A \rightarrow b \mid AA_1 \mid SA \mid AS \mid UB \mid a$
- $B \rightarrow b$
- $A_1 \rightarrow SA$
- $U \rightarrow a$

## 8.3.3. Anwendung der Chomsky-Normalform

Chomsky-Normalform ist nicht eindeutig, es kommt auf die Reihenfolge darauf an, wie die Schritte angewendet werden. Man kann sie deshalb nicht brauchen, um Grammatiken zu vergleichen.

- Ableitung eines Wortes  $w \in L(G)$  ist immer in  $2|w| - 1$  Regelanwendungen möglich

### 8.3.4. Deterministisches Parsen

Ist  $w$  aus  $A$  ableitbar? In Zeichen  $A \xrightarrow{*} w$

**Spezialfälle:**  $w = \epsilon$  und  $|w| = 1 \rightarrow w$  ist ein Terminalsymbol. Falls  $|w| > 1$ :

$$A \xrightarrow{*} w \Rightarrow \exists \begin{cases} A \rightarrow BC & \in R \\ w = w_1 w_2 & w_i \in \Sigma^* \end{cases} \text{ mit } \begin{cases} B \xrightarrow{*} w_1 \\ C \xrightarrow{*} w_2 \end{cases}$$

## 8.4. CYK-ALGORITHMUS (COCKE-YOUNGER-KASAMI)

Damit lässt sich der Parse-Tree finden.

**Nachteil:** Laufzeit ist  $O(n^3)$

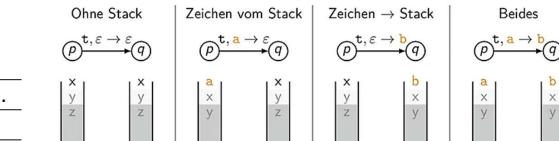
- **Zeile 0:** Terminalsymbol-Regeln
- **Zeile 1:** Variablen, die Paare produzieren können
- ...

## 8.5. STACKAUTOMAT / PUSH DOWN AUTOMAT (PDA)

Ein Stackautomat kann nur **kontextfreie Grammatiken erkennen**. Er ist immer **nicht deterministisch**.

Stackautomat  $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, S, F)$

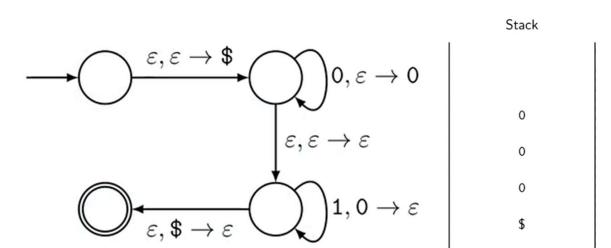
Zeichen	Bezeichnung	Beispiel
$Q$	Zustände	$q_0, q_1, \dots$
$\Sigma$	Eingabe-Alphabet	$\{0, 1\}$
$\Gamma$	Stack-Alphabet	$\{0, 1, \$\}$
$\delta$	$Q \times \Sigma_\epsilon \times \Gamma_\epsilon \rightarrow P(Q \times \Gamma_\epsilon)$	$\epsilon \rightarrow \$$
$S$	Startzustand	$q_0$
$F$	Akzeptierzustände	$q_3$



**Übergänge:** Siehe Bild, gelesen als «Verarbeite Input  $a$  und ersetze  $b$  auf dem Stack durch  $c$ ».

### 8.5.1. Beispiel

Jedes 0 wird auf den Stack gelegt. Bei jedem 1 wird wieder eine 0 vom Stack entfernt.



### 8.5.2. Stackautomat standardisieren rote Inhalte ergänzen

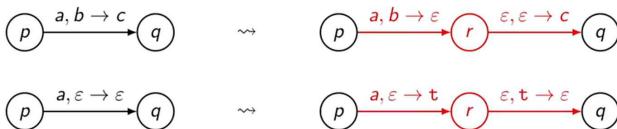
- Nur ein Akzeptierzustand: neuer Akzeptierzustand  $q_a$  und Übergänge  $\forall q \in F$



- Stack leeren: Am Ende soll nichts mehr auf dem Stack sein.



- Jeder Übergang legt entweder ein Zeichen auf den Stack oder entfernt eines:

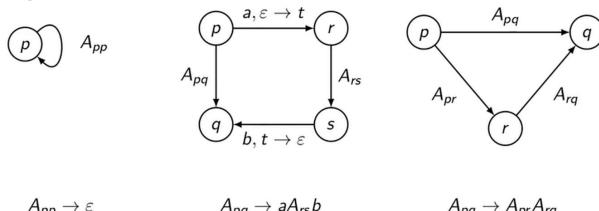


### 8.5.3. Grammatik ablesen

**Ausgangspunkt:** standardisierte Grammatik mit Starzustand  $q_0$  und  $F = \{q_a\}$

- Startvariable:  $A_{q_0, q_a}$

- Regeln:

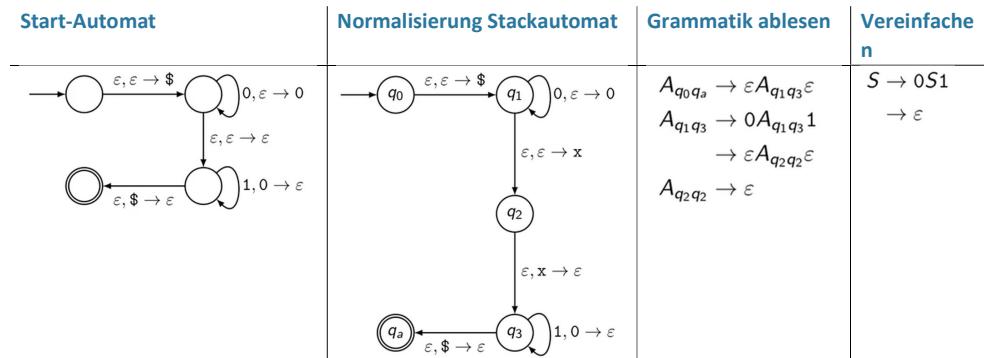


$$A_{pp} \rightarrow \epsilon$$

$$A_{pq} \rightarrow aA_{rs}b$$

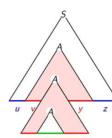
$$A_{pq} \rightarrow A_{pr}A_{rq}$$

**Beispiel  $L = \{0^n 1^n | n \geq 0\}$**



### 8.6. PUMPING LEMMA FÜR KONTEXTFREIE SPRACHEN

Es gibt auch Sprachen, die **nicht kontextfrei** sind. Z.B. die Sprache  $L = \{a^n b^n c^n | n \geq 0\}$ . Um zu **beweisen, dass eine Sprache nicht kontextfrei ist**, kann man das Pumping Lemma verwenden, muss aber die Grammatik dazu nehmen.



Ist  $L$  eine Kontextfreie Sprache (CFL), dann gibt es eine Zahl  $N$ , die Pumping Length, derart, dass jedes Wort  $w \in L$  mit  $|w| \geq N$  in fünf Teile  $w = uvxyz$  zerlegt werden kann, dass

- $|vy| > 0$
- $|vxy| \leq N$
- $uv^kxy^kz \in L \forall k \in \mathbb{N}$

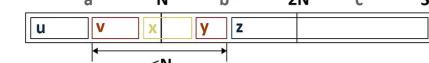
Mit dem Pumping Lemma kann man **beweisen**, dass eine Sprache **nicht kontextfrei** ist.

(nur v und y gleich viel pumpen, wie bei Sprache mit Klammern () )

Beispiel:  $\{a^n b^n c^n | n \geq 0\}$

1. Annahme  $L$  ist kontextfrei
2. Pumping Length  $\exists N \in \mathbb{N}$
3. Wort  $w = a^N b^N c^N$  (Achtung,  $N$  und nicht  $n$ )
4. Unterteilung/Aufteilung (Zerlegung)

Zuerst  $N$  aufteilen und dazwischen die Zeichen / Buchstaben schreiben. Danach  $(uv)xyz$  einzeichnen



### 5. Pumpen

Beim Pumpen nimmt die Anzahl der  $a$  und  $b$  zu, nicht aber die Anzahl der  $c$  zu  $uv^kxy^kz \notin L \forall k \neq 1$

5. Widerspruch  $L$  ist nicht kontextfrei.  
(Im Widerspruch zum Pumping Lemma.  $uv^kxy^kz \notin L$  für  $k \neq 1$ )

## 9. TURING MASCHINEN

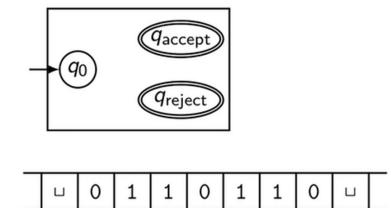
Eine Turing Maschine besteht aus:

- Einem **unendlich langem Speicherband** mit unendlich vielen sequentiell angeordneten Feldern. Pro Feld kann genau ein Zeichen aus einem vordefinierten Alphabet gespeichert werden.
- Einem **Lese- und Schreibkopf**, der sich auf dem Speicherband feldweise bewegen kann.

Eine Sprache  $L$  heisst «Turing-Erkennbar», wenn es eine Turing-Maschine  $M$  gibt, die das Wort akzeptiert.

Turing Maschine  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, S, q_{accept}, q_{reject})$

Zeichen	Bezeichnung	Beispiel
$Q$	Zustände	$q_0, q_1, \dots$
$\Sigma$	Eingabe-Alphabet	$\{0, 1\}$
$\Gamma$	Stack-Alphabet	$\{0, 1, \sqcup\}$
$\delta$	$Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$	$a \rightarrow b, R$
$S$	Startzustand	$q_0$
$q_{accept}$	Akzeptierzustand	
$q_{reject}$	Ablehnungszustand	



### Zustandsdiagramm

$$\delta(p, a) = (q, b, L)$$



### Übergang

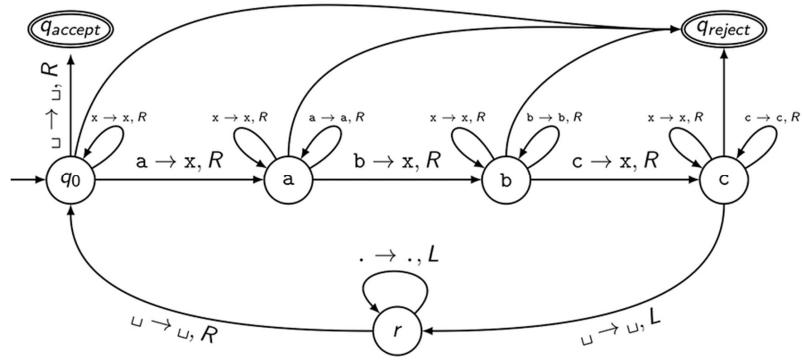
- Übergang möglich, wenn  $a$  unter dem Schreib-/Lese-Kopf
- Aktuelles Feld auf dem Band wird mit  $b$  überschrieben
- Kopfbewegung:  $L$  links,  $R$  rechts

### 9.1. ABLAUF PROGRAMM

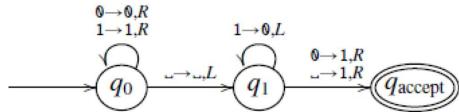
- Inputwort  $w$  auf Band schreiben
- Schreib-/Lesekopf auf erstes Zeichen Positionieren (meist  $\sqcup$ )
- Maschine starten,  $t(w)$  Einzelschritte ausführen
- Maschine hält in  $q_{accept}$  oder  $q_{reject}$  an und akzeptiert oder verwirft Wort entsprechend

## 9.2. BEISPIELE

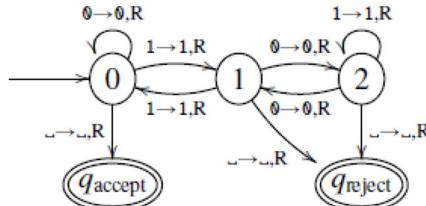
$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$



Binärzahlen um 1 erhöhen



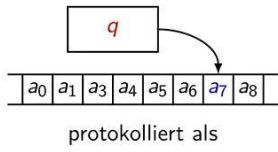
Binärzahlen durch 3 teilbar (DEA in Turing umwandeln)



## 9.3. BERECHNUNGSGESCHICHTE

Kann auch auf ein Ausfüllrätsel reduziert werden und somit beweisen, dass SAT NP-Vollständig ist

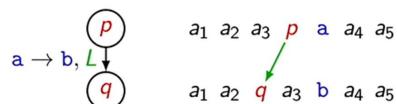
Notation für Maschinenzustand



protokolliert als

$a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 q a_7 a_8$

Übergang

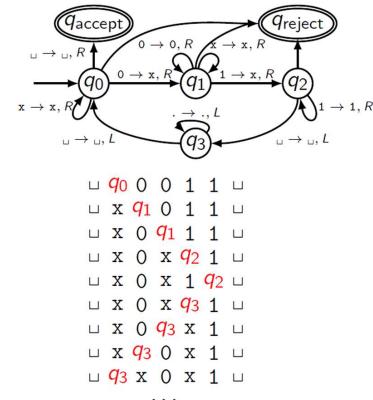


## 9.4. VARIANTEN VON TURING-MASCHINEN

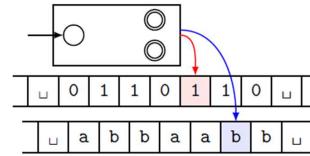
Jede Sprache, die von einer alternativen Turingmaschine erkannt werden kann, kann auch von einer einspurigen Turingmaschine erkannt werden, ist einfach langsamer.

- **Anderes Bandalphabet:** Simuliert z.B. durch binäre Codierung,  $O(t(n))$

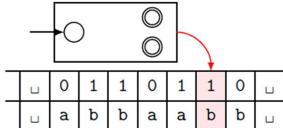
Protokoll einer Berechnung



Band bekommt eine zusätzliche Spur für die Position. Die Position wird über ein Zeichen gelöst, welches verschoben wird und die Position anzeigen.  $O(t(n)^2)$



- **Mehrspurige TM (ein Pointer):** Simuliert, indem man die Spuren alle seriell hinterlegt.  $O(t(n))$



## 9.5. ENTSCHEIDBARKEIT

Ein Entscheider ist eine Turing-Maschine, die auf jedem beliebigen Input anhält. Eine Sprache  $L$  heißt entscheidbar, wenn es einen Entscheider  $M$  gibt mit  $L = L(M)$ . Man sagt,  $M$  entscheidet  $L$ .

### 9.5.1. Turing-erkennbare Sprache

Eine Sprache  $L$  heißt Turing-erkennbar, wenn es eine TM  $M$  gibt, die die Sprache  $L$  als Input akzeptiert. Die TM kann auch unendlich lange laufen, wenn kein akzeptierter Input eingegeben wird. Ausser wenn  $M$  ein Entscheider ist, dann hält es immer an.

### 9.5.2. Entscheidbare Probleme

$E$  = Leerheitsproblem  $M$  ist eine Turing-Maschine und  $M$  hält auf leerem Band,  $ALL$  = Gegenteil von Leerheitsproblem

$EQ$  = Gleichheitsproblem,  $A$  = Akzeptanzproblem,  $CFG$  = context free grammar

Problem	Wort	Bedingung	Entscheidbar	Entscheidungsalgorithmus
$E_{DEA}$	$\langle A \rangle$	$L(A) = \emptyset$	Ja	Minimalautomat hat keinen Akzeptierzustand
$E_{CFG}$	$\langle G \rangle$	$L(G) = \emptyset$	Ja	Chomsky-Normalform
$E_{TM}$	$\langle M \rangle$	$L(M) = \emptyset$	Nein	Reduktion möglich: $A_{TM} \leq E_{TM}$
$EQ_{DEA}$	$\langle A_1, A_2 \rangle$	$L(A_1) = L(A_2)$	Ja	Vergleich der minimalen Automaten, oder Leerheitsproblem bei: $L(A_1) \Delta L(A_2)$
$EQ_{CFG}$	$\langle G_1, G_2 \rangle$	$L(G_1) = L(G_2)$	Nein	Es gibt eine Reduktion $ALL_{CFG} \leq EQ_{CFG}$ . Da $ALL_{CFG}$ nicht entscheidbar, auch $EQ_{CFG}$ nicht entscheidbar.
$EQ_{TM}$	$\langle M_1, M_2 \rangle$	$L(M_1) = L(M_2)$	Nein	Weil $EQ_{PDA}$ nicht entscheidbar
$A_{DEA}$	$\langle A, w \rangle$	$w \in L(A)$	Ja	Regex-Engines simulieren beliebige DEAs auf beliebigen Input-Wörtern $w$
$A_{CFG}$	$\langle G, w \rangle$	$w \in L(G)$	Ja	CYK, deterministischer Parse-Algorithmus
$A_{TM}$	$\langle M, w \rangle$	$w \in L(M)$	Nein	Halteproblem
$HALT_{TM}$	$\langle M, w \rangle$		Nein	Auf $A_{TM}$ reduziert -> nicht entscheidbar. $HALT_{TM} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ ist eine TM, die auf dem Wort } w \text{ anhält} \}$
$ALL_{CFG}$			Nein	(Gegenteil von $E$ Problem mit TM) $A_{TM} \leq ALL_{PDA}$
$ALL_{PDA}$	$\langle M, w \rangle$		Nein	Reduktionsabbildung der Gegenteil akzeptiert
$A_{\epsilon CFG}$				wenn Chomsky-Normalf. Regel $S \rightarrow \epsilon$ enthält

- **Nichtdeterministische TM:** Bei jedem Übergang maximal  $N$  verschiedene Möglichkeiten. Mehrere Berechnungswege möglich, Akzeptiert sobald ein Weg zu  $q_{accept}$  führt. Simulation: Maximal  $2^{O(t(n))}$ . 3 Bänder: Arbeitsband, Kopie von  $w$  und Liste aller Folgen von Wahlmöglichkeiten
- **Aufzähler:** Eine TM mit einem Drucker, bei dem gefundene Wörter «ausgedruckt» werden können. Kann endlos laufen. Wort kann mit «Ausdruck» verglichen werden um akzeptiert zu werden. Aufzählbare Sprache  $\leftrightarrow$  Turing-Erkennbare Sprache

### 9.5.3. Reduktion

Mittels **Reduktion** kann bewiesen werden, dass eine **TM nicht entscheidbar** ist. Dazu **reduziert** man eine TM auf eine **nicht entscheidbare TM ( $E_{TM}$ )**. Idee: **Neues Problem schaffen, welches allenfalls einfacher zu lösen ist.** ( $A$  ist leichter entscheidbar als  $B$ )

**Berechenbare Abbildung:**  $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$

Ist  $B$  **entscheidbar**, dann ist auch  $A$  **entscheidbar**. Ist  $B$  **nicht entscheidbar**, dann ist auch  $A$  **nicht entscheidbar**.

Reduktion für Halteproblem:  $A_{TM} \leq HALT_{TM}$

$A_{TM}$  ist nicht entscheidbar  
Akzeptiert die Maschine  $M$  das Wort  $w$ ?  
Es gibt keinen Entscheider

$\Leftrightarrow$  Programm  $S$   
1. Führt  $M$  auf Inputwort  $w$  aus  
2.  $M$  hält in  $q_{accept}$ : akzeptiert  
3.  $M$  hält in  $q_{reject}$ : Endlosschleife

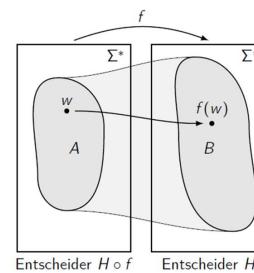
$M$  akzeptiert  $w$   
Entscheider für  $A_{TM}$   
1. Konstruiere das Programm  $S$   
2. Wende  $H$  auf  $(S)$  an

Ist  $HALT_{TM}$  entscheidbar?  
Hält eine beliebige Maschine  $S$  an?

$A_{TM}$  ist nicht entscheidbar  
Akzeptiert die Maschine  $M$  das Wort  $w$ ?  
Es gibt keinen Entscheider

$\Leftrightarrow$  Programm  $S$  mit Input  $w$   
1.  $M$  auf  $w$  laufen lassen  
2.  $M$  akzeptiert  $w$ :  $q_{accept}$   
3.  $q_{reject}$

$M$  akzeptiert  $w$   
Entscheider für  $HALT_{TM}$   
Wenn  $H$  ein Entscheider für  $HALT_{TM}$  wäre, könnte man daraus einen Entscheider für  $A_{TM}$  konstruieren



### Satz von Rice

Ist  $P$  eine nichtriviale Eigenschaft Turing-erkennbarer Sprachen, dann ist

$P_{TM} = \{M \mid L(M) \text{ hat Eigenschaft } P\}$  nicht entscheidbar.

**Voraussetzung:** keine Einschränkung machen, wie Zahlengröße reduzieren

**Definition nichtrivial:** Eine Eigenschaft  $P$  Turing-erkennbarer Sprachen heisst nichtrivial, wenn es zwei Turing-Maschinen  $M_1$  und  $M_2$  gibt, wobei  $M_1$  die Eigenschaft hat und  $M_2$  nicht.

**Folgerung:** Es ist nicht möglich, einem Programm anzusehen, ob die akzeptierte Sprache eine nichtriviale Eigenschaft hat.

### Lösungsanleitung einer Prüfungsfrage:

- Nichtriviale Eigenschaft  $P$  aufschreiben
- Die beiden Sprachen  $L(M_1)$  und  $L(M_2)$  bilden (meistens kann man die leere Menge oder  $\Sigma^*$  als eine dieser Sprachen verwenden)
- Gibt es ein Programm, welches beide Sprachen erkennen kann? Sind beide Sprachen Turing erkennbar?
- Dann besagt der Satz von Rice, dass die Sprache nicht entscheidbar ist.

### Beispiel 1

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Rice, dass die Frage, ob eine Turing-Maschine eine kontextfreie Sprache akzeptiert, nicht entscheidbar ist.

Ob eine Sprache kontextfrei ist oder nicht ist eine nichtriviale Eigenschaft. Um dies zu zeigen, muss man zwei Sprachen angeben, von denen die eine Kontextfrei ist und die andere nicht. Zwei mögliche Sprachen sind

$L_1 = \Sigma^*$  alle Wörter, kontextfrei dank der Grammatik

$$\begin{cases} S \rightarrow SZ \mid \epsilon \\ Z \rightarrow \Sigma \end{cases}$$

$L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$  nicht kontextfrei, Standardbeispiel

Da die Spracheigenschaft, kontextfrei zu sein, eine nichtriviale Eigenschaft ist, folgt nach dem Satz von Rice, dass nicht entscheidbar ist, ob eine Turing-Maschine eine kontextfreie Sprache akzeptiert.

### Beispiel 2

$P_{PRIMES}$  = "Sprache besteht nur aus den Primzahlen"

$L_0 = \{42\}$   $L_1 = \{\text{Primzahlen}\}$   $\Rightarrow$  Turing erkennbar

Satz von Rice greift da, so  $P_{PRIMES}$  nicht entscheidbar

Alternativ:

1. Reduktion auf Problem mit Erklärung
  - a. Halteproblem
  - b. Leerheitsproblem
  - c. Regularitätsproblem
2. Problem ist nicht entscheidbar
3. Satz von Rice als zusätzliche Begründung

$A_{TM}$  ist nicht entscheidbar  
Akzeptiert die Maschine  $M$  das Wort  $w$ ?

Reduktion für  $P_{TM}$ :  $A_{TM} \leq P_{TM}$   
Ist  $P_{TM}$  entscheidbar?  
Hat die Sprache  $L(M)$  die Eigenschaft  $P$ ?

Annahmen  
•  $\Sigma^*$  hat die Eigenschaft  $P$

• Testprogramm  $T$ :  $L(T)$  hat  $P$  nicht

→ Programm  $S$  mit Input  $w$

① Programm  $T$  akzeptiert  $w$ :  $q_{accept}$

②  $M$  auf  $w$  laufen lassen

③  $M$  akzeptiert  $w$ :  $q_{accept}$

④  $q_{reject}$

$M$  akzeptiert  $w$   
 $M$  akzeptiert  $w$  nicht

↔  $S$  akzeptiert:  $\Sigma^*$ , hat  $P$

↔  $S$  akzeptiert  $L(M)$ , hat  $P$  nicht

## 10. KOMPLEXITÄT

Eine Turing-Maschine mit mehreren Bändern und Laufzeit  $t(n)$  kann in Laufzeit  $O(t(n)^2)$  auf einer Standard Turing-Maschine simuliert werden.

Sei  $N$  aber eine Nichtdeterministische Turing-Maschine, dann kann diese in Laufzeit  $2^O(t(n))$  simuliert werden. Dies gilt nur für NTM, die auch Entscheider sind.

### 10.1. POLYNOMIELLE UND EXPONENTIELLE LAUFEZEIT

#### Polynomielle Probleme Skalierbarkeit

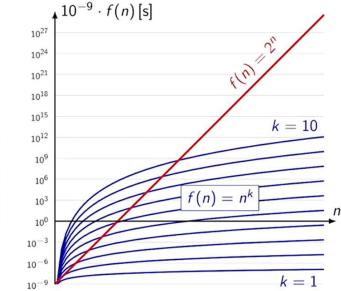
- Gauss-Alogrithmus  $O(n^3)$
- FFT  $O(n \log n)$
- Sortieren  $\leq O(n^2)$

Annahme  
Zykluszeit 1 ns

Laufzeit = Anzahl Schritte

$n$	$n^5$	$2^n$
1	1ns	2ns
2	32ns	4ns
4	1.0/ $\mu$ s	16ns
8	32.7/ $\mu$ s	256ns
16	1.0ms	65.5/ $\mu$ s
32	33.5ms	4.3ms
64	1.0s	584 Jahre
128	34.4s	$10^{21}$ Jahre

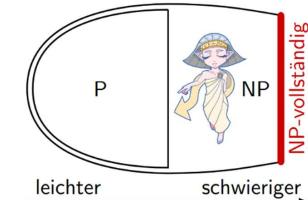
abhängig von der Inputlänge  $n$



### 10.2. KLASSE P UND NP

Die **Klasse P** besteht aus den Sprachen, die mit einem **Entscheider** (DTM) in **polynomieller Laufzeit entschieden** werden können. Ist eine Teilmenge von NP.

Die **Klasse NP** besteht aus Sprachen, die mit einer **nichtdeterministischen Turingmaschine** (NTM) in **polynomieller Laufzeit entschieden** werden können. Eine Sprache ist genau dann in NP, wenn sie in **polynomieller Zeit verifiziert werden kann**.



**Nicht verwechseln mit NP-vollständig:** Eine entscheidbare Sprache  $B$  heisst **NP-vollständig**, wenn sich jede Sprache  $A$  in NP polynomiell auf  $B$  reduzieren lässt:  $A \leq_P B \quad \forall A \in NP$  NP-vollständige Probleme sind alle gleich schwierig. Falls  $P = NP$ , dann können NP-vollständige Probleme nicht in polynomieller Zeit gelöst werden.

### 10.2.1. Polynomieller Verifizierer (Gleichbedeutend mit NP)

Ein polynomieller Verifizierer ist eine

Turingmaschine, die die «Lösung» überprüfen kann.

Für die Sprache  $L$  ist das eine Turingmaschine  $V$ , so dass es für jedes  $w \in \Sigma^*$  ein Wort  $c$  (das Lösungszertifikat) gibt, für das gilt:  $w \in L \Leftrightarrow V$  akzeptiert  $(w, c)$

Die Laufzeit von  $V$  ist polynomiell in  $|w|$ .

**Zertifikat** ist wie ein Wunschzettel, wo man alles angeben kann, dass einem bei der Verifikation hilft.

**Wichtig:** Entscheidbar und Zertifikat beantworten mit Begründung! Entscheidbar meistens: Alle Möglichkeiten durchprobieren, wieviele?

Beim Aufstellen des Verifizierers immer auch prüfen (und begründen), ob das Problem überhaupt entscheidbar ist. Die Tatsache, dass es ein Zertifikat gibt, reicht dazu nicht aus. Man muss spezifizieren, was als Zertifikat angefordert wird. Am Ende muss eine Antwort auf die gestellte Frage stehen. Es reicht nicht, einfach nur die Schritte hinzuschreiben.

Hier geht es darum, ob eine Sprach in NP ist. Das Wort «NP-Vollständig» hat hier nichts verloren!

### Beispiele

#### Sudoku

Verifizierer für: Sudoku

Entscheidbar?

Ja, alle  $\leq (n^2)^{n^2 \times n^2}$  Möglichkeiten durchprobieren

Zertifikat?  $c =$  fehlende Ziffern

Verifikationsalgorithmus

Nr.	Was ist zu tun?	Aufwand
1	Für jedes Feld: Zeichen kommt auf der Zeile nicht mehr vor	$O(n^4 \cdot n^2)$
2	Für jedes Feld: Zeichen kommt in der Spalte nicht mehr vor	$O(n^4 \cdot n^2)$
3	Für jedes Feld: Zeichen kommt im Unterquadrat nicht mehr vor	$O(n^4 \cdot n^2)$
Total		$O(n^6)$

7.67. Konstruieren Sie einen polynomiellen Verifizierer für das  $n$ -Damenproblem von Aufgabe 7.66. Es geht also darum, zu entscheiden, ob es zu einer gegebenen Zahl  $n$  eine Lösung gibt.

Um einen Verifizierer zu konstruieren, muss zuerst festgelegt werden, was als Zertifikat verwendet werden soll. Das Wort

$(n, r_1, r_2, \dots, r_n) \in QUEENS$ ,

wobei  $r_i$  die Zeilennummer der Dame in Spalte  $i$  ist, ist ein geeignetes Zertifikat.

Der Verifikationsalgorithmus muss folgende Dinge überprüfen:

Schritt	Was	Laufzeit
1	Enthält das Wort genau $n + 1$ natürliche Zahlen zwischen 1 und $n^2$ ?	$O(n \log n)$
2	Sind die Zahlen $r_i$ alle verschieden?	$O(n^2 \log(n^2))$
3	Sind keine Damen in den gleichen Diagonalen platziert?	$O(n^2 \log(n^2))$
Total		$O(n^2 \log(n^2))$

Die Faktoren  $\log(n)$  kommen daher, dass mit  $n$  auch die Länge der Zahlen wie  $\log(n)$  anwächst. Entsprechend nimmt auch die Zeit zu, jede dieser Zahlen zu verarbeiten.

Die gesamte Laufzeit ist schneller als  $O(n^6)$ , also polynomiell. Damit ist der oben beschriebene Algorithmus ein polynomieller Verifizierer.  $\circ$

Verifizierer für: \_\_\_\_\_

Entscheidbar?

Zertifikat?

Verifikationsalgorithmus

Nr.	Was ist zu tun?	Aufwand
1		
2		
3		
4		
5		
Total		

### 10.2.2. Reduktion

Dient dazu, zwei Probleme zu vergleichen.

- **Fach  $\Leftrightarrow$  Knoten**
- **Anmeldung  $\Leftrightarrow$  Kante**
- **Zeitslot  $\Leftrightarrow$  Farbe**

#### Polynomielle Reduktion

##### Polynomieller Laufzeit-Vergleich

Seien  $A$  und  $B$  entscheidbare Sprachen. Eine berechenbare Abbildung

$$f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*: w \mapsto f(w)$$

mit

- ①  $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$  (Reduktion)
  - ②  $f(w)$  ist berechenbar in polynomieller Zeit in  $|w|$
- heisst *polynomielle Reduktion*  
 $A \leq_P B$ . Lies:  $A$  ist polynomiell leichter entscheidbar als  $B$ .

### Stundenplan und $k$ -VERTEX-COLORING

$\leftrightarrow$  k-VERTEX-COLORING

#### Stundenplan

##### Gegeben

- Fächer
- Anmeldungen von Studenten für Fächer
- $k$  Zeitslots pro Woche

##### Gesucht

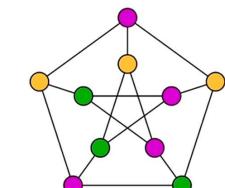
Stundenplan = Zuordnung von Zeitslots zu Fächern derart, dass jeder Student jedes angemeldet Fach besuchen kann

#### Gegeben

- Graph  $G$
- $k$  Farben

#### Gesucht

Kann man die Knoten so mit  $k$  Farben einfärben, dass benachbarte Knoten verschiedene Farbe haben?



### 10.3. NP-VOLLSTÄNDIG

Eine Entscheidbare Sprache  $B$  heisst NP-Vollständig, wenn sich jede Sprache  $A$  in NP polynomiell auf  $B$  reduzieren lässt. Sind die schwersten Probleme in NP Katalog von Karp

Es genügt nicht, das Vergleichsproblem zu erkennen, es muss auch eine 1-1-Reduktion durchgeführt werden. Und am Ende muss eine Antwort auf die Frage stehen. Und irgendwo muss das Wort NP-vollständig stehen, NP reicht nicht!

## 11. KATALOG VON KARP

#### Probleme mit K Zahlen

CLIQUE-COVER  
VERTEX-COVER

SET-PACKING  
SET-COVERING  
EXACT-COVER

K-CLIQUE  
FEEDBACK-\*-SET  
VERTEX-COLORING  
SEQUENCING  
STEINER-TREE  
(MAX-CUT)

#### Aufteilung in zwei Teilmengen

PARTITION  
MAX-CUT

#### Probleme mit Zahl 3

3D-MATCHING  
3SAT

#### Unterschiede Hitting-Set, Exact-Cover

HITTING-SET: Menge von Punkten  
EXACT-COVER: Menge von Teilmengen EXACT-\*-COVER: disjunkt?

#### Unterschiede Feedback-\*-Set

NODE: Vertex entfernen  
ARC: Kanten entfernen

#### Unterschiede Set-\*

Covering: Endliche Familie endlicher Mengen  
Packing: Eine Familie von Mengen

	SET-COVERING	SET-PACKING	EXACT-COVER
Anzahl Mengen	k	k	(frei)
Vereinigung	ganze Menge	ganze Menge	

paarweise Schnittmengen  $\emptyset$   $\emptyset$

#### Unterschiede \*-Cover

Graph oder Mengen mit einer Zahl k  
CLIQUE: k-Cliquen vorhanden?  
VERTEX: mit k Knoten möglich?

#### Weitere (Karp-Baum unten)

HAMCIRCUIT & UHAMCIRCUIT, SAT, BIP, SUBSET SUM

## SAT(Logik), 3SAT (Logik)

Gibt es eine mögliche Lösung der **Booleschen Gleichung**, damit sie TRUE ergibt.

3SAT: Klausel besteht höchstens aus 3 Literalen pro Klausel und ist in KNF

$$F = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2)$$

Klausel = Klammerausdruck, Literale = Variable

**Bsp. Elektriker Variablen:** n-Schalter -> n-Variablen, m-Räume -> m-Klauseln, Überall Licht -> Aussage = true, Stromkreise -> Wertebereich (True, False)

Man kann Wahrheitstabellen bilden. NP-Vollständig ist jedes Problem. Das sich auf SAT reduzieren lässt.

## SUBSET-SUM (RUCKSACK-PROBLEM)

Gegeben: Menge S von ganzen Zahlen. Kann man eine Teilmenge finden, die als **Summe** einen bestimmten **Wert t** hat? (S ist eigentlich keine Menge, denn gleiche Zahlen können mehrmals vorkommen.)

**Beispiel:** Rucksack-Problem

**Variablen:** Grösse der Gegenstände -> Zahl, Menge der Gegenstände -> Menge S der Zahlen, Grösse des Rucksacks -> Wert t (Summe), Gegenstände im Rucksack -> Teilmenge

## k-CLIQUE

Gibt es k Knoten, die alle miteinander verbunden sind?

k: Anzahl Vertizes in einer Clique (gegeben)

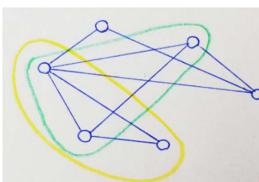
Gibt es eine solche Clique in dem Graphen (Siehe Bild)?

für  $k = 3 \rightarrow$  ja (eingezzeichnet)

für  $k = 4 \rightarrow$  nein

**Beispiel:** Job-Parallelisierbarkeit: gegeben eine Menge von n Jobs, die jeweils exklusiv auf m Ressourcen zugreifen, Jobs dürfen nicht gleichzeitig laufen. Zeigen Sie, dass das Problem zu entscheiden, ob mit diesen Jobs zu irgendeinem Zeitpunkt mehr als k Prozessoren ausgelastet werden können, NP-vollständig ist.

**Variablen:** Graph (Job-Parallelisierbarkeit), Knoten (n Job), Kante (m gleiche Ressourcen), k-Clique (Auswahl Knoten ohne Verbindung), k (Auslastbare Anzahl Prozessoren)

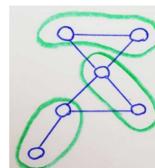


## CLIQUE-COVER (EXOR mit bestimmter Zahl k)

Gegeben: Ein Graph G und eine **positive Zahl k**. Gibt es k Cliques so, dass jede Ecke in genau einer der Cliques ist?

**Beispiel:** Für eine Gruppenarbeit sollen k Gruppen gebildet werden. Um die Zeit für das Kennenlernen möglichst kurz zu halten, sollen sich die Leute einer Gruppe bereits kennen. Alle Leute sollen eingeteilt sein.

**Variablen:** Teilnehmer -> Knoten, Kennen sich -> Kante, Anzahl Gruppen -> k, Gruppe -> Clique



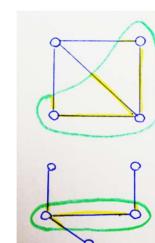
## VERTEX-COVER

Gegeben: Ein Graph G und eine Zahl k. Gibt es eine **(Teil)menge W** von k Knoten so, dass jede **Kante** von G einen Endpunkt in dieser Teilmenge W hat?

**Beispiel:** Gibt es 4 Knoten so, dass jeder andere Knoten eine Kante zu diesem hat?

**Beispiel:** Ein Verkehrsnetz soll regelmäßig durch Mitarbeiter kontrolliert werden, die ihre Basis an einzelnen Knotenpunkten des Netzes haben. Kann man auf effiziente Art herausfinden, an welchen Knotenpunkten man Kontrolleure stationieren muss, damit jede Strecke in einem Knoten mit Kontrolleur endet?

**Variablen:** Knotenpunkte -> Knoten, Strecke -> Kante, Anzahl Kontrolleure (möglichst wenig) -> k, Knoten mit Kontrolleur -> Knoten aus dem Vertex-Cover



## SET-PACKING

Gegeben: eine Familie  $(S_i), i \in I$  und eine Zahl  $k \in \mathbb{N}$

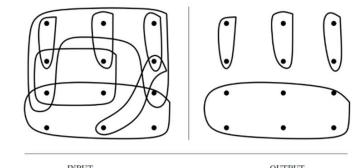
Wie viele der Mengen  $S_i$  kann man in U hineinpacken, ohne dass sie sich überlappen? Gibt es eine k-elementige Teilstammfamilie  $(S_i), i \in I$  mit  $J \subset I$ , d.  $|J| = k$  von paarweise disjunkten Teilmengen?

Menge S und Menge T von Teilmengen, Gibt es k Teilmengen in T, welche disjunkt sind und die Menge S abdecken?

**Beispiel 1 Küche:** In einer Küche hat man eine Menge an Zutaten und ein Rezeptbuch voller Rezepte. Nun möchte man möglichst viele der Rezepte kochen, ohne eine Zutat mehrmals zu verwenden.

**Beispiel 2 Medizininstudie:** Für eine medizinische Studie ist eine grosse Zahl von Probanden rekrutiert worden. Sie sind bereits auf Allergien getestet worden, man weiß also von jedem Probanden, auf welche Allergene er allergisch reagiert. Die Untersuchung soll sich auf eine Teilmenge von  $k = 17$  oder noch mehr ausgewählten Allergenen beschränken, die so beschaffen ist, dass kein Proband auf mehr als eines der ausgewählten Allergene reagiert.

**Variablen:** I (Allergene), Si (Auf Allergen i allergische Probanden), Ausschlussbedingungen zwischen Allergenen i und j, Teilmenge

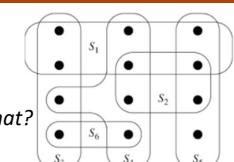


## SET-COVERING

Gegeben: Eine **endliche Familie endlicher Mengen**  $(S_j), 1 \leq j \leq n$  und eine **Zahl k**. (Familie = Set von Sets aber Set doppelt erlaubt)

Gibt es eine **Unterfamilie bestehend aus k Mengen**, die die gleiche Vereinigung U hat?

Kann man k Teilmengen bilden, welche die Menge S komplett abdecken?



**Beispiel:** Von jedem Aussichtspunkt aus kann man eine endliche Anzahl Sehenswürdigkeiten erkennen. Ein Tourist, der es sehr eilig hat, möchte mit dem Besuch von nur k Aussichtspunkten alles sehen, was man an Sehenswürdigkeiten von allen Aussichtspunkten aus sehen könnte. Warum ist es schwierig, für den Touristen eine Auswahl zu treffen?

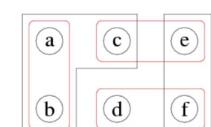
**Variablen:** Aussichtspunkt -> Sj, Sichtbare Sehenswürdigkeiten ->  $\cup_{j=1}^n S_j$ , Auswahl von Aussichtspunkten ->  $S_{j_1}, \dots, S_{j_k}$ , Bedingung kann alles sehen ->  $S = \cup_{i=1}^k S_i$

## EXACT-COVER

Gegeben: Eine **Familie**  $(S_j), 1 \leq j \leq n$  von **Teilmengen** einer Menge U. Gibt es eine Unterfamilie von Mengen, die disjunkt sind, aber die gleiche Vereinigung haben? Jedes Element in U soll genau in einer der Teilmengen der Familie S vorkommen. Die gesuchte Menge bildet eine exakte Überdeckung.

**Beispiel:** Student Xaver Tecco soll im Rahmen einer Big-Data-Studienarbeit die Kunden einer grossen Shop-Website untersuchen und klassifizieren. Es steht eine grosse Zahl von binären Eigenschaften zur Verfügung, zum Beispiel ob Kunden ein bestimmtes Produkt gekauft haben, oder ob ein Kunde nur im Dezember einkauft. Herr Tecco soll herausfinden, ob es eine Teilmenge von Kriterien gibt, dass jeder Kunde genau eine der Eigenschaften hat.

**Variablen:** Eigenschaft -> Menge Sj, Teilmenge von Eigenschaften -> Unterfamilie Sji, Genau eine der Eigenschaften, Alle Kunden erfasst

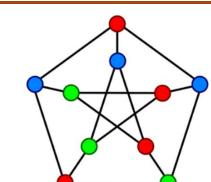


## VERTEX-COLORING (Planungsproblem)

Kann man die Knoten so mit k Farben einfärben, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben?

**Beispiel:** Job-Planung

**Variablen:** n Job -> Knoten, m gleiche Ressourcen -> Verbindungen, parallele Jobs (bzw. Intervall) -> gleiche Farbe, N Intervalle -> n Farben

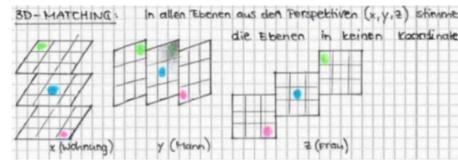


### 3D-MATCHING (Heiratsproblem+Wohnungen, ähnlich wie EXACT-COVER)

Gegeben: Endliche Menge T und Menge U von Tripeln  $T \times T \times T$ . Gibt es eine Teilmenge W von U so, dass  $|W| = |T|$  und keine zwei Elemente von w stimmen in irgendeiner Koordinate überein?

**Beispiel:** Ein Koch hat je n Rezepte für Vorspeisen, Hauptspeisen und Desserts. Nicht alle Vorspeisen lassen sich mit jeder Hauptspeise kombinieren, dasselbe gilt auch für Desserts. Damit jeder seiner Rezepte regelmäßig zum Einsatz kommt, möchte der Koch eine Folge von n Menus zusammenstellen, sodass jedes Rezept in genau einem der Menus vorkommt.

**Variablen:** Nummern der Rezepte  $\rightarrow$  Menge T, Menuzusammenstellungen  $\rightarrow$  Tripel aus  $T \times T \times T$ , Menge der möglichen Menuzusammenstellungen  $\rightarrow$  Menge U, Gesuchte Menus  $n \rightarrow$  Teilmenge W, so  $n = |T| = |W|$



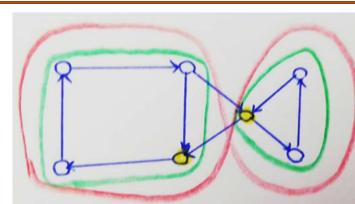
### FEEDBACK-NODE-SET

Gegeben: Ein gerichteter Graph G und eine Zahl k. Gibt es eine endliche Teilmenge von k Vertizes/Knoten von G, sodass jeder Zyklus in G einen Vertex in der Teilmenge enthält?

**Beispiel:** Es gibt mehrere Buslinien. Wo muss das Putzpersonal platziert werden, damit alle Linien geputzt werden können? Man möchte möglichst wenig Personal einsetzen.

**Bild:**  $k = 2$ , Alle 3 Umrahmungen = Zyklen. Knoten markieren

**Variablen:** Graph (Plan des Einkaufszentrums), Knoten (Kreuzungsstellen), Kanten (Gänge), Richtung, Anzahl k (Budget für Stationen), Arc set (Platzierungen der Desinfektionsstationen), Zyklus muss definiert sein



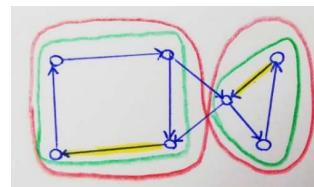
### FEEDBACK-ARC-SET

Gegeben: Ein gerichteter Graph G und eine Zahl k. Gibt es eine endliche Teilmenge von k Kanten von G, sodass jeder Zyklus in G eine Kante aus der Teilmenge enthält?

**Beispiel:** Es gibt mehrere Buslinien. Das Personal putzt während der Fahrt. Wo muss das Putzpersonal platziert werden, damit alle Linien geputzt werden können? Man möchte möglichst wenig Personal einsetzen.

**Bild:**  $k = 2$ , Knoten markieren

**Variablen:** Graph (Plan des Einkaufszentrums), Knoten (Kreuzungsstellen), Kanten (Gänge), Richtung, Anzahl k (Budget für Stationen), Arc set (Platzierungen der Desinfektionsstationen)



### HAMCIRCUIT & UHAMCIRCUIT (HAMPATH & UHAMPATH)

Ein Hamilton-Pfad in einem gerichteten Graphen ist ein Pfad, der jeden Knoten genau einmal enthält (Haus des Nikolaus). Komme zu jedem Knoten genau einmal.

**Ungerichtet** ist es der Uhamcircuit.

**Beispiel:** Ganze Schweiz bereisen ohne eine Stadt mehrmals zu besuchen.

**Variablen:** Knoten (Block), gerichtete Kante (Fahrt), Hamiltonischer Pfad



### BIP

Zu einer ganzzahligen Matrix C und einem ganzzahligen Vektor d, ist ein binärer Vektor x zu finden mit

$$C * x = d \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

SUBSET-SUM  $\leq_P$  BIP

### SEQUENCING

Gegeben: Ein Vektor von Laufzeiten von p Jobs, ein Vektor von spätesten Ausführzeiten, ein Strafenvektor und eine positive Zahl k.

Gibt es eine Permutation der Zahlen 1, ..., p sodass die Gesamtstrafe für verspätete Ausführung bei der Ausführung der Jobs nicht grösser ist als k? Gegeben: Eine Menge an Jobs, pro Job eine Ausführzeit, Deadline und eine Strafe sowie eine maximale Strafe (k). Die Jobs müssen sequenziell abgearbeitet werden. Wird ein Job zu spät fertig, muss eine Strafe gezahlt werden. Gesucht: Eine Reihenfolge von Jobs so, dass die Strafe kleiner gleich k ist.

**Beispiel:** Eine Firma hat eine bestimmte Anzahl laufende Verträge. Die Firma ist es nicht möglich, alle Verträge in einer bestimmten Zeit abzuarbeiten. Sie versucht also Schadensbegrenzung zu machen, indem sie möglichst viele Verträge in der verbleibenden Zeit abarbeitet, die eine hohe Strafe zur Folge haben.

**Variablen:** Ausführungszeit von Job, Deadline, Kosten, Permutation / Reihenfolge

### PARTITION

Gegeben: Eine Folge von S ganzen Zahlen  $c_1, c_2, \dots, c_s$

Kann man die Indizes 1, 2, ..., S in zwei Teilmengen I und  $\bar{I}$  teilen, sodass die Summe der zugehörigen Zahlen  $c_i$  identisch ist? Gibt es zwei disjunkte Teilmengen mit der gleichen Summe?

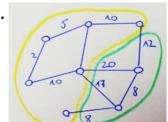
**Beispiel:** Eine Reihe von Wassergläsern ist unterschiedlich gefüllt. Es sollen 2 Behälter gleich voll mit den Gläsern gefüllt werden. Welche Gläser müssen in welche Behälter geleert werden?

### MAX-CUT

Gegeben ein Graph G mit einer Gewichtsfunktion  $w: E \rightarrow \mathbb{Z}$  und eine Zahl W

Gibt es eine Teilmenge S der Vertizes, sodass das Gesamtgewicht der Kanten, die S mit seinem Komplement verbinden, mindestens so gross ist wie W?

Der Max-Cut eines Graphen ist eine Zerlegung seiner Knotenmenge in zwei Teilmengen, sodass das Gesamtgewicht der zwischen den beiden Teilen verlaufenden Kanten mindestens W wird.



**Beispiel:** Feindliche Übernahme einer Firma, mit resultierender Aufteilung der Abteilung, dass diese möglichst ineffizient miteinander kommunizieren können.

**Variablen:** Abteilung  $\rightarrow$  Vertex, Kommunikationsbeziehung  $\rightarrow$  Kante, Kommunikationsvolumen  $\rightarrow$  Gewicht einer Kante

### HITTING-SET

Gegeben: Eine Menge von Teilmengen  $S_i \subset S$ . Gibt es eine Menge H, die jede Menge in genau einem Punkt trifft, also  $|H \cap S_i| = 1$

Gibt es eine Menge W  $\subset U$  derart, dass W mit jeder Menge  $S_i$  nur ein Element gemeinsam hat?

HITTING-SET sucht zu einer Familie von Mengen, eine Menge von Punkten (Elemente der Vereinigung dieser Mengen), die jede Menge der Familie in genau einem Punkt treffen. Man beachte, dass es keine Forderung über die Anzahl der Punkte gibt.

Gegeben:  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 4\}, C = \{1, 2, 5\}$  Gesucht:  $H = \{3, 4, 5\}$

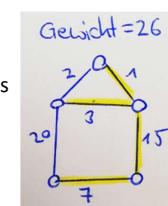
**Variablen:** Punkt in S, Teilmenge U aller S, Hitting Set H

### STEINER-TREE

Gegeben: Ein Graph G, eine Teilmenge R von Knoten, eine Gewichtsfunktion und eine positive Zahl k.

Gibt es einen Baum mit Gewicht  $\leq k$ , dessen Knoten in R enthalten sind? Das Gewicht des Baumes ist die Summe der Gewichte über alle Kanten im Baum.

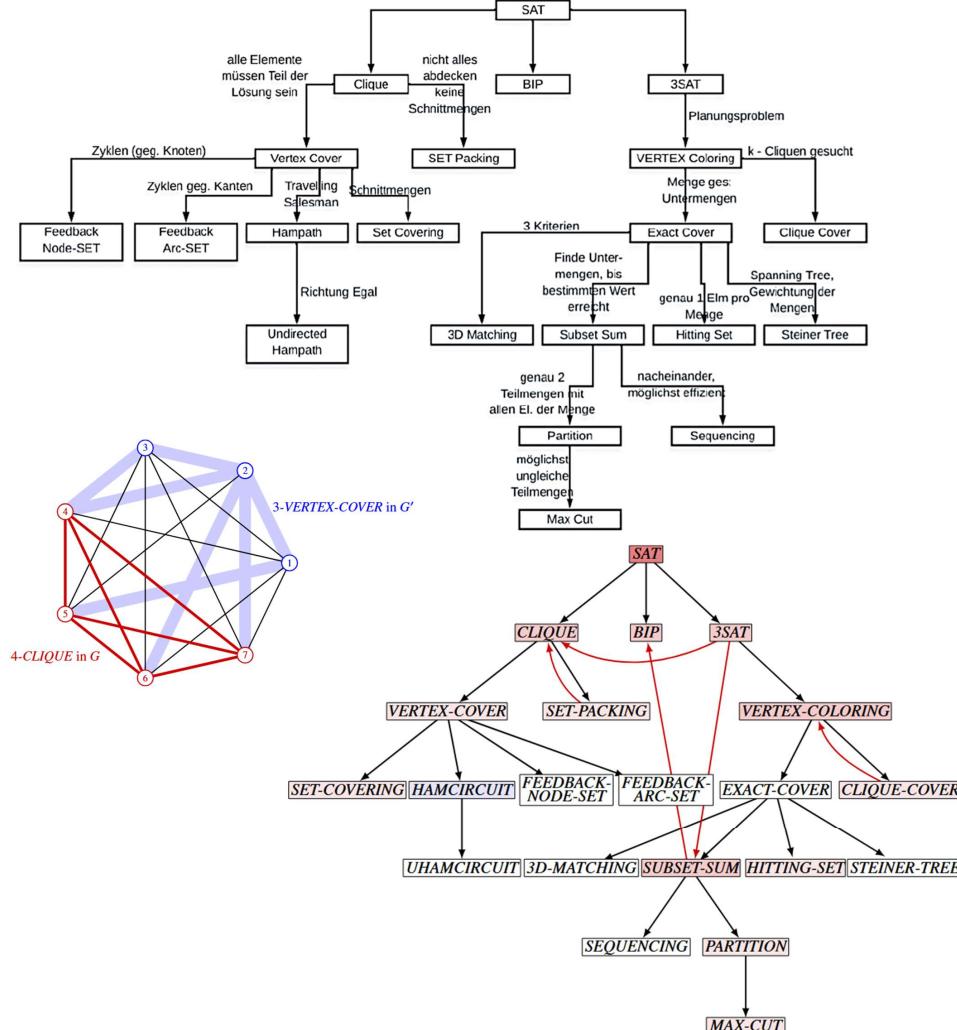
**Beispiel:** Bau einer Zugstrecke oder Stromnetzes:



**Variablen:** Stromnetz / Zugstrecke -> Steiner-Tree, Ortschaften -> Knoten, zu erschliessende Ortschaften  
 -> Knoten in R, Baukosten -> Gewicht w einer Kante, Budget -> maximales Gewicht k

## 11.1. VORGEHEN BEI DER PRÜFUNG

- **Problem aus Liste suchen**, dabei Punkte beachten wie: Ist es ein Mengenproblem, Planungsproblem, kommen k-Zahlen vor, Teilmengen?
- **Reduktion des Problems** auf Karp mit Pfeil-Liste darstellen (Eigenschaften)
- **Zusammenfassung schreiben:** «Problem x ist äquivalent mit Karp-Katalog-Problem y und deshalb gehört es zu den NP-Vollständigen Problemen. Daher ist es nicht einfach entscheidbar (Es gibt derzeit keinen polynomiellen Algorithmus).»



## 12. TURING-VOLLSTÄNDIGKEIT

Turing-Maschinen und moderne Computer haben einige **Gemeinsamkeiten**. Ein **Computer** erfüllt alle **Eigenschaften einer Turing-Maschine** (Zustände, Band, Schreib-/Lesekopf). Einzig kann er **mehrere Programme** ausführen und eine **Turing-Maschine ist problemspezifisch**. Es gibt aber die Universelle Turing-Maschine mit

- Eigenem Band für Codierung der Übergangsfunktionen
- Eigenem Band für aktuellen Zustand
- Arbeitsband

Eine solche Mehrbandmaschine kann auch auf einer Standard-Turingmaschine simuliert werden. Es gibt aber Komponenten, die ein PC hat, eine Turing-Maschine aber nicht.

- **Persistenter Speicher:** Files nicht unterscheidbar von Daten, für TM egal
- **Interaktion:** Lösung eines spezifizierten Problems braucht keine Interaktion
- **Input / Output:** Output ist nicht wesentlich. Input «existiert nicht». Wenn TM angehalten wird, kann Kernel Band «manipulieren» und TM sieht nun geänderter Input, weiß aber nicht, ob er den Input selber geändert hat oder die Veränderung von außen kommt.

## 12.1. VERGLEICH VON MASCHINEN

Eine TM  $M_1$  ist «**leistungsfähiger**» als eine TM  $M_2$ , wenn  $M_1$  die Maschine  $M_2$  **simulieren** kann.  
 $M_2 \leq M_1 \rightarrow M_2$  ist simulierbar auf  $M_1$

## 12.2. PROGRAMMIERSPRACHEN

Eine Programmiersprache ist Turing-Vollständig, wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt:

- Es lässt sich ein **Infinite Loop** erstellen (auch bei Rekurs)
- Sie kann auf einen «**unendlich** grossen Speicher zugreifen
- **Bedingte Ausführung** ist möglich

## 13. GLOSSAR

- Die Sprache  $L \subset \Sigma^*$  heisst **regulär**, wenn es einen DEA A gibt, mit  $L(A) = L$ .  
**Beispiel:**  $\Sigma = \{0,1\}, L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_0 \text{ gerade}\}$
- Die Sprache  $L \subset \Sigma^*$  heisst **nicht regulär**, wenn es keinen DEA A gibt, mit  $L(A) = L$ .  
**Beispiel:**  $0^n 1^n, n \geq 0$
- Die Sprache  $L \subset \Sigma^*$  heisst **kontextfrei**, wenn die Sprache nur von einem nichtdeterministischen Stackautomaten erkannt werden kann  
**Beispiel:**  $\Sigma = \{(,)\}, L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ ist ein korrekter Klammerausdruck}\}$
- Die Sprache  $L \subset \Sigma^*$  heisst **nicht kontextfrei**, wenn das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen einen Widerspruchbeweis liefert.  
**Beispiel:**  $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$
- Eine Sprache  $L$  heisst «**Turing-Erkennbar**», wenn es eine Turing-Maschine  $M$  gibt, die das Wort akzeptiert.  
**Beispiel:**  $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$

## 14. ANHANG / ALTE PRÜFUNGSFRAGEN

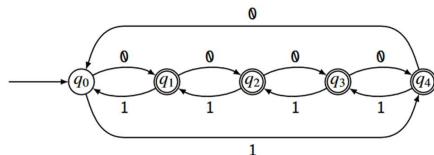
### 14.1. DEA

Finden Sie einen deterministischen endlichen Automaten, der die Sprache

$$L = \{w = \{0, 1\}^* \mid |w|_0 \not\equiv |w|_1 \pmod{5}\}$$

bestehend aus Wörtern, deren Anzahl von Nullen und Einsen verschiedenen Rest bei Teilung durch fünf haben.

*Lösung.* Das Zustandsdiagramm



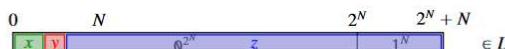
beschreibt diesen Automaten. Der Zustand  $q_k$  codiert den Fünferrest  $k$  der Differenz  $|w|_0 - |w|_1$ .  $\circlearrowright$

### Wenn gleich statt ungleich, einfach Akzeptier- und nichtakzeptierzustände umkehren

### 14.2. PUMPING LEMMA

*Lösung.* Die Sprache ist nicht regulär, wie man mit dem Pumping Lemma für reguläre Sprachen zeigen kann.

1. Annahme ist regulär.
2. Nach dem Pumping Lemma gibt es die Pumping Length  $N$ .
3. Wähle das Wort  $w = 0^N 1^N \in L$
4. Es gibt eine Aufteilung des Wortes  $w = xyz$  mit  $|xy| \leq N$  und  $|y| > 0$ . Der Teil  $y$  besteht ausschließlich aus Nullen.



5. Beim Aufpumpen nimmt die Zahl der Nullen zu, dies steht aber nicht im Widerspruch zu der Sprachdefinition. Beim Abpumpen nimmt jedoch die Zahl der Nullen ab, es ist dann  $|xz|_0 = 2^N - |y|$ . Die Zahl der Einsen ist immer noch  $N$ , damit haben wir

$$|xy|_0 = 2^N - |y| < 2^N = |xy|_1,$$

im Widerspruch zur Aussage des Pumping Lemmas

6. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Sprache  $L$  nicht regulär ist.  $\circlearrowright$

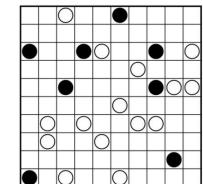
Es gibt natürlich viele weitere Möglichkeiten, den gesuchten Widerspruch herzustellen. Das oben gewählte Wort ist möglicherweise dasjenigen, welches die meisten Studenten als erstes wählen würden, aber das Wort  $w = 1^N 0^N$  ist noch etwas einfacher. Beim Aufpumpen nimmt die Anzahl der Einsen zu, die Anzahl der Nullen aber nicht. Nach Sprachdefinition müsste aber auch die Anzahl der Nullen zunehmen, da ja  $|w|_0 \geq 2^{|w|_1}$  sein muss. Der Widerspruch zeigt wieder, dass  $L$  nicht regulär sein kann.

*Bewertung.* Pumping-Lemma-Beweis: jeder Schritt ein Punkt: Annahme regulär (PL) 1 Punkt, Pumping Length (N) 1 Punkt, Wort (W) 1 Punkt, Aufteilung (A) 1 Punkt, Widerspruch beim Pumpen (P) 1 Punkt, Schlussfolgerung (S) 1 Punkt. Falls das gleiche Wort wie in der Musterlösung gewählt wurde wird der Punkt für Schritt 5 nur gegeben, wenn erkannt worden ist, dass nur Abpumpen zu einem Widerspruch führt.

### 14.3. VERIFIZIERER

Masyu (japanisch ましゅ) ist ein Rätsel, welches auf einem  $n \times n$ -Spielfeld gespielt wird. In einigen Feldern sind schwarze und weiße Kreise eingezeichnet. Der Spieler muss einen geschlossenen Weg durch das Spielfeld finden, welcher folgenden Regeln genügt:

1. Der Weg betritt und verlässt ein Quadrat immer über eine Kante.
2. Der Weg darf sich selbst nicht schneiden.
3. Weiße Kreise werden in gerader Linie durchquert, aber der Weg muss vor oder nach dem weißen Kreis um  $90^\circ$  abbiegen.
4. Schwarze Kreise liegen auf einer Kurve, die um  $90^\circ$  abbiegt, die Felder neben den schwarzen Kreisen werden in gerade Linie durchlaufen.



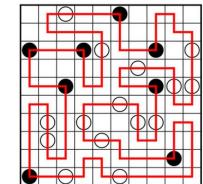
Kann eine nichtdeterministische Turing-Maschine in polynomieller Zeit entscheiden, ob ein Masyu-Rätsel eine Lösung hat?

*Lösung.* Die Frage ist sicher entscheidbar, indem man alle endlich vielen möglichen Abfolgen von Feldern daraufhin testet, ob sie Pfade sind und den vier Bedingungen genügen. Dafür ist jedoch exponentielle Zeit nötig.

Eine nichtdeterministische Turing-Maschine kann die Frage in polynomieller Zeit entscheiden, wenn es einen polynomiellen Verifizierer gibt. Als Zertifikat wird der gesuchte Lösungspfad gefordert, eine Abfolge von höchstens  $n^2$  Feldern. Damit sind folgende Verifikationen vorzunehmen:

Regel	Verifikation	Laufzeit
1	Jedes Feld des Pfades ist ein Nachbarfeld des vorangegangenen Feldes.	$O(n^2)$
2	Jedes Element des Pfades mit jedem anderen Element vergleichen, und kontrollieren, dass alle Elemente verschieden sind.	$O(\frac{n(n-1)}{2})$
3a	Kontrollieren, ob die Nachbarn eines Feldes mit weißem Kreis diametral gegenüberliegen.	$O(n^2)$
3b	Kontrollieren, ob auf einem der Nachbarfelder eines Feldes mit weißem Kreis eine $90^\circ$ -Abbiegung erfolgt	$O(n^2)$
4	Kontrolliere, ob auf jedem Element des Pfades mit einem schwarzen Feld die Nachbarelemente eine $90^\circ$ -Abbiegung bilden.	$O(n^2)$
	Total	$O(n^2)$

Damit ist gezeigt, dass der Verifizierer polynomielle Laufzeit hat. Somit ist Masyu in NP.  $\circlearrowright$



### 14.4. SATZ VON RICE

In vielen Anwendungen wird verlangt, dass der Output sortiert wird. Es wäre daher nützlich für die Qualitätssicherung, wenn man ein Tool schreiben könnte, welches von einem Programm entscheiden kann, ob sein Output korrekt sortiert wird. Viele Programmiersprachen haben zum Sortieren Funktionen oder Klassen, die Daten sortieren können, man könnte testen, ob diese Klassen vom Code verwendet werden. Manchmal fallen die Daten aber auch automatisch sortiert an, zum Beispiel wenn in einer Datenbank ein Index verwendet wird. Es reicht also nicht, nur die Verwendung der genannten Klassen zu prüfen. Ist es möglich, so ein Tool zu schreiben?

Nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass das Tool nur auf Programme angewendet werden soll, welche Wörter aus Zeichen in  $\Sigma = \{a, b, \dots, z\}$  erzeugen, und die Zeichen in einem Wort sollen alphabetisch aufsteigend sortiert sein.

*Lösung.* Es ist nicht möglich, ein solches Tool zu schreiben, wie man mit dem Satz von Rice zeigen kann. Die Eigenschaft *SORTIERT*, die der Output haben muss, ist, dass die Wörter im Output sortiert sind. Dies ist eine nichttriviale Eigenschaft, den von den Sprachen

$$\begin{aligned}L_1 &= \{ab\} \\L_2 &= \{ba\}\end{aligned}$$

besteht die eine aus sortierten Wörtern, die andere nicht. Nach dem Satz von Rice ist es nicht möglich, zu entscheiden, ob die akzeptierte Sprache einer Turing-Maschine die Eigenschaft *SORTIERT* hat.

○

## 14.5. CHOMSKY-NORMALFORM

Ist die Sprache

$$L = \{\theta^i 1^j \theta^k \mid j > i > 0 \wedge k > 0\}$$

kontextfrei? Wenn ja, geben Sie eine kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform dafür an.

*Lösung.* Die Sprache ist kontextfrei. Die Grammatik muss Wörter der Form  $\theta^i 1^i$ ,  $i > 0$ , mit Wörtern der Form  $1^l \theta^k$ ,  $l > 0 \wedge k > 0$ , verketten. Für Wörter der ersten Art haben wir die Grammatik

$$A \rightarrow \theta A 1 \mid \theta 1,$$

für die Wörter der zweiten Art können wir

$$B \rightarrow 1 B \mid B \theta \mid 1 \theta$$

verwenden. Damit finden wir die Grammatik

$$\begin{aligned}S &\rightarrow AB \\A &\rightarrow \theta A 1 \mid \theta 1 \\B &\rightarrow 1 B \mid B \theta \mid 1 \theta\end{aligned}$$

Diese Grammatik hat nicht Chomsky-Normalform. Aber ihre Startvariable kommt auf der rechten Seite nicht vor und sie hat weder  $\epsilon$ -Regeln noch Unit Rules. Es bleibt daher nur noch, die Terminal-symbole und die Dreierregeln zu "flicken":

$$\begin{aligned}S &\rightarrow AB \\A &\rightarrow NU \mid NE \\U &\rightarrow AE \\B &\rightarrow EB \mid BN \mid EN \\N &\rightarrow \theta \\E &\rightarrow 1\end{aligned}$$

Damit hat die Grammatik Chomsky-Normalform.

○

## 14.6. ZUSTANDSDIAGRAMM ANALYSIEREN

Betrachten Sie die Turing-Maschine M mit dem Zustandsdiagramm rechts.

### - Wie wird das Wort 0010111 verarbeitet?

Die Berechnungsgeschichte für das Wort  $w = 0010111$  ist

Zustand							
$q_0$		0	0	1	0	1	1
$q_1$		0	0	1	0	1	1
$q_2$		0	0	1	0	1	1
$q_1$		0	0	1	0	1	1
$q_2$		0	0	1	0	1	1
$q_1$		0	0	1	0	1	1
$q_0$		0	0	1	0	1	1
$q_{\text{accept}}$		0	0	1	0	1	1

### - Welche der Wörter 01, 01000, 01000000, 111, 0111, 000111, 0001111111, 00010101111 werden akzeptiert?

Da nur Kopfverschiebungen nach rechts vorkommen, wird das Wort genau einmal durchgelesen, die Maschine realisiert also eigentlich nur einen endlichen Automaten. Mit jedem  $\theta$  auf dem Band ändert sich der Zustand im oberen Dreieck des Zustandsdiagramm im Urzeigersinn, mit jedem 1 auf dem Band im Gegenuhrzeigersinn. Akzeptiert wird, wenn der Zustand am Ende des Wortes  $q_0$  ist. Damit findet man schnell, dass

01, 01000, 01000000, 111, 000111 0001111111

akzeptiert und

0111, 000101011111

verworfen werden.

### - Welche Sprache wird von M akzeptiert?

Akzeptiert werden kann nur, wenn die Differenz der Anzahl der Nullen und Einsen die Maschine am Ende des Wortes im Zustand  $q_0$  lässt. Die akzeptierte Sprache besteht daher aus den Wörtern, deren Anzahlen von Nullen und Einsen gleichen Rest bei Teilung durch 3 haben, also

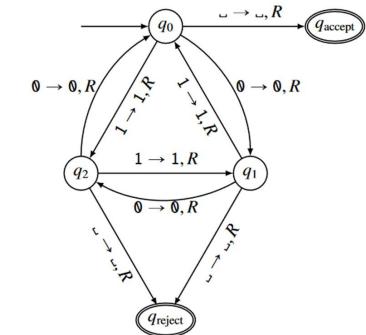
$$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_0 \equiv |w|_1 \pmod{3}\}.$$

○

Skizzieren Sie einen Algorithmus ....

Der folgende Algorithmus liefert einen regulären Ausdruck der verlangten Art:

- Für die vorgegebene Wortlänge, verwende den analog zu Teilaufgabe a) gefundenen regulären Ausdruck und erzeuge daraus einen DEA.
- Für jedes Zeichen mit bekannter Position erzeuge nach dem Muster von Teilaufgabe b) einen DEA, der genau die Wörter akzeptiert, die diese Bedingung erfüllen.
- Für jedes Zeichen, das vorkommt, erzeuge nach dem Muster von Teilaufgabe c) einen DE, der genau die Wörter akzeptiert, die diese Bedingung erfüllen.
- Aus den DEAs der Schritte 1–3 erzeuge den Produktautomaten, einen DEA, der genau die Wörter akzeptiert, die alle Bedingungen erfüllen.
- Wandle den DEA von Schritt 4 mit dem in der Vorlesung dargestellten Algorithmus in einen regulären Ausdruck um.



Eine *endliche* Sprache hat nur endlich viele Wörter.

- Wie kann man entscheiden, ob ein regulärer Ausdruck eine endliche Sprache akzeptiert?
- Wie kann man mit einem Algorithmus entscheiden, ob ein DEA eine endliche Sprache akzeptiert?
- Man nennt eine Turing-Maschine *endlich*, wenn sie eine endliche Sprache akzeptiert. Können Sie einen Algorithmus konstruieren, der entscheidet, ob eine Turingmaschine  $M$  endlich ist, d. h. eine endliche Sprache akzeptiert?

*Lösung.* a) Ein regulärer Ausdruck akzeptiert genau dann eine endliche Sprache, wenn er keinen Stern enthält.

- Ist  $r$  der reguläre Ausdruck, der die gleiche Sprache akzeptiert wie der DEA  $A$ , dann ist die Sprache  $L(r) = L(A)$  genau dann endlich, wenn der Ausdruck  $r$  keinen Stern enthält.
- Nein, dies ist wegen des Satzes von Rice nicht möglich. Die Eigenschaft, endlich zu sein, ist eine nichttriviale Eigenschaft von Sprachen. Die leere Sprache  $L_1 = \emptyset$  ist endlich, die Sprache  $L_2 = \Sigma^*$  ist unendlich. Nach dem Satz von Rice ist die Eigenschaft, eine endliche Sprache zu akzeptieren, nicht entscheidbar, es kann also keinen Algorithmus der verlangten Art geben.  $\circ$

#### 14.7. PUMPING LEMMA 2

Im Spiel *Corral* (vergleiche auch Aufgabe 3) muss ein geschlossener Pfad beschrieben werden. Eine Möglichkeit, einen solchen Pfad zu spezifizieren, ist, zunächst die Koordinaten des Startpunkts anzugeben und anschliessend eine Folge von Buchstaben aus der Mengen  $\Sigma = \{u, d, l, r\}$ , wobei jeder Buchstabe für ein Segment des Pfades steht, welches nach oben (u), unten (d), links (l) bzw. rechts (r) zeigt. Sie  $L$  die Sprache

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ beschreibt einen geschlossenen Pfad}\}$$

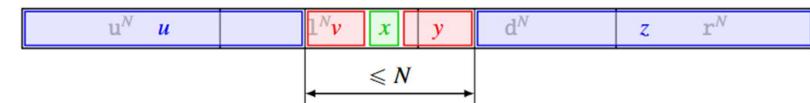
der Wörter, die geschlossene Pfade beschreiben. Können Sie eine kontextfreie Grammatik für  $L$  angeben?

*Lösung.* Damit ein Pfad geschlossen ist, müssen gleich viele u wie d und gleichviele l wie r in  $w$  vorkommen, die Sprache  $L$  ist also auch

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_u = |w|_d \wedge |w|_l = |w|_r\} \quad (1)$$

Eine kontextfreie Grammatik für  $L$  gibt es aber nicht, denn  $L$  ist nicht kontextfrei, wie man mit dem Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen zeigen kann.

- Wir nehmen an, dass  $L$  kontextfrei ist.
- Nach dem Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen gibt es die Pumping Length  $N$
- Wir nehmen das Wort  $w = u^N l^N d^N r^N$ , es beschreibt ein im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenes Quadrat mit Seitenlänge  $N$ .
- Nach dem Pumping-Lemma gibt es eine Aufteilung des Wortes in fünf Teile  $w = uvxyz$



mit  $|x| > 0$  und  $|vxy| \leq N$  derart, dass auch die aufgepumpten Wörter  $uv^k xy^k z \in L$  sind.

- Wegen  $|vxy| \leq N$  kann sich beim Pumpen höchstens die Anzahl von zwei der Buchstaben ändern, niemals aber die Anzahl beider Buchstaben gleichzeitig, die jeweils gleich sein sollte.
- Dieser Widerspruch zeigt, dass  $L$  nicht kontextfrei sein kann.  $\circ$

*Bewertung.* Bedingung (1) (B) 1 Punkt, Pumping Lemma und Pumping Length (N) 1 Punkt, Wahl des Wortes (W) 1 Punkt, Unterteilung (U) 1 Punkt, Widerspruch beim Pumpen (P) 1 Punkt, Schlussfolgerung  $L$  nicht kontextfrei (S) 1 Punkt.

Gegeben ist das Alphabet  $\Sigma$  bestehend aus den Buchstaben A–Z in den Farben schwarz, grün und oliv, so wie sie im Spiel *Wordle* verwendet werden (siehe auch Aufgabe 1).

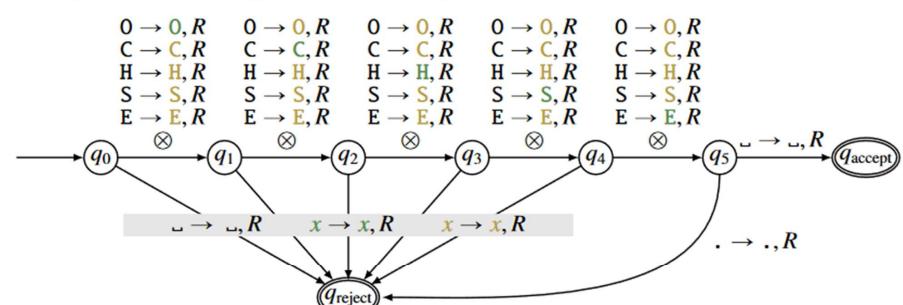
- Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm einer Turing-Maschine, die ein auf dem Band eingegebenes, fünf Zeichen langes Wort von links nach rechts liest, ähnlich wie im Spiel mit dem Wort OCHSE<sup>1</sup> vergleicht und dabei die Zeichen genau wie folgt modifiziert:
  - Hat ein Zeichen bereits eine der Farben grün oder oliv, wird der Input verworfen.
  - Ist das Zeichen richtig, soll es grün werden.
  - Ist das Zeichen an dieser Stelle falsch, kommt aber an einer anderen Stelle im Wort vor, wird es oliv.

Falls das Wort auf dem Band nicht exakt fünf Zeichen hat, wird es verworfen.

*Lösung.* Das Alphabet besteht aus den Zeichen

$$\Sigma = \{A, B, \dots, Z, \textcolor{green}{A}, \textcolor{green}{B}, \dots, \textcolor{green}{Z}, \textcolor{olive}{A}, \textcolor{olive}{B}, \dots, \textcolor{olive}{Z}, \textcolor{black}{A}, \textcolor{black}{B}, \dots, \textcolor{black}{Z}\}.$$

- Das folgende Zustandsdiagramm löst die Aufgabe:



Dabei bedeutet das Zeichen  $\otimes$  den Übergang  $x \rightarrow x, R$  für jedes schwarze Zeichen  $x$ , welches nicht in  $\{O, C, H, S, E\}$  ist. Im grauen Balken sind außerdem mit  $\textcolor{green}{x}$  und  $\textcolor{olive}{x}$  alle farbigen Zeichen gemeint. Im Übergang vom Zustand  $q_5$  in den Zustand  $q_{\text{reject}}$  bedeutet der Punkt  $\textcolor{black}{.}$  alle Zeichen außer dem  $\textcolor{black}{..}$ .