画像のフーリエ変換における位相情報はどんな意味

長橋　宏

キーワード：フーリエ変換，位相，位相特性，振幅特性

ディジタル画像 $f(m, n)$，$(0 \leq m, n < N)$ の2次元離散フーリエ変換(DFT) $F(u, v)$，およびその逆変換は次式で与えられます．

$$F(u, v)=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(m, n)\cdot\exp\left\{-\frac{j2\pi}{N}(mu+nv)\right\} \quad (1)$$

$$f(m, n)=\frac{1}{N^2}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u, v)\cdot\exp\left\{\frac{j2\pi}{N}(mu+nv)\right\} \quad (2)$$

一般に $F(u, v)$ は複素数となるため

$$F(u, v)=R(u, v)+jI(u, v)=A(u, v)e^{j\phi(u,v)} \quad (3)$$

と表されます．ただし，$j^2=-1$ で

$$A(u, v)=\sqrt{R(u, v)^2+I(u, v)^2} \quad (4)$$

$$\phi(u, v)=\tan^{-1}\left(\frac{I(u, v)}{R(u, v)}\right) \quad (5)$$

です．$A(u, v)$ と $\phi(u, v)$ は，それぞれ画像の空間的な周波数振幅特性および位相特性を表します．画像の認識や理解等の処理を目的として行われる画像の空間周波数解析では，振幅特性がよく使われます．しかしながら，位相情報に有意な情報が含まれていないわけではありません．

図1の実験は，画像の位相特性が持っている情報の重要性を示しています．この実験では同じ大きさの2枚の画像を離散フーリエ変換し，それぞれの画像の位相成分を交換した後に逆変換した結果です．画像1′および2′の全体的な濃淡に関しては，画像1と2の特徴が現れていますが，濃淡情報だけでは画像を理解することは容易ではありません．画像情報の多くが振幅情報よりも位相成分によって伝えられているともいえます．画像のフーリエ変換においては，画像の濃淡情報が振幅特性によって，その濃淡の構造(分布)が位相特性によって表されているのです．にもかかわらず，画像の周波数解析で振幅特性が多く利用されるのはなぜでしょうか．この疑問に対して，不変特徴という観点から考えてみます．

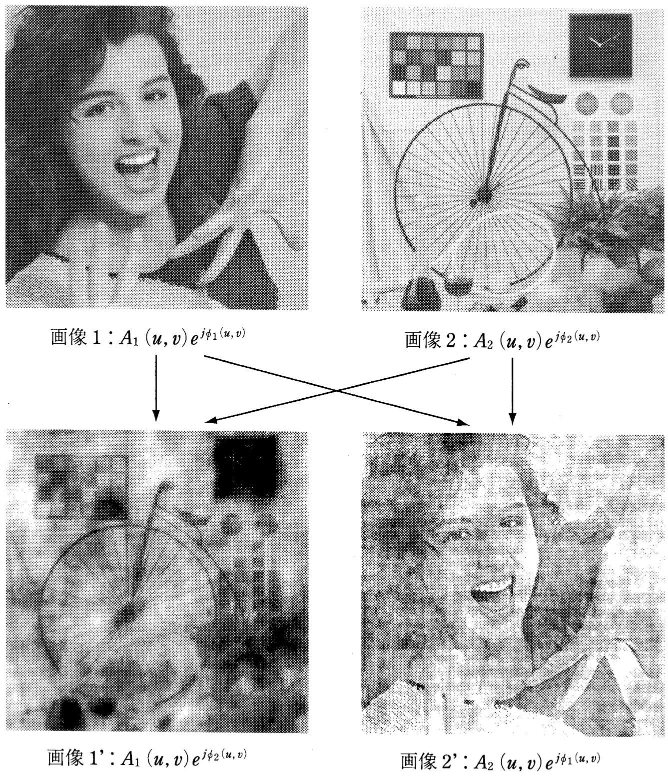


図1　画像の持つ位相特性の役割

図2は4×4の配列中央に黒の物体があり，その物体が1画素ずつ上下左右方向に移動した場合を想定したものです．物体の濃度を1，背景を0とし，フーリエ変換によってそれぞれの画像の振幅および位相特性を求めた結果を，各画像毎に有効数字2桁で示してあります．位相の単位はラジアンです．この結果から，いずれの平行移動に対しても振幅特性は同じであり，位相成分のみが変化していることが理解できます．すなわち，振幅特性は空間領域での物体の移動に関して不変な特徴量としての性質を持っているのです．一般に画像 $f(m, n)$ の離散フーリエ変換が $F(u, v)$ で与えられるとき，$f(m, n)$ を (m_0, n_0) だけ平行移動した画像 $f(m-m_0, n-n_0)$ の離散フーリエ変換 $G(u, v)$ は次式で表されます．

$$G(u, v)=e^{-j\frac{2\pi(m_0u+n_0v)}{N}}F(u, v) \quad (6)$$

すなわち，画像空間での平行移動は，空間周波数領域においては，その移動量に応じた位相変化として現れます．

† 東京工業大学 像情報工学研究施設
"What is the Phase of the Fourier Transform in 2-D Images?" by Hiroshi Nagahashi (Imaging Science and Engineering Laboratory, Tokyo Institute of Technology, Yokohama)

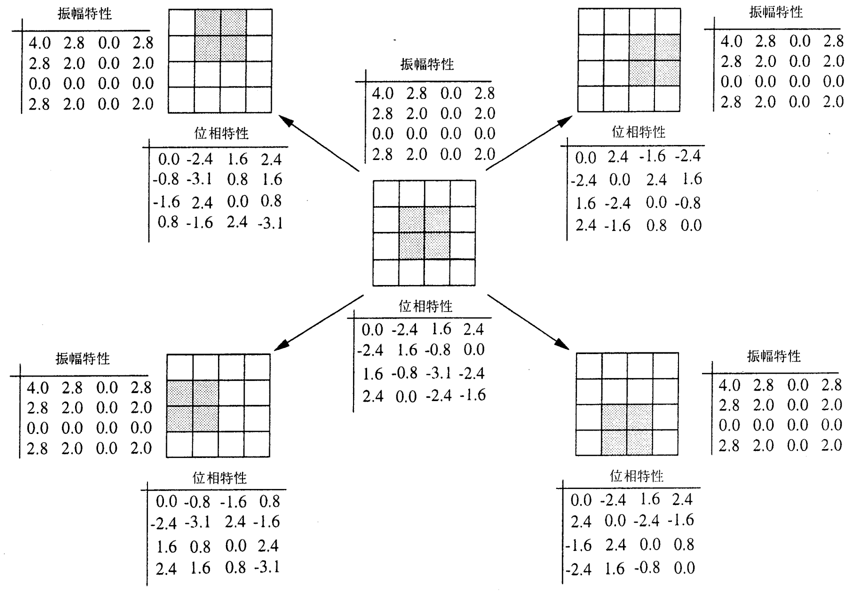


図 2　パターンの平行移動に対するフーリエ変換の例

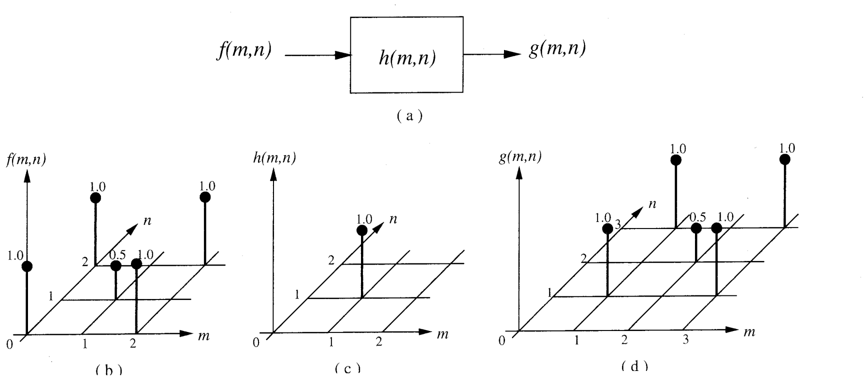


図 3　画像信号と 2 次元遅延システムとの関係の例

(6)式の関係を画像信号とその処理システムの観点から眺めるために，**図 3**(a)のようなシステムについて考えてみましょう．図 3(b)はシステムへの入力を表す 2 次元画像信号 $f(m, n)$ で，各画素が時間毎の信号値として表されています．原点の時刻が現在の時刻，m 軸および n 軸の正方向は時間遅れ(過去)を表します．図 3(c)はこのシステムの 2 次元インパルス応答で，この場合も図 3(d)と同様に m 軸および n 軸の正方向は時間遅れを表しています．システムの出力 $g(m, n)$ は入力とシステムのインパルス応答との畳込み総和で求められるため

$$g(m,n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}f(k,l)\cdot h(m-k,n-l)=h(m,n)*f(m,n) \quad (7)$$

と表されます．図 3(c)の 2 次元インパルス応答は $h(m, n)=\delta(m-1, n-1)$ であり，これを(7)式に代入して計算した結果が図 3(d)です．すなわち，図 3(c)のインパルス応答を持つシステムは，入力 $f(m, n)$ を m 軸および n 軸双方で 1 単位時間遅延させた信号値を出力する 2 次元遅延システムになっています．これを周波数領域で考えると，(7)式の畳込み総和は，入力信号 $f(m, n)$ のフーリエ変換とシステムのインパルス応答のフーリエ変換との積で求められることはよく知られています．2 次元インパルス応答 $h(m, n)$ のフーリエ変換を $H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ とすると

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(m,n)e^{-j\omega_1 m}\cdot e^{-j\omega_1 m}=e^{-j(\omega_1+\omega_2)} \quad (8)$$

となります．すなわち，振幅特性 $|H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})|$ はすべての波数に関して常に 1 であり，位相特性のみが波数によって直線的に変化します．入力信号のフーリエ変換を同様に $F(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ と表すとき，出力信号画像のフーリエ変換は次式で与えられます．

$$G(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})=H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})F(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})=e^{-j(\omega_1+\omega_2)}F(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) \quad (9)$$

この関係は，遅延システムの出力信号は，そのシステムへの入力信号に対して遅延時間に相当する位相遅れを引き起こすことを表しています．ここで，離散化された波数からなる離散フーリエ変換を考えると

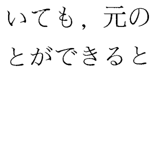
$$G(u,v)=G(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})\big|_{\omega_1=\frac{2\pi u}{N},\omega_2=\frac{2\pi v}{N}}=e^{-j\frac{2\pi(u+v)}{N}}F(u,v) \quad (10)$$

となり，(6)式で $(m_0, n_0)=(1,1)$ と置いた式が得られます．すなわち，画像の空間的平行移動は，対応する画像信号を遅延システムへ通すことに相当します．結果として，出力画像の持つ位相特性は，元の画像の位相特性にシステムの周波数応答の位相特性が加わったものとなります．

図 1 および図 3 の実験から，平行移動のような単純な処理も含めた各種の画像フィルタを考えるとき，それらのシステムが持つ周波数応答の位相特性が元の画像の持つ位相特性を極端に歪めないかぎり(例えば，フィルタの位相特性が零となる場合や直線的に変化する場合など)，出力として得られる画像に関して，たとえ濃淡が変化していても，元の画像の構造を知覚することができるといえます．

〔文　献〕

1) Bernd Jähne: "Digital Image Processing", 4 th edition, Springer (1997)
2) 長橋　宏: "信号画像処理", 昭晃堂 (1998)



1975 年，東京工業大学工学部電気工学科卒業．1980 年，同大学大学院総合理工学研究科物理情報工学専攻博士課程修了．1981 年，山形大学工学部勤務の後，1990 年より東京工業大学勤務．現在，同大学像情報工学研究施設勤務．

長橋(ながはし)　宏(ひろし)