

UNIVERZITET U SARAJEVU  
GRAĐEVINSKI FAKULTET

# ELASTOPLASTIČNA ANALIZA OKVIRA U RAVNI

ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Prof.dr. Samir Dolarević

Kandidat:

Jasmin Grbo

Sarajevo, juli 2015

# SADRŽAJ

1/. UVOD .....	1
1.1/. PARADOKS TEORIJE ELASTIČNOSTI – MOTIVACIJA .....	1
1.1.1/. PRIMJER 1 .....	1
1.1.2/. PRIMJER 2 .....	2
1.2/. PARADOKS POJEDNOSTAVLJENE TEORIJE PLASTIČNOSTI.....	3
1.3/. METODE PLASTIČNE ANALIZE.....	4
1.4/. METODE SA MODELOM PLASTIČNOG ZGLOBA.....	5
1.4.1/. KONCEPT PLASTIČNOG ZGLOBA I SLOMA .....	5
1.4.2/. PRETPOSTAVKE I POJEDNOSTAVLJENJA .....	7
1.4.3/. VRSTE PLASTIČNE ANALIZE.....	7
1.5/. VIRTUELNI RAD .....	8
1.6/. FUNDAMENTALNE TEOREME .....	8
1.6.1/. GORNJA GRANIČNA TEOREMA.....	8
1.6.2/. DONJA GRANIČNA TEOREMA.....	9
1.6.3/. TEOREMA O JEDINSTVENOSTI .....	10
1.6.4/. ZAKLJUČCI NAVEDENIH TEOREMA .....	12
2/. STATIČKA METODA – METODA RAVNOTEŽE.....	13
2.1/. UVOD.....	13
2.2/. PROCEDURA METODE RAVNOTEŽE .....	13
2.2.1/. MOMENTNE JEDNAČINE RAVNOTEŽE.....	13
2.2.2/. PROVJERA PREOSTALA DVA OSNOVNA USLOVA .....	13
2.2.3/. PRAKTIČNA PROCEDURA ZA KOMPLIKOVANJE SISTEME .....	14
2.3/. PRIMJERI.....	15
2.3.1/. PRIMJER 1 .....	15
2.3.2/. PRIMJER 2 .....	17
2.3.3/. PRIMJER 3 .....	20
2.3.4/. PRIMJER 4 .....	21
3/. KINEMATIČKA METODA .....	27
3.1/. UVOD.....	27
3.2/. PRIMJERI.....	27
3.2.1/. PRIMJER 1 .....	27
3.2.2/. PRIMJER 2 .....	30
3.2.3/. PRIMJER 3 .....	32
3.2.4/. PRIMJER 4 .....	33
3.3/. METODA KOMBINOVANJA MEHANIZAMA .....	35
3.3.1/. PRIMJER.....	35
4/. LINEARNO PROGRAMIRANJE.....	36
4.1/. UVOD.....	36

4.2/. METODA NEJEDNAČINA .....	36
4.2.1/. PRIMJER.....	36
4.3/. STATIČKA METODA .....	38
4.3.1/. PRIMJER 1.....	38
4.3.2/. PRIMJER 2.....	39
4.4/. KINEMATIČKA METODA .....	39
4.4.1/. PRIMJER.....	39
5/. ZGLOB PO ZGLOB METODA .....	42
5.1/. UVOD.....	42
5.2/. TEORIJA PRVOG REDA.....	42
5.2.1/. RAČUNARSKI PROGRAM .....	42
5.2.1.1/. ALGORITAM PROGRAMA .....	42
5.2.1.2/. IZVORNI KÔD .....	43
5.2.2/. PRIMJERI .....	62
5.2.2.1/. PRIMJER 1 .....	62
5.2.2.2/. PRIMJER 2 .....	64
5.2.2.3/. PRIMJER 3 .....	69
5.2.2.4/. PRIMJER 4 .....	72
5.2.2.5/. PRIMJER 5 .....	77
5.3/. TEORIJA DRUGOG REDA .....	83
5.3.1/. RAČUNARSKI PROGRAM .....	83
5.3.1.1/. ALGORITAM PROGRAMA .....	83
5.3.1.2/. IZVORNI KÔD .....	84
5.3.2/. PRIMJER.....	100
6/. FAKTORI KOJI DODATNO UTIČU NA $\lambda$ .....	104
6.1/. INTERAKCIJE M-N I M-T.....	104
6.1.1/. PRIMJER.....	105
6.2/. DEFORMABILNOST VEZA .....	107
6.3/. OGRANIČENA POMJERANJA.....	111
6.3.1/. PRIMJER 1 .....	111
6.3.2/. PRIMJER 2 .....	114
6.4/. NEPROPORCIONALNA I CIKLIČNA OPTEREĆENJA.....	117
6.4.1/. NEPROPORCIONALNA PROMJENLJIVA OPTEREĆENJA .....	117
6.4.1.1/. PRIMJER.....	117
6.4.2/. CIKLIČNA OPTEREĆENJA I SHAKEDOWN.....	119
6.4.2.1/. PRIMJER.....	119
6.4.3/. TEOREME SHAKEDOWN ANALIZE.....	123
6.4.3.1/. STATIČKI PRISTUP – DONJA GRANIČNA TEOREMA.....	123
6.4.3.2/. KINEMATIČKI PRISTUP – GORNJA GRANIČNA TEOREMA .....	123
6.4.3.3/. PRIMJER.....	123
7/. ZAKLJUČAK .....	127

8/. LITERATURA.....	128
9/. POPIS TABELA.....	129
10/. POPIS SLIKA .....	130

## Sažetak

U ovom radu obrađen je pojednostavljeni plastični proračun okvira u ravni koji se sastoji u formiranju dovoljnog broja plastičnih zglobova koji konstrukciju prevode u kinematski mehanizam. Prikazan je paradox pri određivanju graničnog opterećenja elastičnim proračunom, koji predstavlja motivaciju za uvođenje plastičnog proračuna konstrukcija. Izvedene su i objašnjenje fundamentalne teoreme plastičnog proračuna. Pokazane su osnovne metode za proračun graničnog opterećenja. Nakon uobičajenog načina rješavanja problema određivanja graničnog opterećenja pokazano je da se isti problemi mogu racionalnije rješavati metodom linearog programiranja. Za potrebe proračuna faktora graničnog opterećenja po statičkoj metodi sukcesivnog formiranja plastičnih zglobova napravljen je program u MATLAB-u. Od ograničenja programa je da ne obuhvata direktno kontinuirano opterećenje. Verifikacija napravljenog programa izvršena je na niz primjera okvira od kojih su u radu prikazni oni iz korištene literature. Program je obogaćen teorijom drugog reda, određeni problemi u vezi s kondenzacijom matrice krutosti elementa su navedeni. Kako su pri proračunima uzete u obzir standardne pretpostavke koje se uzimaju u obzir pri plastičnom proračunu konstrukcija to se želio ispitati uticaj pojedinih faktora na faktor graničnog opterećenja. Među spomenutim faktora nalazi se uzimanje u obzir uticaja normalne i poprečne sile na vrijednost momenta plastičnosti, uticaj deformabilnosti veza, zatim ograničenja pomjeranja i uticaj cikličnog opterećenja.

Ključne riječi:

- okvir
- plastični proračun
- linearno programiranje
- zglob po zglob metoda
- MATLAB program
- M-N, M-T interakcija
- shakedown

## Abstract

In this work simplified plastic analysis of plane frames was treated, which consists of formation of sufficient number of plastic hinges necessary to reduce plane frame to kinematic mechanism. The motivation for replacement of elastic analysis is shown in form of paradox. Fundamental theorems for plastic analysis of plane frames are both derived and explained. Along with fundamental theorems basic methods for determining the limit load are shown. After the usual way of solving the problem of determining the limit load it was shown that the same problems can be solved more rationally using methods of linear programming. For the purpose of determining the limit load factor employing hinge by hinge method the program was developed in MATLAB. Limitation of the program is that it can not include directly continuous load. Verification of developed program has been done using examples taken from literature. The program was enhanced with second order theory and certain issues of stiffness matrix condensation are discussed. As we used standard assumptions for determination of limit load, the influence of some individual factors that affect the limit load factor are examined. Therefore the influence of normal and shear force on plastic moment was checked as well as the influence of deformability of connection used in real construction, the influence of limited deformability and the influence of cyclic load.

Keywords:

- frame
- plastic analysis
- linear programming
- hinge by hinge method
- MATLAB program
- M-N, M-T interaction
- shakedown

# 1/. UVOD

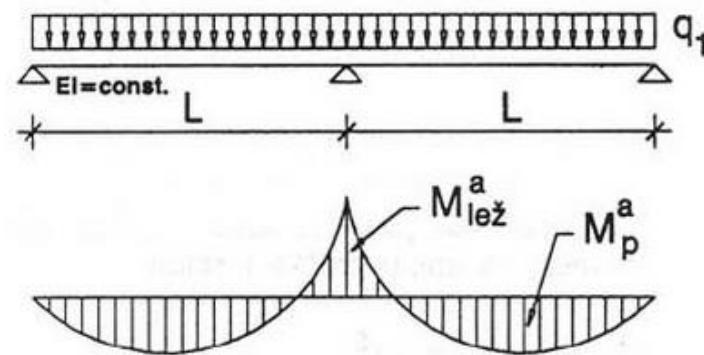
## 1.1/. PARADOKS TEORIJE ELASTIČNOSTI – MOTIVACIJA

Kod proračuna graničnog opterećenja po teoriji elastičnosti smatra se da je konstrukcija dostigla svoju nosivost dostizanjem nosivosti jednog presjeka, što problem određivanja graničnog opterećenja svodi na problem čvrstoće materijala, a ne na sposobnost nosivosti sistema. Ovaj nedostatak se može obuhvatiti računskim primjerima prema [5].

### 1.1.1/. PRIMJER 1

Posmatrajmo kontinuirani nosač na dva polja. Nosač je konstantne krutosti na savijanje i opterećen je kontinuiranim opterećenjem. Razmatrajmo dva slučaja:

Slučaj a)



**Slika 1:** Kontinuirani nosač, slučaj a) [5]

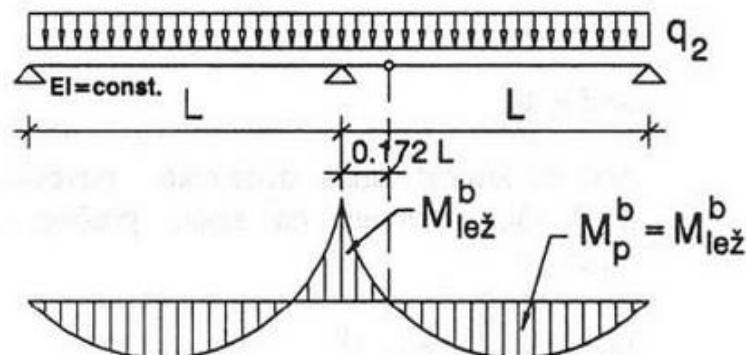
Mjerodavni momenat za dimenzioniranje nad osloncem iznosi:

$$M_{lež}^a = \frac{q_1 \cdot L^2}{8}$$

dok je momenat u polju manji i iznosi:

$$M_p^a = \frac{9 \cdot q_1 \cdot L^2}{128}$$

Slučaj b)



**Slika 2:** Kontinuirani nosač, slučaj b) [5]

Spretnim odabirom položaja zgloba postiže se izjednačenje momenata nad osloncem i u polju:

$$|M_{lež}^b| = |M_p^b| = 0.0858 \cdot q_2 \cdot L^2$$

Poređenjem momenata nad osloncem dobivamo:

$$\frac{q_1}{q_2} = 1.46$$

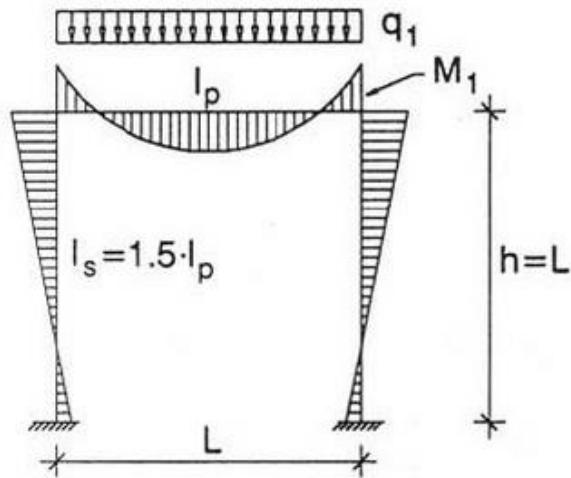
Drugim riječima granično opterećenje nosača b) je 46% veće od nosača a).

Paradoks proračuna je da slabljenjem konstrukcije (umetanjem zgloba) povećavamo nosivost iste. Što je svakako nelogično i u suprotnosti sa logičnim zaključkom određivanja graničnog opterećenja plastičnom analizom konstrukcije koji će biti donesen kasnije a glasi da oslabljena konstrukcija ne može imati veće granično opterećenje od neoslabljene konstrukcije.

### 1.1.2/. PRIMJER 2

Razmatramo dva slučaja okvira sa slika 3 i 4.

Slučaj a)

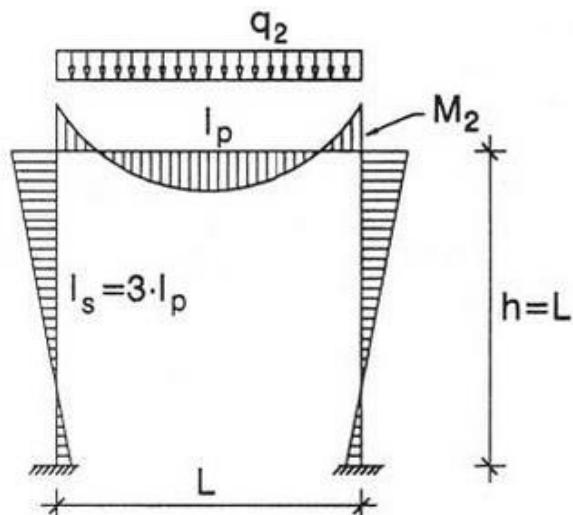


**Slika 3:** Okvir, slučaj a) [5]

Prepostavimo da je krutost na savijanje stuba za 50% veća od krutosti grede, za takav odnos krutosti dobivamo momenat u čvoru na spoju stuba i grede:

$$M_1 = \frac{1}{16} \cdot q_1 \cdot L^2$$

Slučaj b)



**Slika 4:** Okvir, slučaj b) [5]

Ukoliko krutosti stuba povećamo dvostruko ostavljajući krutost grede istu, moment u čvoru na spoju stuba i grede iznosi:

$$M_2 = \frac{1}{14} \cdot q_2 \cdot L^2$$

Poređenjem momenata u čvoru na spoju stuba i grede dobivamo:

$$\frac{q_1}{q_2} = 0.875$$

Drugim riječima granično opterećenje nosača b) je za 12.5% manje od nosača a).

Paradoks proračuna je u tome da smo ojačanjem konstrukciju dobili manju nosivosti, što je nelogično i u suprotnosti sa zaključkom koji će biti donesen kasnije a glasi da ojačana konstrukcija ne može imati granično opterećenje manje od neojačane konstrukcije.

Kako bismo odredili granično opterećenje konstrukcije potrebno je da istu posmatramo u graničnom stanju koje podrazumijeva formiranje dovoljnog broja plastičnih zglobova kako bi se lokalno ili globalno formirao kinematski mehanizam i na taj način u potpunosti iskoristila nosivost ne samo materijala od kojeg je konstrukcija izrađena već i nosivost samog statičkog sistema.

## 1.2./ PARADOKS POJEDNOSTAVLJENE TEORIJE PLASTIČNOSTI

Počeci pojednostavljenje teorije plastičnosti sežu u 1914. godinu kada je Mađarski inžinjer Gábor v. Kazinczy vršio eksperimente na čeličnim gredama. On je 1931. godine zajedno sa Fritz Stüssi i Curt Fritz Kollrunner skrenuo pažnju na kontradiktornost pojednostavljenje teorije plastičnosti sa plastičnim zglobovima na primjeru kontinuirane grede. Ultimno opterećenje kontinuirane grede iznosi:

$$P_u = \frac{8M_p}{I}$$

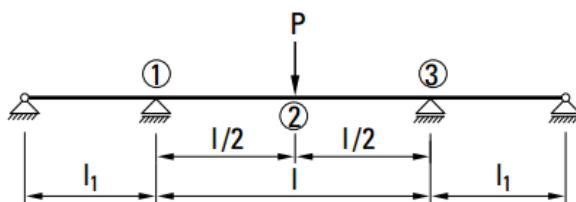
Ukoliko razmatramo dva granična stanja kontinuirane grede, jedno sa  $I_1 \rightarrow 0$ , a drugo sa  $I_1 \rightarrow \infty$ . U prvom slučaju kontinuirana greda se mijenja u obostranu uklještenu gredu čije ultimno opterećenje iznosi:

$$P_u = \frac{8M_p}{I}$$

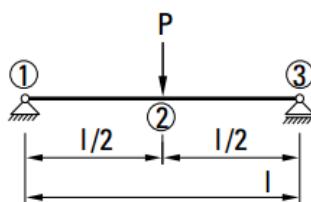
Što je isto kao i kontinuiranu gredu. Za drugi slučaj kontinuirana greda se mijenja u prostu gredu čije ultimno opterećenje iznosi:

$$P_u = \frac{4M_p}{I}$$

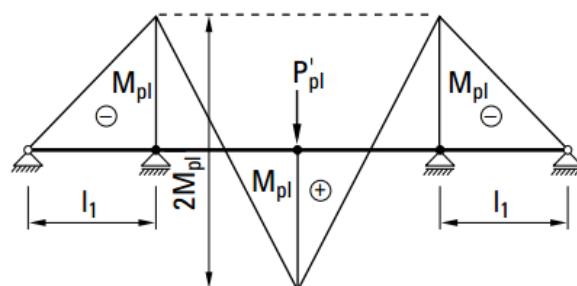
Što predstavlja duplo manje od kontinuirane grede, i to predstavlja paradoks pojednostavljenje teorije plastičnosti sa plastičnim zglobovima. Međutim 1952. godine Symonds i Neal su razjasnili ovaj paradoks. Istraživali su pomjeranja, relativne rotacije i deformacije plastičnog zgloba i otkrili da rotacija plastičnog zgloba postaje neprihvatljivo velika nakon određene dužine  $I_1$ , pri graničnom stanju  $I_1 \rightarrow \infty$  pomjeranja čvora 2 također teže beskonačnosti, što znači da proračun gubi smisao i ne može biti prihvaćen kao ultimno stanje proste grede.



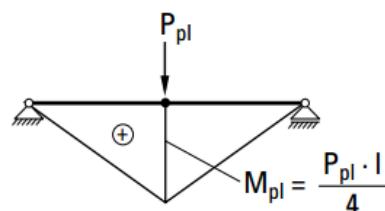
**Slika 5:** Kontinuirana greda [12]



Slika 6: Prosta greda [12]



Slika 7: Mehanizam kontinuirane grede [12]



Slika 8: Mehanizam proste grede [12]

### 1.3/. METODE PLASTIČNE ANALIZE

Plastična analiza konstrukcija ima nekoliko prednosti nad elastičnom analizom od kojih su najznačajnije ušteda materijala i realniji prikaz stvarnog ponašanja konstrukcije. Ove prednosti direktno proizilaze iz činjenice da plastična analiza i dimenzioniranje konstrukcija u potpunosti iskorištavaju važno svojstvo materijala poznato pod pojmom duktilnost. „*Duktilnost predstavlja svojstvo materijala da podnese izvjesne nelinearne deformacije, a da pri tome ne dođe do loma*“ [2]. Duktilnost se može izraziti kao odnos deformacije (pomjeranja) pri lomu i deformacije (pomjeranja) na granici tečenja materijala.

Početak analize konstrukcija pomoću teorije plastičnosti vezan je za prvu polovinu 20. stoljeća. Osnovna metoda koja je široko rasprostranjena je pojednostavljena metoda plastičnih zglobova za određivanje faktora graničnog opterećenja i preraspodjeli presječnih sila u konstrukciji. Pomenuti faktor graničnog opterećenja ujedno predstavlja i koeficijent sigurnosti konstrukcije, odnosno broj za koji je potrebno povećati opterećenje kako bi došlo do sloma iste. Metode plastične analize se suštinski mogu podijeliti u dvije osnovne grupe i to:

- metode sa modelom lokalne plastifikacije (plastični zglobovi)
- metode sa modelom plastičnih zona

U metode sa modelom lokalne plastifikacije spadaju već pomenute dvije metode analiza sa elasto-plastičnim zglobom i analiza sa kruto-plastičnim zglobom. Kao što im imena govore, analiza sa elasto-plastičnim zglobom podrazumijeva obuhvatanje plastičnog ponašanja kroz plastični zglob nulte dužine koji ostaje elastičan dok se ne dosegne plastični kapacitet poprečnog presjeka. Pristup sa kruto-plastičnim zglobom također obuhvata plastično ponašanje kroz plastični zglob, ali se zanemaruju elastične deformacije.

Dakle u ove dvije metode sve plastične deformacije su skoncentrisane u plastičnim zglobovima nulte dužine. Kako se elementi van područja plastičnog zgloba ponašaju elastično ove metode generalno precjenjuju čvrstoću i krutost konstrukcije. Međutim, nekoliko studija je pokazalo da za praktičnu primjenu elasto-plastična analiza pokazuje istu čvrstoću i stabilnost konstrukcije kao i preciznije i skuplje metode sa modelom plastičnih zona.

Metode sa modelom plastičnih zona prate postepeno formiranje plastificiranih zona u konstrukciji diskretizacijom iste na nivou elementa i poprečnog presjeka. Upravo zbog fine podjele elemenata i njihovih poprečnih presjeka ovim modelom se može precizno predvidjeti plastični odgovor konstrukcije. Međutim ovakvi načini analize su jako računarski intenzivni za praktičnu primjenu, te zbog svoje komplikovanosti i troškova još uvjek se nisu našle u praktičnoj primjeni. U radu će se obraditi metode sa modelom lokalne plastifikacije, dok se metode sa modelom plastičnih zona ostavljaju za budući rad.

## 1.4/. METODE SA MODELOM PLASTIČNOG ZGLOBA

### 1.4.1/. KONCEPT PLASTIČNOG ZGLOBA I SLOMA

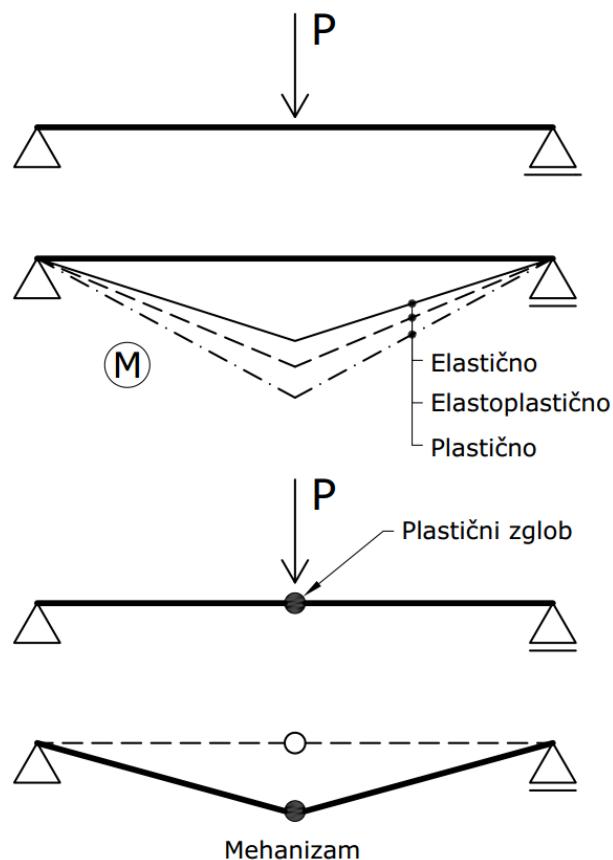
Ove metode plastične analize konstrukcije već se dugo vremena koriste. Zadatak plastične analize je da predviđi granično opterećenje pri kojem će doći do sloma konstrukcije uslijed prekomjernih deformacija.

Kao i većinu ostalih stvari, za objašnjenje koncepta plastičnog zgloba i sloma prikladno je koristiti najjednostavniji nosač, a to je prosta greda. Razmatrat ćemo gredu izrađenu od elastoplastičnog materijala sa idealiziranim  $\sigma$ - $\epsilon$  dijagramom i to elastično-idealno plastično, koji ima isti  $\sigma$ - $\epsilon$  dijagram za pritisak i zatezanje. Zbog jednostavnosti neka je greda pravougaonog poprečnog presjeka.

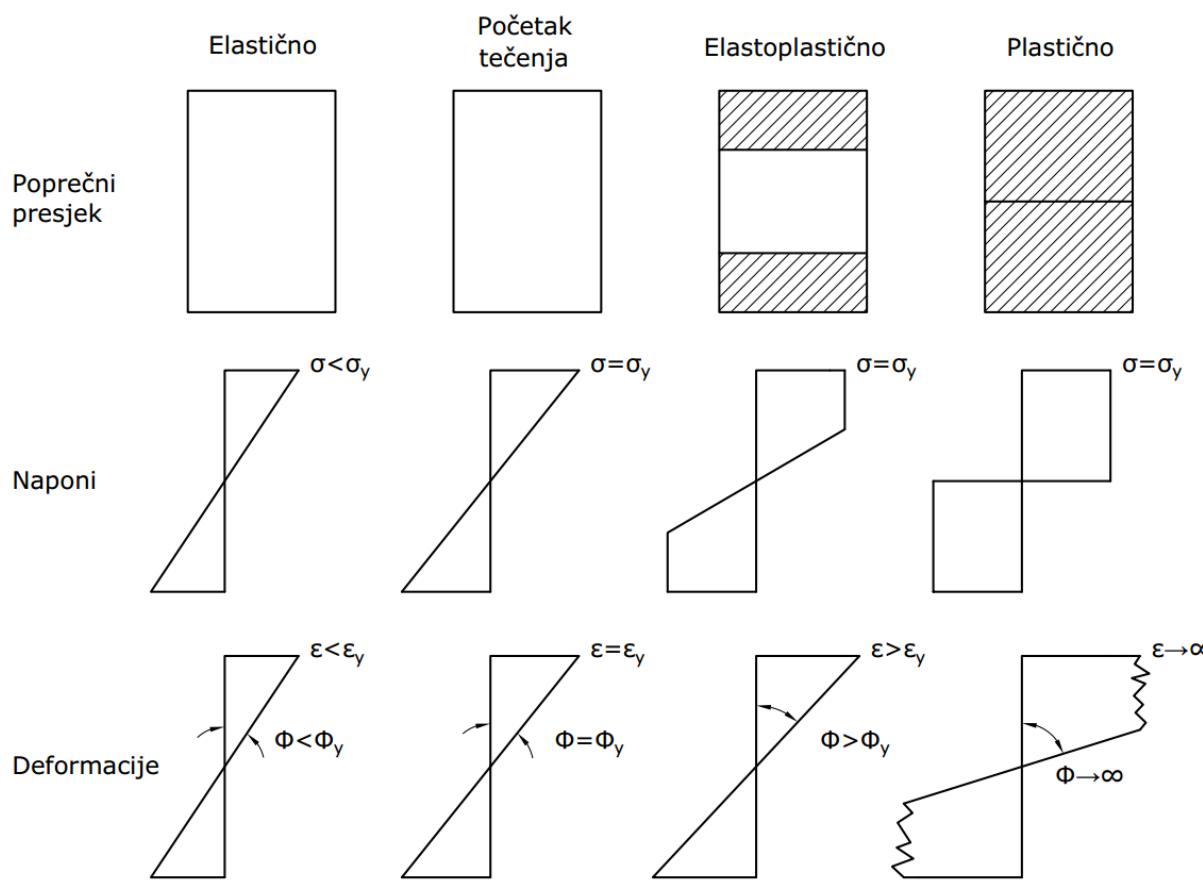
Na slici 9 data je prosta greda pravougaonog poprečnog presjeka  $b/h$ , opterećena koncentrisanom silom  $P$ . Greda prolazi kroz tri stanja prije nego dostigne slom. Kako se radi o prostoj gredi opterećenoj sa koncentrisanom silom to je mjerodavan presjek ispod sile. Dok su naponi u svim vlaknima najnapregnutijeg presjeka manji od napona tečenja  $\sigma_y$  materijala greda se nalazi u elastičnom stanju, naponi su proporcionalni deformacijama.

Onda kada krajnja vlakna najnapregnutijeg presjeka dostignu napon tečenja  $\sigma_y$  greda se nalazi na prelazu iz elastičnog u elastoplastično stanje u kojem se nalazi sve dok svako vlakno najnapregnutijeg presjeka ne dostigne napon tečenja  $\sigma_y$  kada greda prelazi u plastično stanje.

U trenutku prelaska u plastično stanje u svakom vlaknu najnapregnutijeg presjeka vlada napon tečenja  $\sigma_y$ , što znači da je presjek u potpunosti iscrpljen tj. da je dostigao kapacitet nosivosti. Momenat koji uzrokuje takvu raspodjelu naponu u poprečnom presjeku da u svakom vlaknu vlada napon tečenja  $\sigma_y$  se naziva moment plastičnosti  $M_p$ . Samo ime govori da taj momenat uzrokuje potpunu plastifikaciju tog presjeka.



**Slika 9:** Koncept plastičnog zgloba i sloma



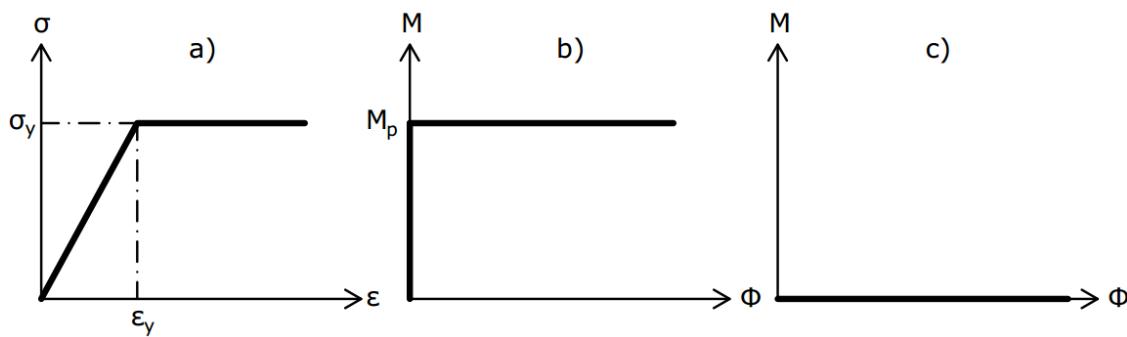
**Slika 10:** Stanja najnapregnutijeg presjeka [1]

Sa prelaskom grede u plastično stanje, odnosno plastificiranjem najnapregnutijeg presjeka, kako je presjek u potpunosti iscrpljen to ne može preuzeti dodatne momente i na tom mjestu se formira plastični zglob. Razlika između mehaničkog i plastičnog zgloba je ta da u plastičnom zglobu vlada moment plastičnosti  $M_p$ , dok kod mehaničkog zgloba momenat je jednak nuli.

Na slici 6 u plastičnom stanju prikazano je da deformacije teže ka beskonačnosti što u stvarnosti nije moguće, već postoji granična deformacija nakon koje dolazi do popunog rasterećenja presjeka tj. moment plastičnosti koji je u njemu vladao više ne postoji, a taj momenat plastičnosti se preraspodjeljuje na ostale nosive presjeke.

Sa formiranim plastičnim zglobom na mjestu koncentrisane sile greda prelazi u kinematski labilnu formu tj. mehanizam, koji nije u stanju održati ravnotežu i nastupa slom proste grede. Drugim riječima, sa svakim formiranim plastičnim zglobom konstrukcija prelazi u jednostavniju formu od prethodne, odnosno njena staticka neodređenost se smanjuje za jedan. A ukoliko se radi o staticki određenom nosaču kao prosta greda formiranje prvog plastičnog zgloba ujedno znači i slom grede.

Opterećenje koje dovodi do formiranja onoliko plastičnih zglobova koliko je potrebno da konstrukciju prevedu u mehanizam naziva se granično opterećenje.



**Slika 11:** a) Idealizirani  $\sigma$ - $\epsilon$  dijagram materijala, b)  $M$ - $\Phi$  plastični zglob c)  $M$ - $\Phi$  mehanički zglob

## 1.4.2/. PRETPOSTAVKE I POJEDNOSTAVLJENJA

Uvode se sljedeće pretpostavke i pojednostavljenja za proračun metodama lokalne plastifikacije:

- materijal je :
  - elastičan-idealno plastičan (elasto-plastična analiza)
  - krut – idealno plastičan (kruto-plastična analiza)
- dominantan je uticaj momenta savijanja na formiranje plastičnih zglobova, zanemaruje se uticaj normalne i poprečne sile na vrijednost momenta plastičnosti
- 1D kriterij tečenja ( $\sigma \leq \sigma_{PL}$ , tj.  $M \leq M_{PL}$ )
- zanemareni su uticaji teorije drugog reda
- poprečni presjeci imaju neograničen kapacitet rotacije
- opterećenje je monotono i proporcionalno

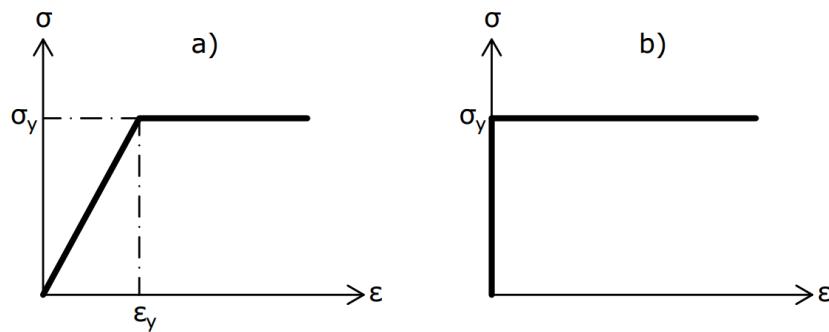
## 1.4.3/. VRSTE PLASTIČNE ANALIZE

U okviru metode plastičnih zglobova imamo dvije vrste plastične analize konstrukcija i to:

- kruto-plastična analiza
  - statička metoda
  - kinematska metoda
- elasto-plastična analiza
  - statička metoda sukcesivnog formiranja plastičnih zglobova

Kruto-plastična analiza pretpostavlja krut-idealno plastičan materijal, drugim riječima zanemaruju elastične deformacije. Elasto-plastična analiza prepostavlja elastičan-idealno plastičan materijal uzimajući tako u obzir i elastične deformacije.

Tačno rječenje plastične analize treba zadovoljiti tri osnovna uslova: ravnoteže, postojanja mehanizma i plastičnog momenta. Za dovoljno jednostavne sisteme ove uslove je moguće simultano i jednostavno zadovoljiti. Za komplikovanije sisteme postaje teško zadovoljiti sva tri uslova kako bi se odmah dobilo tačno rješenje. Stoga se pokušalo pronaći aproksimativne metode zajedno sa generalnim principima i teoremmama s kojima možemo analizirati aproksimativna rješenja. Aproksimativne metode ne zadovoljavaju sva tri osnovna uslova, međutim njihova prednost je što daju aproksimativna rješenja veoma brzo. A na osnovu generalnih principa i teorema možemo analizirati aproksimativna rješenja.



**Slika 12:** a)  $\sigma$ - $\epsilon$  dijagram za elasto-plastičnu analizu b)  $\sigma$ - $\epsilon$  dijagram za kruto-plastičnu analizu

## 1.5/. VIRTUELNI RAD

„Pomjeranja nekog sistema koja su omogućena vezama tačaka tog sistema za okolinu i međusobnim vezama tačaka se nazivaju virtualna pomjeranja“ [3].

Jednačina virtualnog rada povezuje sistem sila u ravnoteži sa sistemom kompatibilnih pomjeranja. Ukoliko se tijelu u ravnoteži pridruže kompatibilna pomjeranja, tada rad vanjskih sila na vanjskim pomjeranjima ( $W_E$ ) je jednak radu unutrašnjih sila na unutrašnjim deformacijama ( $W_I$ ), tj. vrijedi  $W_E = W_I$ .

Vanjska pomjeranja trebaju biti kompatibilna sa unutrašnjim deformacijama, međutim ove unutrašnje deformacije ne moraju biti stvarne, odnosno ne moraju odgovarati niti jednom stvarnom ili mogućem stanju ravnoteže. Unutrašnje sile trebaju biti u ravnoteži sa vanjskim silama, ali ne moraju biti stvarne sile uslijed vanjskog opterećenja. Nemaju nikakve veze sa vanjskim opterećenjem ili unutrašnjim deformacijama. Bilo koji skup sila u ravnoteži može biti korišten u jednačini virtualnog rada. Nosivi sistem je moguće proizvoljno deformirati tako da formira skup pomjeranja koja su kompatibilna bez obzira na opterećenje.

Kod plastičnih metoda, samo deformisani oblik mehanizma se uzima u razmatranje, gdje se pretpostavlja da su unutrašnje deformacije koncentrisane u plastičnom zglobu koji su povezani krutim elementima. Stoga jednačina virtualnog rada za okvirne sistema može biti napisana eksplisitnoj formi:

$$\sum_{i=1}^n P_i \cdot \delta_i = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \theta_i \quad (1)$$

$P_i$  je vanjsko opterećenje,  $M_i$  su unutrašnji momenti na mjestima plastičnih zglobova. Kao što je prethodno rečeno,  $P$ -ovi i  $M$ -ovi zajedno formiraju sistem sila u ravnoteži.  $\delta_i$  je pomjeranje na mjestu opterećenja  $P_i$  i u smjeru opterećenja  $P_i$ ,  $\theta_i$  je rotacija na mjestu plastičnog zgloba.  $\delta$ -te i  $\theta$ -te zajedno formiraju sistem kompatibilnih pomjeranja.

## 1.6/. FUNDAMENTALNE TEOREME

Prethodno je rečeno da je za komplikovane sisteme postaje teško simultano zadovoljiti sva tri neophodna uslova tačnog rješenja plastične analize. Alternativa tačnom rješenju jeste aproksimativno rješenje koje zadovoljava jedan ili dva od tri osnovna uslova. Kako bismo pravilno rasuđivali tačnost aproksimativnog rješenja uspostavljeno je nekoliko generalnih principa i fundamentalnih teorema.

### 1.6.1/. GORNJA GRANIČNA TEOREMA

Ukoliko je mehanizam konstrukcije pretpostavljen i jednačina virtualnog rada napisana, tada faktor opterećenja  $\lambda$  proračunat na taj način će uvijek biti veći ili u najboljem slučaju jednak faktoru graničnog opterećenja  $\lambda_C$ . Stoga ova teorema daje rezultate koji nisu na strani sigurnosti, odnosno nepouzdani su. Drugim riječima ukoliko se opterećenje postepeno povećava do radnih veličina, stvari slom bi se već dogodio prije nastupanja pretpostavljenog mehanizma, osim ukoliko pretpostavljeni mehanizam nije jednak tačnom.

**Dokaz:** Razmatrajmo obostrano uklještenu gredu opterećenu koncentrisanom silom  $P$ . Stvari mehanizam koji će dovesti do sloma konstrukcije će biti formiran onda kada se formiraju plastični zglobovi na krajevima grede (tačke  $A$  i  $D$ ) i na mjestu koncentrisane sile (tačka  $B$ ). Stvari dijagram momenata koji odgovara ovom mehanizmu je prikazan u sklopu slike 9. Nakon toga pretpostaviti ćemo proizvoljan mehanizam i njegov odgovarajući dijagram momenata.

Sljedi jednačina virtualnog rada pretpostavljenog mehanizma i njegovog odgovarajućeg dijagrama momenata.

$$P_U \cdot \delta_B = M_P \cdot \theta_A + M_P \cdot \theta_C + M_P \cdot \theta_D \quad (2)$$

Nakon toga pišemo jednačinu virtualnog rada pretpostavljenog mehanizma i dijagrama momenata stvarnog mehanizma.

$$P_C \cdot \delta_B = M_P \cdot \theta_A + M_C \cdot \theta_C + M_P \cdot \theta_D \quad (3)$$

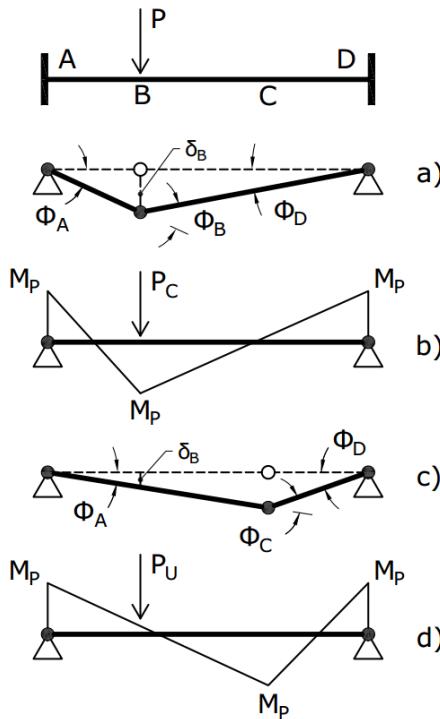
Kada oduzmemos jednačinu (3) od jednačine (2) imamo:

$$(P_U - P_C) \cdot \delta_B = (M_P - M_D) \cdot \theta_C \quad (4)$$

Ovdje se pozivamo na treći osnovni uslov a to je da ni u jednom presjeku ne može vladati momenat veći od momenta plastičnosti. Stoga slijedi da je  $M_D \leq M_P$ , a iz ovoga slijedi dokaz gornje granične teoreme

$$P_u \geq P_c \quad (5)$$

gdje je  $P_c$  stvarno opterećenje pri slomu.



**Slika 13:** a) Stvarni mehanizam b) Dijagram momenata stvarnog mehanizma  
c) Prepostavljeni mehanizam d) Dijagram momenata prepostavljenog mehanizma [1]

### 1.6.2/. DONJA GRANIČNA TEOREMA

Ukoliko dijagram momenata u ravnoteži sa vanjskim opterećenjem može biti dobiven tako da moment plastičnosti nije prekoračen ni u jednom poprečnom presjeku, tada faktor opterećenja  $\lambda$  proračunat iz ovog dijagrama momenata će uvijek biti manji ili u najboljem slučaju jednak faktoru graničnog opterećenja  $\lambda_c$ . Drugim riječima ukoliko pri opterećenju sa faktorom opterećenja  $\lambda$  možemo naći dijagram momenata koji zadovoljava uslov ravnoteže i momenat plastičnosti, ali ne uslovno i osnovni uslov postojanja mehanizma tada će konstrukcija ostati stabilna i neće doći do sloma pri tom faktoru opterećenja  $\lambda$ , osim ukoliko to zapravo nije tačno rješenje. Ovom teoremom moguće je dobiti faktore opterećenja koji su na strani sigurnosti.

*Dokaz:* Ponovo razmatramo obostranu uklještenu gredu sa slike 6. Intuitivno nacrtamo dijagram momenata, zatim primjenimo jednačinu virtuelnog rada stvarnog mehanizma i prepostavljenog dijagrama momenata.

$$P_L \cdot \delta_c = M_A \cdot \theta_A + M_B \cdot \theta_B + M_D \cdot \theta_D \quad (6)$$

Zatim pišemo jednačinu virtuelnog rada stvarnog mehanizma i stvarnog dijagrama momenata.

$$P_c \cdot \delta_c = M_P \cdot \theta_A + M_P \cdot \theta_B + M_P \cdot \theta_D \quad (7)$$

Oduzmimo jednačinu (7) od jednačine (6).

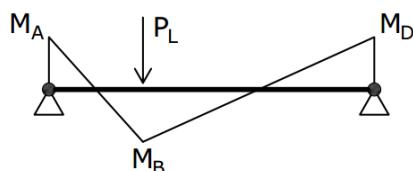
$$(P_L - P_c) \cdot \delta_c = (M_A - M_P) \cdot \theta_A + (M_B - M_P) \cdot \theta_B + (M_D - M_P) \cdot \theta_D \quad (8)$$

Kako  $M_A$ ,  $M_B$  i  $M_D$  su manji ili jednaki  $M_P$  to slijedi da je:

$$(P_L - P_c) \leq 0 \quad (9)$$

Odnosno dokaz donje granične teoreme:

$$P_L \leq P_c \quad (10)$$



**Slika 14:** Intuitivno nacrtan dijagram momenata [1]

### 1.6.3/. TEOREMA O JEDINSTVENOSTI

Faktor graničnog opterećenja  $\lambda_c$  ima konačnu vrijednost. Drugim riječima, kako opterećenje na konstrukciji raste tj. kako faktor opterećenja  $\lambda$  raste, slom se dešava pri jednoj konačnoj vrijednosti faktora opterećenja, a to je faktor graničnog opterećenja  $\lambda = \lambda_c$ .

*Dokaz:* Dokaz će se izvršiti kontradikcijom. Počet ćemo sa pretpostavkom da teorema nije tačna. Stoga moguće je da imamo dva mehanizma pri slomu pod istim opterećenjem sa dva različita faktora opterećenja  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ . Oba mehanizma zadovoljavaju preostala dva osnovna uslova, uslov ravnoteže i uslov momenta plastičnosti. Neka su pomjeranja prvog mehanizma  $\delta_1$  i  $\theta_1$ , a drugog  $\delta_2$  i  $\theta_2$ . Ova pomjeranja su kompatibilna. Odgovarajući dijagram momenata prvog mehanizma  $M_1$  je u ravnoteži sa vanjskim opterećenjem  $\lambda_1 \cdot P$ . Ovaj dijagram momenata zadovoljava uslov  $|M_1| \leq M_p$ . Također, dijagram momenata drugog mehanizma  $M_2$  je u ravnoteži sa vanjskim opterećenjem  $\lambda_2 \cdot P$  i zadovoljava uslov  $|M_2| \leq M_p$ .

Plastični rad prvog mehanizma iznosi:

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_1 \cdot P_i) \cdot \delta_i = \sum_{i=1}^n M_{p_i} \cdot \theta_i \quad (11)$$

Za proporcionalan slučaj opterećenja  $\lambda_1$  može biti izvučeno ispred sume:

$$\lambda_1 \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot \delta_i = \sum_{i=1}^n M_{p_i} \cdot \theta_i \quad (12)$$

Ukoliko primjenimo jednačinu virtuelnog rada na sistemu kompatibilnih pomjeranja prvog mehanizma sa sistemom sila u ravnoteži drugog mehanizma imamo:

$$\lambda_2 \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot \delta_i = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \theta_i \quad (13)$$

Ukoliko ova dva mehanizma imaju zajedničke plastične zglobove, tada će  $M_i \cdot \theta_i$  poprimiti oblik  $M_{p_i} \cdot \theta_i$  na mjestima zajedničkih plastičnih zglobova, a na ostalim mjestima će biti  $< M_{p_i} \cdot \theta_i$ . Stoga imamo:

$$\lambda_2 \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot \delta_i \leq \sum_{i=1}^n M_{p_i} \cdot |\theta_i| \quad (14)$$

Ukoliko uporedimo jednačinu (12) sa jednačinom (14) vidimo da vrijedi:

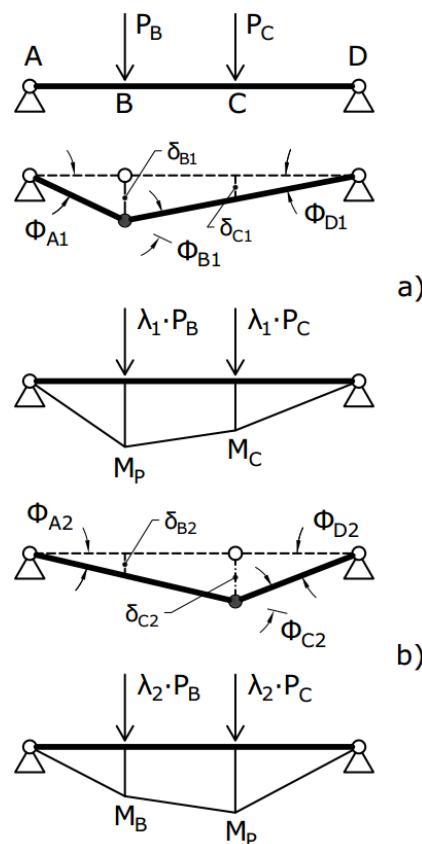
$$\lambda_2 \leq \lambda_1 \quad (15)$$

Ukoliko uporedimo virtualni rad sistema sile u ravnoteži prvog mehanizma nad sistemom kompatibilnih pomjeranja drugog mehanizma sa plastičnim radom drugog mehanizma dobit ćemo:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \quad (16)$$

Nejednakosti (15) i (16) mogu istovremeno biti zadovoljene samo ako dva faktora opterećenja imaju istu vrijednost. Stoga je ta vrijednost jedinstvena i označena kao faktor graničnog opterećenja  $\lambda_c$ .

Ilustrativni dokaz ove teoreme će se pokazati na prostoj gredi sa slike 8, na kojoj su prikazani pretpostavljeni mehanizmi i njihovi odgovarajući dijagrami momenata.



**Slika 15:** a) Prvi mehanizam i pripadajući dijagram  $M$ , b) Drugi mehanizam i pripadajući dijagram  $M$

Plastični virtuelni rad prvog mehanizma:

$$\lambda_1 \cdot P_B \cdot \delta_{B1} + \lambda_1 \cdot P_C \cdot \delta_{C1} = M_p \cdot \theta_{B1} \quad (17)$$

Virtuelni rad sistema sila u ravnoteži drugog mehanizma na sistemu kompatibilnih pomjeranja prvog mehanizma:

$$\lambda_2 \cdot P_B \cdot \delta_{B1} + \lambda_2 \cdot P_C \cdot \delta_{C1} = M_B \cdot \theta_{B1} \quad (18)$$

Oduzimanjem (18) od (17) slijedi:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot (P_B \cdot \delta_{B1} + P_C \cdot \delta_{C1}) = \theta_{B1} \cdot (M_p - M_B) \quad (19)$$

Kako  $M_B$  ne može biti veće od  $M_p$  to slijedi da je:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \quad (20)$$

Sada napišimo plastični virtuelni rad drugog mehanizma:

$$\lambda_2 \cdot P_B \cdot \delta_{B2} + \lambda_2 \cdot P_C \cdot \delta_{C2} = M_p \cdot \theta_{C2} \quad (21)$$

Zatim virtuelni rad sila u ravnoteži prvog mehanizma na sistemu kompatibilnih pomjeranja drugog mehanizma:

$$\lambda_1 \cdot P_B \cdot \delta_{B2} + \lambda_1 \cdot P_C \cdot \delta_{C2} = M_c \cdot \theta_{C2} \quad (22)$$

Oduzimanjem (22) od (21) slijedi:

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot (P_B \cdot \delta_{B2} + P_C \cdot \delta_{C2}) = \theta_{C2} \cdot (M_p - M_c) \quad (23)$$

Kao i  $M_B$  tako ni  $M_c$  ne može biti veće od  $M_p$  pa slijedi nejednakost:

$$\lambda_2 \geq \lambda_1 \quad (24)$$

Nejednakosti (20) i (24) mogu biti zadovoljene samo u slučaju:

$$\lambda_1 = \lambda_2 \quad (25)$$

Potrebno je napomenuti da nije dokazano da je mehanizam sloma jedinstven ili da je dijagram momenata pri slomu jedinstven. Moguće je imati dva različita mehanizma koja imaju isti faktor graničnog opterećenja  $\lambda_c$ . Teorema o jedinstvenosti navodi da faktor graničnog opterećenja  $\lambda_c$  određen na osnovu tri osnovna uslova ima jedinstvenu vrijednost.

#### 1.6.4/. ZAKLJUČCI NAVEDENIH TEOREMA

Sljedeći zaključci mogu biti izvedeni na osnovu prethodnih teorema:

- ukoliko je nosivi element od materijala zanemarljive težine dodat konstrukciji ili su dodate nove veze za okolinu, konstrukcije time ne može biti oslabljena

Ovaj zaključak proizilazi iz donje granične teoreme. Kako dijagram momenata za stanje sloma neojačane konstrukcije mora zadovoljiti uslov  $M_i \leq M_p$ , isti dijagram momenata će sigurno zadovoljiti isti uslov ojačane konstrukcije. Stoga, na ojačanoj konstrukciji neće nastupiti slom pri opterećenju manjem od onog na neojačanoj konstrukciji.

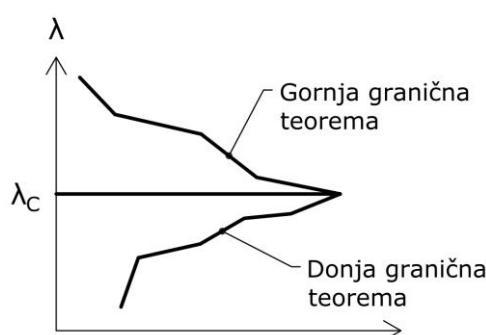
- uklanjanje elementa ili veze sa okolinom iz konstrukcije će samo oslabiti konstrukciju

Ovaj zaključak proizilazi iz gornje granične teoreme. Kako uslov postojanja mehanizma mora biti zadovoljen u stanju sloma neoslabljene konstrukcije, zasigurno će isti uslov biti zadovoljen na oslabljenoj konstrukciji pri istom opterećenju. Stoga se oslabljena konstrukcija ne može oduprijeti većem opterećenju od onoga na neoslabljenoj konstrukciji.

- korisna činjenica gornje granične teoreme je da je faktor graničnog opterećenja onaj najmanji koji se dobije iz razmatranja svih mogućih mehanizama konstrukcije

Prethodne tri navedene teoreme mogu biti sažete kao:

$$\lambda = \lambda_c \left\{ \begin{array}{l} \text{Mehanizam } \lambda \geq \lambda_c \\ \text{Ravnoteža } \lambda \leq \lambda_c \\ \text{Moment plastičnosti} \end{array} \right.$$



**Slika 16:** Prilaz tačnom rješenju donje i gornje granične teoreme

## 2/. STATIČKA METODA – METODA RAVNOTEŽE

### 2.1/. UVOD

Kao što samo ime nagoviještava, kod metode ravnoteže uspostavlja se veza između čvrstoće materijala i nanesenog opterećenja. Veza se uspostavlja podešavanjem nepoznatih prekobrojnih veza kod statički neodređenih konstrukcija tako da uslovi ravnoteže i momenta plastičnosti budu zadovoljeni, a uslov postojanja mehanizma može, a i ne mora biti zadovoljen. Ovakvo stanje konstrukcije se naziva statički dopustivo.

Zadatak inžinjera je da odredi najbolje vrijednosti proizvoljno odabranih prekobrojnih veza koje će dati najveće granično opterećenje. Najbolje vrijednosti ustvari predstavljaju stanje u kojem se formira mehanizam. Ako bilo koji skup vrijednosti daje donju graničnu vrijednost, tačan skup vrijednosti obično nije očigledan i zahtjeva intuiciju.

Za statički određene konstrukcije uslovi ravnoteže su dovoljni da se dobije tačan dijagram momenata. Za ovakve konstrukcije lahko je odrediti granično opterećenje izjednačujući maksimalni momenat sa plastičnim momentom poprečnog presjeka.

Za statički neodređene konstrukcije uslovi ravnoteže nisu dovoljni da bi se nacrtao dijagram momenata, već se za određivanje prekobrojnih veličina koristi i uslov kompatibilnosti pomjeranja. U plastičnoj analizi inžinjer ima slobodu da sam odabire vrijednosti nepoznatih prekobrojnih veličina što rezultira brzim rješenjem na strani sigurnosti. Rješenje će biti tačno samo ukoliko odabранe vrijednosti nepoznatih prekobrojnih veličina formiraju mehanizam. Činjenica da bilo koji dijagram momenata u ravnoteži gdje ni jedna vrijednost momenta nije veća od  $M_p$  vodi ka sigurnom rješenju proizilazi i donje granične teoreme, koja navodi da faktor opterećenja  $\lambda$  proračunat na osnovu pretpostavljenog dijagrama momenata gdje ni jedna vrijednost momenta nije veća od  $M_p$  je manji ili u najboljem slučaju jednak faktoru graničnog opterećenja  $\lambda_c$ .

### 2.2/. PROCEDURA METODE RAVNOTEŽE

Formalna procedura metode ravnoteže se može rastaviti na dvije faze:

- crtanje dijagrama momenata i formiranje momentnih jednačina ravnoteže
- određivanje nepoznatih veličina tako da oba preostala uslova, postojanje mehanizma i uslov momenta plastičnosti budu zadovoljeni

#### 2.2.1/. MOMENTNE JEDNAČINE RAVNOTEŽE

Formalna procedura formiranja momentnih jednačina ravnoteže može se svesti na sljedeće korake:

- 1) odabiranje prekobrojnih veza koje će biti oslobođene tako da se iz statički neodređene konstrukcije dobije statički određena konstrukcija
- 2) crtanje dijagrama momenata na statički određenoj konstrukciji od vanjskog opterećenja
- 3) crtanje dijagrama momenata na statički određenoj konstrukciji od oslobođenih prekobrojnih veza
- 4) superponiranje dijagrama iz prethodne tačke, tako da je ukupni momenat u bilo kojoj tački jednak razlici ordinata prethodno nacrtanih dijagrama momenata
- 5) napisati momentne jednačine u kritičnim presjecima konstrukcije koristeći dijagram iz prethodne tačke

#### 2.2.2/. PROVJERA PREOSTALA DVA OSNOVNA USLOVA

Kada imamo formirane momentne jednačine u kojima figurišu nepoznate oslobođene prekobrojne veze, zadatak je da odredimo vrijednosti tih nepoznatih tako da uslov postojanja mehanizma i uslov momenta plastičnosti budu zadovoljeni. Takvo rješenje vodi tačnom rješenju. Sljedeći koraci mogu biti korišteni:

- 1) odabrati vrijednosti nepoznatih veličina tako da uslov momenta plastičnosti na mjestima maksimalnih momenata bude zadovoljen
- 2) odrediti faktor opterećenja na osnovu odabralih vrijednosti nepoznatih veličina
- 3) provjeriti uslov postojanja mehanizma, ukoliko je uslov zadovoljen onda proračunati faktor opterećenja je faktor graničnog opterećenja, inače proračunati faktor operećenja predstavlja donje granično rješenje tačnog rješenja
- 4) podesiti vrijednosti nepoznatih i ponavljati prva tri koraka dok se ne dobije tačno rješenje

Prepostavljati vrijednosti nepoznatih prekobrojnih veličina je ekvivalentno intuitivnoj vizualizaciji kako će konstrukcija preuzeti nanešeno opterećenje. Najefikasnija distribucija dijagrama momenata vodi ka formiranju mehanizma. Bilo koja druga distribucija dijagrama momenata će biti manje efikasna i stoga voditi ka rješenju manjem od tačnog tj. bit će donja granična vrijednost.

### 2.2.3/. PRAKTIČNA PROCEDURA ZA KOMPLIKOVANIJE SISTEME

Metoda ravnoteže je prikladna za plastičnu analizu kada je broj statičke neodređenosti mali i kada je broj vršnih tačaka momenata mali. Sa povećanjem statičke neodređenosti i broja vršnih tačaka momenata metoda sama po sebi počinje biti komplikovana. Praktična procedura za plastičnu analizu komplikovanih sistema se može svesti na sljedeće korake:

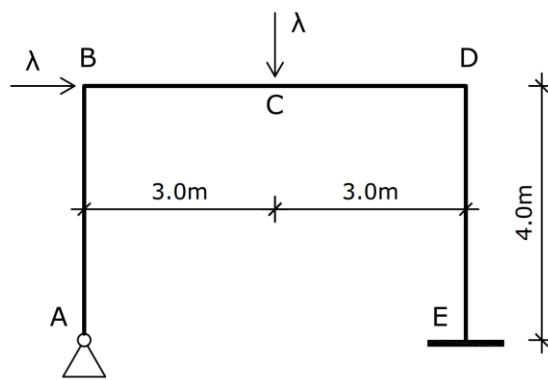
- 1) odabrati i oslobođiti prekobrojne veze formirajući statički određenu konstrukciju
- 2) nacrtati dijagram momenata od opterećenja na statički određenoj konstrukciji
- 3) nacrtati dijagram momenata od oslobođenih prekobrojnih veza na statički određenoj konstrukciji
- 4) prepostaviti mehanizam
- 5) kombinovati dijagrame momenata iz druge i treće tačke tako da prepostavljeni mehanizam bude formiran
- 6) riješiti sistem jednačina iz prethodne tačke
- 7) provjeriti uslov momenta plastičnosti tj.  $M_i \leq M_p$  u preostalim vršnim tačkama momenata
- 8) ukoliko je uslov momenta plastičnosti zadovoljen, onda proračunati faktor opterećenja (proračunat rješavanjem sistem jednačina) predstavlja tačno rješenje odnosno faktor graničnog opterećenja  $\lambda_c$
- 9) ukoliko uslov momenta plastičnosti nije zadovoljen vratiti se na tačku 4 i prepostaviti drugi mehanizam sve dok uslov momenta plastičnost ne bude zadovoljen

U nastavku će biti urađena četiri primjera u svrhu demonstracije navedene metode ravnoteže.

## 2.3./ PRIMJERI

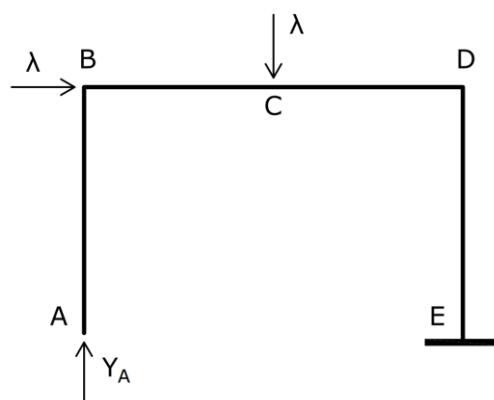
### 2.3.1/. PRIMJER 1

Primjenjujući statičku metodu (metodu ravnoteže) odrediti faktor graničnog opterećenja okvira sa slike 17. Svi štapovi imaju istu vrijednost  $M_p$ .



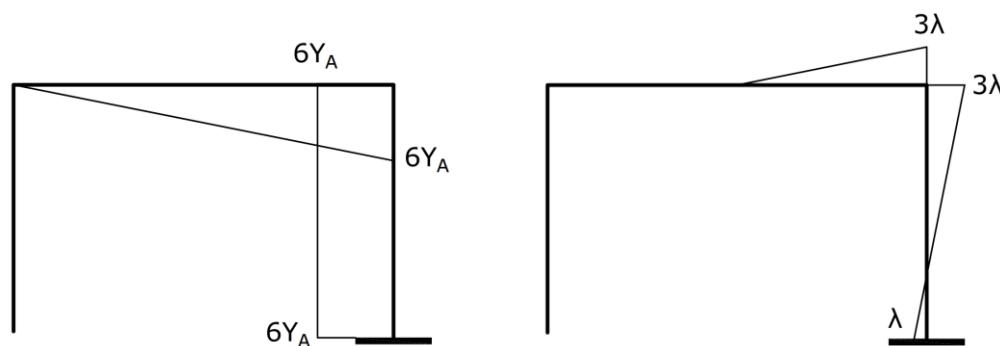
**Slika 17:** Okvir opterećen koncentrisanim silama

Ovaj okvir je jednom vanjski statički neodređen. Odabire se oslobađanje vertikalne reakcije na mjestu oslonca A, tako da dobijamo statički određeni nosač – izlomljenu konzolu.



**Slika 18:** Statički određena konstrukcija opterećena vanjskim opterećenjem i oslobođenom vezom

Nakon toga crtaju se dijagrami momenata od opterećenja i od oslobođene veze.



**Slika 19:** Dijagrami momenata, od opterećenja (desno), od oslobođene veze (lijevo)

Nakon što su dijagrami momenata nacrtani, mogu se prepoznati tri vršne tačke momenata i to C, D i E. To su ujedno tačke u kojima se može formirati plastični zglob. Kako je konstrukcija jednom statički neodređena to su potrebna dva plastična zgoba da bi se formirao mehanizam.

Prije prepostavljanja mehanizma potrebno je da formiramo momentne jednačine ravnoteže.

$$\begin{aligned}M_C &= 3Y_A \\M_D &= 3\lambda - 6Y_A \\M_E &= \lambda + 6Y_A\end{aligned}$$

Prepostaviti ćemo prvi mehanizam sa formiranim plastičnim zglobovima u tačkama C i D. Stoga u prethodno napisanim momentnim jednačinama izjednačavamo  $M_C$  i  $M_D$  sa  $M_P$ .

$$\begin{aligned}M_C &= M_P = 3Y_A \\M_D &= M_P = 3\lambda - 6Y_A\end{aligned}$$

Rješavanjem sistema dobijamo nepoznate  $Y_A$  i  $\lambda$ .

$$\begin{aligned}Y_A &= \frac{M_P}{3} \\ \lambda &= M_P\end{aligned}$$

Dosad smo zadovoljili dva od tri osnovna uslova tačnog rješenja plastične analize i to uslov ravnoteže i postojanja mehanizma, potrebno je još provjeriti uslov momenta plastičnosti tj. pokazati da u ostatku konstrukcije ne postoji tačka sa momentom većim od  $M_P$ . Stoga provjeravamo moment u tački E.

$$M_E = \lambda + 6Y_A = M_P + 6 \cdot \frac{M_P}{3} = 3M_P > M_P$$

Vidimo da je momenat u tački E prekoračio vrijednost momenta plastičnosti, ovo nije statički dopustivo rješenje.

Naredni korak jeste da prepostavimo sljedeći mehanizam. Ovog puta prepostavljamo da se plastični zglobovi formiraju u tačkama C i E.

$$\begin{aligned}M_C &= M_P = 3Y_A \\M_E &= M_P = \lambda + 6Y_A\end{aligned}$$

Rješavanjem sistema dobijamo nepoznate  $Y_A$  i  $\lambda$ .

$$\begin{aligned}Y_A &= \frac{M_P}{3} \\ \lambda &= -M_P\end{aligned}$$

Provjeravamo uslov momenta plastičnosti u tački D.

$$M_D = 3\lambda - 6Y_A = -3M_P - 2M_P = -5M_P \rightarrow |M_D| > M_P$$

Uslov nije zadovoljen. Preostao nam je još jedan mogući mehanizam sa formiranim plastičnim zglobovima u tačkama D i E.

$$\begin{aligned}M_D &= M_P = 3\lambda - 6Y_A \\M_E &= M_P = \lambda + 6Y_A\end{aligned}$$

Rješenje sistema glasi:

$$\begin{aligned}Y_A &= \frac{M_P}{12} \\ \lambda &= \frac{M_P}{2}\end{aligned}$$

Provjeravamo uslov momenta plastičnosti u tački C.

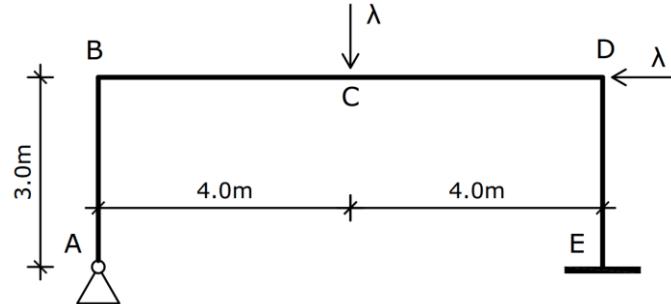
$$M_C = 3Y_A = 3 \cdot \frac{M_P}{12} = \frac{M_P}{4} < M_P$$

Moment u tački C je manji od momenta plastičnosti pa je uslov momenta plastičnosti zadovoljen. Kako su sva tri osnovna uslova plastične analize zadovoljena to imamo tačno rješenje. Faktor graničnog opterećenja iznosi:

$$\lambda = \lambda_c = \frac{M_p}{2}$$

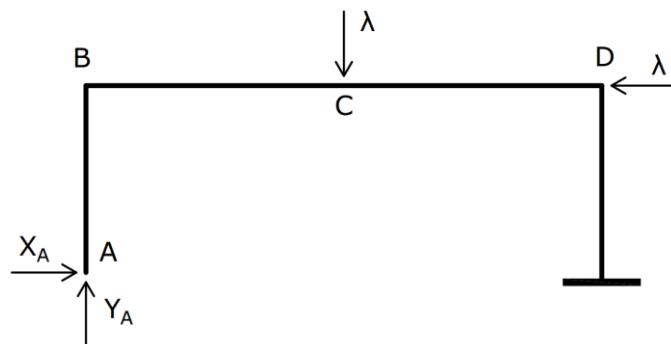
### 2.3.2/. PRIMJER 2

Primjenjujući statičku metodu (metodu ravnoteže) odrediti faktor graničnog opterećenja okvira sa slike 20. Svi štapovi imaju istu vrijednost  $M_p$ .



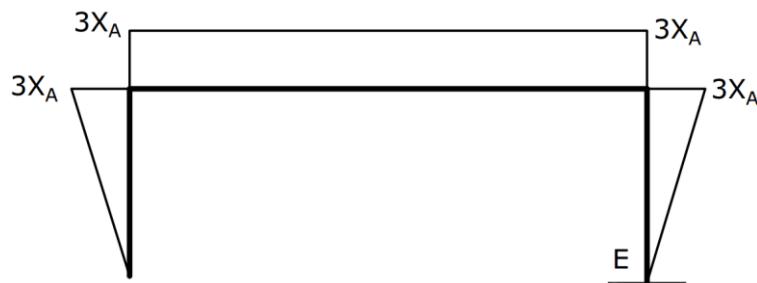
**Slika 20:** Okvir opterećen koncentrisanim silama

Ovaj okvir je dva puta statički neodređen. Odabire se uklanjanje prekobrojnih veza u osloncu A, tako da statički sistem postaje izlomljena konzola koja je statički određena.

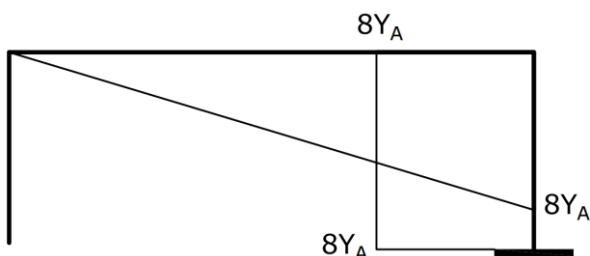


**Slika 21:** Statički određena konstrukcija sa opterećenjem i oslobođenim vezama

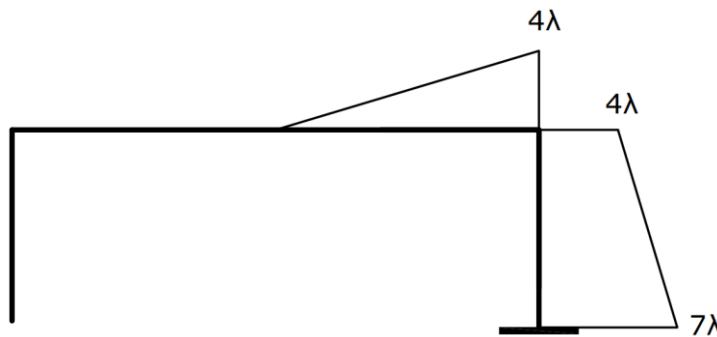
Slijede dijagrami momenata od opterećenja i oslobođenih veza.



**Slika 22:** Dijagram momenata od  $X_A$



**Slika 23:** Dijagram momenata od  $Y_A$



**Slika 24:** Dijagram momenata od opterećenja

Četiri vršne tačke dijagrama momenata se mogu prepoznati i to tačke B, C, D i E. Stoga će se napisati momentne jednačine ravnoteže za te tačke.

$$\begin{aligned}M_B &= 3X_A \\M_C &= 4Y_A - 3X_A \\M_D &= -4\lambda - 3X_A + 8Y_A \\M_E &= 7\lambda - 8Y_A\end{aligned}$$

Mehanizam 1 – plastični zglobovi u tačkama B,C i D:

$$\begin{aligned}M_B &= M_p = 3X_A \\M_C &= M_p = 4Y_A - 3X_A \\M_D &= M_p = -4\lambda - 3X_A + 8Y_A\end{aligned}$$

Rješenje sistema:

$$\begin{aligned}X_A &= \frac{M_p}{3} \\Y_A &= \frac{M_p}{2} \\\lambda &= \frac{M_p}{2}\end{aligned}$$

Provjera momenta u tački E:

$$M_E = 7\lambda - 8Y_A = \frac{7M_p}{2} - \frac{8M_p}{2} = -\frac{M_p}{2} \rightarrow |M_E| < M_p$$

„Uslov momenta plastičnosti je zadovoljen“. Međutim ukoliko pogledamo rješenje sistema vidjet ćemo da je reakcija  $Y_A$  jednaka faktoru opterećenja  $\lambda$ , što znači da je moment od tačke C do tačke D konstantan i iznosi  $M_p$ , što intuitivno nije moguće da se desi, pa se ovo rješenje odbacuje.

Mehanizam 2 – plastični zglobovi u tačkama B,C i E:

$$\begin{aligned}M_B &= M_p = 3X_A \\M_C &= M_p = 4Y_A - 3X_A \\M_E &= M_p = 7\lambda - 8Y_A\end{aligned}$$

Rješenje sistema:

$$\begin{aligned}X_A &= \frac{M_p}{3} \\Y_A &= \frac{M_p}{2} \\\lambda &= \frac{5M_p}{7}\end{aligned}$$

Provjera momenta u tački D:

$$M_D = -4\lambda - 3X_A - 8Y_A = -\frac{20M_p}{7} - M_p + 4M_p = \frac{M_p}{7} < M_p$$

Uslov momenta plastičnosti je zadovoljen.

Mehanizam 3 – plastični zglobovi u tačkama B,D i E:

$$\begin{aligned} M_B &= M_p = 3X_A \\ M_D &= M_p = -4\lambda - 3X_A + 8Y_A \\ M_E &= M_p = 7\lambda - 8Y_A \end{aligned}$$

Rješenje sistema:

$$\begin{aligned} X_A &= \frac{M_p}{3} \\ Y_A &= \frac{17M_p}{32} \\ \lambda &= \frac{3M_p}{4} \end{aligned}$$

Provjera momenta u tački C:

$$M_C = 4Y_A - 3X_A = 4 \frac{17M_p}{32} - M_p = -\frac{9M_p}{8} \rightarrow |M_C| > M_p$$

Uslov momenta plastičnosti je narušen.

Mehanizam 4 – plastični zglobovi u tačkama C,D i E:

$$\begin{aligned} M_C &= M_p = 4Y_A - 3X_A \\ M_D &= M_p = 4\lambda - 3X_A + 8Y_A \\ M_E &= M_p = 7\lambda - 8Y_A \end{aligned}$$

Rješenje sistema:

$$\begin{aligned} X_A &= \frac{2M_p}{3} \\ Y_A &= \frac{3M_p}{4} \\ \lambda &= M_p \end{aligned}$$

Provjera momenta u tački B:

$$M_B = 3X_A = 2M_p > M_p$$

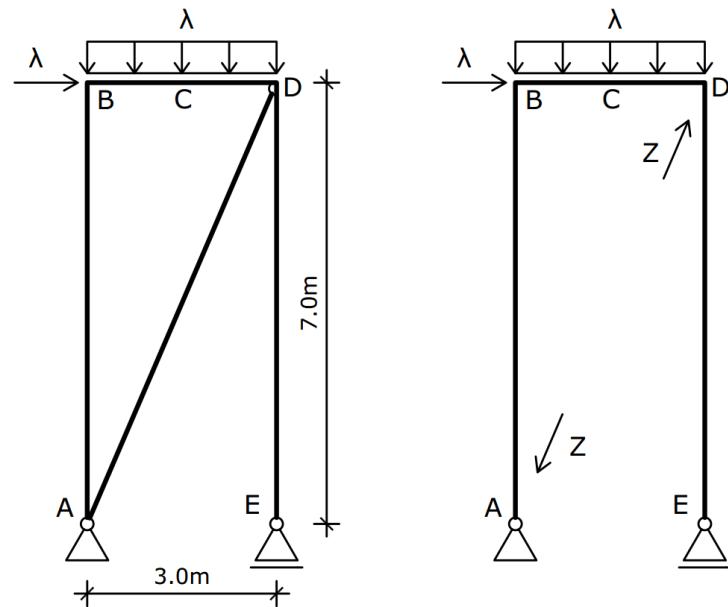
Uslov momenta plastičnosti nije zadovoljen.

Rješavajući zadatak došli smo do zaključka da tačno rješenje daje mehanizam 2 i da faktor graničnog opterećenja iznosi:

$$\lambda = \lambda_C = \frac{5M_p}{7}$$

### 2.3.3/. PRIMJER 3

Primjenjujući statičku metodu (metodu ravnoteže) odrediti faktor graničnog opterećenja okvira sa slike 25. Svi štapovi imaju istu vrijednost  $M_p$ .



**Slika 25:** Statički neodređen nosač (lijevo), statički određen nosač (desno)

Okvir je jednom statički neodređen, u pitanju je unutrašnja neodređenost. Oslobodit ćemo silu u štapu, tako da za statički određen nosač dobijamo prostu gredu. Nakon toga crtamo dijagrame momenata.

U ovom primjeru stvari su poprilično očigledne. Postoje dvije vršne tačke dijagrama momenata, a da bi se sistem doveo u stanje sloma potrebno je da se formiraju dva plastična zgloba. Stoga momenat u tačka B i C izjednačavamo sa momentom plastičnosti.

$$\begin{aligned} M_B &= M_p = 7Z \cos \alpha - 7\lambda \\ M_C &= M_p = 3.50\lambda + 1.125\lambda - 3.5Z \cos \alpha \end{aligned}$$

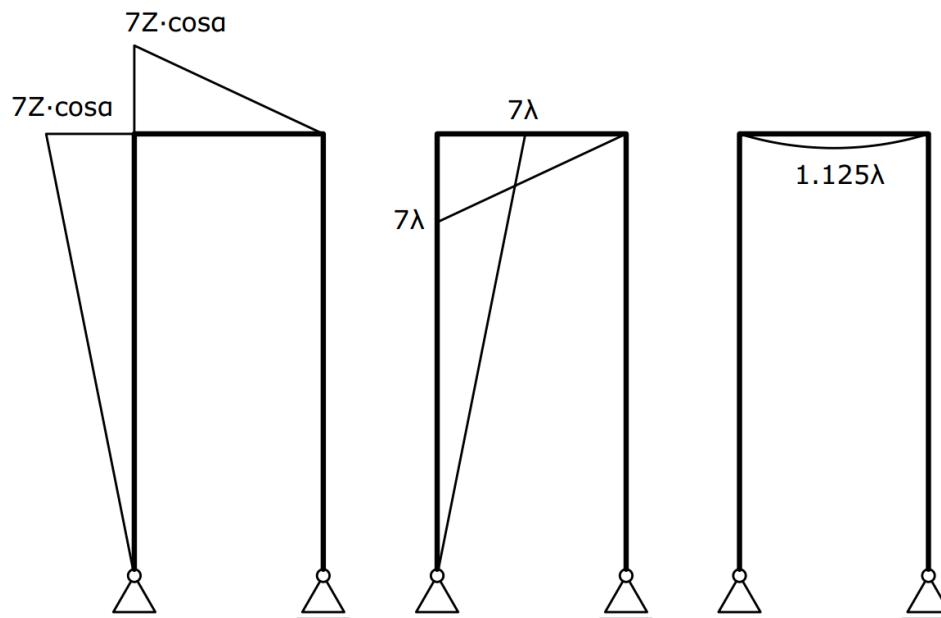
Rješenje sistema:

$$Z = \frac{31M_p}{21 \cdot \cos \alpha}$$

$$\lambda = \frac{4M_p}{3}$$

Stoga faktor graničnog opterećenja iznosi:

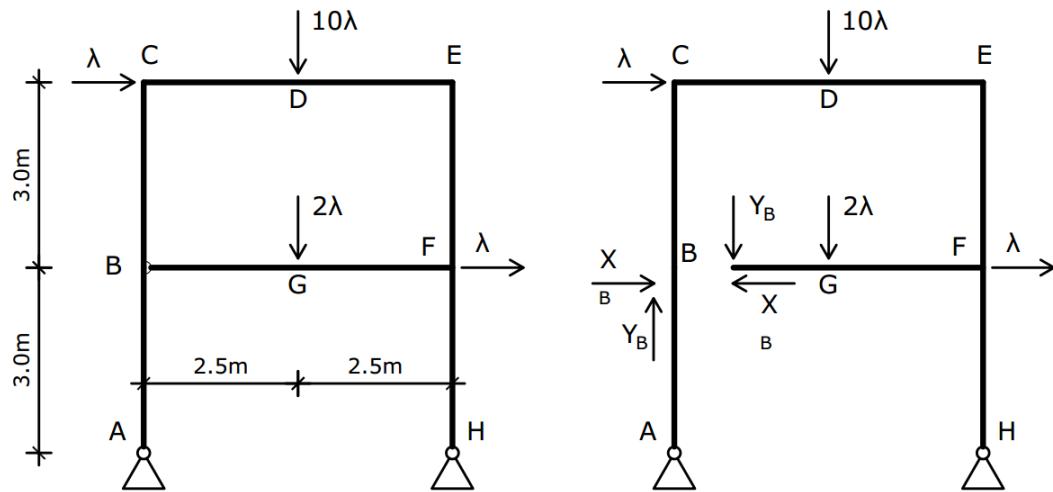
$$\lambda = \lambda_c = \frac{4M_p}{3}$$



**Slika 26:** Dijagrami momenata od oslobođene veze (lijevo), horizontalne sile (sredina), kontinuiranog opterećenja (desno)

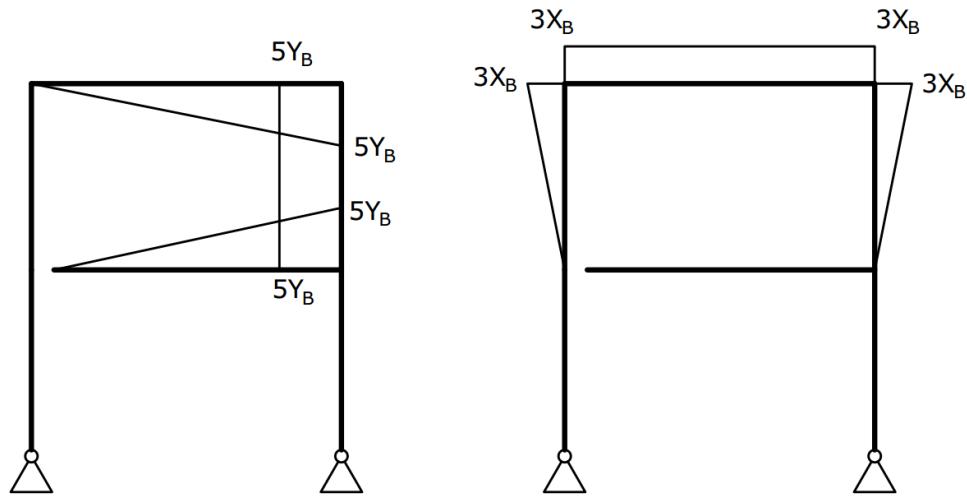
#### 2.3.4/. PRIMJER 4

Primjenjujući statičku metodu (metodu ravnoteže) odrediti faktor graničnog opterećenja okvira sa slike 27. Svi štapovi imaju istu vrijednost  $M_p$ .

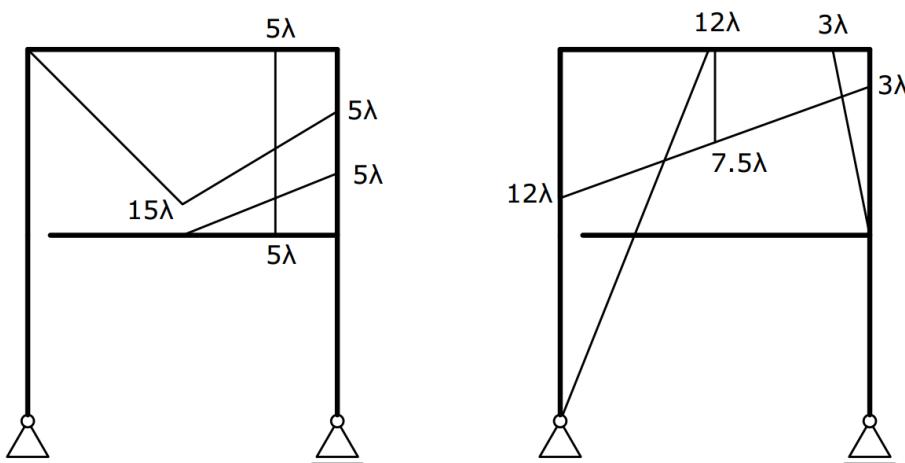


**Slika 27:** Okvir sa opterećenjem (lijevo), statički određena konstrukcija sa oslobođenih vezama (desno)

Okvir je dva puta unutrašnje statički neodređen. Statički određena konstrukcija će se formirati uklanjanjem veza u zgobu B.



**Slika 28:** Dijagrami momenata od  $Y_B$  (lijevo),  $X_B$  (desno)



**Slika 29:** Dijagrami momenata od vertikalnog opterećenja (lijevo), horizontalnog opterećenja

Moguće je uočiti 6 vršnih tačaka dijagrama momenata i to tačke B, C, D, E, F i G. Kako je konstrukcija dva puta statički neodređena to su potrebna tri plastična zglobova za formiranje mehanizma.

$$\begin{aligned}M_B &= 6\lambda \\M_C &= 3X_B - 12\lambda \\M_D &= 15\lambda + 7.5\lambda + 2.5Y_B - 3X_B \\M_E &= 3X_B - 5\lambda - 3\lambda - 5Y_B \\M_F &= 5\lambda + 5Y_B \\M_G &= 2.5Y_B\end{aligned}$$

Mehanizam 1 – plastični zglobovi u tačkama B,C i D:

$$\begin{aligned}M_B &= M_p = 6\lambda \\M_C &= M_p = 3X_B - 12\lambda \\M_D &= M_p = 15\lambda + 7.5\lambda + 2.5Y_B - 3X_B\end{aligned}$$

Rješenje sistema jednačina:

$$\lambda = \frac{M_p}{6}; Y_B = \frac{M_p}{10}; X_B = M_p$$

Provjera uslova momenta plastičnosti u preostalim tačkama:

$$M_E = 3X_B - 5\lambda - 3\lambda - 5Y_B = 3M_p - \frac{8M_p}{6} - \frac{5M_p}{10} = \frac{7M_p}{6} > M_p$$

Uslov momenta plastičnosti je narušen u tački E, preostale tačke F i G nije potrebno provjeravati. Ovaj mehanizam ne daje tačno rješenje.

Mehanizam 2 – plastični zglobovi u tačkama B,C i E:

$$\begin{aligned}M_B &= M_p = 6\lambda \\M_C &= M_p = 3X_B - 12\lambda \\M_E &= M_p = 3X_B - 5\lambda - 3\lambda - 5Y_B\end{aligned}$$

Rješenje sistema jednačina:

$$\lambda = \frac{M_p}{6}; Y_B = \frac{2M_p}{15}; X_B = M_p$$

Provjera uslova momenta plastičnosti u preostalim tačkama:

$$M_D = 15\lambda + 7.5\lambda + 2.5Y_B - 3X_B = \frac{22.5M_p}{6} + \frac{5M_p}{15} - 3M_p = \frac{32.5M_p}{30} > M_p$$

Uslov momenta plastičnosti je narušen u tački D, preostale tačke F i G nije potrebno provjeravati. Ovaj mehanizam ne daje tačno rješenje.

### Mehanizam 3 – plastični zglobovi u tačkama B,C i F:

$$\begin{aligned} M_B &= M_p = 6\lambda \\ M_C &= M_p = 3X_B - 12\lambda \\ M_F &= M_p = 5\lambda + 5Y_B \end{aligned}$$

Rješenje sistema jednačina:

$$\lambda = \frac{M_p}{6}; Y_B = \frac{M_p}{30}; X_B = M_p$$

Provjera uslova momenta plastičnosti u preostalim tačkama:

$$M_D = 15\lambda + 7.5\lambda + 2.5Y_B - 3X_B = \frac{22.5M_p}{6} + \frac{2.5M_p}{30} - 3M_p = \frac{25M_p}{30} < M_p$$

$$M_E = 3X_B - 5\lambda - 3\lambda - 5Y_B = 3M_p - \frac{8M_p}{6} - \frac{5M_p}{30} = \frac{3M_p}{2} > M_p$$

Uslov momenta plastičnosti je narušen u tački E, tačku G nije potrebno provjeravati. Ovaj mehanizam ne daje tačno rješenje.

### Mehanizam 4 – plastični zglobovi u tačkama B,C i G:

$$\begin{aligned} M_B &= M_p = 6\lambda \\ M_C &= M_p = 3X_B - 12\lambda \\ M_G &= M_p = 2.5Y_B \end{aligned}$$

Rješenje sistema jednačina:

$$\lambda = \frac{M_p}{6}; Y_B = \frac{2M_p}{5}; X_B = M_p$$

Provjera uslova momenta plastičnosti u preostalim tačkama:

$$M_D = 15\lambda + 7.5\lambda + 2.5Y_B - 3X_B = \frac{22.5M_p}{6} + \frac{5M_p}{5} - 3M_p = \frac{7M_p}{4} > M_p$$

Uslov momenta plastičnosti je narušen u tački D, preostale tačke E i F nije potrebno provjeravati. Ovaj mehanizam ne daje tačno rješenje.

### Mehanizam 5 – plastični zglobovi u tačkama B,D i E:

$$\begin{aligned} M_B &= M_p = 6\lambda \\ M_D &= M_p = 15\lambda + 7.5\lambda + 2.5Y_B - 3X_B \\ M_E &= M_p = 3X_B - 5\lambda - 3\lambda - 5Y_B \end{aligned}$$

Rješenje sistema jednačina:

$$\lambda = \frac{M_p}{6}; Y_B = \frac{M_p}{6}; X_B = \frac{19M_p}{18}$$

Provjera uslova momenta plastičnosti u preostalim tačkama:

$$M_C = 3X_B - 12\lambda = \frac{57M_p}{18} - 2M_p = \frac{21M_p}{18} > M_p$$

Uslov momenta plastičnosti je narušen u tački C, preostale tačke F i G nije potrebno provjeravati. Ovaj mehanizam ne daje tačno rješenje.

#### Mehanizam 6 – plastični zglobovi u tačkama B,D i F:

$$\begin{aligned}M_B &= M_p = 6\lambda \\M_D &= M_p = 15\lambda + 7.5\lambda + 2.5Y_B - 3X_B \\M_F &= M_p = 5\lambda + 5Y_B\end{aligned}$$

Rješenje sistema jednačina:

$$\lambda = \frac{M_p}{6}; Y_B = \frac{M_p}{30}; X_B = \frac{17M_p}{18}$$

Provjera uslova momenta plastičnosti u preostalim tačkama:

$$\begin{aligned}M_C &= 3X_B - 12\lambda = \frac{51M_p}{18} - 2M_p = \frac{15M_p}{18} < M_p \\M_E &= 3X_B - 5\lambda - 3\lambda - 5Y_B = \frac{51M_p}{18} - \frac{8M_p}{6} - \frac{5M_p}{6} = \frac{25M_p}{18} > M_p\end{aligned}$$

Uslov momenta plastičnosti je narušen u tački E, tačku G nije potrebno provjeravati. Ovaj mehanizam ne daje tačno rješenje.

#### Mehanizam 7 – plastični zglobovi u tačkama B,D i G:

$$\begin{aligned}M_B &= M_p = 6\lambda \\M_D &= M_p = 15\lambda + 7.5\lambda + 2.5Y_B - 3X_B \\M_G &= M_p = 2.5Y_B\end{aligned}$$

Rješenje sistema jednačina:

$$\lambda = \frac{M_p}{6}; Y_B = \frac{2M_p}{5}; X_B = \frac{5M_p}{4}$$

Provjera uslova momenta plastičnosti u preostalim tačkama:

$$M_C = 3X_B - 12\lambda = \frac{15M_p}{4} - 2M_p = \frac{7M_p}{4} > M_p$$

Uslov momenta plastičnosti je narušen u tački C, preostale tačke E i F nije potrebno provjeravati. Ovaj mehanizam ne daje tačno rješenje.

#### Mehanizam 8 – plastični zglobovi u tačkama C,D i E:

$$\begin{aligned}M_C &= M_p = 3X_B - 12\lambda \\M_D &= M_p = 15\lambda + 7.5\lambda + 2.5Y_B - 3X_B \\M_E &= M_p = 3X_B - 5\lambda - 3\lambda - 5Y_B\end{aligned}$$

Rješenje sistema jednačina:

$$\lambda = \frac{4M_p}{25}; Y_B = \frac{16M_p}{125}; X_B = \frac{73M_p}{75}$$

Provjera uslova momenta plastičnosti u preostalim tačkama:

$$M_B = 6\lambda = \frac{24M_p}{25} < M_p$$

$$M_F = 5\lambda + 5Y_B = \frac{20M_p}{25} + \frac{80M_p}{125} = \frac{180M_p}{125} > M_p$$

Uslov momenta plastičnosti je narušen u tački F, tačku G nije potrebno provjeravati. Ovaj mehanizam ne daje tačno rješenje.

#### Mehanizam 9 – plastični zglobovi u tačkama C,D i F:

$$\begin{aligned} M_C &= M_p = 3X_B - 12\lambda \\ M_D &= M_p = 15\lambda + 7.5\lambda + 2.5Y_B - 3X_B \\ M_F &= M_p = 5\lambda + 5Y_B \end{aligned}$$

Rješenje sistema jednačina:

$$\lambda = \frac{3M_p}{16}; Y_B = \frac{M_p}{80}; X_B = \frac{13M_p}{12}$$

Provjera uslova momenta plastičnosti u preostalim tačkama:

$$M_B = 6\lambda = \frac{18M_p}{6} > M_p$$

Uslov momenta plastičnosti je narušen u tački B, preostale tačke E i G nije potrebno provjeravati. Ovaj mehanizam ne daje tačno rješenje.

#### Mehanizam 10 – plastični zglobovi u tačkama C,D i G:

$$\begin{aligned} M_C &= M_p = 3X_B - 12\lambda \\ M_D &= M_p = 15\lambda + 7.5\lambda + 2.5Y_B - 3X_B \\ M_G &= M_p = 2.5Y_B \end{aligned}$$

Rješenje sistema jednačina:

$$\lambda = \frac{2M_p}{21}; Y_B = \frac{2M_p}{5}; X_B = \frac{5M_p}{7}$$

Provjera uslova momenta plastičnosti u preostalim tačkama:

$$M_B = 6\lambda = \frac{12M_p}{21} < M_p$$

$$M_E = 3X_B - 5\lambda - 3\lambda - 5Y_B = \frac{15M_p}{7} - \frac{16M_p}{21} - 2M_p = -\frac{13M_p}{21} \rightarrow |M_E| < M_p$$

$$M_F = 5\lambda + 5Y_B = \frac{10M_p}{21} + 2M_p = \frac{52M_p}{21} > M_p$$

Uslov momenta plastičnosti je narušen u tački F. Ovaj mehanizam ne daje tačno rješenje.

#### Mehanizam 11 – plastični zglobovi u tačkama D,E i F:

$$\begin{aligned} M_D &= M_p = 15\lambda + 7.5\lambda + 2.5Y_B - 3X_B \\ M_E &= M_p = 3X_B - 5\lambda - 3\lambda - 5Y_B \\ M_F &= M_p = 5\lambda + 5Y_B \end{aligned}$$

Rješenje sistema jednačina:

$$\lambda = \frac{5M_p}{34}; Y_B = \frac{9M_p}{170}; X_B = \frac{83M_p}{102}$$

Provjera uslova momenta plastičnosti u preostalim tačkama:

$$M_B = 6\lambda = \frac{30M_p}{34} < M_p$$

$$M_C = 3X_B - 12\lambda = \frac{249M_p}{102} - \frac{60M_p}{34} = \frac{1173M_p}{1734} < M_p$$

$$M_G = 2.5Y_B = \frac{22.5M_p}{170} < M_p$$

Uslov momenta plastičnosti je zadovoljen. Izvršit će se provjera i preostala dva moguća mehanizma.

Mehanizam 12 – plastični zglobovi u tačkama D,E i G:

$$M_D = M_p = 15\lambda + 7.5\lambda + 2.5Y_B - 3X_B$$

$$M_E = M_p = 3X_B - 5\lambda - 3\lambda - 5Y_B$$

$$M_G = M_p = 2.5Y_B$$

Rješenje sistema jednačina:

$$\lambda = \frac{6M_p}{29}; Y_B = \frac{2M_p}{5}; X_B = \frac{45M_p}{29}$$

Provjera uslova momenta plastičnosti u preostalim tačkama:

$$M_B = 6\lambda = \frac{36M_p}{29} > M_p$$

Uslov momenta plastičnosti je narušen u tački B, preostale tačke C i F nije potrebno provjeravati. Ovaj mehanizam ne daje tačno rješenje.

Mehanizam 13 – plastični zglobovi u tačkama E,F i G:

$$M_E = M_p = 3X_B - 5\lambda - 3\lambda - 5Y_B$$

$$M_F = M_p = 5\lambda + 5Y_B$$

$$M_G = M_p = 2.5Y_B$$

Rješenje sistema jednačina:

$$\lambda = -\frac{M_p}{5}; Y_B = \frac{2M_p}{5}; X_B = \frac{7M_p}{15}$$

Provjera uslova momenta plastičnosti u preostalim tačkama:

$$M_B = 6\lambda = -\frac{6M_p}{5} \rightarrow |M_B| > M_p$$

Uslov momenta plastičnosti je narušen u tački B, preostale tačke C i D nije potrebno provjeravati. Ovaj mehanizam ne daje tačno rješenje.

Provjeravanjem svih mogućih mehanizama došlo se do rješenja da samo mehanizam 11 sa plastičnim zglobovima u tačkama D, E i F zadovoljava sva tri osnovna uslova tačnog rješenja plastične analize.

Kritični faktor opterećenja iznosi:

$$\lambda = \lambda_c = \frac{5M_p}{34}$$

## 3/. KINEMATIČKA METODA

### 3.1/. UVOD

Metoda ravnoteže objašnjena u prethodnom poglavlju je primjenjiva za plastičnu analizu jednostavnih okvira koji nisu mnogo puta statički neodređeni i koji nemaju mnogo vršnih tačaka momenata. Kako se jedno od ovo dvoje ili oboje povećava postaje komplikovano crtati mnogo dijagrama momenata i pisati mnoštvo momentnih jednačina ravnoteže, samim tim metoda ravnoteže postaje zamorna. Za komplikovanije okvire prikladnija je kinematička metoda (metoda rada).

Prepostavljajući mehanizam sloma, jednačina rada može biti uspostavljena izjednačavanjem rada vanjskih sila sa unutrašnjim rasipanjem (dисипацијом) energije na mjestu plastičnog zgloba. Unutrašnje rasipanje energije je suma proizvoda plastičnog momenta sa odgovarajućim uglom zaokreta potrebnim da inicira malo pomjeranje slomnog mehanizma. Vanjski rad predstavlja sumu proizvoda odgovarajućeg pomjeranja slomnog mehanizma sa silom na mjestu i u pravcu tog pomjeranja. Ovako oformljena jednačina se naziva jednačina rada, a odgovarajući faktor opterećenja koji dovodi do prepostavljenog mehanizma se dobija rješavanjem jednačine rada.

$$\sum_{i=1}^n P_i \cdot \delta_i = \sum_{i=1}^n M_{P_i} \cdot \theta_i \quad (26)$$

Izračunati faktor opterećenja je jednak graničnom ukoliko se za prepostavljeni mehanizam dokaže da je tačni time što se provjerava distribucija momenata i dokaže da uslov momenta plastičnosti nije nigdje narušen. Izračunati faktor opterećenja izračunat na osnovu prepostavljenog mehanizma je uvijek veći ili u najboljem slučaju jednak faktoru graničnog opterećenja. Ova činjenica direktno proizilazi iz gornje granične teoreme. Minimalna vrijednost gornje granice je granična vrijednost.

Metoda rada se sastoji iz dva koraka:

- 1) prepostaviti mehanizam i formirati jednačinu rada, te izračunati faktor opterećenja  $\lambda$
- 2) napisati jednačinu ravnoteže za prepostavljeni mehanizam kako bi se provjerio uslov momenta plastičnosti

Korak 2 je moguće preskočiti tako što će se izračunati faktor opterećenja za sve moguće mehanizme konstrukcije, a faktor graničnog opterećenja je onaj najmanji od njih.

Za ilustraciju metode jednačina rada koristit će se isti primjeri kao i za metodu jednačinu kako bi se rezultati potvrdili.

### 3.2/. PRIMJERI

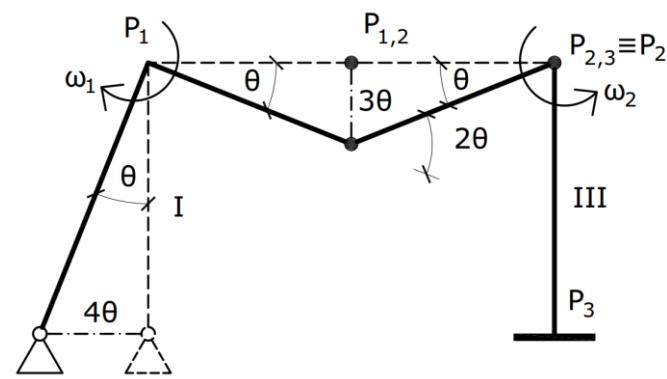
#### 3.2.1/. PRIMJER 1

Primjenjujući metodu rada izračunati faktor graničnog opterećenja okvira sa slike 17. Svi štapovi imaju istu vrijednost  $M_P$ .

Okvir je jednom statički neodređen, potrebna su dva plastična zgloba da se formira mehanizam. Prvo ćemo prepostaviti mehanizam, a zatim napisati jednačinu rada i izračunati faktor opterećenja. A nakon toga izvršiti provjeru uslova momenta plastičnosti.

Mehanizam 1 – plastični zglobovi u tačkama C i D:

Prvo je potrebno provesti kinematsku analizu mehanizma kako bi se izračunala pomjeranja istog.



**Slika 30:** Pomjeranja mehanizma 1 na osnovu kinematske analize

Sada ćemo formirati jednačinu rada:

$$\lambda \cdot 3\theta = M_p \cdot \theta \cdot (2 + 1)$$

Iz prethodne jednačine slijedi da faktor opterećenja iznosi  $\lambda = M_p$ . Sada je potrebno provjeriti distribuciju momenata da bismo vidjeli da li je uslov momenta plastičnosti zadovoljen u ostalim presjecima.

Razmatrajući okvir vidimo da moment u tački B mora biti nula jer u osloncu A nema horizontalne reakcije, a također nema nikakvo horizontalno opterećenje na štapu AB. Kako smo prepostavili mehanizam sa plastičnim zglobovima u tački C i D to u tim tačkama vlada moment plastičnosti, potrebno je da još izračunamo koliko je momenat u tački E. Ovo možemo uraditi reverzibilnim postupkom. Kako znamo momenat u tački C to onda možemo iz uslova ravnoteže izračunati vertikalnu reakciju u osloncu A.

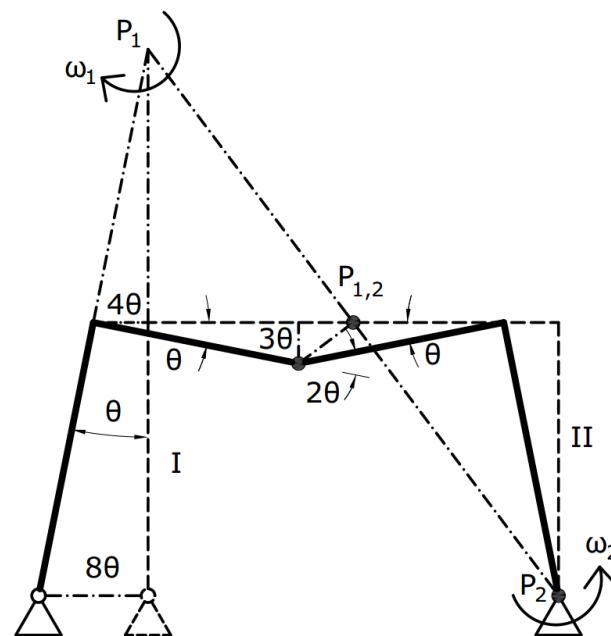
$$3Y_A = M_p \rightarrow Y_A = \frac{M_p}{3}$$

Sa izračunatom reakcijom sada imamo statički određen nosač pa lahko možemo izračunati vrijednost momenta u tački E.

$$M_E = 6Y_A - 3\lambda + 4\lambda = \frac{6M_p}{3} + M_p = 3M_p > M_p$$

Vidimo da uslov momenta plastičnosti nije zadovoljen, stoga prepostavljeni mehanizam nije tačan. Postoji mehanizam koji će se prije desiti, odnosno pri manjem opterećenju.

Mehanizam 2 – plastični zglobovi u tačkama C i E:



**Slika 31:** Pomjeranja mehanizma 2

Jednačina rada:

$$\lambda \cdot \theta \cdot (3 - 4) = M_p \cdot \theta \cdot (2 + 1) \rightarrow \lambda = -3M_p$$

Pozitivan faktor opterećenja  $\lambda$  ćemo dobiti ukoliko pretpostavimo pomjeranja mehanizma na desnu stranu. Potrebno je da provjerimo uslov momenta plastičnosti. Nepoznat nam je momenat u čvoru D. Na isti način kao i u prethodnom mehanizmu odredit ćemo prvo reakciju  $Y_A$  na osnovu poznatog momenta u tački C, a nakon toga ćemo izračunati momenat u tački D.

$$3Y_A = M_p \rightarrow Y_A = \frac{M_p}{3}$$

$$M_E = -6Y_A - 3\lambda = -\frac{6M_p}{3} - 9M_p = |-11M_p| > M_p$$

Uslov momenta plastičnosti je narušen te ovaj mehanizam ne daje tačno rješenje.

### Mehanizam 3 – plastični zglobovi u tačkama D i E:

Jednačina rada:

$$\lambda \cdot 4\theta = M_p \cdot \theta \cdot (1 + 1) \rightarrow \lambda = \frac{M_p}{2}$$

Provjeravamo uslov momenta plastičnosti u tački C, a prije toga računamo vrijednost vertikalne reakcije u tački A.

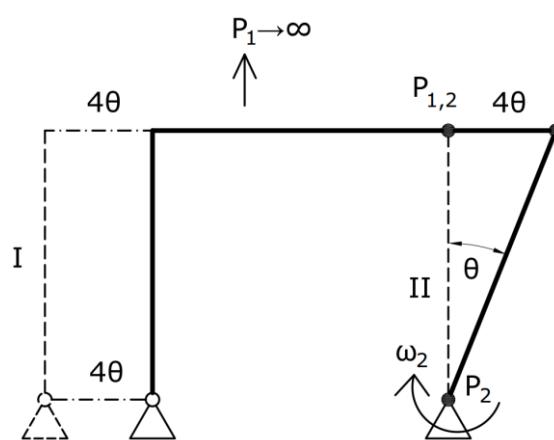
$$6Y_A - 3\lambda = -M_p \rightarrow Y_A = \frac{M_p}{12}$$

$$M_C = 3Y_A = \frac{M_p}{4} < M_p$$

Uslov momenta plastičnosti je zadovoljen. Faktor graničnog opterećenja iznosi:

$$\lambda = \lambda_c = \frac{M_p}{2}$$

Vidljivo je da su rezultati metode jednačina i metode rada identični.



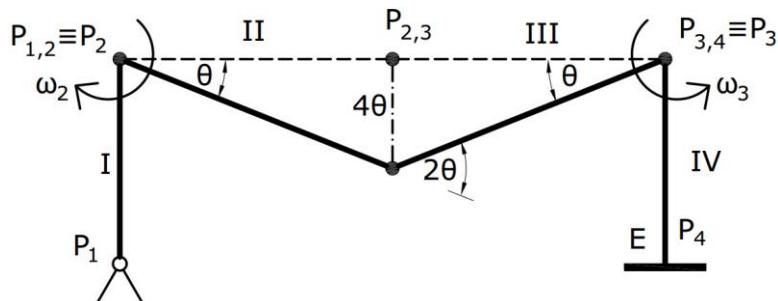
**Slika 32:** Pomjeranja mehanizma 3

### 3.2.2/. PRIMJER 2

Primjenjujući metodu rada izračunati faktor graničnog opterećenja okvira sa slike 20. Svi štapovi imaju istu vrijednost  $M_p$ .

Kao i u prethodnom primjeru, prvo ćemo prepostaviti mehanizam, izvršiti kinematsku analizu istog, zatim napisati jednačinu rada, istu riješiti i dobiti faktor opterećenja, te na kraju provjeriti uslov momenta plastičnosti.

Mehanizam 1 – plastični zglobovi u tačkama B, C i D:



**Slika 33:** Pomjeranja mehanizma 1

Jednačina rada:

$$\lambda \cdot 4\theta = M_p \cdot \theta \cdot (1 + 2 + 1) \rightarrow \lambda = M_p$$

Da bi provjerili da li je uslov momenta plastičnosti zadovoljen potrebno je da izračunamo nepoznati momenat u tački E. Iz uslova ravnoteže izračunat ćemo reakcije u osloncu A, a sa poznatim reakcijama ćemo odrediti momenat u osloncu E.

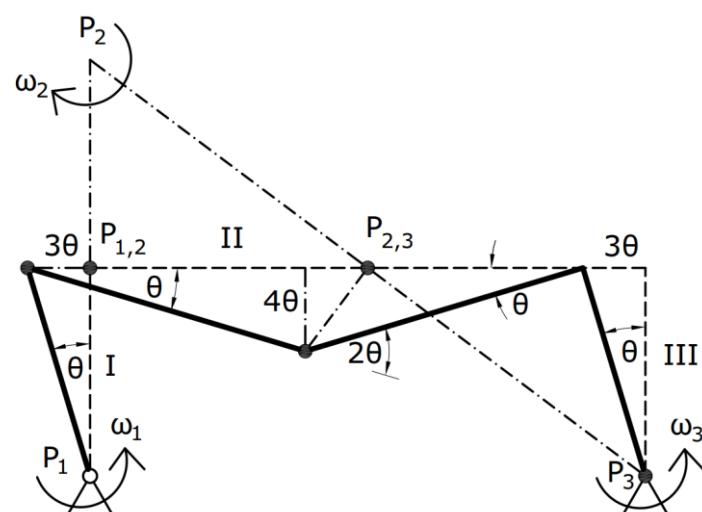
$$3X_A = M_p \rightarrow X_A = \frac{M_p}{3}$$

$$6Y_A - 3X_A = M_p \rightarrow Y_A = \frac{M_p}{2}$$

$$M_E = 7\lambda - 8Y_A = 7M_p - 4M_p = 3M_p < M_p$$

Isti slučaj kao kod metode jednačina, uslov momenta plastičnosti je zadovoljen ali je distribucija momenta nerealna, stoga se rješenje odbacuje. Odnosno nije eksplisitno dokazano ono od čega se krenulo a to je zglob u tačkama B, C i D. Distribucijom momenata koja se dobije ovim rješenjem je takva da se treći plastični zglob (onaj u tački D) može formirati bilo gdje na štalu CD.

Mehanizam 2 – plastični zglobovi u tačkama B, C i E:



**Slika 34:** Pomjeranja mehanizma 2

Jednačina rada:

$$\lambda \cdot \theta \cdot (4 + 3) = M_p \cdot \theta \cdot (2 + 2 + 1) \rightarrow \lambda = \frac{5M_p}{7}$$

Provjera uslova momenta plastičnosti:

$$3X_A = M_p \rightarrow X_A = \frac{M_p}{3}$$

$$6Y_A - 3X_A = M_p \rightarrow Y_A = \frac{M_p}{2}$$

$$M_D = -6Y_A + 3X_A + 3\lambda = -2M_p + M_p + \frac{15M_p}{7} = \frac{M_p}{7} < M_p$$

Uslov momenta plastičnosti je zadovoljen. Ovo je tačno rješenje faktora opterećenja. Ako se pozovemo na teoremu o jedinstvenosti znamo da postoji samo jedan faktor opterećenja koji zadovoljava sva tri uslova. To međutim ne znači da ne postoje više mehanizama ili raspodjela momenata takvih da daju isti granični faktor sigurnosti. Preostala dva mehanizma će se uraditi u cilju potpunije izrade zadatka iako unaprijed znamo da nijedan od ta dva ne zadovoljava sva tri osnovna uslova tačnog rješenja plastične analize jer smo iste obuhvatili kroz metodu jednačina.

Mehanizam 3 – plastični zglobovi u tačkama B, D i E:

Jednačina rada:

$$\lambda \cdot 3\theta = M_p \cdot \theta \cdot (1 + 1 + 1) \rightarrow \lambda = M_p$$

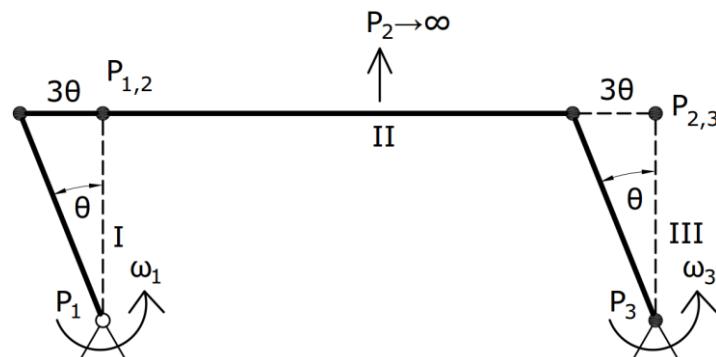
Provjera uslova momenta plastičnosti:

$$3X_A = M_p \rightarrow X_A = \frac{M_p}{3}$$

$$6Y_A - 3X_A - 4\lambda = M_p \rightarrow Y_A = \frac{6M_p}{8}$$

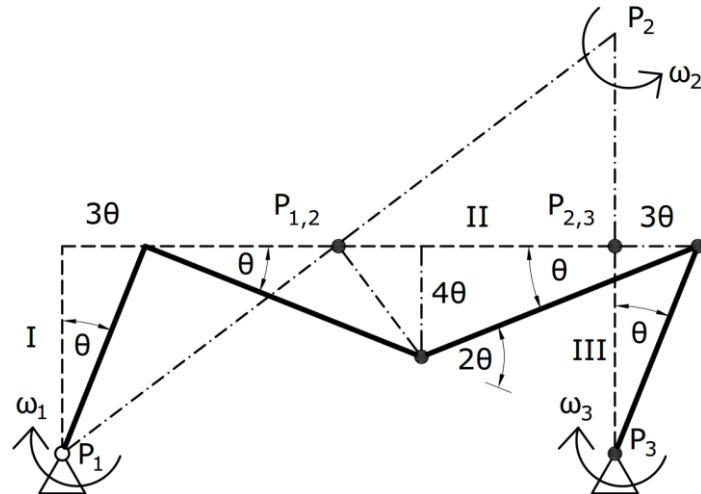
$$M_C = 4Y_A - 3X_A = 3M_p - M_p = 2M_p > M_p$$

Uslov nije zadovoljen.



**Slika 35:** Pomjeranja mehanizma 3

#### Mehanizam 4 – plastični zglobovi u tačkama C, D i E:



**Slika 36:** Pomjeranja mehanizma 4

Jednačina rada:

$$\lambda \cdot \theta \cdot (4 - 3) = M_p \cdot \theta \cdot (2 + 2 + 1) \rightarrow \lambda = 5M_p$$

Provjera uslova momenta plastičnosti:

$$\left. \begin{array}{l} 4Y_A - 3X_A = M_p \\ 3X_A + 4\lambda - 8Y_A = M_p \end{array} \right\} X_A = \frac{17M_p}{3}; Y_A = \frac{9M_p}{2};$$

$$M_B = 3X_A = \frac{51M_p}{3} > M_p$$

Uslov nije zadovoljen. Faktor graničnog opterećenja odgovara onom iz mehanizma 2, vrijednost je identična dobivenoj po metodi jednačina i iznosi:

$$\lambda = \lambda_C = \frac{5M_p}{7}$$

#### 3.2.3/. PRIMJER 3

Primjenjujući metodu rada izračunati faktor graničnog operećenja okvira sa slike 25. Svi štapovi imaju istu vrijednost  $M_p$ .

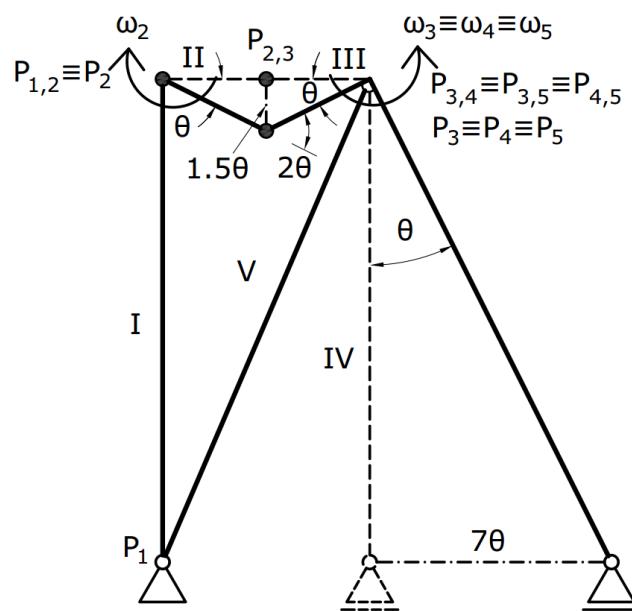
Na osnovu opterećenja zaključujemo da se momenat ne može javiti u tački D, pa preostaje samo jedan mogući mehanizam sa plastičnim zglobovima u tačkama B i C.

Jednačina rada:

$$\lambda \cdot \theta \cdot \frac{2 \cdot 1.5^2}{2} = M_p \cdot \theta \cdot (1 + 2) \rightarrow \lambda = \frac{4M_p}{3}$$

Kako je ovo jedini mogući mehanizam, to nema preostalih tačaka sa nepoznatim vršnim vrijednostima momenata. Slijedi da je ovo faktor graničnog opterećenja sa vrijednošću istoj kao i prema metodi jednačina.

$$\lambda = \lambda_C = \frac{4M_p}{3}$$

**Slika 37:** Pomjeranja mehanizma

### 3.2.4/. PRIMJER 4

Primjenjujući metodu rada izračunati faktor graničnog operećenja okvira sa slike 27. Svi štapovi imaju istu vrijednost  $M_p$ .

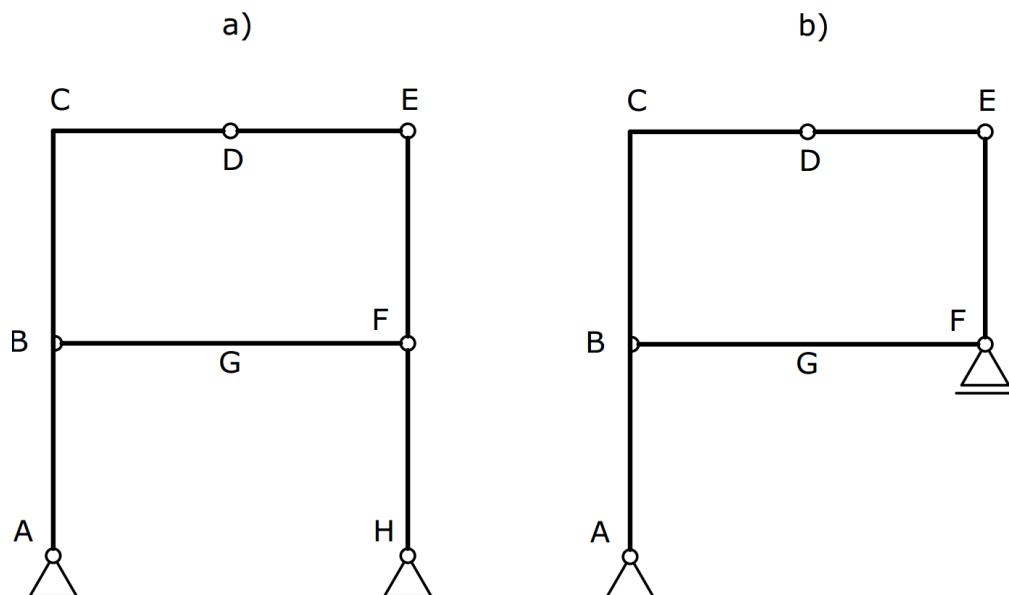
Kako je metodologija metode rada objašnjena kroz prethodna tri primjera uzimajući sve moguće mehanizme u obzir to će se u ovom primjeru uraditi proračun samo tačnog mehanizma kako bi vidjeli da se rezultati poklapaju sa metodom jednačina.

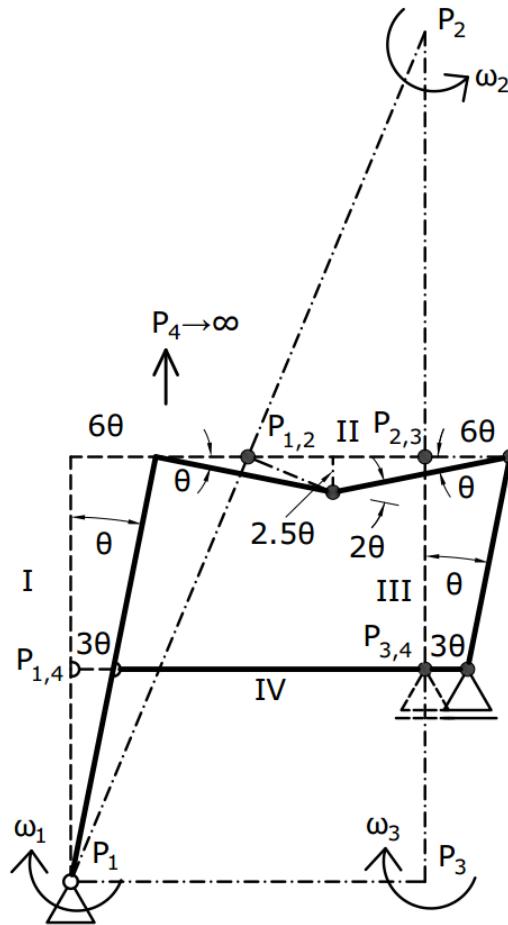
Posmatrat ćemo mehanizam sa plastičnim zglobovima u tačkama D, E i F. Kako ovaj mehanizam ima dva stepena slobode kretanja a stepen kretanja koji dozvoljava oslonac H nije od interesa, isti će se zanemariti odnosno mehanizam sa slike 31 a) će se prevesti u mehanizam na slici 31 b).

Jednačina rada:

$$\lambda \cdot \theta \cdot (6 + 25 + 3) = M_p \cdot \theta \cdot (2 + 2 + 1) \rightarrow \lambda = \frac{5M_p}{34}$$

Potrebno je pokazati da su momenti u tačkama B, C i G manji od momenta plastičnosti  $M_p$ . Kako poznajemo momente u tačkama D, E i F to možemo izračunati nepoznate unutrašnje veze (sile) u čvoru B na mjestu zgloba.

**Slika 38:** a) Originalni sistem, b) Modifikovan sistem



**Slika 39:** Pomjeranja mehanizma

Korištenjem jednog od sistema možemo izračunati nepoznate  $Y_B$  i  $X_B$ .

$$\begin{aligned} M_D &= 15\lambda + 7.5\lambda + 2.5Y_B - 3X_B \quad | \text{ ili} \\ M_F &= 5\lambda + 5Y_B \end{aligned}$$

Rješenje sistema iznosi:

$$Y_B = \frac{9M_p}{170}; X_B = \frac{415M_p}{510}$$

Sada možemo izračunati nepoznate momente u tačkama B, C i G.

$$M_B = 6\lambda = \frac{30M_p}{34} < M_p$$

$$M_C = 3X_B - 12\lambda = \left( \frac{3 \cdot 415 - 15 \cdot 12 \cdot 5}{510} \right) M_p = \frac{345M_p}{510} < M_p$$

$$M_G = 2.5Y_B = \frac{22.5M_p}{170} < M_p$$

Uslov momenta plastičnosti je zadovoljen čime mehanizam zadovoljava i predstavlja tačno rješenje, a izračunati faktor opterećenja predstavlja faktor graničnog opterećenja, identičan je onome izračunatom metodom jednačina, a iznosi:

$$\lambda = \lambda_c = \frac{5M_p}{34}$$

### 3.3/. METODA KOMBINOVANJA MEHANIZAMA

Osnovni koncept metode kombinovanja mehanizama i dalje leži u metodi rada, tj. pišu se jednačine rada i rješavajući istu izračunavamo faktor opterećenja. Međutim ono što se metoda mehanizama navodi jeste da je za svaku okvirnu konstrukciju i odgovarajuće opterećenje moguće dobiti tačni mehanizam sloma kombinujući određeni broj nezavisnih mehanizama. Onda kada ustanovimo nezavisne mehanizme, pišemo jednačine rada za svaki nezavisni mehanizam i izračunavamo njemu pripadajući faktor opterećenja. Najmanji faktor opterećenja koji dobijemo kombinovanjem svih mogućih mehanizama jeste faktor graničnog opterećenja, naravno ukoliko kombinacija nezavisnih mehanizama dajem manji faktor opterećenja od faktora opterećenja samih nezavisnih mehanizama. Da bismo bili upotpunosti sigurni da je rezultat uredu možemo izvršiti provjeru uslova momenta plastičnosti.

Za svaki okvir broj nezavisnih mehanizama je poznat unaprijed. Broj mogućih nezavisnih mehanizama možemo utvrditi na osnovu sljedeće formule:

$$n = N - R \quad (27)$$

gdje je:

- n – broj nezavisnih mehanizama
- N – broj vršnih tačaka momenata
- R – broj statičke neodređenosti

Vrste mehanizama su sljedeće:

- 1) gredni mehanizam
- 2) panel mehanizam
- 3) zatavni mehanizam
- 4) čvorni mehanizam
- 5) kombinovani mehanizam

gdje su prva četiri nezavisni mehanizmi. Osnovni princip kombinovanja jeste ustanoviti da li je moguće dobiti manji faktor opterećenja nekom kombinacijom nezavisnih mehanizama od njihovih samih. Kombinacije se izabiru tako da vanjski rad bude što veći, a unutrašnji što manji, jer tada dobijamo najmanje faktore opterećenja. Bitno je prilikom kombinovanja mehanizama težiti poništavanju što je moguće većem broju plastičnih zglobova.

Za ilustraciju metode kombinovanja mehanizama koristit će se primjer 2 iz metode ravnoteže i metode rada.

#### 3.3.1/. PRIMJER

Koristeći metodu kombinovanja mehanizama izračunati faktor graničnog opterećenja okvira sa slike 20. Svi štapovi imaju istu vrijednost  $M_p$ .

Prvo je potrebno utvrditi broj nezavisnih mehanizama okvira sa opterećenjem. Ovaj okvir je dva puta statički neodređen. Okvir pod zadatim opterećenjem ima četiri vršne tačke momenta i to u čvorovima B, C, D i E. Pa na osnovu jednačine (27) slijedi da je broj nezavisnih mehanizama jednak  $n=N-R=4-2=2$ . Prepoznajemo da su dva nezavisna mehanizma gredni i panelni.

Analizirajući gredni mehanizam sa slike 33 imamo:

$$4\lambda = 4M_p$$

Analizirajući panelni mehanizam sa slike 35 imamo:

$$3\lambda = 3M_p$$

Kombinirajući (sabirajući) ova dva mehanizma dobijamo:

$$7\lambda = 7M_p$$

Ukoliko pogledamo šta se događa kombinirajući ova dva mehanizma vidimo da se plastični zglob u čvoru D poništava iz razloga suprotnih rotacija čvora D grednog i panelnog mehanizma za koje vanjski rad ima

pozitivnu vrijednost. Stoga trebamo oduzeti od unutrašnjeg rada onoliko koliko doprinosi čvor D, a to je  $2M_p$ , jedan od grednog i jedan od panelnog mehanizma. Stoga jednačina poprima oblik:

$$7\lambda = 5M_p$$

A faktor graničnog opterećenja iznosi:

$$\lambda = \lambda_c = \frac{5M_p}{7}$$

što je tačno rješenje zadatka.

## 4/. LINEARNO PROGRAMIRANJE

### 4.1/. UVOD

Linearno programiranje podrazumijeva optimizacijske metode kojima se određuje optimalna vrijednost linearne funkcije više varijabli obzirom na neke zadane linearne uslove koje varijable trebaju zadovoljiti. Počeci linearног programiranja sežu u razdoblje drugog svjetskog rata gdje se koristilo za potrebe minimiziranja troškova vojske. Dalji razvoj je uslijedio nakon 1947. godine kada je američki matematičar A. Danzig razvio vrlo učinkovitu metodu (tzv. simpleks metoda) za numeričko rješavanje problema linearног programiranja. Simpleks metoda je i danas osnovna metoda za rješavanje problema linearног programiranja. U današnje vrijeme, koristeći računare, linearno programiranje je nezaobilazno u mnogim područjima gdje se javljaju vrlo složeni problemi optimizacije (kao npr. problem transporta, energije, telekomunikacija i sl.).

Problem određivanja faktora graničnog opterećenja statičkom ili kinematičkom metodom se može svesti na problem linearног programiranja. Kako linearnim programiranjem vršimo optimizaciju (pronalažimo minimum ili maksimum željene funkcije) to je moguće kod statičke metode vršiti optimizaciju u vidu pronalaženja maksimalne vrijednosti faktora opterećenja, a kod kinematičke minimalne vrijednosti faktora opterećenja koji predstavljaju faktor graničnog opterećenja za date teoreme.

Također i metoda nejednačina za određivanje faktora graničnog opterećenja može se rješavati linearnim programiranjem. Prvo će se pokazati metoda nejednačina, a zatim metodologija linearног programiranja statičke i kinematičke metode.

### 4.2/. METODA NEJEDNAČINA

Metoda nejednačina podrazumijeva da se napišu jednačine ravnoteže primjenom principa virtuelnih pomjeranja na nezavisnim mehanizmima, a zatim se na napisane jednačine uvode ograničenja da ni jedan moment savijanja ne može biti veći od momenta plastičnosti. U svrhu demonstracije uradit će se jedan primjer, i to primjer 2 iz statičke metode.

#### 4.2.1/. PRIMJER

Primjenjujući metodu nejednačina odrediti faktor graničnog opterećenja okvira sa slike 20.

Prethodno je utvrđeno da ovaj okvir ima dva nezavisna mehanizma. Razmatrajući gredni mehanizam sa slike 33 možemo napisati sljedeću jednačinu ravnoteže:

$$-M_B + 2M_C - M_D = 4\lambda$$

Razmatrajući panelni mehanizam sa slike 35 možemo napisati sljedeću jednačinu ravnoteže:

$$M_B - M_D + M_E = 3\lambda$$

Zadatak je da odredimo maksimalno  $\lambda$  koje zadovoljava uslov  $|M_i| \leq M_p$ .

Najprije ćemo izraziti momente  $M_C$  i  $M_E$ ,

$$M_C = 0.5 \cdot (M_B + M_D) + 4\lambda$$

$$M_E = M_D - M_B + 3\lambda$$

a zatim koristeći navedeno ograničenje možemo napisati sljedeće dvije nejednakosti:

$$\begin{aligned}-M_p &\leq M_C \leq M_p \\ -M_p &\leq M_E \leq M_p\end{aligned}$$

Odnosno:

$$\begin{aligned}-M_p &\leq 0.5 \cdot (M_B + M_D) + 4\lambda \leq M_p \\ -M_p &\leq M_D - M_B + 3\lambda \leq M_p\end{aligned}$$

Kako bi eliminisali  $M_D$  isti ćemo izraziti pa možemo napisati naredne nejednakosti:

$$\begin{aligned}-2M_p - M_B - 4\lambda &\leq M_D \leq 2M_p - M_B - 4\lambda \\ -M_p + M_B - 3\lambda &\leq M_D \leq M_p + M_B - 3\lambda \\ -M_p &\leq M_D \leq M_p\end{aligned}$$

Zatim ćemo napisati uslove da svaka lijeva strana treba da je manja od svake desne.

$$\begin{aligned}-M_p &\leq M_p \\ -M_p &\leq M_D \leq 2M_p - M_B - 4\lambda \\ -M_p &\leq M_p + M_B - 3\lambda \\ -2M_p - M_B - 4\lambda &\leq M_p \\ -2M_p - M_B - 4\lambda &\leq 2M_p - M_B - 4\lambda \\ -2M_p - M_B - 4\lambda &\leq M_p + M_B - 3\lambda \\ -M_p + M_B - 3\lambda &\leq M_p \\ -M_p + M_B - 3\lambda &\leq 2M_p - M_B - 4\lambda \\ -M_p + M_B - 3\lambda &\leq M_p + M_B - 3\lambda\end{aligned}$$

Dobili smo devet nejednačina od kojih su tri  $-M_p \leq M_p$ , iz preostalih možemo izraziti  $M_B$ .

$$\begin{aligned}-3M_p - 4\lambda &\leq M_B \leq 3M_p - 4\lambda \\ -2M_p + 3\lambda &\leq M_B \leq 2M_p + 3\lambda \\ -1.5M_p - 0.5\lambda &\leq M_B \leq 1.5M_p - 0.5\lambda \\ -M_p &\leq M_B \leq M_p\end{aligned}$$

Kako bi eliminisali  $M_B$  ponovo ćemo napisati jednakosti da je svaka lijeva strana manja od desne.

$$\begin{aligned}-M_p &\leq M_p \\ -M_p &\leq 3M_p - 4\lambda \\ -M_p &\leq 2M_p + 3\lambda \\ -M_p &\leq 1.5M_p - 0.5\lambda \\ -3M_p - 4\lambda &\leq M_p \\ -3M_p - 4\lambda &\leq 3M_p - 4\lambda \\ -3M_p - 4\lambda &\leq 2M_p + 3\lambda \\ -3M_p - 4\lambda &\leq 1.5M_p - 0.5\lambda \\ -2M_p + 3\lambda &\leq M_p \\ -2M_p + 3\lambda &\leq 3M_p - 4\lambda \\ -2M_p + 3\lambda &\leq 2M_p + 3\lambda \\ -2M_p + 3\lambda &\leq 1.5M_p - 0.5\lambda \\ -1.5M_p - 0.5\lambda &\leq M_p \\ -1.5M_p - 0.5\lambda &\leq 3M_p - 4\lambda\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-1.5M_p - 0.5\lambda &\leq 2M_p + 3\lambda \\ -1.5M_p - 0.5\lambda &\leq 1.5M_p - 0.5\lambda\end{aligned}$$

Od 12 nejednačina četiru su karaktera  $-M_p \leq M_p$ , a iz preostalih možemo izraziti  $\lambda$ .

$$\begin{aligned}-4M_p &\leq 4\lambda \leq 4M_p \\ -3M_p &\leq 3\lambda \leq 3M_p \\ -5M_p &\leq 7\lambda \leq 5M_p \\ -9M_p &\leq 7\lambda \leq 9M_p \\ -7M_p &\leq 7\lambda \leq 7M_p \\ -5M_p &\leq \lambda \leq 5M_p\end{aligned}$$

Najveća vrijednost  $\lambda$  koja zadovoljava prethodno napisane nejednakosti jeste  $\frac{5}{7}M_p$ .

Vidimo da je rješenje identično izračunatom prethodnim metodama.

Kako se radilo o jednostavnom zadatku to nije bilo potrebe koristiti računar kako bi se pronašla maksimalna vrijednost faktora opterećenja. Za komplikovanije zadatke u cilju što kraćeg rješavanja potrebno je koristiti računar za optimizaciju.

## 4.3/. STATIČKA METODA

Način formulacije linearog programiranja kod statičke metode je veoma intuitivan. Nakon što za konstrukciju napišemo momentne jednačine sve što je potrebno jeste pronaći maksimalnu vrijednost faktora opterećenja koji zadovoljava uslov momenta plastičnosti, a to je upravo zadatak linearog programiranja. Za demonstraciju uradit će se dva primjera.

### 4.3.1/. PRIMJER 1

Koristeći se linearnim programiranjem odrediti faktor graničnog opterećenja okvira sa slike 16.

U okviru izrade zadatka u poglavlju statička metoda napisali smo momente jednačine koje izgledaju:

$$\begin{aligned}M_B &= 3X_A \\ M_C &= 4Y_A - 3X_A \\ M_D &= -4\lambda - 3X_A + 8Y_A \\ M_E &= 7\lambda - 8Y_A\end{aligned}$$

Sve što je sada potrebno jeste izvršiti maksimizaciju  $\lambda$  pri čemu vrijednosti  $M_i$  trebaju biti manje ili jednake  $M_p$ . Taj dio obavljamo linearnim programiranjem. Kako je linearno programiranje obuhvaćeno kroz softverski paket [19] to će se isti koristiti kako bi se rješio gore navedeni zadatak. U [19] koristit ćemo se funkcijom *Solver*. U nastavku se daje format tabele sa izlaznim podacima. Kako se radi o numeričkom proračunu potrebno je da definišemo moment plastičnosti koji iznosi 1000 kNm.

**Tabela 1:** Proračun  $\lambda$

$M_p$	1000	kNm
$X_A$	333,3333	kN
$Y_A$	500	kN
$M_B$	1000	kNm
$M_C$	1000	kNm
$M_D$	142,8571	kNm
$M_E$	1000	kNm
$\lambda$	714,2857143	

Tačno rješenje proračunato prethodnim metodama iznosi:  $\lambda_c = \frac{5}{7}M_p = 714.29 \text{ kNm}$

Vidimo da su rješenja identična.

### 4.3.2/. PRIMJER 2

Koristeći se linearnim programiranjem odrediti faktor graničnog opterećenja okvira sa slike 27. Moment plastičnosti iznosi 1000 kNm.

Prethodno napisane momentne jednačine izgledaju:

$$\begin{aligned}M_B &= 6\lambda \\M_C &= 3X_B - 12\lambda \\M_D &= 15\lambda + 7.5\lambda + 2.5Y_B - 3X_B \\M_E &= 3X_B - 5\lambda - 3\lambda - 5Y_B \\M_F &= 5\lambda + 5Y_B \\M_G &= 2.5Y_B\end{aligned}$$

Tačno rješenje proračunati prethodnim metodama iznosi:

$$\lambda_c = \frac{5}{34} M_p = 147.06 \text{ kNm}$$

Rezultati iz [19] se prikazuju u narednoj tabeli.

**Tabela 2:** Proračun  $\lambda$

$M_p$	1000	kNm
$X$	813,7255	kN
$Y$	52,94118	kN
$M_B$	882,3529	kNm
$M_C$	676,4706	kNm
$M_D$	1000	kNm
$M_E$	1000	kNm
$M_F$	1000	kNm
$M_G$	132,3529	kNm
$\lambda$	147,0588235	

Rezultat je identičan.

### 4.4/. KINEMATIČKA METODA

Da bi proračunali faktor graničnog opterećenja potrebno je minimizirati funkciju:

$$\mu_k = \frac{|e|}{f^T d}$$

gdje je:

- $e$  – rotacije ,  $e = Bd$
- $B$  – kinematska matrica
- $d$  – pomjeranja
- $f^T$  – opterećenje

Demonstracija metode će se pokazati na primjeru 2 koji je urađen statičkom metodom.

#### 4.4.1/. PRIMJER

Koristeći se linearnim programiranjem odrediti faktor graničnog opterećenja okvira sa slike 20.

Razmatrajući gredni mehanizam sa slike 33 možemo izraziti rotacije čvorova:

$$\theta_B = -0.25 \cdot V_C$$

$$\theta_C = 0.5 \cdot V_C$$

$$\theta_D = -0.25 \cdot V_C$$

Razmatrajući panelni mehanizam sa slike 35 možemo izraziti rotacije čvorova:

$$\theta_B = -\frac{1}{3} \cdot V_D$$

$$\theta_D = \frac{1}{3} \cdot V_D$$

$$\theta_E = -\frac{1}{3} \cdot V_D$$

Zapisano matrično imamo:

$$\begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \\ \theta_E \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 & -0.33 \\ 0.5 & 0 \\ -0.25 & 0.33 \\ 0 & -0.33 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V_C \\ V_D \end{Bmatrix}$$

To jest matrica  $B$  izgleda:

$$B = \begin{bmatrix} -0.25 & -0.33 \\ 0.5 & 0 \\ -0.25 & 0.33 \\ 0 & -0.33 \end{bmatrix}$$

Da bismo dobili uslov kompatibilnosti koji treba da bude zadovoljen u procesu minimiziranja potrebno je da izrazimo pomjeranja preko rotacija.

$$V_C = 2\theta_C$$

$$V_D = -3\theta_E$$

Zatim ove vrijednosti vraćamo u preostale jednačine po rotacijama i dobivamo uslov(e) kompatibilnosti koji izgledaju:

$$\theta_B + \theta_C + \theta_D = 0$$

$$\theta_B + 0.5 \cdot \theta_C + \theta_E = 0$$

$$0.5 \cdot \theta_C + \theta_D + \theta_E = 0$$

Funkcija opterećenja izgleda (funkcija je normalizirana uslovom da iznosi  $M_P$  od 1000 kNm):

$$f^{-T} = \lambda \cdot V_C + \lambda \cdot V_D = 1000$$

to jest imamo dodatni uslov koji treba biti zadovoljen a to je:

$$2\theta_C - 3\theta_E = 1000$$

Funkcija koju trebamo minimizirati izgleda:

$$\mu_K = |\theta_B| + |\theta_C| + |\theta_D| + |\theta_E|$$

Pogodno je da izrazimo pomjeranje jednog u odnosu na drugo:

$$V_C = \frac{4}{3} \cdot V_D$$

Rješenje iz [19] se prilaže u sljedećoj tabeli:

**Tabela 3:** Proračun  $\lambda$ 

$V_C$	571,4285714
$V_D$	428,5714286
$\theta_B$	-285,7142857
$\theta_C$	285,7142857
$\theta_D$	0
$\theta_E$	-142,8571429
$\theta_B + \theta_C + \theta_D$	0
$\theta_B + 0.5 \cdot \theta_C + \theta_E$	0
$0.5 \cdot \theta_C + \theta_D + \theta_E$	0
$2 \cdot \theta_C - 3 \cdot \theta_E$	1000
$\lambda$	714,2857143

Rezultat je identičan rješenju dobivenom prethodnim metodama.

# 5/. ZGLOB PO ZGLOB METODA

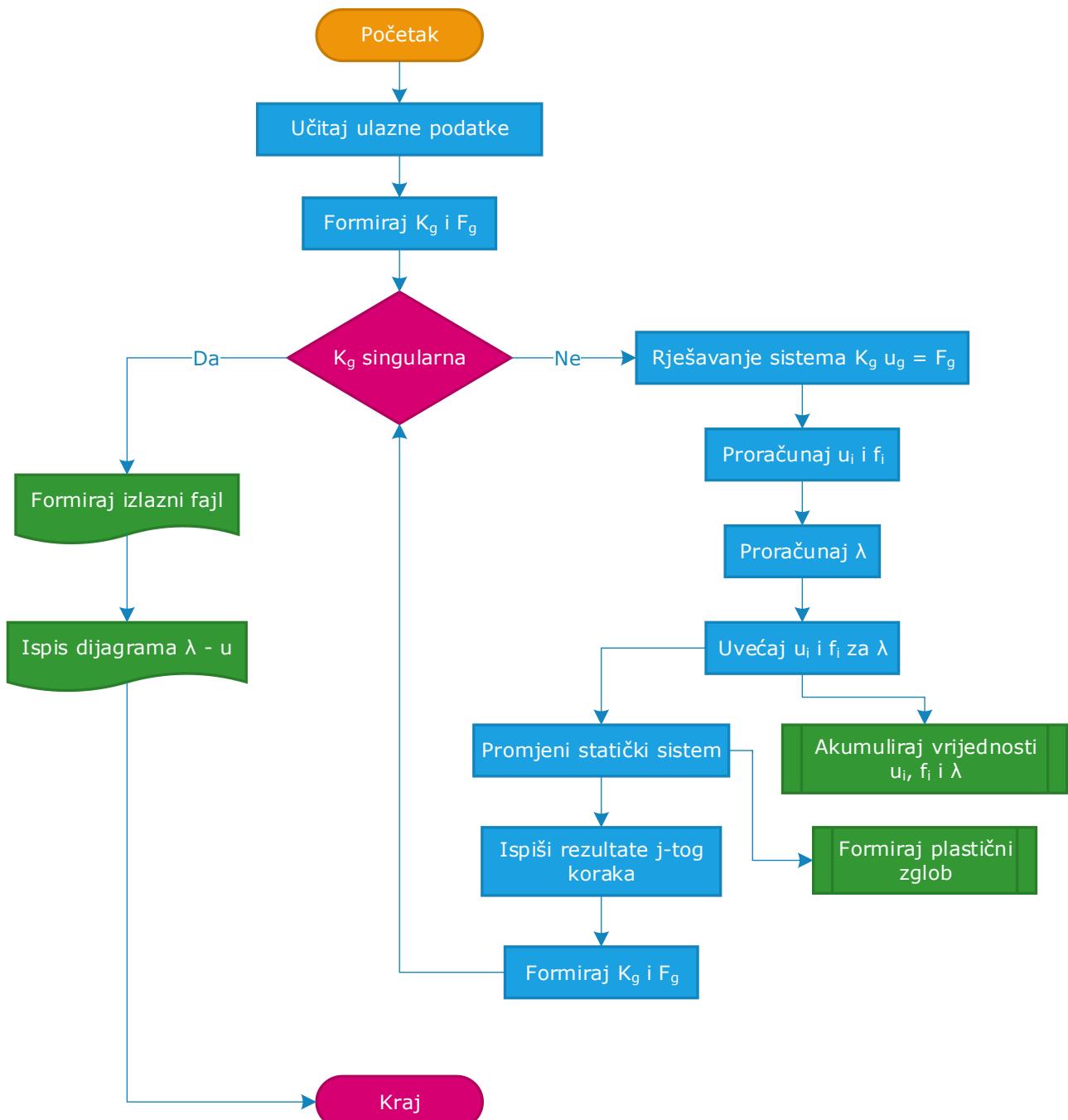
## 5.1/. UVOD

Zglob po zglob metoda (eng. hinge by hinge method) ili metoda suksesivnog formiranja zglobova predstavlja niz linearnih statičkih analiza konstrukcije. Formiranjem plastičnog zglobova u tekućoj analizi konstrukcija prelazi u statički jednostavniju u sljedećoj analizi. Proračun se vrši sve dok se ne formira dovoljan broj plastičnih zglobova koji će konstrukciju prevesti u mehanizam. Kako se isti proces ponavlja više puta to je ovu metodu moguće programirati. Za proračun okvira metodom zglob po zglob napravljen je program u MATLAB-u. Napravljeni su programi za proračun po teoriji prvog reda i teoriji drugog reda. Po teoriji drugog reda napravljen je program sa geometrijskom matricom krutosti koja uzima u obzir samo zakošenje elementa, te program sa geometrijskom matricom krutosti koja uzima u obzir i zakošenje i zakrivljenje elementa. U nastavku se slijedi algoritam i detaljno komentiran kôd navedenih programa.

## 5.2/. TEORIJA PRVOG REDA

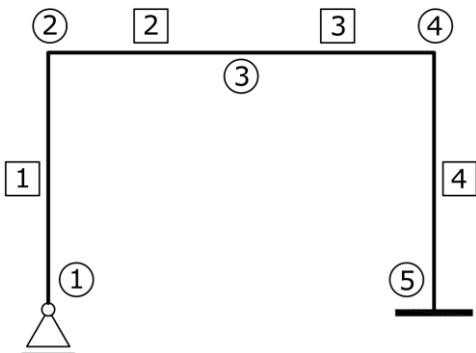
### 5.2.1/. RAČUNARSKI PROGRAM

#### 5.2.1.1/. ALGORITAM PROGRAMA



### 5.2.1.2/. IZVORNI KÔD

Program za računanje faktora graničnog opterećenja metodom zglob po zglob po teoriji prvog reda sastoje se od više funkcionalnih cjelina. Krenut ćemo od ulaznih podataka koje korisnik unosi. Kako će se nakon objašnjenja kôda uraditi pet primjera to će se sada svrshishodno objasniti unošenje ulaznih podataka za primjer 1 koji sljedi poslije. Primjer 1 je ujedno primjer 1 iz metode ravnoteže. Bitno ograničenje ovog programa je da uzima u obzir samo opterećenja koja djeluju u čvorovima, tako da je elemente potrebno podijeliti na mjestu promjene geometrije i opterećenja. Kontinuirano opterećenje se može obuhvatiti tako što će se isto zamjeniti ekvivalentnim čvornim opterećenjem sa dovoljno gustom raspodjelom. Broj čvora označavat će se unutar kruga, a broj elemenata unutar kvadrata.



**Slika 40:** Oznake čvorova i elemenata za okvir primjera 1

Kako program vrši linearu statičku analizu to su nam potrebne geometrijske karakteristike poprečnog presjeka ( $A$  i  $I$ ) te mehaničke karakteristike materijala ( $E$ ). Za ovaj primjer reći ćemo da su svi štapovi poprečnog presjeka 40/60cm, te da je modul elastičnosti materijala  $E=3\cdot10^7$  kN/m $^2$ . Također potrebno je definisati moment plastičnosti. U ovom primjeru moment plastičnosti iznosi 1000 kNm.

Ulagni podaci se definišu u fajlu koji može imati bilo koji naziv, ovdje će se fajl sa ulaznim podacima nazvati „up\_#.m“, gdje # predstavlja broj primjera. Kako je ovo ulazni podatak za primjer 1, to će fajl nositi naziv „up\_1.m“. Slijedi kôd fajla *up\_1.m* kroz nekoliko odjeljaka sa kratkim komentarima istih.

#### Fajl: up\_1.m

```
% Fajl: up_1.m

% Sljedeće varijable su proglašene globalnim kako bi mogle biti korištene u svim funkcijama
% koje čine program.
global bc be bcpe bsskpc bsskpe bssk kc pe kmipp pru ru optnc zglob mp

% Format prikaza numeričkih varijabli
format short g
```

U prvom odjeljku definisane su navedene varijable te zadat format prikaza numeričkih varijabli. Značenje svake definisane varijable sljedi kroz sljedeće odjeljke.

```
% ##### Početak unosa podataka #####
bc = 5; % Broj čvorova
be = 4; % Broj elemenata
bcpe = 2; % Broj čvorova po elementu
bsskpc = 3; % Broj stepeni slobode kretanja po čvoru
bsskpe = bcpe * bsskpc; % Broj stepeni slobode kretanja po elementu
```

Počeli smo sa unosom podataka, značenje varijabli su date komentarom u samom programu. Unešeni podaci za broj čvorova i broj elemenata odgovaraju slici 40. Svaki element se sastoji od dva čvora tj. nema međučvorova, svaki čvor ima tri pomjeranja (u ravni) i to horizontalno i vertikalno pomjeranje te rotaciju.

Broj stepeni slobode kretanja elementa dobijemo kada pomnožimo broj čvorova elementa sa brojem stepeni slobode kretanja čvora.

```
% Koordinate čvorova - kc, x i Y
% kc = zeros(bc, 2) - dimenzije matrice kc
kc = [ 0,    0;    % x i Y čvora 1
       0,    4;    % x i Y čvora 2
       3,    4;    % x i Y čvora 3
       6,    4;    % x i Y čvora 4
       6,    0];   % x i Y čvora 5
```

Slijedi matrica koordinata čvorova (*kc*), gdje u prvoj koloni imamo koordinate *X*, a u drugoj koloni koordinate *Y* svih čvorova. Referentni koordinatni sistem ćemo uvijek stavljati u čvor 1, tako da su njegove koordinate *X* i *Y* uvijek 0. Broj čvora odgovara redu matrice, tako za čvor 4 u četvrtom redu imamo vrijednosti 6 i 4 što odgovara  $X_4 = 6$  i  $Y_4 = 4$ .

```
% Povezanost elemenata - pe
% pe = zeros(be, 2) - dimenzije matrice pe
pe = [1,    2;    % Prvi i drugi čvor elementa 1
      2,    3;    % Prvi i drugi čvor elementa 2
      3,    4;    % Prvi i drugi čvor elementa 3
      4,    5];   % Prvi i drugi čvor elementa 4
```

Matrica povezanosti elementa kako joj samo ime kaže definiše kako su elementi međusobno povezani i koji čvor odgovara prvom čvoru elementa a koji čvor drugom čvoru elementa. Broj elementa odgovara redu matrice *pe*, tako za element 3 imamo da je njegov prvi čvor, čvor 3, a drugi čvor, čvor 4. Potrebno je reći da redoslijed čvorova nije bitan i da rezultati ne zavise od toga. Tako da je moguće napisati da je prvi čvor elementa 3 čvor 4, a da je njegov drugi čvor, čvor 3. Razlika se očituje u tome da je lokalni koordinatni sistem štapa uvijek postavljen u prvom čvoru, pa ovisno od toga koji čvor je prvi čvor elementa, a koji drugi matrica transformacije koja preliskava nepoznata pomjeranja iz lokalnog u globalni koordinatni sistem će biti drugačija.

```
% Karakteristike materijala i poprečnog presjeka - kmipp
% kmipp = zeros(be, 3) - dimenzije matrice kmipp
kmipp = [3e7,    0.24,    0.0072;    % E, A i I elementa 1
          3e7,    0.24,    0.0072;    % E, A i I elementa 2
          3e7,    0.24,    0.0072;    % E, A i I elementa 3
          3e7,    0.24,    0.0072];   % E, A i I elementa 4
```

Matrica karakteristika materijala i poprečnog presjeka, redovi odgovaraju elementima, prva kolona modulu elastičnosti, druga kolona površini poprečnog presjeka i treća kolona momentu inercije poprečnog presjeka.

```
% Početni rubni uslovi - pru
pru = ones(bc, bsskpc);                                % Inicijalizacija jedinične matrice pru
pru(1, 2) = 0;                                         % Rubni uslov čvora 1
pru(5, 1) = 0; pru(5, 2) = 0; pru(5, 3) = 0;          % Rubni uslov čvora 5
```

Matrica početnih rubnih uslova definiše koja pomjeranja su moguća, a koja ne, odnosno ovom matricom definisemo oslonce našeg sistema. Prvo inicijaliziramo jediničnu matricu *pru*, a zatim u čvorovima u kojima imamo spriječeno neko od pomjeranja promijenimo vrijednost tog člana matrice *pru* u 0. Stoga 1 vrijedi za slobodan stepen slobode kretanja, dok 0 vrijedi za spriječen stepen slobode kretanja.

Dimenzije matrice *pru* su broj čvorova sa broj stepeni slobode kretanja po čvoru. U našem primjeru to je matrica dimenzija 5 sa 3. To red matrice odgovara čvoru, a kolone stepenima slobode kretanja. Prva kolona za pomjeranja u *X* pravcu, druga kolona za pomjeranja u *Y* pravcu i treća kolona za rotaciju čvora.

Čvor 1 ima spriječeno vertikalno pomjeranje, stoga je član u prvom redu i drugoj koloni jednak nuli. Čvor 5 ima spriječena sva pomjeranja, to je čitav peti red matrice *pru* jednak nuli. Stoga matrica *pru* za naš primjer izgleda:

$$pru = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
% Petlja za brojanje slobodnih stepeni slobode kretanja
bssk = 0; % Broj stepeni slobode kretanja
ru = zeros(bc, bsskpc); % Inicijalizacija nulte matrice rubni uslovi
for i = 1:bc
    for j = 1:bsskpc
        if pru(i, j) ~= 0
            bssk = bssk + 1;
            ru(i, j) = bssk;
        end
    end
end
```

Nakon definisanja početnih rubnih uslova potrebno je znati ukupan broj slobodnih stepeni slobode kretanja kao i mjesto svakog stepena slobode kretanja. To je postignuto korištenjem *for* petlje. *For* petlja prolazi kroz sve članove matrice *pru* i na kojem god mjestu najde na broj različit od 0 (slobodan stepen slobode kretanja) povećava broj stepeni slobode kretanja za jedan i tekući član matrice *pru* mijenja sa trenutnom vrijednošću broja stepeni slobode kretanja u matrici *ru*. Matricom *ru* pokazujemo na kom mjestu u globalnom vektoru nepoznatih pomjeranja se nalazi neko pomjeranje. Ako krenemo od čvora 1 jednostavno sabiramo jedinice i mijenjamo iste sa trenutnim sabirkom, a to je upravo ono što *for* petlja radi. U našem primjeru matrica rubnih uslova izgleda:

$$ru = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tako da sada znamo da sedmi član globalnog vektora nepoznatih pomjeranja odgovara vertikalnom pomjeranju čvora 3, jer se broj 7 u matrici *ru* nalazi u trećem redu i drugoj koloni. Sada znamo da imamo ukupno 11 nepoznatih pomjeranja i da naša globalna matrica krutosti sistema je dimenzija 11 sa 11.

```
% zglobovi
zglob = ones(be, 2); % Inicijalizacija jedinične matrice zglob
```

Matricom *zglob* definišemo da li je neki od elemenata zglobno oslonjen na jednom ili oba kraja. Što ima uticaja na matricu krutosti elementa, gdje ako neki element ima zglob na jednom ili oba kraja se koristi kondenzovana matrica krutosti za taj element. Matricom *zglob* obuhvatamo samo čvorove međusobno povezanih elemenata, a ne i čvorove vezane za okolinu. Tako element 1 primjera 1 je zglobno vezan za okolinu i to ne obuhvatamo matricom *zglob*, taj stepen slobode je definisan kroz matricu *pru*, gdje je rečeno da je to slobodan stepen slobode. Tako da u primjeru 1 nema međusobno zglobno povezanih elemenata. Recimo da u čvoru 2 postoji *zglob*, tada imamo opciju da ili elementu 1 na mjestu njegovog drugog čvora dodijelimo *zglob* ili elementu 2 na mjestu njegovog prvog čvora, a nikako na oba elementa, jer u tom slučaju matrica krutosti postaje singularna. Generalno za čvor u kojem se sustiče *n* kruto vezanih elemenata, može biti definisano maksimalno *n*-1 zglobova na krajevima tih elemenata tog čvora, što odgovara punom *zglobu* za taj čvor. Broj 1 u matrici *zglob* označava da je čvor elementa bez *zgloba*, dok broj 0 označava da je čvor elementa sa *zglobom*.

```
% Opterećenje na čvoru - optnc
optnc = zeros(bc, bsskpc); % Inicijalizacija nulte matrice optnc
```

```
optnc(2, :) = [1,     0,     0];    % Opterećenje u čvoru 2
optnc(3, :) = [0,     -1,     0];   % Opterećenje u čvoru 3
```

Matricom *optnc* definišemo čvorna opterećenja, redovi odgovaraju čvoru, a kolone silama. Prva kolona horizontalnoj sili, druga kolona vertikalnoj sili i treća kolona momentu savijanja. U našem primjeru imamo horizontalnu силу od 1kN u čvoru 2 и verticalno силу од 1kN u čvoru 3. Tako da matrica *optnc* za primjer 1 izgleda:

$$\text{optnc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
% Čvor za dijagram - czd
czd = zeros(be,6);    % Inicijalizacija nulte matrice czd
czd(1, 5) = 1;        % Horizontalno pomjeranje drugog čvora elementa 1
```

Matricom *czd* definišemo od kojeg čvora i koje njegovo pomjeranje želimo printati na dijagram  $\lambda-u$ , gdje je *u* to definisano pomjeranje. Matrica je dimenzija broj elemenata sa 6, gdje prve tri kolone se odnose na horizontalno i vertikalno pomjeranje i rotaciju prvog čvora, a preostale tri kolone na horizontalno i vertikalno pomjeranja i rotaciju drugog čvora elementa. Matrica *czd* je nulta, gdje 0 označava da pomjeranje nećemo printati, dok 1 označava da to pomjeranje želimo printati. U našem primjeru definisano je horizontalno pomjeranje čvora dva, na način da je rečeno da je član u prvom redu i četvrtoj koloni jednak 1, što odgovara drugom čvoru elementa 1. Ovo pomjeranje se moglo definisati i preko elementa 2, tj. član u drugom redu i prvoj koloni jednak je 1 što odgovara prvom čvoru elementa 2.

```
% Moment plastičnosti - mp
mp = ones(be,2);    % Inicijalizacija jedinične matrice mp
mp = 1000 * mp;      % Mp = 1000 kNm za sve elemente

% ##### Kraj unosa podataka #####
```

Matricom *mp* definišemo moment plastičnosti elementa. Kako su elementi konstantnog poprečnog presjeka to imaju isti moment plastičnosti na svom prvom i drugom čvoru. Red matrice odgovara elementu a kolone čvorovima, prva kolona prvom čvoru, a druga kolona drugom. Moguće je zadati da elementi imaju različite momente plastičnosti što će biti pokazano u drugim primjerima. U ovom primjeru svi elementi imaju isti moment plastičnosti od 1000 kNm. Sa ovim je završen unos podataka i fajl *up\_1.m* je kompletiran.

Sljedeći korak nakon definisanja ulaznih podataka jeste formiranje matrica krutosti elemenata. Fajl za formiranje matrice krutosti elementa nazvan je *o\_mkeulks.m*, što bi značilo *o*-za okvir, a *mkeulks*-za matricu krutosti elementa u lokalnom koordinatnom sistemu. Fajl je napravljen kao funkcija.

#### Fajl: *o\_mkeulks.m*

```
function [mkeulks] = o_mkeulks(i)
```

Definisanje funkcije koja prihvata jedan ulazni argument *i* (*i*-ti element) i daje jedan izlazni argument *mkeulks* (matricu krutosti u lokalnom koordinatnom sistemu *i*-tog elementa).

```
% ova funkcija formira matricu krutosti elementa u lokalnom koordinatnom sistemu.

% Definisanje globalnih varijabli
global kc pe kmipp zglob
```

```
% Vađenje čvorova elementa i
c1 = pe(i, 1); % Prvi čvor elementa i
c2 = pe(i, 2); % Drugi čvor elementa i
```

Nakon definisanih globalnih varijabli, za svaki element iz matrice povezanost elemenata – *pe* vadimo njegov prvi i drugi čvor. Matricu povezanosti elemenata smo definisali u ulaznim podacima tj. u fajlu *up\_1.m*.

```
% Vađenje koordinata X i Y čvora 1 i 2 elementa i
x1 = kc(c1, 1); y1 = kc(c1, 2); % Koordinate X i Y čvora 1
x2 = kc(c2, 1); y2 = kc(c2, 2); % Koordinate X i Y čvora 2
```

Nakon što znamo koji čvor je prvi čvor elementa *i*, a koji čvor je drugi čvor elementa *i*, potrebno je da znamo i koordinate tih čvorova što vadimo iz matrice koordinate čvorova – *kc*.

```
L = sqrt((x2-x1)^2 + (y2-y1)^2); % Proračun dužine elementa i
```

Kada poznajemo koordinate čvorova elementa *i*, možemo izračunati njegovu dužinu koristeći Pitagorinu teoremu.

```
% Vađenje karakteristika materijala i poprečnog presjeka
E = kmipp(i, 1); % Modul elastičnosti elementa i
A = kmipp(i, 2); % Površina poprečnog presjeka elementa i
I = kmipp(i, 3); % Moment inercije poprečnog presjeka elementa i
EI = E * I; % Krutost na savijanje
```

Da bi formirali matricu krutosti elementa potrebne su nam još i geometrijske karakteristike poprečnog presjeka elementa i te mehaničke karakteristike materijala elementa *i* *E*, *A* i *I*. Ove karakteristike vadimo iz matrice karakteristike materijala i poprečnog presjeka – *kmipp* koja je prethodno definisana u ulaznim podacima.

```
% Formiranje matrice krutosti elementa u lokalnog koordinatnom sistemu

if zglob(i, 1) == 0 && zglob(i, 2) == 1
    mkeulks = ((3*EI)/L^3) * [ (A*L^2)/(3*I), 0, 0, (-A*L^2)/(3*I), 0, 0;
                                0, 1, 0, 0, -1, L;
                                0, 0, 0, 0, 0, 0;
                                (-A*L^2)/(3*I), 0, 0, (A*L^2)/(3*I), 0, 0;
                                0, -1, 0, 0, 1, -L;
                                0, L, 0, 0, -L, L^2];
elseif zglob(i, 1) == 1 && zglob(i, 2) == 0
    mkeulks = ((3*EI)/L^3) * [ (A*L^2)/(3*I), 0, 0, (-A*L^2)/(3*I), 0, 0;
                                0, 1, L, 0, -1, 0;
                                0, L, L^2, 0, -L, 0;
                                (-A*L^2)/(3*I), 0, 0, (A*L^2)/(3*I), 0, 0;
                                0, -1, -L, 0, 1, 0;
                                0, 0, 0, 0, 0, 0];
elseif zglob(i, 1) == 0 && zglob(i, 2) == 0
    mkeulks = ((3*EI)/L^3) * [ (A*L^2)/(3*I), 0, 0, (-A*L^2)/(3*I), 0, 0;
                                0, 0, 0, 0, 0, 0;
                                0, 0, 0, 0, 0, 0;
                                (-A*L^2)/(3*I), 0, 0, (A*L^2)/(3*I), 0, 0;
                                0, 0, 0, 0, 0, 0;
                                0, 0, 0, 0, 0, 0];
else
    mkeulks = ((12*EI)/L^3) * [ (A*L^2)/(12*I), 0, 0, (-A*L^2)/(12*I), 0, 0;
                                0, 1, L/2, 0, -1, L/2;
```

```

0,      L/2,  L^2/3,      0,      -L/2,  L^2/6;
(-A*L^2)/(12*I),  0,      0,  (A*L^2)/(12*I),  0,      0;
0,      -1,  -L/2,      0,      1,  -L/2;
0      L/2,  L^2/6,      0,      -L/2,  L^2/3];
end

```

Na kraju formiramo matricu krutosti elementa u lokalnom koordinatnom sistemu. Program provjerava da li na čvorovima elementa  $i$  postoji zglob (elementi međusobno zglobno vezani) te shodno tome formira matricu krutosti elementa.

```
end
```

Završavamo funkciju  $[mkeulks] = o\_mkeulks(i)$ .

Nakon što su matrice krutosti elemenata formirane, potrebno je da asembliramo globalnu matricu krutosti sistema. Da bismo formirali globalnu matricu krutosti sistema prvo je potrebno definisati matricu transformacije svakog elementa i nepoznata pomjeranja iz lokalnih koordinata elemenata preslikati u globalne koordinate. Matrica transformacije je definisana kao funkcija, a fajl nazvan  $o\_mt.m$ .

#### Fajl: $o\_mt.m$

```
function [mt] = o_mt(i)
```

Definisanje funkcije koja prihvata jedan ulazni argument  $i$  ( $i$ -ti element) i daje jedan izlazni argument  $mt$  (matricu transformacije elementa  $i$ ).

```
% ova funkcija formira matricu transformacije iz lokalnih u globalne koordinate

% Definisanje globalnih varijabli
global kc pe

% Vađenje čvorova elementa i
c1 = pe(i, 1);
c2 = pe(i, 2);

% Vađenje koordinata x i y čvora 1 i 2
x1 = kc(c1, 1); y1 = kc(c1, 2);
x2 = kc(c2, 1); y2 = kc(c2, 2);
```

Za definisanje matrice transformacije potrebno je da znamo ugao za koji je lokalni koordinatni sistem elementa  $i$  zarotiran u odnosu na globalni koordinatni sistem. Stoga su nam potrebne koordinate čvorova elementa  $i$  do kojih dolazimo na identičan način kao u prethodnom fajlu  $o\_mkeulks.m$ .

```
% Proračun ugla koji element i zatvara sa globalnom x osom
if (x2-x1) == 0
    if (y2>y1)
        alfa = 2 * atan(1);
    else
        alfa = -2 * atan(1);
    end
elseif (x2-x1) < 0
    if (y2-y1) == 0
        alfa = 4 * atan(1);
    elseif (y2<y1)
        alfa = (4*atan(1) + atan((y1-y2)/(x1-x2)));
    end
end
```

```

else
    alfa = atan((y2-y1)/(x2-x1));
end

```

Kako bi obuhvatili da izbor prvog i drugog čvora elementa nema uticaja na rezultat proračuna to potrebno pokriti nekoliko specifičnih slučajeva od kojih su: da je element vertikalni (slučaj prvi čvor donji i slučaj prvi čvor gornji), element horizontalan (slučaj prvi čvor desni), element kos (slučaj prvi čvor gornji desni i slučaj prvi čvor donji lijevi).

```

% Formiranje matrice transformacije
mt = [cos(alfa), -sin(alfa), 0, 0, 0, 0;
       sin(alfa), cos(alfa), 0, 0, 0, 0;
       0, 0, 1, 0, 0, 0;
       0, 0, 0, cos(alfa), -sin(alfa), 0;
       0, 0, 0, sin(alfa), cos(alfa), 0;
       0, 0, 0, 0, 0, 1];

```

Nakon što je ugao rotacije lokalnog koordinatnog sistema elementa u odnosu na globalni koordinatni sistem izračunat sljedi formiranje matrice transformacije elementa.

```
end
```

Završavamo funkcije  $[mt] = o\_mt(i)$ .

Za formiranje globalne matrice krutosti sistema pored matrica krutosti elemenata i matrica transformacija elemenata potrebne su nam lokacijski vektori. Lokacijski vektori „lociraju“ mjesto pomjeranja čvorova elementa u globalnom vektoru nepoznatih pomjeranja. Lokacijski vektor je definisan kao funkcija, a fajl nazvan *o\_lv.m*.

### Fajl: *o\_lv.m*

```
function [lv] = o_lv(i)
```

Funkcija prihvata jedan ulazni argument *i* (*i*-ti element) i daje jedan izlazni argument *lv* (lokacijski vektor elementa *i*).

```

% Ova funkcija formira lokacijski vektor elementa i

% Definisanje globalnih varijabli
global pe ru

% Vađenje čvorova elementa i
c1 = pe(i, 1);
c2 = pe(i, 2);

% Formiranje lokacijskog vektora iz stepeni slobode elementa i
lv = [ru(c1, 1);
       ru(c1, 2);
       ru(c1, 3);
       ru(c2, 1);
       ru(c2, 2);
       ru(c2, 3)];

```

Nakon definisanja globalnih varijabli i vađenja čvorova elemenata, formiramo lokacijski vektor elementa i na osnovu matrice rubni uslov. Matricu rubni uslovi formirali smo na osnovu matrice početni rubni uslovi koju smo definisali u ulaznim podacima. Kako je prethodno rečeno matricom *ru* pokazujemo na kom mjestu

u globalnom vektoru nepoznatih pomjeranja se nalazi neko pomjeranje, na nivou sistema, a onda u lokacijski vektor  $i$ , izvlačimo pomjeranja koja su vezana za element  $i$ . Dakle lokacijskim vektorom pokazujemo na kom mjestu u globalnom vektoru nepoznatim pomjeranju se nalazi neko pomjeranje na nivou elementa. Pomjeranja koja su jednaka nuli u matrici  $ru$  imaju vrijednosti 0, isto tako pomjeranja koja su na elementu jednaka nuli u lokacijskom vektoru imat će vrijednost 0. Za naš primjer lokacijski vektor elementa 1 izgleda:

$$lv(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Pomjeranja u lokacijskom vektoru su poredana horizontalno i vertikalno pomjeranje i rotacija prvog a zatim horizontalno i vertikalno pomjeranje i rotacija drugog čvora elementa. Šesti član  $lv(1)$  iznosi 5, što nam govori da se rotacija drugog čvora elementa 1 (čvor 2) nalazi na petom mjestu u globalnom vektoru nepoznatih pomjeranja. Drugi član je jednak 0, što govori da je vertikalno pomjeranje prvog čvora elementa 1 jednako nula, što i jeste, jer se u tom čvoru nalazi vertikalni oslonac koji spriječava vertikalno pomjeranje istog.

```
end
```

Završavamo funkciju  $[lv] = o\_lv(i)$ .

Sada imamo spremne podatke da iz lokalnih matrica krutosti elementa u lokalnom koordinatnom sistemu formiramo globalnu matricu krutosti sistema. Globalna matrica krutosti sistema se asemblira u dva koraka. U prvom koraku definiše se funkcija za asembliranje globalne matrice krutosti sistema koja uzima tri ulazna argumenta, globalnu matricu krutosti elementa iz prethodnog koraka, matricu krutosti elementa u globalnom koordinatnom sistemu i lokacijski vektor. Zatim se u drugom koraku definiše nova funkcija u kojoj pozivamo sve prethodno definisane funkcije kako bi imali ulazne parametre za funkciju koja asemblira globalnu matricu krutosti sistema. Fajl za asembliranje globalne matrice krutosti je definisan kao funkcija i nazvan je *o\_gmks.m*.

### Fajl: *o\_gmks.m*

```
function [gmks] = o_gmks(gmks, mkeugks, lv)
```

Funkcija koja uzima tri ulazna parametra *gmks* (globalnu matricu krutosti sistema iz prethodnog koraka), *mkeugks* (matricu krutosti elementa u globalnom koordinatnom sistemu) i *lv* (lokacijski vektor).

```
% Ova funkcija asemblira globalnu matricu krutosti
% Definisanje globalnih varijabli
global bsskpe

% Petlja za asembliranje globalne matrice krutosti sistema
for i = 1:bsskpe
    if lv(i) ~= 0
        for j = 1:bsskpe
            if lv(j) ~= 0
                gmks(lv(i), lv(j)) = gmks(lv(i), lv(j)) + mkeugks(i, j);
            end
        end
    end
end
end
```

Nakon definisanja globalnih varijabli, pozivamo dvostruku *for* petlju za asembliranje globalne matrice krutosti sistema. Samo članovi vektora *lv* različit od 0 su oni koji će biti asemblirani u globalnu matricu krutosti sistema. Tako za primjer na osnovu *lv(1)*, možemo reći da će član matrice krutosti elementa u globalnom koordinatnom sistemu koji se nalazi u prvom redu i prvoj koloni zauzeti mjesto u prvom redu i prvoj koloni globalne matrice krutosti sistema. Član matrice krutosti elementa u globalnom koordinatnom sistemu koji se nalazi u prvom redu i četvrtoj koloni zauzet će mjesto u prvom redu i trećoj koloni globalne matrice krutosti sistema. Član matrice krutosti elementa u globalnom koordinatnom sistemu koji se nalazi u šestom redu i trećoj koloni zauzet će mjesto u petom redu i drugoj koloni globalne matrice krutosti sistema, i tako dalje analogno. Da bi sada asemblirali globalnu matricu krutosti sistema koristeći ovu funkciju potrebno je da istu provućemo kroz *for* petlju koja će ići do broja elemenata sistema i koja će formirati *lv* i *mkeugks* za svaki element. Ova *for* petlja je dio spomenutog koraka dva gdje definišemo novu funkciju koja će ovu funkciju provesti kroz sve elemente i na taj način formirati globalnu matricu krutosti sistema.

```
end
```

Završavamo funkciju *[gmks] = o\_gmks(gmks, mkeugks, lv)*.

Pošto ćemo u toj funkciji pored asembliranja globalne matrice krutosti sistema formirati i globalni vektor sila. Prvo ćemo definisati funkciju za formiranje globalnog vektora sila. Funkcija je nazvana *o\_gvsoonc.m*.

### Fajl: *o\_gvsoonc.m*

```
function [gvs] = o_gvsoonc(gvs)
```

Funkcija koja prima jedan ulazni argument *gvs* (nulti globalni vektor sila) i daje jedan izlazni argument *gvs* (globalni vektor sila – kompletiran).

```
% Ova funkcija formira globalni vektor sila od opterećenja na čvorovima

% Definisanje globalnih varijabli
global bc bsskpc ru optnc

% Petlja za asembliranje globalnog vektora sila
for i=1:bc
    for j=1:bsskpc
        if ru(i, j) ~= 0
            gvs(ru(i, j)) = optnc(i, j);
        end
    end
end
```

Za formiranje globalnog vektora sila služimo se dvostrukom *for* petljom, koja provjerava sve članove matrice rubni uslovi. Samo članovi čija je vrijednost različita od 0 će biti asemblirani u globalni vektor sila. Mjesto člana globalnog vektora sila odgovara vrijednosti iz matrice rubni uslovi, dok vrijednost tog člana odgovara vrijednosti matrice *optnc* na mjestu položaja člana iz matrice *ru*.

```
end
```

Završavamo funkciju *[gvs] = o\_gvsoond(gvs)*.

Sada ćemo formirati funkciju u kojoj zajedno formiramo globalnu matricu krutosti sistema i globalni vektor sila, i u toj funkciji objedinjujemo do sada formirane funkcije. Fajl je nazvan *o\_gmks\_i\_gvs.m*.

### Fajl: *o\_gmks\_i\_gvs.m*

```
function [gmks, gvs] = o_gmks_i_gvs()
```

Funkcija koja ne uzima ulazne argumente, a daje dva izlazna argumenta *gmks* (globalnu matricu krutosti sistema – kompletiranu) i *gvs* (globalni vektor sila – kompletiran).

```
% ova funkcija formira globalnu matricu krutosti sistema i globalni vektor sila sistema

% Definisanje globalnih varijabli
global be bssk

% Asembliranje globalnog vektora sila
gvs = zeros(bssk, 1); % Inicijalizacija nultog globalnog vektora sila
gvs = o_gvsoonc(gvs); % Pozivanje funkcije koja asemblira globalni vektor sila
```

Nakon definisanja globalnih varijabli sljedi asembliranje globalnog vektora sila, prvo inicijaliziramo nulti globalni vektor sila koji koristimo kao ulazni argument funkcije koja asemblira globalni vektor sila.

```
% Asembliranje globalne matrice krutosti sistema
gmks = zeros(bssk); % Inicijalizacija nulte globalne matrice krutosti sistema

for i=1:be
    mkeulks = o_mkeulks(i); % Pozivanje funkcije za formiranje matrice krutosti elementa
                            % u lokalnog koordinatnom sistemu
    mt = o_mt(i);          % Pozivanje funkcije koja formira matrice transformacije
                            % elementa
    mkeugks = mt * mkeulks * mt'; % Formiranje matrice krutosti elementa u globalnom
                                    % koordinatnom sistemu
    lv = o_lv(i);           % Pozivanje funkcije za formiranje lokacijskog vektora
                            % elementa

    gmks = o_gmks(gmks, mkeugks, lv); % Pozivanje funkcije za asembliranje globalne
                                        % matrice krutosti sistema
end
```

U ovom dijelu prvo inicijaliziramo nultu globalnu matricu krutosti sistema kako bi je koristili kao ulazni argument za  $i=1$ , te kako bi poboljšali performanse programa unaprijed definišući dimenzije matrice. U *for* petlji formiramo matrice krutosti elemenata u lokalnom koordinatnom sistemu, zatim njihove matrice transformacije, zatim formiramo matrice krutosti elemenata u globalnom koordinatnom sistemu, te lokacijske vektore elemenata. Navedeno koristimo kao ulazni argument u funkciji koja asemblira globalnu matricu krutosti sistema.

```
end
```

Završavamo funkciju  $[gmks, gvs] = o\_gmks\_i\_gvs()$ .

Sada možemo riješiti sistem jednačina  $K \mathbf{u} = \mathbf{F}$  i dobiti vrijednosti traženih pomjeranja. Pomjeranja vraćamo sa nivoa sistema na nivo elementa, zatim računamo čvorne sile na elementima. Napisat ćemo funkciju koja vraća pomjeranja sa nivoa sistema na nivo elementa i koja računa presječne sile u čvorovima elementa. Funkcija je nazvana *o\_pmnpulks\_i\_sulks.m*. U toj funkciji koristit ćemo kratku funkciju za proračun dužine elementa, pa će se najprije dati ta funkcija. Fajl je nazvan *o\_L.m*.

### Fajl: *o\_L.m*

```
function [L] = o_L(i)

% ova funkcija računa dužinu elementa i

% Definisanje globalnih varijabli
global kc pe
```

```
% vađenje čvorova elementa i
c1 = pe(i, 1); % Prvi čvor elementa i
c2 = pe(i, 2); % Prvi čvor elementa 2

% vađenje koordinata X i Y čvora 1 i 2
x1 = kc(c1, 1); y1 = kc(c1, 2); % Koordinate X i Y čvora 1
x2 = kc(c2, 1); y2 = kc(c2, 2); % Koordinate X i Y čvora 2

L = sqrt((x2-x1)^2 + (y2-y1)^2); % Proračun dužine elementa i

end
```

### Fajl: o\_pmnpulks\_i\_sulks.m

```
function [mnpulks, pmnpulks, sulks] = o_pmnpulks_i_sulks(gvnp)
```

Funkcija koja uzima jedan ulazni argument *gvnp* (globalni vektor nepoznatih pomjeranja) i daje tri izlazna argumenta *mnpulks* (matrica nepoznatih pomjeranja u lokalnom koordinatnom sistemu), *pmnpulks* (popravljena matrica nepoznatih pomjeranja u lokalnom koordinatnom sistemu) i *sulks* (sile u lokalnom koordinatnom sistemu).

```
% Ova funkcija vadi čvorna pomjeranja i računa čvorne sile elemenata

% Definisanje globalnih varijabli
global be bsskpe zglob

% Inicijalizacija nulte matrice sila u lokalnom koordinatnom sistemu
sulks = zeros(be, bsskpe);

% Inicijalizacija nulte matrice vektora nepoznatih pomjeranja u globalnom koordinatnom
% sistemu
mnpulks = zeros(be, bsskpe);

% Inicijalizacija nulte matrice vektora nepoznatih pomjeranja u lokalnom koordinatnom
% sistemu
mnpulks = zeros(be, bsskpe);

% Petlja za proračun čvornih sila elementa
for i=1:be

    % Pozivanje funkcije za formiranje matrica krutosti elementa u lokalnom koordinatnom
    % sistemu
    mkeulks = o_mkeulks(i);

    % Pozivanje funkcije za formiranje matrice transformacije elementa
    mt = o_mt(i);

    % Proračun matrice krutosti elementa u globalnom koordinatnom sistemu
    mkeugks = mt * mkeulks * mt';

    % Pozivanje funkcije za formiranje lokacijskog vektora elementa
    lv = o_lv(i);

    % Petlja za formiranje matrice nepoznatih pomjeranja u globalnom
    % koordinatnom sistemu
    for j=1:bsskpe
```

```

    if lv(j) ~= 0
        mnpugks(i, j) = gvnp(lv(j));
    end
end

% Vektor cvornih sila elementa u globalnom koordinatnom sistemu
vcseugks = mkeugks * mnpugks(i, :)';

% Vektor čvornih sila u lokalnom koordinatnom sistemu
vcseulks = mt' * vcseugks;

% Matrica sila u lokalnom koordinatnom sistemu
sulks(i, :) = vcseulks;

% Petlja za zaokruživanje vrijednosti matrice sulks
for a=1:be
    for b=1:bsskpe
        if abs(sulks(a,b)) <= 0.01
            sulks(a,b) = 0;
        end
    end
end

% Matrica nepoznatih pomjeranja u lokalnom koordinatnom sistemu
mnpulks(i,:)= mt' * mnpugks(i,:)';
end

```

U ovom dijelu prvo se vrši inicijalizacija nulte matrice sila u lokalnom koordinatnom sistemu i nulte matrice vektora nepoznatih pomjeranja elementa. Zatim imamo dvostruku *for* petlju, gdje se u prvoj petlji računa matrica krutosti elementa u globalnom koordinatnom sistemu pozivajući ranije definisane funkcije, a u drugoj petlji formira se vektor nepoznatih pomjeranja elementa. U nastavku računa se vektor sila elementa u globalnom koordinatnom sistemu, te se pomoću matrice transformacije isti vraća u lokalni koordinatni sistem. Na taj način dobivamo matricu sila u lokalnom koordinatnom sistemu, ona je dimenzija broj elemenata sa broj stepeni slobode kretanja po elementu, u našem primjeru 4 sa 6. Prve tri se odnose na horizontalnu i vertikalnu silu te momenat u prvom čvoru elementa respektivno, a preostale tri kolone se odnose na horizontalnu vertikalnu silu te momenat u drugom čvoru elementa respektivno. Na kraju se nalazi petlja koja vrijednosti presječnih sila manjih od 0.01 izjednačava sa nulom.

```

% Inicijalizacija popravljenog vektora nepoznatih pomjeranja elementa
pmnpulks = mnpulks;

% Petlja za proračun uglova zaokreta kondenzovanih matrica krutosti
% elemenata
for i1=1:be
    for j1=1:2
        if zglob(i1, j1) == 0
            Le = o_L(i1);
            if j1 == 1
                pmnpulks(i1, j1^2+2) = -((1.5*mnpulks(i1, 2))/Le) + ((1.5*mnpulks(i1,
5))/Le) - 0.5*mnpulks(i1, 6);

            elseif j1 == 2
                pmnpulks(i1, j1^2+2) = -((1.5*mnpulks(i1, 2))/Le) + ((1.5*mnpulks(i1,
5))/Le) - 0.5*mnpulks(i1, 3);
            end
        end
    end
end

```

U prethodno proračunatom vektoru nepoznatih pomjeranja elementa postoje greške, kako se vrši sukcesivno formiranje plastičnih zglobova to imamo međusobno zglobove povezane elemente. Kako za takve elemente koristimo kondenzovanu matricu krutosti to ne možemo matrično izračunati ugao zaokreta čvora elementa sa zglobom, već je potrebno naknadno vratiti se početku statičke kondenzacije i izračunati ugao zaokreta. Na taj način dobivamo popravljeni vektor nepoznatih pomjeranja elementa koji zatim zaokružimo na 6 decimala i transponujemo, tako da redovi predstavljaju elemente, a kolone pomjeranja. Pomjeranja su poredana da prvo ide horizontalno, pa onda vertikalno pomjeranja i na kraju rotacija i to respektivno prvo prvog čvora a zatim drugog čvora elementa.

```
end
```

Završavamo funkciju [mnpulks, pmnpulks, pomnugks, sulks] = o\_pmnpulks\_i\_sulks(gvnp).

Kako bi kompletirali izvorni kôd programa potrebno je da prikažemo još tri fajla, i to jedan za ispis ulaznih podataka, drugi za ispis rezultata proračuna i treći je glavni fajl u kojem se vrši proračun faktora graničnog opterećenja. Naime nakon završenog proračuna program daje dva izlazna podatka, jedan je .txt fajl sa ispisanim ulaznim podacima i rezultatima proračuna svih iteracija, a drugi je dijagram  $\lambda-u$ . Prvo će se prikazati fajl za ispis ulaznih podataka nazvan *o\_iup.m*, a zatim fajl za ispis rezultata proračuna nazvan *o\_irp.m*. Značenje pojedinih varijabli u fajlu *o\_irp.m* bit će pojašnjeno u zadnjem fajlu koji nosi naziv *proracun\_pz\_tpr.m* sa kojim kompletiramo program za proračun graničnog opterećenja metodom zglob po zglob. Kako bi izvorni kôd ostao uredan smanjit će se font kod prikaza fajlova *o\_iup.m* i *o\_irp.m*.

### Fajl: *o\_iup.m*

```
% Definisanje globalnih varijabli
global bc be bcpe bsskpc bsskpe kc pe kmipp optnc

fprintf(fid, '-----\r\n');
fprintf(fid, '***** ISPIS ULAZNIH PODATAKA *****\r\n');
fprintf(fid, '-----\r\n');

% Ispis koordinata čvorova
fprintf(fid, '-----\r\n');
fprintf(fid, '%49s\r\n', 'Osnovni podaci');
fprintf(fid, '-----\r\n');
fprintf(fid, 'Broj čvorova: %g\r\n', bc);
fprintf(fid, 'Broj elemenata: %g\r\n', be);
fprintf(fid, 'Broj čvorova po elementu: %g\r\n', bcpe);
fprintf(fid, 'Broj stepeni slobode po čvoru: %g\r\n', bsskpc);
fprintf(fid, 'Broj stepeni slobode po elementu: %g\r\n', bsskpe);
fprintf(fid, '-----\r\n');
fprintf(fid, '-----\r\n');
fprintf(fid, '%50s\r\n', 'Koordinate čvorova');
fprintf(fid, '-----\r\n');
fprintf(fid, '%28s %14s %15s\r\n', 'Čvor', 'X[m]', 'Y[m]');
fprintf(fid, '-----\r\n');
for i = 1:bc
    fprintf(fid, '%27g %15.2f %15.2f\r\n', i, kc(i, 1), kc(i, 2));
end

% Ispis povezanosti elemenata
fprintf(fid, '-----\r\n');
fprintf(fid, '-----\r\n');
fprintf(fid, '%52s\r\n', 'Povezanost elemenata');
fprintf(fid, '-----\r\n');
fprintf(fid, '%30s %15s %15s\r\n', 'Element', 'čvor_1', 'čvor_2');
fprintf(fid, '-----\r\n');
for i = 1:be
    fprintf(fid, '%27g %15g %15g\r\n', i, pe(i,1), pe(i,2));
end

% Ispis karakteristika elementa
fprintf(fid, '-----\r\n');
fprintf(fid, '-----\r\n');
fprintf(fid, '%53s\r\n', 'Karakteristike elemenata');

fprintf(fid, '-----\r\n');
fprintf(fid, '%23s %12s %16s %14s\r\n', 'Element', 'E[MPa]', 'A[m^2]', 'I[m^4]');
```

```

fprintf(fid, '-----\r\n');
for i = 1:be
    fprintf(fid, '%20g %15g %15g %15g\r\n', i, kmipp(i,1), kmipp(i,2), kmipp(i,3));
end
fprintf(fid, '-----\r\n');

% Ispis čvornog opterećenja
fprintf(fid, '-----\r\n');
fprintf(fid, '%51s\r\n', 'čvorno opterećenje');
fprintf(fid, '-----\r\n');
fprintf(fid, '%21s %16s %15s %15s\r\n', 'čvor', 'Fx[kN]', 'Fy[kN]', 'M[kNm]');
fprintf(fid, '-----\r\n');
for i = 1:bc
    fprintf(fid, '%20g %15g %15g %15g\r\n', i, optnc(i,1), optnc(i,2), optnc(i,3));
end
fprintf(fid, '-----\r\n');
fprintf(fid, '-----\r\n');
fprintf(fid, '***** ISPIS REZULTATA PRORAČUNA *****\r\n');
fprintf(fid, '-----\r\n');

```

### Fajl: o\_irp.m

```

% Format prikaza numeričkih varijabli
format short g

% Definisanje globalnih varijabli
global be ite lambdam lambdaau

% Ispis faktora graničnog opterećenja i mesta formiranja plastičnog zgloba
fprintf(fid, '-----\r\n');
fprintf(fid, 'ITERACIJA %g\r\n', ite);
fprintf(fid, '-----\r\n');
fprintf(fid, 'Faktor opterećenja: L%g = %0.3f\r\n', ite, lambdam);
fprintf(fid, 'Ukupni faktor opterećenja: L = %0.3f\r\n', lambdaau);
for i=1:be
    for j=1:2
        if round(lambda(i, j), 10) == round(min(min(lambda)), 10)
            if j == 1
                fprintf(fid, 'Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa %g.\r\n', i);
            elseif j == 2
                fprintf(fid, 'Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa %g.\r\n', i);
            end
        end
    end
end
fprintf(fid, '-----\r\n');

% Ispis ukupnog vektora nepoznatih pomjeranja elemenata
fprintf(fid, '-----\r\n');
fprintf(fid, '%49s\r\n', 'Pomjeranja čvorova');
fprintf(fid, '-----\r\n');
fprintf(fid, '%8s %12s %12s %12s %12s %11s %12s\r\n', 'Element', 'X1[mm]', 'Y1[mm]', 'Fi1[rad]', 'X2[mm]',
'Y2[mm]', 'Fi2[rad]');
fprintf(fid, '-----\r\n');
for i = 1:be
    fprintf(fid, '%5g %14.2f %12.2f %12.5f %12.2f %12.5f\r\n', i, pmnpulksu(i, 1)*1000, pmnpulksu(i,
2)*1000, pmnpulksu(i, 3), pmnpulksu(i, 4)*1000, pmnpulksu(i, 5)*1000, pmnpulksu(i, 6));
end

% Ispis ukupnih čvornih sila na elementu
fprintf(fid, '-----\r\n');
fprintf(fid, '-----\r\n');
fprintf(fid, '%51s\r\n', 'Sile u elementima');
fprintf(fid, '-----\r\n');
fprintf(fid, '%8s %12s %12s %12s %12s %11s %12s\r\n', 'Element', 'Fx1[kN]', 'Fy1[kN]', 'M1[kNm]', 'Fx2[kN]',
'Fy2[kN]', 'M2[kNm]');
fprintf(fid, '-----\r\n');
for i=1:be
    fprintf(fid, '%5g %14.2f %12.2f %12.2f %12.2f %12.2f\r\n', i, cntm(i,1), cntm(i,2), cntm(i,3),
cntm(i,4), cntm(i,5), cntm(i,6));
end

```

```
end
fprintf(fid, '-----\r\n');
```

### Fajl: proracun\_pz\_tpr.m

```
% Čisti varijable i ekran
clear
clc

% Format ispisa numeričkih varijabli
format short g

% Definisanje globalnih varijabli
global ite lambdam lambdau zglob pru czd

% Učitavanje ulaznih podataka
up_1;

% Otvaranje fajla za ispis
fid = fopen('o_rp_1.txt', 'w');

% Ispis ulaznih podataka
o_iup

% Pozivanje funkcije za formiranje globalne matrice krutosti sistema i
% globalnog vektora sila
[gmks, gvs] = o_gmks_i_gvs();

% Inicijalizacija početnih varijabli potrebnih za petlju koja proračunava
% faktor graničnog opterećenja
cm = zeros(be, 2); % Čvorni momenti
lambdau = 0; % Ukupni faktor opterećenja
rgmks = bssk; % Rank globalne matrice krutosti sistema
lambdam = 0; % Minimalni faktor opterećenja i-te iteracije
ite = 0; % Broj iteracija
pmnpulksu = zeros(be, 6); % Ukupna popravljena matrica nepoznatih pomjeranja lks
cntm = zeros(be, 6); % Ukupna matrica čvornih sila
```

Prije petlje za proračun faktora graničnog opterećenja učitavamo ulazne podatke, otvaramo fajl pod imenom *o\_rp\_1.txt* u kojem će se nalaziti ispisani ulazni podaci te rezultati proračuna. Zatim formiramo globalnu matricu krutosti sistema i globalni vektor sistema pozivajući funkciju. Nakon toga definишemo početne varijable koje figurišu u *while* petlji koja sljedi.

```
% Petlja za proračun faktora graničnog opterećenja
while rgmks >= bssk
```

*While* petlja u kojoj se nalazi ostatak kôda za proračun faktora graničnog opterećenja. Ovom petljom se provjerava singularnost globalne matrice krutosti. Od boljih načina za provjeru singulariteta matrice je da se poredi rang matrice sa dimenzijama matrice, tako da *rgmks* predstavlja rang globalne matrice krutosti, a *bssk* je broj stepeni slobode kretanja i predstavlja dimenzije globalne matrice krutosti sistema, jer dimenzija globalne matrice krutosti sistema je jednaka broju stepeni slobode kretanja sistema.

```
% Dodavanje iteracije
ite = ite + 1;

% Rješavanje sistema K * u = F
gvnp = gmks\gvs;
```

```
% Pozivanje funkcije za proračun popravljenog vektora nepoznatih pomjeranja elementa
% i vektora čvornih sila u lokalnom koordinatnom sistemu
[mnpuks, pmnpuks, sulks] = o_pmnpuks_i_sulks(gvnp);
```

Povećavamo iteraciju za jedan, rješavamo sistem jednačina i dobivamo globalni vektor nepoznatih pomjeranja koji koristimo kao ulazni argument u funkciji za proračun popravljenog vektora nepoznatih pomjeranja elementa i vektora čvornih sila u lokalnom koordinatnom sistemu.

```
% Formiranje nulte matrice faktora opterećenja
lambda = zeros(be,2);

% Formiranje nulte matrice čvornih momenata i-te iteracije
cmi = zeros(be, 2);

% Formiranje nulte matrice ostatka čvornog momenta
ocm = zeros(be, 2);

% Petlja za proračun matrice faktora opterećenja
for c=1:be
    for d=1:2
        cmi(c, d) = sulks(c, d^2 + 2);
        if cmi(c, d) > 0 && cm(c, d) > 0 || cmi(c,d) < 0 && cm(c,d) < 0
            ocm(c, d) = mp(c, d) - abs(cm(c, d));
        elseif cmi(c, d) > 0 && cm(c, d) < 0 || cmi(c,d) < 0 && cm(c,d) > 0
            ocm(c, d) = mp(c, d) + abs(cm(c, d));
        elseif cmi(c, d) == 0 && cm(c, d) == 0
            if pru(c,3) == 1 || pru(c,3) == 0
                ocm(c,d) == mp(c,d);
            else
                ocm(c,d) = 0;
            end
        elseif cmi(c, d) == 0 && cm(c, d) ~= 0
            ocm(c, d) = mp(c, d) - abs(cm(c, d));
        elseif cm(c, d) == 0 && cmi(c, d) ~= 0
            if ite == 1
                ocm(c,d) = mp(c,d);
            elseif ite ~= 1
                ocm(c, d) = mp(c, d) - abs(cmi(c, d));
            end
        end
        if ocm(c, d) < 0.00001
            ocm(c, d) = 0;
        end
        lambda(c, d) = ocm(c, d)/abs(cmi(c, d));
        if lambda(c, d) == -Inf
            lambda(c,d) = Inf;
        end
    end
end

% Određivanje minimalnog faktora opterećenja i-te iteracije
lambdam = min(min(lambda));
if lambdam == Inf
    break
elseif isnan(lambda)
    disp('Formirana je rešetka, nema više čvorova u kojima može doći do povećanja
momenta.');
end
```

```
% Sabiranje matrica "cm", "pmnpulks" i "cntm" kako bi se dobile akumulirane
% vrijednosti istih matrica zaključno sa i-tom iteracijom
cm = cm + lambdam * cmi;
pmnpulksu = pmnpulksu + lambdam * pmnpulks;
cntm = cntm + lambdam * sulks;

% Sabiranje lambdi
lambdau = lambdau + lambdam;
```

Formiramo nultu matricu faktora opterećenja *lambda* dimenzija broj elemenata sa 2, također formiramo nultu matricu čvornih momenata *i*-te iteracije. Kako zanemarujemo uticaj normalne i poprečne sile na formiranje plastičnog zgloba to nam je od presječnih sila od interesa samo momenat savijanja. Zatim formiramo nultu matricu ostatka čvornog momenta. Nakon toga slijedi *for* petlja za formiranje matrice faktora opterećenja, prvo određujemo čemu je jednak ostatak čvornog momenta, pazeći da pokrijemo slučaj kada momenat u čvoru tekuće i prethodne iteracije nije istog predznaka. Matricom ostatak čvornog momenta definišemo koliko neki presjek može preuzeti momenta savijanja na sebe prije nego se formira plastični zglob. Očigledno ostatak čvornog momenta je jednak: momentu plastičnosti minus trenutni momenat savijanja u čvoru ukoliko je momenat u čvoru prethodne i tekuće iteracije istog smjera, odnosno momentu plastičnost plus trenutni moment savijanja u čvoru ukoliko je momenat u čvoru prethodne i tekuće iteracije suprotnog smjera. Matrica *ocm* je dimenzija broj elemenata sa 2, tj. u njoj se nalaze momenti prvog i drugog čvora svakog elementa. Članove matrice faktora opterećenja (*lambda*) dobijamo tako što dijelimo matricu *ocm* sa matricom *cmi* (čvorni momenti *i*-te iteracije). Najmanja vrijednost matrice *lambda* predstavlja faktor opterećenja za formiranje prvog zgloba. Nakon toga vršimo akumuliranje matrica *cm*, *vnpeu* i *cntm*, tj. tekuće vrijednosti tih matrica množimo sa tekućom vrijednošću minimalnog faktora opterećenja i sabiramo sa vrijednostima prethodne iteracije. Isto radimo i za faktor opterećenja.

```
% Petlja za promjenu rubnih uslova
for e=1:be
    for f=1:2
        if round(lambda(e, f), 10) == round(min(min(lambda)), 10)
            if (pru(pe(e, f), 3)) == 1
                zglob(e, f) = 0;
            elseif (pru(pe(e, f), 3)) == 0
                pru(pe(e, f), 3) = 1;
            end
        end
    end
end

% Brojanje pojave čvora u matrici "pe"
bpc = zeros(bc,1); % Broj pojave čvora
for h=1:be
    for k=1:2
        for l=1:bc
            if pe(h,k) == 1
                bpc(l,1) = bpc(l) + 1;
            end
        end
    end
end

% Popravljanje matrice "zglob" tj. ne dopušta n zglobova u čvoru sa n
% elemenata, broj zglobova treba da je max n-1 inače globalna matrica
% krutosti postaje singularna
for tt=1:bc
    [rr, cc] = find(pe == tt); % Položaj tt-og čvora
    pzglob = zeros(bpc(tt), 1); % Inicijalizacija nultog vektora pojave zgloba
    if bpc(tt) > 1
        for ttt=1:bpc(tt)
            pzglob(ttt, 1) = zglob(rr(ttt), cc(ttt));
        end
    end
end
```

```

    end
    bpn = 0; % Broj pojave nula
    for ss=1:bpc(tt)
        if pzglob(ss) == 0
            bpn = bpn + 1;
        end
    end
    if bpn > (bpc(tt)-1)
        zglob(rr(ttt), cc(ttt)) = 1;
    end
end
end

```

Kako smo izračunali faktor opterećenja i skalirali vektor čvornih sila u lokalnom koordinatnom sistemu to imamo zglob u nekom od čvorova, stoga je potrebno mijenjati statički sistem. Sljedi *for* petlja koja provjerava u kom čvoru se formirao zglob. Ukoliko je čvor oslonački u njemu se mijenja matrica početnih rubnih uslova, umjesto 0 stavlja se 1 tj. oslobađa se taj stepen slobode kretanja. Ukoliko čvor nije oslonački, onda na elementu kojem pripada čvor za plastičnih zglobom postavlja se zglob. Ukoliko za primjer imamo slučaj sa dva elementa u čvoru prethodno kruto vezani i formira se plastični zglob u tom čvoru, oba elementa imaju isti momenat plastičnosti te program na oba elementa postavi zglob, što vodi ka singularitetu globalne matrice krutosti iako sistem možda nije iscrpljen i još uvijek nije formiran mehanizam. Stoga je potrebno ograničiti da u čvoru sa  $n$  elemenata može biti maksimalno  $n-1$  zglobova. U tu svrhu vrši se brojanje pojave nekog čvora u matrici povezanosti elemenata. Broj pojave čvora ujedno predstavlja i broj elemenata koji se sustiču u tom čvoru koji nam je potreban da ograničimo broj zglobova u tom čvoru.

Zatim se vrši popravljanje matrice *zglob*, gdje program provjerava broj nula (tj. broj zglobova) u svakom čvoru, ukoliko je broj manji ili jednak od broja elemenata koji se sustiču u čvoru matrica *zglob* je ok i ne treba je popravljati, ukoliko je broj veći potrebno je popraviti matricu *zglob* na način da sa bilo kojeg elementa u tom čvoru se skine zglob (0) i umjesto vrijednosti 0 postavi 1.

```

% Petlja za novo brojanje slobodnih stepeni slobode kretanja
bssk = 0; % Resetovanje broja stepeni slobode kretanja
ru = zeros(bc, bsskpc); % Resetovanje matrice rubni uslovi
for m=1:bc
    for n=1:bsskpc
        if pru(m, n) ~= 0
            bssk = bssk + 1;
            ru(m, n) = bssk;
        end
    end
end

% Petlja za formiranje vektora faktora opterećenja i željenog
% pomjeranja za svaku iteraciju kako bi se formirao dijagram lambda-u
for ci=1:be
    for cj=1:6
        if czd(ci, cj) == 1;
            mt = o_mt(ci);
            lak(ite, 1) = lambda;
            pmnpugks = mt * pmnulksu(ci, :)'; % Prebacivanje u gks
            pomj(ite, 1) = pmnpugks(cj) * 1000;
        end
    end
end

% Ispis rezultata i-te iteracije
o_irp

```

```
% Formiranje nove globalne matrice krutosti sistema i globalnog vektora
% sistema
[gmks, gvs] = o_gmks_i_gvs();

% Proračun ranka nove globalne matrice krutosti sistema za provjeru
% while petlje
rgmks = rank(gmks);
```

Ukoliko se plastični zglob formirao u osloničkom čvoru mijenja se matrica *pru* samim tim mijenja se i matrica *ru* pa je potrebno novo brojanje slobodnih stepeni slobode kretanja. Nakon toga formira se petlja da se sačuvaju faktori opterećenja svake iteracije u vektorskem obliku kao i željeno pomjeranje (definisano u ulaznim podacima) kako bi se mogao formirati dijagram  $\lambda-u$ . Zatim se vrši ispis rezultata *i-te* iteracije u prethodno definisan fajl *o\_rp\_1.txt*. Kako sada imamo novi statički sistem to ponovno pozivamo funkciju za proračun globalne matrice krutosti sistema i globalnog vektora sistema, te računamo rang nove globalne matrice krutosti sistema za provjeru *while* petlje. Ukoliko je rang veći ili jednak dimenzijama globalne matrice krutosti sistema tada se proračun nastavlja i sve tako dok konačno rang ne bude manji od dimenzija globalne matrice krutosti sistema što govori da je ista singularna.

```
end
```

Završavamo petlju *while*.

```
fclose(fid); % zatvara otvoreni fajl za ispis

% Ispis teksta na konzoli
disp('Izvršavam: proracun_pz_tpr.m');
disp('Rezultati ispisani u fajlu: o_rp_1.txt');

% {Plotanje dijagrama lambda - delta
lak =[0;lak];
round(lak, 3);
pomj = [0;pomj];
pomj = abs(pomj);
round(pomj, 3);
plot(pomj, lak, 'k-o','LineWidth', 1.5, 'MarkerFaceColor','g', 'MarkerEdgeColor', 'k',
'MarkerSize', 3)
xlabel('Ux2[mm]', 'FontSize', 10)
ylabel('Faktor opterećenja [kN]', 'FontSize', 10)
set(gca, 'FontSize', 10)
```

Nakon što se *while* petlja prekine i rezultati svih iteracija su zapisani u otvorenom fajlu za ispis, isti fajl zatvaramo. Zatim formiramo dijagram  $\lambda-u$ .

Sa ovim se završava objašnjenje izvornog kôda programa za proračun faktora graničnog opterećenja okvira u ravni metodom sukcesivnog formiranja zglobova. U nastavku sljede primjeri.

## 5.2.2/. PRIMJERI

### 5.2.2.1/. PRIMJER 1

Kako je za primjer 1 fajl *up\_1.m* formiraj tokom objašnjenja kôda to se ovdje isti neće ponavljati, već će se samo dati izlazni fajl *o\_rp\_1.txt*, te dijagram  $\lambda-u$  (gdje je u horizontalno pomjeranje čvora 2).

#### Fajl: *o\_rp\_1.txt*

***** ISPIS ULAZNIH PODATAKA *****			
Osnovni podaci			
Broj čvorova: 5 Broj elemenata: 4 Broj čvorova po elementu: 2 Broj stepeni slobode po čvoru: 3 Broj stepeni slobode po elementu: 6			
Koordinate čvorova			
Čvor	X[m]	Y[m]	
1	0.00	0.00	
2	0.00	4.00	
3	3.00	4.00	
4	6.00	4.00	
5	6.00	0.00	
Povezanost elemenata			
Element	Čvor_1	Čvor_2	
1	1	2	
2	2	3	
3	3	4	
4	4	5	
Karakteristike elemenata			
Element	E[MPa]	A[m^2]	I[m^4]
1	3e+07	0.24	0.0072
2	3e+07	0.24	0.0072
3	3e+07	0.24	0.0072
4	3e+07	0.24	0.0072
Čvorno opterećenje			
Čvor	Fx[kN]	Fy[kN]	M[kNm]
1	0	0	0
2	1	0	0
3	0	-1	0
4	0	0	0
5	0	0	0

\*\*\*\*\* ISPIS REZULTATA PRORAČUNA \*\*\*\*\*

KORAK 1

Faktor opterećenja: L1 = 436.003

Ukupni faktor opterećenja: L = 436.003

Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 4.

Pomjeranja čvorova

Element	X1[mm]	Y1[mm]	Fi1[rad]	X2[mm]	Y2[mm]	Fi2[rad]
1	0.00	-11.39	-0.00112	-0.05	-15.87	-0.00112
2	15.87	-0.05	-0.00112	15.69	-1.45	0.00084
3	15.69	-1.45	0.00084	15.51	-0.19	-0.00237
4	0.19	15.51	-0.00237	0.00	0.00	0.00000

Sile u elementima

Element	Fx1[kN]	Fy1[kN]	M1[kNm]	Fx2[kN]	Fy2[kN]	M2[kNm]
1	94.00	0.00	0.00	-94.00	0.00	0.00
2	436.00	94.00	0.00	-436.00	-94.00	282.00
3	436.00	-342.00	-282.00	-436.00	342.00	-744.01
4	342.00	436.00	744.01	-342.00	-436.00	1000.00

KORAK 2

Faktor opterećenja: L2 = 63.997

Ukupni faktor opterećenja: L = 500.000

Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 3.

Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 4.

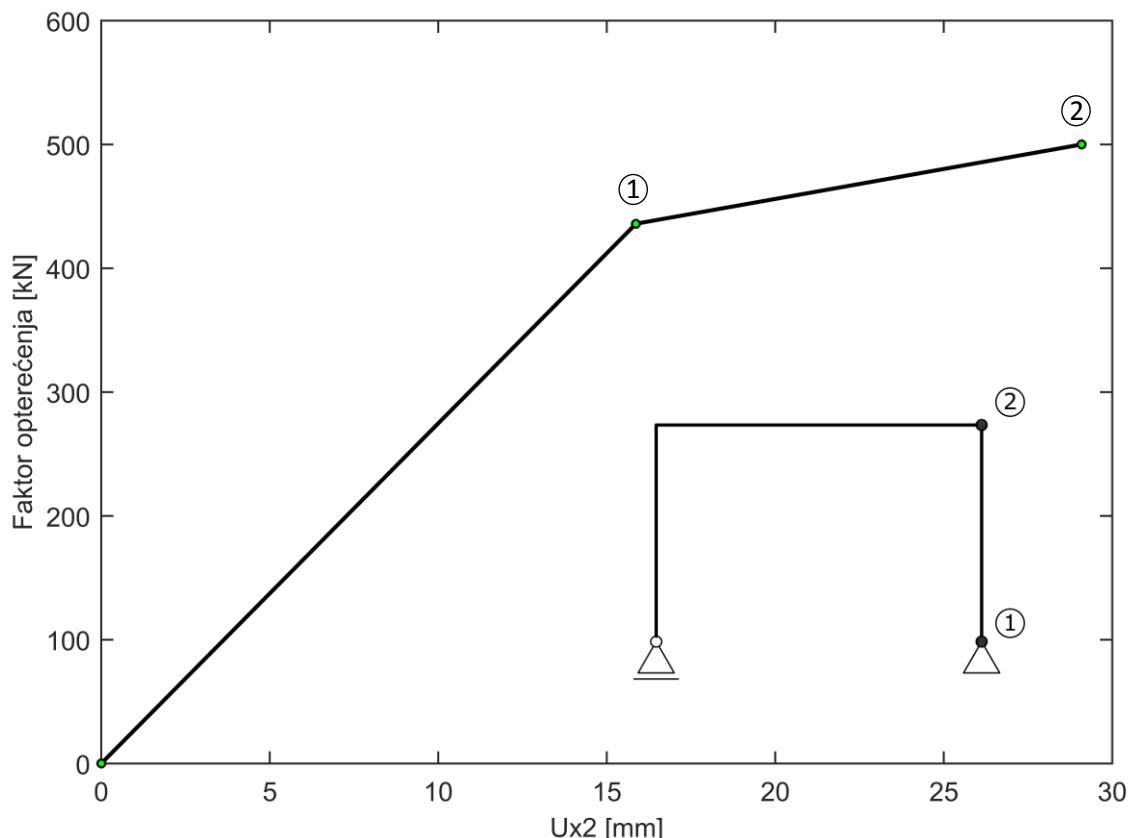
Pomjeranja čvorova

Element	X1[mm]	Y1[mm]	Fi1[rad]	X2[mm]	Y2[mm]	Fi2[rad]
1	0.00	-26.65	-0.00061	-0.05	-29.09	-0.00061
2	29.09	-0.05	-0.00061	28.88	-0.14	0.00113
3	28.88	-0.14	0.00113	28.67	-0.23	-0.00408
4	0.23	28.67	-0.00408	0.00	0.00	-0.00408

Sile u elementima

Element	Fx1[kN]	Fy1[kN]	M1[kNm]	Fx2[kN]	Fy2[kN]	M2[kNm]
1	83.33	0.00	0.00	-83.33	0.00	0.00
2	500.00	83.33	0.00	-500.00	-83.33	250.00
3	500.00	-416.67	-250.00	-500.00	416.67	-1000.00
4	416.67	500.00	1000.00	-416.67	-500.00	1000.00

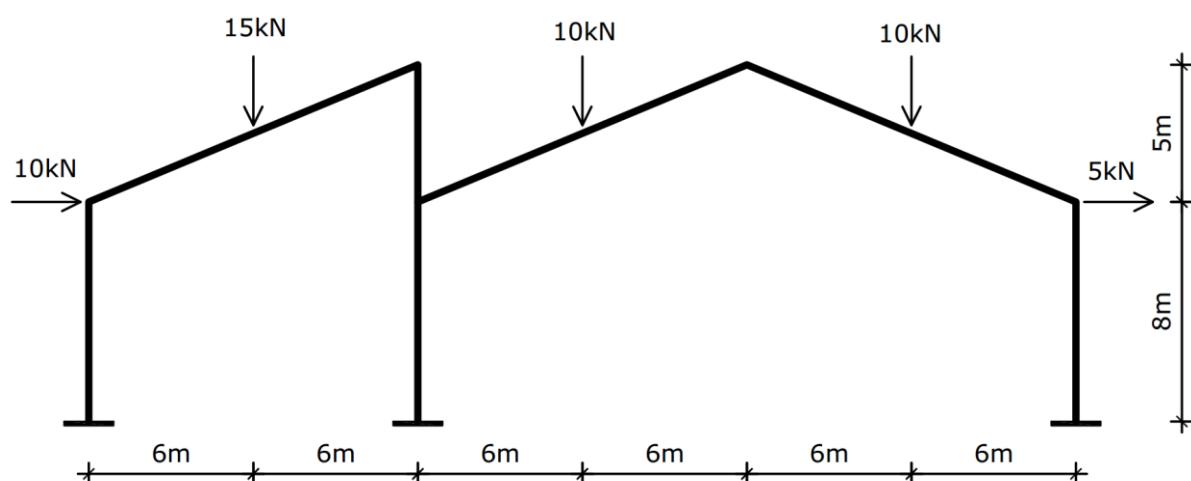
**Komentar:** Iz priloženog vidljivo je da se prvi plastični zglob formira u drugom čvoru elementa 4, što globalno predstavlja čvor 5 pri opterećenju od 436 kN, a da se drugi plastični zglob formira u drugom čvoru elementa 3 tj. prvom čvoru elementa 4, što globalno predstavlja čvor 4 pri opterećenju od 500 kN, što predstavlja faktor graničnog opterećenja. Kada je zadatak rađen metodom ravnoteže za faktor graničnog opterećenja je dobivena vrijednosti polovine momenta plastičnosti. Za numerički vrijednost momenta plastičnosti u ovom primjeru korištena je vrijednosti od 1000 kNm, pa faktor graničnog opterećenja iznosi pola od toga tj. 500 kNm, što je i dobiveno.



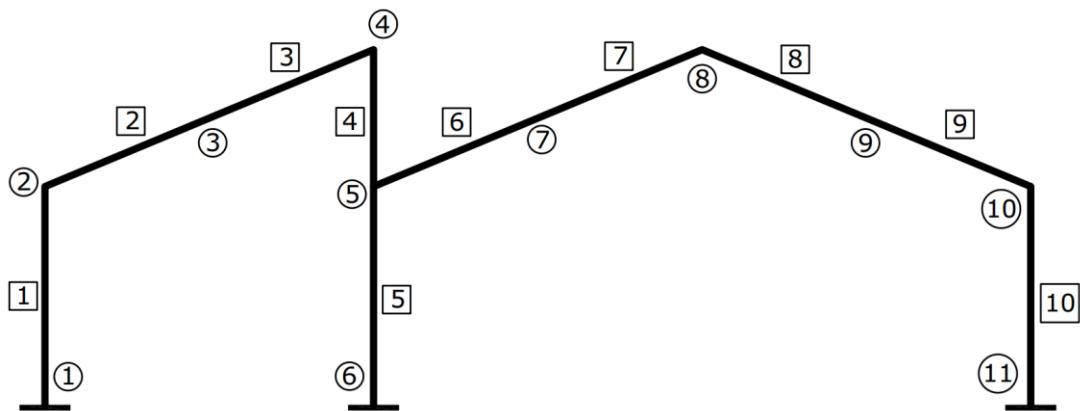
**Slika 41:** Dijagram  $\lambda - U_{x2}$  uz prikaz redoslijeda formiranja plastičnih zglobova

#### 5.2.2.2/. PRIMJER 2

Koristeći prethodno opisani program izračunati faktor graničnog opterećenja okvira sa slike 42 i prikazati dijagram  $\lambda-U_{x3}$ , te redoslijed formiranja plastičnih zglobova.  $E = 2 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$ ,  $A = 0.01 \text{ m}^2$ ,  $I = 0.001 \text{ m}^4$ . Grede na kojima djeluju vertikalne sile od 10kN imaju moment plastičnosti od 96kNm, dok preostali elementi imaju moment plastičnosti od 48kNm.



**Slika 42:** Okvir sa opterećenjem <sup>[10]</sup>



**Slika 43:** Oznake čvorova i elemenata

Slijedi ulazni fajl primjera 2, *up\_2.m* i izlazni fajl *o\_rp\_2.txt*. Kako je izlazni fajl poprilično dug, to će se samo dati vrijednosti faktora opterećenja i mjesto formiranja plastičnog zgloba po koracima.

#### Fajl: *up\_2.m*

```
% Fajl: up_2.m

% Definisanje globalnih varijabli
global bc be bcpe bsskpc bsskpe bssk kc pe kmipp pru ru optnc zglob mp

% Format prikaza numeričkih varijabli
format short g

% ##### Početak unosa podataka #####
bc = 11; % Broj čvorova
be = 10; % Broj elemenata
bcpe = 2; % Broj čvorova po elementu
bsskpc = 3; % Broj stepeni slobode kretanja po čvoru
bsskpe = bcpe * bsskpc; % Broj stepeni slobode kretanja po elementu
```

```
% Koordinate čvorova X i Y
% kc = zeros(bc, 2) - dimenzije matrice "kc"
kc = [ 0,    0;      % X i Y čvora 1
       0,    8;      % X i Y čvora 2
       6,   10.5;    % X i Y čvora 3
      12,   13;      % X i Y čvora 4
      12,    8;      % X i Y čvora 5
      12,    0;      % X i Y čvora 6
      18,   10.5;    % X i Y čvora 7
      24,   13;      % X i Y čvora 8
      30,   10.5;    % X i Y čvora 9
      36,    8;      % X i Y čvora 10
      36,    0];     % X i Y čvora 11

% Povezanost elemenata
% pe = zeros(be, 2) - dimenzije matrice "pe"
pe = [1, 2;      % Prvi i drugi čvor elementa 1
      2, 3;      % Prvi i drugi čvor elementa 2
      3, 4;      % Prvi i drugi čvor elementa 3
      4, 5;      % Prvi i drugi čvor elementa 4
```

```

5,    6;    % Prvi i drugi čvor elementa 5
5,    7;    % Prvi i drugi čvor elementa 6
7,    8;    % Prvi i drugi čvor elementa 7
8,    9;    % Prvi i drugi čvor elementa 8
9,    10;   % Prvi i drugi čvor elementa 9
10,   11];  % Prvi i drugi čvor elementa 10

% Karakteristike materijala i poprečnog presjeka
% kmipp = zeros(be, 3) - dimenzije matrice "kmipp"
kmipp = [2e8,    0.01,    0.001;    % E, A i I elementa 1
          2e8,    0.01,    0.001;    % E, A i I elementa 2
          2e8,    0.01,    0.001;    % E, A i I elementa 3
          2e8,    0.01,    0.001;    % E, A i I elementa 4
          2e8,    0.01,    0.001;    % E, A i I elementa 5
          2e8,    0.01,    0.001;    % E, A i I elementa 6
          2e8,    0.01,    0.001;    % E, A i I elementa 7
          2e8,    0.01,    0.001;    % E, A i I elementa 8
          2e8,    0.01,    0.001;    % E, A i I elementa 9
          2e8,    0.01,    0.001];   % E, A i I elementa 10

% Početni rubni uslovi - pru
pru = ones(bc, bsskpc);                      % Inicijalizacija jedinične matrice pru
pru(1, 1) = 0; pru(1, 2) = 0; pru(1, 3) = 0;  % Rubni uslov čvora 1
pru(6, 1) = 0; pru(6, 2) = 0; pru(6, 3) = 0;  % Rubni uslov čvora 6
pru(11, 1) = 0; pru(11, 2) = 0; pru(11, 3) = 0; % Rubni uslov čvora 11

% Petlja za brojanje slobodnih stepeni slobode kretanja
bssk = 0;                                     % Broj stepeni slobode kretanja
ru = zeros(bc, bsskpc);  % Rubni uslovi
for i = 1:bc
    for j = 1:bsskpc
        if pru(i, j) ~= 0
            bssk = bssk + 1;
            ru(i, j) = bssk;
        end
    end
end

%zglobovi
zglob = ones(be, 2);  % Inicijalizacija jedinične matrice zglob

% Opterećenje na čvoru - optnc
optnc = zeros(bc, bsskpc);                    % Inicijalizacija nulte matrice optnc
optnc(2, :) = [10,     0,     0];   % Opterećenje u čvoru 2
optnc(3, :) = [ 0,    -15,     0];   % Opterećenje u čvoru 3
optnc(7, :) = [ 0,    -10,     0];   % Opterećenje u čvoru 7
optnc(9, :) = [ 0,    -10,     0];   % Opterećenje u čvoru 9
optnc(10, :) = [ 5,     0,     0];   % Opterećenje u čvoru 10

% Čvor za dijagram - czd
czd = zeros(be, 6);  % Inicijalizacija nulte matrice czd
czd(2, 5) = 1;       % Horizontalno pomjeranje drugog čvora elementa 2

% Moment plastičnosti - mp
mp = ones(be, 2);  % Inicijalizacija jedinične matrice mp
mp = 48 * mp;       % Postavljanje da svi elementi imaju Mp od 48 kNm
% Popravljanje Mp za elemente 6, 7, 8 i 9 koji imaju MP od 96 kNm
mp([6 7 8 9], :) = [96 96;
                     96 96];

```

```
96 96;  
96 96];  
  
% ##### Kraj unosa podataka #####
```

**Fajl: o\_rp\_2.txt**

Rezultati proračuna se upoređuju sa rezultatima prema [10].

```
***** ISPIS REZULTATA PRORAČUNA *****
```

**KORAK 1**

Faktor opterećenja: L1 = 0.933  
Ukupni faktor opterećenja: L = 0.933  
Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 10.

**KORAK 2**

Faktor opterećenja: L2 = 0.185  
Ukupni faktor opterećenja: L = 1.118  
Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 10.

**KORAK 3**

Faktor opterećenja: L3 = 0.215  
Ukupni faktor opterećenja: L = 1.333  
Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 1.

**KORAK 4**

Faktor opterećenja: L4 = 0.036  
Ukupni faktor opterećenja: L = 1.369  
Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 3.  
Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 4.

**KORAK 5**

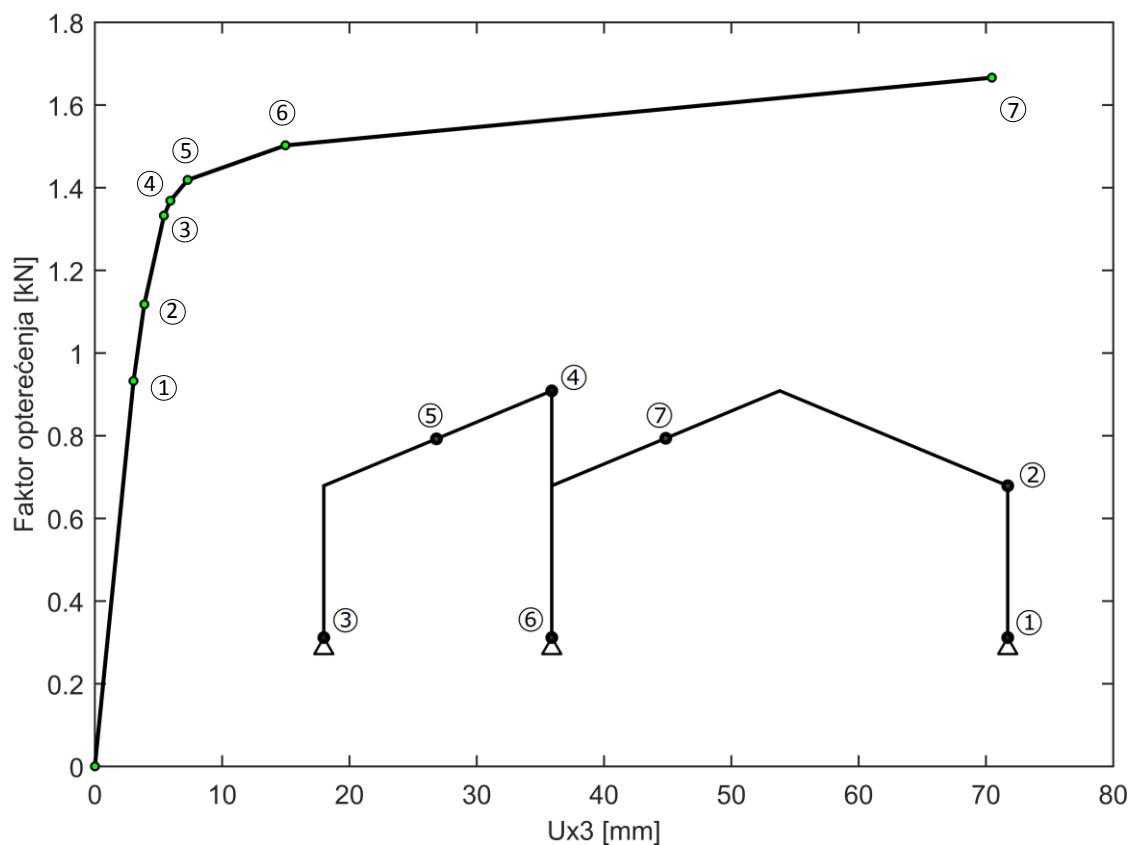
Faktor opterećenja: L5 = 0.050  
Ukupni faktor opterećenja: L = 1.419  
Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 2.  
Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 3.

**KORAK 6**

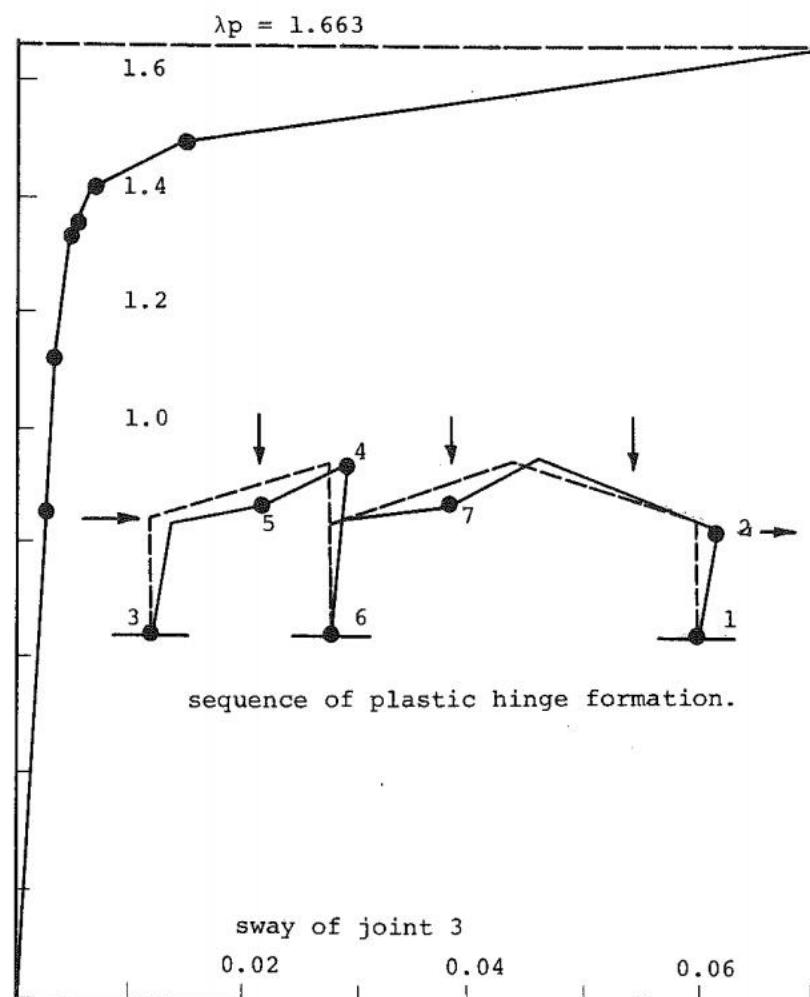
Faktor opterećenja: L6 = 0.084  
Ukupni faktor opterećenja: L = 1.502  
Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 5.

**KORAK 7**

Faktor opterećenja: L7 = 0.164  
Ukupni faktor opterećenja: L = 1.666  
Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 6.  
Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 7.



**Slika 44:** Dijagram  $\lambda$  –  $U_{x3}$  uz prikaz redoslijeda formiranja plastičnih zglobova

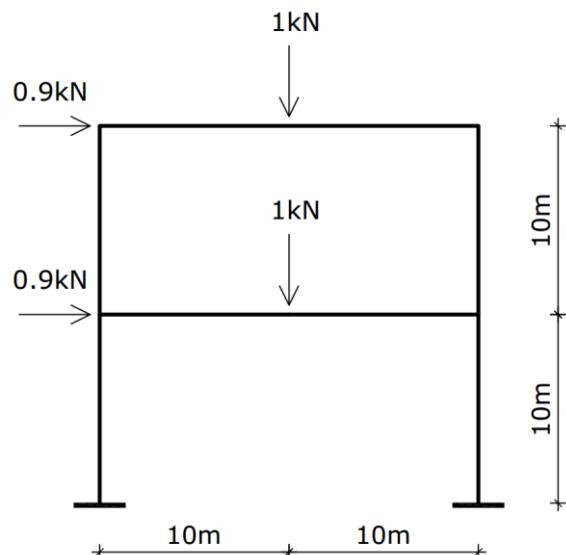


**Slika 45:** Dijagram  $\lambda$  –  $U_{x3}$  uz prikaz redoslijeda formiranja plastičnih zglobova <sup>[10]</sup>

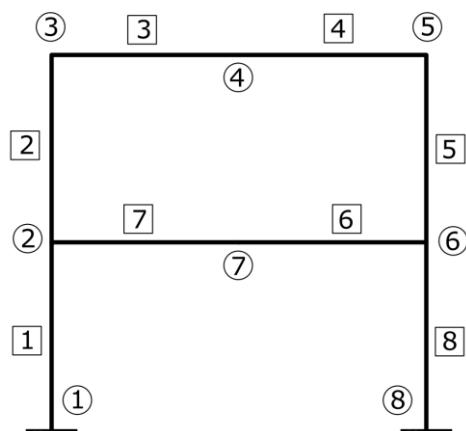
Vidljivo je da su rezultati identični što potvrđuje na ispravnost proračuna napravljenim programom.

### 5.2.2.3/. PRIMJER 3

Koristeći napravljeni program izračunati faktor graničnog opterećenja okvira sa slike 46 i prikazati dijagram  $\lambda-U_{x5}$ , te redoslijed formiranja plastičnih zglobova.  $E = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ ,  $A = 1\text{m}^2$ ,  $I = 1\text{m}^4$ . Za sve elemente  $M_p = 200 \text{ kNm}$ . Zbog veličine fajla o\_rp\_3.txt se ne prikazuje čitav već samo dio sa faktorima opterećenja uz mesta formiranja plastičnih zglobova po koracima.



**Slika 46:** Okvir sa opterećenjem [1]



**Slika 47:** Oznake čvorova i elemenata

Fajl: up\_3.m

```
% Fajl: up_3.m

% Definisanje globalnih varijabli
global bc be bcpe bsskpc bsskpe bssk kc pe kmipp pru ru optnc zglob mp

% Format prikaza numeričkih varijabli
format short g

% ##### Početak unosa podataka #####
bc = 8; % Broj čvorova
be = 8; % Broj elemenata
bcpe = 2; % Broj čvorova po elementu
bsskpc = 3; % Broj stepeni slobode kretanja po čvoru
bsskpe = bcpe * bsskpc; % Broj stepeni slobode kretanja po elementu
```

```
% Koordinate čvorova X i Y
% kc = zeros(bc, 2) - dimenzije matrice "kc"
kc = [ 0,      0;      % X i Y čvora 1
       0,      10;     % X i Y čvora 2
       0,      20;     % X i Y čvora 3
      10,      20;    % X i Y čvora 4
      20,      20;    % X i Y čvora 5
      20,      10;    % X i Y čvora 6
      10,      10;    % X i Y čvora 7
      20,      0];    % X i Y čvora 8

% Povezanost elemenata
% pe = zeros(be, 2) - dimenzije matrice "pe"
pe = [1, 2;      % Prvi i drugi čvor elementa 1
      2, 3;      % Prvi i drugi čvor elementa 2
      3, 4;      % Prvi i drugi čvor elementa 3
      4, 5;      % Prvi i drugi čvor elementa 4
      5, 6;      % Prvi i drugi čvor elementa 5
      6, 7;      % Prvi i drugi čvor elementa 6
      7, 2;      % Prvi i drugi čvor elementa 7
      6, 8];    % Prvi i drugi čvor elementa 8

% Karakteristike materijala i poprečnog presjeka
% kmipp = zeros(be, 3) - dimenzije matrice "kmipp"
kmipp = [3e7,      1,      1;      % E, A i I elementa 1
          3e7,      1,      1;      % E, A i I elementa 2
          3e7,      1,      1;      % E, A i I elementa 3
          3e7,      1,      1;      % E, A i I elementa 4
          3e7,      1,      1;      % E, A i I elementa 5
          3e7,      1,      1;      % E, A i I elementa 6
          3e7,      1,      1;      % E, A i I elementa 7
          3e7,      1,      1];    % E, A i I elementa 8

% Početni rubni uslovi - pru
pru = ones(bc, bsskpc);    % Inicijalizacija jedinične matrice pru
pru(1, 1) = 0; pru(1, 2) = 0; pru(1, 3) = 0;    % Rubni uslov čvora 1
pru(8, 1) = 0; pru(8, 2) = 0; pru(8, 3) = 0;    % Rubni uslov čvora 8

% Petlja za brojanje slobodnih stepeni slobode kretanja
bssk = 0;                  % Broj stepeni slobode kretanja
ru = zeros(bc, bsskpc);    % Rubni uslovi
for i = 1:bc
    for j = 1:bsskpc
        if pru(i, j) ~= 0
            bssk = bssk + 1;
            ru(i, j) = bssk;
        end
    end
end

% Zglobovi
zglob = ones(be, 2);    % Inicijalizacija jedinične matrice zglob

% Opterećenje na čvoru - optnc
optnc = zeros(bc, bsskpc);    % Inicijalizacija nulte matrice optnc
optnc(2, :) = [0.9,      0,      0];    % Opterećenje u čvoru 2
optnc(3, :) = [0.9,      0,      0];    % Opterećenje u čvoru 3
optnc(4, :) = [0,      -1,      0];    % Opterećenje u čvoru 4
optnc(7, :) = [0,      -1,      0];    % Opterećenje u čvoru 7
```

```
% Čvor za dijagram - czd
czd = zeros(be,6); % Inicijalizacija nulte matrice czd
czd(4, 5) = 1; % Horizontalno pomjeranje drugog čvora elementa 4

% Moment plastičnosti
mp = 200 * ones(be,2); % Uvećavanje jedinične matrice mp za 200 kNm

% ##### Kraj unosa podataka #####
```

**Fajl: o\_rp\_3.txt**

\*\*\*\*\* ISPIS REZULTATA PRORAČUNA \*\*\*\*\*

**KORAK 1**

Faktor opterećenja: L1 = 29.151  
Ukupni faktor opterećenja: L = 29.151  
Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 6.

**KORAK 2**

Faktor opterećenja: L2 = 1.625  
Ukupni faktor opterećenja: L = 30.776  
Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 8.

**KORAK 3**

Faktor opterećenja: L3 = 1.239  
Ukupni faktor opterećenja: L = 32.014  
Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 1.

**KORAK 4**

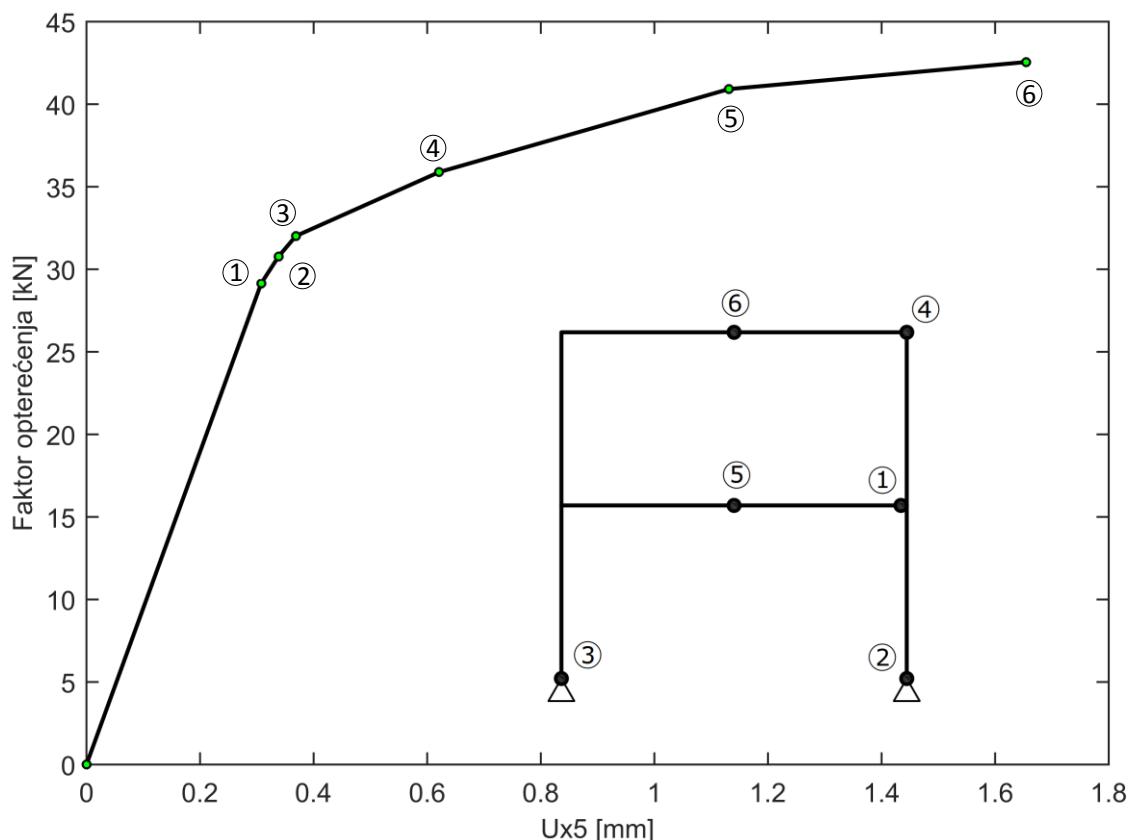
Faktor opterećenja: L4 = 3.872  
Ukupni faktor opterećenja: L = 35.886  
Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 4.  
Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 5.

**KORAK 5**

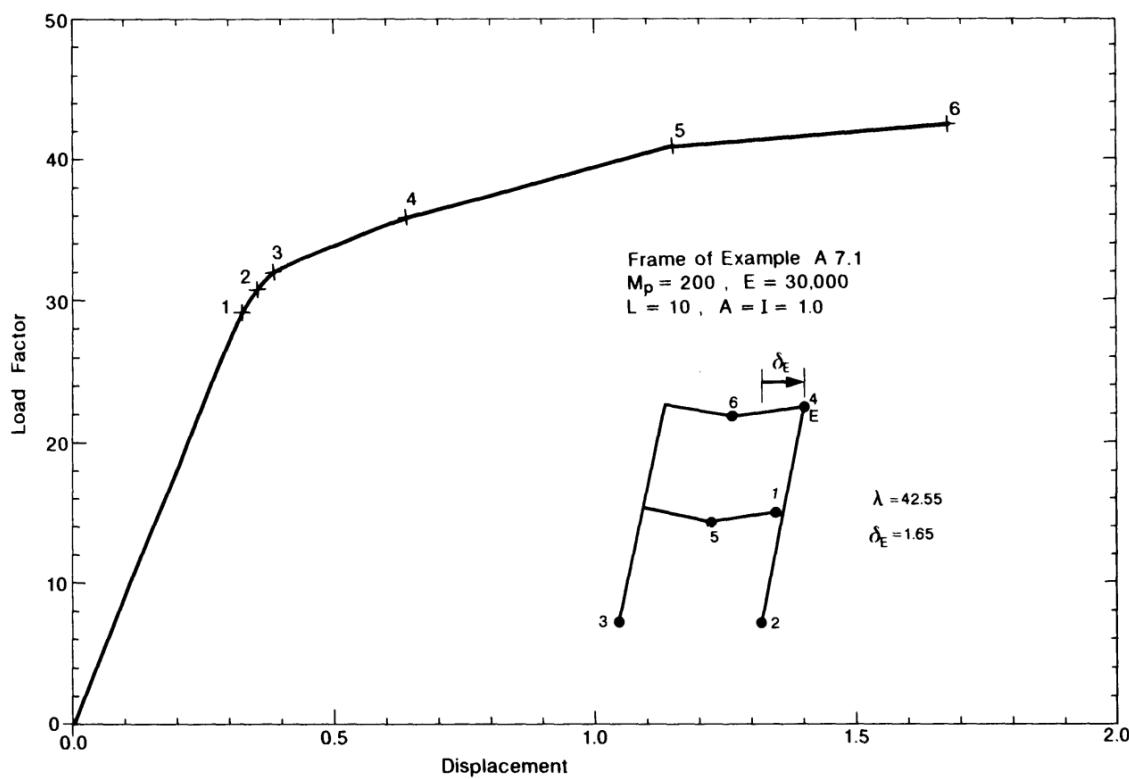
Faktor opterećenja: L5 = 5.027  
Ukupni faktor opterećenja: L = 40.913  
Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 6.  
Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 7.

**KORAK 6**

Faktor opterećenja: L6 = 1.640  
Ukupni faktor opterećenja: L = 42.553  
Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 3.  
Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 4.



**Slika 48:** Dijagram  $\lambda$  –  $U_{x5}$  uz prikaz redoslijeda formiranja plastičnih zglobova

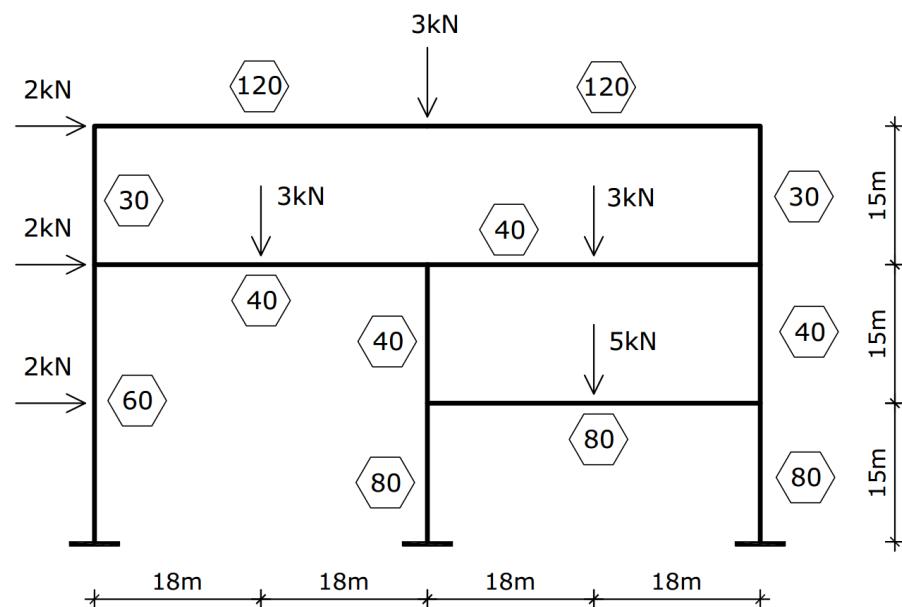


**Slika 49:** Dijagram  $\lambda$  –  $U_{x5}$  uz prikaz redoslijeda formiranja plastičnih zglobova <sup>[1]</sup>

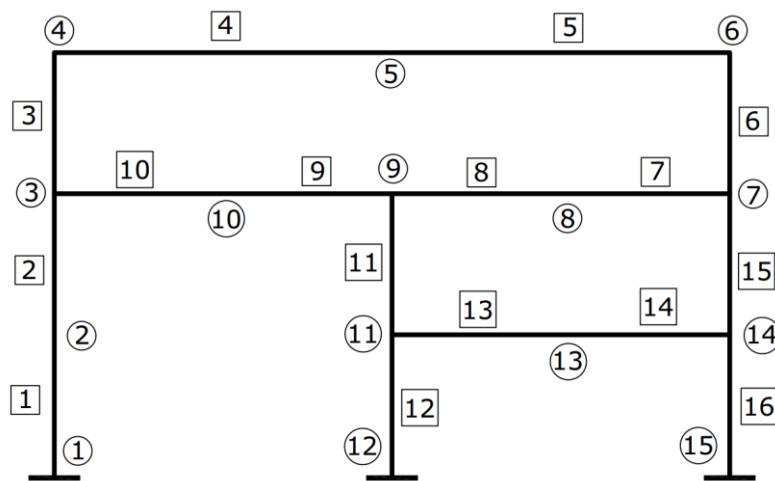
Rezultati su identični.

#### 5.2.2.4/. PRIMJER 4

Koristeći napravljeni program izračunati faktor graničnog opterećenja okvira sa slike 50 i prikazati dijagram  $\lambda$ - $U_{x4}$ , te redoslijed formiranja plastičnih zglobova.  $E = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ ,  $A = 1\text{m}^2$ ,  $I = 1\text{m}^4$ . Momenti plastičnosti elemenata su prikazani na sliki 43. Zbog veličine fajla o\_rp\_4.txt se ne prikazuje čitav već samo dio sa faktorima opterećenja uz mjesta formiranja plastičnih zglobova po koracima.



**Slika 50:** Okvir sa opterećenjem i vrijednostima momenta plastičnosti [1]



**Slika 51:** Oznake čvorova i elemenata

Fajl: up\_4.m

```
% Fajl: up_4.m

% Definisanje globalnih varijabli
global bc be bcpe bsskpc bsskpe bssk kc pe kmipp pru ru optnc zglob mp

% Format prikaza numeričkih varijabli
format short g

% ##### Početak unosa podataka #####
bc = 15; % Broj čvorova
be = 16; % Broj elemenata
bcpe = 2; % Broj čvorova po elementu
bsskpc = 3; % Broj stepeni slobode kretanja po čvoru
bsskpe = bcpe * bsskpc; % Broj stepeni slobode kretanja po elementu

% Koordinate čvorova X i Y
% kc = zeros(bc, 2) - dimenzije matrice "kc"
kc = [ 0, 0; % X i Y čvora 1
       0, 15; % X i Y čvora 2
       0, 30; % X i Y čvora 3
       ...]; % Ostale koordinate
```

```

0,    45;    % x i Y čvora 4
36,   45;    % x i Y čvora 5
72,   45;    % x i Y čvora 6
72,   30;    % x i Y čvora 7
54,   30;    % x i Y čvora 8
36,   30;    % x i Y čvora 9
18,   30;    % x i Y čvora 10
36,   15;    % x i Y čvora 11
36,   0;     % x i Y čvora 12
54,   15;    % x i Y čvora 13
72,   15;    % x i Y čvora 14
72,   0];    % x i Y čvora 15

```

#### % Povezanost elemenata

```

% pe = zeros(be, 2) - dimenzije matrice "pe"
pe = [ 1,    2;    % Prvi i drugi čvor elementa 1
       2,    3;    % Prvi i drugi čvor elementa 2
       3,    4;    % Prvi i drugi čvor elementa 3
       4,    5;    % Prvi i drugi čvor elementa 4
       5,    6;    % Prvi i drugi čvor elementa 5
       6,    7;    % Prvi i drugi čvor elementa 6
       7,    8;    % Prvi i drugi čvor elementa 7
       8,    9;    % Prvi i drugi čvor elementa 8
       9,   10;    % Prvi i drugi čvor elementa 9
      10,   3;    % Prvi i drugi čvor elementa 10
      9,   11;    % Prvi i drugi čvor elementa 11
      11,   12;    % Prvi i drugi čvor elementa 12
      11,   13;    % Prvi i drugi čvor elementa 13
      13,   14;    % Prvi i drugi čvor elementa 14
      7,   14;    % Prvi i drugi čvor elementa 15
     14,   15];   % Prvi i drugi čvor elementa 16

```

#### % Karakteristike materijala i poprečnog presjeka

```

% kmipp = zeros(be, 3) - dimenzije matrice "kmipp"
kmipp = [3e7,    1,    1;    % E, A i I elementa 1
          3e7,    1,    1;    % E, A i I elementa 2
          3e7,    1,    1;    % E, A i I elementa 3
          3e7,    1,    1;    % E, A i I elementa 4
          3e7,    1,    1;    % E, A i I elementa 5
          3e7,    1,    1;    % E, A i I elementa 6
          3e7,    1,    1;    % E, A i I elementa 7
          3e7,    1,    1;    % E, A i I elementa 8
          3e7,    1,    1;    % E, A i I elementa 9
          3e7,    1,    1;    % E, A i I elementa 10
          3e7,    1,    1;    % E, A i I elementa 11
          3e7,    1,    1;    % E, A i I elementa 12
          3e7,    1,    1;    % E, A i I elementa 13
          3e7,    1,    1;    % E, A i I elementa 14
          3e7,    1,    1;    % E, A i I elementa 15
          3e7,    1,    1];   % E, A i I elementa 16

```

#### % Početni rubni uslovi - pru

```

pru = ones(bc, bsskpc);  % Inicijalizacija jedinične matrice pru
pru(1, 1) = 0; pru(1, 2) = 0; pru(1, 3) = 0;    % Rubni uslov čvora 1
pru(12, 1) = 0; pru(12, 2) = 0; pru(12, 3) = 0;    % Rubni uslov čvora 12
pru(15, 1) = 0; pru(15, 2) = 0; pru(15, 3) = 0;    % Rubni uslov čvora 15

```

```
% Petlja za brojanje slobodnih stepeni slobode kretanja
bssk = 0; % Broj stepeni slobode kretanja
ru = zeros(bc, bsskpc); % Rubni uslovi
for i = 1:bc
    for j = 1:bsskpc
        if pru(i, j) ~= 0
            bssk = bssk + 1;
            ru(i, j) = bssk;
        end
    end
end

% Zglobovi
zglob = ones(be, 2); % Inicijalizacija jedinične matrice zglob

% Opterećenje na čvoru - optnc
optnc = zeros(bc, bsskpc); % Inicijalizacija nulte matrice optnc
optnc(2, :) = [ 2, 0, 0]; % opterećenje u čvoru 2
optnc(3, :) = [ 2, 0, 0]; % opterećenje u čvoru 3
optnc(4, :) = [ 2, 0, 0]; % opterećenje u čvoru 4
optnc(5, :) = [ 0, -3, 0]; % opterećenje u čvoru 5
optnc(8, :) = [ 0, -3, 0]; % opterećenje u čvoru 8
optnc(10, :) = [0, -3, 0]; % opterećenje u čvoru 10
optnc(13, :) = [0, -5, 0]; % opterećenje u čvoru 13

% Čvor za dijagram - czd
czd = zeros(be, bsskpe); % Inicijalizacija nulte matrice czd
czd(3, 5) = 1; % Horizontalno pomjeranje drugog čvora elementa 4

% Moment plastičnosti
mp = 40 * ones(be, 2); % Inicijalizacija matrice mp sa Mp = 40kNm
% Popravljanje mp
mp([1, 2], :) = [60, 60; 60, 60]; % 60 kNm el. 1 i 2
mp([3, 6], :) = [30, 30; 30, 30]; % 30 kNm el. 3 i 6
mp([4, 5], :) = [120, 120; 120, 120]; % 120 kNm el. 4 i 5
% 80 kNm el. 12, 13, 14 i 16
mp([12, 13, 14, 16], :) = [80, 80; 80, 80; 80, 80; 80, 80];

%
##### Kraj unosa podataka #####

```

**Fajl: o\_rp\_4.txt**

\*\*\*\*\* ISPIS REZULTATA PRORAČUNA \*\*\*\*\*

**KORAK 1**

Faktor opterećenja: L1 = 0.925  
Ukupni faktor opterećenja: L = 0.925  
Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 6.

**KORAK 2**

Faktor opterećenja: L2 = 0.346  
Ukupni faktor opterećenja: L = 1.272  
Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 7.

---

KORAK 3

---

Faktor opterećenja:  $L_3 = 0.180$   
Ukupni faktor opterećenja:  $L = 1.451$   
Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 9.

---

---

KORAK 4

---

Faktor opterećenja:  $L_4 = 0.191$   
Ukupni faktor opterećenja:  $L = 1.642$   
Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 6.

---

---

KORAK 5

---

Faktor opterećenja:  $L_5 = 0.050$   
Ukupni faktor opterećenja:  $L = 1.693$   
Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 15.

---

---

KORAK 6

---

Faktor opterećenja:  $L_6 = 0.021$   
Ukupni faktor opterećenja:  $L = 1.714$   
Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 11.

---

---

KORAK 7

---

Faktor opterećenja:  $L_7 = 0.140$   
Ukupni faktor opterećenja:  $L = 1.854$   
Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 14.

---

---

KORAK 8

---

Faktor opterećenja:  $L_8 = 0.032$   
Ukupni faktor opterećenja:  $L = 1.885$   
Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 9.  
Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 10.

---

---

KORAK 9

---

Faktor opterećenja:  $L_9 = 0.141$   
Ukupni faktor opterećenja:  $L = 2.027$   
Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 1.

---

---

KORAK 10

---

Faktor opterećenja:  $L_{10} = 0.007$   
Ukupni faktor opterećenja:  $L = 2.034$   
Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 11.

---

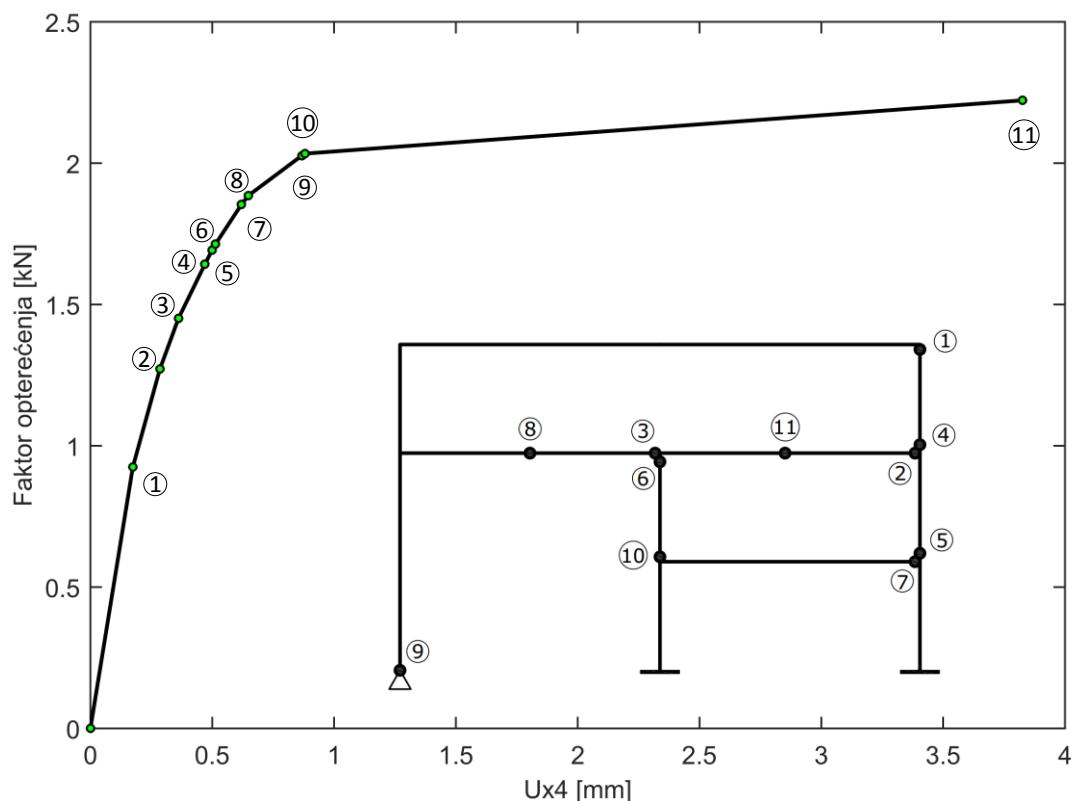
---

KORAK 11

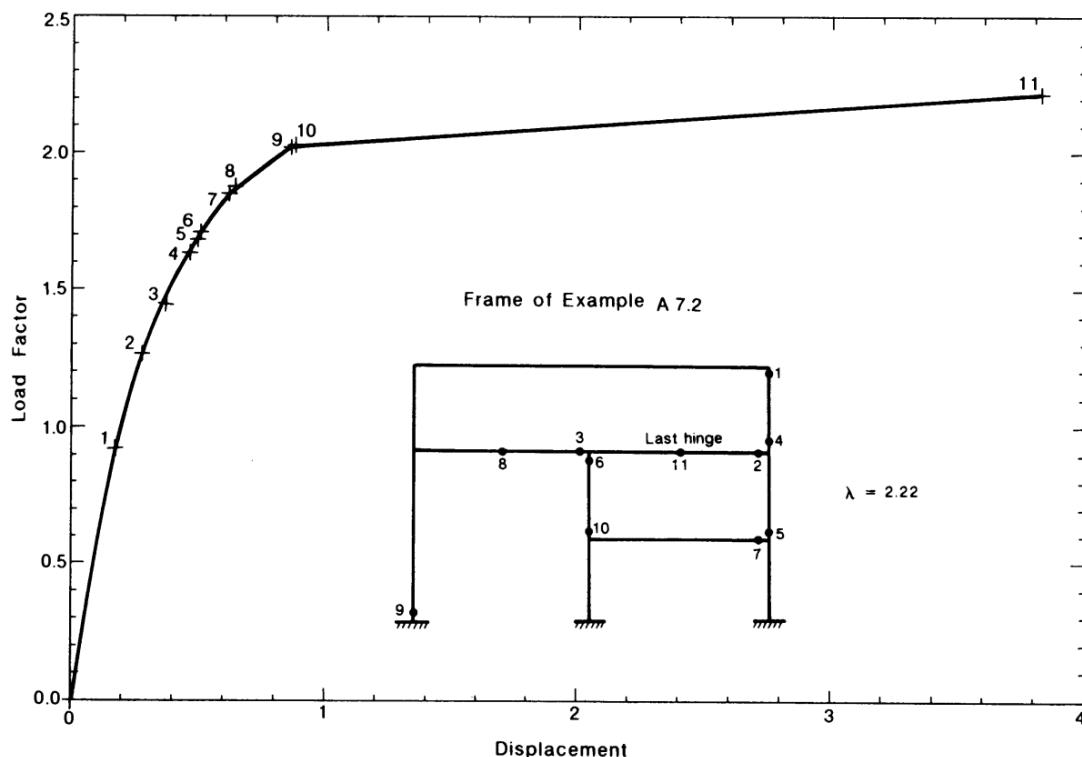
---

Faktor opterećenja:  $L_{11} = 0.188$   
Ukupni faktor opterećenja:  $L = 2.222$   
Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 7.  
Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 8.

---



**Slika 52:** Dijagram  $\lambda - U_{X4}$  uz prikaz redoslijeda formiranja plastičnih zglobova

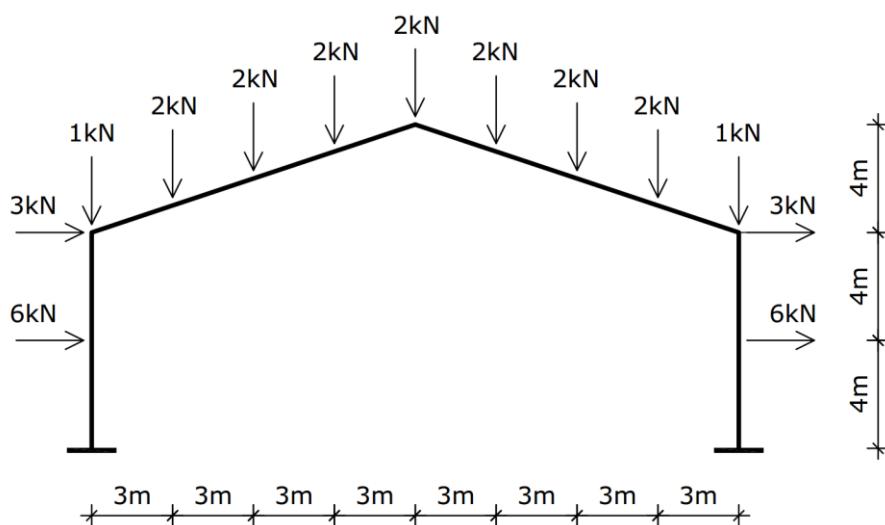
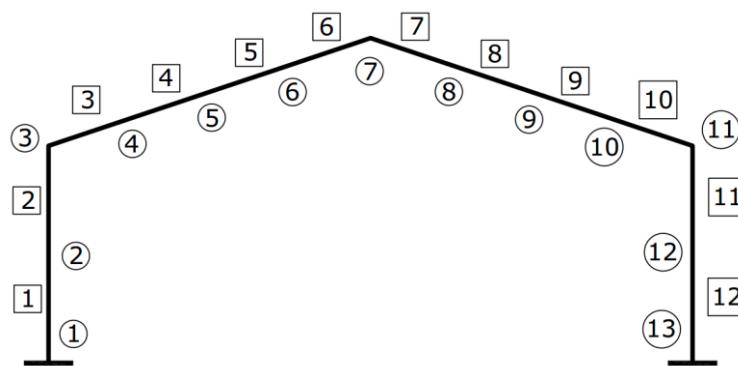


**Slika 53:** Dijagram  $\lambda - U_x$  uz prikaz redoslijeda formiranja plastičnih zglobova <sup>[1]</sup>

Rezultati su identični.

#### 5.2.2.5/. PRIMJER 5

Koristeći napravljeni program izračunati faktor graničnog opterećenja okvira sa slike 54 i prikazati dijagram  $\lambda - U_{X7}$ , te redoslijed formiranja plastičnih zglobova.  $E = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ ,  $A = 1 \text{ m}^2$ ,  $I = 1 \text{ m}^4$ . Primjer uraditi za dva slučaja. U prvom moment plastičnosti svih elemenata iznosi  $30.75 \text{ kNm}$ , a u drugom  $20 \text{ kNm}$ . Zbog veličine fajla o\_rp\_5.txt se ne prikazuje čitav već samo dio sa faktorima opterećenja uz mesta formiranja plastičnih zglobova po koracima.

**Slika 54:** Okvir sa opterećenjem [1]**Slika 55:** Oznake čvorova i elemenata**Fajl: up\_5.m**

```
% Fajl: up_5.m

% Definisanje globalnih varijabli
global bc be bcpe bsskpc bsskpe bssk kc pe kmipp pru ru optnc zglob mp

% Format prikaza numeričkih varijabli
format short g

% ##### Početak unosa podataka #####
bc = 13; % Broj čvorova
be = 12; % Broj elemenata
bcpe = 2; % Broj čvorova po elementu
bsskpc = 3; % Broj stepeni slobode kretanja po čvoru
bsskpe = bcpe * bsskpc; % Broj stepeni slobode kretanja po elementu

% Koordinate čvorova x i y
% kc = zeros(bc, 2) - dimenzije matrice "kc"
kc = [ 0,      0;    % x i y čvora 1
       0,      4;    % x i y čvora 2
       0,      8;    % x i y čvora 3
       3,      9;    % x i y čvora 4
       6,     10;    % x i y čvora 5
       9,     11;    % x i y čvora 6
      12,     12;    % x i y čvora 7
      15,     11;    % x i y čvora 8
      18,     10;    % x i y čvora 9
      21,      9;    % x i y čvora 10
```

```

24,      8;    % x i Y čvora 11
24,      4;    % x i Y čvora 12
24,      0];   % x i Y čvora 13

% Povezanost elemenata
% pe = zeros(be, 2) - dimenzije matrice "pe"
pe = [ 1,      2;    % Prvi i drugi čvor elementa 1
       2,      3;    % Prvi i drugi čvor elementa 2
       3,      4;    % Prvi i drugi čvor elementa 3
       4,      5;    % Prvi i drugi čvor elementa 4
       5,      6;    % Prvi i drugi čvor elementa 5
       6,      7;    % Prvi i drugi čvor elementa 6
       7,      8;    % Prvi i drugi čvor elementa 7
       8,      9;    % Prvi i drugi čvor elementa 8
       9,     10;   % Prvi i drugi čvor elementa 9
      10,     11;   % Prvi i drugi čvor elementa 10
      11,     12;   % Prvi i drugi čvor elementa 11
      12,     13];  % Prvi i drugi čvor elementa 12

% Karakteristike materijala i poprečnog presjeka
% kmipp = zeros(be, 3) - dimenzije matrice "kmipp"
kmipp = [3e7,     1,     1;    % E, A i I elementa 1
          3e7,     1,     1;    % E, A i I elementa 2
          3e7,     1,     1;    % E, A i I elementa 3
          3e7,     1,     1;    % E, A i I elementa 4
          3e7,     1,     1;    % E, A i I elementa 5
          3e7,     1,     1;    % E, A i I elementa 6
          3e7,     1,     1;    % E, A i I elementa 7
          3e7,     1,     1;    % E, A i I elementa 8
          3e7,     1,     1;    % E, A i I elementa 9
          3e7,     1,     1;    % E, A i I elementa 10
          3e7,     1,     1;    % E, A i I elementa 11
          3e7,     1,     1];  % E, A i I elementa 12

% Početni rubni uslovi - pru
pru = ones(bc, bsskpc);  % Inicijalizacija jedinične matrice pru
pru(1, 1) = 0; pru(1, 2) = 0; pru(1, 3) = 0;      % Rubni uslov čvora 1
pru(13, 1) = 0; pru(13, 2) = 0; pru(13, 3) = 0;  % Rubni uslov čvora 13

% Petlja za brojanje slobodnih stepeni slobode kretanja
bssk = 0;           % Broj stepeni slobode kretanja
ru = zeros(bc, bsskpc); % Rubni uslovi
for i = 1:bc
    for j = 1:bsskpc
        if pru(i, j) ~= 0
            bssk = bssk + 1;
            ru(i, j) = bssk;
        end
    end
end

% zglobovi
zglob = ones(be, 2); % Inicijalizacija jedinične matrice zglob

% Opterećenje na čvoru - optnc
optnc = zeros(bc, bsskpc);      % Inicijalizacija nulte matrice optnc
optnc(2, :) = [ 6,      0,      0]; % opterećenje u čvoru 2
optnc(3, :) = [ 3,     -1,      0]; % opterećenje u čvoru 3
optnc(4, :) = [ 0,     -2,      0]; % opterećenje u čvoru 4
optnc(5, :) = [ 0,     -2,      0]; % opterećenje u čvoru 5

```

```

optnc(6, :) = [ 0,      -2,      0]; % opterećenje u čvoru 6
optnc(7, :) = [ 0,      -2,      0]; % opterećenje u čvoru 7
optnc(8, :) = [ 0,      -2,      0]; % opterećenje u čvoru 8
optnc(9, :) = [ 0,      -2,      0]; % opterećenje u čvoru 9
optnc(10, :) = [0,      -2,      0]; % opterećenje u čvoru 10
optnc(11, :) = [3,      -1,      0]; % opterećenje u čvoru 11
optnc(12, :) = [6,      0,      0]; % opterećenje u čvoru 12

% Čvor za dijagram - czd
czd = zeros(be,6); % Inicijalizacija nulte matrice czd
czd(6, 5) = 1;       % Horizontalno pomjeranje drugog čvora elementa 6

% Moment plastičnosti
mp = 30.75 * ones(be,2); % Svi elementi sa Mp = 30.75kNm

%
##### Kraj unosa podataka #####

```

### Fajl: o\_rp\_5\_a.txt

\*\*\*\*\* ISPIS REZULTATA PRORAČUNA \*\*\*\*\*

#### KORAK 1

Faktor opterećenja: L1 = 0.597  
Ukupni faktor opterećenja: L = 0.597  
Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 12.

#### KORAK 2

Faktor opterećenja: L2 = 0.231  
Ukupni faktor opterećenja: L = 0.828  
Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 10.  
Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 11.

#### KORAK 3

Faktor opterećenja: L3 = 0.062  
Ukupni faktor opterećenja: L = 0.889  
Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 1.

#### KORAK 4

Faktor opterećenja: L4 = 0.111  
Ukupni faktor opterećenja: L = 1.000  
Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 5.  
Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 6.

### Fajl: o\_rp\_5\_b.txt

Za slučaj sa momentom od plastičnosti od 20 kNm samo se matrica mp mjenja, ostatak ulaznih podataka ostaje isti.

```

% Moment plastičnosti
mp = 20 * ones(be,2); % Svi elementi sa Mp = 20kNm

```

## \*\*\*\*\* ISPIS REZULTATA PRORAČUNA \*\*\*\*\*

## KORAK 1

Faktor opterećenja:  $L_1 = 0.388$   
 Ukupni faktor opterećenja:  $L = 0.388$   
 Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 12.

## KORAK 2

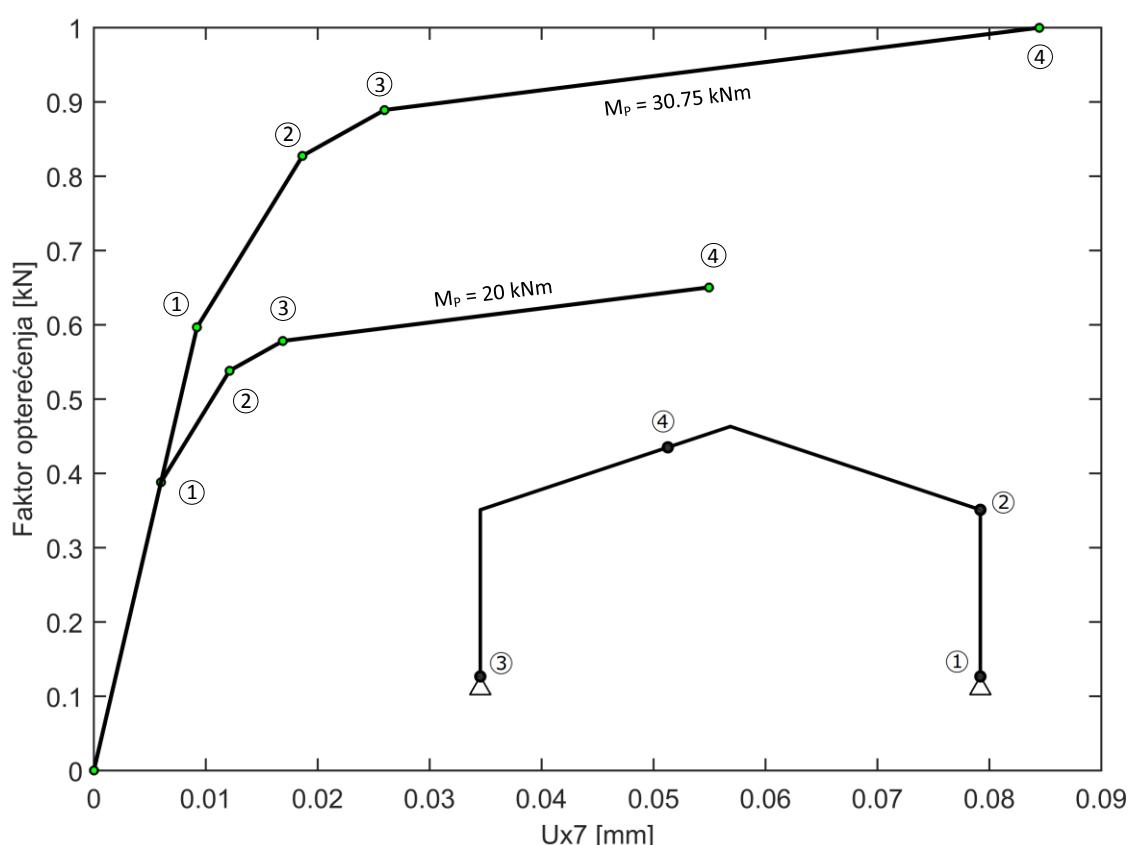
Faktor opterećenja:  $L_2 = 0.150$   
 Ukupni faktor opterećenja:  $L = 0.538$   
 Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 10.  
 Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 11.

## KORAK 3

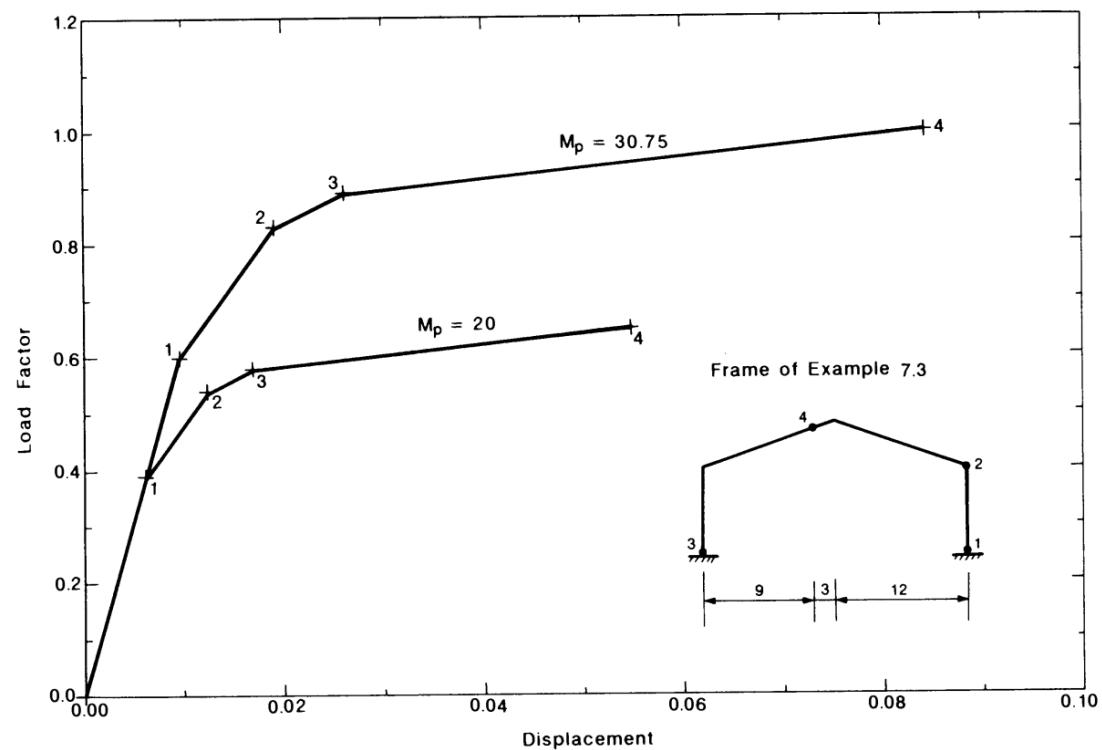
Faktor opterećenja:  $L_3 = 0.040$   
 Ukupni faktor opterećenja:  $L = 0.578$   
 Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 1.

## KORAK 4

Faktor opterećenja:  $L_4 = 0.072$   
 Ukupni faktor opterećenja:  $L = 0.650$   
 Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 5.  
 Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 6.



Slika 56: Dijagram  $\lambda - U_{x7}$  uz prikaz redoslijeda formiranja plastičnih zglobova



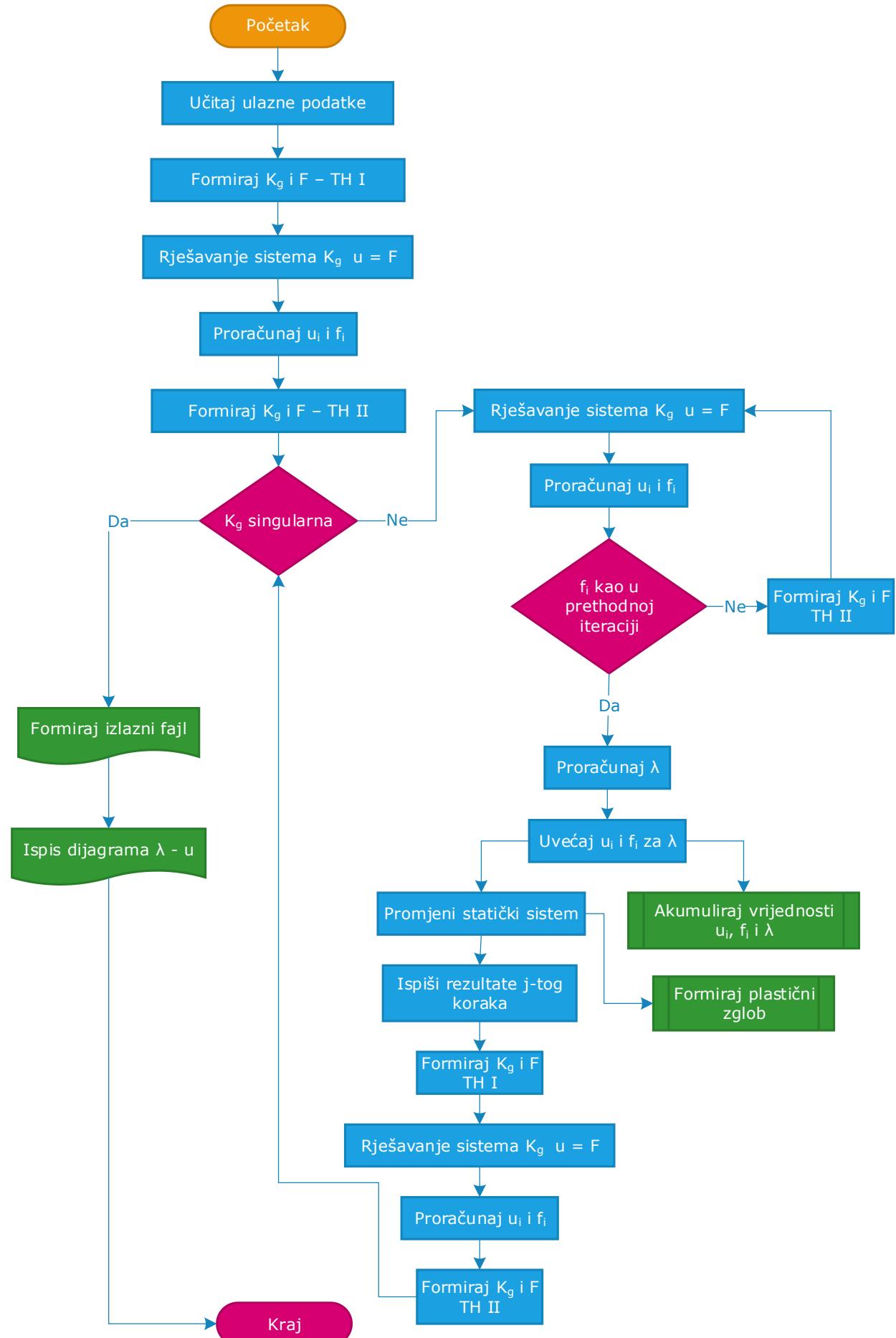
**Slika 57:** Dijagram  $\lambda - U_{X7}$  uz prikaz redoslijeda formiranja plastičnih zglobova <sup>[1]</sup>

Rezultati su identični.

## 5.3/. TEORIJA DRUGOG REDA

### 5.3.1/. RAČUNARSKI PROGRAM

#### 5.3.1.1/. ALGORITAM PROGRAMA



### 5.3.1.2/. IZVORNI KÔD

Kako je većinski dio kôda identičan programu za proračun po teoriji prvog reda to će se ovdje prikazati samo razlike u odnosu na kôd programa za proračun po teoriji prvog reda.

Glavna razlika je da se sada matrica krutosti sastoji od dva dijela, elastičnog i geometrijskog. Prvobitno je zamišljeno da se koriste približne geometrijske matrice krutosti, i to linearna koja uzima u obzir samo zakošenje elementa i konzistentna koja uzima u obzir i zakošenje i zakrivljenje elementa. Međutim došlo se do zaključka da kondenzovana konzistentna geometrijska matrica krutosti ne daje identične rezultate onim kada koristimo nekondenzovanu konzistentnu geometrijsku matricu krutosti. Naime konzistentna geometrijska matrica krutosti je pojednostavljena na taj način da je dobivena od tačne geometrijske matrice krutosti koja se razvija u Taylor-ov red uzimajući u obzir do maksimalno kvadratnog člana. Kondenzovana varijanta se dobiva kondenzujući tačnu geometrijsku matricu krutosti te zatim vršeći ponovo razvijanje u Taylor-ov red uzimajući do maksimalno kvadratnog člana. Ukoliko bi željeli da dobijemo kondenzovanu konzistentnu geometrijsku matricu krutosti vršeći statičku kondenzaciju na konzistentnoj matrici nećemo dobiti istu matricu kao kada uradimo statičku kondenzaciju na tačnoj geometrijskoj matrici krutosti a zatim izvršimo razvijanje u Taylor-ov red, kao što je to slučaj sa elastičnom matricom krutosti. Navedeno je dovodilo do toga da elementi kod kojih se koristi kondenzovana konzistentna matrica krutosti nemaju identične rezultate onim kada se ne koristi kondenzovana matrica krutosti, te da rezultati zavise od toga na kojem elementu u zajedničkom čvoru se nalazi zglob. Problem je moguće zaobići korištenjem nekondenzovane konzistentne matrice krutosti za svaki element, međutim navedeno iziskuje promjenu koncepta napravljenog programa, te je odlučeno da se ista matrica neće koristiti, već će se koristiti tačna geometrijska matrica krutosti. U nastavku sljede navedene matrice.

Tačna matrica krutosti po teoriji drugog reda (elastična + geometrijska) za normalnu silu pritiska:

$$k_e^{\text{II}} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12F_1 & 6LF_2 & 0 & -12F_1 & 6LF_2 \\ 0 & 6LF_2 & 4L^2F_3 & 0 & -6LF_2 & 2L^2F_4 \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12F_1 & -6LF_2 & 0 & 12F_1 & -6LF_2 \\ 0 & 6LF_2 & 2L^2F_4 & 0 & -6LF_2 & 4L^2F_3 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Gdje su:

$$F_1 = \frac{\omega^3 \cdot \sin(\omega)}{12\Delta_p}, \quad F_2 = \frac{\omega^2 \cdot (1 - \cos(\omega))}{6\Delta_p}, \quad F_3 = \frac{\omega \cdot (\sin(\omega) - \omega \cdot \cos(\omega))}{4\Delta_p}, \quad F_4 = \frac{\omega \cdot (\omega - \sin(\omega))}{2\Delta_p}$$

$$\Delta_p = 2 \cdot (1 - \cos(\omega)) - \omega \cdot \sin(\omega), \quad \omega = L \cdot \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (29)$$

Ukoliko izvršimo statičku kondenzaciju ugla zaokreta prvog čvora dobivamo matricu:

$$k_e^{\text{II}} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 3F_5 & 0 & 0 & -3F_5 & 3LF_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -3F_1 & 0 & 0 & 3F_5 & -3LF_6 \\ 0 & 3LF_6 & 0 & 0 & -3LF_6 & 3L^2F_6 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Gdje su:

$$F_5 = \frac{\omega^3 \cdot \cos(\omega)}{3\Delta_p}, \quad F_6 = \frac{\omega^2 \cdot \sin(\omega)}{3\Delta_p}, \quad \Delta_p = \sin(\omega) - \omega \cdot \cos(\omega), \quad \omega = L \cdot \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (31)$$

Ukoliko se matrica (29) razvije u Taylor-ov red uzimajući u obzir do maksimalnog kvadratnog člana dobivamo konzistentnu matricu krutosti:

$$k_e^{\text{II}} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} - \frac{P}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & -36 & 3L \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & -3L & L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 36 & -3L \\ 0 & 3L & L^2 & 0 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Ukoliko se matrica (30) razvije u Taylor-ov red uzimajući u obzir do maksimalnog kvadratnog člana dobivamo kondenzovanu konzistentnu matricu krutosti:

$$k_e^{\text{II}} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 3L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 3 & -3L \\ 0 & 3L & 0 & 0 & -3L & 3L^2 \end{bmatrix} - \frac{P}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 & 0 & -36 & 6L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 0 & 0 & 36 & -6L \\ 0 & 6L & 0 & 0 & -6L & 6L^2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Ukoliko želimo da dobijemo kondenzovanu konzistentnu matricu krutosti vršeći kondenzaciju na geometrijskom dijelu matrice (32) dobivamo sljedeće:

$$k_e^{\text{II}} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 3L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 3 & -3L \\ 0 & 3L & 0 & 0 & -3L & 3L^2 \end{bmatrix} - \frac{P}{8L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & -9 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & 9 & -L \\ 0 & L & 0 & 0 & -L & L^2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Sada je vidljivo da geometrijski dijelovi (33) i (34) nisu isti, što dovodi do ranije navedenih problema, te se koriste matrice (28) i (30), te analogno matrica (35) za statičku kondenzaciju ugla zaokreta drugog čvora.

$$k_e^{\text{II}} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 3F_5 & 3LF_6 & 0 & -3F_5 & 0 \\ 0 & 3LF_6 & 3L^2F_6 & 0 & -3LF_6 & 0 \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -3F_5 & -3LF_6 & 0 & 3F_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Za obostrano zglobno oslonjen štap koristi se matrica:

$$k_e^{II} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{P}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Pored tačne geometrijske matrice krutosti, koristit će se i linearna geometrijska matrica krutosti:

$$K_{g,I}^{II} = -\frac{P}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Kod proračuna po teoriji drugog reda korištenjem linearne geometrijske matrice krutosti nije bitno da li je element obostrano uklješten, da li na jednom ili oba čvora ima zglob ili ne, uvijek se koristi ista geometrijska matrica (37).

Geometrijski dio matrice krutosti elementa se uzima u obzir samo ako u elementu postoji normalna sila pritiska.

Kako se matrica krutosti elementa po teoriji drugog reda razlikuje od one po teoriji prvog reda to je potrebno modifikovati fajl *o\_mkeulks.m*, za proračun tačnim matrica krutosti po teoriji drugog reda fajl će sada nositi naziv *o\_mkeulks\_tdrt.m*, a za proračun linearном geometrijskom matricom krutosti fajl će nositi naziv *o\_mkeulks\_tdrl.m*. Razlike u kôdu u odnosu na teoriju prvog reda bit će prikazane za slučaj tačnog proračuna po teoriji drugog reda, dok će se za približan proračun navoditi razlike u odnosu na tačan proračun ukoliko se ne razlikuje previše, za veće razlike kôd će također biti prikazan.

#### Fajl: *o\_mkeulks\_tdrt.m*

```
function [mkeulks] = o_mkeulks_tdrt(i, sulks)

% Ova funkcija formira matricu krutosti elementa u lokalnom koordinatnom
% sistemu.

% Definisanje globalnih varijabli
global kc pe kmipp zglob

% Vađenje čvorova elementa i
c1 = pe(i, 1);
c2 = pe(i, 2);

% Vađenje koordinata x i y čvora 1 i 2
x1 = kc(c1, 1); y1 = kc(c1, 2);
x2 = kc(c2, 1); y2 = kc(c2, 2);

% Proračun dužine elementa i
L = sqrt((x2-x1)^2 + (y2-y1)^2);

% Vađenje karakteristika materijala i poprečnog presjeka
E = kmipp(i, 1);
A = kmipp(i, 2);
I = kmipp(i, 3);
```

```

EI = E * I

% Formiranje matrice krutosti elementa u lokalnog koordinatnom sistemu
if zglob(i, 1) == 0 && zglob(i, 2) == 1
    if sulk(i, 4) < 0
        Pe = -sulk(i, 4);
        w = L*sqrt(Pe/EI);
        dp2 = sin(w) - w*cos(w);
        F5 = (w^3*cos(w))/(3*dp2);
        F6 = (w^2*sin(w))/(3*dp2);

        mkeulks = (EI/L^3) * [(A*L^2)/(I),      0,      0, (-A*L^2)/(I),      0,      0;
                               0,      3*F5,   0,      0,      -3*F5,   3*L*F6;
                               0,      0,      0,      0,      0,      0;
                               (-A*L^2)/(I), 0,      0, (A*L^2)/(I),      0,      0;
                               0,      -3*F5,  0,      0,      3*F5,   -3*L*F6;
                               0,      3*L*F6, 0,      0,      -3*L*F6, 3*L^2*F6];

    else
        mkeulks = ((3*EI)/L^3) * [(A*L^2)/(3*I), 0, 0, (-A*L^2)/(3*I), 0, 0;
                                      0, 1, 0, 0, -1, L;
                                      0, 0, 0, 0, 0, 0;
                                      (-A*L^2)/(3*I), 0, 0, (A*L^2)/(3*I), 0, 0;
                                      0, -1, 0, 0, 1, -L;
                                      0, L, 0, 0, -L, L^2];
    end

elseif zglob(i, 1) == 1 && zglob(i,2) == 0
    if sulk(i, 4) < 0
        Pe = -sulk(i, 4);
        w = L*sqrt(Pe/EI);
        dp2 = sin(w) - w*cos(w);
        F5 = (w^3*cos(w))/(3*dp2);
        F6 = (w^2*sin(w))/(3*dp2);

        mkeulks = (EI/L^3) * [(A*L^2)/(I),      0,      0, (-A*L^2)/(I),      0,      0;
                               0,      3*F5,   3*L*F6,      0,      -3*F5,   0;
                               0,      3*L*F6, 3*L^2*F6,      0,      -3*L*F6, 0;
                               (-A*L^2)/(I), 0,      0, (A*L^2)/(I),      0,      0;
                               0,      -3*F5, -3*L*F6,      0,      3*F5,   0;
                               0,      0,      0,      0,      0,      0];

    else
        mkeulks = ((3*EI)/L^3) * [(A*L^2)/(3*I), 0, 0, (-A*L^2)/(3*I), 0, 0;
                                      0, 1, L, 0, -1, 0;
                                      0, L, L^2, 0, -L, 0;
                                      (-A*L^2)/(3*I), 0, 0, (A*L^2)/(3*I), 0, 0;
                                      0, -1, -L, 0, 1, 0;
                                      0, 0, 0, 0, 0, 0];
    end

elseif zglob(i, 1) == 0 && zglob(i, 2) == 0
    if sulk(i, 4) < 0
        Pe = sulk(i, 4);
        mpdelta = (Pe/L) * [ 0 0 0 0 0 0;
                             0 1 0 0 -1 0;
                             0 0 0 0 0 0;
                             0 0 0 0 0 0;
                             0 -1 0 0 1 0;
                             0 0 0 0 0 0];

```

```

me = ((3*EI)/L^3) * [(A*L^2)/(3*I), 0, 0, (-A*L^2)/(3*I), 0, 0;
                      0, 0, 0, 0, 0, 0;
                      0, 0, 0, 0, 0, 0;
                      (-A*L^2)/(3*I), 0, 0, (A*L^2)/(3*I), 0, 0;
                      0, 0, 0, 0, 0, 0;
                      0, 0, 0, 0, 0, 0];

mkeulks = me + mpdelta;
else
    mkeulks = ((3*EI)/L^3) * [(A*L^2)/(3*I), 0, 0, (-A*L^2)/(3*I), 0, 0;
                                0, 0, 0, 0, 0, 0;
                                0, 0, 0, 0, 0, 0;
                                (-A*L^2)/(3*I), 0, 0, (A*L^2)/(3*I), 0, 0;
                                0, 0, 0, 0, 0, 0;
                                0, 0, 0, 0, 0, 0];
end

else
    if suulks(i, 4) < 0
        Pe = -suulks(i, 4);
        w = L*sqrt(Pe/EI);
        dp1 = 2*(1-cos(w)) - w*sin(w);
        F1 = (w^3*sin(w))/(12*dp1);
        F2 = (w^2*(1-cos(w)))/(6*dp1);
        F3 = (w*(sin(w)-w*cos(w)))/(4*dp1);
        F4 = (w*(w-sin(w)))/(2*dp1);

        mkeulks = (EI/L^3) * [(A*L^2)/(I), 0, 0, (-A*L^2)/(I), 0, 0;
                               0, 12*F1, 6*L*F2, 0, -12*F1, 6*L*F2;
                               0, 6*L*F2, 4*L^2*F3, 0, 6*L*F2, 2*L^2*F4;
                               (-A*L^2)/(I), 0, 0, (A*L^2)/(I), 0, 0;
                               0, -12*F1, -6*L*F2, 0, 12*F1, -6*L*F2;
                               0, 6*L*F2, 2*L^2*F4, 0, -6*L*F2, 4*L^2*F3];

    else
        mkeulks = ((12*EI)/L^3) * [(A*L^2)/(12*I), 0, 0, (-A*L^2)/(12*I), 0, 0;
                                    0, 1, L/2, 0, -1, L/2;
                                    0, L/2, L^2/3, 0, -L/2, L^2/6;
                                    (-A*L^2)/(12*I), 0, 0, (A*L^2)/(12*I), 0, 0;
                                    0, -1, -L/2, 0, 1, -L/2;
                                    0, L/2, L^2/6, 0, -L/2, L^2/3];
    end
end
end

```

Funkcija sada uzima dva ulazna argumenta, novi argument su sile u čvorovima elemenata na osnovu kojih za element  $i$  program provjerava da li u istom postoji normalna sila pritiska. Ukoliko postoji tada pored elastičnog dijela matrice krutosti uzima i geometrijski dio. Za element sa normalnom silom zatezanja ili za element bez normalne sile program uzima u obzir samo elastični dio matrice krutosti.

### Fajl: o\_mkeulks\_tdr1.m

```

function [mkeulks] = o_mkeulks_tdr1(i, suulks)

% Ova funkcija formira matricu krutosti elementa u lokalnom koordinatnom
% sistemu.

% Definisanje globalnih varijabli
global kc pe kmipp zglob

```

```

% Vađenje čvorova elementa i
c1 = pe(i, 1);
c2 = pe(i, 2);

% Vađenje koordinata X i Y čvora 1 i 2
x1 = kc(c1, 1); y1 = kc(c1, 2);
x2 = kc(c2, 1); y2 = kc(c2, 2);

% Proračun dužine elementa i
L = sqrt((x2-x1)^2 + (y2-y1)^2);

% Vađenje karakteristika materijala i poprečnog presjeka
E = kmipp(i, 1);
A = kmipp(i, 2);
I = kmipp(i, 3);
EI = E * I;

% Formiranje matrice krutosti elementa u lokalnog koordinatnom sistemu
if zglob(i, 1) == 0 && zglob(i, 2) == 1

mkeulks = ((3*EI)/L^3) * [ (A*L^2)/(3*I), 0, 0, (-A*L^2)/(3*I), 0, 0;
                            0, 1, 0, 0, -1, L;
                            0, 0, 0, 0, 0, 0;
                            (-A*L^2)/(3*I), 0, 0, (A*L^2)/(3*I), 0, 0;
                            0, -1, 0, 0, 1, -L;
                            0, L, 0, 0, -L, L^2];

if sulks(i, 4) < 0
    mkeulks = mkeulks + (sulks(i, 4)/L) * [ 0, 0, 0, 0, 0, 0;
                                                0, 1, 0, 0, -1, 0;
                                                0, 0, 0, 0, 0, 0;
                                                0, 0, 0, 0, 0, 0;
                                                0, -1, 0, 0, 1, 0;
                                                0, 0, 0, 0, 0, 0];
end

elseif zglob(i, 1) == 1 && zglob(i, 2) == 0

mkeulks = ((3*EI)/L^3) * [ (A*L^2)/(3*I), 0, 0, (-A*L^2)/(3*I), 0, 0;
                            0, 1, L, 0, -1, 0;
                            0, L, L^2, 0, -L, 0;
                            (-A*L^2)/(3*I), 0, 0, (A*L^2)/(3*I), 0, 0;
                            0, -1, -L, 0, 1, 0;
                            0, 0, 0, 0, 0, 0];

if sulks(i, 4) < 0
    mkeulks = mkeulks + (sulks(i, 4)/L) * [ 0, 0, 0, 0, 0, 0;
                                                0, 1, 0, 0, -1, 0;
                                                0, 0, 0, 0, 0, 0;
                                                0, 0, 0, 0, 0, 0;
                                                0, -1, 0, 0, 1, 0;
                                                0, 0, 0, 0, 0, 0];
end

elseif zglob(i, 1) == 0 && zglob(i, 2) == 0

mkeulks = ((3*EI)/L^3) * [ (A*L^2)/(3*I), 0, 0, (-A*L^2)/(3*I), 0, 0;
                            0, 0, 0, 0, 0, 0;
                            0, 0, 0, 0, 0, 0;
                            (-A*L^2)/(3*I), 0, 0, (A*L^2)/(3*I), 0, 0;
                            0, 0, 0, 0, 0, 0;
                            0, 0, 0, 0, 0, 0];

```

```

if sulk(i, 4) < 0
    mkeulks = mkeulks + (sulk(i, 4)/L) * [ 0, 0, 0, 0, 0, 0;
                                                0, 1, 0, 0, -1, 0;
                                                0, 0, 0, 0, 0, 0;
                                                0, 0, 0, 0, 0, 0;
                                                0, -1, 0, 0, 1, 0;
                                                0, 0, 0, 0, 0, 0];
end

else

    mkeulks = ((12*EI)/L^3) * [ (A*L^2)/(12*I), 0, 0, (-A*L^2)/(12*I), 0, 0;
                                0, 1, L/2, 0, -1, L/2;
                                0, L/2, L^2/3, 0, -L/2, L^2/6;
                                (-A*L^2)/(12*I), 0, 0, (A*L^2)/(12*I), 0, 0;
                                0, -1, -L/2, 0, 1, -L/2;
                                0, L/2, L^2/6, 0, -L/2, L^2/3];
if sulk(i, 4) < 0
    mkeulks = mkeulks + (sulk(i, 4)/L) * [ 0, 0, 0, 0, 0, 0;
                                                0, 1, 0, 0, -1, 0;
                                                0, 0, 0, 0, 0, 0;
                                                0, 0, 0, 0, 0, 0;
                                                0, -1, 0, 0, 1, 0;
                                                0, 0, 0, 0, 0, 0];
end
end
end

```

Kako se funkcija za formiranje matrica krutosti elemenata promjenila to je potrebno istu pozvati u funkciji za asembliranje globalne matrice krutosti sistema i globalnog vektora sila.

#### Fajl: o\_gmks\_i\_gvs\_tdrt.m

```

function [gmks, gvs] = o_gmks_i_gvs_tdrt(sulk)
% Ova funkcija formira globalnu matricu krutosti sistema i globalni vektor sila sistema

% Definisanje globalni varijabli
global be bssk

% Asembliranje globalnog vektora sila
gvs = zeros(bssk, 1); % Inicijalizacija nultog globalnog vektora sila
gvs = o_gvsoonc(gvs); % Pozivanje funkcije koja asemblira globalni vektor sila

% Asembliranje globalne matrice krutosti sistema

gmks = zeros(bssk); % Inicijalizacija nulte globalne matrice krutosti sistema

for i=1:be
    mkeulks = o_mkeulks_tdrt(i, sulk); % Pozivanje funkcije za formiranje matrice
                                            % krutosti elementa
                                            % u lokalnog koordinatnom sistemu
    mt = o_mt(i); % Pozivanje funkcije koja formira matrice transformacije
                    % elementa
    mkeugks = mt * mkeulks * mt'; % Formiranje matrice krutosti elementa u globalnom
                                    % koordinatnom sistemu
    lv = o_lv(i); % Pozivanje funckije za formiranje lokacijskog vektora
                    % elementa
end

```

```

gmks = o_gmks(gmks, mkeugks, 1v);    % Pozivanje funkcije za asembleriranje globalne
                                         % matrice krutosti sistema
end
end

```

Funkcija sada uzima ulazni argument, sile u čvorovima elemenata, koji koristi kao ulazni argument funkcije za formiranje matrica krutosti elemenata koju poziva.

Što se tiče približnog proračuna po teoriji drugog reda u fajlu *o\_gmks\_i\_gvs\_tdr.m* u odnosu na fajl *o\_gmks\_i\_gvs\_tdrt.m* potrebno je promijeniti svaki dijelove iz „tdrt“ u „tdrl“.

Nakon što je globalna matrica krutosti sistema formirana kao i globalni vektor sila, rješava se sistem jednačina i dobivaju su nepoznata pomjeranja. Za proračun čvornih sila po teoriji drugog reda potrebno je prilagoditi fajl *o\_pmnpulks\_i\_sulks.m*.

#### **Fajl: *o\_pmnpulks\_i\_sulks\_tdrt.m***

```

function [mnpulks, pmnpulks, sulks] = o_pmnpulks_i_sulks_tdrt(gvnp, sulks)

% Ova funkcija vadi čvorna pomjeranja i računa čvorne sile elemenata

% Definisanje globalnih varijabli
global be bsskpe zglob kmipp

% Inicijalizacija nulte matrice vektora nepoznatih
% pomjeranja u globalnom koordinatnom sistemu
mnpulks = zeros(be, bsskpe);

% Inicijalizacija nulte matrice vektora nepoznatih
% pomjeranja u lokalnom koordinatnom sistemu
mnpulks = zeros(be, bsskpe);

% Petlja za proračun čvornih sila elementa
for i=1:be

    % Pozivanje funkcije za formiranje matrica krutosti
    % elementa u lokalnom koordinatnom sistemu
    mkeulks = o_mkeulks_tdrt(i, sulks);

    % Pozivanje funkcije za formiranje matrice
    % transformacije elementa
    mt = o_mt(i);

    % Proračun matrice krutosti elementa u
    % globalnom koordinatnom sistemu
    mkeugks = mt * mkeulks * mt';

    % Pozivanje funkcije za formiranje lokacijskog
    % vektora elementa
    lv = o_lv(i);

    % Petlja za formiranje matrice nepoznatih pomjeranja u globalnom
    % koordinatnom sistemu
    for j=1:bsskpe
        if lv(j) ~= 0
            mnpulks(i, j) = gvnp(lv(j));
        end
    end
end

```

```
% Vektor cvornih sila elementa u globalnom koordinatnom sistemu
vcseugks = mkeugks * mnpugks(i, :)';

% Vektor čvornih sila u lokalnom koordinatnom sistemu
vcseulks = mt' * vcseugks;

% Matrica sila u lokalnom koordinatnom sistemu
sulks(i, :) = vcseulks;

% Petlja za zaokruživanje vrijednosti matrice sulks
for a=1:be
    for b=1:bsskpe
        if abs(sulks(a,b)) <= 0.01
            sulks(a,b) = 0;
        end
    end
end

% Matrica nepoznatih pomjeranja u lokalnom koordinatnom sistemu
mnpulks(i, :) = mt' * mnpugks(i,:)';
end

% Inicijalizacija popravljenog vektora nepoznatih pomjeranja elementa
pmnpuulks = mnpulks;

% Petlja za proračun uglova zaokreta kondenzovanih matrica krutosti
% elemenata
for i1=1:be
    for j1=1:2
        if zglob(i1, j1) == 0
            Le = o_L(i1);
            E = kmipp(i1, 1);
            I = kmipp(i1, 3);
            EI = E * I;
            if sulks(i1, 4) < 0
                Pe = -sulks(i1, 4);
                w = Le*sqrt(Pe/EI);
                dp1 = 2*(1-cos(w)) - w*sin(w);
                F2 = (w^2*(1-cos(w)))/(6*dp1);
                F3 = (w*(sin(w)-w*cos(w)))/(4*dp1);
                F4 = (w*(w-sin(w)))/(2*dp1);
                F23 = F2/F3;
                F43 = F4/F3;
                if j1 == 1
                    pmnpuulks(i1, j1^2+2) = -((F23*1.5*mnpulks(i1, 2))/Le) +
((F23*1.5*mnpulks(i1, 5))/Le) - (F43*0.5*mnpulks(i1, 6));
                elseif j1 == 2
                    pmnpuulks(i1, j1^2+2) = -((F23*1.5*mnpulks(i1, 2))/Le) +
((F23*1.5*mnpulks(i1, 5))/Le) - (F43*0.5*mnpulks(i1, 3));
                end
            else
                if j1 == 1
                    pmnpuulks(i1, j1^2+2) = -((1.5*mnpulks(i1, 2))/Le) + ((1.5*mnpulks(i1,
5))/Le) - 0.5*mnpulks(i1, 6);
                elseif j1 == 2
                    pmnpuulks(i1, j1^2+2) = -((1.5*mnpulks(i1, 2))/Le) + ((1.5*mnpulks(i1,
5))/Le) - 0.5*mnpulks(i1, 3);
                end
            end
        end
    end
end
```

```
    end
  end
end
end
```

Funkcija također koristi čvorne sile u elementu ( proračunate po teoriji prvog reda, ili iz prethodne iteracije), da bi formirala matrice krutosti elemenata i izračunala nove čvorne sile u elementima.

### Fajl: o\_pmnpulks\_i\_sulks\_tdr1.m

```
function [mnpulks, pmnpulks, sulks] = o_pmnpulks_i_sulks_tdr1(gvnp, sulks)

% Ova funkcija vadi čvorna pomjeranja i računa čvorne sile elemenata

% Definisanje globalnih varijabli
global be bsskpe zglob

% Inicijalizacija nulte matrice vektora nepoznatih
% pomjeranja u globalnom koordinatnom sistemu
mnpugks = zeros(be, bsskpe);

% Inicijalizacija nulte matrice vektora nepoznatih
% pomjeranja u lokalnom koordinatnom sistemu
mnpulks = zeros(be, bsskpe);

% Petlja za proračun čvornih sila elementa
for i=1:be

  % Pozivanje funkcije za formiranje matrica krutosti
  % elementa u lokalnom koordinatnom sistemu
  mkeulks = o_mkeulks_tdr1(i, sulks);

  % Pozivanje funkcije za formiranje matrice
  % transformacije elementa
  mt = o_mt(i);

  % Proračun matrice krutosti elementa u
  % globalnom koordinatnom sistemu
  mkeugks = mt * mkeulks * mt';

  % Pozivanje funkcije za formiranje lokacijskog
  % vektora elementa
  lv = o_lv(i);

  % Petlja za formiranje matrice nepoznatih pomjeranja u globalnom
  % koordinatnom sistemu
  for j=1:bsskpe
    if lv(j) ~= 0
      mnpugks(i, j) = gvnp(lv(j));
    end
  end

  % Vektor čvornih sila elementa u globalnom koordinatnom sistemu
  vcseugks = mkeugks * mnpugks(i, :)';

  % Vektor čvornih sila u lokalnom koordinatnom sistemu
  vcseulks = mt' * vcseugks;
```

```
% Matrica sila u lokalnom koordinatnom sistemu
sulks(i, :) = vcseulks;

% Petlja za zaokruživanje vrijednosti matrice sulks
for a=1:be
    for b=1:bsskpe
        if abs(sulks(a,b)) <= 0.01
            sulks(a,b) = 0;
        end
    end
end

% Matrica nepoznatih pomjeranja u lokalnom koordinatnom sistemu
mnpulks(i,:) = mt' * mnpugks(i,:)';
end

% Inicijalizacija popravljenog vektora nepoznatih pomjeranja elementa
pmnpulks = mnpulks;

% Petlja za proračun uglova zaokreta kondenzovanih matrica krutosti
% elemenata
for i1=1:be
    for j1=1:2
        if zglob(i1, j1) == 0
            Le = o_L(i1);
            if j1 == 1
                pmnpulks(i1, j1^2+2) = -((1.5*mnpulks(i1, 2))/Le) + ((1.5*mnpulks(i1,
5))/Le) - 0.5*mnpulks(i1, 6);
            elseif j1 == 2
                pmnpulks(i1, j1^2+2) = -((1.5*mnpulks(i1, 2))/Le) + ((1.5*mnpulks(i1,
5))/Le) - 0.5*mnpulks(i1, 3);
            end
        end
    end
end
end
```

Na kraju potrebno je prilagoditi fajl *proracun\_pz\_tpr.m*.

#### Fajl: *proracun\_pz\_tdrt.m*

```
% Čisti varijable i ekran
clear
clc

% Format ispisa numeričkih varijabli
format short g

% Definisanje globalnih varijabli
global ite lambdam lambdau zglob pru czd

% Učitavanje ulaznih podataka
up_1;

% Otvaranje fajla za ispis
fid = fopen('o_rp_1.txt', 'w');

% Ispis ulaznih podataka
o_iup
```

```
% Ispis teksta na konzoli
disp('Izvršavam: proracun_pz_tdrt.m');

% Pozivanje funkcije za formiranje globalne matrice krutosti sistema i
% globalnog vektora sila po teoriji prvog reda
[gmks, gvs] = o_gmks_i_gvs();

% Rješavanje sistema K*u=F
gvnp = gmks\gvs;

% Pozivanje funkcije za proračun vektora nepoznatih pomjeranja elementa i
% sila u lokalnom koordinatnom sistemu po teoriji prvog reda
[mnpuks, pmnpuks, sulks] = o_pmnpuks_i_sulks(gvnp);

% Definisanje sila prethodnog koraka potrebnih za provjeru odstupanja u
% tekućem koraku
sulkspk = sulks;

% Pozivanje funkcije za proračun globalne matrice krutosti i globalnog
% vektora sila po teoriji drugog reda koja uzima u obzir normalne sile
% proračunate u prethodnom koraku po teoriji prvog reda
[gmks, gvs] = o_gmks_i_gvs_tdrt(sulks);

% Inicijalizacija početnih varijabli potrebnih za petlju koja proračunava
% faktor graničnog opterećenja
cm = zeros(be, 2); % Čvorni momenti
lambdau = 0; % Ukupni faktor opterećenja
rgmks = bssk; % Rank globalne matrice krutosti sistema
lambdam = 0; % Minimalni faktor opterećenja i-te iteracije
ite = 0; % Broj iteracija
pmnpuksu = zeros(be, 6); % Ukupna matrica nepoznatih pomjeranja
cntm = zeros(be, 6); % Ukupna matrica čvornih sila
sii = 0; % Varijabla za provjeru labilnosti okvira
```

Kako su za proračun po teoriji drugog reda potrebne normalne sile u elementima za formiranje matrica krutosti elemenata po teoriji drugog reda, prvo se vrši proračun po teoriji prvog reda. Zatim se definišu početne vrijednosti određenih varijabli potrebnih u *while* petlji koja slijedi.

```
% Petlja za proračun faktora graničnog opterećenja
while rgmks >= bssk

    % Dodavanje iteracije
    ite = ite + 1;

    % Rješavanje sistema K * u = F
    gvnp = gmks\gvs;

    % Pozivanje funkcije za proračun popravljenog vektora nepoznatih
    % pomjeranja elementa i vektora čvornih sila u lokalnom koordinatnom
    % sistemu po teoriji drugog reda
    [mnpuks, pmnpuks, sulks] = o_pmnpuks_i_sulks_tdrt(gvnp, sulks);

    % Petlja za provjeru normalnih sila u prethodnom koraku
    si = 1;
    while si <= be
        rns = ((sulkspk(si, 4))/(sulks(si, 4))) - 1;
        if abs(rns) <= 0.0005
            si = si + 1;
        elseif isnan(abs(rns))
```

```

        si = si + 1;
    else
        si = 1;
        sulkspk = sulks;
        [gmks, gvs] = o_gmks_i_gvs_tdrt(sulks);
        sv = eig(gmks);
        for bb = 1:bssk
            if sv(bb) < 0
                disp(['Model je labilan, globalna matrica krutosti više ' ...
                    'nije pozitivno definitna.']);
                si = be + 1;
                sii = 1;
            end
            if sii == 1
                break
            end
        end
        gvnp = gmks\gvs;
        [mnpulks, pmnpulks, sulks] = o_pmnpulks_i_sulks_tdrt(gvnp, sulks);
    end
end

if sii == 1
    break
end

```

Sa proračunatim silama po teoriji prvog reda ulazimo u proračun po teoriji prvog reda. Nakon proračuna sila po teoriji drugog reda vrši se poređenje normalnih sila. Provjerava se da li su normalne sile proračunate po teoriji drugog reda jednake onim sa kojima se ušlo u proračun. Ukoliko su sile jednake, proračun se nastavlja dalje i traži se minimalni faktor opterećenja, ako nisu jednake ide se u narednu iteraciju sa silama iz tekuće iteracije. Također moguće je da vlastite vrijednosti matrice krutosti sistema po teoriji drugog reda budu negativne, što ukazuje da ista više nije pozitivno definitna tj. da je model labilan, odnosno da je dostignuta kritična sila sistema.

```

% Formiranje nulte matrice faktora opterećenja
lambda = zeros(be,2);

% Formiranje nulte matrice čvornih momenata i-te iteracije
cmi = zeros(be, 2);

% Formiranje nulte matrice ostatka čvornog momenta
ocm = zeros(be, 2);

% Petlja za proračun matrice faktora opterećenja
for c=1:be
    for d=1:2
        cmi(c, d) = sulks(c, d^2 + 2);
        if cmi(c, d) > 0 && cm(c, d) > 0 || cmi(c,d) < 0 && cm(c,d) < 0
            ocm(c, d) = mp(c, d) - abs(cm(c ,d));
        elseif cmi(c, d) > 0 && cm(c, d) < 0 || cmi(c,d) < 0 && cm(c,d) > 0
            ocm(c, d) = mp(c, d) + abs(cm(c, d));
        elseif cmi(c, d) == 0 && cm(c, d) == 0
            if pru(c,3) == 1 || pru(c,3) == 0
                ocm(c,d) == mp(c,d);
            else
                ocm(c,d) = 0;
            end
        elseif cmi(c, d) == 0 && cm(c, d) ~= 0
            ocm(c, d) = mp(c, d) - abs(cm(c, d));
    end
end

```

```
elseif cm(c, d) == 0 && cmi(c, d) ~= 0
if ite == 1
    ocm(c,d) = mp(c,d);
elseif ite ~= 1
    ocm(c, d) = mp(c, d) - abs(cmi(c, d));
end
end
if ocm(c, d) < 0.00001
    ocm(c, d) = 0;
end
lambda(c, d) = ocm(c, d)/abs(cmi(c, d));
if lambda(c, d) == -Inf
    lambda(c,d) = Inf;
end
end
end

% Određivanje minimalnog faktora opterećenja i-te iteracije
lambdam = min(min(lambda));
if lambdam == Inf
    break
elseif isnan(lambda)
    disp('Formirana je rešetka, nema više čvorova u kojima može doći do povećanja
momenta.');
    break
end

% Sabiranje matrica "cm" "pmnpeulks" i "cntm" kako bi se dobile akumulirane
% vrijednosti istih matrica zaključno sa i-tom iteracijom
cm = cm + lambdam * cmi;
pmnpulksu = pmnpulksu + lambdam * pmnpulks;
cntm = cntm + lambdam * sulks;

% Sabiranje lambdi
lambdau = lambdau + lambdam;

% Sile u čvorovima elemenata u tekućem koraku
sulkstk = sulks;

% Globalni vektor nepoznatih pomjeranja u tekućem koraku
gvnptk = gvnp;

% Matrica nepoznatih pomjeranja i popravljena matrica
% nepoznatih pomjeranja u lokalnom koordinatnom
% sistemu u tekućem koraku
mnpulkstk = mnpulks;
pmnpulkstk = pmnpulks;

% Petlja za promjenu rubnih uslova
for e=1:be
    for f=1:2
        if round(lambda(e, f), 10) == round(min(min(lambda)), 10)
            if (pru(pe(e, f), 3)) == 1
                zglob(e, f) = 0;
            elseif (pru(pe(e, f), 3)) == 0
                pru(pe(e, f), 3) = 1;
            end
        end
    end
end
end
```

```

% Brojanje pojave čvora u matrici "pe"
bpc = zeros(bc,1); % Broj pojave čvora
for h=1:be
    for k=1:2
        for l=1:bc
            if pe(h,k) == 1
                bpc(l,1) = bpc(l) + 1;
            end
        end
    end
end

% Popravljanje matrice "zglob" tj. ne dopušta n zglobova u čvoru sa n
% elemenata, broj zglobova treba da je max n-1 inače globalna matrica
% krutosti postaje singularna
for tt=1:bc
    [rr, cc] = find(pe == tt); % Položaj tt-og čvora
    pzglob = zeros(bpc(tt), 1); % Inicijalizacija nultog vektora pojave zgloba
    if bpc(tt) > 1
        for ttt=1:bpc(tt)
            pzglob(ttt, 1) = zglob(rr(ttt), cc(ttt));
        end
        bpn = 0; % Broj pojave nula
        for ss=1:bpc(tt)
            if pzglob(ss) == 0
                bpn = bpn + 1;
            end
        end
        if bpn > (bpc(tt)-1)
            zglob(rr(ttt), cc(ttt)) = 1;
        end
    end
end

% Petlja za novo brojanje slobodnih stepeni slobode kretanja
bssk = 0; % Resetovanje broja stepeni slobode kretanja
ru = zeros(bc, bsskpc); % Resetovanje matrice rubni uslovi
for m=1:bc
    for n=1:bsskpc
        if pru(m, n) ~= 0
            bssk = bssk + 1;
            ru(m, n) = bssk;
        end
    end
end

% Petlja za formiranje vektora faktora opterećenja i željenog
% pomjeranja za svaku iteraciju kako bi se formirao dijagram lambda-u
for ci=1:be
    for cj=1:6
        if czd(ci, cj) == 1;
            mt = o_mt(ci);
            lak(ite, 1) = lambda;
            pmnpugks = mt * pmnpulksu(ci, :)'; % Prebacivanje u gks
            pomj(ite, 1) = pmnpugks(cj) * 1000;
        end
    end
end

% Ispis rezultata i-te iteracije
o_irp

```

Program vrši proračun minimalnog faktora opterećenja i mijenja rubne uslove.

```
% Formiranje nove globalne matrice krutosti sistema i globalnog vektora
% novog sistema po teoriji prvog reda
[gmks, gvs] = o_gmks_i_gvs();o
% Provjera ranga globalne matrice krutosti
rgmkstrpr = rank(gmks);
if rgmkstrpr >= bssk
    gvnp = gmks\gvs;
else
    rgmks = rgmkstrpr;
    break
end

% Pozivanje funkcije za proračun vektora nepoznatih pomjeranja i sila
% po teoriji prvog reda novog sistema
[mnlpulks, pmnlpulks, sulks] = o_pmnlpulks_i_sulks(gvnp);

% Definisanje sila prethodnog koraka za poređenje normalnih sila
sulkspk = sulks;

% Pozivanje funkcije za asembleriranje globalne matrice krutosti sistema
% i globalnog vektora sila novog sistema po teoriji drugog reda
[gmks, gvs] = o_gmks_i_gvs_tdrt(sulks);

% Proračun ranga nove globalne matrice krutosti sistema za provjeru
% while petlje
rgmks = rank(gmks);
end
```

Nakon formiranja novog sistema, ponovo se vrši proračun sistema po teoriji prvog reda kako bi dobili potrebne normalne sile za formiranje globalne matrice krutosti po teoriji drugog reda. Vrši se provjera singularnosti matrica i ukoliko globalna matrica krutosti nije singularna ide se u naredni korak, ukoliko je singularna while petlja se prekida.

```
fclose(fid); % Zatvara otvoreni fajl za ispis

% Ispis teksta na konzoli
if sii == 1
    fprintf('Proračun je prekinut u koraku %g, rezultati su ispisani u fajlu: o_rp_1.txt.', ite);
else
    disp('Rezultati ispisani u fajlu: o_rp_1.txt.');
end

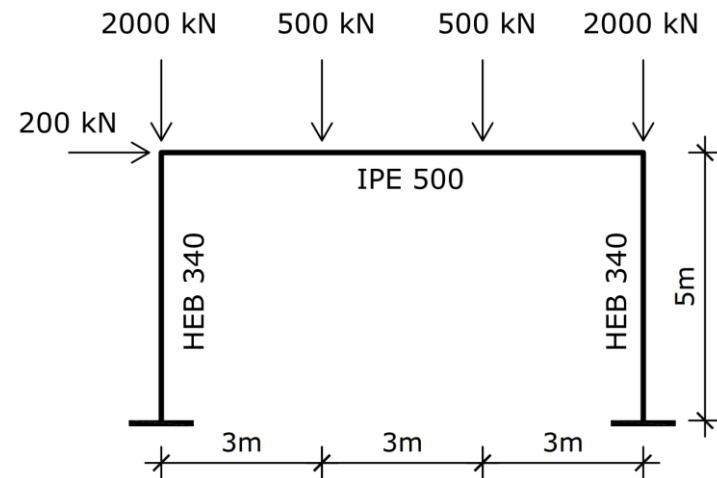
% Plotanje dijagrama lambda - delta
lak =[0;lak];
round(lak, 3);
pomj = [0;pomj];
pomj = abs(pomj);
round(pomj, 3);
plot(pomj, lak, 'k-o', 'LineWidth', 1.5, 'MarkerFaceColor','g', 'MarkerEdgeColor', 'k',
'MarkerSize', 3)
xlabel('Ux7 [mm]', 'FontSize', 10)
ylabel('Faktor opterećenja [kN]', 'FontSize', 10)
set(gca,'FontSize', 10);
```

S ovime je završen proračun po teoriji drugog reda tačnom matricom krutosti. Što se tiče fajla *proracun\_pz\_tdr1.m*, da bi se isti dobio potrebno je u fajlu *proracun\_pz\_tdrt.m* na svakom mjestu gdje postoji „*tdrt*“ isto promijeniti u „*tdrl*“.

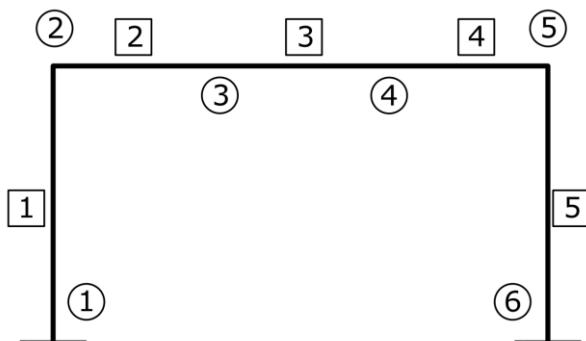
U nastavku sljedi primjer. Kako u primjerima koji su urađeni po teoriji prvog reda nema značajnih normalnih sila to nema uočljive razlike u proračunu po teoriji prvog i drugog reda. Stoga će se uraditi novi primjer u kojem su prisutne značajne normalne sile pritiska. Proračun se vršiti po teoriji prvog reda i po teoriji drugog reda koristeći tačnu matricu krutosti elementa i P-Δ matricu. Zbog veličine izlaznih fajlova prikazivat će se samo sukcesivno formiranje plastičnih zglobova po teoriji drugog reda koristeći tačnu matricu krutosti elementa. Uz takav izlazni fajl prilagat će se dijagram  $\lambda$ - $U_{x2}$ .  $E = 2.1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$ . Čelik S355, moment plastičnosti stubova iznosi 854.84 kNm, a grede 778.87 kNm.

### 5.3.2/. PRIMJER

Izračunati faktor graničnog opterećenja okvira sa slike 58. Proračun uraditi po teoriji prvog i drugog reda, za dva slučaja, jedan kada se svo opterećenje množi sa  $\lambda$ , a drugi kada se samo horizontalna sila množi sa  $\lambda$  dok vertikalno opterećenje ostaje konstantno. Prikazati dijagram  $\lambda$ - $U_{x2}$ .  $E = 2.1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$ . Čelik S355, moment plastičnosti stubova iznosi 854.84 kNm, a grede 778.87 kNm.



**Slika 58:** Okvir sa opterećenjem



**Slika 59:** Oznake čvorova i elemenata

Fajl: *up\_1.m*

```
% Fajl: up_1.m

% Sljedeće varijable su proglašene globalnim kako bi mogle biti korištene u svim funkcijama
koje
% čine program.
global bc be bcpe bsskpc bsskpe bssk kc pe kmipp pru ru optnc zglob mp

% Format prikaza numeričkih varijabli
format short g
```

```

% ##### Početak unosa podataka #####
bc = 6; % Broj čvorova
be = 5; % Broj elemenata
bcpe = 2; % Broj čvorova po elementu
bsskpc = 3; % Broj stepeni slobode kretanja po čvoru
bsskpe = bcpe * bsskpc; % Broj stepeni slobode kretanja po elementu

% Koordinate čvorova X i Y
% kc = zeros(bc, 2) - dimenzije matrice kc
kc = [ 0, 0; % X i Y čvora 1
       0, 5; % X i Y čvora 2
       3, 5; % X i Y čvora 3
       6, 5; % X i Y čvora 4
       9, 5; % X i Y čvora 5
       9, 0]; % X i Y čvora 6

% Povezanost elemenata - pe
% pe = zeros(be, 2) - dimenzije matrice pe
pe = [1, 2; % Prvi i drugi čvor elementa 1
       2, 3; % Prvi i drugi čvor elementa 2
       3, 4; % Prvi i drugi čvor elementa 3
       4, 5; % Prvi i drugi čvor elementa 4
       5, 6]; % Prvi i drugi čvor elementa 5

% Karakteristike materijala i poprečnog presjeka - kmipp
% kmipp = zeros(be, 3) - dimenzije matrice kmipp
kmipp = [2.1e8, 0.01709, 0.0003666; % E, A i I elementa 1
          2.1e8, 0.0116, 0.000482; % E, A i I elementa 2
          2.1e8, 0.0116, 0.000482; % E, A i I elementa 3
          2.1e8, 0.0116, 0.000482; % E, A i I elementa 4
          2.1e8, 0.01709, 0.0003666]; % E, A i I elementa 5

% Početni rubni uslovi - pru
pru = ones(bc, bsskpc); % Inicijalizacija jedinične matrice pru
pru(1, 1) = 0; pru(1, 2) = 0; pru(1, 3) = 0; % Rubni uslov čvora 1
pru(6, 1) = 0; pru(6, 2) = 0; pru(6, 3) = 0; % Rubni uslov čvora 6

% Petlja za brojanje slobodnih stepeni slobode kretanja
bssk = 0; % Broj stepeni slobode kretanja
ru = zeros(bc, bsskpc); % Inicijalizacija nulte matrice rubni uslovi
for i = 1:bc
    for j = 1:bsskpc
        if pru(i, j) ~= 0
            bssk = bssk + 1;
            ru(i, j) = bssk;
        end
    end
end

% Zglobovi
zglob = ones(be, 2); % Inicijalizacija jedinične matrice zglob

% Opterećenje na čvoru - optnc
optnc = zeros(bc, bsskpc); % Inicijalizacija nulte matrice optnc
optnc(2, :) = [200, -2000, 0]; % Opterećenje u čvoru 2
optnc(3, :) = [0, -500, 0]; % Opterećenje u čvoru 3
optnc(4, :) = [0, -500, 0]; % Opterećenje u čvoru 4
optnc(5, :) = [0, -2000, 0]; % Opterećenje u čvoru 5

```

```
% Čvor za dijagram - czd
czd = zeros(be,6); % Inicijalizacija nulte matrice czd
czd(2, 1) = 1; % Horizontalno pomjeranje prvog čvora elementa 2

% Moment plastičnosti - mp
mp = 778.87*ones(be,2);
mp([1 5], :) = 854.84 * ones(2,2);

% ##### Kraj unosa podataka #####
```

**Fajl: o\_rp\_1.txt**

```
***** ISPIS REZULTATA PRORAČUNA *****
```

**KORAK 1**

```
Faktor opterećenja: L1 = 0.809
Ukupni faktor opterećenja: L = 0.809
Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 4.
```

**KORAK 2**

```
Faktor opterećenja: L2 = 0.061
Ukupni faktor opterećenja: L = 0.870
Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 2.
Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 3.
```

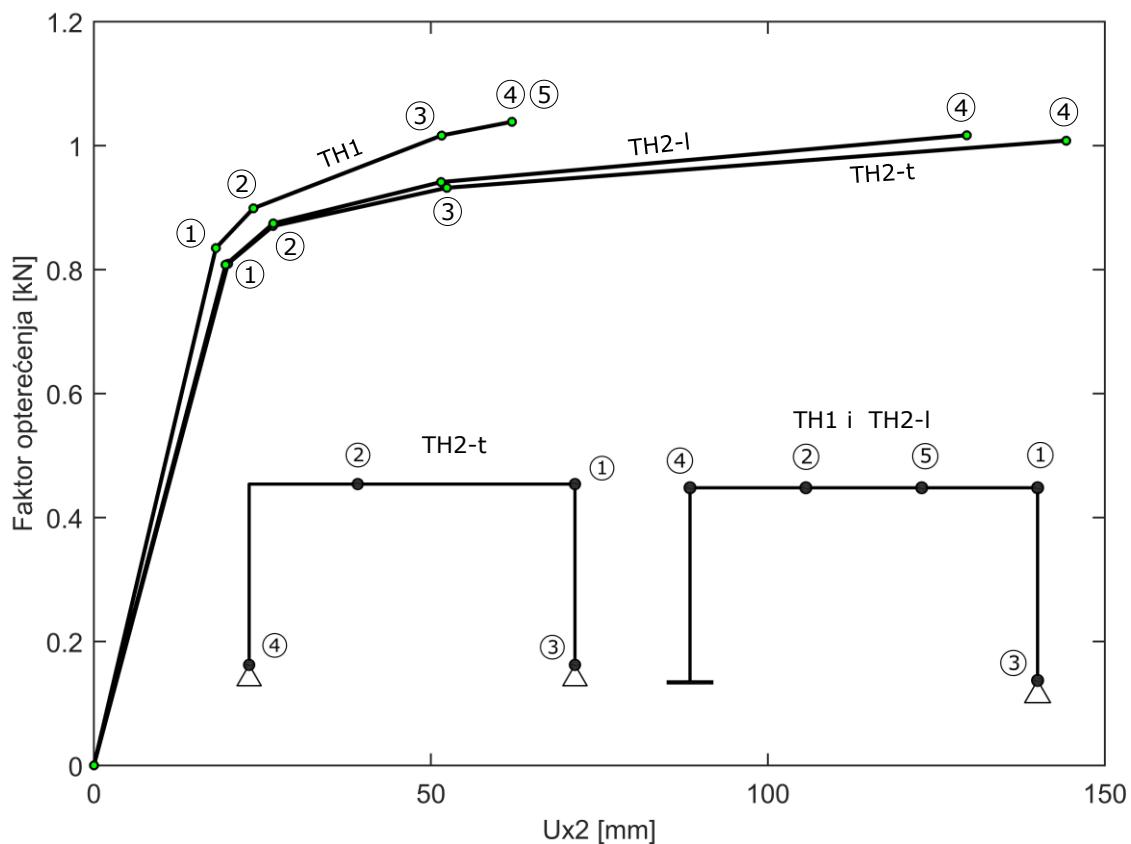
**KORAK 3**

```
Faktor opterećenja: L3 = 0.062
Ukupni faktor opterećenja: L = 0.932
Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 5.
```

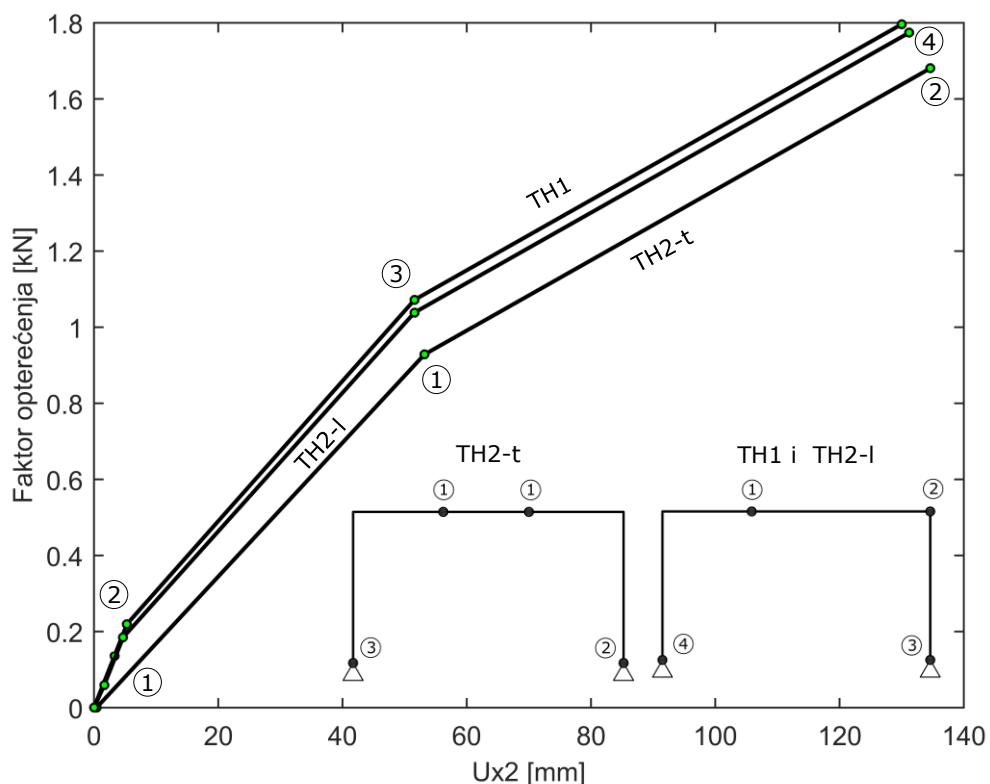
**KORAK 4**

```
Faktor opterećenja: L4 = 0.076
Ukupni faktor opterećenja: L = 1.008
Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 1.
```

Za prvi slučaj po teoriji prvog reda dobiven je mehanizam sa pet plastičnih zglobova, gdje se 4 i 5 plastični zglob formiraju simultano (istovremeno). Koristeći P-Δ matricu krutosti dobiven je mehanizam kao po teoriji prvog reda ali bez petog plastičnog zgloba. Koristeći tačnu matricu krutosti po teoriji drugog reda mjesto četvrtog plastičnog zgloba se razlikuje od prethodnog mehanizma. Primjetna je velika razlika u horizontalnim pomjeranjima. Kako bi uradili drugi slučaj gdje se samo horizontalno opterećenje množi sa  $\lambda$  potrebno je modifikovati program da računa dva slučaja opterećenja pri čemu je jedan konstantan a za drugi se određuje faktor graničnog opterećenja  $\lambda_C$ . Kako je kód za proširenje programa uz navedene komentare poprilično samoobjašnjiv a u cilju smanjenja obima rada to se isti neće prilagati ovdje, već se priložiti uz CD. A ovdje će se prikazati konačan dijagram.



**Slika 60:** Dijagram  $\lambda$ - $U_{x2}$ , uz prikaz redoslijeda formiranja plastičnih zglobova, prvi slučaj



**Slika 61:** Dijagram  $\lambda$ - $U_{x2}$ , uz prikaz redoslijeda formiranja plastičnih zglobova, drugi slučaj

## 6/. FAKTORI KOJI DODATNO UTIČU NA $\lambda$

U prethodnim poglavljima uvedene su pretpostavke koje manje ili više utiču na realno ponašanje konstrukcije. Prethodno uvedene pretpostavke za proračun metodama lokalne plastifikacije su:

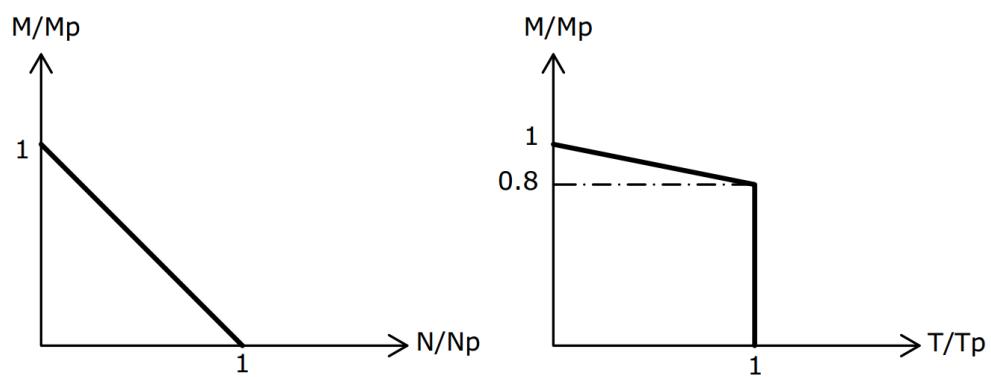
- materijal je :
  - elastičan-idealno plastičan (elasto-plastična analiza)
  - krut – idealno plastičan (kruto-plastična analiza)
- dominantan je uticaj momenta savijanja na formiranje plastičnih zglobova, zanemaruje se uticaj normalne i poprečne sile na vrijednost momenta plastičnosti
- 1D kriterij tečenja ( $\sigma \leq \sigma_{PL}$ , tj.  $M \leq M_{PL}$ )
- zanemareni su uticaji teorije drugog reda
- poprečni presjeci imaju neograničen kapacitet rotacije
- opterećenje je monotono i proporcionalno

U narednom poglavlju analizirat će se uticaj pojedinih do sada zanemarenih faktora i to:

- interakcije M-N i M-T
- deformabilnost veza
- ograničena pomjeranja
- neproporcionalna i ciklična opterećenja

### 6.1/. INTERAKCIJE M-N I M-T

U prethodnim proračunima zanemaren je uticaj normalne i poprečne sile na vrijednost momenta plastičnosti a time i na vrijednosti faktora graničnog opterećenja. Uzimanje u obzir normalne i poprečne sile će se obuhvatiti kroz pojednostavljene interaktivne dijagrame M-N i M-T. Za stubove uzimat će se u obzir samo M-N interakcija a za grede samo M-T interakcija. U nastavku sljede pojednostavljeni interaktivni dijagrami te primjer za demonstraciju.



**Slika 62:** Interaktivni dijagrami

Prema dijogramima imamo funkcije:

$$\frac{M}{M_p} = 1 - \frac{N}{N_p}$$

$$\frac{M}{M_p} = 1 - 0.2 \cdot \frac{T}{T_p}$$

### 6.1.1/. PRIMJER

Za okvir sa slike 54 odrediti faktor graničnog opterećenje sa i bez interakcije M-N i M-T. U obzir uzeti samo vertikalno opterećenje, za stubove uzeti HEA450 a za grede IPE550 čelične profile uz kvalitetnu klasu čelika S355. Proračun uraditi po teoriji prvog reda.

Prvo ćemo uraditi proračun bez interakcija. U nastavku slijedi izlazni fajl i prateći dijagram( $\lambda-U_{y7}$ ).

```
***** ISPIS REZULTATA PRORAČUNA *****
-----  

-----  

KORAK 1  

-----  

Faktor opterećenja: L1 = 47.579  

Ukupni faktor opterećenja: L = 47.579  

Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 2.  

Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 9.  

-----  

-----  

KORAK 2  

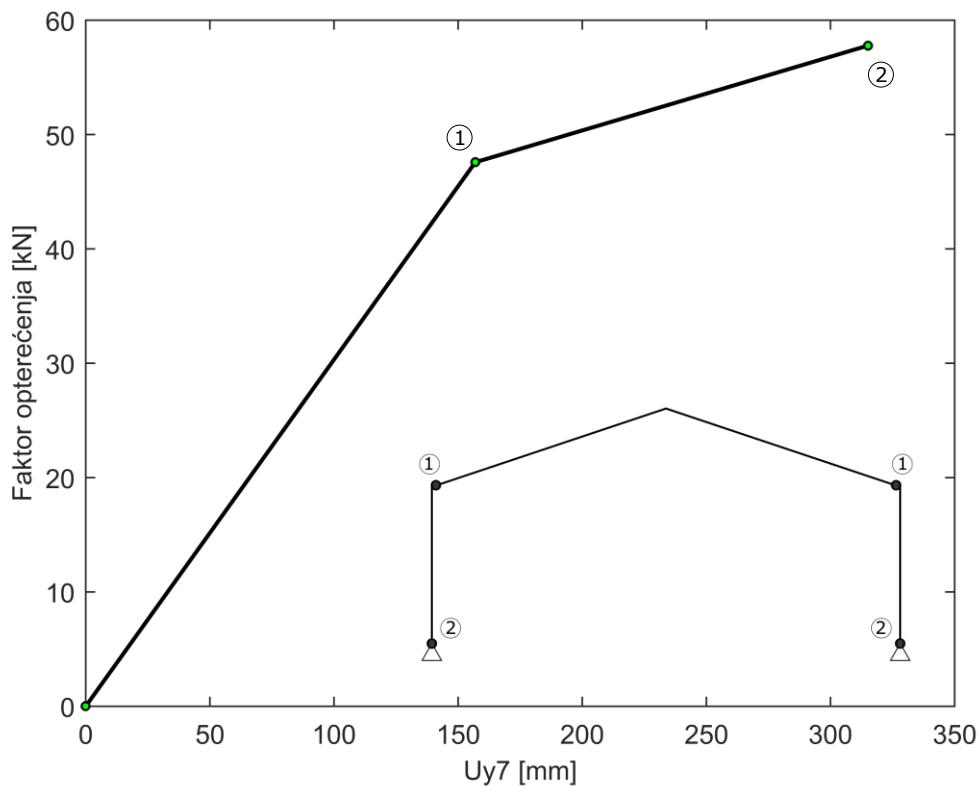
-----  

Faktor opterećenja: L2 = 10.198  

Ukupni faktor opterećenja: L = 57.777  

Mjesto plastičnog zgloba: Prvi čvor elementa 1.  

Mjesto plastičnog zgloba: Drugi čvor elementa 10.
```



**Slika 63:** Dijagram  $\lambda-U_{y7}$  za slučaj bez interakcija

Proračun uzimanjem u obzir interakcija je urađen pješke (sistem po sistemu), a iterativni dio poduranja pretpostavljene i dobijene vrijednosti  $\lambda$  je urađen u <sup>[19]</sup> te se u nastavku prilaže taj proračun.

**Tabela 4:** Proračun  $\lambda$

$M_{PS}$	1141,68	$M_{PG}$	989,39
$N_{PS}$	6319,00	$T_{PG}$	1063,80

## Korak I

PS/Č	1,00	2,00	2,00	3,00	3,00	4,00	4,00	5,00	5,00	6,00
M	-17,09	-20,79	-20,79	-4,53	4,53	5,74	-5,74	10,00	-10,00	8,27
T	4,74	4,74	-5,14	-5,14	-3,25	-3,25	-1,35	-1,35	0,55	0,55
N	-8,00	-8,00	-6,71	-6,71	-6,07	-6,07	-5,44	-5,44	-4,84	-4,81

M <sub>P,red</sub>	1052,65	1067,47	945,89	816,96	872,90	895,11	947,92	965,15	979,37	1033,12
M <sub>i</sub>	-1052,65	-1067,47	-945,89	-816,96	872,90	895,11	-947,92	965,15	-979,37	1033,12
M <sub>i</sub>	1052,65	1067,47	945,89	816,96	872,90	895,11	947,92	965,15	979,37	1033,12
λ	61,59	51,35	45,50	180,34	192,69	155,94	165,14	96,51	97,94	124,92

λ <sub>MIN</sub>	45,50
------------------	-------

M <sub>P,red</sub>	1075,92	1075,92	945,89	945,89	961,88	961,88	977,96	977,96	984,73	984,73
--------------------	---------	---------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

M	-777,55	-945,89	-945,89	-206,10	206,10	261,15	-261,15	454,97	-454,97	376,26
T	215,66	215,66	-233,86	-233,86	-147,87	-147,87	-61,42	-61,42	25,02	25,02
N	-363,98	-363,98	-305,29	-305,29	-276,17	-276,17	-247,50	-247,50	-220,21	-218,84

## Korak II

M	-32,24	0,00	0,00	16,97	-16,97	27,97	-27,97	32,91	-32,91	31,88
T	4,03	4,03	-5,37	-5,37	-3,47	-3,47	-1,57	-1,57	0,33	0,33
N	-8,00	-8,00	-6,04	-6,04	-5,40	-5,40	-4,77	-4,77	-4,14	-4,14

M <sub>P,red</sub>	1063,12	-	-	1035,17	1071,94	1087,93	1118,17	1121,67	1134,85	1134,62
M <sub>P,ost</sub>	285,57	0,00	0,00	829,07	865,84	826,77	857,02	666,70	679,87	758,36
M <sub>i</sub>	-285,57	0,00	0,00	829,07	-865,84	826,77	-857,02	666,70	-679,87	758,36
M <sub>i</sub>	285,57	0,00	0,00	829,07	865,84	826,77	857,02	666,70	679,87	758,36
λ	8,86	-	-	48,86	51,02	29,56	30,64	20,26	20,66	23,79

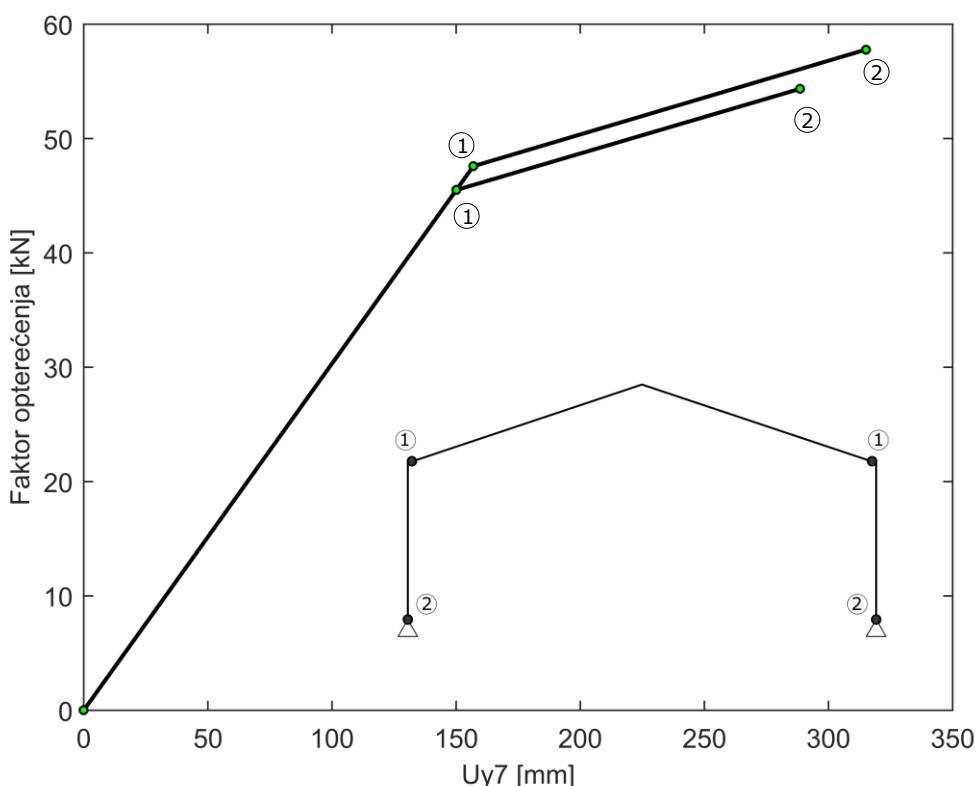
λ <sub>MIN</sub>	8,86
------------------	------

M <sub>P,red</sub>	1063,12	-	-	1081,28	1103,34	1103,34	1125,51	1125,51	1135,68	1135,68
--------------------	---------	---	---	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

M	-285,57	0,00	0,00	150,31	-150,31	247,75	-247,75	291,50	-291,50	282,38
T	35,70	35,70	-47,57	-47,57	-30,74	-30,74	-13,91	-13,91	2,92	2,92
N	-70,86	-70,86	-53,50	-53,50	-47,83	-47,83	-42,25	-42,25	-36,67	-36,67

M	-1063,12	-945,89	-945,89	-55,79	55,79	508,90	-508,90	746,48	-746,48	658,64
T	251,35	251,35	-281,42	-281,42	-178,60	-178,60	-75,33	-75,33	27,95	27,95
N	-434,84	-434,84	-358,79	-358,79	-324,00	-324,00	-289,76	-289,76	-256,88	-255,51

$$\lambda_{UK} \quad 54,35$$



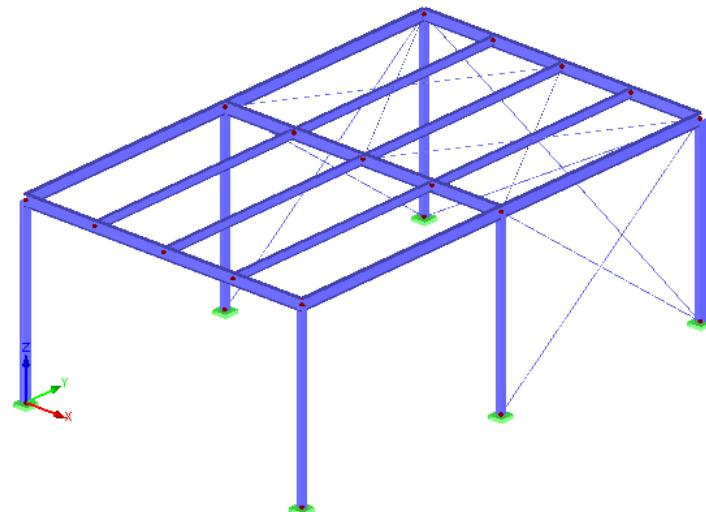
**Slika 64:** Dijagram  $\lambda$ - $U_{Y7}$  za slučaj sa i bez interakcija

Sa priloženog dijagrama može se donijeti zaključak da za konkretni primjer uzimanje u obzir M-N i M-T interakcija doprinosi zanemarljivom smanjenju faktora graničnog opterećenja i to od 6.3%, a duktilnosti od 4.45%.

## 6.2/. DEFORMABILNOST VEZA

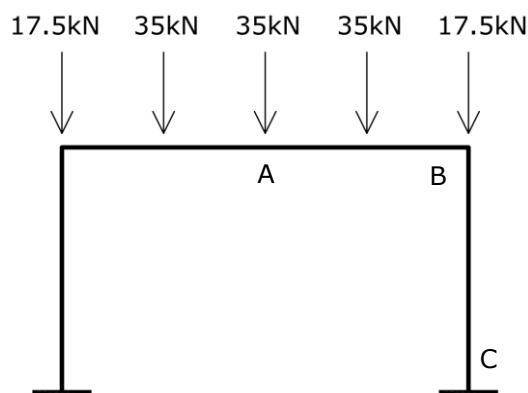
Među zanemarenim pojednostavljenjima nalazi se i deformabilnost veza. Do sada je veza između čvorova smatrana kruto-plastičnom te se nije uzimala u obzir deformabilnost stvarne veze u čvoru. Također deformabilnost tla nije uzimata u obzir. Oboje u većoj ili manjoj mjeri utiče na preraspodjelu presječnih sila a time i na faktor graničnog opterećenja. U svrhu izrade primjera kako bi se ispitao uticaj zanemarenih deformabilnosti izvršen je pojednostavljeni proračun čelične nadstrešnice sa slike 65. Proračun je urađen za dvije vrste opterećenja i to: vlastitu težinu i snijeg. Opterećenje vlastitom težinom je uzeto u obzir kroz računarski program <sup>[15]</sup> koji je korišten za proračun i dimenzioniranje nadstrešnice. Opterećenje snijegom je uzeto od  $1.5 \text{ kN/m}^2$ . Proračunom su usvojeni stubovi profila HEA220, a grede glavnog nosača IPE360. Raspon glavnih nosača iznosi 10m, a njihov raster 8m, dok su sekundarne grede postavljene na svakih 2.5m.

Veza stuba i grede urađena je u programu [16]. Deformabilnost veze stuba i temelja se zanemaruje, te se u obzir uzima samo deformabilnost temelja kroz deformabilnost tla. Prepostavka je da tlo ima koeficijent posteljice od  $20000 \text{ kN/m}^3$ . Na mjestu koncentrisanih sila od sekundarnih greda deformabilnost čvora je uzeta kroz  $M-\varphi$  dijagram dobiven korištenjem programa [17].

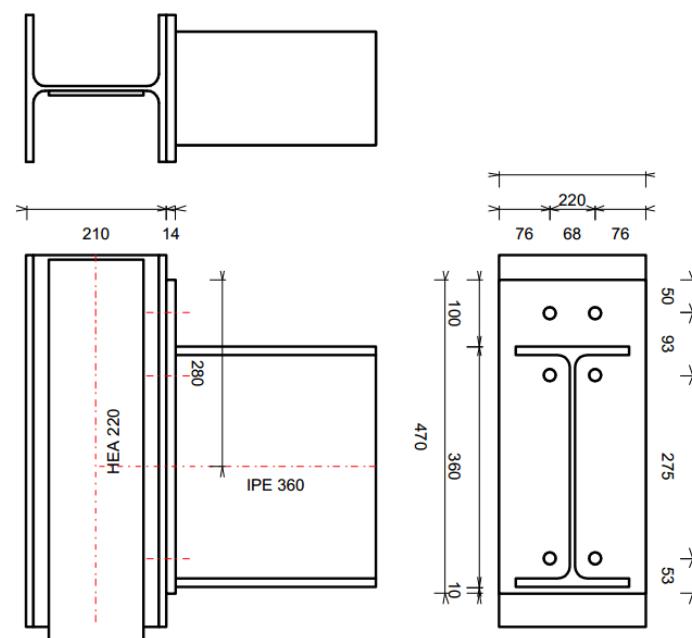


**Slika 65:** Nadstrešnica [15]

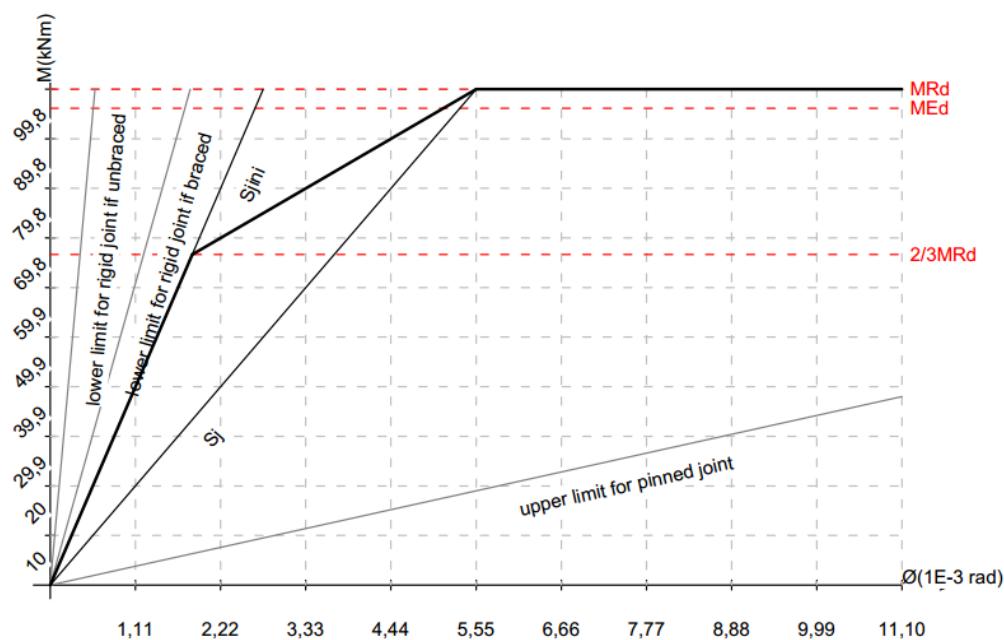
Razmatrat će se srednji glavni nosač izdvojen od ostatka konstrukcije na proračunsku situaciju  $1.35g + 1.5s$ . Poredit će se slučaj sa uzimanjem u obzir deformabilnosti navedenih veza i slučaj gdje zanemarujemo deformabilnost veza.



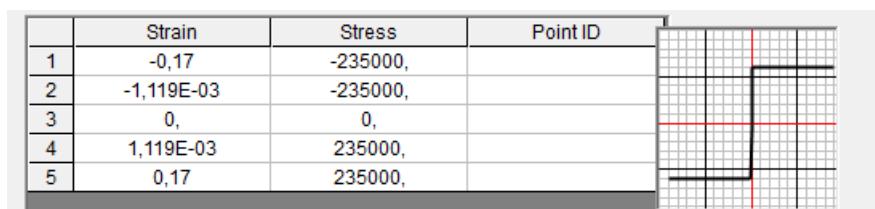
**Slika 66:** Razmatrani okvir sa opterećenjem snijegom



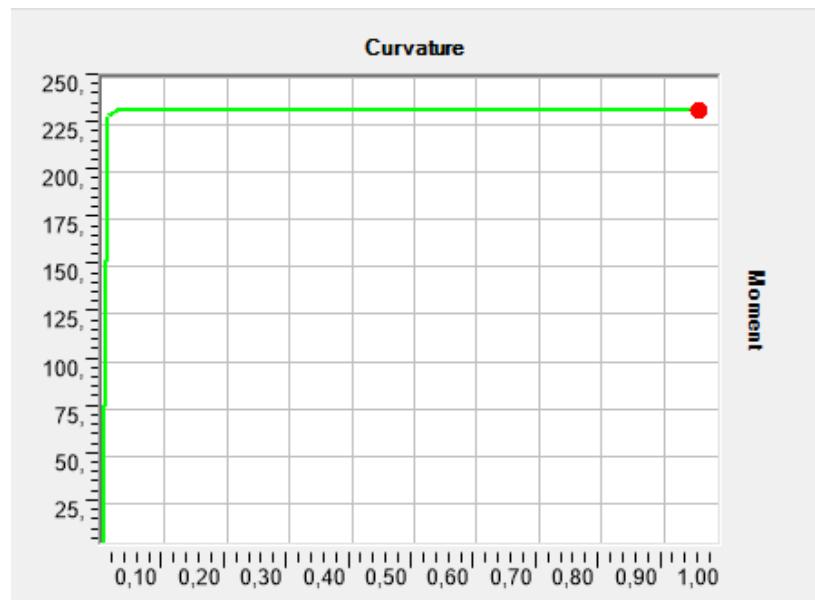
**Slika 67:** Veza stuba i grede [16]



**Slika 68:** Dijagram  $M-\phi$  veze stuba i grede [16]

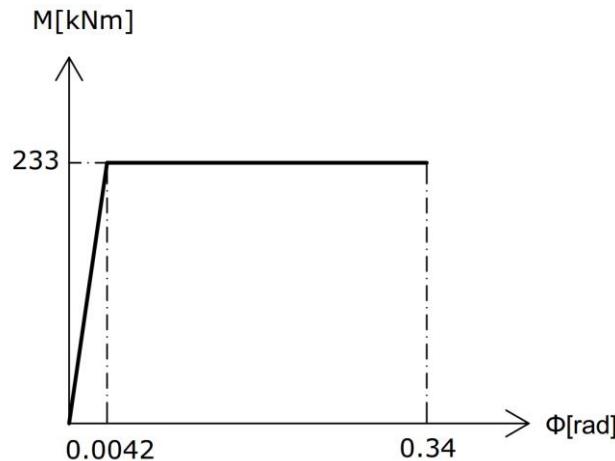


**Slika 69:** Dijagram  $\sigma-\epsilon$  čelika [17]



**Slika 70:** Dijagram  $M - K$  [17]

Idealizacijom prethodnog dijagrama uz pretpostavku da je dužina plastičnog zgloba jednaka visini poprečnog presjeka dobivamo sljedeći  $M-\phi$  dijagram.

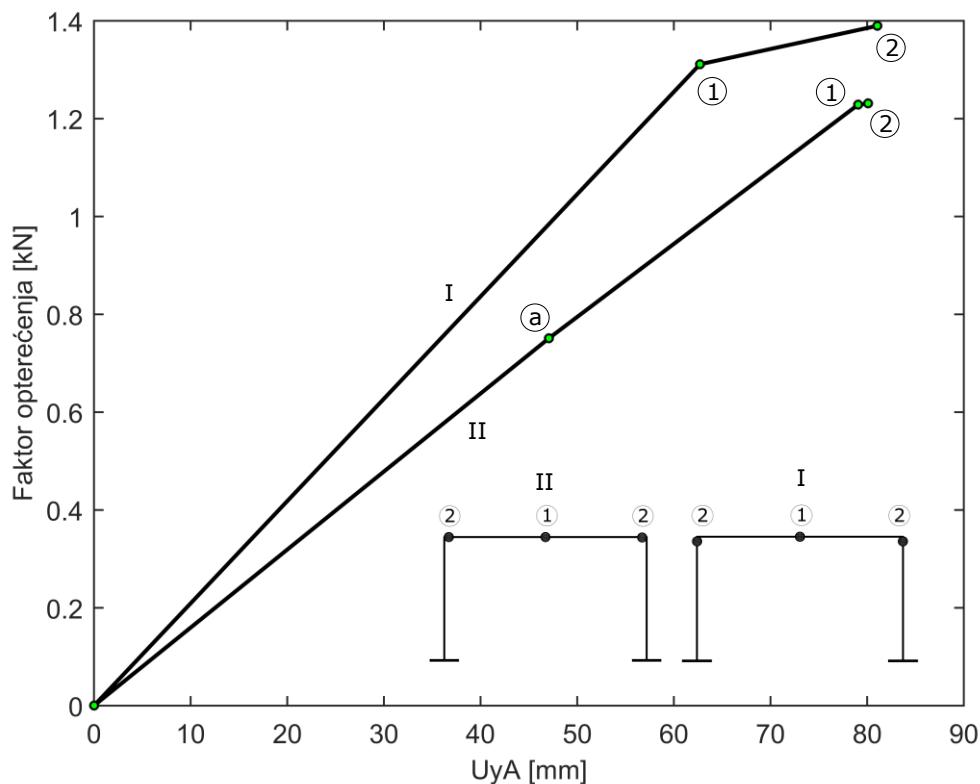


**Slika 71:** Idealizirani  $M\text{-}\varphi$  dijagram

Rotaciona krutost temelja iznosi (uz pretpostavku pravougaonog temelja dimenzija  $1,6 \cdot 1,0\text{m}$ ):

$$k_\varphi = k_p \cdot I = 20000 \cdot \frac{1,6^3 \cdot 1}{12} = 6827 \text{kNm / rad}$$

Proračun uzimanjem u obzir navedenih uticaja je urađen u programu <sup>[18]</sup> korištenjem link elemenata. U nastavku sljedi dijagram  $\lambda\text{-}U_{YA}$ .

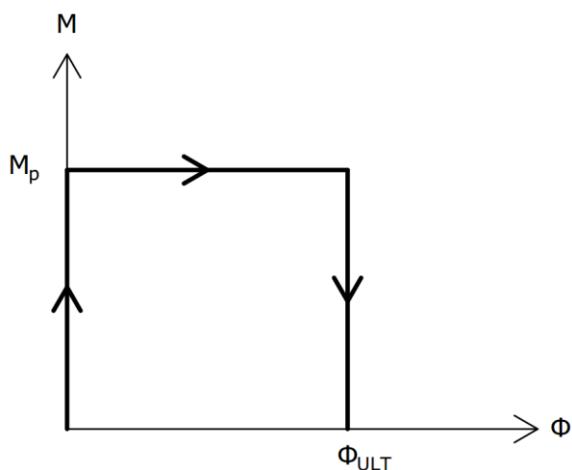


**Slika 72:** Dijagram  $\lambda\text{-}U_{YA}$ , I-bez deformabilnosti veza, II-sa deformabilnošću veza

Posmatrajući dijagram može se reći da je faktor graničnog opterećenja manji za  $\sim 13\%$  uzimajući u obzir deformabilnost veza. Razlike u konačnim pomjeranjima pri slomu nema. Redoslijed formiranja plastičnih zglobova je isti, prvo otkazuje presjek u sredini grede a zatim čvor stub-greda, stim da kod uzimanja u obzir deformabilnosti veza otkazuje veza stub-greda, dok kod zanemarivanja deformabilnosti otkazuje stub u čvoru stub-greda. Također uzimanjem u obzir deformabilnost veza slom nastupa gotovo trenutno jer je razlika u opterećenju za formiranje prvog i preostala dva zgloba zanemariva.

## 6.3/. OGRANIČENA POMJERANJA

U prethodnim proračunima svi presjeci su se mogli deformisati neograničeno, što je omogućavalo formiranje kranjeg mehanizma pod pretpostavkom konstantnog momenta u zglobu (v. sl. 7b). Međutim u stvarnosti presjeci se ne mogu neograničeno deformisati (drobljenje betona, izbočavanje limova, kidanje veza i sl.), tako da moment savijanja u presjeku nije konstantran već prilikom loma presjeka pada na nulu. Kako bi ispitali uticaj ograničenih pomjeranja na faktor graničnog opterećenja to će se uraditi dva primjera. Primjeri će biti urađeni metodama: *displacement control* (nametanjem pomjeranja) i *force control* (nametanjem opterećenja). Proračun se vrši korištenjem programa [18].



**Slika 73:** Pad momenta savijanja

### 6.3.1/. PRIMJER 1

Analizirati uticaj ograničenih pomjeranja okvira sa slike 66.uz sljedeće izmjene: zanemariti vlastitu težinu, u obzir uzeti koncentrisanu silu 1kN koja djeluje na sredini raspona grede, promjena poprečnog presjeka stuba na HEA400. Ultimna rotacija veze se pretpostavlja od 0,0077 radijana.

Displacement control – proračun pod kontrolom pomjeranja

Sumiran proračun okvira se daje u sljedećoj tabeli.

**Tabela 5:** Displacement control proračun okvira

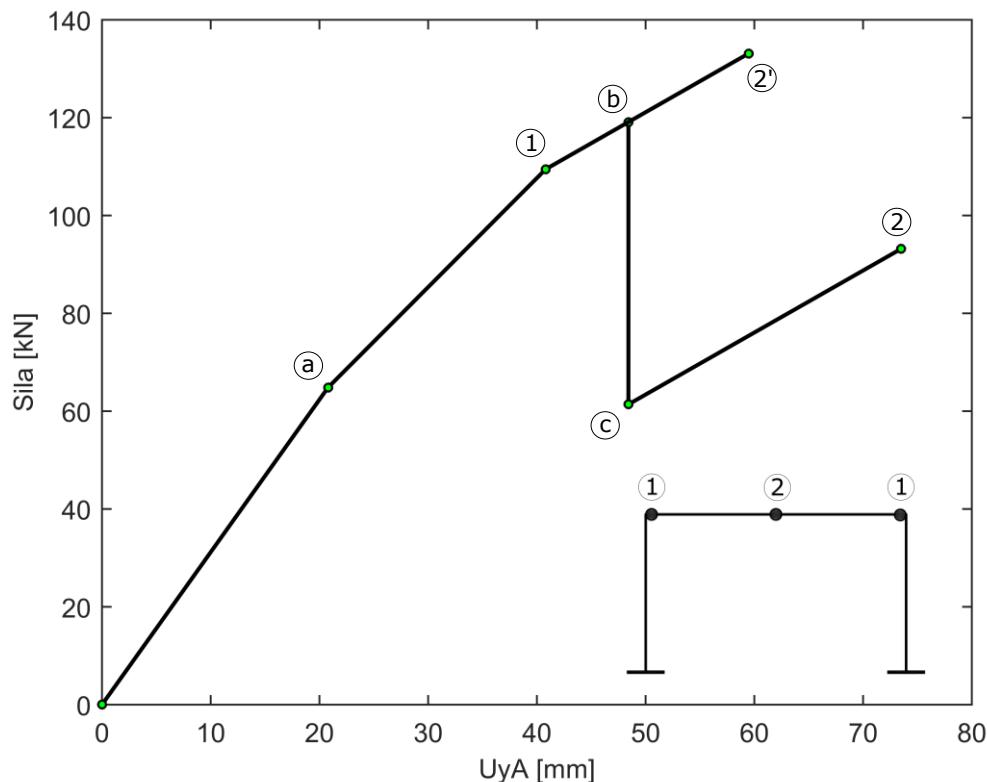
n	$\lambda(n)$	F [kN]	$M_A$ [kNm]	$M_B$ [kNm]	$U_{YA}$ [mm]	$\Phi_A$ [rad]	$\Phi_B$ [rad]
1	20,7977	64,846	95,583	66,53	20,7977	0,000862	0,001856
2	40,803	109,45	173,82	99,8	40,803	0,001567	0,005554
3	48,417	119,103	197,94	99,8	48,417	0,001784	0,0077
4	48,417	61,386	153,464	0	48,417	0,001382	0,0077
5	73,51	93,2	233	0	73,51	0,0021	0,0077

Ukoliko ne bismo ograničavali pomjeranja tabela bi izgledala:

**Tabela 6:** Displacement control proračun okvira bez ograničenja pomjeranja

n	$\lambda(n)$	F [kN]	$M_A$ [kNm]	$M_B$ [kNm]	$U_{YA}$ [mm]	$\Phi_A$ [rad]	$\Phi_B$ [rad]
1	20,7977	64,846	95,583	66,53	20,7977	0,000862	0,001856
2	40,803	109,45	173,82	99,8	40,803	0,001567	0,005554
3	59,473	133,12	233	99,8	59,473	0,0021	0,0109

Analizirajući tabelu 4 vidimo da pri faktoru opterećenja od 20.7977 dolazi do promjene krutosti veze stuba i greda, zatim pri faktor opterećenja od 40.803 veza se plastificira i dolazi do formiranja plastičnog zgloba, da bi pri faktor opterećenja od 48.417 došlo do ultimne rotacije veze od 0.0077 radijana, presjek se zatim oslobađa momenta i svo do tada nametnuto pomjeranja opterećuje prostu gredu. Dolazi do pada sile za isto pomjeranje, da bi zatim sila zajedno sa pomjeranjem rasla do formiranja posljednjeg plastičnog zgloba.



**Slika 74:** Dijagram sila-pomjeranje, displacement control sa i bez ograničenih pomjeranja

Putanja 0-a-1-b-c-2 pripada slučaju kada uzimamo u obzir ograničenje pomjeranja, dok putanja 0-a-1-2' pripada slučaju kada zanemarujemo ograničenje pomjeranja. Postoji primjetna razlika u faktoru graničnog opterećenja uzimanjem u obzir i zanemarivanjem ograničenih pomjeranja.

### Force control – proračun pod kontrolom opterećenja

Proračun uz uzimanje u obzir ograničenih pomjeranja sumiran je u narednoj tabeli.

**Tabela 7:** Force control proračun okvira

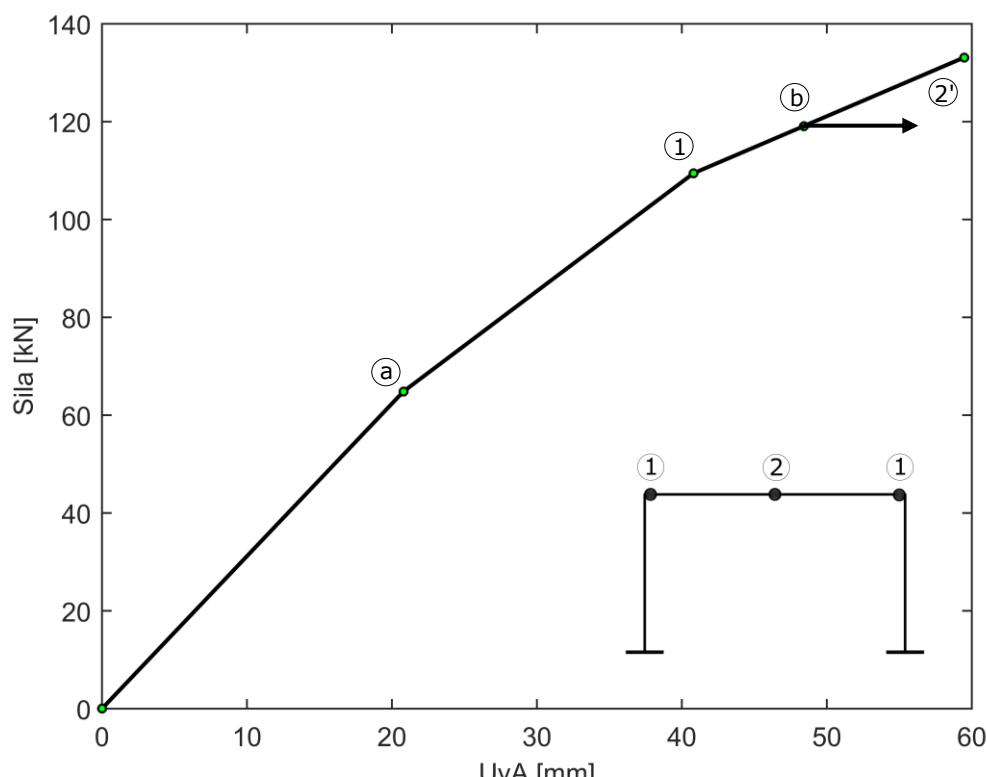
n	$\lambda(n)$	F [kN]	$M_A$ [kNm]	$M_B$ [kNm]	$U_{YA}$ [mm]	$\Phi_A$ [rad]	$\Phi_B$ [rad]
1	64,847	64,846	95,583	66,53	20,7977	0,000862	0,001856
2	109,45	109,45	173,82	99,8	40,803	0,001567	0,005554
3	119,103	119,103	197,94	99,8	48,417	0,001784	0,0077
4	119,103	119,103	297,757	0	-	-	-

Ukoliko ne bismo ograničavali pomjeranja tabela bi izgledala:

**Tabela 8:** Force control proračun okvira sa neograničenim pomjeranjima

n	$\lambda(n)$	F [kN]	$M_A$ [kNm]	$M_B$ [kNm]	$U_{YA}$ [mm]	$\Phi_A$ [rad]	$\Phi_B$ [rad]
1	64.846	64,846	95,583	66,53	20,7977	0,000862	0,001856
2	109,45	109,45	173,82	99,8	40,803	0,001567	0,005554
3	133,12	133,12	233	99,8	59,473	0,0021	0,0109

Kako pri kontroli sile nema pojave opadanja sile ( što se u realnosti i ne događa) to kada otkaže presjek sa vezom (tačka b) imamo apliciranu veću silu od one koju sistem može podnijeti ( $M = 297,757 \text{ kNm} > M_P = 233 \text{ kNm}$ ), te nastupa trenutni slom onda kada otkaže veza uslijed dostizanja granične rotacije. Također i primjenom force control metode primjetna je razlika u graničnoj nosivosti sistema uzimanjem u obzir i zanemarivanjem ograničenih pomjeranja.



**Slika 75:** Dijagram sila-pomjeranje, force control sa i bez ograničenih pomjeranja

Kako bi obuhvatili formiranje platoa kod *force control* metode za slučaj kada greda može preuzeti silu nakon odkazivanja veze uslijed dostizanja granične rotacije to će se uraditi još jedan primjer.

### 6.3.2/. PRIMJER 2

Analizirati uticaj ograničenih pomjeranja na okvir iz prethodnog primjera uz sljedeće izmjene: povećati poprečni presjek grede na IPE600.

#### Displacement control

Sumiran proračun se prilaže u narednoj tabeli.

**Tabela 9:** Displacement control proračun okvira

n	$\lambda(n)$	F [kN]	$M_A$ [kNm]	$M_B$ [kNm]	$U_{YA}$ [mm]	$\Phi_B$ [rad]
1	14,294	87,46	152,113	66,53	14,294	0,001856
2	31,538	167,112	317,97	99,8	31,537	0,005554
3	39,538	195,589	389,12	99,8	39,538	0,0077
4	39,538	140,663	351,66	0	39,538	0,0077
5	92,757	330	825	0	92,757	0,0077

**Tabela 10:** Displacement control proračun, neograničena pomjeranja

n	$\lambda(n)$	F [kN]	$M_A$ [kNm]	$M_B$ [kNm]	$U_{YA}$ [mm]	$\Phi_B$ [rad]
1	14,294	87,46	152,113	66,53	14,294	0,001856
2	31,538	167,112	317,97	99,8	31,537	0,005554
3	88,544	369,92	825	99,8	88,544	0,021222

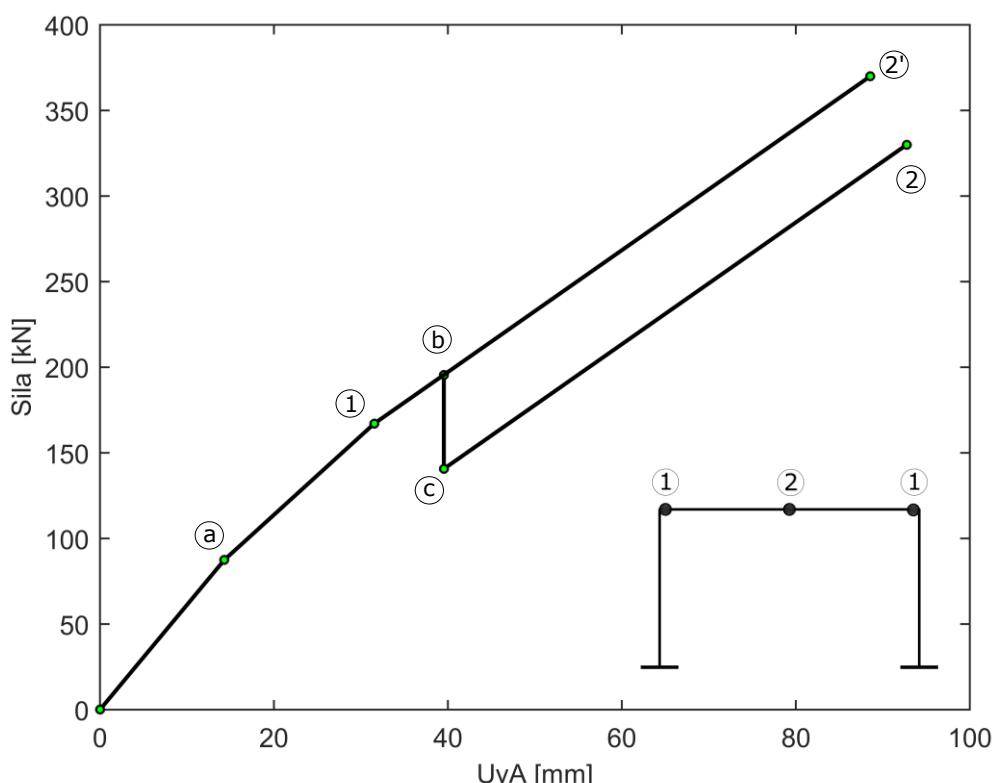
#### Force control

**Tabela 11:** Force control proračun okvira

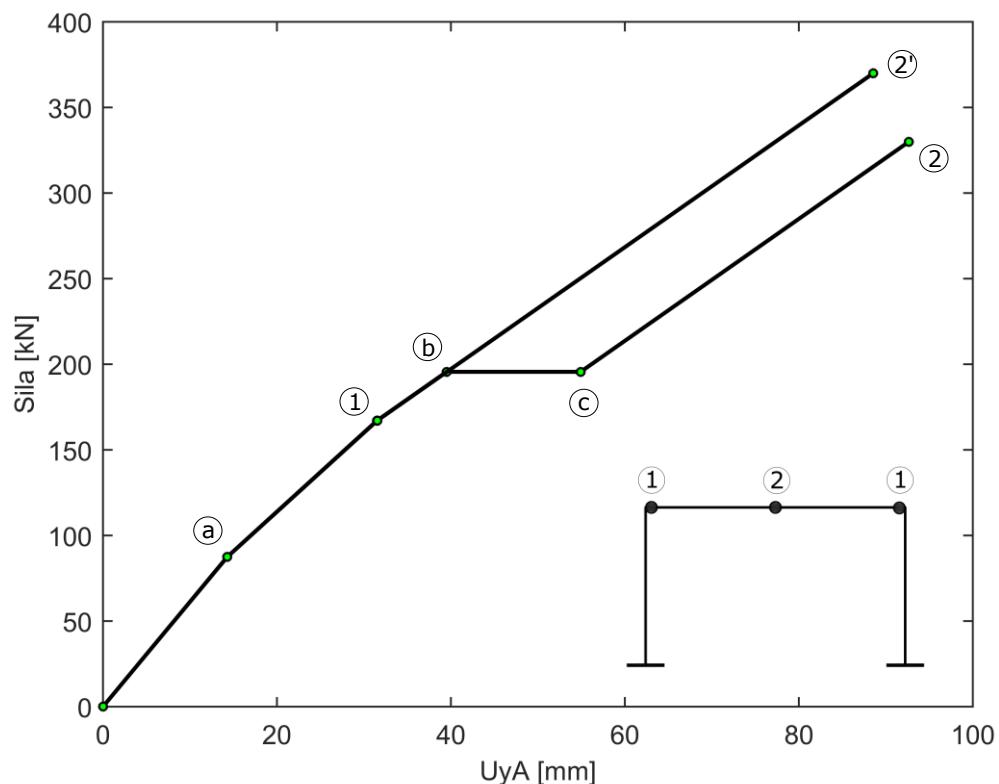
n	$\lambda(n)$	F [kN]	$M_A$ [kNm]	$M_B$ [kNm]	$U_{YA}$ [mm]	$\Phi_B$ [rad]
1	87,46	87,46	152,113	66,53	14,294	0,001856
2	167,112	167,112	317,97	99,8	31,537	0,005554
3	195,589	195,589	389,12	99,8	39,538	0,0077
4	195,589	195,589	488,95	0	54,92	0,0077
5	330	330	825	0	92,66	0,0077

**Tabela 12:** Force control proračun okvira, neograničena pomjeranja

n	$\lambda(n)$	F [kN]	$M_A$ [kNm]	$M_B$ [kNm]	$U_{YA}$ [mm]	$\Phi_B$ [rad]
1	87,46	87,46	152,113	66,53	14,294	0,001856
2	167,112	167,112	317,97	99,8	31,537	0,005554
3	369,92	369,92	825	99,8	88,544	0,021222

**Slika 76:** Dijagram sila-pomjeranje, displacement control sa i bez ograničenih pomjeranja

Putanja 0-a-1-b-c-2 pripada *displacement control* metodi sa ograničenim pomjeranjima, putanja 0-a-1-2' pripada objema *displacement control* metodi sa neograničenim pomjeranjima. Nosivost uzimanjem u obzir ograničenih pomjeranja je za ~12% manja.



**Slika 77:** Dijagram sila-pomjeranje, force control sa i bez ograničenih pomjeranja

#### 6.4/. NEPROPORCIONALNA I CIKLIČNA OPTEREĆENJA

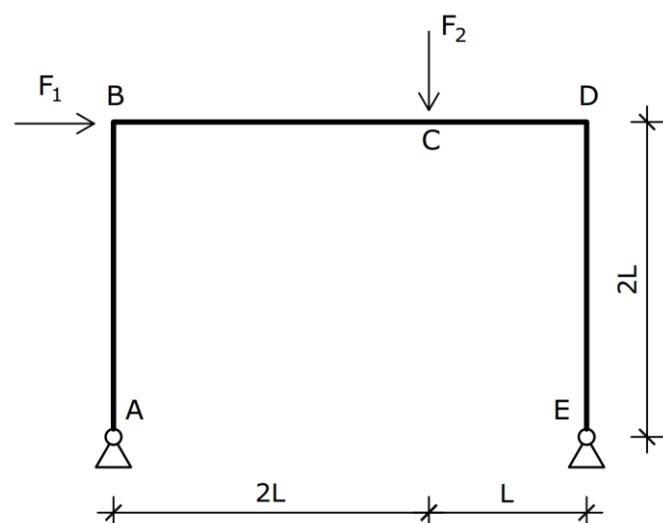
#### 6.4.1/. NEPROPORCIONALNA PROMJENLJIVA OPTEREĆENJA

Određene vrste opterećenja su daleko od proporcionalnih. Za primjer, konstrukcija može biti opterećenja vertikalnim opterećenjem, a zatim horizontalnim opterećenjem vjetrom koje varira bez ikakve korelacije sa prethodno nanešenim vertikalnim opterećenjem. Cilj je utvrditi *sigurni domen* u *polju opterećenja*. Generalno potreban uslov da konstrukcija bude sigurna od plastičnog loma jeste da je vanjski rad sila koje djeluju na konstrukciju manji od unutrašnjeg rada. Za svaki mehanizam sa jednim stepenom slobode kretanja dobivamo dvije nejednačine koje definišu dva beskonačna pravca u *prostoru faktora opterećenja*. *Elastoplastični domen* predstavlja presjek svih pravaca dobivenih analizom svih mogućih mehanizama. Rubovi *elastoplastičnog domena* se nazivaju *plastični limit*. Razlog iz kojeg se pravi razlika između *sigurnog domena* i *elastoplastičnog domena* jeste ta da konstrukcija može doživjeti slom pod cikličnim opterećenjem iako opterećenje ostaje u *elastoplastičnom domenu*.

U svrhu demonstracije načina dobivanja *elastplastičnog domena* uradit će se primjer iz literature [9].

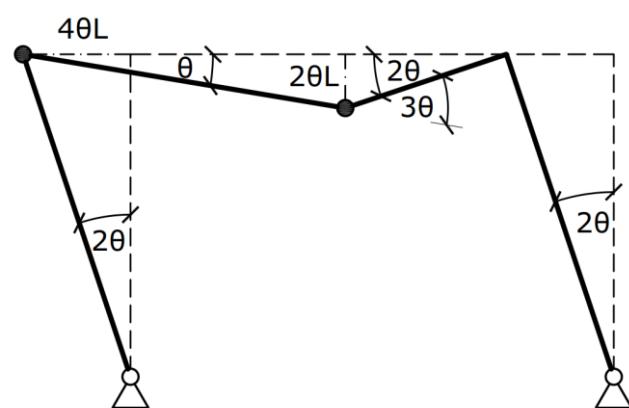
#### 6.4.1.1/. PRIMJER

Odrediti elastoplastični domen okvira sa slike 78 iz [9]. Moment plastičnosti svih presjeka iznosi  $M_p$ .



**Slika 78:** Okvir sa opterećenjem [9]

Prvo ćemo analizirati mehanizam sa plastičnim zglobovima u čvorovima B i C.



**Slika 79:** Mehanizam 1 [9]

Rad vanjskih sila iznosi:

$$W_E = -F_1 \cdot 4\theta L + F_2 \cdot 2\theta L$$

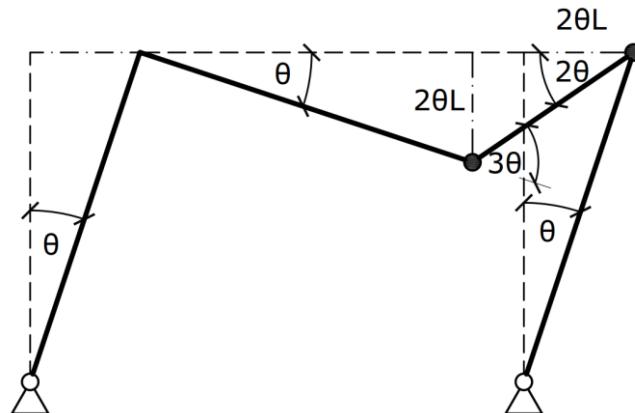
rad unutrašnjih sila iznosi:

$$W_I = (3 + 3) \cdot M_p \cdot \theta$$

Uslov da je rad vanjskih sila manji od rada unutrašnjih sila je zadovoljen ako vrijedi:

$$-3 < \frac{2F_1 \cdot L}{M_p} - \frac{F_2 \cdot L}{M_p} < 3$$

Sada analiziramo mehanizam sa plastičnim zglobovima u čvorovima C i D.



**Slika 80:** Mehanizam 2 [9]

Rad vanjskih sila iznosi:

$$W_E = F_1 \cdot 2\theta L + F_2 \cdot 2\theta L$$

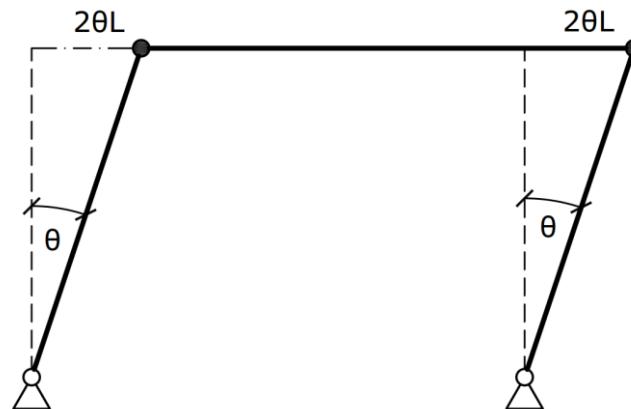
rad unutrašnjih sila iznosi:

$$W_I = (3 + 3) \cdot M_p \cdot \theta$$

Uslov da je rad vanjskih sila manji od rada unutrašnjih sila je zadovoljen ako vrijedi:

$$-3 < \frac{F_1 \cdot L}{M_p} + \frac{F_2 \cdot L}{M_p} < 3$$

Na kraju analiziramo mehanizam sa plastičnim zglobovima u čvorovima B i D.



**Slika 81:** Mehanizam 3 [9]

Rad vanjskih sila iznosi:

$$W_E = F_1 \cdot 2\theta L$$

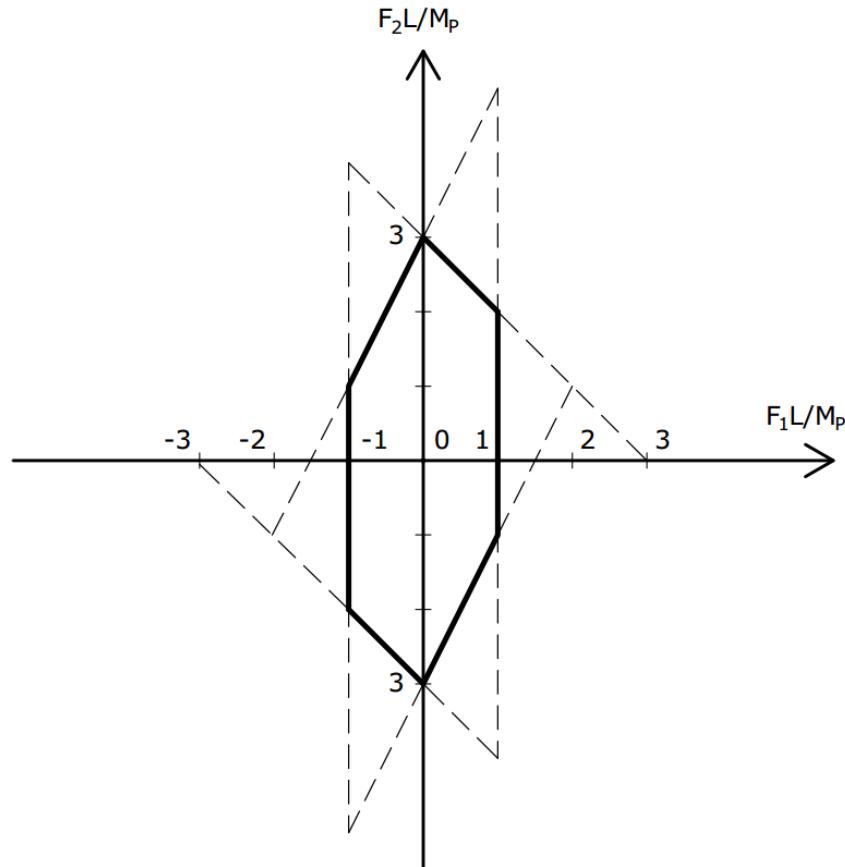
rad unutrašnjih sila iznosi:

$$W_I = (1+1) \cdot M_p \cdot \theta$$

Uslov da je rad vanjski sila manji od rada unutrašnjih sila je zadovoljen ako vrijedi:

$$-1 < \frac{F_1 \cdot L}{M_p} < 1$$

Na osnovu prethodno napisanih šest nejednakosti možemo kontruisati elastoplastičnu domenu.



**Slika 82:** Elastoplastična domena za okvir sa slike 69 [9]

#### 6.4.2/. CIKLIČNA OPTEREĆENJA I SHAKEDOWN

Iz prethodne analize slijedi da je konstrukcija sigurna za sve kombinacije opterećenja koje padaju unutar *elastoplastične domene*, međutim isto ne vrijedi za ciklična opterećenja koja se ponavljaju mnogo puta. Razlog tome je što prostor unutar elastoplastične domene ne uključuje samo čisto elastično stanje, već i djelimično plastično stanje gdje se formirao određeni broj plastičnih zglobova, ali nedovoljan za formiranje mehanizma. Ciklično opterećenje koje dovodi do određenih plastičnih deformacija u plastičnom zgobu može dovesti do sloma konstrukcije. Demonstraciju prethodne tvrdnje ćemo pokazati na primjeru koji sljedi.

##### 6.4.2.1/. PRIMJER

Analizirati odgovor okvira sa slike 78 iz [9] pod sljedećim načinom opterećivanja. Prvo nanosimo opterećenje  $F_2$  u vrijednosti do  $2.6M_p/L$ , a zatim  $F_1$  u vrijednosti do  $0.3M_p/L$ . Opterećenje  $F_1$  se zatim naizmjenično uklanja i ponovo nanosi.

Problem ćemo riješiti inkrementalno. Trebamo znati odgovor tri konstrukcije, konstrukciju je pogodno riješiti metodom sila jer je u pitanju jednom statički neodređena konstrukcija. Bez ulazeњa u detalje proračuna navode se konačni rezultati.

Stvarna konstrukcija:

$$M_B = F_1 \cdot L - \frac{3}{13} \cdot F_2 \cdot L$$

$$M_C = -\frac{1}{3} \cdot F_1 \cdot L + \frac{17}{39} \cdot F_2 \cdot L$$

$$M_D = -F_1 \cdot L + \frac{3}{13} \cdot F_2 \cdot L$$

$$U_{xB} = \frac{L^3}{EI} \left( \frac{7}{3} \cdot F_1 - \frac{1}{9} \cdot F_2 \right)$$

$$U_{yC} = \frac{L^3}{EI} \left( -\frac{1}{9} \cdot F_1 + \frac{25}{117} \cdot F_2 \right)$$

Konstrukcija sa zglobom u čvoru C:

$$M_B = \frac{4}{3} \cdot F_1 \cdot L - \frac{2}{3} \cdot F_2 \cdot L$$

$$M_C = 0$$

$$M_D = -\frac{2}{3} \cdot F_1 \cdot L - \frac{2}{3} \cdot F_2 \cdot L$$

$$U_{xB} = \frac{L^3}{EI} \left( \frac{76}{27} \cdot F_1 - \frac{20}{27} \cdot F_2 \right)$$

$$U_{yC} = \frac{L^3}{EI} \left( -\frac{20}{27} \cdot F_1 + \frac{28}{27} \cdot F_2 \right)$$

Konstrukcija sa zglobom u čvoru D:

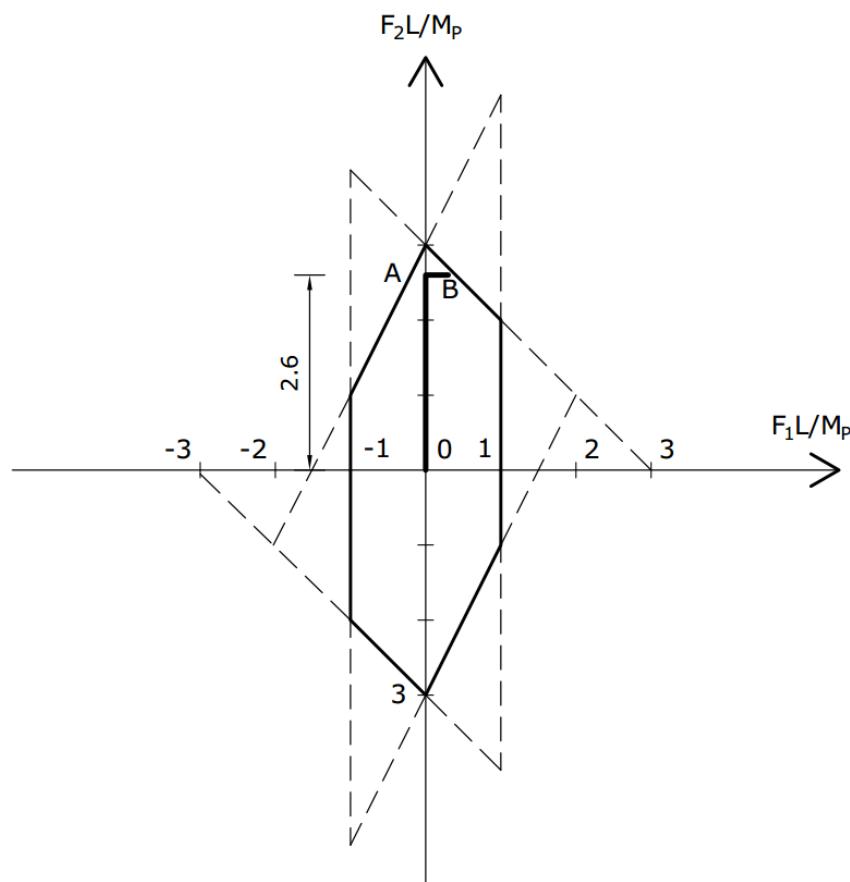
$$M_B = 2 \cdot F_1 \cdot L$$

$$M_C = \frac{2}{3} \cdot F_1 \cdot L + \frac{2}{3} \cdot F_2 \cdot L$$

$$M_D = 0$$

$$U_{xB} = \frac{L^3}{EI} \left( \frac{20}{3} \cdot F_1 + \frac{8}{9} \cdot F_2 \right)$$

$$U_{yC} = \frac{L^3}{EI} \left( \frac{8}{9} \cdot F_1 + \frac{4}{9} \cdot F_2 \right)$$

**Slika 83:** Režim opterećivanja [9]

Faze momenata i pomjeranja nosača kroz koje prolazi pri jednom ciklusu  $OABA$  je sumiran u sljedećoj tabeli.

**Tabela 13:** Inkrementalno rješenje okvira pod cikličnim opterećenjem [9]

Opterećenje	Inkrement	$F_1 \cdot L / M_p$	$F_2 \cdot L / M_p$	$M_C / M_p$	$M_D / M_p$	$U_{XB} \cdot EI / M_p \cdot L^2$	$U_{YC} \cdot EI / M_p \cdot L^2$
0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	2,294	1	-0,529	-0,255	0,49
A	2	0	2,6	1	-0,733	-0,481	0,807
	3	0,267	2,6	0,911	-1	0,141	0,778
B	4	0,3	2,6	0,933	-1	0,363	0,807
	5	0,1	2,6	1	-0,8	-0,104	0,83
A	6	0	2,6	1	-0,733	-0,385	0,903

Počinjemo nanošenjem sile  $F_2$ , pri vrijednosti  $F_2 = 2.294 \cdot M_p / L$  formira se plastični zglob u čvoru C. Daljim povećanjem  $F_2$  do vrijednosti  $2.6 \cdot M_p / L$  momenat u čvoru D raste, ali ne dostiže vrijednost  $M_p$ . Od sada vrijednost  $F_2$  držimo konstantnom i počinjemo nanositi silu  $F_1$ . Okvir može biti bez plastičnog zgloba ili sa plastičnim zglobom u čvoru C. Pretpostavljajući prvo da je okvir bez plastičnog zgloba, što podrazumijeva rasterećenje u čvoru C dobivamo rezultat gdje se zaista čvor C rasterećuje. Istovremeno moment u čvoru D raste dok ne dostigne vrijednost  $M_p$ , što se dešava pri sili  $F_1 = 0.267 \cdot M_p / L$ . Daljim povećanjem  $F_1$  do vrijednosti  $0.3 \cdot M_p / L$  raste vrijednost momenta u čvoru C.

Pri rasterećenju prepostavljamo okvir bez plastičnog zgloba što podrazumijeva rasterećenja čvora D, što se i dešava. Istovremeno moment u čvoru C raste dok pri opterećenju  $F_1 = 0.1 \cdot M_p / L$  ne dostigne vrijednosti  $M_p$ . Daljim rasterećenjem, moment u čvoru D dodatno opada.

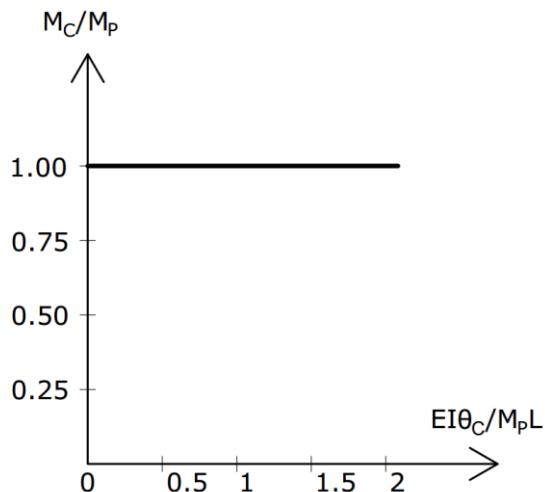
Tokom ciklusa ABA, između inkremenata 2 i 6, pomjeranja su se povećala za vrijednost  $0.096 M_p \cdot L^2 / EI$ . Ovo povećanje se dešava čisto uslijed plastične rotacije čvorova C i D. Nakon svakog ciklusa ABA distribucija momenata se ne mijenja, dok pomjeranja rastu za  $0.096 M_p \cdot L^2 / EI$ .

Očigledno nakon dovoljno velikog broja ciklusa, velika pomjeranja se mogu akumulirati, koja zasigurno rezultiraju slomom konstrukcije.

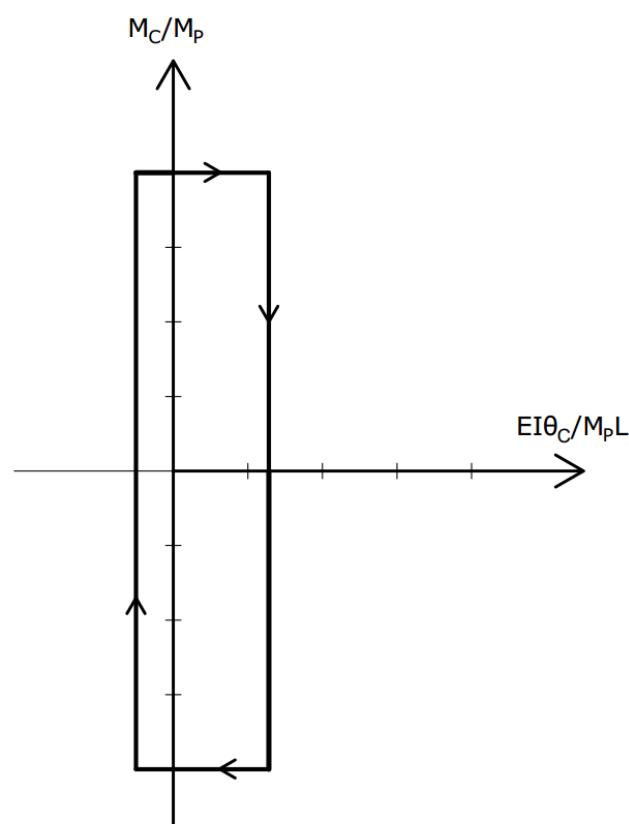
Vrsta sloma uslijed cikličnog opterećenja pod režimom opterećenja iz prethodnog primjera se naziva *inkrementalni slom*. Druga vrsta sloma pod cikličnim opterećenjem koje ostaje unutar *elastoplastičnog domena* se naziva *slom uslijed zamora*.

Slom uslijed zamora je moguće postići nanošenjem sile  $F_2$  do vrijednosti  $2.6 \cdot M_p/L$  zatim smanjujući istu do vrijednosti  $-2.4 \cdot M_p/L$ , zatim ponovo povećavajući do vrijednosti  $2.6 \cdot M_p/L$ , i tako dalje ponavljajući ciklus, pri čemu je sila  $F_1$  jednaka 0. Tokom ovog slučaja akumuliranje pomjeranja tokom ponavljanja ciklusa ne postoji, međutim momenti u čvorovima B i C mjenjaju predznake tj. javlja se pozitivno i negativno tečenje ( $+M_p$  i  $-M_p$ ), pri čemu zglobovi prolaze kroz pozitivnu i negativnu rotaciju. Eksperimenti pokazuju da učestala promjena predznaka deformacija uvijek vodi do sloma materijala nakon relativno malog broja ciklusa.

Za ilustraciju razlike između inkrementalnog sloma i sloma uslijed zamora možemo posmatrati  $M-\varphi$  dijagram.



**Slika 84:** Dijagram  $M-\varphi$ , inkrementalni slom [9]



**Slika 85:** Dijagram  $M-\varphi$ , slom uslijed zamora [9]

Za *slom uslijed zamora* rotacija plastičnog zgloba formira zatvorenu petlju, dok za *inkrementalni slom* rotacija plastičnog zgloba se nastavlja povećavati bez ograničenja. U oba slučaja konačni plastični rad je urađen unutar jednog ciklusa, ali nakon beskonačnog mnogo ciklusa totalna disipacija plastičnog rada postaje beskonačna. Prethodno opažanje vodi do koncepta sigurnosti pod cikličnim opterećenjem. Možemo očekivati da će konstrukcija biti sigurna pod cikličnim opterećenjem sa mnogo ponavljanja samo ako postoji ograničenje plastičnog rada kojeg uradi dozvoljena historija opterećenja, do beskonačno mnogo ciklusa. Da bi se ovo dogodilo konstrukcija treba pronaći način da se odupre cikličnom opterećenju počinjući sa određenim ciklusom i elastičnom stanju. Takvo stanje koje se očigledno treba postići da bi konstrukcija bila sigurna je nazvano *shakedown* po Prageru (1948).

#### 6.4.3/. TEOREME SHAKEDOWN ANALIZE

Za detaljno izvođenje i dokazivanje teorema čitatelj se upućuje na [9], ovdje će se prikazati samo konačne forme jednačina iz kojih računamo faktor sigurnosti.

##### 6.4.3.1/. STATIČKI PRISTUP – DONJA GRANIČNA TEOREMA

Potrebno je naglasiti da je princip formulacije teoreme za *shakedown* analizu identična prethodno definisanoj analizi za proračun faktora graničnog opterećenja. Razlika je u tome što kod proračuna faktora graničnog opterećenja isti množi fiksno opterećenje, dok kod *shakedown* analize faktor sigurnosti množi fiksnu domenu opterećenja. Donja granična teorema glasi: *faktor sigurnosti jednak je najvećem statički dopuštenom multiplikatoru*.

Faktor sigurnosti protiv *sloma uslijed zamora* računamo sljedećom formulom:

$$u_{fat} = \min \frac{2M_{P,ij}}{\alpha \cdot (M_{ij}^{\max} - M_{ij}^{\min})} \quad (29)$$

A faktor sigurnosti protiv *inkrementalnog sloma* računamo rješavajući sljedeće nejednakosti:

$$\begin{aligned} s_r + u_s \cdot s^{\max} &\leq s_p \\ s_r + u_s \cdot s^{\min} &\geq -s_p \end{aligned} \quad (30)$$

##### 6.4.3.2/. KINEMATIČKI PRISTUP – GORNJA GRANIČNA TEOREMA

Gornja granična teorema glasi: *faktor sigurnosti jednak je najmanjem kinematički dopuštenom multiplikatoru*. Stoga da bi izračunali faktor sigurnosti potrebno je da minimiziramo funkciju:

$$u_k = \frac{s_p^T \cdot (\Delta e_k^+ + \Delta e_k^-)}{(s^{\max})^T \cdot \Delta e_k^+ - (s^{\min})^T \cdot \Delta e_k^-} \quad (31)$$

##### 6.4.3.3/. PRIMJER

Izračunati shakedown faktor sigurnosti za okvir sa slike 72. Zadatak riješiti koristeći statički i kinematički pristup. Domena opterećenja je data na slici 86. Prepostaviti  $\alpha = 1.20$ .

###### Statički pristup

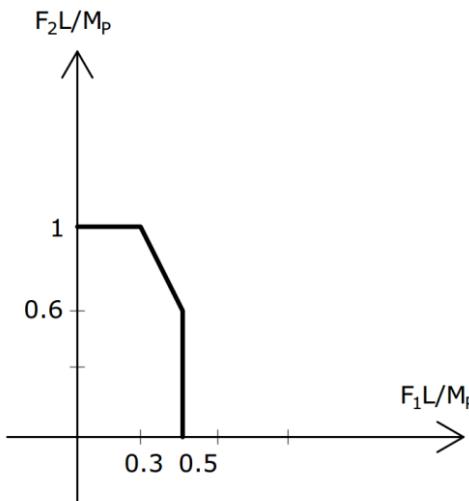
Prvo računamo shakedown faktor sigurnosti protiv *sloma uslijed zamora*.

Potrebno je da znamo momente u presjecima B, C i D, koristimo se formulama:

$$M_B = F_1 \cdot L - \frac{3}{13} \cdot F_2 \cdot L$$

$$M_C = -\frac{1}{3} \cdot F_1 \cdot L + \frac{17}{39} \cdot F_2 \cdot L$$

$$M_D = -F_1 \cdot L - \frac{3}{13} \cdot F_2 \cdot L$$

**Slika 86:** Domena opterećenja [9]

U cilju određivanja maksimalnog i minimalnog momenta u nekom od čvorova potrebno je da provjerimo sve ekstremne kombinacije koje proizilaze iz domene opterećenja. Proračun se daje tabelarno.

**Tabela 14:** Proračun shakedown faktora sigurnosti protiv sloma uslijed zamora, staticki pristup [9]

Opis	$F_1 \cdot L / M_p$	$F_2 \cdot L / M_p$	$M_B / M_p$	$M_C / M_p$	$M_D / M_p$
Samostalno $F_1$	1	0	1	-0,3333	-1
Samostalno $F_2$	0	1	-0,2308	0,4359	-0,2308
Kombinacija 1	0,5	0	0,5	0,1667	-0,5
Kombinacija 2	0,5	0,6	0,3615	0,0949	-0,6385
Kombinacija 3	0,3	1	0,0692	0,3359	-0,5308
Kombinacija 4	0	1	-0,2308	0,4359	-0,2308
Kombinacija 5	0	0	0	0	0
$M_{\max}$			0,5	0,4359	0
$M_{\min}$			-0,2308	-0,1667	-0,6385
$M_{\max} - M_{\min}$			0,7308	0,6026	0,6385

Na osnovu (29) shakedown faktor sigurnosti protiv sloma uslijed zamora iznosi:

$$u_{fat} \cdot 0.7308 \cdot M_p = \frac{2 \cdot M_p}{a} \rightarrow u_{fat} = 2.281$$

Sadaračunamo shakedown faktor sigurnosti protiv inkrementalnog sloma.

Prema (30) slijede nejednakosti:

$$M_B + 0.5 \cdot u_s \cdot M_p \leq M_p$$

$$M_C + 0.4359 \cdot u_s \cdot M_p \leq M_p$$

$$M_D + 0 \cdot u_s \cdot M_p \leq M_p$$

$$M_B - 0.2308 \cdot u_s \cdot M_p \geq -M_p$$

$$M_C - 0.1667 \cdot u_s \cdot M_p \geq -M_p$$

$$M_D - 0.6385 \cdot u_s \cdot M_p \geq -M_p$$

Koristeći princip virtuelnog rada na grednom i panelnom mehanizmu dobivamo uslove ravnoteže:

$$M_B - M_D = 0$$

$$M_B - 3 \cdot M_C + 2 \cdot M_D = 0$$

Na osnovu prethodnih uslova ravnoteže izražavamo  $M_C$  i  $M_D$ :

$$M_D = M_B$$

$$M_C = \frac{(M_B + 2 \cdot M_D)}{3} = M_B$$

Vraćajući nazad izražene momente u prethodno napisane nejednakosti dobivamo:

$$-1 + 0.2308 \cdot u_s \leq \frac{M_B}{M_p} \leq 1 - 0.5 \cdot u_s$$

$$-1 + 0.1667 \cdot u_s \leq \frac{M_B}{M_p} \leq 1 - 0.4359 \cdot u_s$$

$$-1 + 0.6385 \cdot u_s \leq \frac{M_B}{M_p} \leq 1$$

Najveće ograničenje s lijeve strane je:

$$-1 + 0.6385 \cdot u_s \leq \frac{M_B}{M_p}$$

A s desne strane:

$$\frac{M_B}{M_p} \leq 1 - 0.5 \cdot u_s$$

Multiplikator  $u_s$  je statički dopustiv ako vrijedi:

$$-1 + 0.6385 \cdot u_s \leq 1 - 0.5 \cdot u_s$$

Odnosno:

$$1.1385 \cdot u_s \leq 2$$

Na osnovu čega slijedi:

$$u_{inc} = \max u_s = \frac{2}{1.1385} = 1.757$$

Kako je  $u_{inc} < u_{fat}$ , sljedi da shakedown faktor sigurnosti iznosi:

$$u_{inc} = 1.757$$

### Kinematički pristup

Prema (31) slijedi:

$$u_k = \frac{M_p \cdot (\Delta\theta + \Delta\theta)}{M^{\max} \cdot \Delta\theta - M^{\min} \cdot \Delta\theta}$$

Prema gornjoj graničnoj teoremi faktor sigurnosti jednak je najmanjem kinematički dopustivom multiplikatoru. Potrebno je da analiziramo tri moguća mehanizma, uključujući obje strane na koje se mehanizam može pomjeriti, što čini ukupno 6 slučajeva koje je potrebno analizirati. Mogući mehanizmi su prikazani na slikama 79, 80 i 81, s tim kao što je rečeno treba uzeti u obzir i slučajevе kada se sva tri mehanizma pomjeraju na suprotnu stranu.

U nastavku se prilaže tabelarni proračun shakedown faktora sigurnosti.

**Tabela 15:** Proračun shakedown faktora sigurnosti, kinematički pristup

Čvor	B	C	D	$u_k$
$M_{\max}/M_p$	0,5	0,4359	0	-
$M_{\min}/M_p$	-0,2308	-0,1667	-0,6385	
1A	$\Delta\theta^+$	1	0	0
	$\Delta\theta^-$	0	0	-1
1B	$\Delta\theta^+$	0	0	1
	$\Delta\theta^-$	-1	0	0
2A	$\Delta\theta^+$	0	3	0
	$\Delta\theta^-$	0	0	-3
2B	$\Delta\theta^+$	0	0	3
	$\Delta\theta^-$	0	-3	0
3A	$\Delta\theta^+$	1,5	0	0
	$\Delta\theta^-$	0	-1,5	0
3B	$\Delta\theta^+$	0	1,5	0
	$\Delta\theta^-$	-1,5	0	0

1B predstavlja mehanizam na slici 81, 1A je mehanizam sa pomjeranjem na suprotnu stranu. 2A je mehanizam na slici 80, 2B je mehanizam sa pomjeranjem na suprotnu stranu. 3B predstavlja mehanizam sa slike 79, dok je 3A mehanizam sa pomjeranjem na suprotnu stranu.

Minimalni shakedown faktor sigurnosti pripada mehanizmu 1A i prema tabeli iznosi 1.757, što predstavlja identičnu vrijednost izračunatu statičkim pristupom. Vrijednost 1.757 je dobivena na sljedeći način:

$$u_k = \frac{M_p \cdot (\Delta\theta + \Delta\theta)}{0.5 \cdot M_p - (-0.6385 \cdot M_p)} = 1.757$$

Dakle pokazano je da je konstrukcija sigurna unutar *elastoplastične domene* ukoliko je opterećenje monotono, za ciklična opterećenja do sloma konstrukcije može doći i ukoliko se opterećenje nalazi unutar *elastoplastične domene*. Shakedown faktorom sigurnosti množimo fiksnu domenu opterećenja, dok faktorom graničnom opterećenja množimo fiksni sistem sila.

## 7/. ZAKLJUČAK

U radu su analizirane metode za pojednostavljenu plastičnu analizu okvirnih konstrukcija. Za brz proračun konačnog faktora graničnog opterećenja jednostavnijih okvira male statičke neodređenosti i malog broja vršnih tačaka momenata pogodno je koristiti statičku metodu baziranu na donjoj graničnoj teoremi. Za relativno brz proračun faktora graničnog opterećenja malo kompleksnijih okvira veće statičke neodređenosti ili takvog opterećenja gdje imamo mnogo vršnih tačaka momenata pogodno je koristiti kinematičku metodu pri čemu treba biti oprezan jer se ista bazira na gornjoj graničnoj teoremi. Navedeno vrijedi za ručni proračun, međutim pokazano je da se obje metode veoma brzo i efikasno mogu svesti na problem linearne programiranja, te uz pomoć računara riješiti širok spektar okvira od jednostavnih do veoma komplikovanih.

Nedostatak statičke metode (metode ravnoteže) i kinematičke metode jeste da daju samo konačni faktor graničnog opterećenja za formirani mehanizam, bez mogućnosti utvrđivanja redoslijeda formiranja plastičnih zglobova i praćenja formiranja mehanizma kroz faze, zajedno sa faznim faktorima opterećenja. U svrhu sukcesivnog praćenja formiranja plastičnih zglobova i preraspodjele presječnih sila i faza kroz koje statički sistem prolazi dok ne pređe u kinematski labilnu formu koristimo se statičkom metodom zglob po zglob (eng. hinge by hinge). Kako se radi o niz linearne-elastičnih proračuna to korištenje ove metode sa stanovišta racionalne iskorištenosti vremena nema smisla bez upotrebe računara. U svrhu proračuna metodom zglob po zglob razvijen je program za proračun okvira kako po teoriji prvog tako i po teoriji drugog reda. Također moguće je definisati dva slučaja opterećenja, od kojih je jedan konstantan, dok se drugi množi sa faktorom opterećenja. Program je verificiran na primjerima iz literature. Dva ograničenja programa su da ne može direktno obuhvatiti kontinuirano opterećenje, odnosno drugim riječima ni jedno opterećenje osim koncentrisanog, a drugo ograničenje jeste da za okvire takve geometrije i opterećenja koje dovedi do formiranja rešetke, gdje više ni jedan čvor ne može preuzeti dodatni momenat nije implementiran lom štapnog elementa kako bi nastupio slom sistema.

Za primjetne razlike proračuna po teoriji prvog i drugog reda potrebno je imati statički sistem osjetljiv na efekte teorije drugog reda kao i značajno velike normalne sile pritiska. Pokazano je da znatno pojednostavljena geometrijska matrica krutosti elementa P-Δ veoma dobro obuhvata efekte teorije drugog reda, te da na analiziranom primjeru gotovo da nema razlike u odnosu na dosta računarski zahtjevniju tačnu geometrijsku matricu krutosti elementa.

Pod standardnim prepostavkama konstrukcije u zavisnosti od karaktera opterećenja, geometrije i krutosti mogu imati veće ili manje rezerve u nosivosti u odnosu na projektovano opterećenje. U radu su obuhvaćena četiri faktora koji se standardno zanemaruju pri proračunu faktora graničnog opterećenja, a koji teoretski mogu značajno uticati na pad faktora graničnog opterećenja. Na analiziranom primjeru pokazano je da je opravdano zanemarivanje interakcija M-N, M-T jer razlike u konačnom faktoru graničnog opterećenja nisu velike. Međutim treba imati na umu da je zakon interakcije kao i sam proračun pojednostavljen. Deformabilnosti veza dvojako mogu uticati na redukciju faktora graničnog opterećenja, s jedne strane preraspodjelom presječnih sila, a s druge strane većim pomjeranjima. Ograničavanjem pomjeranja primjetan je pad faktora graničnog opterećenja. Pokazano je da pri cikličnom opterećenju do sloma konstrukcije može doći iako se opterećenje nalazi u *elastoplastičnoj domeni*.

U budućem radu trebalo bi istražiti modele sa plastičnim zonama na prostornim nosačima sa višedimenzionalnim konačnim elementima i *fiber* modele u kojima se poprečni presjeci greda diskretiziraju na vlakna.

## 8/. LITERATURA

- [1] W. F. Chen, I. Sohal: *Plastic Design and Second-Order Analysis of Steel Frames*, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1995
- [2] Mustafa Hrasnica: *Aseizmičko Građenje*, Građevinski fakultet Univerziteta u Sarajevu, 2012
- [3] Samir Dolarević: *Statika Konstrukcija*, Građevinski fakultet Univerziteta u Sarajevu, 2011
- [4] I. Kuzmanović, K. Sabo: *Linearno programiranje – radni materijal za predavanja*
- [5] B. Dujmović, D. Dujmović, I. Džeba: *Metalne konstrukcije 1*, Institut građevinarstva Hrvatske, Zagreb, 1994
- [6] Amar Khennane: *Introduction To Finite Element Analysis Using MATLAB® and Abaqus*, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2013
- [7] J. Baker, J. Heyman: *Plastic Design of Frames – 1. Fundamentals*, Cambridge University Press, New York, 1969
- [8] Miloš Kojić: *Primenjena Teorija Plastičnosti*, 1979
- [9] M. Jirásek, Z.P. Bažant: *Inelastic Analysis Of Structures*, John Wiley & Sons Ltd, West Sussex, 2002
- [10] H. B. Harrison: *Structural Analysis And Design – Part 1*, Pergamon Press, 1979
- [11] J. Dujc, B. Brank, A. Ibraimbegović: *Multi-scale computational model for failure analysis of metal frames that includes softening and local buckling*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 2009
- [12] Kard-Eugen Kurrer: *The History Of The Theory Of Structures*, Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften GmbH & Co. KG, Berlin, 2008
- [13] Branislav Verbić: *Otpornost Materijala*, skripta, Sarajevo, 1989
- [14] MATLAB R2015a
- [15] RFEM Dlubal 5.04
- [16] BuildSoft PowerConnect 2014
- [17] SAP2000 V17
- [18] Tower 7 Demo
- [19] MS Excel

## 9/. POPIS TABELA

[1]	Proračun $\lambda$	38
[2]	Proračun $\lambda$	39
[3]	Proračun $\lambda$	41
[4]	Proračun $\lambda$	105
[5]	Displacement control proračun okvira	111
[6]	Displacement control proračun ovira bez ograničenja pomjeranja	112
[7]	Force control proračun okvira	113
[8]	Force control proračun okvira sa neograničenim pomjeranjima	113
[9]	Displacement control proračun okvira	114
[10]	Displacement control proračun, neograničena pomjeranja	114
[11]	Force control proračun okvira	114
[12]	Force control proračun okvira, neograničena pomjeranja	115
[13]	Inkrementalno rješenje okvira pod cikličnim opteećenjem <sup>[9]</sup>	121
[14]	Proračun shakedown faktora sigurnosti protiv sloma uslijed zamora, statički pristup	124
[15]	Proračun shakedown faktora sigurnosti, kinematički pristup	126

## 10/. POPIS SLIKA

[1] Kontinuirani nosač, slučaj a) <sup>[5]</sup>	1
[2] Kontinuirani nosač, slučaj b) <sup>[5]</sup>	1
[3] Okvir, slučaj a) <sup>[5]</sup>	2
[4] Okvir, slučaj b) <sup>[5]</sup>	2
[5] Kontinuirana greda <sup>[12]</sup>	3
[6] Prosta greda <sup>[12]</sup>	4
[7] Mehanizam kontinuirane grede <sup>[12]</sup>	4
[8] Mehanizam proste grede <sup>[12]</sup>	4
[9] Koncept plastičnog zgloba i sloma	5
[10] Stanja najnapregnutijeg presjeka <sup>[1]</sup>	6
[11] a) Idealizirani $\sigma$ - $\epsilon$ dijagram materijala, b) M- $\varphi$ plastični zglob, c) M- $\varphi$ mehanički zglob	6
[12] a) $\sigma$ - $\epsilon$ dijagram za elasto-plastičnu analizu, b) $\sigma$ - $\epsilon$ dijagram za kruto-plastičnu analizu	7
[13] a) Stvarni mehanizam, b) Dijagram momenata stvarnog mehanizma, c) Prepostavljeni mehanizam, d) Dijagram momenata prepostavljenog mehanizma <sup>[1]</sup>	9
[14] Intuitivno nacrtan dijagram momenata <sup>[1]</sup>	10
[15] a) Prvi mehanizam i pripadajući dijagram M, b) Drugi mehanizam i pripadajući dijagram	11
[16] Prilaz tačno rješenju donje i gornje granične teoreme	12
[17] Okvir opterećen koncentrisanim silama	15
[18] Statički određena konstrukcija opterećena vanjskim opterećenjem i oslobođenom vezom	15
[19] Dijagrami momenata, od opterećenja (desno), od oslobođene veze (lijevo)	15
[20] Okvir opterećen koncentrisanim silama	17
[21] Statički određena konstrukcija sa opterećenjem i oslobođenim vezama	17
[22] Dijagram momenata od $X_A$	17
[23] Dijagram momenata od $Y_A$	17
[24] Dijagram momenata od opterećenja	18
[25] Statički neodređen nosač (lijevo), statički određen nosač (desno)	20
[26] Dijagrami momenata od oslobođene veze (lijevo), horizontalne sile (desno), kontinuiranog opterećenja (desno)	21
[27] Okvir sa opterećenjem (lijevo), statički određena konstrukcija sa oslobođenim vezama (desno)	21

[28] Dijagrami momenata od $Y_B$ (lijevo), $X_B$ (desno)	21
[29] Dijagrami momenata od vertikalnog opterećenja (lijevo), horizontalnog opterećenja (desno)	22
[30] Pomjeranja mehanizma 1 na osnovu kinematske analize	28
[31] Pomjeranja mehanizma 2	28
[32] Pomjeranja mehanizma 3	29
[33] Pomjeranja mehanizma 1	30
[34] Pomjeranja mehanizma 2	30
[35] Pomjeranja mehanizma 3	31
[36] Pomjeranja mehanizma 4	32
[37] Pomjeranja mehanizma	33
[38] a) Originalni sistem, b) Modifikovan sistem	33
[39] Pomjeranja mehanizma	34
[40] Oznake čvorova i elemenata za okvir primjera 1	43
[41] Dijagram $\lambda-U_{X2}$ uz prikaz redoslijeda formiranja plastičnih zglobova	64
[42] Okvir sa opterećenjem <sup>[10]</sup>	64
[43] Oznake čvorova i elemenata	65
[44] Dijagram $\lambda-U_{X3}$ uz prikaz redoslijeda formiranja plastičnih zglobova	68
[45] Dijagram $\lambda-U_{X2}$ uz prikaz redoslijeda formiranja plastičnih zglobova <sup>[10]</sup>	68
[46] Okvir sa opterećenjem <sup>[1]</sup>	69
[47] Oznake čvorova i elemenata	69
[48] Dijagram $\lambda-U_{X5}$ uz prikaz redoslijeda formiranja plastičnih zglobova	72
[49] Dijagram $\lambda-U_{X3}$ uz prikaz redoslijeda formiranja plastičnih zglobova <sup>[1]</sup>	72
[50] Okvir sa opterećenjem i vrijednostima momenata plastičnosti <sup>[1]</sup>	73
[51] Oznake čvorova i elemenata	73
[52] Dijagram $\lambda-U_{X4}$ uz prikaz redoslijeda formiranja plastičnih zglobova	77
[53] Dijagram $\lambda-U_{X5}$ uz prikaz redoslijeda formiranja plastičnih zglobova <sup>[1]</sup>	77
[54] Okvir sa opterećenjem <sup>[1]</sup>	78
[55] Oznake čvorova i elemenata	78
[56] Dijagram $\lambda-U_{X7}$ uz prikaz redoslijeda formiranja plastičnih zglobova	81
[57] Dijagram $\lambda-U_{X7}$ uz prikaz redoslijeda formiranja plastičnih zglobova <sup>[1]</sup>	82

[58] Okvir sa opterećenjem	100
[59] Oznake čvorova i elemenata	100
[60] Dijagram $\lambda-U_{X2}$ uz prikaz redoslijeda formiranja plastičnih zglobova, prvi slučaj	103
[61] Dijagram $\lambda-U_{X2}$ uz prikaz redoslijeda formiranja plastičnih zglobova, drugi slučaj	103
[62] Interaktivni dijagrami	104
[63] Dijagram $\lambda-U_Y$ za slučaj bez interakcija	105
[64] Dijagram $\lambda-U_Y$ za slučaj sa i bez interakcija	107
[65] Nadstrešnica <sup>[15]</sup>	108
[66] Razmatrani okvir sa opterećenjem snijegom	108
[67] Veza stuba i grede <sup>[16]</sup>	108
[68] Dijagram $M-\varphi$ veze stuba i grede <sup>[16]</sup>	109
[69] Dijagram $\sigma-\epsilon$ čelika <sup>[17]</sup>	109
[70] Dijagram $M-K$ <sup>[17]</sup>	109
[71] Idealizirani $M-\varphi$ dijagram	110
[72] Dijagram $\lambda-U_{YA}$ , I-bez deformabilnosti veza, II-sa deformabilnošću veza	110
[73] Pad momenta savijanja	111
[74] Dijagram sila-pomjeranje, displacement control sa i bez ograničenih pomjeranja	112
[75] Dijagram sila-pomjeranje, force control sa i bez ograničenih pomjeranja	113
[76] Dijagram sila-pomjeranje, displacement control sa i bez ograničenih pomjeranja	115
[77] Dijagram sila-pomjeranje, force control sa i bez ograničenih pomjeranja	116
[78] Okvir sa opterećenjem <sup>[9]</sup>	117
[79] Mehanizam 1 <sup>[9]</sup>	117
[80] Mehanizam 2 <sup>[9]</sup>	118
[81] Mehanizam 3 <sup>[9]</sup>	118
[82] Elastoplastična domena za okvir sa slike 69 <sup>[9]</sup>	119
[83] Režim opterećivanja <sup>[9]</sup>	121
[84] Dijagram $M-\varphi$ , inkrementalni slom <sup>[9]</sup>	122
[85] Dijagram $M-\varphi$ , slom uslijed zamora <sup>[9]</sup>	122
[86] Domena opterećenja <sup>[9]</sup>	124