اجابات اسئلة التفوق
كراسة التكامل
الوحدة الرابعة

(١) د(س) = $\int$ (هـ^{جاس} + لو$_{هـ}$ (أس+١)^{٣}) ءس ، د'(٠) = ٧ ، جد أ

الحل: نشتق الطرفين ⟸ د(س) = هـ^{جاس} + لو$_{هـ}$ (أس+١)^{٣}

د'(س) = هـ^{جاس} + ٣لو$_{هـ}$ (أس+١) ⟸ د''(س) = جتاس هـ^{جاس} + $\frac{٣أ}{أس+١}$

د''(٠) = جتا٠ . هـ^{٠} + $\frac{٣أ}{أ(٠)+١}$ ⟸ ٧ = ١ + $\frac{٣أ}{١}$

⟸ ٣أ = ٦ ⟸ **أ = ٢**

(٢) $\int$ (د''(س) + د'(س) + د(س)) ءس = س^{٣} + ٢أس^{٢} + ٦ ،
د'(١) = ٢د''(١) = ٣د(١) = ٦ ، جد أ ؟

الحل: د'(١) = ٦ ، ٢د''(١) = ٦ ⟸ د''(١) = ٣ ، ٣د(١) = ٦ ⟸ د(١) = ٢

نشتق الطرفين ⟸ د''(س) + د'(س) + د(س) = ٣س^{٢} + ٤أس

الآن د''(١) + د'(١) + د(١) = ٣(١)^{٢} + ٤أ(١)

٦ + ٣ + ٢ = ٣ + ٤أ ⟸ ١١ = ٣ + ٤أ

٤أ = ٨ ⟸ **أ = ٢**

(٣) م(س) = (١+أ) س^{٦} + ٢ب س^{٥} − ٤ل س^{٣} ، هـ(س) = ٢س^{٥} − ٨س^{٣} + ٥
م ، هـ اقترانان اصليان للاقتران د(س)

الحل: معامل س^{٦} في م(س) = معامل س^{٦} في هـ(س) ⟸ ١ + أ = ٠ ⟸ **أ = −١**

معامل س^{٥} في م(س) = معامل س^{٥} في هـ(س) ⟸ ٢ = ٢ب ⟸ **ب = ١**

معامل س^{٣} في م(س) = معامل س^{٣} في هـ(س) ⟸ −٤ل = −٨ ⟸ **ل = ٢**

يختلف م ، هـ فقط في الحد الثابت

⟸ أ + ٢ب + ل^{٢} = −١ + ٢(١) + (٢)^{٢}

= −١ + ٢ + ٤ = ٥

س٤: $\int$ (ق(س) + ظتا س) ءس = لو$_{هـ}$ قا س ظا س ، اثبت أن ق(س) = ٢ ظا س

الحل: - $\int$ (ق(س) + ظتا س) ءس = لو$_{هـ}$ قا س + لو$_{هـ}$ ظا س / نشتق الطرفين

⟸ ق(س) + ظتا س = $\frac{\text{قا س ظا س}}{\text{قا س}} + \frac{\text{قا}^2\text{ س}}{\text{ظا س}}$ / توحيد المقامات

ق(س) + ظتا س = $\frac{\text{ظا}^2\text{ س} + \text{قا}^2\text{ س}}{\text{ظا س}}$

ق(س) + ظتا س = $\frac{\text{ظا}^2\text{ س} + \text{ظا}^2\text{ س} + 1}{\text{ظا س}}$

= $\frac{2\text{ظا}^2\text{ س} + 1}{\text{ظا س}}$ = $\frac{2\text{ظا}^2\text{ س}}{\text{ظا س}} + \frac{1}{\text{ظا س}}$

ق(س) + ظتا س = ٢ ظا س + ظتا س

⟸ ق(س) = ٢ ظا س وهو المطلوب

② قواعد التكامل غير المحدود

① $\int \frac{6}{1 - \text{جتا}\,2س}$ دس $= \int \frac{6}{1 - 1 + 2\,\text{جا}^2 س}$ دس $= \int 3\,\text{قتا}^2 س$ دس

$= -3$ ظتاس $+$ ج

② $\int \frac{5 + 5\,\text{ظا}^2 س}{\sqrt{7} + \text{ظاس}}$ دس $= \int \frac{5(1 + \text{ظا}^2 س)}{\sqrt{7} + \text{ظاس}}$ دس

$= \int \frac{5\,\text{قا}^2 س}{\sqrt{7} + \text{ظاس}}$ دس $= 5 \int \frac{\text{قا}^2 س}{\sqrt{7} + \text{ظاس}}$ دس $\left(\frac{م}{م}\right)$

$= 5$ لوه $|\sqrt{7} + \text{ظاس}| +$ ج

③ $\int \frac{\text{جتاس}}{1 + \text{جتاس}}$ دس $\times \frac{1 - \text{جتاس}}{1 - \text{جتاس}} = \int \frac{\text{جتاس} - \text{جتا}^2 س}{1 - \text{جتا}^2 س}$ دس

$= \int \frac{\text{جتاس} - \text{جتا}^2 س}{\text{جا}^2 س}$ دس $= \int \frac{\text{جتاس}}{\text{جا}^2 س} - \frac{\text{جتا}^2 س}{\text{جا}^2 س}$ دس

$= \int (\text{ظتاس قتاس} - \text{ظتا}^2 س)$ دس $(\text{قتا}^2 س - 1)$ $= -$ قتاس $+$ ظتاس $+$ س $+$ ج

④ $\int \frac{1}{\sqrt{س+1}+\sqrt{س}} \times \frac{\sqrt{س+1}-\sqrt{س}}{\sqrt{س+1}-\sqrt{س}}\, د س$

$= \int \frac{\sqrt{س+1}-\sqrt{س}}{(س+1)-س}\, د س = \int ((س+1)^{\frac{1}{2}} - س^{\frac{1}{2}})\, د س$

$= \frac{2}{3}(س+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}س^{\frac{3}{2}} + ث$

⑤ $\int \sqrt{س\sqrt{س\sqrt{س}}}\, د س = \int (س \times (س \times س^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\, د س$

$= \int (س \times س^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}}\, د س = \int (س \times س^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}}\, د س$

$= \int (س^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}}\, د س = \int س^{\frac{7}{8}}\, د س = \frac{8}{15} س^{\frac{15}{8}} + ث$

⑥ $\int (4جتا^2 س - 6جا^2 س)\, د س = \int 4(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}جتا 2س)\, د س - \int 6(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}جتا 2س)\, د س$

$= \int 2 + 2جتا 2س - 3 + 3جتا 2س\, د س$

$= \int (5جتا 2س - 1)\, د س = \frac{5}{2}جا 2س - س + ث$

⑦ $\int 8جا^2 س جتا^2 س\, د س = \int 8 \times \frac{1}{4}جا^2(2س)\, د س$

$= \int 2جا^2 س\, د س$ ... $جا 2س = 2جا س جتا س$

$= \int 2(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}جتا 2س)\, د س = س - \frac{1}{2}جا 2س + ث$

$= \int (1-جتا 2س)\, د س$

⑧ اثبت أن $\int جا^2 س\, د س + \int جتا^2 س\, د س = \int جا^2 س جتا^2 س\, د س$

$\int \frac{جا^2 س + جتا^2 س}{جا^2 س جتا^2 س}\, د س = \int \frac{1}{جتا^2 س} + \frac{1}{جا^2 س}\, د س$

$= \int ظا^2 س + قا^2 س\, د س$

$= \int \frac{1}{جا^2 س جتا^2 س}\, د س = \int \frac{1}{جا^2 س} \times \frac{1}{جتا^2 س}\, د س$

$= \int قا^2 س قا^2 س\, د س$

تطبيقات على التكامل غير المحدود

① $\rho(س) = \frac{1 - ظا^2 س}{1 + ظا^2 س}$ و $\rho(\frac{\pi}{12}) = \frac{3}{4}$ و $\rho(\frac{\pi}{4}) = ؟$

$\rho(س) = \frac{1 - ظا^2 س}{ظا^2 س} = \frac{1}{ظا^2 س} - \frac{ظا^2 س}{ظا^2 س}$

$= جتا^2 س - \frac{جا^2 س}{جتا^2 س} \times جتا^2 س = جتا^2 س - جا^2 س$

$\therefore \rho(س) = جتا 2س$

$\rho(س) = \int جتا 2س \, دس = \frac{1}{2} جا 2س + ث$

$\rho(\frac{\pi}{12}) = \frac{1}{2} جا \frac{\pi}{6} + ث \Leftarrow \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + ث$

$\therefore ث = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\therefore \rho(س) = \frac{1}{2} جا 2س - \frac{1}{2}$

$\rho(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} جا(\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = صفر$

② $\rho(س) = أ + 3ب س$ و $\rho(0) = \frac{3}{4}$ و $\rho(1) = 2$

و $\rho(0) = 0$ و $\rho(0) = \frac{3}{4}$

$\rho(0) = \frac{3}{4} \Leftarrow \boxed{أ = \frac{3}{4}}$

$\rho(س) = \int \rho(س) \, دس = \int (\frac{3}{4} + 3ب س) \, دس$

$\rho(س) = \frac{3}{4} س + \frac{3}{2} ب س^2 + ث$

$\rho(0) = 0 \Leftarrow ث = 0$

$\rho(1) = 2 \Leftarrow \frac{3}{4} + ب = 2 \Leftarrow \boxed{ب = \frac{5}{4}}$

③ $\int س \sqrt[3]{1 - س^2} \, دس = \int -\frac{1}{2} س \sqrt[3]{1 - س^2} \, دس = \int -\frac{1}{2} (1 - س^2)^{\frac{1}{3}} \, دس$

$= \int (1 - س^2)^{\frac{1}{3}} \, دس = \frac{(1 - س^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3} \times -1} + ث = -\frac{3}{4} \sqrt[3]{(1 - س^2)^4} + ث$

التكامل بالتعويض

① $$\int \text{س}^{5} \sqrt{\text{س} - \frac{1}{\text{س}^{4}}}\ \text{دس} = \int \text{س}^{5} \sqrt{\frac{\text{س}^{5} - 1}{\text{س}^{4}}}\ \text{دس}$$

$$= \int \text{س}^{5} \frac{\sqrt{\text{س}^{5}-1}}{\text{س}^{2}}\ \text{دس} = \int \text{س}^{3} \sqrt{\text{س}^{5}-1}\ \text{دس}$$

افرض $\text{ع} = \sqrt{\text{س}^{5}-1} \Leftarrow \text{ع}^{2} = \text{س}^{5} - 1$

$$\Leftarrow \text{دس} = \frac{2\text{ع}\ \text{دع}}{5\text{س}^{4}}$$

$$\therefore\ \text{م} = \int \text{س}^{5} \times \text{ع} \times \frac{2\text{ع}\ \text{دع}}{5\text{س}^{4}}$$

$$= \frac{2}{5} \int \text{ع}^{2}\ \text{دع} = \frac{2}{5} \times \frac{\text{ع}^{3}}{3} + \text{جـ}$$

$$= \frac{2}{15} \sqrt{(\text{س}^{5}-1)^{3}} + \text{جـ}$$

② $$\int (\text{جتا}^{32}\text{س}\ \text{جا}^{30}\text{س} - \text{جتا}^{30}\text{س}\ \text{جا}^{32}\text{س})\ \text{دس}$$

$$= \int \text{جتا}^{30}\text{س}\ \text{جا}^{30}\text{س}\ (\text{جتا}^{2}\text{س} - \text{جا}^{2}\text{س})\ \text{دس}$$

$$= \int (\tfrac{1}{2}\ \text{جا}2\text{س})^{30} \times \text{جتا}2\text{س}\ \text{دس} \qquad \text{ع} = \text{جا}2\text{س},\quad \text{دس} = \frac{\text{دع}}{2\text{جتا}2\text{س}}$$

$$= \int (\tfrac{1}{2}\text{ع})^{30} \times \text{جتا}2\text{س} \times \frac{\text{دع}}{2\text{جتا}2\text{س}}$$

$$= \frac{1}{2} \times (\tfrac{1}{2})^{30} \times \frac{\text{ع}^{31}}{31} + \text{جـ} = \frac{(\frac{1}{2})^{31}}{31} (\text{جا}2\text{س})^{31} + \text{جـ}$$

③ $$\int (\text{ظا}^{7}\text{س} + \text{ظا}^{9}\text{س})\ \text{دس} = \int \text{ظا}^{7}\text{س}\ (1 + \text{ظا}^{2}\text{س})\ \text{دس}$$

$$= \int \text{ظا}^{7}\text{س}\ \text{قا}^{2}\text{س}\ \text{دس} \qquad \text{ع} = \text{ظاس},\quad \text{دس} = \frac{\text{دع}}{\text{قا}^{2}\text{س}}$$

$$= \int \text{ع}^{7}\ \text{قا}^{2}\text{س} \times \frac{\text{دع}}{\text{قا}^{2}\text{س}}$$

$$= \frac{\text{ع}^{8}}{8} + \text{جـ} = \frac{\text{ظا}^{8}\text{س}}{8} + \text{جـ}$$

④ $\int \frac{س}{1 + س\,ظاس}\,دس = \int \frac{س}{1 + س \frac{جاس}{جتاس}}\,دس = \int \frac{س}{\frac{جتاس + س\,جاس}{جتاس}}\,دس$

$= \int \frac{س\,جتاس}{جتاس + س\,جاس}\,دس$

$ع = جتاس + س\,جاس$

$دع = (-جاس + س\,جتاس + جاس)\,دس$

$دع = س\,جتاس\,دس$

$دس = \frac{دع}{س\,جتاس}$

$= \int \frac{س\,جتاس}{ع} \times \frac{دع}{س\,جتاس}$

$= لو|ع| + جـ = لو|جتاس + س\,جاس| + جـ$

⑤ $\int ظا^4س\,دس = \int ظا^2س\,ظا^2س\,دس = \int ظا^2س\,(قا^2س - 1)\,دس$

$= \int ظا^2س\,قا^2س - ظا^2س\,دس$ --- ①

$= \int جا^2س - قا^2س + 1\,دس$

$= \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}جتا2س - قا^2س + 1\,دس$

$= \int \frac{3}{2} - \frac{1}{2}جتا2س - قا^2س\,دس$

$= \frac{3}{2}س - \frac{1}{4}جا2س - ظاس + جـ$

أو ① $\int ظا^2س\,قا^2س - ظا^2س\,دس = \int ظا^2س\,قا^2س\,دس - \int ظا^2س\,دس$

$ع = ظاس$

$دس = \frac{دع}{قا^2س}$

$= \int ع^2\,قا^2س\,\frac{دع}{قا^2س} - \int قا^2س - 1\,دس$

$= \frac{ع^3}{3} - (ظاس - س) + جـ$

$= \frac{ظا^3س}{3} - ظاس + س + جـ$

(٦) ∫ ١/س لوه (١/√س) دس = ∫ ١/س (لوه ١ − لوه √س) دس

= ∫ ١/س (−½ لوه س) دس = −½ ∫ ١/س لوه س دس

افرض ع = لوه س ⇐ دع = ١/س دس ⇐ س دع = دس

∴ م = −½ ∫ ١/س ع × س دع = −½ ع²/٢ + ج

= −¼ (لوه س)² + ج

(٧) ∫ √(جتا²س + ½ جا٢س جتاس) دس

= ∫ √(جتا²س + ½ × ٢ جاس جتاس × جتاس) دس

= ∫ √(جتا²س + جتا²س جاس) دس = ∫ √(جتا²س (١ + جاس)) دس

= ∫ |جتاس| √(١ + جاس) دس

ع = √(١ + جاس)

ع² = ١ + جاس

٢ع دع / جتاس = دس

= ∫ |جتاس| ع × ٢ع دع / جتاس

هنالك حالتان اما ٢ع³/٣ + ج = ٢/٣ √((١ + جاس)³) + ج حسب الزاوية

او −٢ع³/٣ + ج = −٢/٣ √((١ + جاس)³) + ج

(٨) ∫ جتاس جا³س / (١ + جا²س) دس

نفرض ع = ١ + جا²س

دع = ٢ جاس جتاس

دس = دع / (٢ جاس جتاس)

= ∫ جتاس جا³س / ع × دع / (٢ جاس جتاس)

= ½ ∫ جا²س / ع دع = ½ ∫ (ع − ١)/ع دع

= ½ ∫ (ع/ع − ١/ع) دع = ½ ∫ (١ − ١/ع) دع

= ½ (ع − لوه|ع|) + ج = ½ (١ + جا²س) − لوه(١ + جا²س) + ج

٩) اذا كان $\frac{لو_{هـ} س}{ق'(س)} = س$ ، ق'(س) ≠ ٠ ، س > ٠ ، أوجد قاعدة ق(س) حيث ق(هـ) = ٥

$لو_{هـ} س = س\, ق'(س) \Leftarrow \frac{1}{س} لو_{هـ} س = ق'(س)$

$\Leftarrow \int \frac{1}{س} لو_{هـ} س \, دس = \int ق'(س)\, دس$

| ع = $لو_{هـ} س$ ، دع = $\frac{1}{س}$ دس ، س دع = دس |

$\Leftarrow \int \frac{1}{س} ع\, س\, دع = ق(س)$

$\Leftarrow \frac{ع^2}{2} + جـ = ق(س)$

$\frac{1}{2}(لو_{هـ} س)^2 + جـ = ق(س)$

$ق(هـ) = \frac{1}{2}(لو_{هـ} هـ)^2 + جـ = ٥$

$\Leftarrow \frac{1}{2} \times ٤ + جـ = ٥ \Leftarrow$ جـ = ٣

$\therefore ق(س) = \frac{1}{2}(لو_{هـ} س)^2 + ٣$

التكامل بالاجزاء

① $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + c$

② $\int (\ln x)^2 \, dx = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + c$

③ $\int x^n (\ln x + \frac{1}{x}) \, dx = \int (x^n \ln x + x^{n-1}) \, dx$

$= \int (x^n \ln x) \, dx + \frac{x^n}{n} + c$

طريقة أخرى كل ③

$\int \text{هـ}^{\text{س}} (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} + \frac{1}{\text{س}}) \text{دس} = \int \text{هـ}^{\text{س}} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} + \text{هـ}^{\text{س}} \times \frac{1}{\text{س}} \text{دس}$

$= \int \text{هـ}^{\text{س}} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} \, \text{دس} + \int \text{هـ}^{\text{س}} \times \frac{1}{\text{س}} \text{دس}$

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} \qquad \text{د هـ} = \text{هـ}^{\text{س}} \text{دس}$

$\text{دع} = \frac{1}{\text{س}} \text{دس} \qquad \text{هـ} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$= \text{هـ}^{\text{س}} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - \int \text{هـ}^{\text{س}} \times \frac{1}{\text{س}} \text{دس} + \int \text{هـ}^{\text{س}} \times \frac{1}{\text{س}} \text{دس}$

$= \text{هـ}^{\text{س}} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} + \text{جـ}$

④ $\int \frac{1}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}} - \frac{1}{(\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س})^2} \text{دس} = \int \left(\frac{\text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}}\right)' \text{دس}$

$= \frac{\text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}} + \text{جـ}$

طريقة أخرى

$\int = \int \frac{1}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}} \text{دس} - \int \frac{1}{(\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س})^2} \text{دس}$

$\text{ع} = \frac{1}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}} \qquad \text{د هـ} = \text{دس}$

$\text{دع} = \frac{-1}{\text{س} (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س})^2} \qquad \text{هـ} = \text{س}$

$\int = \frac{\text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}} + \int \text{س} \times \frac{1}{\text{س} (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س})^2} \text{دس} - \int \frac{1}{(\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س})^2}$

$= \frac{\text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}} + \text{جـ}$

⑤ $\int (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س})^2 \text{دس}$

$\text{ع} = (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س})^2 \qquad \text{د هـ} = \text{دس}$

$\text{دع} = 2 \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} \times \frac{1}{\text{س}} \text{دس} \qquad \text{هـ} = \text{س}$

$\int = \text{س} (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س})^2 - 2 \int \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} \, \text{دس} = \text{س} (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س})^2 - 2 (\text{س} \, \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - \text{س}) + \text{جـ}$