将某些特定的浮点数转换为形如 $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ 的数学表达式的高效算法

zhengxyz123

2024 年 8 月 2 日

1 引言

一些数值计算器在计算分式、根式以及角度时会返回类似 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ 或 $\dfrac{\pi}{3}$ 的结果而非浮点数. 它们同样也会显示 $1+\sqrt{2}$ 和 $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$. 前两者可通过简单的数学运算得出，但是后面两个涉及到了加法运算. 如果我们想分别求出 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 中的 a 和 b，最简单的方法是使用二重 for 循环，但这是效率非常低的方法. 我们是否可以设计一种高效的方法解决上述问题？在本文中，我将介绍一个新的算法将某些特定的浮点数转换为形如 $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ 的数学表达式. 首先，我将从理论角度分析该算法的可行性；其次，我会将理论转换成实际算法；最后，我会将该算法与其它算法进行比较，并分析各自的优劣.

2 理论

我们先讨论没有分母的形式. 为叙述方便，先定义一函数

$$S(x,y) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|} + \operatorname{sgn}(y)\sqrt{|y|} \quad \text{其中} x, y \in \mathbb{Z}$$

在本文中，我们已知浮点数 n 与 $S(a,b)$ 近似相等（即两数之差小到可以忽略），但 a、b 未知. 我们的目的是求出特定的 a 和 b 使 $|S(a,b)-n| \leq \varepsilon$，其中 ε 是一个很小的数. 换句话来说，我们希望找到 $S(x,y)$ 的反函数 $P(x)$.

当然，使用既定公式求出 $P(x)$ 是不可能的. 唯一可行的途径是穷举搜索. 使用不同的方法进行穷举都可以获得正确的结果，但效率的差异可能是巨大的. 在下文中，我将介绍一种效率较高的方法.

假如我们知道两数之和 $p+q$，以及他们的均值 $m = \dfrac{p+q}{2}$，那么可以知道 $|m-p| = |m-q|$.

同样的，如果已知 $n = S(a,b)$, 我们可以从 $\frac{n}{2}$ 开始向 $\pm\infty$ 方向分别搜索. 一旦确定了 a 就可以知道唯一的 b，最后我们仅仅需要一些额外的判断就能得知它们是否为所求.

当然，使用 $\frac{n}{2}$ 作为初始值是不合适的，因为我们需要的结果是两个整数. 使用截尾取整后的 $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ 更适合.

不过，我们可以计算出 $\left(\frac{\sqrt{100}+\sqrt{101}}{2}\right)^2 \approx 100.499$，它会舍入到 100，这样的设计也是有漏洞的. 但是，有如下极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{2}\right)^2 - x = \frac{1}{2}$$

它表示函数 $f(x) = \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{2}\right)^2$ 可以近似成 $x + \frac{1}{2}$.

这样，即使 $S(a,b)$ 中的 a、b 的差值很小我们也能分别求出它们.

根据以上的分析，我们可以这样计算初始值

$$start(n) = \begin{cases} \lfloor(\frac{n}{2})^2\rfloor + \frac{1}{2} & n > 0 \\ -\lfloor(\frac{n}{2})^2\rfloor - \frac{1}{2} & n < 0 \end{cases}$$

为了书写方便，下面规定一负数的平方根是其绝对值平方根的相反数.

已知 $n = S(a,b)$，初始值 $\mathrm{start} = start(n)$，令 $\mathrm{step} = 0.5$ 并找到第一个数字

$$p = \mathrm{start} - \mathrm{step}$$

接着就能求出第二个数字

$$q = \frac{n}{2} - |\sqrt{p} - \frac{n}{2}|$$

q 必须是一个整数，我们接下来还要做如下操作

$$q = \mathrm{sgn}(q)\sqrt{\mathrm{round}(q^2)}$$

其中 `round` 表示舍入到最近的整数.

如果 $|\sqrt{p}+\sqrt{q}-n| \le \varepsilon$，其中 ε 表示一个很小的数，那么 p 和 q 就是所求的 a 和 b. 否则我们令 $\mathrm{step} = \mathrm{step} + 1$，继续向正无穷方向搜索.

3 实现

以下是本算法的 Python 实现.

```
import math

def num2sqrts(n, max_num=1000):
    if n >= 0:
        mid = math.floor((n / 2) ** 2) + 0.5
    else:
        mid = math.ceil(-(n / 2) ** 2) - 0.5
    fsqrt = lambda n: math.copysign(math.sqrt(math.fabs(n)), n)
    actual_mid = n / 2
    t = 0.5
    while True:
        a = fsqrt(mid + t)
        d = math.fabs(a - actual_mid)
        b = actual_mid - d
        b = fsqrt(math.copysign(round(b ** 2), b))
```

理论上来说，该算法可以一直执行，直到找到正确的结果. 但是考虑到实际情况，我们必须有一个停止条件.

```
        if abs(a ** 2) > max_num or abs(b ** 2) > max_num:
            return
        if math.isclose(a + b, n, rel_tol=1e-16):
            return int(round(math.copysign(a ** 2, a))), \
                int(round(math.copysign(b ** 2, b)))
        t += 1
```

最后，函数 `num2sqrts` 以长度为 2 的元组作为结果. 若返回 `None`，这表示程序没有找到正确的结果.

如果没有找到结果，那么可以猜测原浮点数是一个形如 $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{c}$ 的分数，我们可以通过穷举分母来解决.

为了展示算法的表现，我令 $x \in [-100, 100]$ 和 $y \in [-100, 100]$，接着记录算法需要多少次循环可求出 $S(x, y)$ 中的 x 和 y，最后把它们以不同的颜色标识（见图 1）. 可见，当 x、y 之差越大时，需要执行更多次的循环.

不过当我们运行如下（或类似）语句时

```
num2sqrts(2 * math.sqrt(123))
```

函数返回`(492, 0)`，循环执行了 438 次. 不过 $2\sqrt{123}$ 这个结果可以用一个更简单的算法找到，故我将图 1 中一、三象限对角线上的值全部赋值为 1.

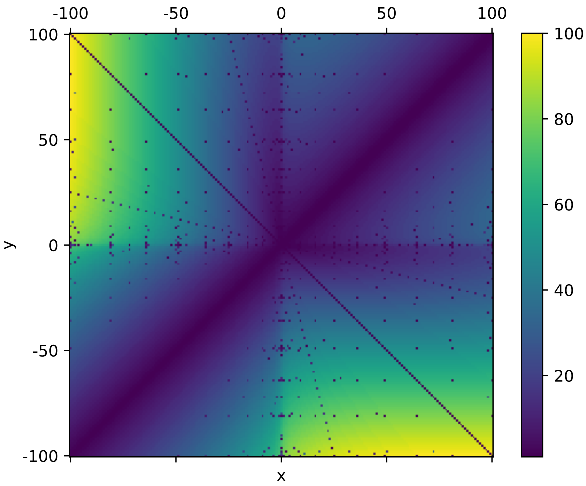

图 1: 算法的表现

4 比较

使用嵌套的 for 循环（我称其为 `normal_one` 算法）同样也可以求出两根式之和. 让两种算法分别求出 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$，其中 a 和 b 从 0 到 100 的整数中随机选取，并各运行 5000 遍先记录下运行总时间，再计算出运行一次的平均时间（见表 1）. 可见，`num2sqrts` 比纯粹的穷举快了约 60 倍，而且随着范围的扩大，效率可能会进一步地提高.

使用 PSLQ[1] 等整数关系探测算法可以找到一个系数是整数的多项式方程，它的根正好等于一个已知浮点数.

例如可以找到 $1+\sqrt{2}$ 是 $x^2-2x-1=0$ 的一根，那么可以通过构造一元二次方程的求根公式来得出 $1+\sqrt{2}$.

对于更一般的情况，即两个根式的和或差，它们是四次方程的根. 例如 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是 $x^4-10x^2+1=0$ 的一根（虽然它也是 $x^2-2\sqrt{2}x-1=0$ 的一个根，但是这个方程的系数不全是整数，当前的算法并不适用），但构造一元四次方程的求根公式异常麻烦，故这种方法不能适用所有场合.

算法	总时间/s	平均时间/μs	用时之比
`normal_one`	18.594490	3718.8979	60.7
`num2sqrts`	0.306463	61.2926	1.0

表 1: 两种算法效率的比较，在 Python 3.11.2 下测试

同时，这些整数关系探测算法也可以将浮点数转换为更复杂的数学表达式，例如 mpmath[2] 的 `mpmath.identify` 函数：

```
>>> import mpmath, sympy
>>> s = mpmath.identify(mpmath.sqrt(2) + mpmath.sqrt(3))
>>> s
'sqrt(((10+sqrt(96))/2))'
>>> sympy.simplify(s)
sqrt(2*sqrt(6) + 5)
```

但是，参照上述的运行结果，问题则变成了化简双重根号，就需要编写化简双重根号的程序了，这里就不涉及了.

5 结论

在这篇文章中，我介绍了 `num2sqrts` 算法，它可以将一些浮点数转换为与之近似相等的、具有特定形式的数学表达式. 同时，该算法简单、快速，适合应用在科学计算器中.

参考文献

[1] Helaman R. P. Ferguson and David H. Bailey. *A Polynomial Time, Numerically Stable Integer Relation Algorithm*. manuscript. 1991.

[2] The mpmath development team. *mpmath: a Python library for arbitrary-precision floating-point arithmetic*. `http://mpmath.org/`. 2023.