

将一浮点数转换为两根式之和的最简算法

郑

2023 年 1 月 24 日

1 引言

为了减少重复度，我们定义一函数

$$\varphi(x, y) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|} + \operatorname{sgn}(y)\sqrt{|y|} \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

若仅知浮点数 $n = \varphi(a, b)$ ，则可以使用一些数学技巧并仅仅使用一个 while 循环来求出 a 和 b ，而不是使用双重 for 循环。简而言之，我们是要找出 $\varphi^{-1}(x)$ 。

2 理论

首先，使用既定的公式计算 $\varphi^{-1}(x)$ 是不可能的，浮点数已经损失了太多的信息。使用穷举法便成为了唯一的方法，不过使用何种方法以及从何处开始搜寻时一个值得讨论的问题。前者我已经在引言处说明，接下来要讨论的是后者，请先看如下命题

命题 1 有两数之和 $a + b$ ，且 $c = \frac{a + b}{2}$ ，那么 $|c - a| = |c - b|$ 。

该命题毫无疑问是真的，证明就不给出了。根据该命题，有 $n = \varphi(a, b)$ ，我们可以从 $\frac{n}{2}$ 处往 $+\infty$ 或 $-\infty$ 方向搜索，只要确定了 a 就可以有唯一的 b ，再进行一次条件判断就可以确定它们是否为所求。

当然，以 $\frac{n}{2}$ 作为起始值不太妥当，我们要求的是两个整数，以截尾取整后的 $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ 作为起始值更合适。

不过，考虑 $\left(\frac{\sqrt{100} + \sqrt{101}}{2}\right)^2 \approx 100.499$ ，截尾取整后为 100，这样的设计亦有疏漏。但是，有如下极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{2} \right)^2 - x = \frac{1}{2}$$

这说明函数 $f(x) = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{2}\right)^2$ 可近似成 $x + \frac{1}{2}$, 而且当 $x > 5.76$ 时误差小于 1%; $x > 62.001$ 时误差小于 0.1%。

以上, 我们可以确定起始值

$$start(n) = \begin{cases} \text{trunc}(\frac{n}{2})^2 + \frac{1}{2} & \text{if } n > 0 \\ -\text{trunc}(\frac{n}{2})^2 - \frac{1}{2} & \text{if } n < 0 \end{cases}$$

以下为了书写方便, 将 \sqrt{n} 定义为 $\text{sgn}(n)|n|^{1/2}$ 。

已知 $n = \varphi(a, b)$, 在确定了起始值 $start$ 之后, 令 $step = 0.5$, 找到一个端点

$$a' = start - step$$

然后可计算另一端点

$$b' = \frac{n}{2} - |\sqrt{a} - \frac{n}{2}|$$

由于 b' 必须为整数, 故还需做如下处理

$$b' = \sqrt{\text{sgn}(b')\text{round}(b'^2)}$$

其中 round 表示无条件进位。

如果 $\sqrt{a'} + \sqrt{b'} = n$ 的话, 那么 a' 和 b' 就是要求的 a 和 b 。不然的话使 $step \pm 1$, 向正无穷或负无穷方向继续寻找。

3 实现

这里给出的示例使用的是 python 标准库, 也可以使用 mpmath 等库来获得更高的精度。

```

1 import math
2
3 def _fsqrt(n):
4     return math.copysign(math.sqrt(math.fabs(n)), n)
5
6 def num2sqrts(n, max_num=1000):
7     if n >= 0:
8         mid = math.floor((n / 2) ** 2) + 0.5
9     elif n < 0:
10        mid = math.ceil(-(n / 2) ** 2) - 0.5
11    actual_mid = n / 2
12    t = 0.5
13    while True:
```

```

14         a = _fsqrt(mid + t)
15         d = math.fabs(a - actual_mid)
16         b = actual_mid - d
17         b = _fsqrt(math.copysign(round(b ** 2), b))

```

理论上，这个算法可以一直运行下去，直到找到合适的值。但是考虑到实际情况，我还是设置了停止条件。

```

18         if abs(a ** 2) > max_num or abs(b ** 2) > max_num:
19             return
20         if math.isclose(a + b, n):
21             return int(round(math.copysign(a ** 2, a))), \
22                    int(round(math.copysign(b ** 2, b)))
23         t += 1

```

最后，函数 num2sqrts 返回的是长度为 2 的元组，若返回值为None则说明没有找到解析解。

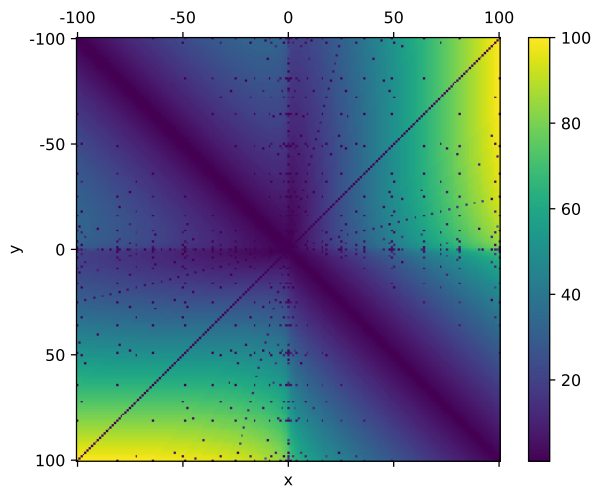


图 1: 算法的表现

为了说明这个算法的表现，使 $n = \varphi(x, y)$ ，计算求出 x 和 y 需要几次循环，便绘制了图1。可见，当 x 和 y 的差值越大时，就需要更长的时间。

4 结论