

# 将某些特定的浮点数转换为形如 $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ 的数学表达式的高效算法

zhengxyz123

2024 年 3 月 16 日

## 1 引言

一些数值计算器在计算分式、根式以及角度时会返回类似  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$  或  $\frac{\pi}{3}$  的结果而非浮点数. 它们同样也会显示  $1 + \sqrt{2}$  和  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$ . 前两者可通过简单的数学运算得出, 但是后面两个涉及到了加法运算. 如果我们想分别求出  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  中的  $a$  和  $b$ , 最简单的方法是使用二重 for 循环, 但这是效率非常低的方法. 我们是否可以设计一种高效的方法解决上述问题? 这就是我创作这篇文章的目的: 介绍一个新的算法将某些特定的浮点数转换为形如  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$  的数学表达式.

我将从数学理论、算法实现以及与其它方法的比较这三个方面来介绍该算法.

## 2 理论

我们先讨论没有分母的形式. 为叙述方便, 先定义一函数

$$S(x, y) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|} + \operatorname{sgn}(y)\sqrt{|y|} \quad \text{其中 } x, y \in \mathbb{Z}$$

如果我们仅仅知道浮点数  $n$  与  $S(a, b)$  近似相等, 我们可以使用一些数学技巧和仅一个 while 循环求出  $a$  和  $b$ , 而不是使用双重 for 循环. 简而言之, 我们的目的是找到  $S(x, y)$  的反函数  $P(x)$ .

当然, 使用既定公式求出  $P(x)$  是不可能的. 唯一可行的途径是穷举搜索. 使用不同的方法进行穷举都可以获得正确的结果, 但效率的差异可能是巨大的. 我将介绍一种效率较高的方法.

假如我们知道两数之和  $p + q$ , 以及他们的均值  $m = \frac{p + q}{2}$ , 那么可以知道  $|m - p| = |m - q|$ .

同样的，如果已知  $n = S(a, b)$ ，我们可以从  $\frac{n}{2}$  开始向  $\pm\infty$  方向分别搜索。一旦确定了  $a$  就可以知道唯一的  $b$ ，最后我们仅仅需要一些额外的判断就能得知它们是否为所求。

当然，使用  $\frac{n}{2}$  作为初始值是不合适的，因为我们需要的结果是两个整数。使用截尾取整后的  $\left(\frac{n}{2}\right)^2$  更适合。

不过，我们可以计算出  $\left(\frac{\sqrt{100} + \sqrt{101}}{2}\right)^2 \approx 100.499$ ，它会舍入到 100，这样的设计也是有漏洞的。但是，有如下极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{2} \right)^2 - x = \frac{1}{2}$$

它表示函数  $f(x) = \left( \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{2} \right)^2$  可以近似成  $x + \frac{1}{2}$ 。

这样，即使  $S(a, b)$  中的  $a$ 、 $b$  的差值很小我们也能分别求出它们。

根据以上的分析，我们可以这样计算初始值

$$start(n) = \begin{cases} \lfloor (\frac{n}{2})^2 \rfloor + \frac{1}{2} & n > 0 \\ -\lfloor (\frac{n}{2})^2 \rfloor - \frac{1}{2} & n < 0 \end{cases}$$

为了书写方便，下面规定一负数的平方根是其绝对值平方根的相反数。

已知  $n = S(a, b)$ ，初始值  $start = start(n)$ ，令  $step = 0.5$  并找到第一个数字

$$p = start - step$$

接着就能求出第二个数字

$$q = \frac{n}{2} - |\sqrt{p} - \frac{n}{2}|$$

$q$  必须是一个整数，我们接下来还要做如下操作

$$q = \sqrt{\text{sgn}(q)\text{round}(q^2)}$$

其中 **round** 表示舍入到最近的整数。

如果  $|\sqrt{p} + \sqrt{q} - n| \leq \varepsilon$ ，其中  $\varepsilon$  表示一个很小的数，那么  $p$  和  $q$  就是所求的  $a$  和  $b$ 。否则我们令  $step = step + 1$ ，继续向正无穷方向搜索。

### 3 实现

以下是本算法的 Python 实现。

```

1 import math
2
3 def num2sqrts(n, max_num=1000):
4     if n >= 0:
5         mid = math.floor((n / 2) ** 2) + 0.5
6     else:
7         mid = math.ceil(-(n / 2) ** 2) - 0.5
8     fsqrt = lambda n: math.copysign(math.sqrt(math.fabs(n)), n)
9     actual_mid = n / 2
10    t = 0.5
11    while True:
12        a = fsqrt(mid + t)
13        d = math.fabs(a - actual_mid)
14        b = actual_mid - d
15        b = fsqrt(math.copysign(round(b ** 2), b))

```

理论上来说, 该算法可以一直执行, 直到找到正确的结果. 但是考虑到实际情况, 我们必须有一个停止条件.

```

16        if abs(a ** 2) > max_num or abs(b ** 2) > max_num:
17            return
18        if math.isclose(a + b, n):
19            return int(round(math.copysign(a ** 2, a))), \
20                   int(round(math.copysign(b ** 2, b)))
21    t += 1

```

最后, 函数 `num2sqrts` 以长度为 2 的元组作为结果. 若返回 `None`, 这表示程序没有找到正确的结果.

如果没有找到结果, 那么可以猜测原浮点数是一个形如  $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{c}$  的分数, 我们可以通过穷举分母来解决.

为了展示算法的表现, 我令  $x \in [-100, 100]$  和  $y \in [-100, 100]$ , 接着记录算法需要多少次循环可求出  $S(x, y)$  中的  $x$  和  $y$ , 最后把它们以不同的颜色标识 (见图 1). 可见, 当  $x$ 、 $y$  之差越大时, 需要执行更多次的循环.

不过当我们运行如下 (或类似) 语句时

```
1 num2sqrts(2 * math.sqrt(123))
```

函数返回 (492, 0), 循环执行了 438 次. 不过  $2\sqrt{123}$  这个结果可以用一个更简单的算法找到, 故我将图 1 中一、三象限对角线上的值全部赋值为 1.

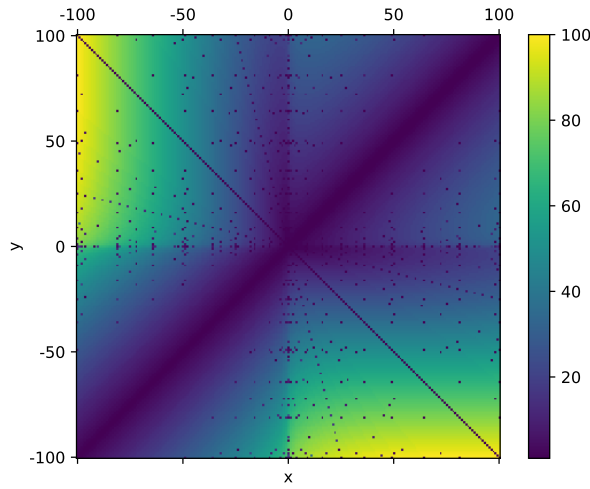


图 1: 算法的表现

## 4 比较

使用嵌套的 for 循环（我称其为 `normal_one` 算法）同样也可以求出两根式之和. 让两种算法分别求出  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ , 其中  $a$  和  $b$  从 0 到 100 的整数中随机选取, 并各运行 5000 遍, 再记录下平均运行时间（见表 1）. 可见, `num2sqrts` 比纯粹的穷举快了约 200 倍, 而且随着范围的扩大, 效率可能会进一步地提高.

使用 `PSLQ[1]` 等整数关系探测算法可以找到一个系数是整数的多项式方程, 它的根正好等于一个浮点数.

例如可以找到  $1 + \sqrt{2}$  是  $x^2 - 2x - 1 = 0$  的一根, 那么可以通过构造一元二次方程的求根公式来得出  $1 + \sqrt{2}$ .

对于更一般的情况, 即两个根式的和或差, 它们是四次方程的根. 例如  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  是  $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$  的一根（虽然它也是  $x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 = 0$  的一个根, 但是这个方程的系数不全是整数, 当前的算法并不适用）, 但构造一元四次方程的求根公式异常麻烦, 故这种方法不能适用所有场合.

算法	总时间/s	平均时间/ $\mu s$	时间之比
<code>normal_one</code>	81.903242	16384.6484	1.0
<code>num2sqrts</code>	0.418364	83.6728	195.7

表 1: 两种算法效率的比较

同时，这些整数关系探测算法也可以将浮点数转换为更复杂的数学表达式，例如 `mpmath[2]` 的 `mpmath.identify` 函数：

```
>>> import mpmath, sympy
>>> s = mpmath.identify(mpmath.sqrt(2) + mpmath.sqrt(3))
>>> s
'sqrt(((10+sqrt(96))/2))'
>>> sympy.simplify(s)
sqrt(2*sqrt(6) + 5)
```

但是，参照上述的运行结果，问题则变成了化简双重根号，就需要编写化简双重根号的程序了，这里就不涉及了。

## 5 结论

在这篇文章中，我介绍了 `num2sqrts` 算法，它可以将一些浮点数转换为与之近似相等的、具有特定形式的数学表达式。同时，该算法简单、快速，适合应用在科学计算器中。

## 参考文献

- [1] Helaman R. P. Ferguson and David H. Bailey. *A Polynomial Time, Numerically Stable Integer Relation Algorithm*. manuscript. 1991.
- [2] The mpmath development team. *mpmath: a Python library for arbitrary-precision floating-point arithmetic*. <http://mpmath.org/>. 2023.