云峰学园朋辈辅学微积分（甲）II 期末模拟试题

时间：120 分钟，满分：100 分

命题：杨立

1. 求点 $P(1,0,-1)$ 到直线 $l:\begin{cases} x-y=3, \\ 3x+y+2z=-9 \end{cases}$ 的距离.(5 分)

2. 计算积分 $\oint_L |x|\mathrm{d}s$, 其中 L 为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(a>0)$.(8 分)

3. 判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ 的敛散性.(8 分)

4. 计算积分 $\iint\limits_D \cos\dfrac{x-y}{x+y}\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)|x+y\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$.(8 分)

5. 计算三重积分 $I = \iiint\limits_{\Omega} (x-y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 $\Omega: x^2+y^2+(z-a)^2 \leqslant a^2, z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}$.(8 分)

6. 将 $f(x) = \dfrac{1-x^2}{(1-x)^4} - x\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ 展开为 x 的幂级数.(9 分)

7. 已知 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=(2+2x)\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$, $f(1,1)=\dfrac{4}{3}$, 求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\middle|\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1\right\}$ 上的最值.(12 分)

8. 假设 L 为平面上一条不经过原点的光滑闭曲线, 问是否存在 k 使得曲线积分 $\oint_L \dfrac{x\mathrm{d}x-ky\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=0$ 对于任意 L 恒成立, 并说明理由.(10 分)

9. 已知 S 为曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧, 且 $a,b,c>0$. 求 $\oiint\limits_S \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}+\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}$.(8 分)

10. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的通项单调减少, 又已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ 收敛. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ 收敛.(7 分)

11. 设 $f(x,y)$ 为具有二阶连续偏导数的齐次函数, 即对任意 x,y,t 成立 $f(tx,ty)=t^2 f(x,y)$. 设 D 是由 $L: x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域, 求证:(7 分)

$$\oint_L f(x,y)\mathrm{d}s=\iint\limits_D div(grad f(x,y))\mathrm{d}\sigma$$

12. 设 $D: x^2+y^2 \leqslant 1$. 证明 $\dfrac{61\pi}{165} \leqslant \iint\limits_D \sin\sqrt{(x^2+y^2)^3} \leqslant \dfrac{2\pi}{5}$.(5 分)

13. 设函数 $f(x,y,z)$ 在区域 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$ 上具有连续一阶偏导数, 且满足 $\Delta f=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 计算 $I=\iiint\limits_\Omega \left(x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.(5 分)