

可實作模型問題 (Solvable Model Problem)

為了驗證「AI 適性化家教」的核心概念，我將宏大的願景縮小為一個數學上可定義、程式上可實作的簡化控制問題。

1 問題設計：從願景到簡化模型

- 對應關係：
 - 最終目標：全天候 AI 家教，能處理複雜情緒、多維度知識點與長期記憶。
 - 簡化模型：專注於「單一知識點（如解聯立方程式）」的短期教學（150 題）。
 - 核心假設：學生的學習狀態可以被簡化為一個數值（Skill Level），而教學策略被簡化為調整題目難度（Difficulty Level）。
- 任務目標：在模擬的教學過程中，動態調整題目難度，使學生始終處於「心流通道（Flow Zone）」。在此定義心流為預期答對率約 70%（既不因太簡單而無聊，也不因太難而挫折）。
- 輸入與輸出定義：
 - 輸入（Input）：當前題目難度 D_t 與學生的作答結果 R_t （0 為答錯，1 為答對）。
 - 輸出（Action）：下一題的題目難度 D_{t+1} （從題庫 $[-2, -1, 0, 1, 2]$ 中選擇）。
 - 資料形式：序列資料流 $\{(D_1, R_1), (D_2, R_2), \dots, (D_t, R_t)\}$ 。

2 模型與方法

- 模型選擇：SGD Classifier (Logistic Regression)
 - 理由 1：數學對應性。教育心理學中的項目反應理論（IRT）指出，學生答對機率 $P(\theta)$ 與能力 θ 、難度 b 的關係為 Sigmoid 函數：
$$P(\theta) = \frac{1}{1 + e^{-(\theta-b)}} \quad (1)$$
這與邏輯迴歸的數學形式完全一致，因此 Logistic Regression 非常適合用來建模「學生能力」與「答對率」的關係。
 - 理由 2：線上學習（Online Learning）。學生的能力在練習過程中會不斷改變（進步），傳統的批次訓練（Batch Training）無法適應這種動態環境。我使用 `partial_fit` 方法，讓模型每做一題就更新一次參數，即時捕捉學生的能力變化。
- 策略選擇：Target Probability Policy AI 不僅僅是預測，還需要決策。策略邏輯是計算當前題庫中所有難度的預期答對率，並選擇最接近 0.7 (70%) 的難度作為下一題。

3 實作與結果

- 實作環境：使用 Python 的 scikit-learn (SGDClassifier) 進行模型訓練，並建立一個基於 IRT 的 SimulatedStudent 類別作為互動環境。
- 結果分析：(請參考圖 1)
 - 藍線 (Student Skill)：顯示學生真實能力隨著練習次數 (X 軸) 從初始的 -1.0 逐步成長到 5.0 以上。這驗證了模擬環境中的學習機制正在運作。
 - 紅虛線 (Question Difficulty)：顯示 AI 指派的題目難度。我們可以觀察到明顯的「階梯狀上升」，具體變化如下：
 - * 第 0-65 題 (暖身期)：學生意力較低，AI 在初期試探後，主要將難度鎖定在 -1.0 (部分時間波動至 -2.0)，讓學生在簡單題目中建立信心。
 - * 第 65-115 題 (進階期)：隨著學生意力增長突破 1.5，AI 判斷原難度已過於簡單，將難度提升至 0.0。
 - * 第 115-130 題 (挑戰期)：學生意力持續上升，AI 短暫將難度調整至 1.0 以維持挑戰性。
 - * 第 130 題後 (精熟期)：學生意力達到高標，AI 最終將難度鎖定在最高的 2.0。
- 結論：模型成功實現了「動態鷹架 (Dynamic Scaffolding)」功能，緊貼著學生的成長曲線提供適當挑戰。

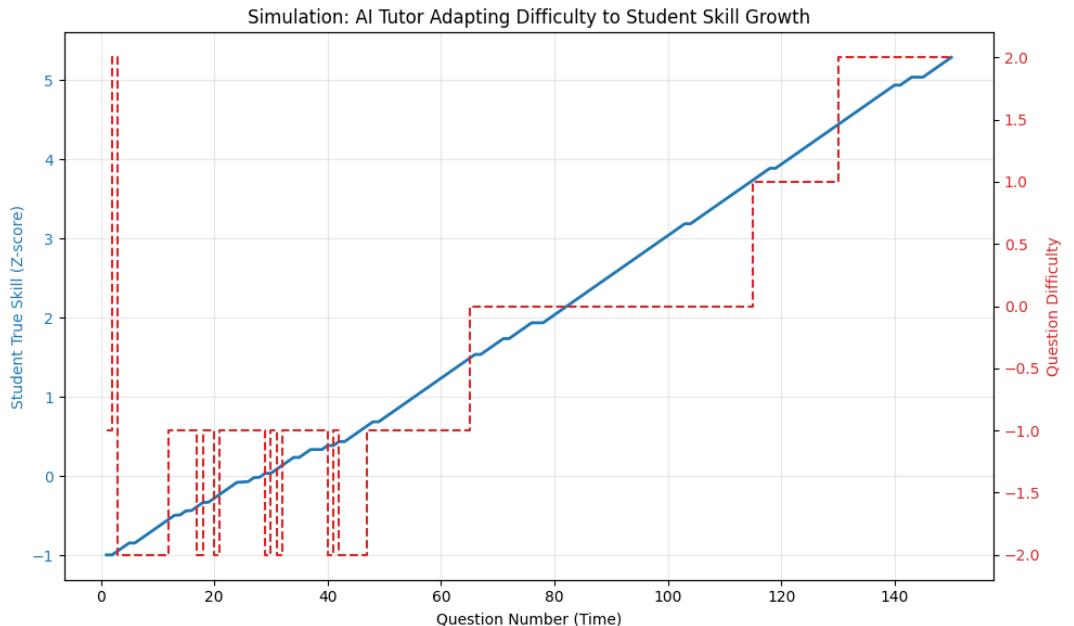


Figure 1: 模擬結果：AI 家教隨學生意力成長動態調整題目難度（藍線為學生意力，紅虛線為題目難度）

4 討論：從簡化看未來

透過這個 Model Problem，我獲得了以下關鍵洞察：

1. 「模型滯後」造成的自然穩定機制：觀察圖表可發現，紅線（難度）總是在藍線（真實能力）顯著超過該難度後才跳升。這並非因為 AI 得知了真實能力，而是因為 AI 的「認知」落後於「真實」。由於 AI 只能根據歷史作答來更新參數，當學生快速進步時，AI 需要累積連續多次的答對紀錄，其內部評估才能追上學生的真實程度。在這個「證據累積」的過程中，系統會持續給予較簡單的題目，這在無意中形成了一種「鞏固期」，避免了學生一學會就馬上遭遇挫折。
2. 冷啟動 (Cold Start) 的挑戰：在圖表最前端（前 10 題），紅線有較劇烈的波動。這是因為 AI 尚未收集足夠數據來收斂對該學生的參數估計。這對應到未來大問題中的關鍵困難：如何在極少的互動內快速掌握學生的特性？這可能需要 Meta-Learning 或 Transfer Learning 的技術。
3. 單一變數的侷限：本模型將學生簡化為單一的 skill 值。但真實學生在幾何強、代數弱，甚至有特定的迷思概念 (Misconception)。未來的模型不能只是回歸分析，而需要是高維度的知識圖譜 (Knowledge Graph) 或 貝氏網路 (Bayesian Network) 才能精準診斷。