

# Week 2 Programming assignment

鄭凱謙

## 1 問題

Use a neural network to approximate the Runge function

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Write a short report (1-2 pages) explaining method, results, and discussion including

- Plot the true function and the neural network prediction together.
- Show the training/validation loss curves.
- Compute and report errors (MSE or max error).

## 2 數據集生成

我們在定義域  $[-1, 1]$  之間均勻採樣生成 1000 個數據點作為我們的數據集。將數據集以 8:2 的比例隨機劃分為訓練集 ( 800 個點 ) 和驗證集 ( 200 個點 )，用於模型訓練與評估。

## 3 神經網路架構

我們建構了一個全連接的前饋神經網路，其架構如下：

- 輸入層：1 個神經元，接收自變數  $x$ 。
- 隱藏層 1：64 個神經元，使用 ReLU 作為激活函數。
- 隱藏層 2：64 個神經元，使用 ReLU 作為激活函數。
- 輸出層：1 個神經元，輸出預測值  $\hat{y}$ ，不使用激活函數。

## 4 訓練過程

- 損失函數 (Loss Function)：採用均方誤差 (Mean Squared Error, MSE) 作為損失函數，其定義為：

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

其中  $y_i$  是真實值， $\hat{y}_i$  是網路的預測值。

- 優化器 (Optimizer)：使用 Adam 優化器，學習率設定為 0.001。
- 訓練週期 (Epochs)：模型共訓練 1000 個週期。

## 5 函數近似結果

圖 1 展示了訓練完成後的神經網路預測結果與真實 Runge 函數的比較。從圖中可以看出，神經網路的預測曲線（紅色虛線）與真實函數曲線（藍色實線）在整個定義域內幾乎完全重合，顯示模型具有非常高的擬合精度。

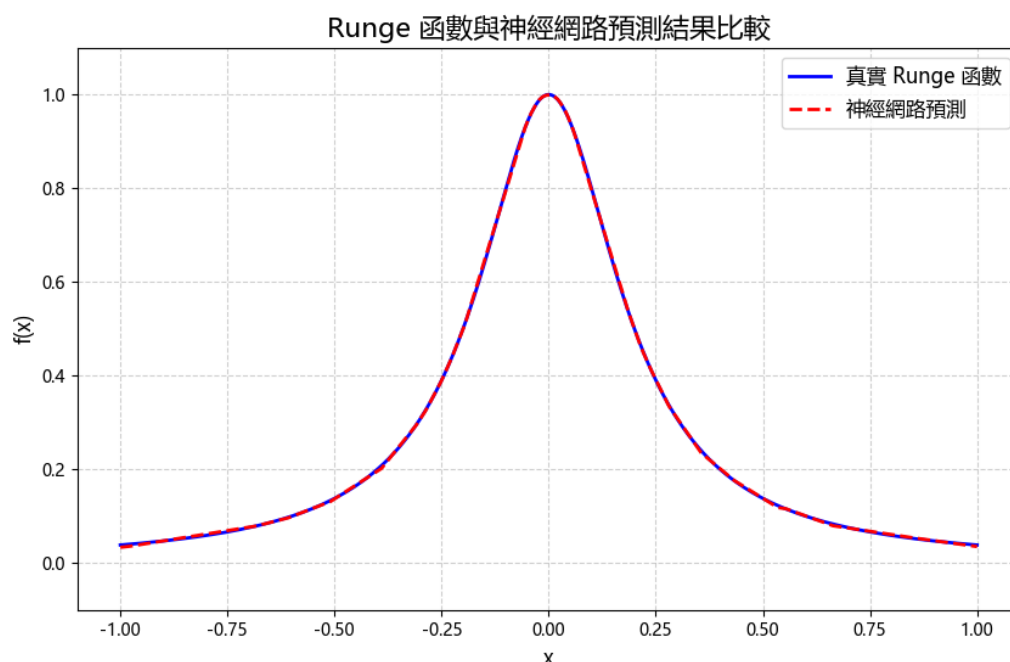


Figure 1: Runge 函數與神經網路預測結果比較

## 6 訓練/驗證損失曲線

圖 2 展示了模型在訓練過程中的訓練損失與驗證損失的變化情況。損失曲線顯示，訓練損失和驗證損失都隨著訓練週期的增加而迅速下降並最終收斂。兩條曲線在訓練後期非常接近，表明模型沒有發生過擬合。

## 7 誤差計算

在驗證集上計算得到的最終誤差指標如表 1 所示。極低的 MSE 值代表整體預測誤差非常小，而最大誤差也保持在一個很低的水平。

評估指標	數值
均方誤差 (MSE)	$4.0 \times 10^{-6}$
最大誤差 (Max Error)	$6.6 \times 10^{-3}$

Table 1: 模型誤差評估

## 8 討論

實驗結果展示了神經網路作為一種通用函數近似器的強大能力。模型不僅學習到了 Runge 函數在  $x = 0$  附近平緩的峰頂，也精確地擬合了兩側快速下降的陡峭部分。這與傳統多項式插

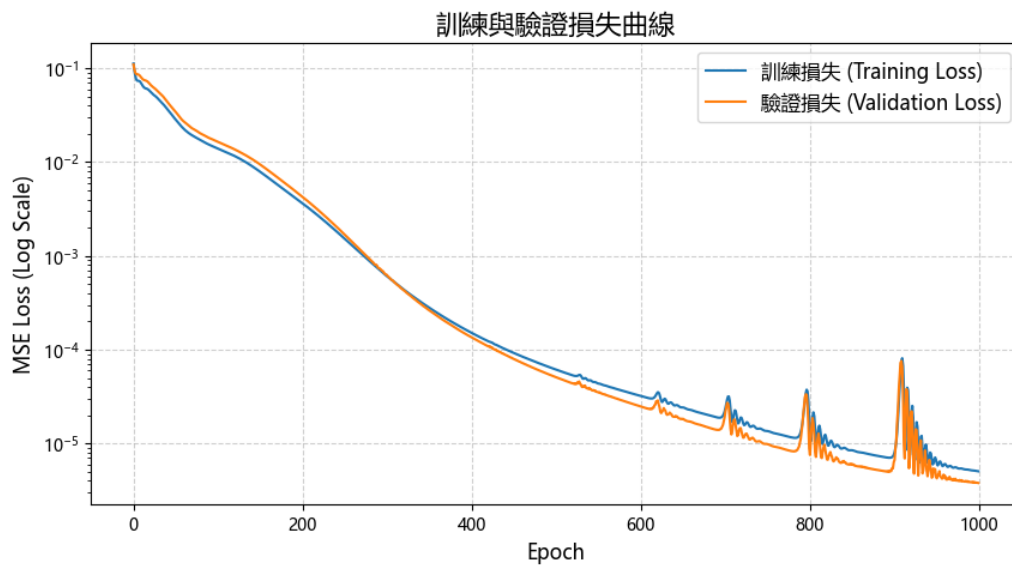


Figure 2: 訓練與驗證損失曲線 (MSE Loss, Log Scale)

值在邊界處會產生劇烈振盪的龍格現象形成鮮明對比。損失曲線的平穩收斂表明我們選擇的網路架構和超參數是合適的。