第10章 递推方程与生成函数

第10章 递推方程与生成函数

- **10.1 递推方程及其应用**
- **10.2 生成函数及其应用**
- **10.3 指数生成函数及其应用**
- **10.4 Catalan数与Stirling数**

10.1 递推方程及其应用

- **10.1.1** 递推方程的定义及实例
- **10.1.2** 常系数线性齐次递推方程的求解
- **10.1.3** 常系数线性非齐次递推方程的求解
- **10.1.4** 递推方程的其他解法
- **10.1.5** 递推方程与递归算法

递推方程的定义

定义10.1 设序列 $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, 简记为$\{ a_n \}$. 一个把 a_n 与某些个a_i $(i<n)$ 联系起来的等式叫做关于序列 $\{ a_n \}$ 的递推方程. 当给定递推方程和适当的初值就唯一确定了序列.

例如，

Fibonacci数列：1，1，2，3，5，8，…，记作$\{ f_n \}$.

递推方程 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

初值 $f_0 = 1$，$f_1 = 1$

阶乘计算数列：1，2，6，24，5！，…，记作$\{ F(n)\}$

递推方程 $F(n) = nF(n-1)$

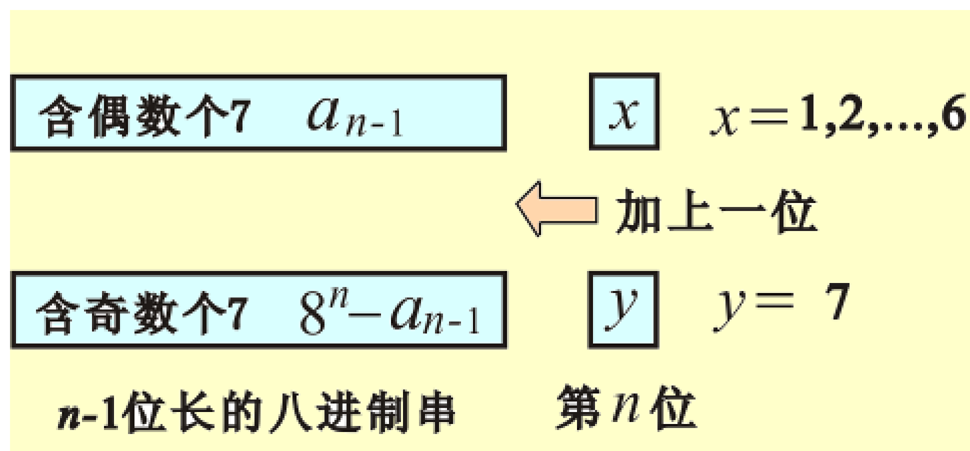
初值 $F(1) = 1$

递推方程的实例——计数编码

例1　一个编码系统用八进制数字对信息编码，一个码是有效的当且仅当含有偶数个7, 求 n 位长的有效码字有多少个？

解　设所求有效码字为 a_n 个. 分类处理、分步处理得到递推方程和初值如下：

$$a_n = 7a_{n-1} + 8^{n-1} - a_{n-1}$$
$$a_1 = 7$$



化简得

$$a_n = 6a_{n-1} + 8^{n-1},$$

可以解得

$$a_n = (6^n + 8^n)/2$$

递推方程的实例——Hanoi塔

例2 从A柱将这些圆盘移到C柱上去. 如果把一个圆盘从一个柱子移到另一个柱子称作一次移动，在移动和放置时允许使用B柱，但不允许大圆盘放到小圆盘的上面. 问把所有的圆盘的从A移到C总计需要多少次移动?

移动n个盘子的总次数为$T(n)$. 因此得到递推方程

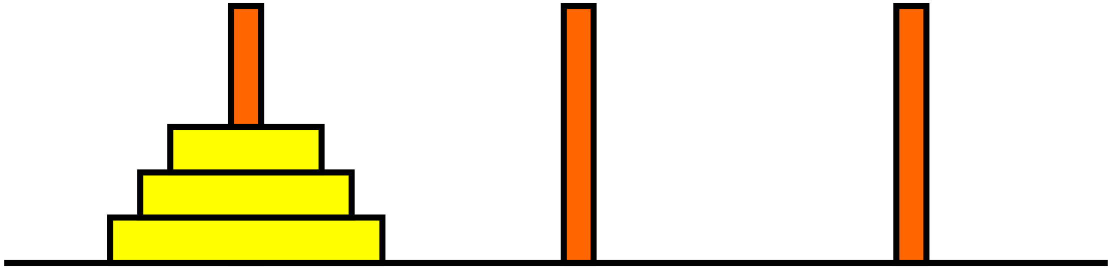
$$T(n) = 2T(n-1) + 1.$$

初值是

$$T(1)=1$$

可证明解是

$$T(n)=2^n-1$$



递推方程的实例——算法分析

例3 哪种排序算法在最坏情况下复杂度比较低？

插入排序，归并排序

插入排序

$$W(n) = W(n-1) + n - 1$$

$$W(1) = 0$$

解得 $W(n) = O(n^2)$.

归并排序，不妨设 $n = 2^k$.

$$W(n) = 2W(n/2) + n - 1$$

$$W(1) = 0$$

解得 $W(n) = O(n\log n)$

常系数线性齐次递推方程求解

定义10.2 常系数线性齐次递推方程的标准形：

$$\begin{cases} H(n)-a_1H(n-1)-a_2H(n-2)-\ldots-a_kH(n-k)=0 \\ H(0)=b_0, H(1)=b_1, H(2)=b_2, \ldots, H(k-1)=b_{k-1} \end{cases}$$

其中 $a_1, a_2, \ldots, a_k$为常数，$a_k \neq 0$

称为 k 阶常系数线性齐次递推方程

$b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ 为 k 个初值

实例：Fibonacci 数列的递推方程

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \\ f_0 = 1, \ f_1 = 1 \end{cases}$$

常系数线性齐次递推方程的公式解法

- 特征方程、特征根
- 递推方程的解与特征根的关系
- 解的线性性质
- 无重根下通解的结构
- 求解实例
- 有重根下通解的结构
- 求解实例

特征方程与特征根

$$\begin{cases} H(n)-a_1H(n-1)-a_2H(n-2)-\ldots-a_kH(n-k)=0 \\ H(0)=b_0, H(1)=b_1, H(2)=b_2, \ldots, H(k-1)=b_{k-1} \end{cases}$$

定义10.3 特征方程 $x^k - a_1x^{k-1} - \ldots - a_k = 0$，

特征方程的根称为递推方程的 特征根

实例：

递推方程 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

特征方程 $x^2-x-1 = 0$

特征根 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

递推方程解与特征根的关系

定理10.1 设 q 是非零复数，则 q^n 是递推方程的解当且仅当 q 是它的特征根.

证

q^n 是递推方程的解

$$\Leftrightarrow q^n - a_1 q^{n-1} - a_2 q^{n-2} - \ldots - a_k q^{n-k} = 0$$

$$\Leftrightarrow q^{n-k} (q^k - a_1 q^{k-1} - a_2 q^{k-2} - \ldots - a_k) = 0$$

$$\Leftrightarrow q_k - a_1 q^{k-1} - a_2 q^{k-2} - \ldots - a_k = 0$$

$\Leftrightarrow q$ 是它的特征根

注：这里递推方程指常系数线性齐次递推方程

解的线性性质

定理10.2 设 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 是递推方程的解，c_1,c_2为任意常数，则 $c_1h_1(n)+c_2h_2(n)$ 也是这个递推方程的解.

证　将 $c_1h_1(n)+c_2h_2(n)$ 代入该递推方程进行验证.

推论 若 $q_1, q_2, \ldots, q_k$ 是递推方程的特征根，则

$$c_1q_1^n + c_2q_2^n + \ldots + c_kq_k^n$$

是该递推方程的解，其中$c_1, c_2, \ldots, c_k$ 是任意常数.

注：这里的递推方程指的是常系数线性齐次递推方程

无重根下通解的结构

定义10.4 若对常系数线性齐次递推方程的每个解 $h(n)$ 都存在一组常数$c_1',c_2',\ldots, c_k'$ 使得

$$h(n) = c_1'q_1^n+c_2'q_2^n+\ldots+c_k'q_k^n$$

成立，则称 $c_1q_1^n + c_2q_2^n + \ldots + c_kq_k^n$ 为该递推方程的通解

定理10.3 设$q_1, q_2, \ldots, q_k$是常系数线性齐次递推方程不等的特征根，则

$$H(n)= c_1q_1^n + c_2q_2^n + \ldots + c_kq_k^n$$

为该递推方程的通解.

定理的证明

证： $H(n)$是解.

设 $h(n)$ 是递推方程的任意解，$h(0), h(1), \ldots, h(k-1)$由初值 $b_0, b_1, \ldots , b_{k-1}$唯一确定. 代入方程得到方程组

$$\begin{cases} c_1'+c_2'+\ldots+c_k'=b_0 \\ c_1'q_1+c_2'q_2+\ldots+c_k'q_k=b_1 \\ \ldots \\ c_1'q_1^{k-1}+c_2'q_2^{k-1}+\ldots+c_k'q_k^{k-1}=b_{k-1} \end{cases}$$

系数行列式 $\displaystyle\prod_{1\le i<j\le k}(q_i-q_j)$

当 $q_i \ne q_j$ 时，方程组有唯一解

求解实例

例4 **Fibonacci 数列：**

$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$，特征根为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

通解为 $$f_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

代入初值 $f_0=1, f_1=1$, 得 $$\begin{cases} c_1+c_2=1 \\ c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1 \end{cases}$$

解得 $$c_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad c_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

解是 $$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

有重根下求解中的问题

例5 $\begin{cases} H(n)-4H(n-1)+4H(n-2)=0 \\ H(0)=0, \quad H(1)=1 \end{cases}$

解 特征方程 $x^2-4x+4=0$

通解 $H(n)=c_1 2^n+c_2 2^n=c2^n$

代入初值得:

$$\begin{cases} c=0 \\ 2c=1 \end{cases}$$

c无解.

问题：两个解线性相关

有重根下的通解结构

定理10.4 设 $q_1, q_2, \ldots, q_t$ 是递推方程的不相等的特征根，且 q_i 的重数为 e_i，i=1, 2, … , t，令

$$H_i(n) = (c_{i_1} + c_{i_2} n + \ldots + c_{i_{e_i}} n^{e_i - 1}) q_i^{\,n}$$

那么通解

$$H(n) = \sum_{i=1}^{t} H_i(n)$$

求解实例

例6 求解以下递推方程

$$\begin{cases} H(n)+H(n-1)-3H(n-2)-5H(n-3)-2H(n-4)=0 \\ H(0)=1, H(1)=0, H(2)=1, H(3)=2 \end{cases}$$

解 特征方程 $x^4+x^3-3x^2-5x-2=0$，特征根$-2-1,-1,2$

通解为 $H(n)=(c_1+c_2n+c_3n^2)(-1)^n+c_4 2^n$

其中待定常数满足以下方程组

$$\begin{cases} c_1+c_4=1 \\ -c_1-c_2-c_3+2c_4=0 \\ c_1+2c_2+4c_3+4c_4=1 \\ -c_1-3c_2-9c_3+8c_4=2 \end{cases} \Rightarrow \quad c_1=\frac{7}{9}, c_2=-\frac{1}{3}, c_3=0, c_4=\frac{2}{9}$$

原方程的解为 $H(n)=\frac{7}{9}(-1)^n-\frac{1}{3}n(-1)^n+\frac{2}{9}2^n$

常系数线性非齐次递推方程求解

- 递推方程的标准型
- 通解结构
- 特解的求法
  - 多项式函数
  - 指数函数
  - 组合形式

递推方程的标准型及通解

定理10.5 设

$$H(n)-a_1H(n-1)-\ldots-a_kH(n-k)=f(n),n\ge k,a_k\ne 0,f(n)\ne 0.$$

$\overline{H(n)}$ 是对应齐次方程的通解，$H^*(n)$是一个特解，则

$H(n)=\overline{H(n)}+H^*(n)$ 是递推方程的通解.

证 代入验证, $H(n)$是解. 下面证明任意解 $h(n)$ 为某个齐次解与特解$H^*(n)$之和. 设 $h(n)$为递推方程的解，则

$$\begin{array}{l} \quad h(n)-a_1h(n-1)-\ldots-a_kh(n-k)=f(n) \\ \underline{-)H^*(n)-a_1H^*(n-1)-\ldots-a_kH^*(n-k)=f(n)} \\ [h(n)-H^*(n)]-a_1[h(n-1)-H^*(n-1)]-\ldots \\ -a_k[h(n-k)-H^*(n-k)]=0 \end{array}$$

$h(n)-H^*(n)$是齐次解，即$h(n)$是一个齐次解与$H^*(n)$之和.

特解的形式——多项式

如果$f(n)$为n次多项式，则特解一般也是n次多项式

例7 找出递推方程 $a_n - 2a_{n-1} = 2n^2$ 的通解

解 设 $a_n^* = P_1 n^2 + P_2 n + P_3$, 代入递推方程得

$$P_1 n^2 + P_2 n + P_3 - 2[P_1(n-1)^2 + P_2(n-1) + P_3] = 2n^2$$

整理得

$$-P_1 n^2 + (4P_1 - P_2)n + (-2P_1 + 2P_2 - P_3) = 2n^2$$

$$\begin{cases} -P_1 = 2 \\ 4P_1 - P_2 = 0 \\ -2P_1 + 2P_2 - P_3 = 0 \end{cases}$$

解得 $P_1 = -2, P_2 = -8, P_3 = -12$，

原方程的通解为 $a_n = c2^n - 2(n^2 + 4n + 6)$

实例

例8 Hanoi塔

$$T(n) = 2T(n-1)+1$$

$$T(1)=1$$

解 令 $T^*(n) = P$

代入方程

$$P = 2P + 1$$

解得 $P = -1$

$$T(n) = c\,2^n-1,$$

代入初值得 $c=1$, 解为 $T(n) = 2^n - 1$.

实例(续)

例9 求解关于顺序插入排序算法的递推方程

$$\begin{cases} W(n) = W(n-1) + n - 1 \\ W(1) = 0 \end{cases}$$

解 设特解为$W^*(n)=P_1n+P_2$，代入递推方程，得

$$P_1n+P_2-(P_1(n-1)+P_2) = n-1$$

无解. 设特解$W^*(n) = P_1n^2+P_2n$, 代入递推方程得

$$(P_1n^2+P_2n)-(P_1(n-1)^2+P_2(n-1))= n-1$$

解得 $P_1=1/2$, $P_2= -1/2$. 通解为

$$W(n) = c\,1^n + n(n-1)/2 = c + n(n-1)/2$$

代入初值$W(1)=0$，得到$W(n)= n(n-1)/2=O(n^2)$.

特解的形式——指数

$f(n)$为指数函数 β^n，若β不是特征根，则特解为

$$H^*(n) = P\beta^n$$

其中P为待定常数.

例10 通信编码问题

解　$a_n = 6a_{n-1} + 8^{n-1}$, $a_1=7$

设　$a^*_n = P\,8^{n-1}$, 代入得 $P = 4$

通解 $a_n = c\cdot 6^n + 4\cdot 8^{n-1}$

代入初值得 $a_n = (6^n+8^n)/2$

特解的形式——指数(续)

若β是e重特征根，则特解为$Pn^e\beta^n$

例11　$H(n)-5H(n-1)+6H(n-2) = 2^n$，

解 令 $H^*(n)=Pn2^n$

代入得

$$Pn2^n - 5P(n-1)2^{n-1} + 6P(n-2)2^{n-2} = 2^n$$

解得　$P = -2$

特解　$H^*(n) = -n2^{n+1}$

特解的组合形式

例12　$a_n - 2a_{n-1} = n + 3^n$

$$a_0 = 0$$

解　设特解为

$$a_n^* = P_1 n + P_2 + P_3 3^n$$

代入原方程得

$$(P_1 n + P_2 + P_3 3^n) - 2[P_1(n-1) + P_2 + P_3 3^{n-1}] = n + 3^n$$

解得　$P_1 = -1,\ P_2 = -2,\ P_3 = 3$

通解　$a_n = c2^n - n - 2 + 3^{n+1}$

代入初值得 $c = -1$，

$$a_n = -2^n - n - 2 + 3^{n+1}$$

递推方程的其他解法

- 换元法
- 迭代归纳法——递归树
- 差消法
- 尝试法
- 应用实例

换元法

思想：通过换元转化成常系数线性递推方程

例13 $\begin{cases} a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1 \\ a_0 = 2 \end{cases}$ $a_n>0$

解 令 $b_n = a_n^2$,

代入得 $b_n = 2\,b_{n-1} + 1$,
$b_0 = 4$

解得

$$b_n = 5\cdot 2^n - 1$$

$$a_n = \sqrt{5\cdot 2^n - 1}$$

实例

例14　归并排序

$$\begin{cases} W(n) = 2W(n/2) + n - 1, \ n = 2^k \\ W(1) = 0 \end{cases}$$

解　$H(k) = 2\,H(k-1) + 2^k - 1$

$H(1) = 1$

令　$H^*(k) = P_1 k 2^k + P_2$，解得 $P_1 = P_2 = 1$

$H^*(k) = k2^k + 1$

通解 $H(k) = c\,2^k + k2^k + 1$

代入初值得 $c = -1$

$H(k) = -2^k + k2^k + 1$

$W(n) = n \log n - n + 1$

迭代归纳法——归并排序

例15 $\begin{cases} W(n)=2W(n/2)+n-1, & n=2^k \\ W(1)=0 \end{cases}$

解
$$
\begin{aligned}
W(n) &= 2W(2^{k-1})+2^k-1 \\
&= 2[2W(2^{k-2})+2^{k-1}-1]+2^k-1 \\
&= 2^2W(2^{k-2})+2^k-2+2^k-1 \\
&= 2^2[2W(2^{k-3})+2^{k-2}-1]+2^k-2+2^k-1 \\
&= 2^3W(2^{k-3})+2^k-2^2+2^k-2+2^k-1 \\
&= \ldots \\
&= 2^kW(1)+k2^k-(2^{k-1}+2^{k-2}+\ldots+2+1) \\
&= k2^k-2^k+1 \\
&= n\log n-n+1
\end{aligned}
$$

迭代归纳法——错位排列

例16 $D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$

解：

$$D_n-nD_{n-1}=-[D_{n-1}-(n-1)D_{n-2}]=\ldots$$

$$=(-1)^{n-2}[D_2-2D_1]=(-1)^{n-2}$$

$$D_n=nD_{n-1}+(-1)^n,\quad D_1=0$$

$$D_n=n(n-1)D_{n-2}+n(-1)^n$$

$$=n(n-1)(n-2)D_{n-3}+n(n-1)(-1)^{n-2}+n(-1)^{n-1}+(-1)^n$$

$$=\ldots$$

$$=n(n-1)\ldots2D_1+n(n-1)\ldots3(-1)^2+n(n-1)\ldots4(-1)^3+$$

$$\ldots+n(-1)^{n-1}+(-1)^n$$

$$=n![1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}]$$

差消法——化简递推方程

例17
$$\begin{cases} T(n)=\dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n-1}T(i)+O(n), \quad n\ge 2 \\ T(1)=0 \end{cases}$$

$$nT(n)=2\sum_{i=1}^{n-1}T(i)+cn^2$$

$$(n-1)T(n-1)=2\sum_{i=1}^{n-2}T(i)+c(n-1)^2$$

$$nT(n)-(n-1)T(n-1)=2T(n-1)+O(n)$$

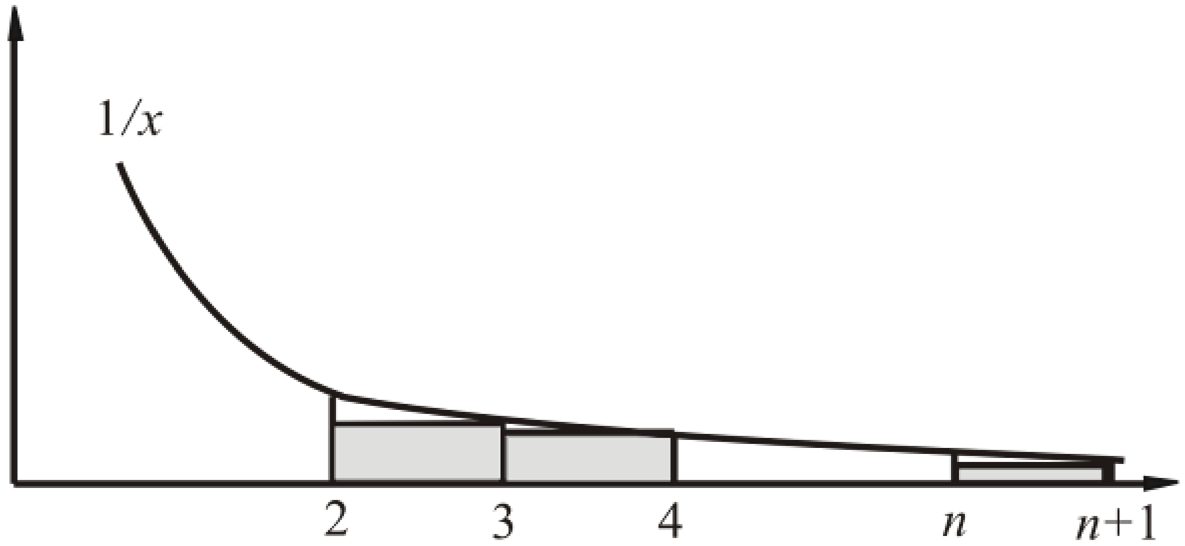
$$nT(n)=(n+1)T(n-1)+O(n)$$

$$\frac{T(n)}{n+1}=\frac{T(n-1)}{n}+\frac{c}{n+1}=c[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{3}+\frac{T(1)}{2}]$$

$$=c\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{3}\right]=O(\log n)$$

$$T(n)=O(n\log n)$$

积分近似

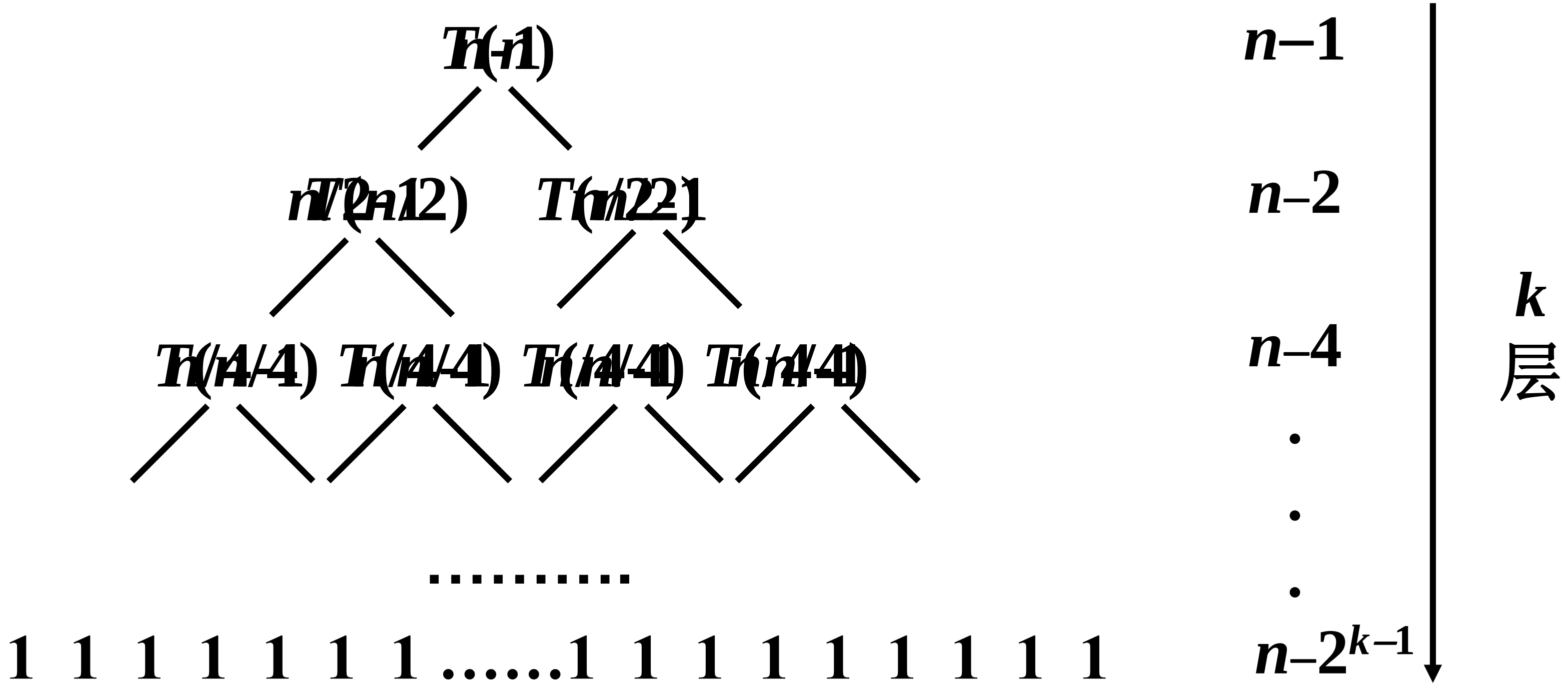


$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{3} \leq \int_{2}^{n+1} \frac{1}{x} dx$$

$$= \ln x \Big|_{2}^{n+1} = \ln(n+1) - \ln 2 = O(\log n)$$

递归树——二分归并排序

$$T(n) = 2T(n/2) + n - 1,\ n = 2^k$$



$$T(n) = nk - (1+2+\ldots+2^{k-1}) = nk - (2^k - 1) = n\log n - n + 1$$

尝试法

例18 $$T(n)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}T(i)+n+1$$

(1) $T(n)=C$, 左边$=O(1)$

$$\text{右边}=\frac{2}{n}C(n-1)+n+1=2C-\frac{2C}{n}+n+1=O(n)$$

(2) $T(n)=cn$, 左边$=cn$,

$$\text{右边}=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}ci+n+1$$

$$=\frac{2c}{n}\frac{(1+n-1)(n-1)}{2}+n+1$$

$$=c(n-1)+n+1=(c+1)n-c+1$$

尝试法(续)

(3) $T(n)=cn^2$, 左边$=cn^2$

$$右边=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}ci^2+n+1$$

$$=\frac{2}{n}[\frac{cn^3}{3}+O(n^2)]+n+1=\frac{2c}{3}n^2+O(n)$$

(4) $T(n)=cn\log n$, 左边$=cn\log n$

$$右边=\frac{2c}{n}\sum_{i=1}^{n-1}i\log i+n+1$$

$$=\frac{2c}{n}[\frac{n^2}{2}\log n-\frac{n^2}{4\ln 2}+O(n\log n)]+n+1$$

$$=cn\log n+(1-\frac{c}{2\ln 2})n+O(\log n)$$

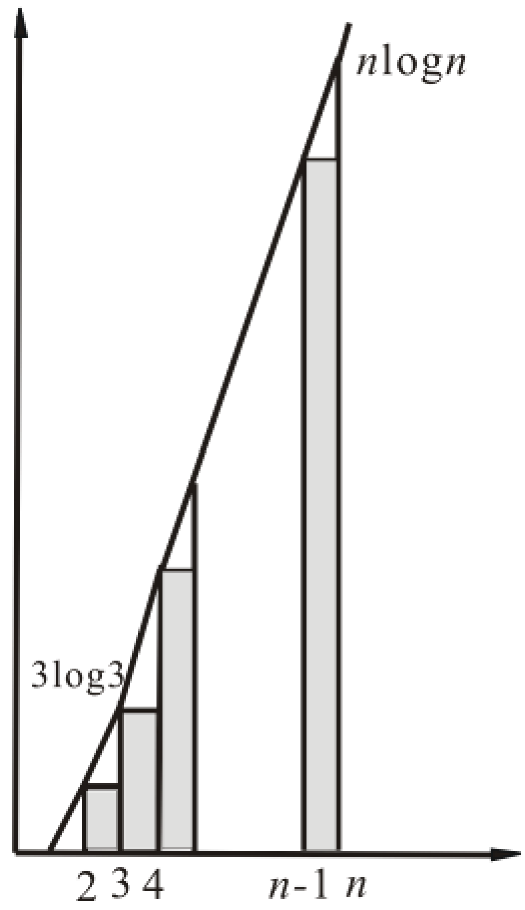
积分近似

$$\int_2^n x\log x dx = \int_2^n \frac{x}{\ln 2}\ln x dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2}[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}]\Big|_2^n$$

$$= \frac{1}{\ln 2}(\frac{n^2}{2}\ln n - \frac{n^2}{4})$$

$$- \frac{1}{\ln 2}(\frac{4}{2}\ln 2 - \frac{4}{4})$$



$$\sum_{i=1}^{n-1} i\log i = \frac{n^2}{2}\log n - \frac{n^2}{4\ln 2} + O(n\log n)$$

分治策略与递归算法

n为输入规模，***n/b***为子问题输入规模，
a为子问题个数，***d*(*n*)**为分解及综合的代价

$$T(n) = aT(n/b) + d(n), \quad n = b^k$$

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = a^2T(n/b^2) + ad(n/b) + d(n) = \ldots$$

$$= a^kT(n/b^k) + a^{k-1}d(n/b^{k-1}) + a^{k-2}(n/b^{k-2}) +$$

$$\ldots + ad(n/b) + d(n)$$

$$= a^k + \sum_{i=0}^{k-1} a^i d(n/b^i)$$

$$a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$$

分治策略与递归算法(续)

$$T(n)=a^k+\sum_{i=0}^{k-1}a^i d(n/b^i),\quad a^k=n^{\log_b a}$$

(1) $d(n)=c$

$$T(n)=\begin{cases} a^k+c\dfrac{a^k-1}{a-1}=O(a^k)=O(n^{\log_b a}) & a\neq 1 \\ a^k+kc=O(kc)=O(\log n) & a=1 \end{cases}$$

实例： 二分搜索

$W(n) = W(n/2) + 1$

$a = 1, b = 2, d(n) = c$

$W(n) = O(\log n)$

分治策略与递归算法(续)

(2) $d(n)=cn$

$$T(n)=a^k+\sum_{i=1}^{k-1}a^i\frac{cn}{b^i}=a^k+cn\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{a}{b}\right)^i$$

$$=\begin{cases} n^{\log_b a}+cn\dfrac{(a/b)^k-1}{a/b-1}=O(n) & a<b \\ n+cnk=O(n\log n) & a=b \\ a^k+cn\dfrac{(a/b)^k-1}{a/b-1}=a^k+c\dfrac{a^k-b^k}{a/b-1}=O(n^{\log_b a}) & a>b \end{cases}$$

实例：归并排序

$W(n) = 2W(n/2) + n–1$

$a = 2, b = 2, d(n) = O(n)$,

$W(n)= O(n\log n)$

实例——位乘问题

位乘问题：X,Y 为 n 位二进制数，$n=2^k$, 求 XY

一般方法：$W(n)= O(n^2)$

分治法：令$X = A2^{n/2}+B$, $Y = C2^{n/2} +D$, 则

$XY = AC\,2^n + (AD+BC)2^{n/2} + BD$

$W(n)= 4\,W(n/2) + cn$

$W(1)= 1$

$a = 4$，$b = 2$, $W(n)= O(n^{\log 4})= O(n^2)$

变换：$AD + BC = (A–B)(D–C) + AC + BD$

$W(n) = 3\,W(n/2) + cn$

$W(1)= 1$

$a = 3$，$b = 2$, $W(n)= O(n^{\log 3})= O(n^{1.59})$