伴随矩阵的性质及其应用

王莲花,田立平

(北京物资学院 基础部,北京 101149)

摘要:讨论了矩阵的伴随矩阵在对称、反对称、正定、正交、相似和特征值等方面的性质及其在线性代数解题中的应用.

关键词:伴随矩阵;正交矩阵;正定矩阵;相似矩阵;特征值

中图分类号 O151.21　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1007-0834(2006)03-0004-03

矩阵的伴随矩阵是一个十分重要的概念.对于它的一些性质的推证,涉及到线性代数中许多基本的概念与方法.本文作者归纳、总结了伴随矩阵的性质.

1　伴随矩阵的性质

定理　n阶矩阵A可逆的充要条件是矩阵A的行列式不等于零,即$|A|\neq 0$,且$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$.[1]

此定理解决了n阶矩阵A可逆的必要条件,而且说明矩阵A的逆矩阵是由A来确定的,更重要的是,此定理还给出了A的逆矩阵的构造方法,这在理论上是非常重要的.

矩阵的秩是矩阵的重要特性.若以$r(A)$表示矩阵A的秩,则有以下结论:

命题[1]　设A是n阶矩阵,则

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$$

证明　(1)当$r(A)=n$时,$|A|\neq 0$,由$AA^*=|A|E$知,$|AA^*|=|A||A^*|=|A|^n$,即$|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$,所以$r(A^*)=n$.

(2)当$r(A)=n-1$时,$|A|=0$,所以$AA^*=0$,知A^*的列向量都是方程组$AX=0$的解.由于$r(A)=n-1$,齐次线性方程组$AX=0$的解向量组的秩为$n-(n-1)=1$,知A^*的列向量组的秩为1,即列秩为1,故$r(A^*)=1$.

(3)当$r(A)<n-1$时,A^*的每一个元素A_{ij}都是零,因为A没有不为0的$n-1$阶子式,故$r(A^*)=0$.

由上所述,A与A^*同时可逆或不可逆.进一步可得出结论:$r((A^*)^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 0, & r(A)<n \end{cases}$

性质1　若$A=A^T$,则$(A^T)^*=A^*$.

证明　$(A^T)^*=|A^T|(A^T)^{-1}=|A|A^{-1}=A^*$.

性质2　$|A^*|=|A|^{n-1}$.

证明　当$|A|\neq 0$,由$AA^*=|A|E$知,$|AA^*|=|A||A^*|=|A|^n$,所以$|A^*|=|A|^{n-1}$;当$|A|=0$,$|A^*|=0$,因此$|A^*|=|A|^{n-1}$.

性质3　设k为常数,$(kA)^*=k^{n-1}A^*$

证明　$(kA)^*=|kA|(kA)^{-1}=k^n|A|\cdot k^{-1}A^{-1}=k^{n-1}A^*$.

性质4　当A可逆时,$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*=\frac{1}{|A|}A$.

证明　由$AA^*=|A|E$,$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$.而$(A^{-1})^*=|A^{-1}|(A^{-1})^{-1}=\frac{1}{|A|}A$.故结论成立.

性质5　$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

证明　当$|A|=0$时,$r(A^*)^*=0$,$(A^*)^*=0$,$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

当$|A|\neq 0$时,因为$(A^*)(A^*)^*=|A^*|E$,所以

收稿日期:2006-02-20

作者简介:王莲花(1964—),女,河南宁陵人,北京物资学院基础部副教授,从事代数教学与研究.

$$(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1}\frac{1}{|A|}A = |A|^{n-2}A .$$

性质 6 $(A^T)^* = (A^*)^T$.

证明 $(A^T)^* = |A^T|(A^T)^{-1} = |A|(A^{-1})^T$，而 $(A^*)^T = (|A|A^{-1})^T = |A|(A^{-1})^T$. 故结论成立.

性质 7 若 A 为正交矩阵，则 A^* 也是正交矩阵.

证明 因为 A 为正交矩阵，则 $|A|^2 = 1$，$A^TA = E$. 于是

$$\begin{aligned}(A^*)^TA^* &= (|A|A^{-1})^T(|A|A^{-1}) \\ &= |A|^2(A^{-1})^TA^{-1} \\ &= |A|^2(A^T)^{-1}A^{-1} = (AA^T)^{-1} = E^{-1} \\ &= E.\end{aligned}$$

故 A^* 也是正交矩阵.

性质 8 $(AB)^* = B^*A^*$.

证明 (1) 当 $|A| \neq 0$，$|B| \neq 0$ 时，则

$$\begin{aligned}(AB)^* &= \frac{1}{|AB|}(AB)^{-1} = \frac{1}{|A||B|}B^{-1}A^{-1} \\ &= \frac{1}{|B|}B^{-1}\cdot\frac{1}{|A|}A^{-1} = B^*A^*.\end{aligned}$$

(2) 当 $|A| = 0$，$|B| = 0$ 时，令 $A(x) = xE + A$，$B(x) = xE + B$，只要 x 充分大，$A(x)$ 与 $B(x)$ 都可逆，所以

$$(A(x)B(x))^* = (B(x))^*(A(x))^*$$

上式中的元素都是关于 x 的多项式，由于 x 充分大时，对应元素相等，所以对应元素是相等的多项式，即上式对任意的 x 都成立. 取 $x = 0$ 时，得 $(AB)^* = B^*A^*$.

推论 $(A_1A_2\cdots A_s)^* = A_s^*\cdots A_2^*A_1^*$.

性质 9 设 A 为 n 阶反对称矩阵，则当 n 为奇数时，A^* 是对称矩阵；而 n 为偶数时，A^* 是反对称矩阵.

证明 因 $(-A)^* = (-1)^{n-1}A^*$，$A^T = -A$，由性质 6 知

$$(A^*)^T = (A^T)^* = (-A)^* = (-1)^{n-1}A^*.$$

所以，当 n 为奇数时，$(A^*)^T = A^*$，此时 A^* 是对称方阵；当 n 为偶数时，$(A^*)^T = -A^*$，此时 A^* 是反对称矩阵.

性质 10 若 A 是可逆矩阵，λ 是其特征值，α 是 A 的属于 λ 的特征向量，那么 A^* 的特征值为 $\lambda^{-1}|A|$，α 是 A^* 的属于特征值 $\lambda^{-1}|A|$ 的特征向量.

证明 因为 A 可逆，所以 $\lambda \neq 0$. 由 $A\alpha = \lambda\alpha$，左乘 A^* 得，$A^*A\alpha = \lambda A^*\alpha$，故 $A^*\alpha = \lambda^{-1}|A|E\alpha = \lambda^{-1}\alpha$.

性质 11 若矩阵 A 与 B 相似，则 A^* 与 B^* 也相似.

证明 (1) 当 A 可逆时，因为 A 与 B 相似，则 $|A| = |B|$，且存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = B$. 又 A 与 B 可逆，上式两边取逆，得 $P^{-1}A^{-1}P = B^{-1}$，则有

$P^{-1}(|A|A^{-1})P = |B|B^{-1}$，即 $P^{-1}A^*P = B^*$. 说明 A^* 与 B^* 相似.

(2) 当 A 不可逆时，由 $P^{-1}AP = B$ 知，B 也不可逆，所以必存在 $\delta > 0$，当 $t \in (0, \delta)$ 时，使 $|tE + A| \neq 0$，$|tE + B| \neq 0$，令 $A_1 = tE + A$，$B_1 = tE + B$，那么 $|A_1| \neq 0$，$|B_1| \neq 0$，且

$$\begin{aligned}B_1 &= tE + B = tE + P^{-1}AP = P^{-1}(tE)P + P^{-1}AP \\ &= P^{-1}(tE + A)P = P^{-1}A_1P\end{aligned}$$

则由(1)知 $B_1^* = P^{-1}A_1^*P$，即

$$(tE + B)^* = P^{-1}(tE + A)^*P$$

上式两端矩阵的元素都是关于 t 的多项式，由于当 $t \in (0, \delta)$ 时，对应元素相等，所以对任意 t 上式都成立. 取 $t = 0$ 时，$P^{-1}A^*P = B^*$，即 A^* 与 B^* 相似.

性质 12 若 A 是正定的，那么 A^* 也是正定的.

证明 A 是正定的，故存在可逆矩阵 P，使 $P^TAP = E$，则有 $(P^TAP)^* = E^*$，即 $P^*A^*(P^T)^* = E$，所以 A^* 也是正定的.

性质 13 若矩阵 A 与 B 合同，且 A 与 B 可逆，则 A^* 与 B^* 也合同.

证明 因为矩阵 A 与 B 合同，则存在可逆矩阵 P，使 $P^TAP = B$，又 A 与 B 可逆，则有 $P^{-1}A^{-1}(P^T)^{-1} = B^{-1}$，即 $C^TA^{-1}C = B^{-1}$，其中 $C = (P^{-1})^T$ 又 $|P|^2|A| = |B|$，则

$(|P|C)^T\cdot|A|A^{-1}\cdot(|P|C) = |B|B^{-1}$，即

$$Q^TA^*Q = B^*$$

其中 $Q = |P|C$ 是可逆矩阵. 故 A^* 与 B^* 也合同.

性质 14 设 n 阶方阵 A 是可逆的，那么 A^* 可表示为 A 的多项式.

证明 A 的特征多项式为 $f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$. 因 A 可逆，所以 $a_0 = (-1)^n|A| \neq 0$. 由哈密尔顿—凯莱定理知 $f(A) = 0$，即

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0E = 0$$

故 $-\dfrac{1}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1E)A = E$

右乘 A^*，得

$$-\frac{|A|}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1E) = A^*$$

故 $A^* = (-1)^{n-1}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1E)$.

2 伴随矩阵性质的应用

例 1 已知三阶矩阵 $A = (a_{ij})_{3\times3}$ 满足条件：

(1) $a_{ij} = A_{ij}\ (i, j = 1, 2, 3)$，其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式；(2) $a_{11} \neq 0$. 求 $|A|$.

解 由条件(1)和性质 2 知，$A^* = A^T$，则 $|A| = |A^T| = |A^*| = |A|^2$，所以 $|A| = 0$ 或 $|A| = 1$. 又 $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + L + a_{1n}A_{1n} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + L + a_{1n}^2 \neq 0$，故 $|A| = 1$.

例 2 设 A 为三阶矩阵，A 的特征值为 1，3，5. 试求行列式 $|A^* - 2E|$.[1]

解 因为 $|A| = 1 \times 3 \times 5 = 15$，由性质 10 知，$A^*$ 的特征值分别为 15，5，3. 于是 $A^* - 2E$ 的特征值为 $15 - 2 = 13$，$5 - 2 = 3$，$3 - 2 = 1$. 故 $|A^* - 2E| = 13 \times 3 \times 1 = 39$.

例 3 求矩阵 A 的伴随矩阵 A^*.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

解 矩阵 A 的特征多项式为：

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$$

因 $a_0 = -2 \neq 0$，所以矩阵 A 可逆. 由性质 14 知

$$A^* = (-1)^{3-1}(A^2 - 4A + 5E) = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 8 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

例 4 证明若 A 为降秩矩阵，那么，A 的伴随矩阵 A^* 的 n 个特征值至少有 $n-1$ 个为零，且另一个非零特征值(如果存在的话)等于 $A_{11} + A_{22} + L + A_{nn}$.[2]

解 由于 $|A| = 0$，所以 $r(A) \leq n - 1$.

(1) 当 $r(A) \leq n - 1$ 时，由定理 2 知，$r(A^*) = 0$，所以 A^* 的特征值为 0，0，…，0. 则结论成立.

(2) 当 $r(A) = n - 1$ 时，由定理 2 知，$r(A)^* = 1$，设 A^* 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, L, \lambda_n$，由 Jordan 标准形知

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & 0 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

因为 $r(A)^* = 1$，可设 $\lambda_2 = L = \lambda_n = 0$，这时变为

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & L & * \\ 0 & 0 & L & 0 \\ M & M & & M \\ 0 & 0 & L & 0 \end{bmatrix}$$

因为 $r(A)^* = 1$，所以 $\lambda_1 \neq 0$

所以 $\lambda_1 = \mathrm{tr}A^* = A_{11} + A_{12} + L + A_{nn}$.

参 考 文 献

[1] 卢刚. 线性代数(第 2 版)[M]. 北京:高等教育出版社,2004.

[2] 钱吉林. 高等代数题解精粹[M]. 北京:中央民族大学出版社,2002.

Some Properties and its Applications of Adjoint Matrix

WANG Lian-hua, TIAN Li-ping

(Basic Course Department, Beijing WuZi University, Beijing 101149, China)

Abstract: Some properties of adjoint matrix are discussed in the essay. The properties include symmetry, anti-symmetry, positive definite, orthogonal, similar and characteristic value.

Key words: adjoint matrix; orthogonal matrix; symmetry matrix; similar matrix; characteristic value