

运筹学

Operations Research

陈志松

线性规划对偶理论

- 线性规划对偶理论概述
- 线性规划对偶问题提出
- 线性规划对偶问题规范形式
- 线性规划对偶问题一般形式
- 线性规划对偶问题基本性质
- 线性规划对偶问题的经济解释

线性规划对偶理论概述

- 线性规划对偶理论自1947年提出以来，已经有了很大发展，已成为线性规划的必不可少的重要基础理论。
- 对偶理论是线性规划中的一个最重要的最有趣的概念。支持对偶理论的基本思想是，每一个线性规划问题都存在一个与其对偶的问题。在求出一个问题解的时候，也同时给出了另一问题的解。
- 线性规划对偶问题以及对偶理论中对偶定理的运用是线性规划中主要考点。

对偶问题的提出

某公司制造两种家电产品。假定：已知各制造一件时，分别占用的设备 A、设备 B 的台时，调试时间以及设备 A、设备 B 和调试工序每天的可用能力，产品的单件利润如表所示，要求确定 A，B 两种家电各多少件，获利为最大。

产品	产品 1	产品 2	每天可用能力
设备 A (h)	0	5	15
设备 B (h)	6	2	24
调试工序	1	1	5
单件利润	2	1	

这是一个典型的最优生产计划制定问题。

制定获得最大利润生产计划的线性规划问题为：

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 \\ (\text{LP1}) \quad &\begin{cases} 5x_2 \leq 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

对偶问题的提出

再从另一个角度看问题。假定：有另一个公司想把该公司的资源收买下来，它至少应付多大的代价才能让该公司愿意放弃生产活动出让自己的资源。显然，该公司出让自己资源的条件是：出让价不低于同等资源由自己组织生产时获取的盈利。

设 y_1, y_2, y_3 分别代表单位时间 (h) 设备 A, B 及调试工序的出让代价，那么，

y_1, y_2, y_3 的取值应满足： $6y_2 + y_3 \geq 2$, $5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1$

又另一个公司希望用最小代价把该公司的资源收买过来，故有

$$\min w = 15y_1 + 24y_2 + 5y_3$$

显然， $y_i \geq 0, i = 1, 2, 3$,

综合上述，便有

$$\min w = 15y_1 + 24y_2 + 5y_3$$

$$\text{LP2)} \quad \begin{cases} 6y_2 + y_3 \geq 2 \\ 5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

对偶问题的提出

$$\begin{aligned} &\max z = 2x_1 + x_2 \\ (\text{LP1}) \quad &\begin{cases} 5x_2 \leq 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\min w = 15y_1 + 24y_2 + 5y_3 \\ (\text{LP2}) \quad &\begin{cases} 6y_2 + y_3 \geq 2 \\ 5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- **LP1与LP2** 两个线性规划问题的表现形式和系数之间存在许多对应关系。

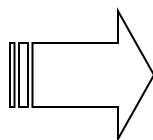
并且 $\max z = \min w$

- 我们称前者为原问题，后者是前者的对偶问题。

规范形式下对偶关系的一般形式

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$



$$\min w = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_m y_m$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n \\ y_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

规范形式下对偶关系的一般形式

$$\max z = CX$$

$$\begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\min w = Yb$$

$$\begin{cases} YA \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

规范形式原问题与对偶问题变换规则

观察分析上述规范形式下线性规划的原问题及其对偶问题的模型形式，可发现，按如下规则，可从线性规划原问题得到其对偶问题：

- (1) 目标函数由 \max 型变为 \min 型；
- (2) 对应原问题，每个约束行有一个对偶变量 $y_i, i = 1, 2, \dots, m$ ；
- (3) 对偶问题约束为 \geq 型，有 n 行；
- (4) 原问题的价值系数 C 变换为对偶问题的右端项；
- (5) 原问题的右端项 b 变换为对偶问题的价值系数；
- (6) 原问题的系数矩阵 A 转置后成为对偶问题的系数矩阵。

根据上述变换规则，可直接写出规范形式下线性规划问题对偶问题。

线性规划问题对偶问题举例

例3.1 写出下列线性规划问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\ \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leq 35 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 45 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

非规范形式的对偶关系

例 3.2 写出如下线性规划问题的对偶问题

$$\max z = x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 2 \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ 无约束} \end{cases}$$

如何直接写出非对称形式的对偶问题

首先，按对规范形式写出对偶关系的框架（不考虑符号），
对上例有

$$\max z = x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 2 \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{无约束} \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\min w = 2y_1 + y_2 + 4y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_3 & 1 \\ 3y_1 - y_2 + y_3 & 4 \\ -5y_1 + 6y_2 + y_3 & 3 \\ y_1 & , y_2 & , y_3 \end{cases}$$

如何直接写出非对称形式的对偶问题

然后，将上述原问题与对称形式下原问题作对照。

$$\max z = CX \qquad \min w = Yb$$

$$\begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} YA \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

为了准确无误判断对偶问题中的待定符号，我们遵从如下规则：

- (1) 约束为等式约束与变量无约束对应。
- (2) 符号相同的变量、约束，其对偶问题的约束、变量符号也相同。符号相反的变量、约束，其对偶问题的约束、变量符号也相反。

表3-1

原问题（或对偶问题）		对偶问题（或原问题）	
目标函数 max 目标函数系数（资源限量） 约束条件系数矩阵 A(A^T)		目标函数 min 资源限量（目标函数系数） 约束条件系数矩阵 A^T(A)	
变量	n 个变量 第 j 个变量 ≥0 第 j 个变量 ≤0 第 j 个变量无约束	约束	n 个约束 第 j 个约束为 ≥ 第 j 个约束为 ≤ 第 j 个约束为 =
约束	m 个约束 第 i 个约束 ≤ 第 i 个约束 ≥ 第 i 个约束为 =	变量	m 个变量 第 i 个变量 ≥0 第 i 个变量 ≤0 第 i 个变量无约束

如何直接写出非对称形式的对偶问题

只要记住规范形式下的对偶关系以及上述规则，就可以准确无误并很快写出其对偶问题。

$$\begin{aligned} \min w &= 2y_1 + y_2 + 4y_3 \\ \begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 1 \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \leq 4 \\ -5y_1 + 6y_2 + y_3 = 3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \text{无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

【例3.3】 写出下列线性规划的对偶问题

$$\begin{aligned} \min Z &= x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 9x_4 \\ \begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + 8x_3 - x_4 \leq 18 \\ 6x_2 - 5x_4 \geq 10 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = -14 \\ x_1 \text{ 无约束}, x_2 \leq 0, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

【解】 目标函数求最小值，应将表3-1的右边看作原问题，左边是对偶问题，原问题有3个约束4个变量，则对偶问题有3个变量4个约束，对偶问题为：

$$\begin{aligned} \max w &= 18y_1 + 10y_2 - 14y_3 \\ \begin{cases} 7y_1 + 2y_3 = 1 \\ -2y_1 + 6y_2 + 8y_3 \geq 5 \\ 8y_1 - y_3 \leq -4 \\ -y_1 - 5y_2 \leq 9 \\ y_1 \leq 0, y_2 \geq 0, y_3 \text{ 无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

线性规划对偶问题的基本性质

下面介绍对偶基本性质时，一般假定是如下规范对偶关系。

设原问题是（记为 LP ）： 对偶问题是（记为 DP ）：

$$\max Z = CX$$

$$\begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$$\min w = Yb$$

$$\begin{cases} YA \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

这里 A 是 $m \times n$ 矩阵 X 是 $n \times 1$ 列向量， Y 是 $1 \times m$ 行向量。假设 X_s 与 Y_s 分别是（ LP ）与（ DP ）的松弛变量。

【性质1】 对称性 对偶问题的对偶是原问题。

【证】 设原问题是

$$\max Z = CX, AX \leq b, X \geq 0$$

可知，它的对偶问题是

$$\min w = Yb, \quad YA \geq C, Y \geq 0$$

它与下列线性规划问题是等价的：

$$\max(-w) = -Yb, -YA \leq -C, Y \geq 0$$

再写出它的对偶问题。

$$\min(-w) = -CX, -AX \geq -b, X \geq 0$$

它与下列线性规划问题是等价的

$$\max Z = CX, AX \leq b, X \geq 0$$

即是原问题。

【性质2】 弱对偶性 设 X° 、 Y° 分别为LP(max)与DP(min)的可行解, 则 $CX^\circ \leq Y^\circ b$

【证】 因为 X° 、 Y° 是可行解, 故有 $AX^\circ \leq b$, $X^\circ \geq 0$ 及 $Y^\circ A \geq C$, $Y^\circ \geq 0$, 将不等式 $AX^\circ \leq b$

两边左乘 Y° , 得 $Y^\circ AX^\circ \leq Y^\circ b$

再将不等式 $Y^\circ A \geq C$ 两边右乘 X° , 得 $CX^\circ \leq Y^\circ AX^\circ$

故 $CX^\circ \leq Y^\circ AX^\circ \leq Y^\circ b$

这一性质说明了两个线性规划互为对偶时, 求最大值的线性规划的任意目标值都不会大于求最小值的线性规划的任一目标值, 不能理解为原问题的目标值不超过对偶问题的目标值。

【性质3】 无界性 若原问题（对偶问题）有无界解，则其对偶问题（原问题）无可行解。

可理解为：在互为对偶的两个问题中，若一个问题可行且具有无界解，则另一个问题无可行解

证：假定原问题有无界解，对偶问题有可行解 Y° ，
 $Y^\circ b \leq \infty$ 。原问题有无界解，即存在 $C X^\circ \rightarrow \infty$ ，根据若对偶性有， $Y^\circ b \geq C X^\circ \rightarrow \infty$ ，显然矛盾，故命题成立。

注意：（1）这个定理的逆定理不成立，即若一个问题无可行解，另一问题不一定有无界解，也可能无可行解；
（2）若原问题可行且另一个问题不可行，则原问题具有无界解

例如：

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + 2x_2 \\ \begin{cases} -x_1 - \frac{1}{2}x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

无可行解，而对偶问题

$$\begin{aligned} \max w &= 2y_1 + 2y_2 \\ \begin{cases} -y_1 + y_2 \leq 1 \\ -\frac{1}{2}y_1 + y_2 \leq 2 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

有可行解，由性质（3）知必有无界解。

【性质4】最优性定理 设 X^0 与 Y^0 分别是 (LP) 与 (DP) 的可行解, 则当 $CX^0 = Y^0b$ 时, X^0 、 Y^0 是 (LP) 与 (DP) 的最优解

【证】若 $CX^0 = Y^0b$, 由性质2, 对偶问题的所有可行解 Y' 都存在 $Y'b \geq CX'$ 。因为 $CX^0 = Y^0b$, 所以 $Y'b \geq Y^0b$, 可见 Y^0 是使目标函数取值最小的可行解, 因而 Y^0 是最优解。同理可证, X^0 是最优解

【性质5】 弱对偶性 若互为对偶的两个问题其中一个有最优解，则另一个也有最优解，且最优值相同。

【证】 设 (LP) 有最优解 X^0 , 那么对于最优基 B 必有 $C - C_B B^{-1} A \leq 0$ 与 $-C_B B^{-1} b \leq 0$, 即有 $Y^0 A \geq C$ 与 $Y^0 \geq 0$, 这里 $Y^0 = C_B B^{-1}$, 从而 Y^0 是可行解, 对目标函数有

$$CX^0 = C_B X_B = C_B B^{-1} b = Y^0 b$$

由性质4知 Y^0 是最优解。

由性质 5 还可推出**另一结论**：若 (LP) 与 (DP) 都有可行解，则两者都有最优解，若一个问题无最优解，则另一问题也无最优解。

【例3.4】 证明下列线性规划无最优解：

$$\begin{aligned} \min Z &= x_1 - x_2 + x_3 \\ \begin{cases} x_1 - x_3 \geq 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases} \end{aligned}$$

【证】 容易看出 $X = (4, 0, 0)$ 是一可行解，故问题可行。对偶问题

$$\begin{aligned} \max w &= 4y_1 + 3y_2 \\ \begin{cases} y_1 + y_2 \leq 1 \\ -y_2 \leq -1 \\ -y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

将三个约束的两端分别相加得 $y_2 \leq \frac{1}{2}$
而第二个约束有 $y_2 \geq 1$ ，矛盾，故对偶问题无可行解，因而原问题具有无界解，即无最优解。

【性质6】互补松弛定理 设 X^0 、 Y^0 分别为 (LP) 与 (DP) 的可行解， X_S 和 Y_S 是它的松弛变量的可行解，则 X^0 和 Y^0 是最优解当且仅当

$$Y_S X^0 = 0 \text{ 和 } Y^0 X_S = 0$$

【证】 设 X^0 和 Y^0 是最优解,由性质4 , $C X^0 = Y^0 b$, 由于 X_S 和 Y_S 是松弛变量, 则有

$$\begin{aligned} A X^0 + X_S &= b \\ Y^0 A - Y_S &= C \end{aligned}$$

将第一式左乘 Y^0 , 第二式右乘 X^0 得

$$\begin{aligned} Y^0 A X^0 + Y^0 X_S &= Y^0 b \\ Y^0 A X^0 - Y_S X^0 &= C X^0 \end{aligned}$$

显然有 $Y^0 X_S = -Y_S X^0$

又因为 Y^0 、 X_S 、 Y_S 、 $X^0 \geq 0$ ，所以有

$$Y^0 X_S = 0 \text{ 和 } Y_S X^0 = 0$$

成立。

反之，当 $Y^0 X_S = 0$ 和 $Y_S X^0 = 0$ 时，有

$$\begin{aligned} Y^0 A X^0 &= Y^0 b \\ Y^0 A X^0 &= C X^0 \end{aligned}$$

显然有 $Y^0 b = C X^0$ ，由性质4知 Y^0 与 X^0 是 (LP) 与 (DP) 的最优解。证毕。

性质6告诉我们已知一个问题的最优解时求另一个问题的最优解的方法，即已知 Y^* 求 X^* 或已知 X^* 求 Y^* 。

$$Y^* X_S = 0 \text{ 和 } Y_S X^* = 0$$

两式称为互补松弛条件。将互补松弛条件写成下式

$$\sum_{i=1}^m y_i^* x_{S_i} = 0$$

$$\sum_{j=1}^n y_{S_j} x_j^* = 0$$

由于变量都非负，要使求和式等于零，则必定每一分量为零，因而有下列关系：

(1) 当 $y_i^* > 0$ 时, $x_{s_i} = 0$, 反之当 $x_{s_i} > 0$ 时 $y_i^* = 0$;

(2) $y_{s_j} > 0$ 时 $x_j^* = 0$, 反之当 $x_j^* > 0$ 时 $y_{s_j} = 0$

利用上述关系, 建立对偶问题 (或原问题) 的约束线性方程组, 方程组的解即为最优解。

性质6的结论和证明都是假定 (P) 与 (D) 为对称形式, 事实上对于非对称形式, 性质6的结论仍然有效。

【例3.5】 已知线性规划

$$\max z = 3x_1 + 4x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 16 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

的最优解是

$$X = (6, 2, 0)^T$$

求对偶问题的最优解。

【解】对偶问题是

$$\min w = 10y_1 + 16y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ 2y_1 + 2y_2 \geq 4 \\ y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

因为 $X_1 \neq 0$, $X_2 \neq 0$, 所以对偶问题的第一、二个约束的松弛变量等于零, 即

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 3 \\ 2y_1 + 2y_2 = 4 \end{cases}$$

解此线性方程组得 $y_1=1, y_2=1$, 从而对偶问题的最优解为 $Y = (1, 1)$, 最优值 $w=26$ 。

$$\min z = 2x_1 - x_2 + 2x_3$$

【例3.6】 已知线性规划

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \leq 6 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{无约束} \end{cases}$$

的对偶问题的最优解为 $Y = (0, -2)$ ，求原问题的最优解。

【解】 对偶问题是

$$\max w = 4y_1 + 6y_2$$

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 \geq 2 \\ y_1 + y_2 \leq -1 \\ y_1 - y_2 = 2 \\ y_1 \text{无约}, y_2 \leq 0 \end{cases}$$

因为 $y_2 \neq 0$ ，所以原问题第二个松弛变量 $x_{s_2} = 0$ ，由 $y_1 = 0$ 、 $y_2 = -2$ 知，松弛变量 $y_{s_1} = 0, y_{s_2} = 1, y_{s_3} = 0$ ，故 $x_2 = 0$ ，则原问题的约束条件为线性方程组：

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 4 \\ -x_1 - x_3 = 6 \end{cases}$$

解方程组得： $x_1 = -5, x_3 = -1$ ，所以原问题的最优解为 $X = (-5, 0, -1)$ ，最优值 $Z = -12$ 。

例 3.7 用图解法求解线性规划问题

$$\min w = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 5 \end{cases}$$

解 先写出对偶问题:

$$\max z = 4y_1 + 3y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 2 \\ y_1 - y_2 \leq 3 \\ 2y_1 + 3y_2 \leq 5 \\ y_1 + y_2 \leq 2 \\ 3y_1 + y_2 \leq 3 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

用图解法求解对偶问题 (略), 得 $y_1^* = \frac{4}{5}, y_2^* = \frac{3}{5}$ 。

将 $y_1^* = \frac{4}{5}, y_2^* = \frac{3}{5}$ 代入约束条件，②③④为严格不等式，

$$y_{S2}^* > 0, y_{S3}^* > 0, y_{S4}^* > 0,$$

运用互补松弛定理， \hat{X}, \hat{Y} 是最优解， X_S, Y_S 是松弛变量

$$\Rightarrow \hat{X} Y_S = 0, X_S \hat{Y} = 0, \text{ 所以 } x_2^* = 0, x_3^* = 0, x_4^* = 0。$$

又由于 $y_1^* > 0, y_2^* > 0$ ，因此 $x_{S1}^* = 0, x_{S2}^* = 0$ ，即

$$\begin{cases} x_1^* + 3x_5^* = 4 \\ 2x_1^* + x_5^* = 3 \end{cases} \quad \text{求解得} \begin{cases} x_1^* = 1 \\ x_5^* = 1 \end{cases}$$

所以原问题的最优解为 $x^* = [1, 0, 0, 0, 1]^T, w^* = 5$ 。

例 3.8 已知线性规划问题

$$z^* = \max \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j \right\}$$

$$z^{**} = \max \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j \right\}$$

$$(I) \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & i=1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0, j=1, 2, \dots, n \end{cases} \text{ 与 } (II) \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + k_i & i=1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0, j=1, 2, \dots, n \end{cases}$$

若 $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ 为线性规划问题(I)对偶问题的最优解, 在线性规划问题(II)

中 k_i 为某已知常数, 求证: $z^{**} \leq z^* + \sum_{i=1}^m k_i y_i^*$

$$w^* = \min \left\{ \sum_{i=1}^m b_i y_i \right\} = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*$$

证 先写出第一个问题的对偶问题

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j & j=1,2,\dots,n \\ y_i \geq 0 & i=1,2,\dots,m \end{cases}$$

$$w^{**} = \min \left\{ \sum_{i=1}^m (b_i + k_i) y_i \right\} = \sum_{i=1}^m b_i y_i^{**} + \sum_{i=1}^m k_i y_i^{**}$$

然后再写出第二个问题的对偶问题

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j & j=1,2,\dots,n \\ y_i \geq 0 & i=1,2,\dots,m \end{cases}$$

两个问题的约束条件相同，故 $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ 也是后一个对偶问题的可行解。

$$\text{故有 } w^{**} = \sum_{i=1}^m b_i y_i^{**} + \sum_{i=1}^m k_i y_i^{**} \leq \sum_{i=1}^m (b_i + k_i) y_i^* = w^* + \sum_{i=1}^m k_i y_i^*,$$

$$\text{又 } z^{**} = w^{**}, z^* = w^*, \text{ 所以有 } z^{**} \leq z^* + \sum_{i=1}^m k_i y_i^*。$$

【性质6】 互补对偶性 $LP(\max)$ 的检验数的相反数对应于 $DP(\min)$ 的一组基本解。

其中第 j 个决策变量 x_j 的检验数的相反数对应于 (DP) 中第 j 个松弛变量 y_{S_j} 的解，第 i 个松弛变量的检验数 x_{S_i} 的相反数对应于第 i 个对偶变量 y_i 的解。反之， (DP) 的检验数（注意：不乘负号）对应于 (LP) 的一组基本解。

证明略。

【例3.9】 线性规划

$$\max z = 6x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1 + 4x_3 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- (1) 用单纯形法求最优解;
- (2) 写出每步迭代对应偶问题的基本解;
- (3) 从最优表中写出对偶问题的最优解;

【解】 (1) 加入松弛变量 x_4 、 x_5 后, 单纯形迭代如表2-2所示。

表3-1

X_B		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
表 (1)	x_4 x_5	[2] 1	-1 0	2 4	1 0	0 1	2 → 4
λ_j		6 ↑	-2	1	0	0	
表 (2)	x_1 x_5	1 0	-1/2 [1/2]	1 3	1/2 -1/2	0 1	1 3 →
λ_j		0	1 ↑	-5	-3	0	
表 (3)	x_1 x_2	1 0	0 1	4 6	0 -1	1 2	4 6
λ_j		0	0	-11	-2	-2	

最优解 $X = (4, 6, 0)$ ，最优值 $Z = 6 \times 4 - 2 \times 6 = 12$;

(2) 设对偶变量为 y_1 、 y_2 , 松弛变量为 y_3 、 y_4 、 y_5 , $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ ，由性质6得到对偶问题的基本解

$$\begin{aligned} & (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \\ &= (-\lambda_4, -\lambda_5, -\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3), \text{ 即} \end{aligned}$$

表2-2 (1) 中 $\lambda = (6, -2, 1, 0, 0)$,

$$\text{则 } Y^{(1)} = (0, 0, -6, 2, -1)$$

表2-2 (2) 中 $\lambda = (0, 1, -5, -3, 0)$,

$$\text{则 } Y^{(2)} = (3, 0, 0, -1, 5)$$

表2-2 (3) 中 $\lambda = (0, 0, -11, -2, -2)$,

$$\text{则 } Y^{(3)} = (2, 2, 0, 0, 11)$$

(3) 因为表3-1 (3) 为最优解, 故

$$Y^{(3)} = (2, 2, 0, 0, 11) \text{ 为对偶问题最优解;}$$

对偶问题的基本性质应用举例

例 3.10 已知线性规划问题

$$\max z = 5x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_3 \text{ 无约束。} \end{cases}$$

(a) 写出其对偶问题

(b) 已知原问题用两阶段法求解得到的最终单纯形表，试写出其对偶问题的解。

最终单纯形表

C_j		5	3	6	-6	0	b_i
C_B	X_B	x_1	x_2	x'_3	x''_3	x_4	
0	x_4	0	1	0	0	1	8
5	x_1	1	2	0	0	0	14
-6	x_3	0	1	-1	1	0	4
σ_j		0	-1	0	0	0	

对偶问题的基本性质应用举例

解 其对偶问题为:

$$\min w = 18y_1 + 16y_2 + 10y_3$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 5 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 3 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_3 = 6 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 \geq 0; y_2, y_3 \text{ 无约束} \end{cases}$$

设第(1)个约束的松弛变量为 y_{s1} ，第(2)个约束的松弛变量为 y_{s2} 。

由最终单纯形表知: $y_{s1} = 0, y_{s2} = 1$; 代入约束条件(1)(2)得

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 = 5 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 - 1 = 3 \\ y_1 + 3y_2 + y_3 = 6 \end{cases} \quad \text{解得 } (y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 3)$$

对偶问题的经济解释---影子价格

$$z^* = \sum_{j=1}^n c_j x_j^* = w^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = y_i^*$$

在原问题中的 b_i 是约束条件右端项代表 i 种资源的拥有量。

对偶问题最优解 y_i^* 的意义代表在资源最优利用条件下，对单位第 i 种资源的估价。

这种估价不是资源的市场价格而是根据资源在生产中作出的贡献而作的估价，为了起见，称为影子价格（shadow price）。

对影子价格的进一步讨论

(1) 资源的市场价格是已知数，相对比较稳定，而它的影子价格则有赖于资源的利用情况，是未知数。由于企业生产任务、产品结构等情况发生变化，资源的影子价格也随之改变。

(2) 影子价格是一种边际价格 $\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = y_i^*$ 这说明 y_i^* 的值相

当于在资源得到最优利用的生产条件下， b_i 每增加一个单位时目标函数 z 的增量。

(3) 资源的影子价格实际上又是一种机会成本。市场价格高于影子价格时，卖出资源，市场价格低于影子价格时就全买进资源。

对影子价格的进一步讨论

(4) 根据互补松弛性质，某种资源未充分利用时，该种资源的影子价格为 0，即某种资源的影子价格不为 0 时，该种资源在生产中已耗费完毕。

(5) 从影子价格的含义上考察单纯形表的计算

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} y_j$$

式中， c_j 代表第 j 种产品的产值， $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_j$ 是生产该种产品所消耗的各项资源的影子价格的总和，即产品的隐含成本。

当产品产值大于隐含成本时，生产该项产品有利，可在计划中安排，否则不在计划中安排，这就是单纯形表中多个检验数的经济意义。

(6) 一般来说，线性规划问题求解是确定资源的最优分配方案，而对于对偶问题的求解是确定对资源的恰当估价，这种估价直接涉及到资源的最有效利用。