

LP当前解已是最优的四大特征：

- (1) 存在一组(初始)可行基（其系数矩阵为单位阵）。
- (2) 检验数行的基变量系数=0。
- (3) 检验行的非基变量系数 ≤ 0 。
 - $\left\{ \begin{array}{l} \text{全部} < 0 \Rightarrow \text{唯一解。} \\ \text{存在} = 0 \Rightarrow \text{无穷多个解。} \end{array} \right.$
- (4) 常数列向量 ≥ 0 。

Q: 所给LP的标准型中约束矩阵中没有现成的可行基怎么办？

1.5.2 单纯形的进一步讨论

例 解下列线性规划

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

解：先化为标准形式

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$s.t. \begin{cases} -4x_1 & +3x_2 & +x_3 & -x_4 & & = 4 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & & +x_5 & = 10 \\ 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & & & = 1 \\ x_j \geq 0, & j = 1, 2, \dots, 5 \end{cases}$$

系数矩阵中不存在单位矩阵，无法建立初始单纯形表。

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$s.t. \begin{cases} -4x_1 & +3x_2 & +x_3 & -x_4 & & = 4 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & & +x_5 & = 10 \\ 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & & & = 1 \\ x_j \geq 0, & j = 1, 2, \dots, 5 \end{cases}$$

x_5 可作为一个基变量，第一、三约束中分别加入人工变量 x_6 、 x_7 ，得

$$\begin{cases} -4x_1 & +3x_2 + x_3 & -x_4 & & +x_6 & = 4 \\ x_1 & -x_2 + 2x_3 & & & +x_5 & = 10 \\ 2x_1 & -2x_2 + x_3 & & & & +x_7 & = 1 \\ x_j \geq 0, & j = 1, 2, \dots, 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x_1 & +3x_2 + x_3 & -x_4 & & +x_6 & & = 4 \\ x_1 & -x_2 + 2x_3 & & & +x_5 & & = 10 \\ 2x_1 & -2x_2 + x_3 & & & & +x_7 & = 1 \\ x_j \geq 0, & j = 1, 2, \dots, 7 \end{cases}$$

说明：①不易接受。因为 x_6, x_7 是强行引进，称为人工变量。

它们与 x_4, x_5 不一样。 x_4, x_5 称为松弛变量和剩余变量，是为了将不等式改写为等式而引进的，而改写前后两个约束是等价的。

②人工变量的引入一般来说是前后不等价的。只有当最优解中，人工变量都取值零时（此时人工变量实质上就不存在了）才可认为两个问题的最优解是相同的。

处理方法：把人工变量从基变量中“赶”出去使其变为非基变量，以求出原问题的初始基本可行解。

结 论

1. 若新LP的最优解中，人工变量都处在非基变量位置（即取零值）时，原LP有最优解。
2. 若新LP的最优解中，包含有非零的人工变量，则原LP无可行解。
3. 若新LP的最优解的基变量中，包含有人工变量，但该人工变量取值为零。这时可将某个非基变量引入基变量中来替换该人工变量，从而得到原LP的最优解。

以 $X^{(0)}$ 作初始基本可行解进行迭代时，怎样才能较快地将所有的人工变量从基变量中全部“赶”出去（如果能全部“赶”出去的话）。这会影响到得到最优解的迭代次数。

——大M法与两阶段法

1. 大M 法

例1-20 用大M法解下列线性规划

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

解：先化为标准形式

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$s.t. \begin{cases} -4x_1 & +3x_2 & +x_3 & -x_4 & = 4 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & & +x_5 = 10 \\ 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & & = 1 \\ x_j \geq 0, & j = 1, 2, \dots, 5 \end{cases}$$

系数矩阵中不存在单位矩阵，无法建立初始单纯形表。

目标函数修改为：

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 - Mx_6 - Mx_7$$

$$\begin{cases} -4x_1 & +3x_2 + x_3 & -x_4 & & +x_6 & & = 4 \\ x_1 & -x_2 + 2x_3 & & & +x_5 & & = 10 \\ 2x_1 & -2x_2 + x_3 & & & & +x_7 & = 1 \\ x_j \geq 0, & j = 1, 2, \dots, 7 \end{cases}$$

其中**M**为任意大的实数，“**-M**”称为“罚因子”。

| C_j | | 3 | 2 | -1 | 0 | 0 | -M | -M | b |
|-------------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| C_B | X_B | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | |
| -M | x_6 | -4 | 3 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| 0 | x_5 | 1 | -1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 10 |
| -M | x_7 | 2 | -2 | [1] | 0 | 0 | 0 | 1 | 1→ |
| λ_j | | 3-2M | 2+M | -1+2M↑ | -M | 0 | 0 | 0 | |
| -M | x_6 | -6 | [5] | 0 | -1 | 0 | 1 | | 3→ |
| 0 | x_5 | -3 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | | 8 |
| -1 | x_3 | 2 | -2 | 1 | 0 | 0 | 0 | | 1 |
| λ_j | | 5-6M | 5M↑ | 0 | -M | 0 | 0 | | |
| 2 | x_2 | -6/5 | 1 | 0 | -1/5 | 0 | | | 3/5 |
| 0 | x_5 | [3/5] | 0 | 0 | 3/5 | 1 | | | 31/5 |
| -1 | x_3 | -2/5 | 0 | 1 | -2/5 | 0 | | | →11/5 |
| λ_j | | 5↑ | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 2 | x_2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | | | 13 |
| 3 | x_1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 5/3 | | | 31/3 |
| -1 | x_3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2/3 | | | 19/3 |
| λ_j | | 0 | 0 | 0 | -5 | -25/3 | | | |

最优解 $\mathbf{X} = (31/3, 13, 19/3, 0, 0)^T$; 最优值 $Z = 152/3$

例1-21 求解线性规划 $\min Z = 5x_1 - 8x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解: 化为标准型 $\min Z = 5x_1 - 8x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = 4 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 4 \end{cases}$$

加入人工变量 x_5 , 得

$$\begin{aligned} \min Z &= 5x_1 - 8x_2 + Mx_5 \\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 = 4 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\min Z = 5x_1 - 8x_2 + Mx_5$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 = 4 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5 \end{cases}$$

用单纯形法计算如下表所示。

| C_j | | 5 | -8 | 0 | 0 | M | b |
|-------------|-------|-------|------------|-----------|-------|-------|---------|
| C_B | X_B | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | |
| 0 | x_3 | [3] | 1 | 1 | 0 | 0 | 6→ 4 |
| M | x_5 | 1 | -2 | 0 | -1 | 1 | |
| λ_j | | 5-M↑ | -8+2M | 0 | M | 0 | |
| 5 | x_1 | 1 | 1/3 | 1/3 | 0 | 0 | 2 |
| M | x_5 | 0 | -7/3 | -1/3 | -1 | 1 | 2 |
| λ_j | | 0 | -29/3+7/3M | -5/3+1/3M | M | 0 | |

最优解 $X = (2, 0, 0, 0, 2)$ ， $Z = 10 + 2M$ 。

最优解中含有人工变量 $x_5 \neq 0$ 说明这个解不是最优解，是不可行的，因此原问题无可行解。

大M法小结：

(1) 求极大值时，目标函数变为

$$\max Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j - M \sum_{i=1}^m R_i$$

(2) 求极小值时，目标函数变为

$$\min Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j + M \sum_{i=1}^m R_i$$

不足：

用计算机求解时，不容易确定M的取值，且M过大容易引起计算误差。

2. 两阶段法

用大M法处理人工变量，在计算机求解时，对M只能在计算机内输入一个机器最大字长的数字。这有时可能使计算结果发生错误。为克服这个困难，可以对添加人工变量的线性规划问题分两阶段来求解——称为**两阶段法**。

将LP的求解过程分成两个阶段：

第一阶段：求解**第一个LP**：

$$\min w = \sum_{i=1}^m R_i$$

约束条件是加入人工变量后的约束方程。

第一个LP的结果有**三种**可能情形：

1. **最优值** $w^* = 0$,**且人工变量皆为非基变量**。

从第一阶段的最优解中**去掉**人工变量后，即为原LP的一个基本可行解。作为原LP的一个初始基本可行解，再求原问题，从而进入第二阶段。

2. **最优值** $w^* \neq 0$,**说明至少有一个人工变量不为零**。

原LP无可行解。不再需要进入第二个阶段计算。

3. **最优值** $w^* = 0$,**且存在人工变量为基变量，但取值为零**，把某个非基变量与该人工变量进行调换。

两阶段法的第一阶段求解的目的：

1. **判断**原LP有无可行解。

2. 若有，则可得原LP的一个**初始基本可行解**，再对原LP进行**第二阶段**的计算。

例1-22 用两阶段单纯形法求解例20的线性规划。

解：标准型为 $\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5 \end{cases}$$

第一阶段问题为

$$\min w = x_6 + x_7$$

目标函数为人工变量之和

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 7 \end{cases}$$

加入人工变量的约束条件

用单纯形法求解，得到第一阶段问题的计算表如下：

| C_j | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | b |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| C_B | X_B | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | |
| 1 | x_6 | -4 | 3 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| 0 | x_5 | 1 | -1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 10 |
| 1 | x_7 | 2 | -2 | [1] | 0 | 0 | 0 | 1 | 1→ |
| λ_j | | 2 | -1 | -2↑ | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | x_6 | -6 | [5] | 0 | -1 | 0 | 1 | | 3→ |
| 0 | x_5 | -3 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | | 8 |
| 0 | x_3 | 2 | -2 | 1 | 0 | 0 | 0 | | 1 |
| λ_j | | 6 | -5↑ | 0 | 1 | 0 | 0 | | |
| 0 | x_2 | -6/5 | 1 | 0 | -1/5 | 0 | | | 3/5 |
| 0 | x_5 | 3/5 | 0 | 0 | 3/5 | 1 | | | 31/5 |
| 0 | x_3 | -2/5 | 0 | 1 | -2/5 | 0 | | | 11/5 |
| λ_j | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |

最优解为 $X = (0, \frac{3}{5}, \frac{11}{5}, 0, \frac{31}{5})$ ，最优值 $w=0$ 。

说明找到了原问题的一组基本可行解，将它作为初始基可行解，进行第二阶段的计算。

第二阶段问题为

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$

原问题目标函数

$$\begin{cases} -\frac{6}{5}x_1 + x_2 - \frac{1}{5}x_4 = \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_4 + x_5 = \frac{31}{5} \\ -\frac{2}{5}x_1 + x_3 - \frac{2}{5}x_4 = \frac{11}{5} \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5 \end{cases}$$

用单纯形法计算得到下表

| C_j | | 3 | 2 | -1 | 0 | 0 | b |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| C_B | X_B | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | |
| 2 | x_2 | -6/5 | 1 | 0 | -1/5 | 0 | 3/5 |
| 0 | x_5 | [3/5] | 0 | 0 | 3/5 | 1 | 31/5 → |
| -1 | x_3 | -2/5 | 0 | 1 | -2/5 | 0 | 11/5 |
| λ_j | | 5 ↑ | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 2 | x_2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 13 |
| 3 | x_1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 5/3 | 31/3 |
| -1 | x_3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2/3 | 19/3 |
| λ_j | | 0 | 0 | 0 | -5 | -25/3 | |

最优解 $X= (31/3, 13, 19/3, 0, 0)^T$; 最优值 $Z=152/3$

例1-23 用两阶段法求解

$$\min Z = 5x_1 - 8x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解: 第一阶段问题为

$$\min w = x_5$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 = 4 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5 \end{cases}$$

用单纯形法计算如下表:

| C_j | | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | b |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| C_B | X_B | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | |
| 0 | x_3 | [3] | 1 | 1 | 0 | 0 | 6→ |
| 1 | x_5 | 1 | -2 | 0 | -1 | 1 | 4 |
| λ_j | | -1↑ | 2 | 0 | 1 | 0 | |
| 0 | x_1 | 1 | 1/3 | 1/3 | 0 | 0 | 2 |
| 1 | x_5 | 0 | -7/3 | -1/3 | -1 | 1 | 2 |
| λ_j | | 0 | 7/3 | 1/3 | 1 | 0 | |

第一阶段的最优解 $X=(2,0,0,0,2)^T$, 最优目标值 $w=2 \neq 0$, x_5 仍在基变量中, 从而原问题无可行解。

解的判断

唯一最优解的判断：最优表中所有非基变量的检验数非零,则线性规划具有唯一最优解

多重最优解的判断：最优表中存在非基变量的检验数为零,则线性规划具有多重最优解。

无界解的判断：某个 $\lambda_k > 0$ 且 $a_{ik} \leq 0$ ($i=1, 2, \dots, m$) 则线性规划具有无界解。

无可行解的判断：(1)当用大M单纯形法计算得到最优解并且存在 $R_i > 0$ 时, 则表明原线性规划无可行解。

(2) 当第一阶段的最优值 $w \neq 0$ 时, 则原问题无可行解。

作业：1.12 (1)