运 筹 学

第二章 线性规划的对偶理论

Chapter2 对偶理论

(Duality Theory)

本章主要内容:

- 线性规划的对偶模型
- 对偶性质
- 影子价格
- 对偶单纯形法
- 灵敏度分析

线性规划的对偶模型

1. 对偶问题的现实来源

例1 某工厂可生产甲、乙两种产品，需消耗煤、电、油三种资源。现将有关数据列表如下

资源 产 品	煤	电	油	利润（元）
甲	9	4	3	7
乙	4	5	10	12
资 源 限 量	360	200	300	

试拟订使总收入最大的生产方案。

线性规划的对偶模型

解：设x_1、x_2分别为甲、乙两种产品的产量，总收入为z，则数学模型为：

$$\max \ z = 7x_1 + 12x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \le 360 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 200 \\ 3x_1 + 10x_2 \le 300 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

反过来问：若厂长决定不生产甲和乙两种产品，决定出售煤、电、油全部资源，那么如何定这三种资源的价格才是最佳决策?

线性规划的对偶模型

在市场竞争的时代，厂长的最佳决策显然应符合两条：

（**1**）不吃亏原则。即资源定价所赚利润不能低于加工甲、乙型产品所获利润。由此原则，便构成了新规划的不等式约束条件。

（**2**）竞争性原则。即在上述不吃亏原则下，尽量降低资源售价，以便争取更多用户。

设煤、电、油的价格分别为y_1、y_2、y_3，此规划问题为例**1**的对偶问题，记为（**D**），例**1**称为该规划问题的原问题,记为（**P**）

新的线性规划数学模型为：

$$\min\ w = 360y_1 + 200y_2 + 300y_3$$

$$s.t.\begin{cases} 9y_1 + 4y_2 + 3y_3 \ge 7 \\ 4y_1 + 5y_2 + 10y_3 \ge 12 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

线性规划的对偶模型

对比两个模型

原问题（**P**）

$$\max \ z = 7x_1 + 12x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \le 360 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 200 \\ 3x_1 + 10x_2 \le 300 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

对偶问题（**D**）

$$\min \ w = 360y_1 + 200y_2 + 300y_3$$

$$s.t.\begin{cases} 9y_1 + 4y_2 + 3y_3 \ge 7 \\ 4y_1 + 5y_2 + 10y_3 \ge 12 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

线性规划的对偶模型

2、线性规划原问题与对偶问题的表达式形式

以上例为例，原问题为

$$\max\ z = \mathbf{CX}$$

$$(\mathbf{P})\quad s.t.\begin{cases}\mathbf{AX} \le \mathbf{b}\\ \mathbf{X} \ge 0\end{cases}$$

A 矩阵

X,b 列向量

C 行向量

记$Y = (y_1, y_2, y_3)$,则对偶问题为

$$\min\ w = \mathbf{b}^T\mathbf{Y}$$

$$(\mathbf{D})\quad s.t.\begin{cases}\mathbf{A}^T\mathbf{Y} \ge \mathbf{C}^T\\ \mathbf{Y} \ge 0\end{cases}$$

$\mathbf{A}^T$ 矩阵

$\mathbf{Y},\mathbf{b}^T$ 列向量

$\mathbf{C}^T$ 列向量

这是最常见的对偶模型形式，称为对称式对偶模型。二者间具有十分对称的对应关系：

线性规划的对偶模型

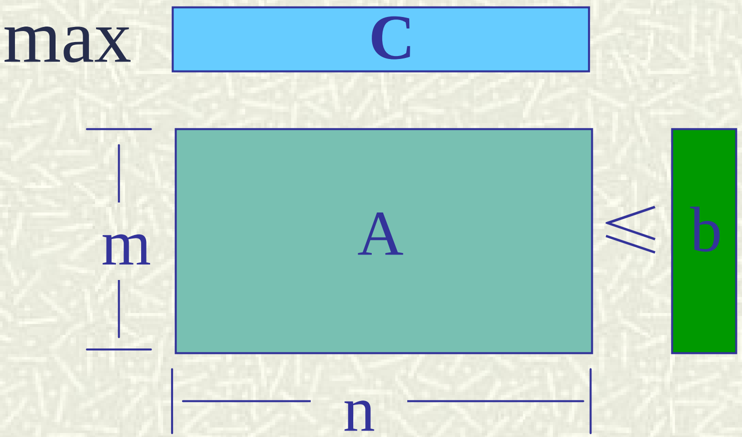
2、线性规划原问题与对偶问题的表达式

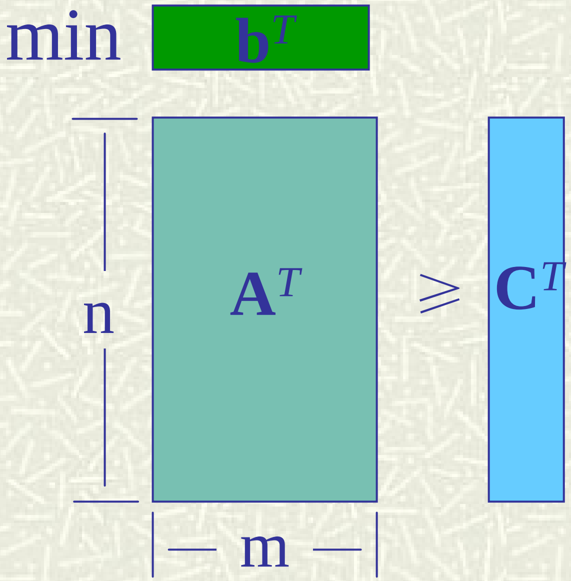
(P) $\max \ z = \mathbf{CX}$

$$s.t.\begin{cases} \mathbf{AX} \le \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \ge 0 \end{cases}$$

(D) $\min \ w = \mathbf{b}^T\mathbf{Y}$

$$s.t.\begin{cases} \mathbf{A}^T\mathbf{Y} \ge \mathbf{C}^T \\ \mathbf{Y} \ge 0 \end{cases}$$





线性规划的对偶模型

2、线性规划原问题与对偶问题的表达式

原问题（P）	对偶问题 （D）
目标**max**型	目标**min**型
有**n**个变量（非负）	有**n**个约束（大于等于）
有**m**个约束 （小于等于）	有**m**个变量（非负）
价格系数	资源向量
资源向量	价格系数
技术系数矩阵	技术系数矩阵的转置

线性规划的对偶模型

2、线性规划原问题与对偶问题的表达形式

$$\begin{aligned} \max\ & z=\mathbf{CX} \\ \text{s.t.}\ & \mathbf{AX} \leqslant \mathbf{b} \\ & X \geqslant 0 \end{aligned} \xrightarrow{\text{对偶的定义}} \begin{aligned} \min\ & w=\mathbf{b}^{T}Y \\ \text{s.t.}\ & \mathbf{A}^{T}\mathbf{Y} \geqslant C^{T} \\ & \mathbf{Y} \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & z'=\mathbf{-C}^{T}\mathbf{X} \\ \text{s.t.}\ & \mathbf{-AX} \geqslant \mathbf{-b} \\ & \mathbf{X} \geqslant 0 \end{aligned} \xleftarrow{\text{对偶的定义}} \begin{aligned} \max\ & w=\mathbf{-b}^{T}\mathbf{Y} \\ \text{s.t.}\ & \mathbf{-A}^{T}\mathbf{Y} \leqslant \mathbf{-C}^{T} \\ & \mathbf{Y} \geqslant 0 \end{aligned}$$

对偶问题的对偶就是原始问题！

“非对称型”

例. 原线性规划问题

$$\max\ f(x) = 4x_1 + 5x_2$$

$$s.t.\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 20 \\ 4x_1 - 3x_2 \ge 10 \\ x_1 + x_2 = 5 \\ x_2 \pm 不限, x_1 \ge 0 \end{cases}$$

化为(max,≤)型标准问题

$$\max\ f(x) = 4x_1 + 5x_2' - 5x_2''$$

$$s.t.\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2' - 2x_2'' \le 20 \\ -4x_1 + 3x_2' - 3x_2'' \le -10 \\ x_1 + x_2' - x_2'' \le 5 \\ -x_1 - x_2' + x_2'' \le -5 \\ x_1, x_2', x_2'' \ge 0 \end{cases}$$

应用标准型对偶变换规则

$$\min\ h(w) = 20w_1 - 10w_2 + 5w_3 - 5w_4$$

$$s.t.\ \begin{cases} 3w_1 - 4w_2 + w_3 - w_4 \ge 4 \\ 2w_1 + 3w_2 + w_3 - w_4 \ge 5 \\ -2w_1 - 3w_2 - w_3 + w_4 \ge -5 \\ w_1, w_2, w_3, w_4 \ge 0 \end{cases}$$

令 $y_1 = w_1, y_2 = -w_2, y_3 = w_3 - w_4$

经整理得:

$$\min\ g(y) = 20y_1 + 10y_2 + 5y_3$$

$$s.t.\ \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 4 \\ 2y_1 - 3y_2 + y_3 = 5 \\ y_1 \ge 0, y_2 \le 0, y_3 \pm 不限 \end{cases}$$

线性规划的对偶模型

2、线性规划原问题与对偶问题的表达形式

非对称型

原问题（P）	对偶问题 （D）
第j个变量为自由变量	第j个约束为等式约束
第i个约束为等式约束	第i个变量为自由变量

例2：写出下面线性规划的对偶规划模型：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 3 \\ 2x_1 - x_2 \le 5 \\ -x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$$

线性规划的对偶模型

解：设对偶变量为y_1, y_2, y_3,对偶目标为w ,则

$$\min \quad w = 3y_1 + 5y_2 + y_3$$

$$s.t.\begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 2 \\ 2y_1 - y_2 + 3y_3 = 3 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

线性规划的对偶模型

对偶关系对应表

	原问题	对偶问题
目标函数类型	**max**	**min**
目标函数系数 与右边项的对应关系	目标函数系数 右边项系数	右边项系数 目标函数系数
变量数与约束数 的对应关系	变量数**n** 约束数**m**	约束数 **n** 变量数**m**
原问题变量类型与 对偶问题约束类型 的对应关系	≥ 0 变量≤ 0 无限制	$\geq$ 约束$\leq$ ＝
原问题约束类型与 对偶问题变量类型 的对应关系	$\geq$ 约束$\leq$ ＝	≤ 0 变量≥ 0 无限制

线性规划的对偶模型

2、线性规划原问题与对偶问题的表达形式

例3. 写出对偶规划：

$$\min z = 4x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 3x_3 \ge 9 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\max w = 6y_1 + 9y_2 + 4y_3$$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + y_3 = 4 \\ 2y_1 + 5y_3 \le 2 \\ 3y_2 - 2y_3 \le -3 \\ y_1 \le 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \text{自由} \end{cases}$$

线性规划的对偶模型

对偶关系对应表

	原问题	对偶问题
目标函数类型	~~max~~ min	~~min~~ max
目标函数系数 与右边项的对应关系	目标函数系数 右边项系数	右边项系数 目标函数系数
变量数与约束数 的对应关系	变量数n 约束数m	约束数 n 变量数m
原问题变量类型与 对偶问题约束类型 的对应关系	≥0 变量≤0 无限制	≥ ≤ 约束≤ ≥ ＝
原问题约束类型与 对偶问题变量类型 的对应关系	≥ 约束≤ ＝	≤0 ≥0 变量≥0 ≤0 无限制

线性规划的对偶模型

练习：　写出下列线性规划问题的对偶问题.

$$\min \quad w = 5y_1 + 4y_2 + 6y_3$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 - 2y_3 \le 2 \\ y_1 - 2y_2 + 3y_3 \ge 3 \\ -3y_1 + \qquad 4y_3 \ge -5 \\ 2y_1 + 7y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \le 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \text{无约束} \end{cases}$$

解：原问题的对偶问题为

$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 \ge 5 \\ 3x_1 - 2x_2 \qquad + 7x_4 \le 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \le 0,\ x_2, x_3 \ge 0,\ x_4 \text{无约束} \end{cases}$$

Chapter2 对偶理论

(Duality Theory)

本章主要内容:

- 线性规划的对偶模型
- 对偶性质
- 影子价格
- 对偶单纯形法
- 灵敏度分析

对偶性质

性质1 对称性定理：对偶问题的对偶是原问题

$$\begin{aligned}\max\ z &= CX \\ \text{s.t.}\ AX &\leqslant b \\ X &\geqslant 0\end{aligned} \quad \rightleftarrows \quad \begin{aligned}\min\ w &= b^T Y \\ \text{s.t.}\ A^T Y &\geqslant C^T \\ Y &\geqslant 0\end{aligned}$$

性质2 弱对偶原理(弱对偶性)：设X 和 Y分别是问题(P)和(D)的可行解，则必有

$$CX \le Yb \qquad \text{即：} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} y_i b_i$$

证：由（P）、（D）的约束可得 $CX \le YAX \le Yb$

几何意义： CX Yb

对偶性质

注：此性质只适用于(P)max型与(D)min型。

推论1: 原问题任一可行解的目标函数值是其对偶问题目标函数值的下界；反之，对偶问题任意可行解的目标函数值是其原问题目标函数值的上界。

推论2: 在一对对偶问题（P）和（D）中，若其中一个问题可行但目标函数无界，则另一个问题无可行解；反之不成立。这也是对偶问题的无界性。

推论3: 在一对对偶问题（P）和（D）中，若一个可行（如P），而另一个不可行（如D），则该可行的问题目标函数值无界。

对偶性质

性质3 最优性定理：如果X^0是原问题的可行解，Y^0是其对偶问题的可行解，并且：

$$\mathbf{CX}^0 = \mathbf{b}^T\mathbf{Y}^0 \quad \text{即：} z = w$$

则$\mathbf{X}^0$是原问题的最优解，$\mathbf{Y}^0$是其对偶问题的最优解。

证：对任可行解$\mathbf{X}$，由弱对偶性，$\mathbf{CX} \le \mathbf{b}^T\mathbf{Y}^0 = \mathbf{CX}^0$

故$\mathbf{X}^0 = \mathbf{X}^*$.同理，$\mathbf{Y}^0 = \mathbf{Y}^*$.

对偶性质

性质4 强对偶性：若原问题具有最优解，则其对偶问题也有最优解，且它们最优解的目标函数值相等。

证：对（P）增加松弛变量Xs，化为

$$Max\ z = \mathbf{CX}$$
$$s.t.\begin{cases} \mathbf{AX} + \mathbf{IX}_s = \mathbf{b} \\ \mathbf{X}, \mathbf{X}_s \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

设其最优基为B，终表为

		C	0
		X	X_s
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{I}$
		$\mathbf{C} - \mathbf{C}_b\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{0} - \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{I}$

其检验数为 $\begin{cases} \sigma = \mathbf{C} - \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \leq \mathbf{0} \\ \sigma_s = \mathbf{0} - \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{I} \leq \mathbf{0} \end{cases}$

取 $\overline{\mathbf{Y}} = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$，则 $\overline{\mathbf{Y}}$ 满足

$\begin{cases} \overline{\mathbf{Y}}\mathbf{A} \geq \mathbf{C} \\ \overline{\mathbf{Y}} \geq 0 \end{cases}$ 即 $\overline{\mathbf{Y}}$ 是（D）的可行解，且 $\overline{\mathbf{Y}}\mathbf{b} = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = z^*$

由性质3，$\overline{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}^*$.

对偶性质

问题：(1) 由性质4可知，对偶问题最优解的表达式 Y* =？

—— $C_B B^{-1}$

(2) 求Y*是否有必要重新求解（ D）？

—— 不必。可以从原问题（P）的单纯形终表获得。

例如，在前面的练习中已知 $Maxz = 2.5x_1 + x_2$ 的终表为

$$s.t.\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

0	x_3	9	0	$\frac{19}{5}$	1	$-\frac{3}{5}$
2.5	x_1	2	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
			0	0	0	-0.5

$X^* = (2,\quad 0,\quad 9,\quad 0)^T$

$z^* = 5$

$Y^* = (0, 0.5)$

$w^* = 5$

请指出其对偶问题的最优解和最优值。

对偶性质

（3）若DP问题中有一个问题无最优解，则另一问题也无最优解。

性质5 互补松弛性：设X^0和Y^0分别是P问题 和 D问题 的可行解，则它们分别是最优解的充要条件是：

$$\begin{cases} Y^0 X_s = 0 \\ Y_s X^0 = 0 \end{cases}$$

其中：X_s、Y_s为松弛变量

证：将(P)、(D)的约束化为等式：$\mathbf{AX} + \mathbf{IX}_s = \mathbf{b}, \mathbf{YA} - \mathbf{Y}_s\mathbf{I} = \mathbf{C},$

$\Rightarrow$ 因为$\mathbf{X}^0$、$\mathbf{Y}^0$是最优解，所以$\mathbf{CX}^0 = \mathbf{Y}^0\mathbf{b}$,即

$(\mathbf{Y}^0\mathbf{A} - \mathbf{Y}_s\mathbf{I})\mathbf{X}^0 = \mathbf{Y}^0(\mathbf{AX}^0 + \mathbf{IX}_s)$,而$\mathbf{Y}^0\mathbf{X}_s, \mathbf{Y}_s\mathbf{X}^0 \geq \mathbf{0},$

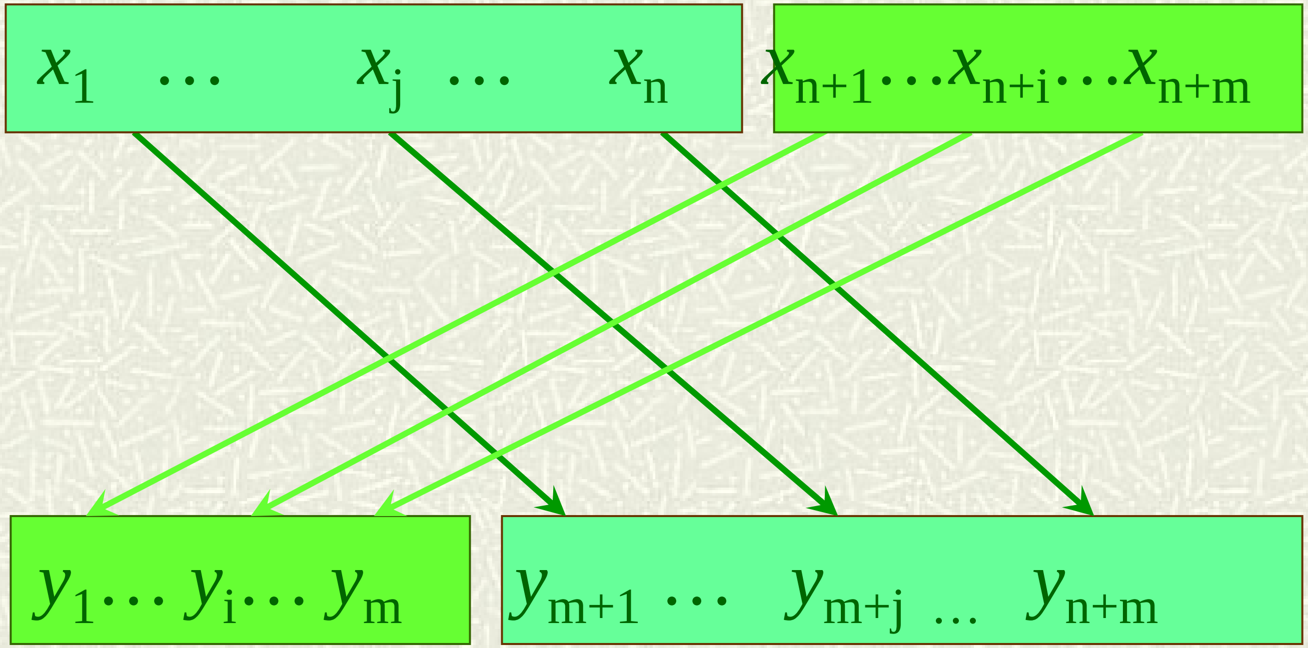
故只有$\mathbf{Y}^0\mathbf{X}_s = \mathbf{Y}_s\mathbf{X}^0 = \mathbf{0}$。

$\Leftarrow$（自证）。

对偶性质

直观上

原始问题的变量　　原始问题的松弛变量



对偶问题的变量　　对偶问题的松弛变量

$x_j y_{m+j}=0 \quad y_i x_{n+i}=0 \quad (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$

在一对变量中，其中一个大于**0**，另一个一定等于**0**

对偶性质

性质5的应用：

该性质给出了已知一个问题最优解求另一个问题最优解的方法，即已知Y^*求X^*或已知X^*求Y^*

$$\begin{cases} Y^* X_s = 0 \\ Y_s X^* = 0 \end{cases}$$

互补松弛条件

由于变量都非负，要使求和式等于零，则必定每一分量为零，因而有下列关系：

若$Y^* \neq 0$，则X_s必为0；若$X^* \neq 0$，则Y_s必为0

利用上述关系，建立对偶问题（或原问题）的约束线性方程组，方程组的解即为最优解。

对偶性质

例4 已知线性规划

$$\max z = 3x_1 + 4x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 16 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,3 \end{cases}$$

的最优解是X * =(6,2,0)^T,求其对偶问题的最优解Y * 。

解：写出原问题的对偶问题，即

$$\min\ w = 10y_1 + 16y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 3 \\ 2y_1 + 2y_2 \ge 4 \\ y_1 + y_2 \ge 1 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{增加松弛变量}}$$

$$\min\ w = 10y_1 + 16y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 = 3 \\ 2y_1 + 2y_2 - y_4 = 4 \\ y_1 + y_2 - y_5 = 1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \ge 0 \end{cases}$$

对偶性质

设对偶问题最优解为**Y＊ = (y_1，y_2)**,由互补松弛性定理可知，**X＊**和**Y＊**满足:

$$\mathbf{Y}_s\mathbf{X}^* = 0 \qquad (y_3, y_4, y_5)(x_1, x_2, x_3)^T = 0$$

即:

$$\mathbf{Y}^*\mathbf{X}_s = 0 \qquad (y_1, y_2)(x_4, x_5)^T = 0$$

因为$x_1 \neq 0$，$x_2 \neq 0$，所以对偶问题的第一、二个约束的松弛变量等于零，即$y_3 = 0$，$y_4 = 0$，带入方程中:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 3 \\ 2y_1 + 2y_2 = 4 \end{cases}$$

解此线性方程组得$y_1=1$,$y_2=1$,从而对偶问题的最优解为:

Y＊=(1,1)，最优值w=**26**。

对偶性质

例5 已知线性规划

$$\min z = 2x_1 - x_2 + 2x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \le 6 \\ x_1 \le 0, x_2 \ge 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

的对偶问题的最优解为Y * =(0,-2)，求原问题的最优解。

解: 对偶问题是

$$\max w = 4y_1 + 6y_2$$

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 \ge 2 \\ y_1 + y_2 \le -1 \\ y_1 - y_2 = 2 \\ y_1\text{无约，} \ y_2 \le 0 \end{cases}$$

添加松弛变量 $\longrightarrow$

$$\max w = 4y_1 + 6y_2$$

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 - y_3 = 2 \\ y_1 + y_2 + y_4 = -1 \\ y_1 - y_2 = 2 \\ y_1\text{无约}, y_2 \le 0, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

对偶性质

设对偶问题最优解为**X ＊ ＝(x_1，x_2，x_3)^T**,由互补松弛性定理可知，**X ＊** 和 **Y ＊** 满足:

$$(y_3, y_4, y_5)(x_1, x_2, x_3)^T = 0$$

$$(y_1, y_2)(x_4, x_5)^T = 0$$

将Y ＊ 带入由方程可知，$y_3 = y_5 = 0$，$y_4 = 1$。

$\because y_2=-2 \neq 0 \quad \therefore x_5 = 0$

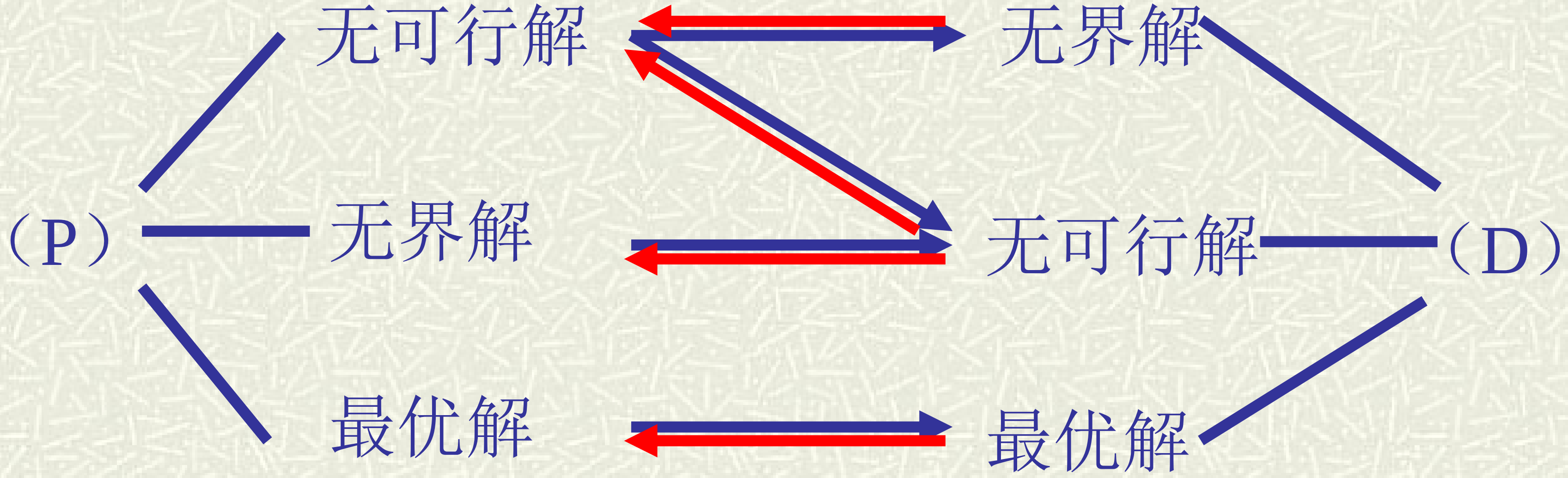
又$\because y_4=1 \neq 0 \quad \therefore x_2 = 0$

将x_2，x_5分别带入原问题约束方程中，得: $\begin{cases} -x_1 + x_3 = 4 \\ -x_1 - x_3 = 6 \end{cases}$

解方程组得：$x_1=-5, x_3=-1$, 所以原问题的最优解为

$X^* =(-5,0,-1)$，最优值$z=-12$

对偶性质



Chapter2 对偶理论

(Duality Theory)

本章主要内容：

- 线性规划的对偶模型
- 对偶性质
- 影子价格
- 对偶单纯形法
- 灵敏度分析

影子价格

定义：在一对 P 和 D 求得最优解时，若 P 的某个约束条件的右端项常数b_i（第i种资源的拥有量）增加一个单位时，所引起目标函数最优值z^* 的改变量称为第 i 种资源的影子价格(Shadow Price)

，其值等于D问题中对偶变量y_i。

1. 影子价格的数学分析：

$$\max z = \mathbf{CX} \qquad\qquad \min w = \mathbf{Yb}$$

$$\mathbf{P}\begin{cases}\mathbf{AX} \le \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \ge \mathbf{0}\end{cases} \qquad\qquad \mathrm{D}\begin{cases}\mathbf{YA} \ge \mathbf{C} \\ \mathbf{Y} \ge \mathbf{0}\end{cases}$$

由对偶问题得基本性质可得：

$$z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

影子价格

在其它条件不变的情况下，单位资源数量的变化所引起的目标函数最优值的变化。即对偶变量y_i就是第 i 种资源的影子价格。即:

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = y_i (i = 1,2\cdots m)$$

(D)问题的最优解$y^*=C_B B^{-1}$为(P)问题资源的影子价格。

影子价格

2. 影子价格的经济意义

1）影子价格是一种边际价格

$$w = (y_1 \dots y_m)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$$

b_i：第 i 种资源的数量；　y_i：对偶解；

当 b_i 增加 Δb_i，其它资源数量不变时，目标函数的增量

$$\Delta Z = \Delta b_i y_i$$

y_i：反映 b_i 的边际效益（边际成本）

影子价格

2. 影子价格的经济意义

y_i 的大小与系统内资源对目标的贡献有关，是资源的一种估价，但这种估价不是资源的市场价格，是卖主的内控价格。

市场价格是已知数，相对较稳定；而影子价格则有赖于资源的利用情况，是未知数。当企业的生产任务、产品结构等等发生变化时，资源的影子价格也会随之改变，它是一种动态价格。

影子价格

2. 影子价格的经济意义

① 影子价格的大小客观地反映了资源在系统内的稀缺程度

- 根据互补松弛定理的条件，如果某一资源在系统内供大于求，其影子价格就为零。
- 即增加该资源的供应不会引起系统目标的任何变化。
- 如果某一资源是稀缺资源（即相应约束条件的剩余变量为零），则影子价格必然大于零。
- 影子价格越高，资源在系统中越稀缺。

即某资源对偶解>*0*，该资源有利可图，可增加此种资源量；某资源对偶解为*0*，则不增加此种资源量。

影子价格

2. 影子价格的经济意义

② 影子价格实际上是一种机会成本

- 在完全市场经济条件下，当某种资源的市场价格低于影子价格时，企业应买进该资源用于扩大再生产；
- 而当某种资源的市场价格高于影子价格时，企业应卖掉已有资源。
- 随着资源的买进卖出，其影子价格也将发生变化，一直到影子价格与市场价格保持同等水平时，才处于平衡。

即直接用影子价格与市场价格相比较，进行决策，是否买入该资源。

影子价格

3. 影子价格对单纯形表计算的解释

单纯形表中的检验数

$$\sigma_j = c_j - C_B B^{-1} P_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$$

其中c_j表示第j种产品的价格；$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$表示生产该种产品所消耗的各项资源的影子价格的总和,即产品的隐含成本。

当产值大于隐含成本时，即$\sigma_j > 0$，表明生产该项产品有利，可在计划中安排；否则$\sigma_j < 0$，用这些资源生产别的产品更有利，不在生产中安排该产品。

影子价格

例6：第一章 例1（煤电油例）的单纯形终表如下：

0	x_3	84	0	0	1	-0.32	1.16	
7	x_1	20	1	0	0	0.4	-0.2	
12	x_2	24	0	1	0	-0.12	0.16	
	$z^* = 428$		0	0	0	-1.36	-0.52	

（1）请指出P问题的最优解和最优值。

（2）在此最优计划下哪种资源有剩余，剩多少？

（3）指出D问题的最优值和最优解。

（4）请指出资源煤电油的影子价格，并解释其经济意义。

解：（1）$X^*=[20, 24, 84, 0, 0]^T$, $z^*=428$。

（2）煤炭资源有剩余，剩余**84**。

（3）$Y^*=[0, 1.36, 0.52]^T$, $w^*=428$

（4）煤、电、油的影子价格分别是**0**、**1.36**、**0.52**；其经济意义是当煤、电、油分别增加**1**单位时可使总收入分别增加**0** 、**1.36**、**0.52**。

Chapter2 对偶理论

(Duality Theory)

本章主要内容：

- 线性规划的对偶模型
- 对偶性质
- 影子价格
- 对偶单纯形法
- 灵敏度分析

对偶单纯形法

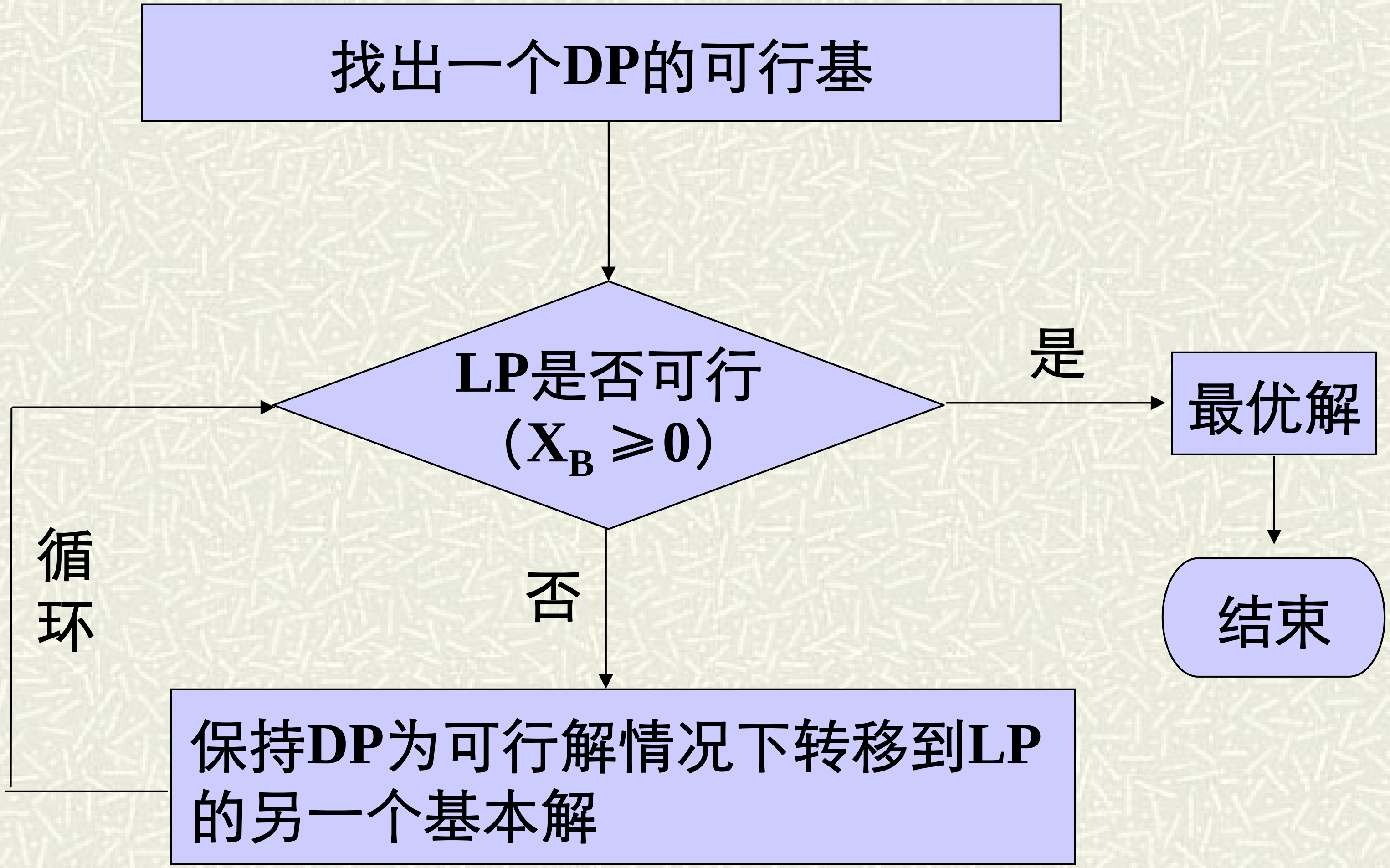
对偶单纯形法原理

对偶单纯形法是求解线性规划的另一个基本方法。它是根据对偶原理和单纯形法原理而设计出来的，因此称为对偶单纯形法。不要简单理解为是求解对偶问题的单纯形法。

对偶单纯形法基本思路：

找出一个对偶问题的可行基，保持对偶问题为可行解的条件下，判断X_B是否可行（X_B为非负），若否，通过变换基解，直到找到原问题基可行解（即X_B为非负），这时原问题与对偶问题同时达到可行解，由定理4可得最优解。

对偶单纯形法


找出一个DP的可行基
LP是否可行
（$X_B \geqslant 0$）
是
最优解
结束
否
循环
保持DP为可行解情况下转移到LP的另一个基本解

对偶单纯形法

计算步骤

(1) 作初始表，要求全部 检验数 $\sigma \leq 0$

(2) 判定：$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ 全 ≥ 0，停。否则，取

$$\min_i \left\{ \left(B^{-1}b\right)_i \middle| \left(B^{-1}b\right)_i < 0 \right\} = \left(B^{-1}b\right)_r$$

其对应变量 x_r 为换出基的变量。

(3) 确定换入变量

① 若第 r 行的 a_{rj} 全 ≥ 0，停，原问题无可行解。

对偶单纯形法

计算步骤

(3) 确定换入变量

② 若第 r 行的 a_{rj} 有 $a_{rj} < 0$, 则求

$$\theta = \min_{j}\left\{\frac{c_j - z_j}{a_{rj}} \middle| a_{rj} < 0\right\} = \frac{c_s - z_s}{a_{rs}}$$

其对应变量 x_s 为换入基的变量

(4) 以 a_{rs} 为主元，换基迭代，得到新的单纯形表

重复1-4的步骤，直到找到最优解

对偶单纯形法

例7 用对偶单纯形法求解:

$$\min \quad z = 9x_1 + 12x_2 + 15x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 12 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 14 \\ x_j \geq 0 (j = 1.2.3) \end{cases}$$

解:（1）将模型转化为求最大化问题，约束方程化为等式求出一组基本解，因为对偶问题可行，即全部检验数≤0（求max问题）。

对偶单纯形法

$$\max z' = -9x_1 - 12x_2 - 15x_3$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -10 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = -12 \\ -x_1 - x_2 - 5x_3 + x_6 = -14 \\ x_{1-6} \geq 0 \end{cases}$$

			-9	-12	-15	0	0	0
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	-10	-2	-2	-1	1	0	0
0	x_5	-12	-2	-3	-1	0	1	0
0	← x_6	-14	-1	-1	[-5]	0	0	1
	σ_j		-9	-12	-15	0	0	0
	θ_i		9	12	3 ↑			

对偶单纯形法

C_B	X_B	$B^{-1}b$	-9	-12	-15	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	-36/5	-9/5	-9/5	0	1	0	-1/5
0	← x_5	-46/5	-9/5	[-14/5]	0	0	1	-1/5
-15	x_3	14/5	1/5	1/5	1	0	0	-1/5
	σ_j		-6	-9	0	0	0	-3
	θ_i		30/9	45/14↑				15

C_B	X_B	$B^{-1}b$	-9	-12	-15	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	← x_4	-9/7	[-9/14]	0	0	1	-9/14	-1/14
-12	x_2	23/7	9/14	1	0	0	-5/14	1/14
-15	x_3	15/7	1/14	0	1	0	1/14	-3/14
	σ_j		-3/14	0	0	0	-45/14	-33/14
	θ_i		3/9↑				45/9	33

对偶单纯形法

			-9	-12	-15	0	0	0
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-9	x_1	2	1	0	0	$-14/9$	1	$1/9$
-12	x_2	2	0	1	0	1	-1	0
-15	x_3	2	0	0	1	$1/9$	0	$-2/9$
	σ_j		0	0	0	$-1/3$	-3	$-7/3$

原问题的最优解为：$X^*=(2,2,2,0,0,0)$，$z^*=72$

其对偶问题的最优解为：$Y^*=(1/3,3,7/3)$，$w^*=72$

对偶单纯形法

对偶单纯形法应注意的问题:

- 用对偶单纯形法求解线性规划是一种求解方法，而不是去求对偶问题的最优解
- 初始表中一定要满足对偶问题可行，也就是说检验数满足最优判别准则
- 最小比值中$\left|\frac{\sigma_j}{a_{ij}}\right|$的绝对值是使得比值非负，在极小化问题

$\sigma_j \geqslant 0$，分母$a_{ij}<0$ 这时必须取绝对值。在极大化问题中， $\sigma_j \leqslant 0$，分母$a_{ij}<0$， $\frac{\sigma_j}{a_{ij}}$总满足非负，这时绝对值符号不起作用，可以去掉。

如在本例中将目标函数写成

$$\max z' = -4x_1 - x_2 - 3x_3$$

这里$\sigma_j \leqslant 0$在求θ_k时就可以不带绝对值符号。

对偶单纯形法

- 对偶单纯形法与普通单纯形法的换基顺序不一样，普通单纯形法是先确定进基变量后确定出基变量，对偶单纯形法是先确定出基变量后确定进基变量；
- 普通单纯形法的最小比值是 $\min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0 \right\}$ 其目的是保证下一个原问题的基本解可行，对偶单纯形法的最小比值是

$$\min_j \left\{ \left| \frac{\sigma_j}{a_{lj}} \right| \,\middle|\, a_{lj} < 0 \right\}$$

其目的是保证下一个对偶问题的基本解可行

- 对偶单纯形法在确定出基变量时，若不遵循 $b_l = \min\{b_i \mid b_i < 0\}$ 规则，任选一个小于零的 b_i 对应的基变量出基，不影响计算结果，只是迭代次数可能不一样。

对偶单纯形法

对偶单纯形的优点与用途：

（1）初始解可以是非可行解，当检验数都是负数时，就可以进行基变换，这样避免了增加人工变量，使运算简便。

（2）对变量较少时，而约束条件很多的线性规划问题，可先将其变为对偶问题，再用对偶单纯形求解，简化计算。

（3）用于后面的灵敏度分析。

Chapter2 对偶理论

(Duality Theory)

本章主要内容：

- 线性规划的对偶模型
- 对偶性质
- 影子价格
- 对偶单纯形法
- 灵敏度分析

灵敏度分析

1.灵敏度分析简介

灵敏度分析，是指对系统或事物因周围条件变化显示出来的敏感性程度的分析。

资源向量的灵敏度分析 **Range of feasibility for right-hand-side coefficients** (b_i)

价值向量的灵敏度分析 **Range of optimality for objective function coefficients** (c_j)

技术系数的灵敏度分析 **Range of optimality for matrix coefficients** (a_{ij})

灵敏度分析

1 灵敏度分析简介

✓ 当这些参数（b_i, c_j, a_{ij}）中的一个或几个发生变化时，问题的最优解会有什么变化；或

✓ 这些参数在一个多大的范围内变化时，问题的最优解不变。

灵敏度分析不需要用单纯形法从头再算。只需把发生变化的个别系数，经过一定计算后直接填入最终单纯形表中，并进行检查和分析。

如最优解改变，可用单纯形法或对偶单纯形法继续迭代计算，直到找到新的最优解。

灵敏度分析

2. *b*变化时的分析

设第r种资源b_r变为$b_r+\Delta b_r$,因为它只影响可行性，故只要变化后的$\bar{b}$使得$B^{-1}\bar{b}\geq 0$,则原最优基B不变。

$$只要由B^{-1}\bar{b}=B^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r+\Delta b_r \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}\geq 0解出\Delta b_r的范围即可。$$

灵敏度分析

3. *C*变化时的分析

价格c_j变为$c_j+\Delta c_j$时,只影响最优性,但要分两种情况讨论。

(1) c_j是非基变量x_j的价格系数

因只影响自己的检验数，为$\sigma_j = c_j + \Delta c_j - C_B B^{-1} P_j$,

故只要$\sigma_j \leq 0$即可。

只需由 $\sigma_j \leq 0$解得Δc_j的范围。

(2) c_j是基变量x_j的价格系数

这时要影响所有的检验数$\sigma_i = c_i - (c_1 \quad \cdots \quad c_i + \Delta c_i \quad \cdots \quad c_m) B^{-1} P_i$,

应由所有的$\sigma_i \leq 0$解得公共的Δc_j。

灵敏度分析

4.增加新变量时的分析

主要讨论增加新变量x_{n+1}是否有利。经济意义是第n+1种新产品是否应当投产，数学意义是x_{n+1}是否应进基。

方法：计算x_{n+1}的检验数$\sigma_{n+1}=c_{n+1}-C_B B^{-1}P_{n+1}$，

若$\sigma_{n+1}>0$，则增加x_{n+1}，即投产有利；

若$\sigma_{n+1}\le 0$，则不增加x_{n+1}，即投产无利。

经济意义：
$$\sigma_{n+1}=\underbrace{c_{n+1}}_{\text{市场价}}-\underbrace{C_B B^{-1}}_{\text{影子价}}P_{n+1}$$

5 分析增加一个约束条件 的变化

增加一个约束条件在实际问题中相当于增添一道工序。

先将原问题最优解的变量值代入新增的约束条件：

(1)如满足，说明新增约束未起作用，最优解不变；

(2)如不满足，则需将新增的约束直接反映到最终单纯形表中再进一步分析。

灵敏度分析

例8：在例1（煤电油例）中，其单纯形终表如下：

0	x_3	84	0	0	1	-0.32	1.16	
7	x_1	20	1	0	0	0.4	-0.2	
12	x_2	24	0	1	0	-0.12	0.16	
	$z^* = 428$		0	0	0	-1.36	-0.52	

（1）电的影子价格是多少？使最优基仍适用的电的变化范围为何？

（2）若有人愿以每度1元的价格向该厂供应25度电，是否值得接受？

（3）甲产品的价格在何范围内变化时，现最优解不变？

（4）若现又考虑一新产品丙，其资源单耗为10，2，5，售价为6.5，问该产品是否可投产？

（5）如增加个约束条件，生产该两种产品需考虑使用的水资源，约束方程为 $3x_1 + 5x_2 \le 150$ ，分析解的变化。

灵敏度分析

例8：在例1（煤电油例）中，其单纯形终表如下：

0	x_3	84	0	0	1	-0.32	1.16	
7	x_1	20	1	0	0	0.4	-0.2	
12	x_2	24	0	1	0	-0.12	0.16	
	$z^* = 428$		0	0	0	-1.36	-0.52	

（1）电的影子价格是多少？使最优基仍适用的电的变化范围为何？

解：（1）电的影子价格是1.36。

$$由 B^{-1}\begin{pmatrix} 360 \\ 200+\Delta b_2 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 \\ 20 \\ 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3.12 \\ 0.4 \\ -0.12 \end{pmatrix} \Delta b_2 \geq 0 \quad 解得$$

$-50 \leq \Delta b_2 \leq 26.92$，即使原最优基$B$仍适用的范围。

灵敏度分析

例8：在例1（煤电油例）中，其单纯形终表如下：

0	x_3	84	0	0	1	-0.32	1.16	
7	x_1	20	1	0	0	0.4	-0.2	
12	x_2	24	0	1	0	-0.12	0.16	
	$z^* = 428$		0	0	0	-1.36	-0.52	

（2）若有人愿以每度1元的价格向该厂供应25度电，是否值得接受？

解：（2）值得。

因25在B的适用范围内（即影子价格适用），且1.36-1.00>0。

此时最优解为 [30,21], 最优值为462.

例8：在例1（煤电油例）中，其单纯形终表如下：

0	x_3	84	0	0	1	-0.32	1.16	
7	x_1	20	1	0	0	0.4	-0.2	
12	x_2	24	0	1	0	-0.12	0.16	
	$z^*=428$		0	0	0	-1.36	-0.52	

（3）甲产品的价格在何范围内变化时，现最优解不变？

解：甲产品的价格c_1是基变量的价格系数。

$$由\ \bar{\sigma}_4 = 0-\begin{pmatrix}0 & 7+\Delta c_1 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3.12\\ 0.4\\ -0.12\end{pmatrix} = -2.8-0.4\Delta c_1+1.44\le 0$$

得 $\Delta c_1 \ge -3.4,$

$$由\ \bar{\sigma}_5 = 0-\begin{pmatrix}0 & 7+\Delta c_1 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1.16\\ -0.2\\ 0.16\end{pmatrix} = 1.4+0.2\Delta c_1-1.92\le 0$$

得 $\Delta c_1 \le 2.6,$

故使 X^*不变的 c_1的变化范围为： $-3.4 \le \Delta c_1 \le 2.6$。

灵敏度分析

例8：在例1（煤电油例）中，其单纯形终表如下：

0	x_3	84	0	0	1	-0.32	1.16	
7	x_1	20	1	0	0	0.4	-0.2	
12	x_2	24	0	1	0	-0.12	0.16	
	$z^* = 428$		0	0	0	-1.36	-0.52	

（4）若现又考虑一新产品丙，其资源单耗为10，2，5，售价为6.5，问该产品是否可投产？

解：因为$\sigma_{丙} = 6.5 - (0 \quad 1.36 \quad 0.52)\begin{pmatrix}10\\2\\5\end{pmatrix} = 6.5 - 5.32 > 0$

故丙产品可以投产。

灵敏度分析

例8：在例1（煤电油例）中，其单纯形终表如下：

0	x_3	84	0	0	1	-0.32	1.16	
7	x_1	20	1	0	0	0.4	-0.2	
12	x_2	24	0	1	0	-0.12	0.16	
	$z^* = 428$		0	0	0	-1.36	-0.52	

（5）如增加个约束条件，生产该两种产品需考虑使用的水资源，约束方程为 $3x_1 + 5x_2 \leq 150$ ，分析解的变化。

解：增加个约束，在单纯形表终表中增加一行

$$3x_1 + 5x_2 \qquad\qquad + x_6 = 150$$

灵敏度分析

C_B	X_B	$B^{-1}b$	7	12	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	84	0	0	1	-0.32	1.16	0
7	x_1	20	1	0	0	0.40	-0.2	0
12	x_2	24	0	1	0	-0.12	0.16	0
0	x_6	150	3	5	0	0	0	1
	σ_j		0	0	0	-1.36	-0.52	0

为使x_1,x_2,x_3,x_6为基变量，和P_1,P_2,P_3,P_6基向量组成单位矩阵，需对表中的技术系数矩阵进行初等变换

灵敏度分析

			7	12	0	0	0	0
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	84	0	0	1	-0.32	1.16	0
7	x_1	20	1	0	0	0.40	-0.2	0
12	x_2	24	0	1	0	-0.12	0.16	0
0	← x_6	-30	0	0	0	[-0.6]	-0.2	1
	σ_j		0	0	0	-1.36↑	-0.52	0
0	x_3	100	0	0	1	0	1.266	-0.533
7	x_1	0	1	0	0	0	-0.333	0.667
12	x_2	30	0	1	0	0	0.20	-0.2
0	x_4	50	0	0	0	1	1/3	-5/3
	σ_j		0	0	0	0	-0.069	-2.269

最优解 （0,30,100,50,0,0），最优值为360。