第七章、生成函数

本章目次

7.1、引论

生成函数方法是一种既简单又有用的数学方法，它是在 19 世纪初出现的，对于组合计数问题，生成函数方法是一种最重要的一般性处理方法。它的中心思想是：对于一个有限或无限数列

$$\{a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots\},$$

用幂级数

$$A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

使之成为一个整体，然后通过研究幂级数 $A(x)$，导出数列 $\{a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots\}$ 的构造和性质。我们称 $A(x)$ 为序列 $\{a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots\}$ 的生成函数，并记为 $G\{a_n\}$。

例如、组合序列

$$\{C_n^0,\ C_n^1,\ \cdots,\ C_n^n\}$$

的生成函数为

$$f_n(x)=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$$

由二项式定理知

$$f_n(x)=(1+x)^n$$

通过对$(1+x)^n$的运算，可以导出一系列组合数的关系式，例如

$$\sum_{i=0}^{n}C_n^i=2^n$$

$$\sum_{i=0}^{n}iC_n^i=n\cdot 2^{n-1}$$

$$\cdots$$

由恒等式

$$(1+x)^{m+n}=(1+x)^m(1+x)^n$$

可以推导出 Vandermonde 恒等式

$$C_{m+n}^r=\sum_{k=0}^{r}C_m^kC_n^{r-k}$$

下面再看一个例子

例 1、投掷一次骰子，出现点数$1,\ 2,\ \cdots,\ 6$的概率均为$\dfrac{1}{6}$。问连续投掷两次，出现的点数之和为 10 的概率有多少？

解：一次投掷出现的点数有 6 种可能。连续两次投掷得到的点数构成二元数组$(i,\ j)\ \ (1\le i,\ j\le 6)$，共有$6^2=36$种可能。由枚举法，两次出现的点数之和为 10 的有 3 种可能：$(4,\ 6),\ (5,\ 5),\ (6,\ 4)$，所以概率为$\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$。

如果问题是连续投掷 10 次，其点数之和为 30 的概率为多少，这时就不那么简单了。这是由于 10 个数之和为 30 的可能组合方式很多，难以一一列举，要解决这个问题，只能另辟新径。

我们用多项式

$$x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$$

表示投掷一次可能出现点数$1,\ 2,\ \cdots,\ 6$，观察

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)$$

从两个括号中分别取出 x^m 和 x^n，使

$$x^m \cdot x^n = x^{10}$$

即是两次投掷分别出现点数 m,n，且 $m+n=10$。由此得出，展开式中 x^{10} 的系数就是满足条件的方法数。

同理，连续投掷 10 次，其和为 30 的方法数为

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^{10}$$

中 x^{30} 的系数。而

$$\begin{aligned}(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^{10} &= x^{10}(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^{10} \\ &= x^{10}\frac{(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^{10}(1-x)^{10}}{(1-x)^{10}} \\ &= x^{10}(1-x^6)^{10}(1-x)^{10} \\ &= x^{10}\sum_{i=0}^{10}(-1)^i C_{10}^i x^{6i}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i C_{10-1+i}^i x^i\end{aligned}$$

所以，x^{30} 的系数为

$$C_{29}^{20} - C_{10}^1 C_{23}^{14} + C_{10}^2 C_{17}^8 - C_{10}^3 C_{11}^2 = 2930455$$

故所求概率为

$$\frac{2930455}{6^{10}} \approx 0.0485。$$

7.2、形式幂级数

数列

$$\{a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots\} \tag{1}$$

的生成函数是幂级数

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots。 \tag{2}$$

由于只有收敛的幂级数才有解析意义，并可以作为函数进行各种运算，这样就有了级数收敛

性的问题，我们从代数的观点引入形式幂级数的概念。

我们称幂级数(2)是形式幂级数，其中的 x 是未定元，看作是抽象符号，对于实数域 R 上的数列

$$\{a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots\}$$

x 是 R 上的未定元，表达式

$$A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

称为 R 上的形式幂级数。

一般情况下，形式幂级数中的 x 只是一个抽象符号，并不需要对 x 赋予具体数值，因而就不需要考虑它的收敛性。

R 上的形式幂级数的全体记为 $R[[x]]$。在集合 $R[[x]]$ 中适当定义加法和乘法运算，便可使它成为一个整环，任何一个形式幂级数都是这个环中的元素。

定义 1、设 $A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ 与 $B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k$ 是 R 上的两个形式幂级数，若对任意 $k\ge 0$，有 $a_k=b_k$，则称 $A(x)$ 与 $B(x)$ 相等，记作 $A(x)=B(x)$。

定义 2、设 α 为任意实数，$A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\in R[[x]]$，则将

$$\alpha A(x)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\cdot a_k)x^k$$

叫做 α 与 $A(x)$ 的数乘积。

定义 3、设 $A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ 与 $B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k$ 是 R 上的两个形式幂级数，将 $A(x)$ 与 $B(x)$ 相加定义为

$$A(x)+B(x)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)x^k$$

并称 $A(x)+B(x)$ 为 $A(x)$ 与 $B(x)$ 的和，把运算“+”叫做加法。

定义 4、设 $A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ 与 $B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k$ 是 R 上的两个形式幂级数，将 $A(x)$ 与 $B(x)$ 相乘

定义为

$$A(x)\cdot B(x)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}(a_kb_0+a_{k-1}b_1+a_{k-2}b_2+\cdots+a_0b_k)x^k,$$

并称 $A(x)\cdot B(x)$ 为 $A(x)$ 与 $B(x)$ 的积，把运算“ $\bullet$ ”叫做乘法。

定理 1、集合 $R[[x]]$ 在上述加法和乘法运算下构成一个整环

证明：容易验证 $R[[x]]$ 关于加法是封闭的，并且加法满足结合律和交换律。

$R[[x]]$ 关于加法有零元，其零元是数列 $\{0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots\}$ 的形式幂级数 0 。

对于任意形式幂级数

$$A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

它在加法运算下的逆元是数列 $\{-a_0,\ -a_1,\ -a_2,\ \cdots\}$ 的形式幂级数

$$-A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-a_k)x^k$$

综上所述，$(R[[x]],\ +)$ 使交换群。

其次，证明 $(R[[x]],\ \cdot)$ 是一个可交换的含幺半群。这是因为：容易验证，$R[[x]]$ 在上述乘法运算下是封闭的，并且乘法满足结合律和交换律。乘法单位元是数列 $\{1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots\}$ 的形式幂级数 1。因此，$(R[[x]],\ \cdot)$ 是一个可交换的含幺半群。

最后，不难验证，乘法对加法满足分配律，而且无零因子。事实上，设

$$A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\neq 0,$$

$$B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k\neq 0,$$

则

$$A(x)\cdot B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=k}a_ib_j\right)x^k$$

不必为零。

因此，$R[[x]]$在上述加法和乘法运算下构成一个可交换、含单位元、无零因子的环，即整环。

定理 2、对$R[[x]]$中的任意一个元素$A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$，$A(x)$有乘法逆元当且仅当$a_0\neq 0$。若设$\tilde{A}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{a}_k x^k$是$A(x)$的乘法逆元，则有

$$\tilde{a}_0=a_0^{-1},$$

$$\tilde{a}_k=(-1)^k a_0^{-(k+1)}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{k-1} & a_k \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-2} & a_{k-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{k-3} & a_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 \end{vmatrix} \qquad (k\geq 1)$$

证明：设$\tilde{A}(x)$是$A(x)$的乘法逆元，则有

$$1=A(x)\tilde{A}(x)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{a}_k x^k\right)=\sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{i+j=k}a_i\tilde{a}_j)x^k$$

比较等式两边x^k $(k=0,1,2,\cdots)$的系数，得一个无穷线性方程组

$$\begin{cases} a_0\tilde{a}_0=1, \\ a_1\tilde{a}_0+a_0\tilde{a}_1=0, \\ a_2\tilde{a}_0+a_1\tilde{a}_1+a_0\tilde{a}_2=0, \\ \qquad\cdots, \\ a_k\tilde{a}_0+a_{k-1}\tilde{a}_1+\cdots+a_0\tilde{a}_k=0, \\ \qquad\cdots, \end{cases}$$

由方程组的第一个方程得$a_0\neq 0$，且$\tilde{a}_0=a_0^{-1}$。

反之，当$a_0\neq 0$时，对任意固定的正整数k，把$\tilde{a}_0,\ \tilde{a}_1,\ \cdots,\ \tilde{a}_k$当作未知量，解前$k+1$个方程组成的方程组。由于前$k+1$个方程的系数行列式为

$$\Delta=\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & a_{k-4} & \cdots & 0 \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \cdots & a_0 \end{bmatrix}=a_0^{\ k+1}\neq 0$$

而

$$\Delta_k=\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \cdots & a_0 & 0 \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & a_1 & 0 \end{bmatrix}=(-1)^{k+2}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{k-1} & a_k \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-2} & a_{k-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{k-3} & a_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 \end{bmatrix},$$

故由克莱姆法则得

$$\widetilde{a}_k=\frac{\Delta_k}{\Delta}$$

因此，若 $a_0\neq 0$，则方程组有解 $(\widetilde{a}_0,\ \widetilde{a}_1,\ \widetilde{a}_2,\ \cdots)$，它所对应的形式幂级数

$$\widetilde{A}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{a}_k x^k$$

就是 $A(x)$ 的乘法逆元。

例如、设 $A(x)=1-x$，它的逆元记为

$$\frac{1}{1-x}=\widetilde{a}_0+\widetilde{a}_1x+\widetilde{a}_2x^2+\cdots$$

由

$$(1-x)(\widetilde{a}_0+\widetilde{a}_1x+\widetilde{a}_2x^2+\cdots)=1,$$

求得

$$\widetilde{a}_k=1\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),$$

即

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots。$$

从上面的讨论我们可以看出，对于形式幂级数可以像收敛的幂级数那样进行运算，运算

的定义和规划完全相同，而不必考虑其收敛性问题。

在整环 $R[[x]]$ 上还可以定义形式导数。

定义 5、对于任意 $A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k \in R[[x]]$，规定

$$\mathrm{D}A(x)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}ka_k x^k ,$$

称 $\mathrm{D}A(x)$ 为 $A(x)$ 的形式导数。

$A(x)$ 的 n 次形式导数可以递归地定义为：

$$\begin{cases}\mathrm{D}^0 A(x)\equiv A(x)\\ \mathrm{D}^{\mathrm{n}} A(x)\equiv \mathrm{D}(\mathrm{D}^{n\text{-}1}A(x)) \quad (n\geq 1)\end{cases}$$

形式导数满足如下规则：

(1) $\mathrm{D}(\alpha A(x)+\beta B(x))\equiv\alpha\ \mathrm{D}(A(x))+\beta\ \mathrm{D}(B(x))$；

(2) $\mathrm{D}(A(x)\cdot B(x))\equiv A(x)\ \mathrm{D}(B(x))+B(x)\ \mathrm{D}(A(x))$；

(3) $\mathrm{D}(A^n(x))\equiv n\ A^{n-1}(x)\ \mathrm{D}(A(x))$ 。

证明：规则(1)，由定义可以直接得出，而规则(3)则是规则(2)的推论。

现证明规则(2)，有

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(A(x)\cdot B(x))&=\mathrm{D}(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=k}a_i b_j\right)x^k)\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\sum_{i+j=k}a_i b_j\right)x^{k-1}\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i+j=k}(i+j)a_i b_j\right)x^{i+j-1}\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i+j=k}(ia_i x^{i-1})b_j x^j+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i+j=k}(a_i x^i)(jb_j x^{j-1})\\
&=\left(\sum_{i=1}^{\infty}ia_i x^{i-1}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}b_j x^j\right)+\left(\sum_{i=0}^{\infty}a_i x^i\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}jb_j x^{j-1}\right)\\
&\equiv A(x)\ \mathrm{D}(B(x))+B(x)\ \mathrm{D}(A(x))\end{aligned}$$

由此可知，形式导数满足微积分中求导运算的规则，当某个形式幂级数在某个范围内收敛时，形势导数就是微积分中的求导运算。为了书写方便，以后 $A'(x),\ A''(x),\ \cdots$ 分别代表 $\mathrm{D}A(x),\ \mathrm{D}^2A(x),\ \cdots$。

7.3 生成函数的性质

生成函数与数列之间是一一对应的，因此，若两个生成函数之间存在某种关系，那么相应得两个数列之间也必然存在一定的关系；反之亦然。

设数列 $\{a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots\}$ 的生成函数为 $A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$，数列 $\{b_0,\ b_1,\ b_2,\ \cdots\}$ 的生成函数为 $B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k$，我们可以得到生成函数的如下一些性质：

性质 1、若

$$b_k=\begin{cases}0 & (k<l)\\ a_{k-l} & (k\geq l)\end{cases}$$

则

$$B(x)=x^lA(x)$$

证明：由假设条件，有

$$B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k=\sum_{k=l}^{\infty}b_kx^k$$

$$=\sum_{k=l}^{\infty}a_{k-l}x^k=x^l\sum_{k=l}^{\infty}a_{k-l}x^{k-l}$$

$$=x^l\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=x^lA(x)$$

性质 2、若 $b_k=a_{k+l}$，则

$$B(x)=\frac{1}{x^l}(A(x)-\sum_{k=0}^{l-1}a_kx^k)$$

证明：类似于性质 1 的证明

性质 3、若 $b_k=\sum_{i=0}^{k}a_i$，则

$$B(x)=\frac{A(x)}{1-x}$$

证明：由假设条件，有

$$b_0=a_0,$$

$$b_1x=a_0x+a_1x,$$

$$b_2x^2=a_0x^2+a_1x^2+a_2x^2,$$

$$\cdots$$

$$b_kx^k=a_0x^k+a_1x^k+a_2x^k+\cdots+a_kx^k$$

$$\cdots$$

把以上各式的两边分别相加，得

$$B(x)=a_0(1+x+x^2+\cdots)+a_1x(1+x+x^2+\cdots)+a_2x^2(1+x+x^2+\cdots)+\cdots$$

$$=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)(1+x+x^2+\cdots)$$

$$=\frac{A(x)}{1-x}$$

性质 4、若 $b_k=\sum_{i=k}^{\infty}a_i$，则

$$B(x)=\frac{A(1)-xA(x)}{1-x}$$

这里，$\sum_{i=0}^{\infty}a_i$ 是收敛。

证明：因为 $A(1)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i$ 收敛，所以 $b_k=\sum_{i=k}^{\infty}a_i$ 是存在的。于是有

$$b_0=a_0+a_1+a_2+\cdots=A(1)$$

$$b_1x=a_1x+a_2x+\cdots=[A(1)-a_0]x$$

$$b_2x^2=a_2x^2+a_3x^2+\cdots=[A(1)-a_0-a_1]x^2$$

$$\cdots$$

$$b_k x^k = a_k x^k + a_{k+1} x^k + \cdots = [A(1) - a_0 - a_1 - \cdots - a_{k-1}] x^k$$

$\cdots$

把以上各式的两边分别相加，得

$$\begin{aligned}B(x) &= A(1) + [A(1) - a_0]x + [A(1) - a_0 - a_1]x^2 + \cdots + [A(1) - a_0 - a_1 - \cdots - a_{k-1}]x^k \\ &= A(1)(1 + x + x^2 + \cdots) - a_0 x(1 + x + x^2 + \cdots) \\ &\qquad - a_1 x^2 (1 + x + x^2 + \cdots) - \cdots - a_{n-1} x^n (1 + x + x^2 + \cdots) - \cdots \\ &= [A(1) - x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)](1 + x + x^2 + \cdots) \\ &= \frac{A(1) - xA(x)}{1 - x}\end{aligned}$$

性质 5、若 $b_k = ka_k$，则

$$B(x) = xA'(x)\text{。}$$

证明：由 $A'(x)$ 的定义知

$$xA'(x) = x\sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} ka_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = B(x)$$

性质 6、若 $b_k = \dfrac{a_k}{k+1}$，则

$$B(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(t)\mathrm{d}t\text{。}$$

证明：由假设条件，有

$$\int_0^x A(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x a_k t^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x b_k (k+1) t^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+1} = xB(x)$$

性质 7、若 $c_k = \alpha\, a_k + \beta b_k$，则

$$C(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \alpha A(x) + \beta B(x)$$

性质 8、若 $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0$，则

$$C(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = A(x)\cdot B(x)$$

性质 7 和性质 8 可由形式幂级数的数乘、加法及乘法运算的定义直接得出。

利用这些性质，我们可以求某些数列的生成函数，也可以计算数列的和。下面列出几个常见的简单数列的生成函数：

(1) $G\{1\}=\dfrac{1}{1-x}$；

(2) $G\{a^k\}=\dfrac{1}{1-ax}$；

(3) $G\{k\}=\dfrac{x}{(1-x)^2}$；

(4) $G\{k(k+1)\}=\dfrac{2x}{(1-x)^3}$；

(5) $G\{k^2\}=\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$；

(6) $G\{k(k+1)(k+2)\}=\dfrac{6x}{(1-x)^4}$；

(7) $G\{\dfrac{1}{k!}\}=e^x$；

(8) $G\{C_\alpha^k\}=(1+x)^\alpha$；

(9) $G\{C_{n+k}^k\}=\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}$

下面证明其中的几个：

证明：(3) $G\{k\}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}kx^k=x\sum\limits_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=x(\sum\limits_{k=1}^{\infty}x^k)'=x(\dfrac{1}{1-x})'=\dfrac{x}{(1-x)^2}$

(5) $G\{k^2\}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2x^k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(k+1)k\ x^k-\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\ x^k=\dfrac{2x}{(1-x)^3}-\dfrac{x}{(1-x)^2}\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$

(6) 设

$$G\{k(k+1)(k+2)\}=A(x),$$

则

$$\int_0^x tA(t)\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x k(k+1)(k+2)t^{k+1}\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{\infty}k(k+1)x^{k+2}=x^2\cdot\frac{2x}{(1-x)^3}$$

所以

$$xA(x)=(\frac{2x^3}{(1-x)^3})'=\frac{6x^2}{(1-x)^4}$$

故

$$A(x)=\frac{6x}{(1-x)^4}$$

例 2、已知$\{a_n\}$的生成函数为

$$A(x)=\frac{2+3x-6x^2}{1-2x}$$

求a_n。

解：用部分分式的方法得

$$A(x)=\frac{2+3x-6x^2}{1-2x}=\frac{2}{1-2x}+3x$$

而

$$\frac{2}{1-2x}=2\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}x^n$$

所以有

$$a_n=\begin{cases}2^{n+1}, & (n\neq 1)\\ 2^2+3=7, & n=1\end{cases}$$

例 3、计算级数$1^2+2^2+\cdots+n^2$的和

解：由前面列出的第(5)个数列的生成函数知，数列$\{n^2\}$的生成函数为

$$A(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k\ ,$$

此处，$a_k=k^2$。令

$$b_n=1^2+2^2+\cdots+n^2$$

则

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

由性质 3 即得数列$\{b_n\}$的生成函数为

$$B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\frac{A(x)}{1-x}=\frac{x(1+x)}{(1-x)^4}=(x+x^2)\sum_{k=0}^{\infty}C_{k+3}^{k}x^k$$

比较等式两边x^n的系数，便得

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=b_n=C_{n+2}^{n-1}+C_{n+1}^{n-2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

7.4 用生成函数求解递推关系

利用生成函数求解各类递推关系有广泛的适用性，其基本步骤是：

(1) 令 $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)x^n$；

(2) 将关于$f(n)$的递推关系式转化成关于$A(x)$的方程式；

(3) 解出$A(x)$，将$A(x)$展开成x的幂级数，x^n的系数即是$f(n)$。

例 4、求解递推关系

$$\begin{cases}f(n)=7f(n-1)-12f(n-2)\\ f(0)=2,\ \ f(1)=7\end{cases}$$

解：令

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)x^n,$$

则有

$$\begin{aligned}A(x)-f(0)-f(1)x&=\sum_{n=2}^{\infty}f(n)x^n\\&=\sum_{n=2}^{\infty}(7f(n-1)-12f(n-2))x^n\\&=7\sum_{n=2}^{\infty}f(n-1)x^n-12\sum_{n=2}^{\infty}f(n-2)x^n\\&=7x\sum_{n=2}^{\infty}f(n-1)x^{n-1}-12x^2\sum_{n=2}^{\infty}f(n-2)x^{n-2}\end{aligned}$$

$$= 7x\sum_{n=1}^{\infty} f(n)x^n - 12x^2\sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$$

$$= 7x(A(x) - f(0)) - 12x^2 A(x)$$

将 $f(0)=2$，$f(1)=7$ 代入上式并整理，得

$$A(x) = \frac{2-7x}{1-7x+12x^2} = \frac{1}{1-3x} + \frac{1}{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty}(3^n + 4^n)x^n$$

所以

$$f(n) = 3^n + 4^n$$

下面研究用生成函数求解递推关系得一般性理论

7.4.1 用生成函数求解常系数线性齐次递推关系

设有常系数线性递推关系

$$f(n) = c_1 f(n-1) + c_2 f(n-2) + \cdots + c_k f(n-k) \quad (c_k \neq 0,\quad n \geq k) \tag{3}$$

我们令

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n \text{，}$$

则

$$A(x) - f(0) - f(1)x - \cdots - f(k-1)x^{k-1}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} f(n)x^n = \sum_{n=k}^{\infty}[c_1 f(n-1) + c_2 f(n-2) + \cdots + c_k f(n-k)]x^n$$

$$= c_1 x\sum_{n=k}^{\infty} f(n-1)x^{n-1} + c_2 x^2\sum_{n=k}^{\infty} f(n-2)x^{n-2} + \cdots + c_k x^k\sum_{n=k}^{\infty} f(n-k)x^{n-k}$$

$$= c_1 x\sum_{n=k-1}^{\infty} f(n)x^n + c_2 x^2\sum_{n=k-2}^{\infty} f(n)x^n + \cdots + c_k x^k\sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$$

$$= c_1 x[A(x) - f(0) - f(1)x - f(2)x^2 - \cdots - f(k-2)x^{k-2}]$$

$$+ c_2 x^2[A(x) - f(0) - f(1)x - \cdots - f(k-3)x^{k-3}]$$

$$+ \cdots + c_k x^k A(x)$$

整理后得到

$$A(x)(1-c_1x-c_2x^2-\cdots-c_kx^k)$$

$$=f(0)+[f(1)-c_1f(0)]x+\cdots$$

$$+[f(k-1)-c_1f(k-2)-\cdots-c_{k-1}f(0)]x^{k-1}$$

简写成

$$A(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

其中

$$P(x)=f(0)+[f(1)-c_1f(0)]x+\cdots+[f(k-1)-c_1f(k-2)-\cdots-c_{k-1}f(0)]x^{k-1},$$

$$Q(x)=1-c_1x-c_2x^2-\cdots-c_kx^k$$

由此可以看出，$Q(x)$ 由递推关系中的系数 c_1，c_2，$\cdots$，c_k 完全确定，$P(x)$ 由系数 c_1，c_2，$\cdots$，c_k 以及初值 $f(0)$，$f(1),\cdots$，$f(k-1)$ 完全确定。

如果递推关系(3)的特征方程

$$C(x)=x^k-c_1x^{k-1}-c_2x^{k-2}-\cdots-c_{k-1}x-c_k=0 \tag{4}$$

有 t 个不同的特征根 q_1，q_2，$\cdots$，q_t，它们的重数分别为 m_1，m_2，$\cdots,m_t$　$(m_1+m_2+\cdots+m_t=k)$，那么特征多项式 $C(x)$ 就有如下的分解式：

$$C(x)=x^k-c_1x^{k-1}-c_2x^{k-2}-\cdots-c_{k-1}x-c_k$$

$$=(x-q_1)^{m_1}(x-q_2)^{m_2}\cdots(x-q_t)^{m_t} \tag{5}$$

而

$$x^kC(\frac{1}{x})=1-c_1x-c_2x^2-\cdots-c_{k-1}x^{k-1}-c_kx^k=Q(x)$$

由 $C(x)$ 的分解式(5)得

$$x^kC(\frac{1}{x})=x^k(\frac{1}{x}-q_1)^{m_1}(\frac{1}{x}-q_2)^{m_2}\cdots(\frac{1}{x}-q_t)^{m_t}$$

$$=(1-q_1x)^{m_1}(1-q_2x)^{m_2}\cdots(1-q_tx)^{m_t}$$

因此

$$Q(x)=(1-q_1x)^{m_1}(1-q_2x)^{m_2}\cdots(1-q_tx)^{m_t}$$

从而

$$A(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$=\frac{P(x)}{(1-q_1x)^{m_1}(1-q_2x)^{m_2}\cdots(1-q_tx)^{m_t}} \tag{6}$$

(6)式是有理分式，且分子$P(x)$的次数低于分母$Q(x)$的次数，由后面的定理(3)可得(6)式有如下的分项表示：

$$A(x)=\frac{d_{11}}{1-q_1x}+\frac{d_{12}}{(1-q_1x)^2}+\cdots+\frac{d_{1\,m_1}}{(1-q_1x)^{m_1}}$$

$$+\frac{d_{21}}{1-q_2x}+\frac{d_{22}}{(1-q_2x)^2}+\cdots+\frac{d_{2\,m_2}}{(1-q_2x)^{m_2}}$$

$$+\cdots$$

$$+\frac{d_{t1}}{1-q_tx}+\frac{d_{t2}}{(1-q_tx)^2}+\cdots+\frac{d_{t\,m_t}}{(1-q_tx)^{m_t}}$$

$$=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{d_{i\,j}}{(1-q_ix)^j} \tag{7}$$

因此，$A(x)$的幂级数展开式中x^n的系数为

$$f(n)=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{m_i}d_{i\,j}C_{j+n-1}^{n}q_i^n \tag{8}$$

其中，$d_{i\,j}$为常数。

定理 3、设$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$是由理分式，且多项式$P(x)$的次数低于$Q(x)$的次数，则$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$有分项表示，且表示是唯一的。

证明：设$Q(x)$的次数为n，对n用数学归纳法。

当$n=1$时，$P(x)$是常数，命题成立。

假设对小于n的所有正整数命题成立，下面证明对正整数n命题成立。设q是$Q(x)=0$的k重根，则

$$Q(x)=(x-q)^k Q_1(x)\quad (Q_1(q)\neq 0)\text{。}$$

不妨设 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 互素，用待定系数法，设

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-q)^k}+\frac{P_1(x)}{(x-q)^{k-1}Q_1(x)}\,,\tag{9}$$

其中，A 为待定系数。整理得

$$AQ_1(x)+(x-q)P_1(x)=P(x)\text{。}\tag{10}$$

在(10)式中令 $x=q$，得

$$A=\frac{P(q)}{Q_1(q)}\neq 0\tag{11}$$

将(11)式代入(10)式，得

$$P_1(x)=\frac{P(x)-\dfrac{P(q)}{Q_1(q)}Q_1(x)}{x-q}\,,\tag{12}$$

所以 $P_1(x)$ 的次数低于 $P(x)$ 的次数。根据归纳假设，有理分式

$$\frac{P_1(x)}{(x-q)^{k-1}Q_1(x)}$$

可分项表示，因此

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

可分项表示。由(11)式和(12)式知表示是唯一的。

若特征方程(4)没有重根，设 q_1，$q_2,\cdots$，q_k 是其 k 个不同的根，则(8)式化简为形如

$$f(n)=\sum_{i=1}^{k} d_i q_i^n$$

这正是我们在第 6 章中得到的通解的形式。

若特征方程(4)有重根，设 q_i 是其 m_i $(m_i>1)$ 重根，考虑(8)式中的一部分

$$\sum_{j=1}^{m_i} d_{i\,j} C_{j+n-1}^{n}\tag{13}$$

其中

$$C_{j+n-1}^{n}=C_{j+n-1}^{j-1}$$

是n的$j-1$次多项式。可以证明，对于任意一组d_{i1}，d_{i2}，$\cdots$，d_{im}，(13)式可以唯一地表示成

$$\sum_{j=1}^{m_i} d_{ij}' n^{j-1},$$

其中，d_{ij}'为常数。因此，(8)式可简写成

$$f(n)=\sum_{i=1}^{t}\left(\sum_{j=1}^{m_i} d_{ij}' n^{j-1}\right)q_i^n$$

这也正是我们在第 6 章中得到的通解的形式。

7.4.2 用生成函数求解常系数线性非齐次递推关系

用生成函数可以寻找常系数线性非齐次递推关系的特解结构。下面以$g(n)=n^s\beta^n$为例来求非齐次递推关系的特解。

设有常系数线性非齐次递推关系

$$f(n)=c_1 f(n-1)+c_2 f(n-2)+\cdots+c_k f(n-k)+n^s\beta^n \quad (c_k\neq 0, n\geq k) \tag{14}$$

其中，β为常数，s为非负整数。令

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n,$$

代入递推关系(14)，类似于前面对齐次递推关系的分析，得

$$A(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}+\frac{1}{Q(x)}\sum_{n=k}^{\infty} n^s\beta^n x^n\ 。 \tag{15}$$

其中，只有$\frac{1}{Q(x)}\sum_{n=k}^{\infty} n^s\beta^n x^n$与非齐次特解有关，而

$$\sum_{n=k}^{\infty} n^s\beta^n x^n=\sum_{i=0}^{\infty}(k+i)^s\beta^{k+i}x^{k+i}=\beta^k x^k\sum_{i=0}^{\infty}(k+i)^s(\beta x)^i \tag{16}$$

上式中，$(k+i)^s$可以写成

$$(k+i)^s=d_0+d_1C_{i+1}^{i}+d_2C_{i+2}^{i}+\cdots+d_sC_{i+s}^{i},$$

其中，$d_0, d_1, d_2, \cdots, d_s$ 为常数。通过比较等式两边 i^s，i^{s-1}，$\cdots$，i 的系数和常数项，可以依次唯一确定 $d_s, d_{s-1}, \cdots, d_0$，这样，(16) 式可以写成(由推广的二项式系数 $(1+x)^{-n}=\sum_{r=0}^{+\infty}(-1)^r\binom{n+r-1}{r}x^r$)

$$\sum_{n=k}^{\infty} n^s\beta^n x^n = \beta^k x^k \sum_{i=0}^{\infty}(d_0 + d_1 C_{i+1}^i + d_2 C_{i+2}^i + \cdots + d_s C_{i+s}^i)(\beta x)^i$$

$$= \beta^k x^k\left(\sum_{i=0}^{\infty} d_0(\beta x)^i + \sum_{i=0}^{\infty} d_1 C_{i+1}^i(\beta x)^i + \cdots + \sum_{i=0}^{\infty} d_s C_{i+s}^i(\beta x)^i\right)$$

$$= \beta^k x^k\left(\frac{d_0}{1-\beta x} + \frac{d_1}{(1-\beta x)^2} + \cdots + \frac{d_s}{(1-\beta x)^{s+1}}\right)$$

$$= \frac{R(x)}{(1-\beta x)^{s+1}}$$

其中，$R(x)$ 是 x 的 $k+s$ 次多项式。将此结果代入(15)式，得

$$A(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} + \frac{R(x)}{Q(x)(1-\beta x)^{s+1}}$$

其中，$R(x)$ 是 x 的 $k+s$ 次多项式，而 $Q(x)(1-\beta x)^{s+1}$ 是 x 的 $k+s+1$ 次多项式，因而 $A(x)$ 可以展开成类似于(7)式的部分分式之和。

若 β 不是递推关系的特征根，则 $A(x)$ 分解成部分分式之和时，除 $Q(x)$ 的因子确定的一些部分分式之和外，还有

$$\frac{e_1}{1-\beta x} + \frac{e_2}{(1-\beta x)^2} + \cdots + \frac{e_{s+1}}{(1-\beta x)^{s+1}},$$

它们确定了递推关系(14)的一个特解，其中，x^n 的系数为

$$\left(e_1 + e_2 C_{n+1}^n + \cdots + e_{s+1} C_{n+s}^n\right)\beta^n$$

展开整理后可以得到特解

$$f^*(n) = (b_0 + b_1 n + \cdots + b_s n^s)\beta^n$$

若 β 是递推关系的 m 重特征根，则有理分式 $A(x)$ 的分母中包含 $(1-\beta x)^{m+s+1}$ 因子，与它相

关的部分分式中

$$\frac{e_1}{1-\beta x}+\frac{e_2}{(1-\beta x)^2}+\cdots+\frac{e_m}{(1-\beta x)^m}$$

可以归入齐次通解，而与非齐次特解相关的部分分式为

$$\frac{e_{m+1}}{(1-\beta x)^{m+1}}+\frac{e_{m+2}}{(1-\beta x)^{m+2}}+\cdots+\frac{e_{m+s+1}}{(1-\beta x)^{m+s+1}}$$

其中，x^n 的系数为

$$[e_{m+1}C_{n+m}^n+\cdots+e_{m+s+1}C_{n+m+s}^n]\beta^n \tag{17}$$

由于 β 是递推关系的 m 重特征根，x^n 的系数中 n 的次数低于 m 的项都可以归入齐次通解，不必在特解中保留，将 x^n 的系数公式(17)展开，并去掉其中 n 的次数低于 m 的项，则可以得到特解

$$f^*(n)=n^m(b_0'+b_1'n+\cdots+b_s'n^s)\beta^n$$

这正是第 6 章中所建立的特解形式。

例 5、求解递推关系

$$\begin{cases} f(n)=f(n-1)+n^4 \\ f(0)=0 \end{cases},$$

解：令

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)x^n$$

代入递推关系，得

$$A(x)-f(0)=\sum_{n=1}^{\infty}(f(n-1)+n^4)x^n=xA(x)+\sum_{n=1}^{\infty}n^4x^n$$

解得

$$A(x)=\frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}n^4x^n$$

利用

$$G\{k^3\}=\frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4},$$

$G\{k^4\}=x\cdot\left[G\{k^3\}\right]'$ 求得

$$G\{k^4\}=\frac{x(1+11x+11x^2+x^3)}{(1-x)^5},$$

所以

$$A(x)=\frac{x(1+11x+11x^2+x^3)}{(1-x)^6}$$

$$=(x+11x^2+11x^3+x^4)\sum_{i=1}^{\infty}C_{i+5}^{i}x^i$$

于是，x^n 的系数 $f(n)$ 为

$$f(n)=C_{n-1+5}^{n-1}+11C_{n-2+5}^{n-2}+11C_{n-3+5}^{n-3}+C_{n-4+5}^{n-4}$$

$$=\frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)$$

例 6、求解递推关系

$$\begin{cases} f(n)=2f(n-1)+4^{n-1} \quad (n\geq 2) \\ f(1)=3 \end{cases}$$

解：令

$$A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)x^n,$$

代入递推关系，得

$$A(x)-f(1)x=\sum_{n=2}^{\infty}(2f(n-1)+4^{n-1})x^n=2xA(x)+4x^2\sum_{n=0}^{\infty}(4x)^n$$

解得

$$A(x)=\frac{(3-8x)x}{(1-2x)(1-4x)}=x(\frac{1}{1-2x}+\frac{2}{1-4x})。$$

所以，x^n 的系数 $f(n)$ 为

$$f(n)=\frac{1}{2}(2^n+4^n)$$

例 7、求解卷积形式的递推关系

$$\begin{cases} f(n)=f(1)f(n-1)+f(2)f(n-2)+\cdots+f(n-1)f(1) \quad (n\geq 2) \\ f(1)=1 \end{cases}$$

解：令

$$A(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f(n)x^n,$$

代入递推关系，再由形式幂级数乘法定义得

$$A(x)=f(1)x+\sum_{n=2}^{\infty}[f(1)f(n-1)+f(2)f(n-2)+\cdots+f(n-1)f(1)]x^n=x+A^2(x)$$

(递推关系是从 $n\geq 2$ 开始的)所以

$$A^2(x)-A(x)+x=0,$$

解得

$$A(x)=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4x})$$

或

$$A(x)=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4x})$$

由 $A(x)$ 的定义知 $A(0)=0$，故只能取

$$A(x)=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4x})$$

利用牛顿二项式定理，有

$$\sqrt{1-4x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-4)^n x^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{2}{n})C_{2n-2}^{n-1}x^n$$

代入 $A(x)$，得

$$A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}x^n 。$$

所以，x^n 的系数 $f(n)$ 为

$$f(n)=\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}$$

此即 Catalan 数

7.5 生成函数在计数问题中的应用

本节主要讨论几类特殊的生成函数，即组合数序列、排列数序列、分拆数序列、组合分配数序列以及排列分配数序列的生成函数。

7.5.1 组合数的生成函数

我们在前面几章中讨论过三种类型的组合问题

(1) 求$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$的$k$组合数；

(2) 求$\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \cdots, \infty\cdot a_n\}$的$k$组合数；

(3) 求$\{k_1\cdot a_1, k_2\cdot a_2, \cdots, k_n\cdot a_n\}$的$k$组合数；

其中，问题(1)是普通集合的组合问题，问题(2)转化为不定方程$x_1+x_2+\cdots+x_n=k$的非负整数解的个数问题；问题(3)是利用容斥原理在$\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \cdots, \infty\cdot a_n\}$中求不满足下述$n$性质：

$$P_1\text{：}k\text{ 组合中}a_1\text{的个数大于等于 }k_1$$

$$P_2\text{：}k\text{ 组合中}a_2\text{的个数大于等于 }k_2$$

$$\vdots$$

$$P_n\text{：}k\text{ 组合中}a_n\text{的个数大于等于 }k_n$$

的k组合数，它们在解题方法上各不相同。下面将看到，引入生成函数的概念后，上述三类组合问题可以统一地处理。

我们先从问题(2)开始，令

$$M=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \cdots, \infty\cdot a_n\}$$

的k组合数为b_k，考虑n个形式幂级数的乘积

$$\underbrace{(1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+\cdots)\cdots(1+x+x^2+\cdots)}_{n\text{组}}$$

它的展开式中，每一个x^k均为

$$x^{m_1}x^{m_2}\cdots x^{m_n}=x^k \quad (m_1+m_2+\cdots+m_n=k)$$

其中，x^{m_1}，x^{m_2}，$\cdots$，x^{m_n}分别取自代表a_1的第一个括号，代表a_2的第二个括号，……，代表a_n的第n个括号；m_1，m_2，$\cdots$，m_n分别表示取$a_1, a_2, \cdots, a_n$的个数。于是，每个x^k都对应着

多重集合M的一个k组合。因此

$$(1+x+x^2+\cdots)^n$$

中x^k的系数就是M的k组合数b_k。由此得出序列$\{b_k\}$的生成函数为

$$(1+x+x^2+\cdots)^n=\frac{1}{(1-x)^n}$$

从而

$$b_k=C_{n-1+k}^k$$

这时，我们再次得到了重数无限的多重集合M的k组合数的公式，只不过现在是用生成函数获得的。

用生成函数方法解问题(3)尤为简单。将$\{k_1\cdot a_1,\ k_2\cdot a_2,\ \cdots,\ k_n\cdot a_n\}$的$k$组合数记为$b_k$，$\{b_k\}$的生成函数就是

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{k_1})(1+x+x^2+\cdots+x^{k_2})\cdots(1+x+x^2+\cdots+x^{k_n})$$

其展开式中的x^k必定为

$$x^{m_1}\cdot x^{m_2}\cdot\cdots\cdot x^{m_n}=x^k\quad(m_1+m_2+\cdots+m_n=k)$$

由于$x^{m_1},x^{m_2},\cdots,x^{m_n}$分别取自第 1、2、 ⋯、$n$个括号，故$0\le m_i\le k_i$，$i=1,2,\cdots,n$，于是每个$x^k$对应集合$\{k_1\cdot a_1,\ k_2\cdot a_2,\ \cdots,\ k_n\cdot a_n\}$的一个$k$组合。

特别当$n=3$，$M=\{3\cdot a_1,\ 4\cdot a_2,\ \cdots,\ 5\cdot a_3\}$的 10 组合，则

$$(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$$

$$=(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\frac{1}{(1-x)^3}$$

$$=(1-x^4-x^5-x^6+x^9+x^{10}+x^{11}-x^{15})\cdot\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+2}^n x^n$$

所以，x^{10}的系数b_{10}为

$$b_{10}=C_{10+2}^{10}-C_{6+2}^{6}-C_{5+2}^{5}-C_{4+2}^{4}+C_{1+2}^{1}+C_{0+2}^{0}=6$$

与第 5 章中用容斥原理得到的结果相同。

在普通集合$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$的$k$组合中，$a_i\ (1\le i\le n)$或者出现或者不出现，故该集合的$k$组合数序列$\{b_k\}$的生成函数为

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k$$

从而

$$b_k=C_n^k$$

综合以上分析，我们得到

定理 4、设从n元集合$S=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$中取$k$个元素的组合数为$b_k$，若限定元素$a_i$出现的次数集合为$M_i\quad(1\le i\le n)$，则该组合数序列的生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}x^m\right)。$$

例 8、求多重集合$M=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \cdots, \infty\cdot a_n\}$的每个$a_i$至少出现一次的$k$组合数$b_k$。

解：由定理 4 知

$$M_i=\{1, 2, 3, \cdots\}\quad(1\le i\le n)$$

于是

$$G\{b_k\}=(x+x^2+x^3+\cdots)^n=x^n\cdot\frac{1}{(1-x)^n}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}C_{n-1+i}^{i}x^{n+i}=\sum_{k=n}^{\infty}C_{k-1}^{n-k}x^k$$

$$=\sum_{k=n}^{\infty}C_{k-1}^{n-1}x^k$$

所以

$$b_k=\begin{cases}0, & (k<n)\\ C_{k-1}^{n-1}, & (k\ge n)\end{cases}。$$

7.5.2 排列数的指数型生成函数

n元集合的k排列数为$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$，按照 7.5.1 小节中方法构成的生成函数

$$\sum_{k=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^k$$

没有简单的解析表达式。但如果把基底函数 x^k 改换成 $\frac{x^k}{k!}$，则

$$\sum_{k=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\frac{x^k}{k!}=(1+x)^n$$

这启发人们引入指数型生成函数的概念。

数列 $\{a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots\}$ 的指数型生成函数定义为形式幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}。$$

定理 5、多重集合 $M=\{\infty\cdot a_1,\ \infty\cdot a_2,\ \cdots,\ \infty\cdot a_n\}$ 的 k 排列中，若限定元素 a_i 出现的次数集合为 M_i $(1\le i\le n)$，则排列数的指数型生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}\frac{x^m}{m!}\right)。$$

证明：将和积式展开，得

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}\frac{x^m}{m!}\right)=\sum_{k\ge 0}\left(\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=k\\(k_i\in M_i,\ i=1,2,\cdots,n)}}\frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\right)\frac{x^k}{k!}。$$

只要证明展开式中 $\frac{x^k}{k!}$ 的系数就是满足限定条件的 k 可重排列数即可。

首先，对于集合 M 的满足限定条件的每个 k 可重排列，设其中 a_i 出现 k_i 次 $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，则 $(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)$ 就是方程

$$k_1+k_2+\cdots+k_n=k\quad (k_i\in M_i,\ \ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{18}$$

的一个解。

其次，方程(18)的每个解 $(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)$ 都对应一类 k 可重排列，此类中的每一个 k 可重排列里，元素 a_i 出现 k_i 次 $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，而此类 k 可重排列的个数就是多重集合

$\{k_1\cdot a_1,\ k_2\cdot a_2,\ \cdots,\ k_n\cdot a_n\}$ 的全排列的个数，即 $\dfrac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}$。可见，与解 $(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)$ 相对应的 k 可重排列有 $\dfrac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}$ 个。

再者，方程(18)的不同解 $(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)$ 所对应的不同 k 可重排列类中没有相同的排列。

由加法原理，集合 M 满足给定条件的 k 可重排列的总个数为

$$\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=k\\(k_i\in M_i,\ i=1,2,\cdots,n)}}\frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}$$

特别地，数列 $\{1,\ 1,\ \cdots\}$ 的指数型生成函数 $e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ 具有与指数函数相似的性质：

$$e(x)e(y)=e(x+y)$$

这是因为

$$e(x)e(y)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{y^j}{j!}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}x^i\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}(\frac{y}{x})^j x^j$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{i!\,j!}(\frac{y}{x})^j x^{i+j}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(n-k)!}(\frac{y}{x})^k\right)x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n!}{k!(n-k)!}(\frac{y}{x})^k\right)\frac{x^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(1+\frac{y}{x})^n\frac{x^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}$$

$$=e(x+y)$$

特别有

$$e(x)\cdot e(-x)=e(0)=1$$

从而

$$e(-x)=\frac{1}{e(x)}\text{。}$$

例 9、多重集合 $M=\{\infty\cdot a_1,\ \infty\cdot a_2,\ \cdots,\ \infty\cdot a_n\}$ 的 k 排列数序列 $\{b_k\}$ 的指数型生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots)=e^n(x)=e(nx)=\sum_{k=0}^{\infty}n^k\frac{x^k}{k!}$$

从而

$$b_k=n^k\text{。}$$

例 10、由数字 0, 1, 2, 3 组成的长为 k 的序列中，要求含有偶数个 0，问这样的序列有多少个？

解：根据题意，有

$$M_1=M_2=M_3=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}\text{，}\quad M_0=\{0,\ 2,\ 4,\ \cdots\}$$

由定理 5 知，该排列数的指数型生成函数为

$$(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^3(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)=e^3(x)\cdot\frac{e(x)+e(-x)}{2}\text{,}$$

$$=\frac{1}{2}(e(4x)+e(2x))$$

所以 $\frac{x^k}{k!}$ 的系数为

$$b_k=\frac{1}{2}(4^k+2^k)$$

当 $k=2$ 时，满足题意的序列有 10 个，它们是：

00，11，12，13，21，22，23，31，32，33

例 11、由 1,2,3,4 能组成多少个五位数？要求这些五位数中 1 出现 2 次或 3 次，2 最多出现 1 次，4 出现偶数次。

解：根据题意，有

$$M_1=\{2,\ 3\},\quad M_2=\{0,\ 1\},\quad M_3=\{0,\ 1,\ 2,\cdots\},\ M_4=\{0,\ 2,\ 4,\ \cdots\}$$

由定理 5 知，该排列数的指数型生成函数为

$$(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})(1+\frac{x}{1!})(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots)(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)$$

$$=\frac{x^2}{6}(3+4x+x^2)\cdot e(x)\cdot\frac{e(x)+e(-x)}{2}$$

$$=\frac{x^2}{12}(3+4x+x^2)(e(2x)+1)$$

所以 $\frac{x^5}{5!}$ 的系数为

$$5!\times\frac{1}{12}(3\times\frac{2^3}{3!}+4\times\frac{2^2}{2!}+1\times\frac{1}{1!})=140$$

即满足题意的五位数有 140 个

例 12、求 $M=\{\infty\cdot a_1,\ \infty\cdot a_2,\ \cdots,\ \infty\cdot a_n\}$ 的 k 排列中每个 $a_i\quad(1\le i\le n)$ 至少出现一次的排列数 A_k 的指数型生成函数。

解：根据题意，有

$$M_i=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}\quad(1\le i\le n)\text{。}$$

由定理 5 知，排列数序列 $\{A_k\}$ 的指数型生成函数为

$$(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)^n=(e(x)-1)^n$$

$$=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i e((n-i)x)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n-i)^k x^k}{k!}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i (n-i)^k)\frac{x^k}{k!}$$

所以

$$A_k=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i (n-i)^k\qquad(k\ge n)$$

满足本题条件的排列

$$a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}$$

可以看成是把 k 个不同的球 $1,\ 2,\ \cdots,\ k$ 放入 n 个不同的盒子 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$，并且每盒非空的一种放法，即球 j 放入盒子 a_{i_j} 中 $(1\le j\le k)$，在第三章中我们知道共有

$$A_k = n!S(k,n)$$

种放法。由此得出k元集合的n分划数的显式表达式

$$S(k,n)=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i (n-i)^k$$

由此可知，$S(k,n)$的指数型生成函数为

$$\frac{1}{n!}(e(x)-1)^n$$

7.5.3 分拆数的生成函数

在第三章中，我们介绍了正整数的(无序)分拆，并利用 Ferrers 图讨论了分拆数的一些性质。本节介绍分拆数的生成函数，并利用生成函数来分析分拆数的一些性质。

定理 6、令$B(n)$表示正整数n的所有分拆数，$B_r(n)$表示n的各分部量都不超过r的分拆数，$B_H(n)$表示n的各分部量都属于集合H的分拆数，则它们相应的生成函数分别为

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} B_r(n)x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^r)}$；

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} B_H(n)x^n = \prod_{j\in H}\frac{1}{1-x^j}$；

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} B(n)x^n = \prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^j}$。

证明：(1)给定n的一个分部量不超过r的分拆

$$n = k_1\cdot 1 + k_2\cdot 2+\cdots+k_r\cdot r\text{，} \tag{19}$$

则它对应着不定方程

$$n = 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + \cdots + r\cdot x_r \tag{20}$$

的一组非负整数解$(k_1, k_2, \cdots, k_r)$；反之亦然。所以，$B_r(n)$等于方程(20)的非负整数解的个数。

现要寻找序列$\{B_r(n)\}$的生成函数，为此，考察下列r个幂级数的乘积

$$(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+(x^2)^2+\cdots)\cdots\cdots(1+x^r+(x^r)^2+\cdots) \tag{21}$$

它的展开式中，每一项x^n必可写成

$$x^n = x^{k_1}\cdot(x^2)^{k_2}\cdot\cdots\cdot(x^r)^{k_r} = x^{k_1+2k_2+\cdots+rk_r}$$

此外，x^{k_1} 取自第 1 个括号，……，$(x^r)^{k_r}$ 取自第 r 个括号。从而有

$$n = 1\cdot k_1 + 2\cdot k_2 + \cdots + r\cdot k_r$$

即 $(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_r)$ 是方程(20)的一组非负整数解。反之，方程(20)的一组非负整数解就对应着(21)式的展开式中的一个项 x^n，因此，方程(20)的非负整数解数等于(21)式的展开式中 x^n 的系数。

综上所述，有

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_r(n)x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^r)}$$

(2) 令 $H=\{h_1,\ h_2,\cdots,\ h_k,\cdots\}$ 是整数集合，且满足 $h_1<h_2<\cdots<h_k<\cdots$。类似于(1)的证明可知，$B_H(n)$ 等于方程

$$h_1x_1 + h_2x_2 + \cdots + h_kx_k + \cdots = n$$

的非负整数解的个数，所以它的生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_H(n)x^n = (1+x^{h_1}+x^{2h_1}+\cdots)(1+x^{h_2}+x^{2h_2}+\cdots)\cdots = \prod_{j\in H}\frac{1}{1-x^j}$$

(3) 当 $H=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$ 时，$B_H(n)=B(n)$，从而有

$$\sum_{n=0}^{\infty} B(n)x^n = \prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^j}$$

注意，这里是无穷乘积，当 $j>N$ 时，幂级数

$$\frac{1}{1-x^j} = 1 + x^j + x^{2j} + \cdots$$

在乘积展开式中对 $x,\ x^2,\ \cdots,\ x^N$ 的系数没有贡献。这说明形式幂级数的前 $N+1$ 项之和 $\sum_{n=0}^{N} B(n)x^n$ 是由有限乘积 $\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{1-x^j}$ 完全确定的。

从上述结果可以得到下面两个推论：

推论 1、将 n 分成 r 个分部量的分拆数的生成函数为

$$\frac{x^r}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^r)}$$

证明：由第四章的定理 10 知，将 n 分成 r 个分部量的分拆数 $B(n,r)$ 等于 n 的最大分量为 r 的分拆数 $B_r(n)-B_{r-1}(n)$，所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}B(n,r)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(B_r(n)-B_{r-1}(n))x^n$$

$$=\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{1-x^i}-\prod_{i=1}^{r-1}\frac{1}{1-x^i}$$

$$=\frac{x^r}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^r)}$$

推论 2、n 的各分部量两两互不相同的分拆数等于 n 的各分部量都是奇数的分拆数。

证明：n 的各分部量两两互不相同的分拆数的生成函数为

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1+x^j)=\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdots\cdot\frac{1-x^{2n}}{1-x^n}\cdots$$

$$=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdots$$

$$=\prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2j-1}}$$

上式右端的无穷乘积是 n 的各分部量都是奇数的生成函数，由此得到本推论。

7.5.4 组合型分配问题的生成函数

定理 7、把 k 个相同的球放入 n 个不同的盒子 a_1，a_2，$\cdots,a_n$ 中，限定盒子 a_i 的容量集合为 M_i $(1\le i\le n)$，则其分配方案数的生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}(\sum_{m\in M_i}x^m)$$

证明：不妨设盒子 a_1，a_2，$\cdots,a_n$ 中放入的球数分别为 x_1，x_2，$\cdots$，x_n，则

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=k\quad(x_i\in M_i,\quad 1\le i\le n)$$

一种符合要求的放法相当于 $M=\{\infty\cdot a_1,\ \infty\cdot a_2,\ \cdots,\ \infty\cdot a_n\}$ 的一个 k 组合，前面关于盒子 a_i 容量

的限制转变成k组合中a_i出现次数的限制。由定理 4 知，组合型分配问题方案数的生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}x^m\right)$$

例 13、求不定方程

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=20$$

满足

$$x_1\ge 3,\quad x_2\ge 2,\quad x_3\ge 4,\quad x_4\ge 6,\quad x_5\ge 0$$

的整数解个数。

解：本问题相当于把 20 个相同的球放入 5 个不同的盒子中，盒子的容量集合分别为

$$M_1=\{3,\ 4,\ \cdots\}$$

$$M_2=\{2,\ 3,\ \cdots\}$$

$$M_3=\{4,\ 5,\ \cdots\}$$

$$M_4=\{6,\ 7,\ \cdots\}$$

$$M_5=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$$

该组合型分配问题的生成函数为

$$(x^3+x^4+\cdots)(x^2+x^3+\cdots)(x^4+x^5+\cdots)\cdot(x^6+x^7+\cdots)(1+x+x^2+\cdots)$$

$$=x^{15}\cdot(1+x+x^2+\cdots)^5$$

$$=x^{15}\cdot\frac{1}{(1-x)^5}$$

$$=x^{15}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+4}^{n}x^n$$

其中，x^{20}的系数$C_{5+4}^{5}=126$就是满足条件的整数解的个数。

7.5.5 排列型分配问题的生成函数

定理 8、把k个不同的球$1,\ 2,\ \cdots,\ k$放入n个不同的盒子$a_1,\ a_2,\ \cdots,a_n$中，限定盒子a_i的

容量集合为 M_i $(1\le i\le n)$，则其分配方案数的生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}\frac{x^m}{m!}\right)。$$

证明：设球 j 放入盒子 a_{i_j} 中 $(1\le j\le k)$，则一种符合要求的放法对应的序列

$$a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}$$

是多重集合 $M=\{\infty\cdot a_1,\ \infty\cdot a_2,\ \cdots,\ \infty\cdot a_n\}$ 的一个 k 排列，盒子 a_i 的容量集合 M_i 即是 k 排列中 a_i 出现的次数集合。由定理 5 知，排列型分配问题方案数的生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}\frac{x^m}{m!}\right)$$

例 14、用红、白、蓝 3 种颜色给 $1\times n$ 棋盘着色，要求白色方格数是偶数，问有多少种着色方案？

解：将 $1\times n$ 棋盘的 n 个方格分别用 $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 标记，第 i 个方格着 c 色看作把第 i 个物体放入 c 盒中。这时，问题可转化成：把 n 个不同的球放入 3 个不同的盒子中，各盒的容量集合分别为

$$M_r=M_b=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\},\qquad M_w=\{0,\ 2,\ 4,\ \cdots\}$$

于是，分配方案数的指数型生成函数为

$$(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^2(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)=e(2x)\cdot\frac{e(x)+e(-x)}{2}=\frac{1}{2}(e(3x)+e(x))$$

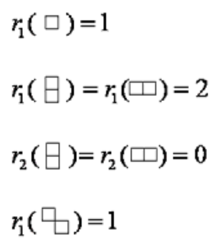
其中，$\frac{x^n}{n!}$ 的系数 $\frac{1}{2}(3^n+1)$ 就是满足要求的着色方案数。

7.5.6　有限制位置的排列及棋子多项式

在介绍本节内容以前，先介绍有关棋盘多项式的概念

设 C 是一个棋盘，$r_k(C)$ 表示把 k 个相同的棋子分布到 C 中的方案数。在分布棋子时规定：当一个棋子放到 C 中的某一格以后，这个格所在的行和列就不能再放其它的棋子了，并规定对任意的棋盘 C 有 $r_0(C)=1$。

不难得到以下结果：



可以证明布棋方案数$r_k(C)$具有如下性质：

1、对于任意的棋盘C和正整数k，如果k大于C中的方格数，则$r_k(C)=0$。

2、$r_1(C)$等于C中的方格数。

3、设C_1和C_2是两个棋盘，如果C_1经过旋转或者翻转就变成了C_2，则$r_k(C_1)=r_k(C_2)$。

4、设$C_{i\,j}{}^*$是从棋盘C中去掉指定的方格(i,j)所在的行和列以后剩余的棋盘，$C_{i\,j}$是从棋盘C中去掉指定的方格(i,j)后剩余的棋盘，则有

$$r_k(C)=r_{k-1}(C_{i\,j}{}^*)+r_k(C_{i\,j})\qquad (k\ge 1)$$

5、设棋盘C由两个子棋盘C_1和C_2组成，如果C_1和C_2是互相独立的(即两个子棋盘的行和列居不重叠)，则有

$$r_k(C)=\sum_{i=0}^{k} r_i(C_1)\cdot r_{k-i}(C_2)$$

证明：前三个性质根据定义是显然的。

4、从C中任意指定一个方格a在棋盘上其坐标(i,j)，如果有一个棋子布在a，则其余的$k-1$个棋子只能分布在去掉a所在的行和列以后的剩余棋盘$C_{i\,j}{}^*$上，布棋方案数为$r_{k-1}(C_{i\,j}{}^*)$，如果没有棋子布在a，则所有的k个棋子只能分布在去掉a后的剩余棋盘$C_{i\,j}$上，布棋方案数为$r_k(C_{i\,j})$。由加法原理，等式成立。

5、由C_1和C_2的互相独立性以及乘法原理可知，等式显然成立。

定义(***)、设C是棋盘，则

$$R(C)=\sum_{k=0}^{\infty} r_k(C)x^k$$

叫做棋盘多项式。

注：很明显$n\times n$的棋盘的多项式是一个n次多项式，

$$R(C_{n\times n})=1+\sum_{i=1}^{n}\frac{n^2(n-1)^2\cdots(n-i)^2}{i!}x^i$$

显然，在上述定义中当k大于棋盘的格子数时$r_k(C)=0$，所以$R(C)$一般只有有限项。例如：

$$R(\ )=r_0(\ )+r_1(\ )x+r_2(\ )x^2=1+2x+x^2,$$

$$R(\ )=r_0(\ )+r_1(\ )x+r_2(\ )x^2=1+2x$$

根据$r_k(C)$的性质不难得到$R(C)$的性质。

1、$R(C)=xR(C_{i,j}{}^*)+R(C_{i,j})$，其中$C_{i,j}{}^*$和$C_{i,j}$的含义如前所述。

证明：$R(C)=\sum_{k=0}^{\infty}r_k(C)\cdot x^k$

$$=r_0(C)+\sum_{k=1}^{\infty}r_k(C)\cdot x^k$$

$$=r_0(C_{i,j})+\sum_{k=1}^{\infty}[r_{k-1}(C_{i,j}{}^*)+r_k(C_{i,j})]\cdot x^k$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}r_{k-1}(C_{i,j}{}^*)\cdot x^k+r_0(C_{i,j})+\sum_{k=1}^{\infty}r_k(C_{i,j})\cdot x^k$$

$$=x\sum_{k=0}^{\infty}r_k(C_{i,j}{}^*)\cdot x^k+r_0(C_{i,j})+\sum_{k=1}^{\infty}r_k(C_{i,j})\cdot x^k$$

$$=xR(C_{i,j}{}^*)+R(C_{i,j})$$

2、$R(C)=R(C_1)\cdot R(C_2)$，其中C_1,C_2的含义如前所述(棋盘C由两个子棋盘C_1和C_2组成，且C_1和C_2是互相独立的)。

证明：

$$r_0(C)=r_0(C_1)\cdot r_0(C_2)$$

$$xr_1(C)=[r_0(C_1)\cdot r_1(C_2)+r_1(C_1)r_0(C_2)]x$$

$$x^2 r_2(C)=[r_0(C_1)\cdot r_2(C_2)+r_1(C_1)r_1(C_2)+r_2(C_1)r_0(C_2)]x^2$$

$$\cdots\cdots$$

将以上各式的两边分别相加得

$$\begin{aligned}R(C)&=r_0(C_1)[r_0(C_2)+r_1(C_2)\cdot x+r_2(C_2)x^2+\cdots]\\&\quad+r_1(C_1)\cdot x[r_0(C_2)+r_1(C_2)\cdot x+r_2(C_2)\cdot x^2+\cdots]\\&\quad+r_2(C_1)\cdot x^2[r_0(C_2)+r_1(C_2)\cdot x+r_2(C_2)\cdot x^2+\cdots]+\cdots\\&=r_0(C_1)R(C_2)+r_1(C_1)\cdot x\cdot R(C_2)+r_2(C_1)\cdot x^2\cdot R(C_2)+\cdots\\&=R(C_1)\cdot R(C_2)\end{aligned}$$

例(***)、计算 $R(\ )$ 和 $R(\ )$

解：$R(\ )=x\cdot R(\square)+R(\square\square)=x(1+x)+(1+2x)=1+3x+x^2$

$$\begin{aligned}R(\ )&=x\cdot R(\ )+R(\ )\\&=x[x\cdot R(\ )+R(\ )]+[x\cdot R(\ )+R(\ )]\\&=x[x(1+2x)+(1+3x+x^2)]+[x(1+3x+x^2)+R(\ )]\\&=x(1+4x+3x^2)+(x+3x^2+x^3+1+4x+3x^2)\\&=1+6x+10x^2+4x^3\end{aligned}$$

本节又回到有限制位置的排列问题，我们先分析一个例子。

例 15、由 5 个字母 a, b, c, d, e 构成的全排列中，a 不能出现在 1，5 位置上，b 不能出现在 2，3 位置上，c 不能出现在 3，4 位置上，e 不能出现在 5 位置上。问有多少种排列方法？

解：根据题意画出一个 5×5 方阵，如图 1 所示，行表示 5 个字母，列表示 5 个位置。(i, j) 位置涂上阴影，表示字母 i 不能出现在 j 位置上。一个满足要求的排列是在图中取 5 个没有阴影的方块，并且每行、每列中只有一个方块。例如，*badec* 就是一个合适的排列。

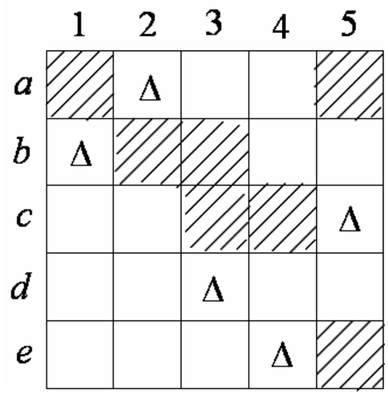


图 1

在$\{a, b, c, d, e\}$的所有全排列上定义性质

$$P_i:\text{在位置}\,i\,\text{有受限字母出现}\ (1 \le i \le 5),$$

下面用容斥原理计算符合题意的安排数

$$N(0) = w(0) - w(1) + w(2) - w(3) + w(4) - w(5)$$

由定义知，$w(0) = 5!$，$N(P_i)$的取值见表 1，所以

$N(P_i, P_j)$ $(i \ne j)$的取值见表 2，所以

$$w(2) = \sum N(P_i, P_j) = 16 \times 3!$$

$$= \text{不同行列中选 2个有阴影方块的方法数} \times 3!$$

表 1

i	1	2	3	4	5
$N(P_i)$	$4!$	$4!$	$2\times 4!$	$4!$	$2\times 4!$

表 2

$N(P_i, P_j)$	2	3	4	5
1	$3!$	$2\times 3!$	$3!$	$3!$
2		$3!$	$3!$	$2\times 3!$
3			$3!$	$4\times 3!$
4				$2\times 3!$

一般地，有

$$w(k) = \text{不同行列中选}\ k\ \text{个有阴影方块的方法数} \times (5-k)!$$

由于对字母d的位置没有限制，故$w(5) = 0$。但是，$w(3)$和$w(4)$的计算却很复杂。为此，我

们试图找出一种新的方法，以便简捷地决定出不同行列中取 k 个有阴影方块的方法数。

在组合分析中，一种通用的技巧是把大量复杂问题分解成规模小一些、更容易处理的子问题。以下我们称有阴影的方块全体为残缺棋盘(简称棋盘)，并在棋盘上定义两种操作：

(1) 把棋盘 B 分成两个不相交的子棋盘。

对棋盘 B 的行列作适当的调换，使子棋盘 B_1 和 B_2 所涉及的行集合非交，列集合也是非交的。例如，图 1 表示的棋盘 B 可以变成两个非交的子棋盘 B_1 和 B_2，如图 2 所示。

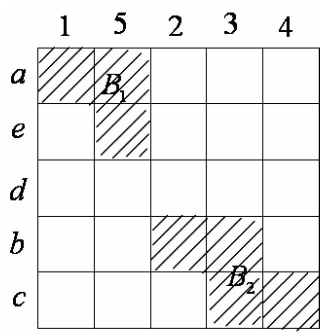


图 2

令 $r_k(B)$ 是在棋盘 B 的不同行、不同列中放 k 个棋子的方法数。不难看出，图图 2 中

$$r_1(B_1)=3,\ r_2(B_1)=1$$

$$r_1(B_2)=4,\ r_2(B_2)=3$$

并且定义 $r_0(B)=1$，则

$$\begin{aligned} r_2(B) &= r_0(B_1)r_2(B_2)+r_1(B_1)r_1(B_2)+r_2(B_1)r_0(B_2) \\ &=1\times3+3\times4+1\times1 \\ &=16 \end{aligned}$$

与前面的计算结果一致。

上述推理过程对于任何 k 以及棋盘 B 的任何不相交的分解都是成立的，从而得到下面的引理：

引理 1、如果棋盘 B 分解成两个不相交(独立)的子棋盘 B_1 和 B_2，则

$$r_k(B)=\sum_{i=0}^{k} r_i(B_1)r_{k-i}(B_2)$$

对于棋盘 B，定义棋子多项式 $R(x,B)$ 为数列 $\{r_0(B),\ r_1(B),\ \cdots\}$ 的生成函数，即

$$R(x,B)=\sum_{i=0}^{\infty}r_i(B)x^i\ ,$$

则由引理 1 得到

引理 2、若 B_1，B_2 是棋盘 B 的两个不相交的子棋盘分划，则

$$R(x,B)=R(x,B_1)\cdot R(x,B_2)$$

在前面的例 15 中，有

$$R(x,B_1)=1+3x+x^2$$

$$R(x,B_2)=1+4x+3x^2$$

于是

$$R(x,B)=R(x,B_1)\cdot R(x,B_2)=1+7x+16x^2+13x^3+3x^4$$

由此得知

$$r_1(B)=7,\quad r_2(B)=16,\quad r_3(B)=13,\quad r_4(B)=3,\quad r_5(B)=0$$

代入容斥原理的公式，得

$$\begin{aligned}&N(0)=w(0)-w(1)+w(2)-w(3)+w(4)-w(5)\\&=5!-7\times4!+16\times3!-13\times2!+3\times1!-0\times0!\\&=25\end{aligned}$$

把例 15 中体现的思想归纳成如下定理：

定理 9、在有限制位置时，安排 n 个不同物体的方法数等于

$$n!-r_1(B)(n-1)!+r_2(B)(n-2)!-\cdots+(-1)^n r_n(B)\cdot 0!$$

其中，$r_1(B),\ r_2(B),\ \cdots,\ r_n(B)$ 是有限制位置的棋盘 B 的棋子多项式 $R(x,B)$ 的系数。

证明：此定理可以看作给定 $n\times n$ 的有禁区的棋盘，这个禁区对应于集合 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 中的元素在排列中不允许出现的位置。

先不考虑禁区的限制，那么 n 个棋子分布到 $n\times n$ 的棋盘上的方案有 $n!$ 个。如果对 n 个棋子分别编号为 $1,\ 2,\ \cdots,\ n$，并且认为编号不同的棋子放入同样的方格是不同的放置方案，那么带编号的棋子分布到 $n\times n$ 的棋盘上的方案数是 $n!\cdot n!$。把这些放案构成的集合记作 S。

对 $j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，令 P_j 表示第 j 个棋子落入禁区的性质，并令 A_j 是 S 中具有性质 P_j 的方

案构成的子集，那么所求的排列就是$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}\right|$即$N(0)$。

1 号棋子落入禁区的方案数为r_1，当它落入禁区的某一格以后，2, 3, $\cdots$, n号棋子可以任意分布在$(n-1)\times(n-1)$的棋盘上，由乘法原理得

$$|A_1| = r_1\cdot(n-1)!\cdot(n-1)!$$

同理，对$i=2,\ 3,\ \cdots,\ n$有

$$|A_i| = r_1\cdot(n-1)!\cdot(n-1)!$$

从而

$$w(1)=\sum_{i=1}^{n}|A_i| = r_1\cdot(n-1)!\cdot n!$$

某指定的两个棋子落入禁区的方案数为$2r_2$(注意这里棋子已被编号了)，它们落入以后，3, 4, $\cdots$, n号棋子可以任意分布在$(n-2)\times(n-2)$的棋盘上，由乘法原理得

$$|A_1| = 2r_2\cdot(n-2)!\cdot(n-2)!$$

同理，对$\{i,\ j\}\subset\{1,2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$有

$$|A_iA_j| = 2r_2\cdot(n-2)!\cdot(n-2)!$$

从而

$$w(2)=\sum_{1\le i<j\le n}|A_iA_j| = 2C_n^2r_2\cdot(n-2)!\cdot n! = r_2\cdot(n-2)!\cdot n!$$

用类似的方法，可以求得

$$w(k)=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\left|A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\right| = r_k(n-k)!\cdot n!$$

$1\le k\le n$。

根据推广的容斥原理的

$$N(0)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i w(i) = n!\cdot n! - r_1(n-1)!\cdot n! + r_2(n-2)!\cdot n! - \cdots + (-1)^n r_n\cdot n!$$

因为带编号的方案数与不带编号的方案数相差$n!$倍，因此所求的方案数是

$$n! - r_1(B)(n-1)! + r_2(B)(n-2)! - \cdots + (-1)^n r_n(B)\cdot 0!$$

注意：这个定理适用于小禁区的排列问题，即有较少禁止位置排列问题，否则还是只能

直接用棋盘多项式来求解。

(2) 当棋盘 B 不能分解成两个不相交的子棋盘时，我们可以把棋盘 B 的不同行、不同列上放置 k 个棋子的方法分成两类：

(ⅰ) 有一个棋子放在指定的方块 S 上。这时，其余的 $k-1$ 个棋子应该放在去掉 S 所在的行和所在的列之后得到的新棋盘 B_S^* 上，其方法数为 $r_{k-1}(B_S^*)$。

(ⅱ) 没有棋子放在指定的方块 S 上。这时，全部 k 个棋子应该放在去掉 S 所在的行和所在的列之后得到的新棋盘 B_S 上，其方法数为 $r_k(B_S)$。

由此可知

$$r_k(B)=r_{k-1}(B_S^*)+r_k(B_S)$$

并且

$$R(x,B)=R(x,B_S)+xR(x,B_S^*)$$

这就是对棋盘 B 的第二个操作。

例 16、一个小孩给他的 3 个叔叔 A_1，A_2，A_3 和 3 个婶婶 U_1，U_2，U_3 寄 6 种贺年卡 C_1,C_2，$\cdots$，C_6。图 3 列出了每个人的好恶，问有多少种让每人都满意的寄送方法？

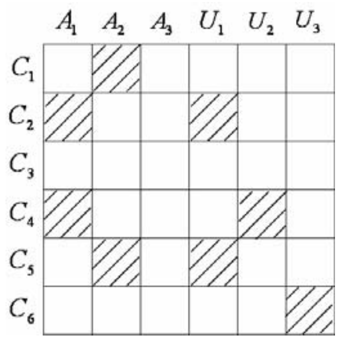


图 3

解：将图 3 经行列调换后得到图 4，其中，B_1 与 B_2 是不相交子棋盘。选定 (3,2) 位置的方块为 S，则

$$R(x,B)=R(x,B_1)\cdot R(x,B_2)$$

其中

$$R(x,B_2)=1+x,$$

$$R(x,B_1)=R(x,B_{1S})+xR(x,B_{1S}^*)$$

这里，棋盘 B_{1S} 和 B_{1S}^* 分别如图 5(a) 和 (b) 所示，于是

$$R(x,B_{1S})=(1+3x+x^2)(1+3x+x^2),$$

$$R(x,B_{1S}^*)=(1+2x)(1+2x),$$

所以

$$R(x,B_1)=1+7x+15x^2+10x^3+x^4$$

代入 $R(x,B)$ 中，得

$$R(x,B)=1+8x+22x^2+25x^3+11x^4+x^5$$

由定理 9 知，寄送方法数为

$$6!-8\times5!+22\times4!-25\times3!+11\times2!-1\times1!+0\times0!=159$$

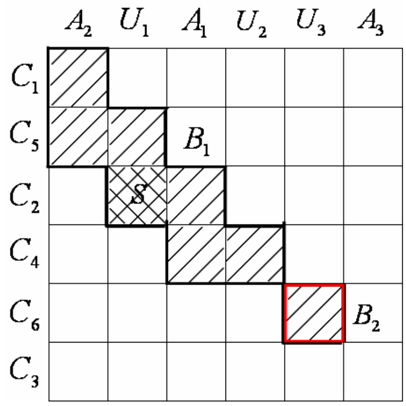


图 4

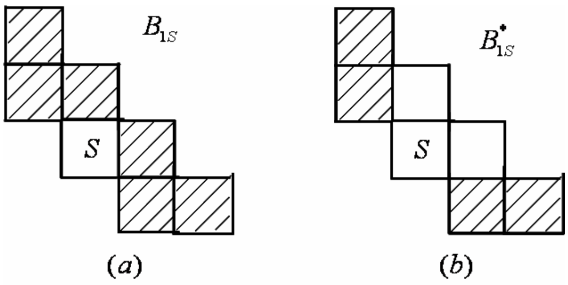


图 5

例 17(错排问题)、设图 6 是 $n\times n$ 棋盘，限制位置都在对角线上，用 n 个棋子在上面布局。

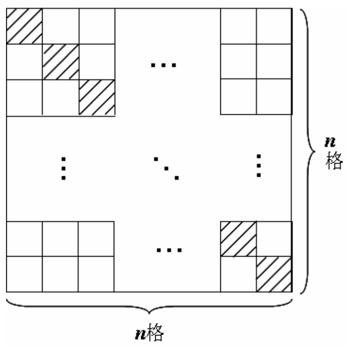
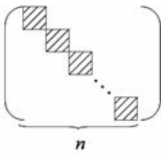


图 6

所谓错排问题，就是求集合{1, 2, ⋯, n}在如图(***)所示的有限制位置的棋盘上的排列方案数。由引理 2 知

R 

$$=(1+x)^n$$

$$=1+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$$

所以

$$r_i(B)=C_n^i \quad (0\le i\le n)$$

再由定理 9，错排数为

$$D_n=n!-C_n^1(n-1)!+C_n^2(n-2)!-\cdots+(-1)^nC_n^n1!$$

$$=n!(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!})$$

这里，我们又得到了第 5 章 5.3 节所讨论的结果。