3 似函数，非函数

3-1 从投掷色子说起

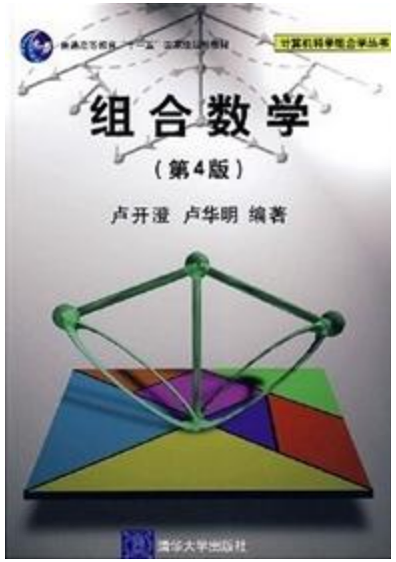
组合数学 Combinatorics

清华大学 马昱春

母函数的定义

函　数

$$G(x)=x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+x^{12}$$



定义2-1 对于序列$c_0, c_1, c_2\ldots$，构造一函数

$$G(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots,$$

称$G(x)$为序列$c_0, c_1, c_2\ldots$的**母**函数。

母函数是函数吗？

组合数学的主要内容是计数，用的最多的计数工具要算母函数。

母函数

母函数，是组合数学中尤其是计数方面的一个重要理论和工具，运用这种数学方法往往对程序效率与速度有很大改进。

母函数方法不仅在概率论的计算中有重要地位，而且已成为组合数学中一种重要方法。

母函数和计数法则

且：乘法法则
或：加法法则

- 例：两个色子掷出6点，有多少种可能？

$$\boxed{} + \boxed{} = 6$$

- 解法1：第一位数 1-5，且第二位数由第一位来确定　　$5 \times 1 = 5$
- 解法2：1+5 = 5+1；或 2+4 = 4+2；或 3+3　　$2 + 2 + 1 = 5$

雅各布 伯努利
瑞士数学家1654年－1705年

- **投掷*m*粒色子时，加起来点数总和等于*n*的可能方式的数目？**

母函数和计数法则

且：乘法法则
或：加法法则

- 例：两个色子掷出n点，有多少种可能？

$$\square + \square = n$$

○ x ○ (○)^2 x^2  $x^6 \leftarrow$ x^2 ×指数对应点数 x^4  x^4

(⚀ 或 ⚁ 或 ⚂ 或 ⚃ 或 ⚄ 或 ⚅) (⚀ 或 ⚁ 或 ⚂ 或 ⚃ 或 ⚄ 或 ⚅)

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)\times(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$$

$$x^6: \boxed{x^1 x^5 + x^2 x^4 + x^3 x^3 + x^4 x^2 + x^5 x^1} = 5x^6$$

x^6的系数为5，表示两个色子掷出6点的可能方法有5种。

$G(x)=(x+x^2+\ldots+x^6)^2= x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+x^{12}$

两个色子掷出n点的可能方法数即为求$G(x)=(x+x^2+\ldots+x^6)^2$中$x^n$的系数。

函数中的系数对应计数序列。

母函数和计数法则

母函数是母亲，计数序列是孩子。

雅各布 伯努利

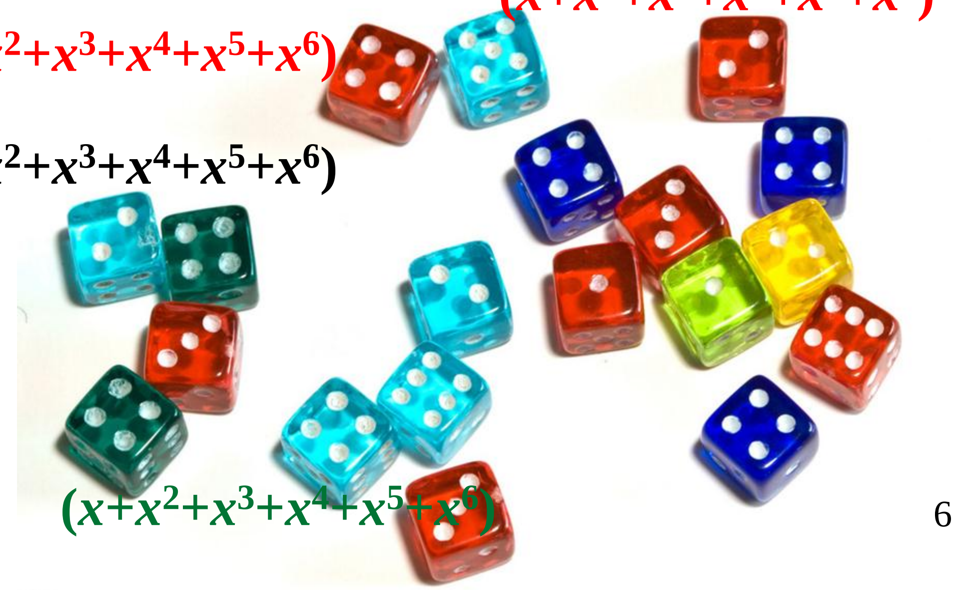
Jakob I. Bernoulli

瑞士数学家1654年－1705年

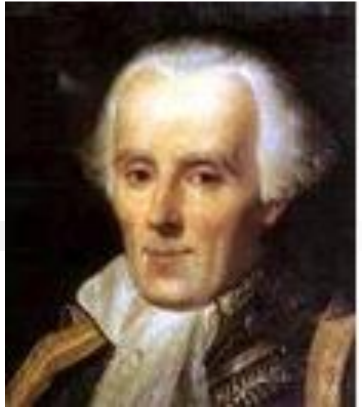
- **投掷m粒色子时，加起来点数总和等于n的可能方式的数目？**

$$G(x)=(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^m$$

展开式中x^n项的系数



§ 1.母函数和计数法则



拉普拉斯

- **定义2-1** 对于计数序列$c_0, c_1, c_2 \ldots,$

$$G(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots\ldots$$

函数$G(x)$是序列$c_0, c_1, c_2 \ldots$的母函数。

- 1812年，法国数学家拉普拉斯在著作《概率的分析理论》的第一卷中系统地研究了母函数方法及与之有关的理论
  - 计数工具
  - 不考虑收敛性
  - 不考虑实际上的数值
  - <u>形式</u>幂级数(Formal power series)

似函数，非函数，是？？

§ 1.母函数和计数法则

对应关系

计算 $p = 23^{\frac{1}{3}}41^{\frac{1}{8}}$
（原像）

对数映射

$\lg p = \frac{1}{3}\lg(23) + \frac{1}{8}\lg(41)$
（映像）

困难

将指数运算简化为做加法乘法

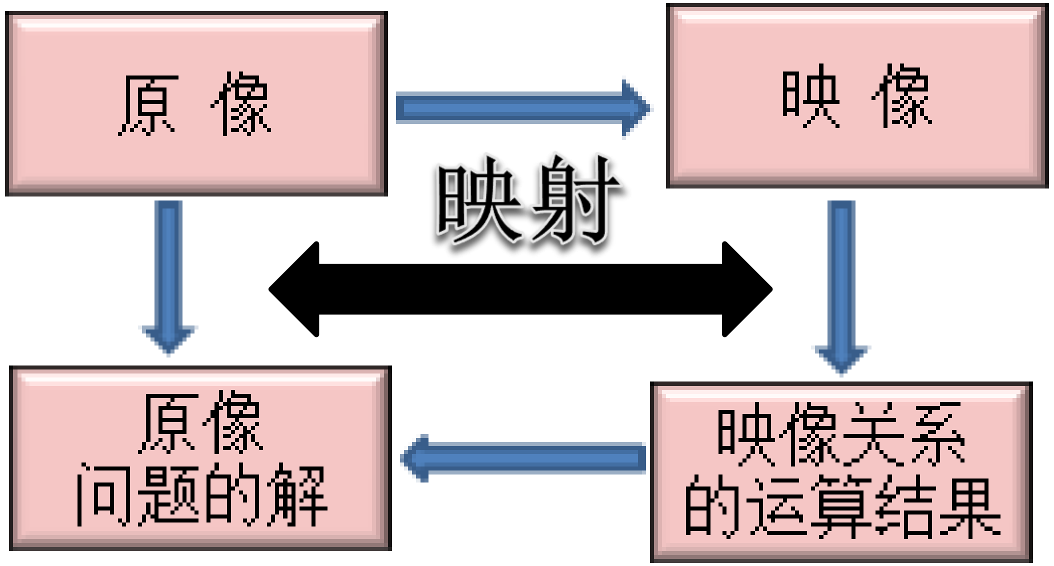
求解原像p的数值

反对数

求得映像 $\lg p$的数值

§1. 母函数和计数法则　　　　映射关系

徐利治
我国著名数学家



映射，是两类数学对象或集合之间的某种“对应关系”。
------《数学方法论选讲》

“数学发展中比比皆是通过映射手段求解的现象。”

母函数和计数法则　　映射关系

原像　　**母函数映射**　　映像

$\square + \square = n \longrightarrow (x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)$

? 困难 ? 多项式乘法

系数对应

$c_0, c_1, \ldots, c_n \longleftarrow = x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+\ldots\ldots$

$$(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k)\times(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)\times(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots)$$

$a_i b_{n-i} x^n \longleftarrow a_i x^i \qquad b_{n-i} x^{n-i}$

乘法法则:

***n*个计数对象可以划分为*i*个对象和*n-i*个对象**　$a_i x^i \times b_{n-i} x^{n-i} = a_i b_{n-i} x^n$

加法法则:

***n*个计数对象所有的划分策略累加**

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}, n = 0,1,2,\ldots$$

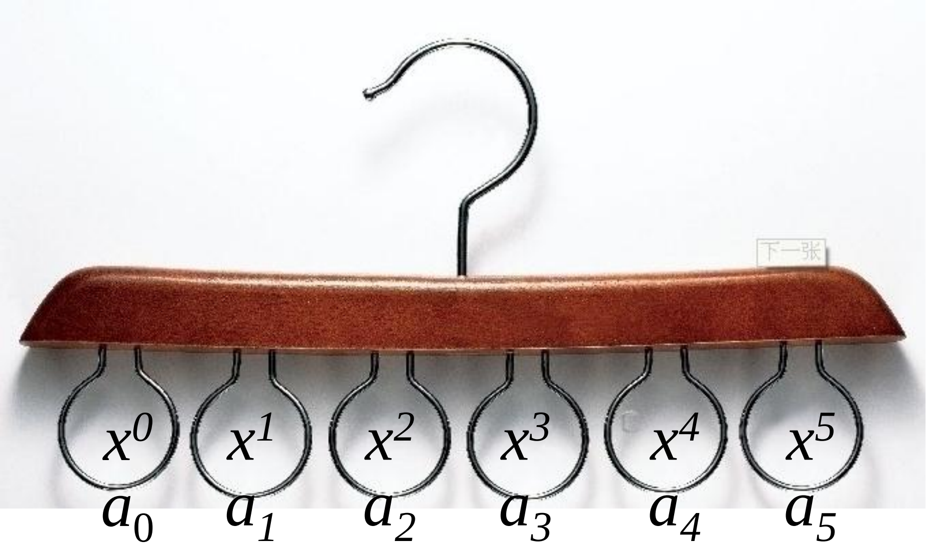
多项式乘法运算使母函数具备了计数的能力

母函数就是一列用来展示一串数字序列的挂衣架。

—— 赫伯特·维尔夫

$$G(x)=x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+x^{12}$$

函数: $\boxed{f(x)}=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \boxed{x^n}$ $\qquad$ $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{a_n} x^n$

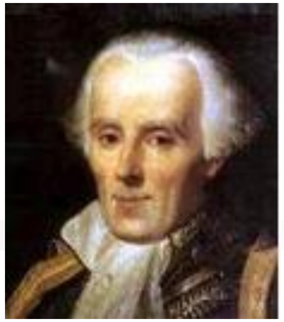


§3 本讲的小结

定义2-1 对于序列$a_0, a_1, a_2, \ldots$, 构造一函数

$$G(x)= a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots,$$

称$G(x)$为序列$a_0, a_1, a_2\ldots$的母函数。



拉普拉斯
1812年

原像　　母函数映射　　映像

$\square+\square=n \longrightarrow (x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)$

伯努利
1705年前

似函数，非函数，是映射

欧拉
1764年前

系数对应

$c_0, c_1, \ldots, c_n \longleftarrow = x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+\ldots\ldots$

寻找到映射关系就是"<u>数学发现</u>"。

寻找映射是数学家重要的思维方式。

3 似函数，非函数

3-2 母函数的计数问题

组合数学 Combinatorics

清华大学 马显春

母函数和计数法则

例1：若有1克、2克、3克、4克的砝码各一枚，问能称出那几种重量？有几种可能方案？

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$$
$$=1+x+x^2+2x^3+2x^4+2x^5+2x^6+2x^7+x^8+x^9+x^{10}$$

从右端的母函数知可称出从1克到10克，系数便是方案数。例如右端有$2x^5$项，即称出5克的方案有2种。$5=2+3=1+4$

同样，$6=1+2+3=4+2$

$10=1+2+3+4$

故称出6克的方案有2个，称出10克的方案有1个

问题举例

例1： 若有1、2、4、8、16、32克的砝码各一枚，问能称出那几种重量？有几种可能方案？

$$G(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})$$

$$\boxed{(1+x)(1-x)=(1-x^2)}$$

$$=\frac{1-x^2}{1-x}\frac{1-x^4}{1-x^2}\frac{1-x^8}{1-x^4}\frac{1-x^{16}}{1-x^8}\frac{1-x^{32}}{1-x^{16}}\frac{1-x^{64}}{1-x^{32}}$$

$$=\frac{1-x^{64}}{1-x}=(1+x+x^2+\cdots+x^{63})=\sum_{k=0}^{63}x^k$$

问题举例

从母函数可以得知，用这些砝码可以称出从1克到63克的重量，而且办法都是唯一的。

这问题可以推广到证明任一十进制数n，可表示为

$$n = \sum_{k \geq 0} a_k 2^k, \quad 0 \leq a_k \leq 1,\ k \geq 0$$

而且是唯一的。

问题举例

例: 整数n拆分成1，2，3，…，m的和，并允许重复，求其母函数。

若整数n拆分成1，2，3，…，m的和，并允许重复，其母函数为：$\boxed{(1-x)^{-1}=1+x+x^2+.....}$

$$G_1(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)\cdots$$

$$\cdots(1+x^m+x^{2m}+\cdots)$$

问题举例

如若其中m至少出现一次，其母函数如何？

$$\boldsymbol{G_2(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)\cdots(x^m+x^{2m}+\cdots)}$$

$$\boldsymbol{=\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}}$$

$$G_2(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}-\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^{m-1})}$$

上式的组合意义：即整数n拆分成1到m的和的拆分数减去拆分成1到m-1的和的拆分数，即为至少出现一个m的拆分数。

硬币的组合

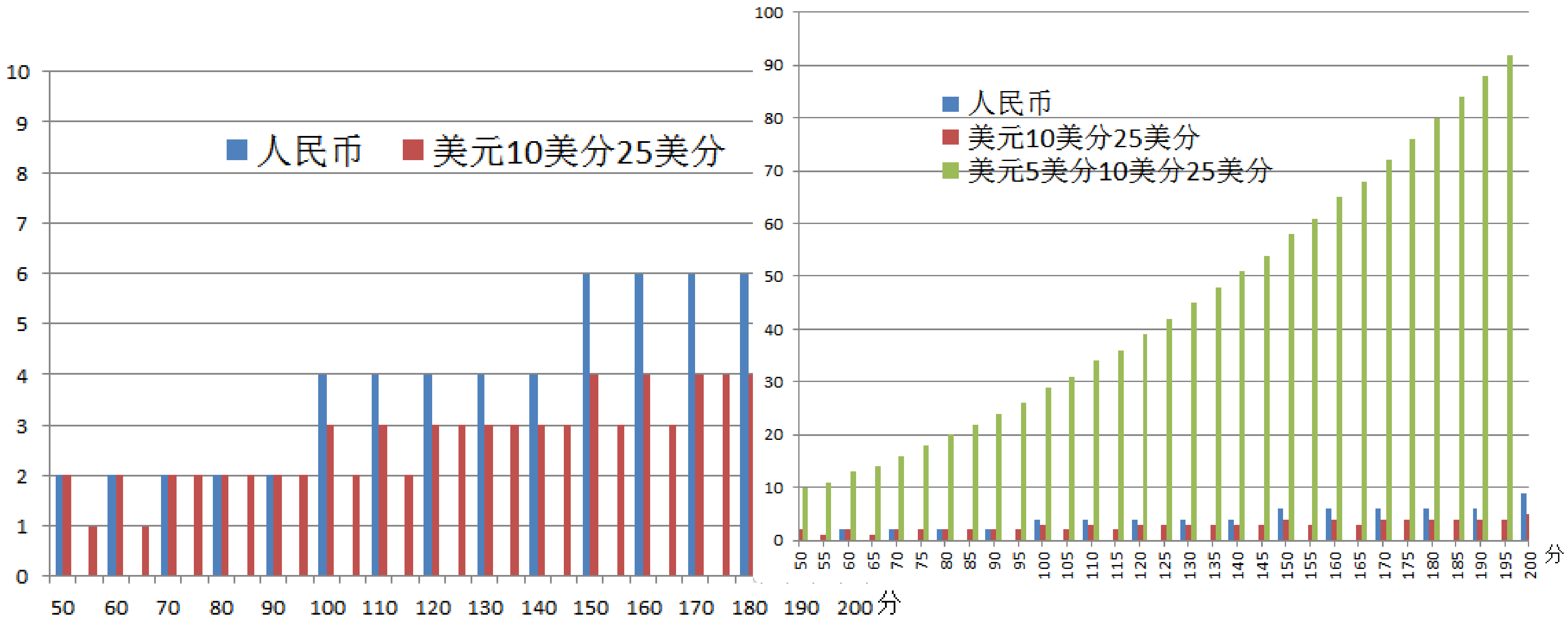
- 人民币常用硬币：1角，5角，1元。

- 人民币硬币的母函数

$$G(x)=(1+x^{10}+x^{20}+\ldots)(1+x^{50}+x^{100}+\ldots)(1+x^{100}+x^{200}+\ldots)$$

- 美元常用硬币： 1角，2角5分，

$$G(x)=(1+x^{5}+x^{10}+\ldots)(1+x^{10}+x^{20}+\ldots)(1+x^{25}+x^{50}+\ldots)$$



3 似函数，非函数

3-3 整数拆分

组合数学 Combinatorics

清华大学 马昱春

整数的拆分

所谓自然数(正整数)分拆,就是将一个正整数表达成若干个正整数之和:

各部分之间考虑顺序的叫有序分拆(Composition) ;

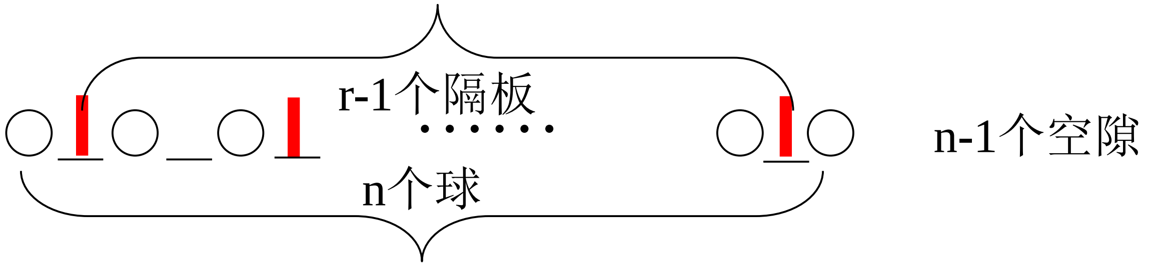
否则叫无序分拆(Partition).

3的有序2-拆分：3=2+1=1+2

n的有序r−拆分的个数是C(n-1,r-1)

n个球，要分成r份，

用r−1个隔板插入到球之间的n−1个空隙，方案数C(n−1, r−1)



放球模型： n的一个r-分拆相当于把n个无区别的球放到r个有标志的盒子，盒子不允许空着

有序拆分的放球模型： n的一个r-分拆相当于把n个无区别的球放到r个**有标志**的盒子，盒子不允许空着

- 无序分拆
- 3的无序2-拆分：3=2+1
- 3的所有无序拆分3=3+0+0=2+1+0=1+1+1
- $x_1+x_2+\ldots+x_r=n$的非负整数解个数？$C(n+r-1,n)$

n个1

1 ..1 | 1.. 1 | 1.. 1 | | 1..1

x_1个1

r-1个门框

相当于把n个无区别的球放到r个**有标志**的盒子，盒子允许空着

0+3+0

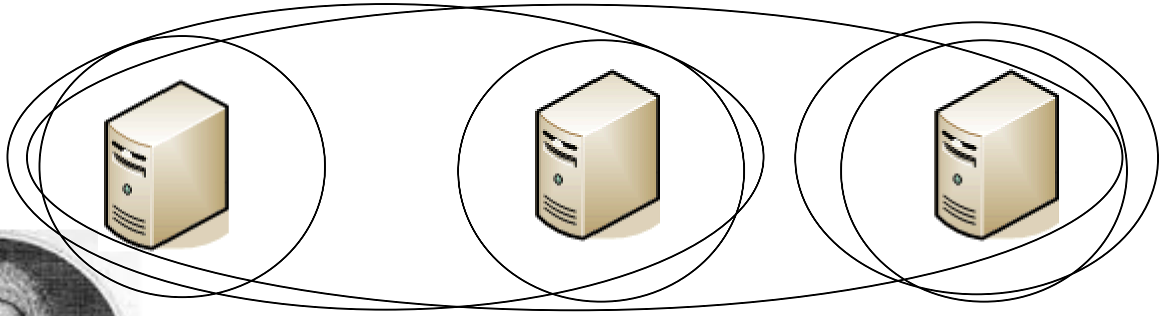
3+0+0

与无序拆分不同

所谓整数拆分(**partition** of a positive integer *n*)即把整数分解成若干整数的和，相当于把n个无区别的球放到n个无标志的盒子，盒子允许空着，也允许放多于一个球。整数拆分成若干整数的和，办法不一，不同拆分法的总数叫做拆分数。

§ 2. 母函数的应用：整数拆分数

- **正整数的无序拆分**：将一个正整数n拆分成若干正整数的和，数字之间顺序无关并允许重复，其不同的拆分数即$p(n)$。
  - 密码学，统计学，生物学……
- $p(3)=3$: 3，2 + 1，1 + 1 + 1.



诺地

1740年诺地在信中问欧拉：

整数的拆分方案数？

指数对应点数

欧拉

$$G(x) = (1+x+x^2+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)\ldots(1+x^m+x^{2m}+\ldots)\ldots$$ 中x^n的系数

“1”的母函数　“2”的母函数　“m”的母函数

Weil A．Number Theory：An Approach Thought History [M]．Boston：Birkhouser，1984．284

§ 2. 母函数的应用：整数拆分数

- OEIS: On-line Encyclopedia of Integer Sequences
  - 数论相关权威数据库和算法库
  - *p*(*n*): A000041序列
- 整数拆分*p*(*n*)的母函数

§ 2. 母函数的应用：整数拆分数

- OEIS: On-line Encyclopedia of Integer Sequences
  - 数论相关权威数据库和算法库
  - $p(n)$: A000041序列
- 整数拆分$p(n)$的母函数

$$G(x) = (1+x+x^2+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)\ (1+x^3+x^6+\ldots)\ \ldots\ (1+x^m+x^{2m})\ldots$$

数学家一度认为整数拆分数的计算很难有大的突破了。

欧拉的母函数方法虽然巧妙，但是并不适合计算$p(n)$ 。

多项式乘法的手工计算

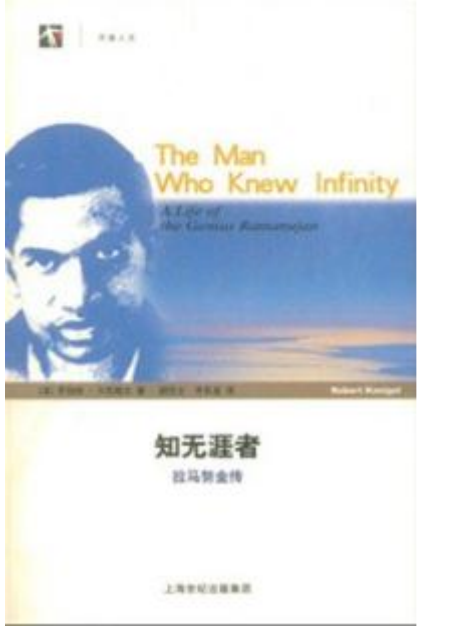
印度之子，拉玛努金（1887-1920）

“数学史甚至是科学史上最奇怪的人”

从未接受过正规数学训练的他具有惊人的数学直觉，独立发现了近3900个数学公式和命题。

2012年美国数学家Ken Ono和同事证明他临终前发现的一个函数可以被用来解释宇宙黑洞的部分奥秘。弦论

三大本笔记记录他所预见的数学命题，日后有许多得到了证实。如比利时数学家德利涅（V. Deligne）于1973年证明了拉马努金1916年提出的一个猜想，并因此获得了1978年的菲尔兹奖。



美国佛罗里达大学于1997年创办了《拉马努金期刊》，专门发表“受到他影响的数学领域”的研究

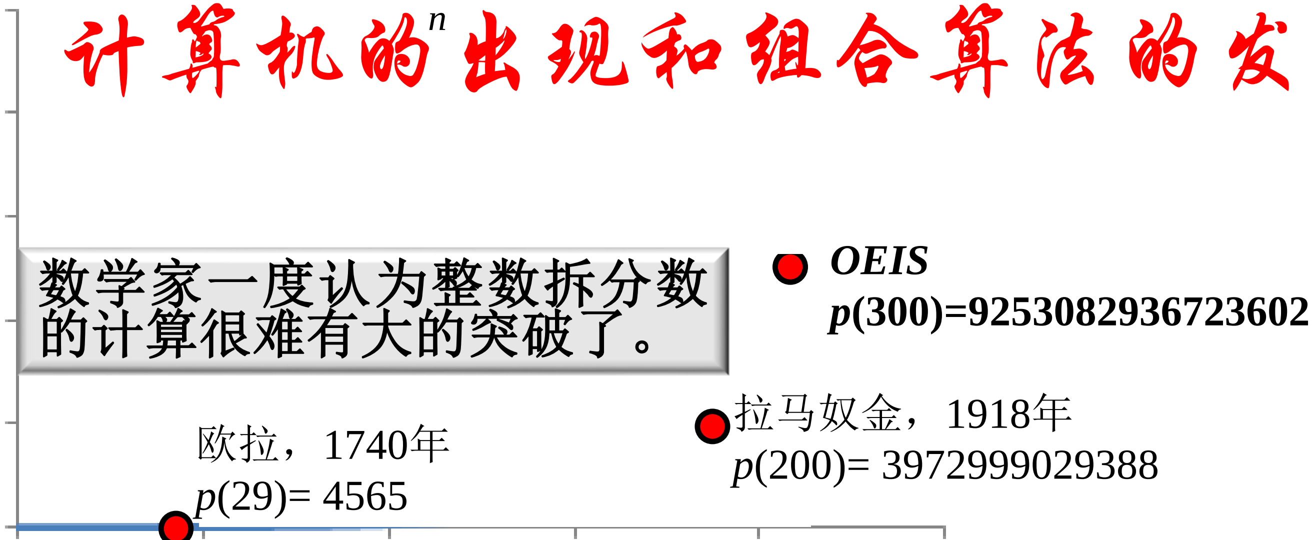
§ 2. 母函数的应用：整数拆分数

- OEIS: On-line Encyclopedia of Integer Sequences
  - 数论相关权威数据库和算法库
  - $p(n)$: A000041序列
- 整数拆分$p(n)$的母函数

$$G(x) = (1+x+2x^2+2x^3+2x^4+2x^4\ \ldots)(1+x^3+x^6+\ldots)\ldots(1+x^m+x^{2m})\ldots$$

$$(f*g)[k] = \sum^{n} f[i]g[k-i]$$

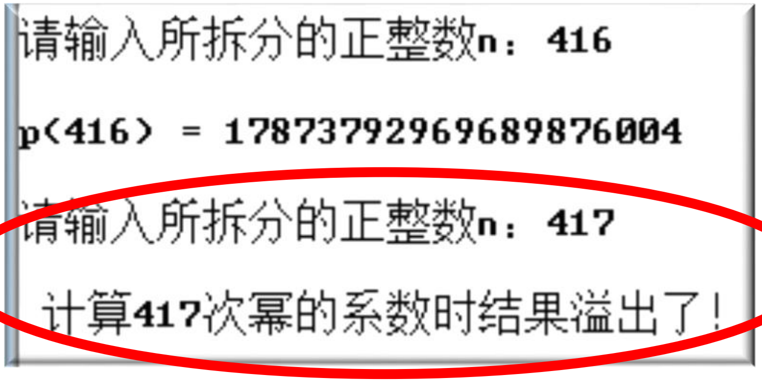
计算机的出现和组合算法的发展



欧拉的母函数方法虽然巧妙，但是并不适合计算$p(n)$ 。

多项式乘法的手工计算

§ 2. 母函数的应用：整数拆分数


请输入所拆分的正整数n：416

p(416) = 17873792969689876004

请输入所拆分的正整数n：417

计算417次幂的系数时结果溢出了！

计算机64位整型无符号整型

unsigned_int64 最大表示2^{64}-1

18,446,744,073,709,551,615

$p(416)$= **17,8**73,792,969,689,876,004

$p(417)$= **18,9**87,964,267,331,664,557

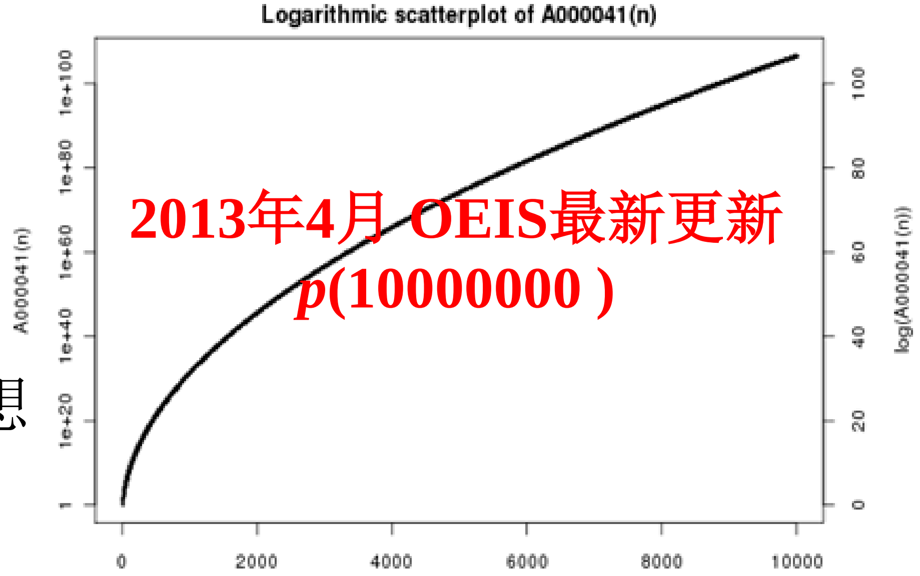
基于整型表示的多项式乘法算法只能运算到*p*(416)

- 整数拆分数能算到多大？

大数乘法的算法?

$$(f*g)[m]=\sum_{n} f[n]g[m-n]$$

- 相关猜想：BSD 猜想
  - Birch and Swinnerton-Dyer猜想
  - 数学界七大问题之一
  - 100万美元奖金



2013年4月 OEIS最新更新

***p*(10000000)**

你能精确计算出最大的整数拆分数是多少？

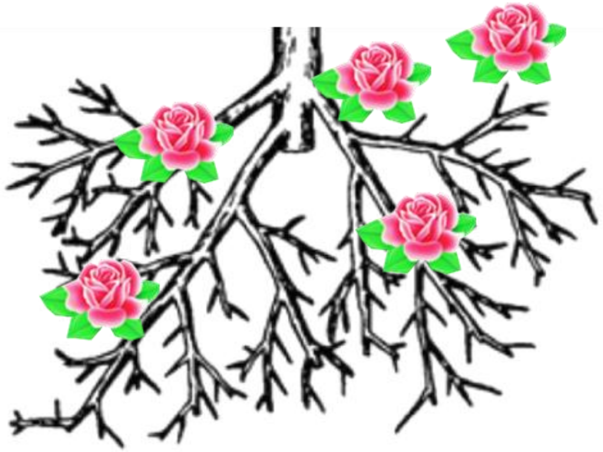
$$G(x)=x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+x^{12}$$

正看是根逆是树，古树新花相衬映

18世纪中叶欧拉
给出了函数符号

1718年约翰伯努力
“x的函数”

1694年莱布尼茨



组合计数算法微积展优雅繁顿具有了智慧

1812年拉普拉斯
提出母函数的概念

1740年左右欧拉
研究整数拆分

1705年前雅各布·
伯努利研究骰子

函数: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

母函数: $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

3 似函数，非函数

3-4 Ferrers图像

组合数学 Combinatorics

清华大学 马昱春

Ferrers图像

一个从上而下的n层格子，m_i为第i层的格子数，当$m_i \geq m_{i+1}, (i=1,2,\cdots n-1)$，即上层的格子数不少于下层的格子数时（**weakly decreasing**），称之为Ferrers图像（**Ferrers diagram**），如图(2-6-2)示。

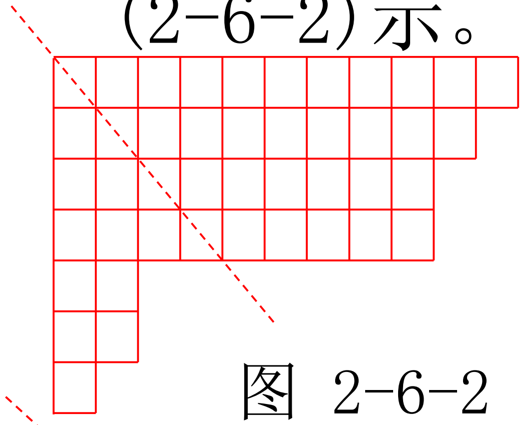
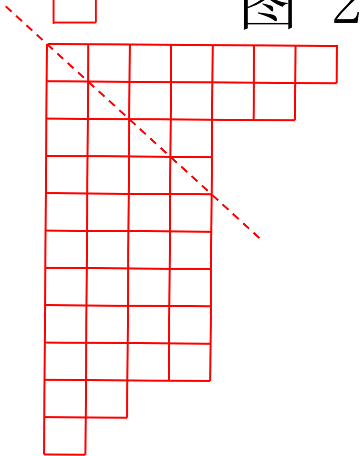


图 2-6-2



Ferrers图像具有如下性质：

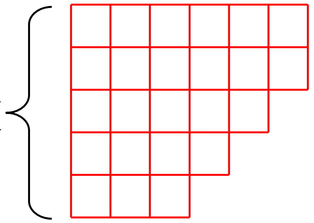
1. 每一层至少有一个格子。
2. 第一行与第一列互换，第二行于第二列互换，...，即图(2-6-2)绕虚线轴旋转所得的图仍然是Ferrers图像。两个Ferrers图像称为一对共轭的Ferrers图像。

§2.6.3 Ferrers图像

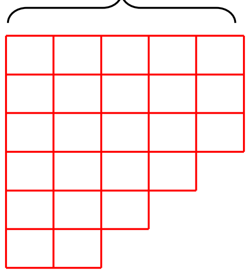
利用Ferrers图像可得关于整数拆分的十分有趣的结果。

(a)整数n拆分成最大数为k的拆分数，和数n拆分成k个数的和的拆分数相等。

因整数n拆分成k个数的和的拆分可用一k行的图像表示。所得的Ferrers图像的共轭图像最上面一行有k个格子。例如：



24=6+6+5+4+3　5个数，最大数为6



24=5+5+5+4+3+2　6个数，最大数为5

§2.6.3 Ferr

(b)整数n拆分成最多不超过m

和n拆分成最大不超过m的拆

理由和(a)相类似。

拆分成最多不超过m个数的和的拆分数的母函数是 $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$

§2.6.1 问题举例

例4: 整数n拆分成1，2，3，…，m的和，并允许重复，求其母函数。如若其中m至少出现一次，其母函数如何？

若整数n拆分成1，2，3，…，m的和，并允许重复，其母函数为：

$$G_1(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)\cdots$$
$$\cdots(1+x^m+x^{2m}+\cdots)$$
$$=\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\cdots\frac{1}{1-x^m}$$
$$=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$

45

拆分成最多不超过m-1个数的和的拆分数的母函数是

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^{m-1})}$$

所以正好拆分成m个数的和的拆分数的母函数为

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}-\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^{m-1})}=\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$

§ 2.6.1 问题举例

例4: 整数n拆分成1，2，3，…，m的和，并允许重复，求其母函数。如若其中m至少出现一次，其母函数如何？

若整数n拆分成1，2，3，…，m的和，并允许重复，其母函数为：

$$G_1(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)\cdots$$
$$\cdots(1 + x^m + x^{2m} + \cdots)$$
$$= \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\cdots\frac{1}{1-x^m}$$
$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$

§ 2.6.1 问题举例

若拆分中m至少出现一次，其母函数为：

$$G_2(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)\cdots(x^m + x^{2m} + \cdots)$$
$$= \frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$

$$G_2(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)} - \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^{m-1})} \quad (2-6-1)$$

等式(2-6-1)的组合意义：即整数n拆分成1到m的和的拆分数减去拆分成1到m-1的和的拆分数，即为至少出现一个m的拆分数。

§2.6.3 Ferrers图像

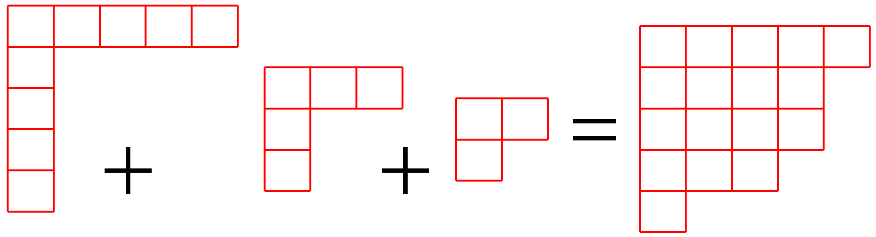
(c)整数n拆分成互不相同的若干奇数的和的拆分数，和n拆分成自共轭的Ferrers图像的拆分数相等.

设 $n=(2n_1+1)+(2n_2+1)+\cdots+(2n_k+1)$

其中 $n_1>n_2>\cdots>n_k$

构造一个Ferrers图像，其第一行，第一列都是n_1+1格，对应于$2n_1+1$，第二行，第二列各n_2+1格，对应于$2n_2+1$。以此类推。由此得到的Ferres图像是共轭的。反过来也一样。

例如 $17=9+5+3$ 对应为Ferrers图像为



9+5+3=17

3 似函数，非函数

3-5 母函数和递推关系

组合数学 Combinatorics

清华大学 马显春

二项式定理

$$(1+x)^{-1}=1-x+x^2+\cdots+(-1)^k x^k+\cdots$$

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+.....$$

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k+\cdots$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k \qquad \alpha\in R$$

$$(a)^n=a^n$$

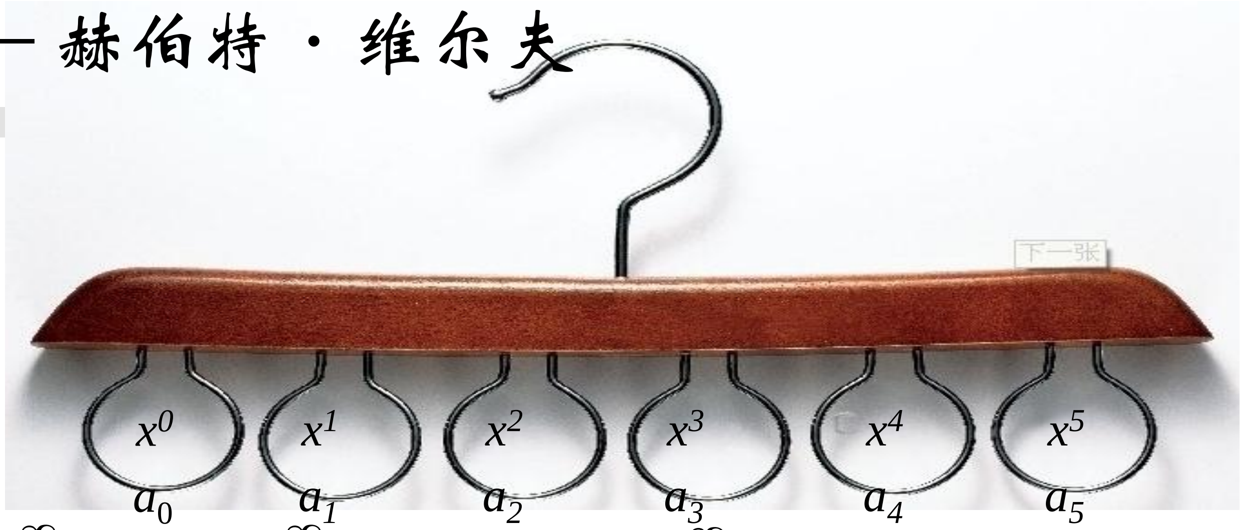
$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a^{n-k}b^k$$

$$(a+b+c)^n=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}\frac{n!}{l!(k-l)!(n-k)!}a^{n-k}b^{k-l}c^l$$

$$(a+b+c+d)^n=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}\sum_{m=0}^{l}\frac{n!}{m!(l-m)!(k-l)!(n-k)!}a^{n-k}b^{k-l}c^{l-m}d^m$$

母函数就是一列用来展示一串数字序列的挂衣架。

——赫伯特·维尔夫



- G(x)是计数序列$a_0,a_1,a_2\ldots$的母函数
  - **G(x)=$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots$**

$$(1-ax)^{-1}=1+ax+a^2x^2+\ldots..$$

$$\frac{2-3x}{(1-x)(1-2x)}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-2x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k+\sum_{k=0}^{\infty}2^kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}(1+2^k)x^k$$

$\dfrac{2-3x}{(1-x)(1-2x)}$是数列$f(k)=2^k+1$的母函数

母函数

$$\frac{2-3x}{(1-x)(1-2x)}$$

G(x)

部分分式分解

$$\Longleftrightarrow$$

$$(1-ax)^{-1}=1+ax+a^2x^2+\ldots..$$

$$\Longleftrightarrow ?$$

数字序列

$$f(k)=2^k+1$$

$$h(k)=2h(k-1)+1$$

递推序列

递推关系

递推关系(Recurrence Relation)：即差分方程(Difference equation), 是一种递推地定义一个**序列**的方程式：序列的每一项目定义为**前若干项**的函数。

- 例. Hanoi问题： 1883年法国数学家Edouard Lucas
  - 大梵天创造世界的时候做了三根金刚石柱子，在一根柱子上从下往上按照大小顺序摞着64片黄金圆盘。
  - 大梵天命令婆罗门把圆盘从下面开始按大小顺序重新摆放在另一根柱子上。
  - 在小圆盘上不能放大圆盘，在三根柱子之间一次只能移动一个圆盘。
  - **移动完毕之日，世界毁灭之时**
    - 设计算法;
    - 估计复杂性

摘自《从一到无穷大》

递推关系

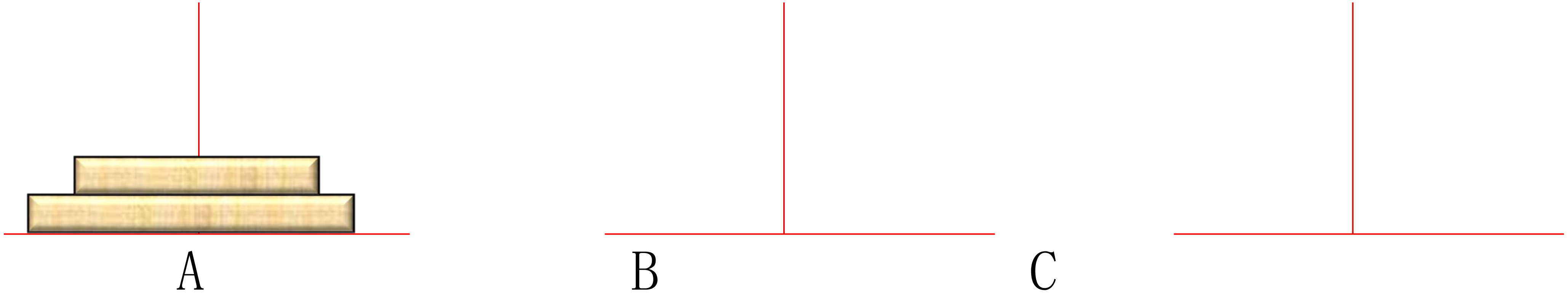
算法： N=2时

第一步先把最上面的一个圆盘套在B上

第二步把下面的一个圆盘移到C上

最后把B上的圆盘移到C上

到此转移完毕



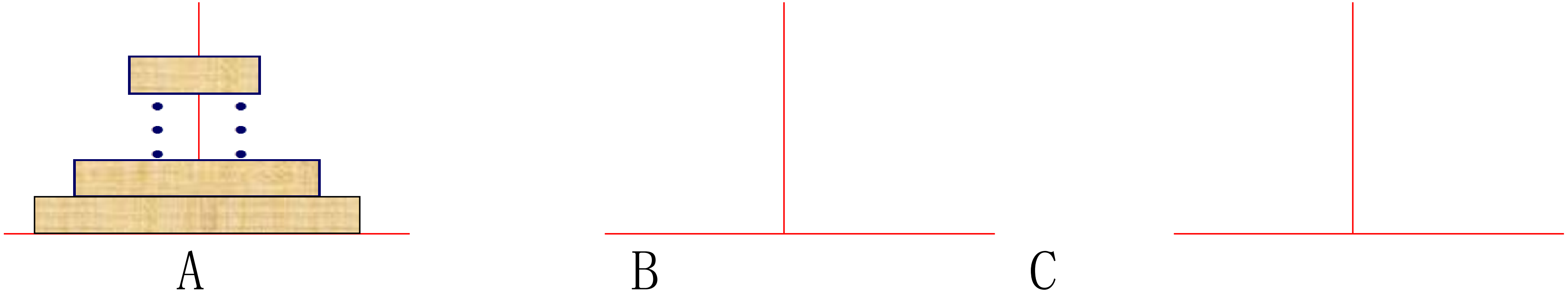
递推关系

$h(n)$表示n个圆盘所需要的转移盘次

- 假定n-1个盘子的转移算法已经确定复杂度为$h(n\text{-}1)$
  - 对于一般n个圆盘的问题,先把上面的n-1个圆盘经过C转移到B: $h(n\text{-}1)$
  - 第二步把A下面一个圆盘移到C上: $h(1)$
  - 最后再把B上的n-1个圆盘经过A转移到C上:$h(n\text{-}1)$

算法复杂度为: $h(n) = 2h(n-1)+1,\ h(1)=1$

构造母函数为: $H(x) = h(1)x + h(2)x^2 + h(3)x^3 + \cdots,$



$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+.....$$

$$h(n)=2h(n-1)+1,\ h(1)=1$$

$h(0)=0$

递推关系

假定这些幂级数在作四则运算时，一如有限项的代数式一样。

$$\begin{aligned} H(x) &= h(1)x+h(2)x^2+h(3)x^3+\cdots, \\ +)\ \ -2xH(x) &= \qquad\quad -2h(1)x^2-2h(2)x^3+\cdots, \end{aligned}$$

$$(1-2x)H(x)=h(1)x+[h(2)-2h(1)]x^2 +[h(3)-2h(2)]x^3+\cdots$$

$$\because\quad h(1)=1, h(2)-2h(1)=1, h(3)-2h(2)=1,\cdots$$

$$\therefore\quad (1-2x)H(x)=x+x^2+x^3+\cdots=x/(1-x)$$

$$\therefore\quad H(x)=\frac{x}{(1-2x)(1-x)}$$

$$h(n)=2h(n-1)+1,\ h(1)=1$$

递推关系

$h(0)=0$

$$H(x)=h(1)x+h(2)x^2+h(3)x^3+\cdots,$$

利用递推关系 $x^2: h(2)=2h(1)+1$

$x^3: h(3)=2h(2)+1$

+) ……………

上式左端为：

$$h(2)x^2+h(3)x^3+\cdots=H(x)-h(1)x=H(x)-x$$

右端第一项为：

$$2h(1)x^2+2h(2)x^3+\cdots=2x[h(1)x+h(2)x^2+\cdots]$$

$$=2xH(x)$$

右端第二项为：

$$x^2+x^3+\cdots=x^2/(1-x)$$

$$\therefore\quad H(x)-x=2xH(x)+x^2/(1-x)$$

$$H(x)=\frac{x}{(1-x)(1-2x)}$$

$$H(x)=\sum_{k=1}^{\infty}h(k)x^k=\frac{x}{(1-x)(1-2x)}$$ $$h(64)=18446744073709551615$$

如何从母函数得到序列? $h(1),h(2),\cdots$

化为部分分式的算法。

$$H(x)=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1-2x}=\frac{A(1-2x)+B(1-x)}{(1-x)(1-2x)}$$

$$=\frac{(A+B)-(2A+B)x}{(1-x)(1-2x)}$$

$$\therefore\quad (A+B)-(2A+B)x=x$$

由上式可得: $\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{cases}\Longrightarrow A=-1,\quad B=1.$

即: $$H(x)=\frac{1}{1-2x}-\frac{1}{1-x}$$

$$=(1+2x+2^2x^2+2^3x^3+\cdots)-(1+x+x^2+\cdots)$$

$$=(2-1)x+(2^2-1)x^2+(2^3-1)x^3+\cdots$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(2^k-1)x^k$$

$$\therefore\quad h(k)=2^k-1$$

§2.2 递推关系

例2. 求n位十进制数中出现偶数个5的数的个数。

先从分析n位十进制数出现偶数个5的数的结构入手

设$p_1p_2\cdots p_{n-1}$是n−1位十进制数，

若$p_1p_2\ldots p_{n-1}$含有偶数个5，则p_n取5以外的0，1，2，3，4，6，7，8，9九个数中的一个，

若$p_1p_2\ldots p_{n-1}$ 只有奇数个5，则p_n取5，使$p_1p_2\ldots p_{n-1}p_n$ 成为出现偶数个5的十进制数。

解法1：令a_n为n位十进制数中出现偶数个5的数的个数， b_n为n位十进制数中出现奇数个5的数的个数。

$$\begin{cases} a_n = 9a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n = 9b_{n-1} + a_{n-1} \end{cases}$$

设序列$\{a_n\}$的母函数为A(x)，序列$\{b_n\}$的母函数为B(x)。

$$\begin{cases} a_n = 9a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n = 9b_{n-1} + a_{n-1} \end{cases} \qquad a_1=8,\ b_1=1$$

$$\begin{aligned} A(x) &= a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots \\ -9xA(x) &= \qquad -9a_1x - 9a_2x^2 - \cdots \\ +)\quad -xB(x) &= \qquad -b_1x - b_2x^2 - \cdots \end{aligned}$$

$$(1-9x)A(x) - xB(x) = a_1 = 8$$

$$\begin{aligned} x &: \quad a_2 = 9a_1 + b_1 \\ x^2 &: \quad a_3 = 9a_2 + b_2 \\ x^3 &: \quad a_4 = 9a_3 + b_3 \\ +) & \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$A(x) - 8 = 9xA(x) + xB(x)$$

$$\therefore \quad \boxed{(1-9x)A(x) - xB(x) = 8}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= b_1 + b_2x + b_3x^2 + \cdots \\ -9xB(x) &= \qquad -9b_1x - 9b_2x^2 - \cdots \\ +)\quad -xA(x) &= \qquad -a_1x - a_2x^2 - \cdots \end{aligned}$$

$$\boxed{(1-9x)B(x) - xA(x) = 1}$$

递推关系

故得关于母函数A(x)和B(x)得方程组：

$$\begin{cases}(1-9x)A(x)-xB(x)=8\\ -xA(x)+(1-9x)B(x)=1\end{cases}$$

$$\therefore\quad D=\begin{vmatrix}1-9x & -x\\ -x & 1-9x\end{vmatrix}=(1-9x)^2-x^2=1-18x+80x^2$$

$$=(1-8x)(1-10x)$$

$$A(x)=\frac{1}{1-18x+80x^2}\begin{vmatrix}8 & -x\\ 1 & 1-9x\end{vmatrix}=\frac{-71x+8}{(1-8x)(1-10x)}$$

$$B(x)=\frac{1}{(1-8x)(1-10x)}\begin{vmatrix}1-9x & 8\\ -x & 1\end{vmatrix}=\frac{1-x}{(1-8x)(1-10x)}$$

$$\therefore\quad A(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{1-8x}+\frac{9}{1-10x}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(7\cdot 8^k+9\cdot 10^k)x^k$$

$$A(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots \qquad \therefore\quad a_k=\frac{7}{2}8^{k-1}+\frac{9}{2}10^{k-1}$$

递推关系

解法二：n-1位的十进制数的全体共$9\times10^{n-1}$个(最高位不为0)，设所求数为a_n,设$A(x)= a_1x+a_2x^2+\ldots$,按照尾数是否为5分类：

尾数不是为5的：$9a_{n-1}$

尾数为5的，前n-1位有奇数个5： $b_{n-1}=9\times10^{n-2}-a_{n-1}$

$$a_n=9a_{n-1}+9\times10^{n-2}-a_{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n=8a_{n-1}+9\times10^{n-2}, \qquad a_1=8$$

$$\begin{array}{ll} & x^2:\ a_2=8a_1+9 \\ & x^3:\ a_3=8a_2+90 \\ & x^4:\ a_4=8a_3+900 \\ +) & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hline \end{array}$$

$$A(x)-a_1x=8xA(x)+9x^2(1+10x+10^2x^2\ldots\ldots)$$

递推关系

$$\therefore \quad (1-8x)A(x) = 8x + \frac{9x^2}{1-10x}$$

$$\therefore \quad A(x) = \frac{x(8-71x)}{(1-8x)(1-10x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{7x}{1-8x} + \frac{9x}{1-10x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(7\cdot 8^{k-1} + 9\cdot 10^{k-1})x^k$$

$$\therefore \quad a_k = \frac{7}{2}\cdot 8^{k-1} + \frac{9}{2}\cdot 10^{k-1}$$

验证：a_1=8,a_2=73

总结

- **G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+……**
- 从G(x)得到序列{a_n}。关键在于要搭起从序列到母函数，从母函数到序列这两座桥。

$$x^2: h(2) = 2h(1) + 1$$
$$x^3: h(3) = 2h(2) + 1$$
$$+)\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h(k)x^k = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$$

$$= \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} = \sum_{k=1}^{\infty}(2^k - 1)x^k$$

$$(1-ax)^{-1} = 1 + ax + a^2x^2 + \ldots..$$

有理分式的分项表示

分母系数具有特征意义？

母函数方法对递推关系的适用性？