第十三章 递推方程与生成函数

主要内容

- 递推方程的定义及实例
- 递推方程的公式解法
- 递推方程的其他解法
- 生成函数及其应用
- 指数生成函数及其应用
- **Catalan数与Stirling数**

13.1递推方程的定义及实例

定义13.1 设序列 $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, 简记为$\{ a_n \}$. 一个把 a_n 与某些个a_i $(i<n)$ 联系起来的等式叫做关于序列 $\{ a_n \}$ 的**递推方程**. 当给定递推方程和适当的初值就唯一确定了序列.

Fibonacci数列：1，1，2，3，5，8，…，记作$\{ f_n \}$.

递推方程 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

初值 $f_0 = 1$，$f_1 = 1$

阶乘计算数列：1，2，6，24，5！，…，记作$\{ F(n)\}$

递推方程 $F(n) = nF(n-1)$

初值 $F(1) = 1$

递推方程的实例:Hanoi塔

例1 从A柱将这些圆盘移到C柱上去. 如果把一个圆盘从一个柱子移到另一个柱子称作一次移动，在移动和放置时允许使用B柱，但不允许大圆盘放到小圆盘的上面. 问把所有的圆盘的从A移到C总计需要多少次移动?

移动n个盘子的总次数为$T(n)$. 因此得到递推方程

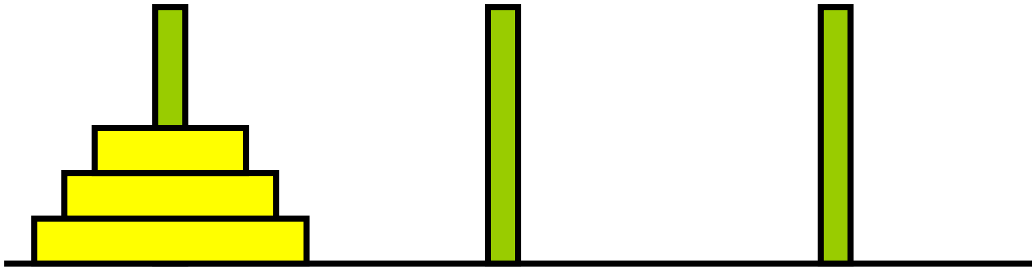
$$T(n) = 2T(n-1) + 1.$$

初值是

$$T(1)=1$$

可证明解是

$$T(n)=2^n-1$$



两个排序算法

插入排序算法 **INSERTION-SORT(*A*,*n*)**

1. for $j \leftarrow 2$ to n

2. $key \leftarrow A[j]$

3. $i \leftarrow j-1$

4 while $i > 0$ and $A[i] > key$

5. do $A[i+1] \leftarrow A[i]$; $i \leftarrow i-1$

7. $A[i+1] \leftarrow key$

归并算法 **Mergesort (*A*,*p*,*r*)** // 对A的下标p到r之间数排序

1. if $p<r$

2. then $q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$ //q为p到r的中点，

3. Mergesort(A,p,q)

4. Mergesort($A,q+1,r$)

5. Merge(A,p,q,r) // 归并排好序数组$A[p..q]$与$A[q+1..r]$

递推方程的实例:算法分析

例2 哪种排序算法在最坏情况下复杂度比较低?

插入排序，归并排序

插入排序

$$W(n) = W(n-1) + n - 1$$

$$W(1) = 0$$

解得 $W(n) = O(n^2)$.

归并排序，不妨设 $n = 2^k$.

$$W(n) = 2W(n/2) + n - 1$$

$$W(1) = 0$$

解得 $W(n) = O(n\log n)$

13.2 递推方程的公式解法

- 特征方程、特征根
- 递推方程的解与特征根的关系
- 无重根下通解的结构
- 求解实例
- 有重根下通解的结构
- 求解实例

常系数线性齐次递推方程

定义13.2 常系数线性齐次递推方程的标准形：

$$\begin{cases} H(n)-a_1H(n-1)-a_2H(n-2)-\ldots-a_kH(n-k)=0 \\ H(0)=b_0, H(1)=b_1, H(2)=b_2, \ldots, H(k-1)=b_{k-1} \end{cases}$$

其中 $a_1, a_2, \ldots, a_k$为常数，$a_k \neq 0$

称为 k 阶常系数线性齐次递推方程

$b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ 为 k 个初值

实例：Fibonacci 数列的递推方程

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \\ f_0 = 1,\ \ f_1 = 1 \end{cases}$$

特征方程与特征根

$$\begin{cases} H(n)-a_1H(n-1)-a_2H(n-2)-\ldots-a_kH(n-k)=0 \\ H(0)=b_0, H(1)=b_1, H(2)=b_2, \ldots, H(k-1)=b_{k-1} \end{cases}$$

定义13.3 特征方程 $x^k - a_1x^{k-1} - \ldots - a_k = 0$，

特征方程的根称为递推方程的 **特征根**

实例:

递推方程 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

特征方程 $x^2-x-1 = 0$

特征根 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

递推方程解与特征根的关系

定理13.1 设 q 是非零复数，则 q^n 是递推方程的解当且仅当 q 是它的特征根.

q^n是递推方程的解

$\Leftrightarrow q^n - a_1q^{n-1} - a_2q^{n-2} - \ldots - a_kq^{n-k} = 0$

$\Leftrightarrow q^{n-k}(q^k - a_1q^{k-1} - a_2q^{k-2} - \ldots - a_k) = 0$

$\Leftrightarrow q^k - a_1q^{k-1} - a_2q^{k-2} - \ldots - a_k = 0$ （因为$q\neq0$）

$\Leftrightarrow q$ 是它的特征根

定理13.2 设 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 是递推方程的解，c_1,c_2为任意常数, 则 $c_1h_1(n)+c_2h_2(n)$ 也是这个递推方程的解.

推论 若 $q_1, q_2, \ldots, q_k$ 是递推方程的特征根，则 $c_1q_1^n + c_2q_2^n + \ldots + c_kq_k^n$ 是该递推方程的解，其中$c_1, c_2, \ldots, c_k$ 是任意常数.

无重根下通解的结构

定义13.4 若对常系数线性齐次递推方程的每个解 $h(n)$ 都存在一组常数$c_1',c_2',\ldots, c_k'$ 使得

$$h(n) = c_1'q_1^n+c_2'q_2^n+\ldots+c_k'q_k^n$$

成立，则称 $c_1q_1^n + c_2q_2^n + \ldots + c_kq_k^n$ 为该递推方程的通解

定理13.3 设$q_1, q_2, \ldots, q_k$是常系数线性齐次递推方程不等的特征根，则

$$H(n)= c_1q_1^n + c_2q_2^n + \ldots + c_kq_k^n$$

为该递推方程的通解.

实例

例3 Fibonacci 数列：

$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$，特征根为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

通解为 $$f_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

代入初值 $f_0=1, f_1=1$, 得 $$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

解得 $$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

解是 $$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

有重根下求解中的问题

例4 $\begin{cases} H(n)-4H(n-1)+4H(n-2)=0 \\ H(0)=0, \quad H(1)=1 \end{cases}$

解 特征方程 $x^2-4x+4=0$

通解 $H(n)=c_1 2^n+c_2 2^n=c2^n$

代入初值得：

$$\begin{cases} c=0 \\ 2c=1 \end{cases}$$

c 无解.

问题：两个解线性相关

有重根下的通解结构

定理13.4 设 $q_1, q_2, \ldots, q_t$ 是递推方程的不相等的特征根，且 q_i 的重数为 e_i，$i=1, 2, \ldots, t$，令

$$H_i(n) = (c_{i_1} + c_{i_2} n + \ldots + c_{i_{e_i}} n^{e_i - 1}) q_i^n$$

那么通解

$$H(n) = \sum_{i=1}^{t} H_i(n)$$

求解实例

例5 求解以下递推方程

$$\begin{cases} H(n)+H(n-1)-3H(n-2)-5H(n-3)-2H(n-4)=0 \\ H(0)=1, H(1)=0, H(2)=1, H(3)=2 \end{cases}$$

解 特征方程 $x^4+x^3-3x^2-5x-2=0$，特征根$-1,-1,-1,2$

通解为 $H(n)=(c_1+c_2n+c_3n^2)(-1)^n+c_4 2^n$

其中待定常数满足以下方程组

$$\begin{cases} c_1+c_4=1 \\ -c_1-c_2-c_3+2c_4=0 \\ c_1+2c_2+4c_3+4c_4=1 \\ -c_1-3c_2-9c_3+8c_4=2 \end{cases} \Rightarrow \quad c_1=\frac{7}{9}, c_2=-\frac{1}{3}, c_3=0, c_4=\frac{2}{9}$$

原方程的解为 $H(n)=\frac{7}{9}(-1)^n-\frac{1}{3}n(-1)^n+\frac{2}{9}2^n$

常系数线性非齐次递推方程求解

- 递推方程的标准型
- 通解结构
- 特解的求法

  多项式函数

  指数函数

  组合形式

递推方程的标准型及通解

定理13.5 设

$H(n)-a_1H(n-1)-\ldots-a_kH(n-k)=f(n), n\geq k, a_k\neq 0, f(n)\neq 0.$

$\overline{H(n)}$ 是对应齐次方程的通解，$H^*(n)$是一个特解，则

$H(n)=\overline{H(n)}+H^*(n)$ 是递推方程的通解.

证 代入验证, $H(n)$是解. 下面证明任意解 $h(n)$ 为某个齐次解与特解$H^*(n)$之和. 设 $h(n)$为递推方程的解，则

$$
\begin{array}{l}
\quad h(n)-a_1h(n-1)-\ldots-a_kh(n-k)=f(n) \\
\underline{-)\ H^*(n)-a_1H^*(n-1)-\ldots-a_kH^*(n-k)=f(n)} \\
[h(n)-H^*(n)]-a_1[h(n-1)-H^*(n-1)]-\ldots \\
-a_k[h(n-k)-H^*(n-k)]=0
\end{array}
$$

$h(n)-H^*(n)$是齐次解，即 $h(n)$ 是一个齐次解与$H^*(n)$之和.

特解的形式：多项式

如果 $f(n)$为n次多项式，则特解一般也是 n 次多项式

例6 找出递推方程 $a_n - 2a_{n-1} = 2n^2$ 的通解

解 设 $a_n^* = P_1n^2 + P_2n + P_3$，代入递推方程得

$$P_1n^2 + P_2n + P_3 - 2[P_1(n-1)^2 + P_2(n-1) + P_3] = 2n^2$$

整理得

$$-P_1n^2+(4P_1-P_2)n+(-2P_1+2P_2-P_3) = 2n^2$$

$$\begin{cases} -P_1 = 2 \\ 4P_1 - P_2 = 0 \\ -2P_1 + 2P_2 - P_3 = 0 \end{cases}$$

解得 $P_1 = -2$, $P_2 = -8$, $P_3 = -12$，

原方程的通解为 $a_n = c2^n - 2(n^2+4n+6)$

实例

例7 Hanoi塔

$$T(n) = 2T(n-1)+1$$

$$T(1)=1$$

解 令 $T^*(n) = P$

代入方程

$$P = 2P + 1$$

解得 $P = -1$

$$T(n) = c\, 2^n-1,$$

代入初值得 $c=1$，解为 $T(n) = 2^n - 1$.

实 例(续)

例8 求解关于顺序插入排序算法的递推方程

$$\begin{cases} W(n) = W(n-1) + n - 1 \\ W(1) = 0 \end{cases}$$

解 设特解为$W^*(n)=P_1n+P_2$，代入递推方程，得

$$P_1n+P_2-(P_1(n-1)+P_2) = n-1$$

无解. 设特解$W^*(n) = P_1n^2+P_2n$, 代入递推方程得

$$(P_1n^2+P_2n)-(P_1(n-1)^2+P_2(n-1))= n-1$$

解得 $P_1=1/2$, $P_2= -1/2$. 通解为

$$W(n) = c\,1^n + n(n-1)/2 = c + n(n-1)/2$$

代入初值$W(1)=0$，得到$W(n)= n(n-1)/2=O(n^2)$.

特解的形式:指数

$f(n)$为指数函数 β^n，若β是 e 重特征根(e可以等于0)，则特解为$Pn^e\beta^n$，其中P为待定常数.

例9 通信编码问题

解 $a_n = 6a_{n-1} + 8^{n-1}$, $a_1=7$

设 $a^*_n = P\,8^{n-1}$，代入得 $P = 4$

通解 $a_n = c\cdot 6^n + 4\cdot 8^{n-1}$

代入初值得 $a_n = (6^n+8^n)/2$

例10 $H(n)-5H(n-1)+6H(n-2) = 2^n$,

解 令 $H^*(n)=Pn2^n$

代入得 $Pn2^n - 5P(n-1)2^{n-1} + 6P(n-2)2^{n-2} = 2^n$

解得 $P = -2$, 特解 $H^*(n) = -n2^{n+1}$

13.3 递推方程的其他解法

- 换元法
- 迭代归纳法
- 应用实例

换元法

思想：通过换元转化成常系数线性递推方程

例11 $\begin{cases} a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1 \\ a_0 = 2 \end{cases}$ $a_n>0$

解 令 $b_n = a_n^2$,

代入得 $b_n = 2\, b_{n-1} + 1$,
$b_0 = 4$

解得

$$b_n = 5 \cdot 2^n - 1$$

$$a_n = \sqrt{5 \cdot 2^n - 1}$$

换元法:实例

例12 归并排序

$$\begin{cases} W(n) = 2W(n/2) + n - 1,\ n = 2^k \\ W(1) = 0 \end{cases}$$

解 $H(k) = 2\,H(k-1) + 2^k - 1$

$H(1) = 1$

令 $H^*(k) = P_1 k 2^k + P_2$，解得 $P_1 = P_2 = 1$

$H^*(k) = k2^k + 1$

通解 $H(k) = c\,2^k + k2^k + 1$

代入初值得 $c = -1$

$H(k) = -2^k + k2^k + 1$

$W(n) = n \log n - n + 1$

迭代归纳法：归并排序

例13 $\begin{cases} W(n) = 2W(n/2) + n - 1, \ n = 2^k \\ W(1) = 0 \end{cases}$

解 $W(n) = 2W(2^{k-1}) + 2^k - 1$

$= 2[2W(2^{k-2}) + 2^{k-1} - 1] + 2^k - 1$

$= 2^2W(2^{k-2}) + 2^k - 2 + 2^k - 1$

$= 2^2[2W(2^{k-3}) + 2^{k-2} - 1] + 2^k - 2 + 2^k - 1$

$= 2^3W(2^{k-3}) + 2^k - 2^2 + 2^k - 2 + 2^k - 1$

$= \ldots$

$= 2^kW(1) + k2^k - (2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2 + 1)$

$= k2^k - 2^k + 1$

$= n\log n - n + 1$

迭代归纳法：错位排列

例14 $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$

解：

$$D_n - nD_{n-1} = -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}] = \ldots$$
$$= (-1)^{n-2}[D_2 - 2D_1] = (-1)^{n-2}$$

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, \quad D_1 = 0$$

$$D_n = n(n-1)D_{n-2} + n(-1)^n$$
$$= n(n-1)(n-2)D_{n-3} + n(n-1)(-1)^{n-2} + n(-1)^{n-1} + (-1)^n$$
$$= \ldots$$
$$= n(n-1)\ldots 2D_1 + n(n-1)\ldots 3(-1)^2 + n(n-1)\ldots 4(-1)^3 +$$
$$\ldots + n(-1)^{n-1} + (-1)^n$$
$$= n![1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}]$$

快速排序算法

算法 **Quicksort** (A,p,r) // p 和 r 分别表示A首和末元素下标

1. **if** $p < r$
2. **then** $q \leftarrow$ Partition(A, p, r) // 划分为$A[p..q-1]$和$A[q+1..r]$
3. $A[p] \leftrightarrow A[q]$
4. Quicksort$(A,p,q-1)$
5. Quicksort$(A,q+1,r)$

划分过程

算法 Partition(A,p,r)

1. $x \leftarrow A[p]$ //选首元素作为划分标准x
2. $i \leftarrow p-1$
3. $j \leftarrow r+1$
4. while true
5. do repeat $j \leftarrow j-1$
6. until $A[j] < x$ //$A[j]$是从后找的第一个比x小元素
7. repeat $i \leftarrow i+1$
8. until $A[i] > x$ //$A[i]$是从前找的第一个比x大的元素
9. if $i < j$ // 继续搜索$A[i]$到$A[j]$之间的范围
10. then $A[i] \leftrightarrow A[j]$ // $A[i]$与$A[j]$交换，回到行4
11. else return j //结束While循环

实例

27	99	0	8	13	64	86	16	7	10	88	25	90
	i										*j*	
27	25	0	8	13	64	86	16	7	10	88	99	90
					i				*j*			
27	25	0	8	13	10	86	16	7	64	88	99	90
						i		*j*				
27	25	0	8	13	10	7	16	86	64	88	99	90
							j	*i*				
16	25	0	8	13	10	7	27	86	64	88	99	90

平均情况时间复杂度分析

递推方程

$$\begin{cases} T(n)=\dfrac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}T(i)+O(n), & n\geq 2 \\ T(1)=0 \end{cases}$$

差消法化简

$$nT(n)=2\sum_{i=1}^{n-1}T(i)+cn^2$$

c为某个常数

$$(n-1)T(n-1)=2\sum_{i=1}^{n-2}T(i)+c(n-1)^2$$

$$nT(n)=(n+1)T(n-1)+O(n)$$

$$\frac{T(n)}{n+1}=\frac{T(n-1)}{n}+\frac{c}{n+1}$$

迭代求解

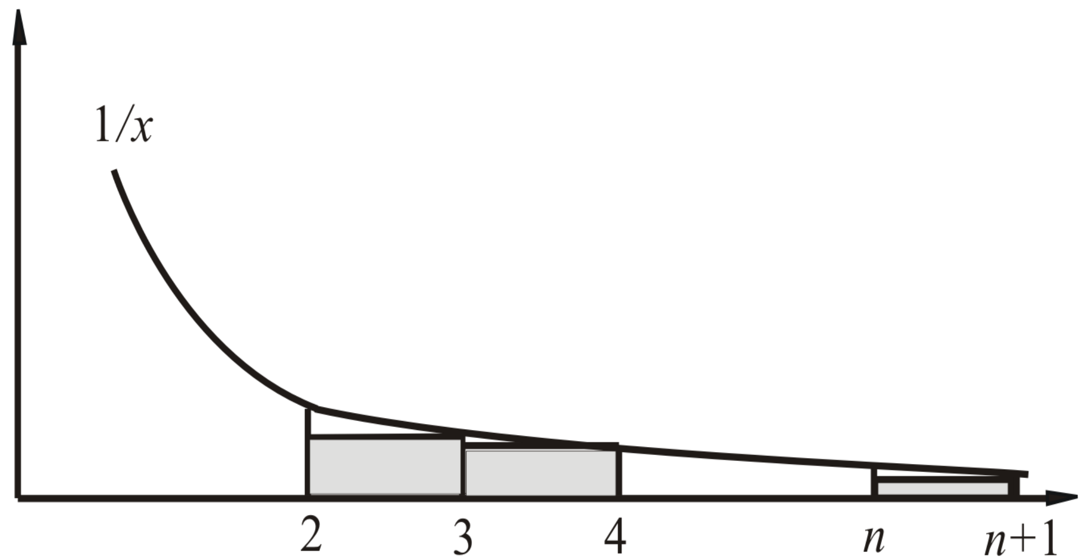
$$\frac{T(n)}{n+1}=c[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{3}+\frac{T(1)}{2}]=c\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{3}\right]$$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{3}$$

$$\le\int_2^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_2^{n+1}$$

$$=\ln(n+1)-\ln 2$$

$$=O(\log n)$$



$$T(n)=O(n\log n)$$

递归树

$$W(n) = 2W(n/2) + n - 1,\ n = 2^k,\quad W(1) = 0$$

$$n-1 \qquad\qquad n-1$$

$$\frac{n}{2}-1 \qquad \frac{n}{2}-1 \qquad\qquad n-2$$

$$\frac{n}{4}-1 \qquad \frac{n}{4}-1 \qquad \frac{n}{4}-1 \qquad \frac{n}{4}-1 \qquad\qquad n-4$$

$$\cdots$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \cdots \qquad 1 \qquad\qquad n-2^{k-1}$$

$$W(n) = n\,k - (1+2+\ldots+2^{k-1}) = nk - (2^k - 1) = n \log n - n + 1$$

13.4 生成函数及其应用

- 牛顿二项式系数与牛顿二项式定理
- 生成函数的定义
- 生成函数的应用

牛顿二项式系数

定义13.5 设 r 为实数，n为整数，引入形式符号

$$\binom{r}{n}=\begin{cases}0 & n<0\\ 1 & n=0\\ \dfrac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!} & n>0\end{cases}$$

称为牛顿二项式系数.

实例

$$\binom{-2}{5}=\frac{(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)}{5!}=-6$$

$$\binom{1/2}{4}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{4!}=\frac{1(-1)(-3)(-5)}{2^4 4!}=\frac{-5}{128}$$

$$\binom{4}{3}=\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3!}=4$$

牛顿二项式定理

定理13.6 （牛顿二项式定理）

设α为实数，则对一切实数x, y，$|x/y|<1$，有

$$(x+y)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^{n}y^{\alpha-n}，\quad 其中\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

若$\alpha=-m$，其中m为正整数，那么

$$\binom{\alpha}{n}=\binom{-m}{n}=\frac{(-m)(-m-1)\ldots(-m-n+1)}{n!}$$

$$=\frac{(-1)^{n}m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!}=(-1)^{n}\binom{m+n-1}{n}$$

重要展开式

令x=z，y=1，那么牛顿二项式定理就变成

$$(1+z)^{-m}=\frac{1}{(1+z)^m}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{m+n-1}{n}z^n \qquad |z|<1$$

在上面式子中用$-z$代替 z，则有

$$(1-z)^{-m}=\frac{1}{(1-z)^m}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n-1}{n}z^n \qquad |z|<1$$

$$m=1,\quad \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots$$

$$m=2,\quad \frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

生成函数定义

定义13.6 设序列$\{a_n\}$，构造形式幂级数

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

称$G(x)$为序列$\{a_n\}$的**生成函数**.

例如，

$\{ C(m,n) \}$的生成函数为 $(1+x)^m$

给定正整数k, $\{ k^n \}$的生成函数为 $\dfrac{1}{1-kx}$

$$G(x) = 1 + kx + k^2x^2 + k^3x^3 + \ldots = \frac{1}{1-kx}$$

由序列求生成函数

例14 求序列$\{a_n\}$的生成函数

(1) $a_n = 7\cdot 3^n$ (2) $a_n = n(n+1)$

解

(1) $$G(x)=7\sum_{n=0}^{\infty}3^n x^n=7\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n=\frac{7}{1-3x}$$

(2) $$\int_0^x G(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+1}=x^2H(x),\quad H(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

$$\int_0^x H(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x}{1-x},\quad H(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\int_0^x G(x)dx=\frac{x^2}{(1-x)^2},\qquad G(x)=\left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)'=\frac{2x}{(1-x)^3}$$

由生成函数求序列通项

例15 已知 $\{a_n\}$ 的生成函数为

$$G(x)=\frac{2+3x-6x^2}{1-2x}$$

求 a_n

解

$$G(x)=\frac{2+3x-6x^2}{1-2x}=\frac{2}{1-2x}+3x$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n+3x=\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}x^n+3x$$

$$a_n=\begin{cases}2^{n+1}, & n\neq 1\\ 2^2+3=7, & n=1\end{cases}$$

生成函数的应用

- 求解递推方程
- 计数多重集的 *r* 组合数
- 不定方程的解
- 整数拆分

求解递推方程

例16 $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$，$a_0 = 1, a_1 = -2$

$$
\begin{aligned}
G(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots \\
-5x\,G(x) &= \quad -5a_0x - 5a_1x^2 - 5a_2x^3 - \ldots \\
6x^2\,G(x) &= \qquad\qquad +6a_0x^2 + 6a_1x^3 + \ldots
\end{aligned}
$$

$$(1-5x+6x^2)G(x) = a_0 + (a_1-5a_0)x$$

$$G(x) = \frac{1-7x}{1-5x+6x^2} = \frac{5}{1-2x} - \frac{4}{1-3x}$$

$$= 5\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

$$a_n = 5 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n$$

求解递推方程

例17
$$\begin{cases} h_n = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}, & n \ge 2 \\ h_1 = 1 \end{cases}$$

解：设 $\{h_n\}$ 的生成函数为 $H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n$

$$H^2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k x^k \cdot \sum_{l=1}^{\infty} h_l x^l$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} x^n \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k} = \sum_{n=2}^{\infty} h_n x^n$$

$$= H(x) - h_1 x = H(x) - x$$

求解递推方程

$$H^2(x) - H(x) + x = 0,$$

$$H(x) = \frac{1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-4x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} (-4x)^n]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^{2n}} \binom{2n-2}{n-1} (-1)^n 2^{2n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n$$

$$h_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$$

多重集的 r 组合数

$S = \{ n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k \}$ 的 r 组合数就是不定方程

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = r$$

$$x_i \le n_i \quad i = 1,2,\ldots,k$$

的非负整数解的个数

生成函数

$$G(y) = (1 + y + \ldots + y^{n_1})(1 + y + \ldots + y^{n_2})\ldots(1 + y + \ldots + y^{n_k})$$

的展开式中 y^r 的系数

实例

例18 $S = \{ 3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c \}$ 的10 组合数

解：生成函数$G(y)$

$$= (1+y+y^2+y^3)(1+y+y^2+y^3+y^4)(1+y+y^2+y^3+y^4+y^5)$$

$$= (1+2y+3y^2+4y^3+4y^4+3y^5+2y^6+y^7)(1+y+y^2+y^3+y^4+y^5)$$

$$= (1 + \ldots +3y^{10}+2y^{10}+y^{10} + \ldots)$$

$N = 6$

组合方案

$\{ a, a, a, b, b, b, b, c, c, c \}$, $\{ a, a, a, b, b, b, c, c, c, c \}$,

$\{ a, a, a, b, b, c, c, c, c, c \}$, $\{ a, a, b, b, b, b, c, c, c, c \}$,

$\{ a, a, b, b, b, c, c, c, c, c \}$, $\{ a, b, b, b, b, c, c, c, c, c \}$

不定方程解的个数

基本的不定方程

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = r\text{，}\quad x_i \text{为自然数}$$

$$G(y) = (1 + y + \ldots)^k = \frac{1}{(1-y)^k}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-k)(-k-1)\ldots(-k-r+1)}{r!}(-y)^r$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (k)(k+1)\ldots(k+r-1)}{r!}(-1)^r y^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{r} y^r$$

$$N = \binom{k+r-1}{r}$$

推广的不定方程

带限制条件的不定方程

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = r,\ \ l_i \le x_i \le n_i$$

生成函数

$$G(y) = (y^{l_1} + y^{l_1+1} + \ldots + y^{n_1})(y^{l_2} + y^{l_2+1} + \ldots + y^{n_2})$$
$$\ldots(y^{l_k} + y^{l_k+1} + \ldots + y^{n_k})$$

带系数的不定方程

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_kx_k = r,\ \ x_i \in N$$

生成函数

$$G(y) = (1 + y^{p_1} + y^{2p_1} + \ldots)(1 + y^{p_2} + y^{2p_2} + \ldots)$$
$$\ldots(1 + y^{p_k} + y^{2p_k} + \ldots)$$

实例

例19 1克砝码2个，2克砝码1个，4克砝码2个，问能称出哪些重量，方案有多少？

解：$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = r$

$$0 \le x_1 \le 2,\ 0 \le x_2 \le 1,\ 0 \le x_3 \le 2$$

$$G(y) = (1+y+y^2)(1+y^2)(1+y^4+y^8)$$

$$= 1+y+2y^2+y^3+2y^4+y^5+2y^6+y^7+2y^8+y^9+2y^{10}+y^{11}+y^{12}$$

重量	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
方案	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	1

正整数拆分

拆分的定义：将给定正整数N表示成若干个正整数之和.

	有序	无序
不重复	4 = 4 4 = 1+3 4 = 3+1	4 = 4 4 = 1+3
重复	4 = 4 4 = 1+3 4 = 3+1 4 = 2+2 4 = 2+1+1 4 = 1+2+1 4 = 1+1+2 4 = 1+1+1+1	4 = 4 4 = 1+3 4 = 2+2 4 = 2+1+1 4 = 1+1+1+1

无序拆分

基本模型：将N无序拆分成正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = N$$

不允许重复

$$G(y) = (1 + y^{a_1})(1 + y^{a_2})\ldots(1 + y^{a_n})$$

允许重复

$$G(y) = (1 + y^{a_1} + y^{2a_1} + \ldots)(1 + y^{a_2} + y^{2a_2} + \ldots)$$

$$\ldots(1 + y^{a_n} + y^{2a_n} + \ldots)$$

$$= \frac{1}{(1 - y^{a_1})(1 - y^{a_2})\ldots(1 - y^{a_n})}$$

实例

例20 证明任何正整数都可以唯一表示成 2 进制数.

对应于将任何正整数N拆分成 2 的幂,

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots,$$

且不允许重复.

生成函数

$$G(y) = (1+y)(1+y^2)(1+y^4)(1+y^8)\ldots$$

$$= \frac{1-y^2}{1-y}\frac{1-y^4}{1-y^2}\frac{1-y^8}{1-y^4}\ldots$$

$$= \frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n$$

对于所有的 n, 系数是1，这就证明唯一的表法.

无序拆分：个数限制

例21 给定*r*, 求*N*允许重复无序拆分成 *k*个数 (*k*≤*r*)的方法数

解 *N*允许重复无序拆分成 *k*个数（*k*≤*r*）的方案

⇔ *N*允许重复无序拆分成正整数 *k*（*k*≤*r*）的方案

做下述 **Ferrers图**

将图以 *y* =*x* 对角线翻转180度，

得到 **共轭的Ferrers图**.

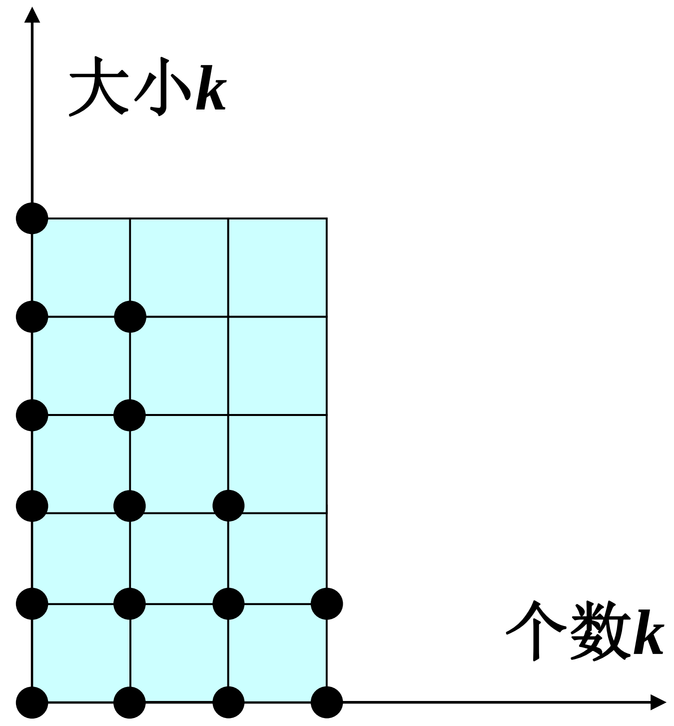
16 = 6+5+3+2 （$k \le 4$）

对应每个数不超过4的拆分:

16 = 4+4+3+2+2+1

这种拆分数的生成函数为

$$G(y)=\frac{1}{(1-y)(1-y^2)\ldots(1-y^r)}$$



有序拆分

定理13.7 将N允许重复地有序拆分成 r 个部分的方案数为

$$C(N-1,r-1).$$

证 设 $N= a_1+a_2+\ldots+a_r$ 是满足条件的拆分，则令

$$S_i=\sum_{k=1}^{i} a_i,\quad i=1,2,\ldots,r$$

$$0<S_1<S_2<\ldots<S_r=N$$

$r-1$个S_i取值为$1,2,\ldots,N-1$，方法数为 $C(N-1,r-1)$.

推论 对N 做任意重复的有序拆分，方案数为

$$\sum_{r=1}^{N}\binom{N-1}{r-1}=2^{N-1}$$

不允许重复有序拆分：不允许重复无序拆分 + 全排列

13.5 指数生成函数及其应用

- 指数生成函数的定义与实例
- 指数生成函数的应用

指数生成函数的定义与实例

定义13.7 设$\{a_n\}$为序列，称 $$G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

为$\{a_n\}$的**指数生成函数**.

例22 给定正整数m, $a_n = P(m,n)$, $\{a_n\}$的指数生成函数为

$$G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty} P(m,n)\frac{x^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m!}{n!(m-n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n=(1+x)^m$$

例23 $b_n=1$, 则$\{b_n\}$的指数生成函数为 $$G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$$

应用：多重集排列计数

定理13.8 设 $S = \{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots , n_k\cdot a_k\}$为多重集，则 S 的 r 排列数的指数生成函数为

$$G_e(x) = f_{n_1}(x) f_{n_2}(x) \ldots f_{n_k}(x)$$

$$f_{n_i}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n_i}}{n_i!} \quad i = 1, 2, \ldots , k$$

实例

例24 由1, 2, 3, 4 组成的五位数中，要求1出现不超过2次，但不能不出现，2出现不超过1次，3出现可达3次，4出现偶数次. 求这样的五位数个数.

解
$$G_e(x)=(x+\frac{x^2}{2!})(1+x)(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!})$$
$$=x+5\frac{x^2}{2!}+18\frac{x^3}{3!}+64\frac{x^4}{4!}+215\frac{x^5}{5!}+\dots$$

$N=215$

实例

例25 红、白、兰涂色 $1\times n$ 的方格，要求偶数个为白色，问有多少方案?

解 设方案数为a_n

$$G_e(x)=(1+\frac{x^2}{2!}+\ldots)(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots)^2$$

$$=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})e^{2x}=\frac{1}{2}e^{3x}+\frac{1}{2}e^x$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}3^n\frac{x^n}{n!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\frac{3^n+1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$a_n=\frac{3^n+1}{2}$$

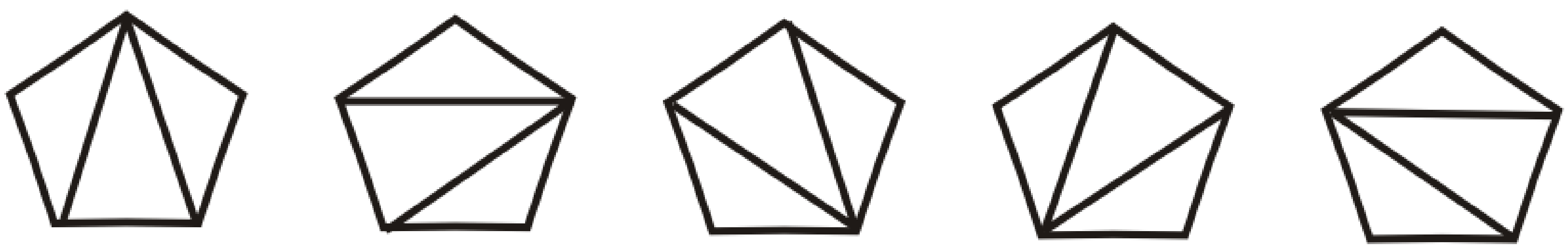
13.6 Catalan数与Stirling数

- **Catalan数**
- **第一类 Stirling数**
- **第二类 Stirling数**

Catalan数定义

定义13.8 一个凸 n+1边形，通过不相交于n+1 边形内部的对角线把 n+1 边形划分成三角形，划分方案个数记作h_n，称为**Catalan数**.

实例：h_4=5



初值 h_2=1

Catalan数的递推方程

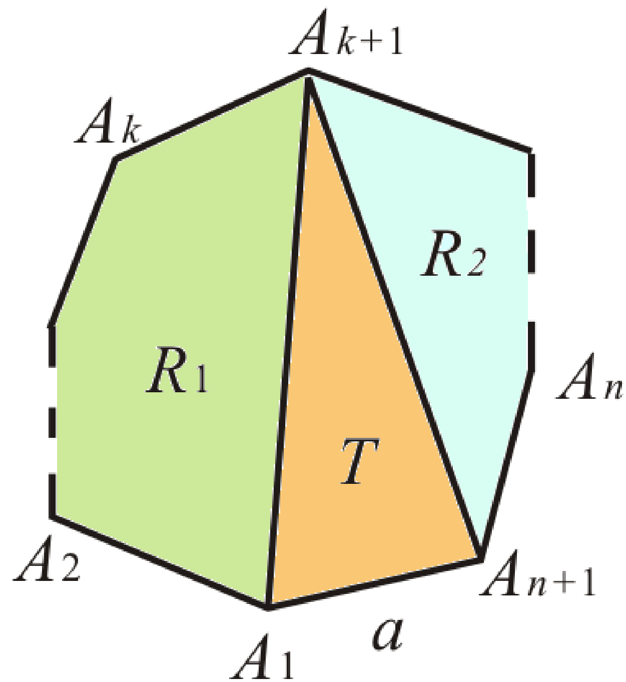
考虑n+1条边的多边形，端点A_1, A_{n+1}的边记为a, 对于任意的 k=1, 2,…, n–1，以$A_{k+1}A_1$为边，$A_{n+1}A_{k+1}$为另一边，与a构成三角形T, T 将多边形划分成 R_1和 R_2两个部分，分别为 k+1 边形和 n–k+1边形.

递推方程

$$h_n = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}, \quad n \geq 2$$

$$h_1 = 1$$

解：$h_n = \dfrac{1}{n}\dbinom{2n-2}{n-1}$



实例：计数堆栈的输出个数

例26 1, 2, … , n放入堆栈后的不同的输出个数

解 在 1 进栈到出栈之间作为一个子问题，1出栈后作为一个子问题. 过程如下：

1. 1 进栈；
2. 处理 k个数（2, … , k+1）的进栈问题；
3. 1 出栈；
4. 处理 k+2, … , n 的进栈问题；

步2：子问题规模 k，步4：子问题规模 n–k–1

$$\begin{cases} T(n)=\sum_{k=0}^{n-1}T(k)T(n-1-k) \\ T(1)=1 \end{cases}$$

求解递推方程

$$\begin{cases} T(n)=\sum_{k=0}^{n-1}T(k)T(n-1-k) \\ T(0)=1, \quad T(1)=1 \end{cases} \qquad G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}T(n)x^n,$$

$$G^2(X)=(\sum_{k=0}^{\infty}T(k)x^k)(\sum_{l=0}^{\infty}T(l)x^l)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}(\sum_{k=0}^{n-1}T(k)T(n-1-k))$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}T(n)x^{n-1}=\frac{G(x)-1}{x}$$

$$xG^2(x)-G(x)+1=0 \Rightarrow 2xG(x)=1\pm\sqrt{1-4x},$$

由于 $G(0)\to 0, \quad 2xG(x)=1-\sqrt{1-4x}$

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n, \quad T(n)=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

第一类Stirling数

定义13.9 多项式 $x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$ 的展开式为

$$S_n x^n - S_{n-1}x^{n-1} + S_{n-2}x^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}S_1 x$$

将 x^r 系数的绝对值 S_r 记作 $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$，称为**第一类 Stirling数**

实例

$$x(x-1) = x^2-x$$

$$x(x-1)(x-2) = x^3-3x^2+2x$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0,\ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1,\ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 0,\ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 2,\ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3,\ \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 1$$

第一类Stirling数的递推方程

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix} \quad n > r \geq 1$$

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$$

$$x(x-1)...(x-n+2) = \begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} x^{n-1} - \begin{bmatrix} n-1 \\ n-2 \end{bmatrix} x^{n-2} + ...$$

$$x(x-1)...(x-n+2)(x-n+1)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} x^{n-1} - \begin{bmatrix} n-1 \\ n-2 \end{bmatrix} x^{n-2} + ... \right)(x-n+1)$$

其中 x^r 的系数 $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}$.

第一类Stirling数的恒等式

恒等式

(1) $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1,$

(2) $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

(3) $\sum_{r=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = n!$

证：(1) x 的 n 次方系数为 1；

(2) x 的 n–1 次方系数为 $1 + 2 + \ldots + n-1 = n(n-1)/2$

(3) 的证明利用置换的计数，见 14 章.

第二类Stirling数定义

定义13.10 n 个不同的球恰好放到 r 个相同的盒子里的方法

数称为**第二类Stirling数**，记作 $\left\{ {n \atop r} \right\}$

实例 $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$

具体方案如下：

a,b,c | d　a,c,d | b　a,b,d | c　b,c,d | a

a,b | c,d　a,c | b,d　a,d | b,c

第二类Stirling数递推方程

递推方程 $$\left\{ {n \atop r} \right\} = r\left\{ {n-1 \atop r} \right\} + \left\{ {n-1 \atop r-1} \right\}$$

$$\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0, \quad \left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$$

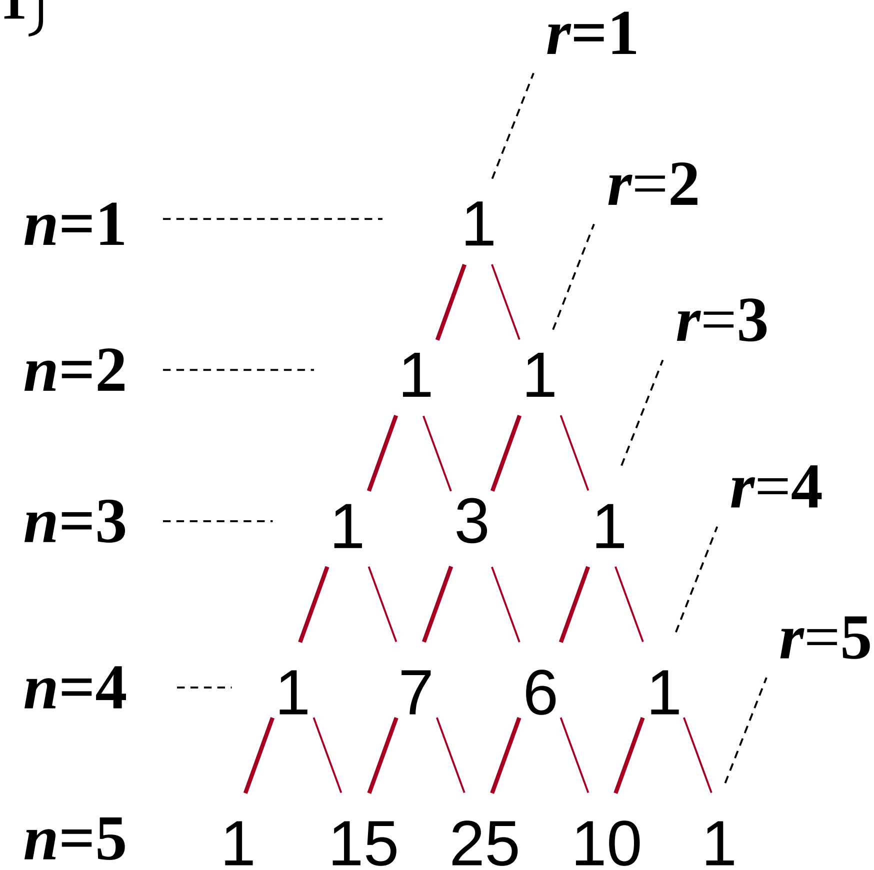
证明：取球a_1，

a_1单独放一个盒子，$\left\{ {n-1 \atop r-1} \right\}$

a_1不单独放一个盒子，

先放$n-1$个球到 r 个盒子，

插入a_1有 r 种方法，$r\left\{ {n-1 \atop r} \right\}$



第二类Stirling数恒等式

1. $\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1$

2. $\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{2}$

3. $\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1$

4. $\sum \binom{n}{n_1\ n_2 \ldots n_m} = m! \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}, \quad n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$

5. $\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} k! = m^n$

6. $\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ r \end{matrix} \right\} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left\{ \begin{matrix} i \\ r-1 \end{matrix} \right\}$

恒等式证明

1. $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$

a_1 先放在一个盒子里，
剩下的 n–1 个球每个有 2 种选择，
但是全落入a_1的盒子的方法不符合要求.

2. $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$

n 个球放到 n–1个盒子，必有一个盒子含 2 个球，
其余每个盒子 1 个球. 选择两个球有 $C(n,2)$ 种方法.

恒等式证明

4. $$\sum \binom{n}{n_1\ n_2 \ldots n_m} = m! \begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix},\quad n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$$

对应 n 个不同的球恰好放到 m 个不同盒子的方法数（无空盒）

5. $$\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} k! = m^n$$

按照含球的盒子数 k 分类，对应了允许存在空盒的方法

6. $$\begin{Bmatrix} n+1 \\ r \end{Bmatrix} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \begin{Bmatrix} i \\ r-1 \end{Bmatrix}$$

至多 n 个不同的球放到 r–1 个相同的盒子不存在空盒的方法
按照球数分类

放球问题的计数

球标号	盒标号	允空盒	放球方法数	对应的组合问题
否	否	否	$P_m(n)-P_{m-1}(n)$	将n恰好无序拆分成m部分
否	否	是	$P_m(n)$	将n无序拆分成t个部分($t \le m$)
否	是	否	$C(n-1,m-1)$	$x_1+x_2+\ldots+x_m=n$正整数解
否	是	是	$C(n+m-1,n)$	$x_1+x_2+\ldots+x_m=n$非负整数解
是	否	否	$\left\{\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\}$	第二类Stirling数
是	否	是	$\sum_{k=1}^{m}\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}$	第二类Sirling数性质
是	是	否	$m!\left\{\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\}$	第二类Stirling数性质
是	是	是	$m^n=\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}k!$	乘法法则

第十三章 习题课

主要内容

- 递推方程的求解方法：公式法、换元法、迭代归纳法、生成函数法
- 递推方程与递归算法
- 生成函数的应用：计算多重集的 r 组合数、确定不定方程的整数解个数、计算拆分方案数、求解递推方程
- 指数生成函数的应用：计算多重集的 r 排列数
- 常用的计数符号：组合数、排列数、多项式系数、错位排列数、Fibonacci数、Catalan数、两类Stirling数
- 基本计数模型：选取问题、不定方程的解、非降路径、正整数拆分、放球等

基本要求

- 能够使用递推方程求解计数问题
- 能够使用生成函数或指数生成函数求解计数问题
- 掌握 **Fibonacci**数、**Catalan** 数、两类 **Stirling**数的定义、组合意义以及相关的公式.

练习1

1. 已知 $a_0=0, a_1=1, a_2=4, a_3=12$ 满足递推方程 $a_n+c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}=0$，求 c_1 和 c_2.

根据已知条件得到

$$\begin{cases} a_3+c_1a_2+c_2a_1=0 \\ a_2+c_1a_1+c_2a_0=0 \end{cases}$$

代入a_0,a_1,a_2,a_3的值得到

$$\begin{cases} 12+4c_1+c_2=0 \\ 4+c_1=0 \end{cases}$$

解得 $c_1=-4, c_2=4.$

练习2

2．求解递推方程

$$\begin{cases} na_n+(n-1)a_{n-1}=2^n, \quad n\geq 1 \\ a_0=273 \end{cases}$$

用换元法. 令b_n=na_n, 代入原递推方程得 $\begin{cases} b_n+b_{n-1}=2^n \\ b_0=0 \end{cases}$

用公式法解得

$$b_n=-\frac{2}{3}(-1)^n+\frac{2^{n+1}}{3}$$

从而得到

$$\begin{cases} a_n=-\dfrac{2}{3n}(-1)^n+\dfrac{2^{n+1}}{3n} \quad n\geq 1 \\ a_0=273 \end{cases}$$

练习3

3．确定序列$\{a_n\}$的生成函数，其中$a_n=\binom{n}{3}$

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)x^n$$

$$=\frac{1}{6}x^3\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)(n-2)x^{n-3}=\frac{1}{6}x^3B(x)$$

$$\int_0^x B(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)\int_0^x(n-2)x^{n-3}dx=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=C(x)$$

$$\int_0^x C(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}n\int_0^x(n-1)x^{n-2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=D(x)$$

$$\int_0^x D(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

练习3

$$D(x)=(\frac{1}{(1-x)})'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$C(x)=D(x)'=\frac{2}{(1-x)^3}$$

$$B(x)=C(x)'=\frac{6}{(1-x)^4}$$

$$A(x)=\frac{1}{6}x^3B(x)=\frac{x^3}{(1-x)^4}$$

练习4

4. 已知 $A(x)=\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ 是序列$\{a_n\}$的生成函数，求a_n.

$$A(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}=\frac{Ax+B}{(1-x)^2}+\frac{C}{1+x}$$

$$\begin{cases} B+C=1 \\ A+C=0 \\ A+B-2C=0 \end{cases}$$

解得$A=-1/4$, $B=3/4$, $C=1/4$, 从而得到

$$A(x)=-\frac{1}{4}x\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{3}{4}\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{1+x}$$

练习4

$$a_n = \frac{1}{4}[1+(-1)^n]+\frac{1}{2}(n+1)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{n+1}{2}, & n\text{为奇数} \\ \dfrac{n+2}{2}, & n\text{为偶数} \end{cases}$$

练习5

5．求下列 n 阶行列式的值 d_n

$$d_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

方程 $\begin{cases} d_n = 2d_{n-1} - d_{n-2} \\ d_1 = 2, \quad d_2 = 3 \end{cases}$

解得 $d_n=n+1$.

练习5

5. 平面上有 n 条直线，它们两两相交且没有三线交于一点，问这 n 条直线把平面分成多少个区域？

设平面上已经有$n-1$条直线. 当加入第n条直线时，它与平面上的前$n-1$条直线交于$n-1$个点. 这些点将第n条直线分割成n段，每段都增加一个区域，共增加n个区域，因此得到递推方程

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$$

练习6

6．在经济中，商品价格随需求量增长而上涨，随供给量增长而下降，可以简单地用一个线性方程表示这种依赖关系.

需求关系：$p=a-bq$，其中p为价格，q 为需求量，$a,b>0$为常数. 当 p 上涨时 q 将减少.

供给关系：$p=kr$，其中p为价格，r 为供给量，$k>0$为常数. 当p上涨时，r 将增加.

假设价格随需求量能做到即时变化，而商品生产和流通需要时间，因此供给量随价格的变化需要1个单位时间的延迟. 假定每个时间的需求量都和供给量相等，考虑一个时间序列 $0,1,\ldots,n,\ldots$，设时间0的价格是 p_0，求时间 n 的价格 p_n.

练习6

设第 n 时间的价格为 p_n, 需求量为 q_n，供给量为 r_n，那么有

$$\begin{cases} p_n = a - bq_n \\ p_n = kr_{n+1} \\ r_n = q_n \end{cases}$$

代入得到 $p_n + \frac{b}{k} p_{n-1} = a$

解得 $$p_n = c(-\frac{b}{k})^n + \frac{ka}{k+b}$$

$$p_0 = c + \frac{ka}{k+b} \Rightarrow c = p_0 - \frac{ka}{k+b}$$

$$p_n = (-\frac{b}{k})^n(\frac{-ka}{k+b} + p_0) + \frac{ka}{k+b}$$

练习7

7．用三个1、两个2、五个3可以组成多少个不同的四位数？如果这个四位数是偶数，那么又有多少个？

$$A_e(x)=(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})(1+x+\frac{x^2}{2!})$$

$$(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!})$$

其中x^4的系数为 $71\cdot\frac{x^4}{4!}$

因此 $a_4=71$.

练习8

8. 用恰好k种可能的颜色做旗子，使得每面旗子由 n 条彩带构成（$n\geq k$），且相邻两彩带的颜色都不相同，证明不同的旗子数是 $k!\left\{\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix}\right\}$

方法一. n 个编号球恰放入 k 个相同盒子且不允许相邻编号在同一盒的方法数. 选定球a_1, 进行变换：如果a_1自己在一个盒子，将盒子拿走，得到 $n-1$个不同球恰放入$k-1$个相同盒且相邻编号不落入同一盒子的方法.

如果与a_1在同一盒子的球有 $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_l}$. 将球 a_{i_j}放入 a_{i_j-1} 所在的盒子，然后拿走含a_1的盒子，从而得到$n-1$个不同球恰好放到 $k-1$个盒子且至少两个相邻标号球落入同一盒的方法. 所求方法数等于$n-1$个不同球恰好放入$k-1$个相同盒子的方法数，即 $\left\{\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix}\right\}$. 再考虑盒子编号为 $k!\left\{\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix}\right\}$

方法二

数学归纳法.

当 n=1, 必有 k=1, 这时有 $\left\{\begin{matrix}1-1\\1-1\end{matrix}\right\}1!=1$ ，命题为真.

假设对一切 n, k 命题为真，考虑 n+1条使用 k 种颜色的涂色方案. 若用 k 种颜色涂色前 n 条，最后一条有 k–1 种选择，方法数为 $k!\left\{\begin{matrix}n-1\\k-1\end{matrix}\right\}(k-1)$. 若用 k–1 种颜色涂色前 n 条，选择颜色的方式数为 k, 涂色方法数为 $(k-1)!\left\{\begin{matrix}n-1\\k-2\end{matrix}\right\}$

因此由乘法法则得 $k!\left\{\begin{matrix}n-1\\k-2\end{matrix}\right\}$. 再根据加法法则，总方法数为

$$k!\left\{\begin{matrix}n-1\\k-1\end{matrix}\right\}(k-1)+k!\left\{\begin{matrix}n-1\\k-2\end{matrix}\right\}=k!\left\{\begin{matrix}n\\k-1\end{matrix}\right\}$$

根据归纳法命题成立.

方法三

令n+1个球恰落入k+1相同盒子且球编号不相邻方法数为 S_n^k
将这些方法分成两类：其中第 n+1个球独占一盒的方法数为 S_{n-1}^{k-1} ；第 n+1个球不独占一个盒子的方法数为 kS_{n-1}^k

$$\begin{cases} S_n^k = S_{n-1}^{k-1} + kS_{n-1}^k \\ S_1^1 = 1 \end{cases}$$

与第二类Stirling数递推方程初值一样，因此 $S_n^k = \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$

考虑盒子编号，于是得到 n+1个球恰好落入k+1个不同的盒子，且球的编号不相邻的方法数为

$$(k+1)!S_n^k = (k+1)!\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \qquad N = k!\begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix}$$