第一章 绪论

§1．1 伴随矩阵的基本概念

定义 1 设矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$，将矩阵A的元素a_{ij}所在的第i行第j列元素划去后，剩余的$(n-1)^2$各元素按原来的排列顺序组成的$n-1$阶矩阵所确定的行列式称为元素a_{ij}的余子式，记为M_{ij}，称$(-1)^{i+j}M_{ij}$谓元素a_{ij}的代数余子式，记为A_{ij}，即$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$．$(i,j=1,2,\cdots n)$

定义 2 方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的各元素的代数余子式A_{ij}所构成的如下矩阵

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵A的伴随矩阵.

§1．2 伴随矩阵的基本性质

性质 1.2.1 设矩阵A的伴随矩阵为A^*,则$AA^*=A^*A=|A|E$，且当$|A|\neq 0$时,有

$$A^*=|A|A^{-1} \quad 或 \quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

证明 设$AA^*=(b_{ij})_{n\times n}$，则

$$b_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}$$

$$=\begin{cases} |A|, & j=i \\ 0, & j\neq i \end{cases} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

于是

$$AA^*=\begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}=|A|E$$

类似地，$$A^*A=\sum_{k=1}^{n}A_{ki}\cdot a_{ki}=\begin{bmatrix}|A| & 0 & \cdots & 0\\ 0 & |A| & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & |A|\end{bmatrix}=|A|E$$

所以 $$AA^*=A^*A=|A|E$$

当$|A|\neq 0$时，A 可逆，由 $AA^*=|A|E$ 得

$$A^{-1}AA^*=A^{-1}|A|E=|A|A^{-1}$$

即 $$A^*=|A|A^{-1}$$

所以 $$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

注 该性质给出了矩阵与其伴随矩阵的之间的关系，同时给出了逆矩阵或伴随矩阵的一种求法.

性质 1.2.2 无论A 是奇异阵还是非奇异阵，等式$|A^*|=|A|^{n-1}\ (n\geq 2)$成立.

证明 (1) 当 A 是奇异阵时，$|A|=0$，这时 $|A^*|=0$，从而等式 $|A^*|=|A|^{n-1}\ (n\geq 2)$成立.

(2) 当A 是非奇异阵时，$|A|\neq 0$，由 $AA^*=|A|E$ 得

$$|A|\cdot|A^*|=||A|E|=|A|^n$$

所以 $$|A^*|=|A|^{n-1}\ (n\geq 2)$$

注 该性质给出了矩阵与其伴随矩阵的行列式之间的关系.

例 设n 阶方阵A 的伴随矩阵为A^*，且$|A|=k\neq 0$，则$|A^*|=k^{n-1}$.

性质 1.2.3 若A 是n 阶方阵$(n\geq 2)$，那么

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n\\ 1, & r(A)=n-1\\ 0, & r(A)<n-1\end{cases}$$

证明 (1)当$r(A)=n$ 时，$|A|\neq 0$，由$|A^*|=|A|^{n-1}\ (n\geq 2)$ 得 $|A^*|\neq 0$

所以 $$r(A^*)=n$$

(2) 当$r(A)=n-1$时, $|A|=0$, 由 $AA^*=|A|E$ 得 $AA^*=0$

所以A^*的列向量都是方程组$AX=0$的解.

由于$r(A)=n-1$,所以齐次线性方程组$AX=0$的解向量组的秩为

$n-(n-1)=1$,

故A^*的列向量组的秩小于或等于1,

即 $$r(A^*)\le 1$$

又$r(A)=n-1$, 所以A至少有一个$n-1$阶的非零子式, 即$A^*\neq 0$,

所以 $$r(A^*)\ge 1$$

故 $$r(A^*)=1$$

(3) 当$r(A)<n-1$时,矩阵A没有不为零的$n-1$阶子式,故A^*的每个元素A_{ij}

都是零,即$A^*=0$,

所以 $$r(A^*)=0$$

注 该性质给出了矩阵与其伴随矩阵的秩之间的关系.

§1．3 研究现状及本文所做的工作

目前，对于伴随矩阵性质的研究主要是围绕伴随矩阵的基本性质进行的，重点是伴随矩阵的运算性质、伴随矩阵的继承性质以及m重伴随矩阵的有关性质. 这些性质的某些结果有进一步推广的空间. 本文的主要工作是把伴随矩阵的性质进行分类归纳, 并把一些性质推广到分块矩阵的伴随矩阵上去, 得到一些相似的结果.

第二章　伴随矩阵的运算性质

§2．1　乘积矩阵的伴随矩阵的运算性质

性质 2.1.1　若矩阵A为非奇异阵，k为常数$(k\neq 0)$，则　$(kA)^{*}=k^{n-1}A^{*}$

证明　由$A^{*}=|A|A^{-1}$及$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$可得

$$
\begin{aligned}
(kA)^{*}&=|kA|(kA)^{-1}\\
&=k^{n}|A|\cdot\frac{1}{k}A^{-1}\\
&=k^{n-1}|A|A^{-1}=k^{n-1}A^{*}
\end{aligned}
$$

注　该性质给出了数乘可逆矩阵的伴随矩阵的运算.

性质 2.1.2　设A、B为n阶方阵，则$(AB)^{*}=B^{*}A^{*}$

证明　(1)　当$|A|\neq 0,|B|\neq 0$时，由$A^{*}=|A|A^{-1}$可得

$$
\begin{aligned}
(AB)^{*}&=|AB|(AB)^{-1}=|A|\cdot|B|B^{-1}A^{-1}\\
&=|B|B^{-1}\cdot|A|A^{-1}=B^{*}A^{*}
\end{aligned}
$$

(2)　当$|A|=0$，$|B|=0$时，令$A(x)=xE+A$，　$B(x)=xE+B$，只要x充分大，$A(x),B(x)$都可逆，

所以
$$(A(x)B(x))^{*}=(B(x))^{*}(A(x))^{*}$$

上式两端矩阵中的元素都是关于x的多项式，由于两端对应元素相等，所以对应元素是相等的多项式，即上式对任意的x都成立，特别的取$x=0$，即得$(AB)^{*}=B^{*}A^{*}$.

推论 2.1.1　设$A_1,A_2,\cdots,A_s$均为n阶方阵，则

$$(A_1A_2\cdots A_s)^{*}=A_s^{*}\cdots A_2^{*}A_1^{*}$$

注　方阵乘积的伴随矩阵等于每个方阵伴随矩阵的乘积，但顺序恰好交换过来.

§2. 2 分块矩阵的伴随矩阵的运算性质

性质2.2.1 设A、B 均为n 阶可逆矩阵, 则有

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^n |A| B^* \\ (-1)^n |B| A^* & 0 \end{bmatrix}$$

证明 因为

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^{-1} & 0 \\ 0 & BB^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix} = E_{2n}$$

所以$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$可逆, 且

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

又有

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{vmatrix} = (-1)^n |B||A|$$

由

$$A^* = |A| A^{-1}$$

可得

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = (-1)^{n^2} |B||A| \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & (-1)^n |B||A| B^{-1} \\ (-1)^n |B||A| A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & (-1)^n |A| B^* \\ (-1)^n |B| A^* & 0 \end{bmatrix}$$

注 性质2.2.1的结果与推论2.1.1的结果具有类似的形式,即A 与B 分别取伴随矩阵，但位置交换，且伴随矩阵前多了一个系数.

上述结论可进一步推广到次对角线上有多个子块的情形, 如

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & A \\ 0 & B & 0 \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (-1)^n |A||B| C^* \\ 0 & (-1)^n |A||C| B^* & 0 \\ (-1)^n |B||C| A^* & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中A 、B 、C 是n 阶可逆矩阵.

例 1 设A,B,C 均为 3 阶可逆矩阵, 且

$$|A|=3,|B|=-2,|C|=5,\ A^*=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&2\\0&0&9\end{bmatrix},\ B^*=\begin{bmatrix}4&0&0\\1&1&0\\2&-1&1\end{bmatrix},\ C^*=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

求$\begin{bmatrix}0&0&A\\0&B&0\\C&0&0\end{bmatrix}^*$

解 由

$$\begin{bmatrix}0&0&A\\0&B&0\\C&0&0\end{bmatrix}^*=\begin{bmatrix}0&0&(-1)^{m\times n}|A||B|C^*\\0&(-1)^{m\times n}|A||C|B^*&0\\(-1)^{m\times n}|B||C|A^*&0&0\end{bmatrix}$$

可得

$$\begin{bmatrix}0&0&A\\0&B&0\\C&0&0\end{bmatrix}^*=\begin{bmatrix}0&0&(-1)^9 3\cdot(-2)C^*\\0&(-1)^9 3\cdot 5B^*&0\\(-1)^9(-2)\cdot 5A^*&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&6C^*\\0&-15B^*&0\\10A^*&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&30&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&30&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&6\\0&0&0&-60&0&0&0&0&0\\0&0&0&-15&-15&0&0&0&0\\0&0&0&-30&15&-15&0&0&0\\10&-10&0&0&0&0&0&0&0\\0&10&20&0&0&0&0&0&0\\0&0&90&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

§2.3 转置矩阵的伴随矩阵的运算性质

性质 2.3.1 若A 为n 阶方阵，则$(A^T)^*=(A^*)^T$

证明 (1) 当A为非奇异阵时，有

$$|A| \neq 0, \quad |A^T| = |A| \neq 0, \quad |A^*| = |A|^{n-1} \neq 0,$$

即A^T,A^*也为非奇异阵.

由 $A^* = |A|A^{-1}$可得

$$(A^*)^T = (|A|A^{-1})^T = |A|(A^{-1})^T$$

又

$$(A^T)^* = |A^T|(A^T)^{-1} = |A|(A^T)^{-1}$$

因

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E$$

所以

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

即

$$(A^T)^* = (A^*)^T$$

(2) 当A为奇异阵时, 设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则A^T的第i行第j列元素为a_{ji}, $(A^T)^*$的第i行第j列元素为A_{ij}, A^*的第i行第j列元素为A_{ji},

$(A^*)^T$的第i行第j列元素为A_{ij}, $(i,j=1,2,\cdots n)$

所以

$$(A^*)^T = (A^T)^*$$

推论 2.3.1 设A、B均为n阶方阵, 则$\left[(AB)^T\right]^* = (A^*)^T(B^*)^T$

证明 由$(A^*)^T = (A^T)^*$可得

$$\left[(AB)^T\right]^* = \left[(AB)^*\right]^T = (B^*A^*)^T = (A^*)^T(B^*)^T$$

该结果可以进一步推广到多个方阵乘积的情形，如

$$\left[(A_1A_2\cdots A_s)^T\right]^* = (A^*_1)^T(A_2^*)^T\cdots(A_s^*)^T$$

推论 2.3.2 设A、B 均为n 阶可逆方阵，则

$$\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^T\right]^* = \left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^*\right]^T = \begin{bmatrix} |B|(A^*)^T & 0 \\ 0 & |A|(B^*)^T \end{bmatrix}$$

证明 因A、B 均为n 阶可逆方阵，所以$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$可逆，且有

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

由$A^* = |A|A^{-1}$可得

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^* = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = |A||B|\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A||B|A^{-1} & 0 \\ 0 & |A||B|B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |B|A^* & 0 \\ 0 & |A|A^* \end{pmatrix}$$

所以

$$\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^T\right]^* = \left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^*\right]^T = \begin{bmatrix} |B|(A^*) & 0 \\ 0 & |A|(B^*) \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} |B|(A^*)^T & 0 \\ 0 & |A|(B^*)^T \end{bmatrix}$$

上述结论可进一步推广到主对角线上有多个子块的情形，如

$$\left[\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}^T\right]^* = \begin{bmatrix} |B||C|(A^*)^T & 0 & 0 \\ 0 & |A||C|(B^*)^T & 0 \\ 0 & 0 & |A||B|(C^*)^T \end{bmatrix}$$

推论 2.3.3 设A、B 均为n 阶可逆方阵，则

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^T\right]^* = \left[\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^*\right]^T = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^n|B|(A^*)^T \\ (-1)^n|A|(B^*)^T & 0 \end{bmatrix}$$

证明　因A、B均为n阶可逆方阵，所以$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$可逆，且有

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

由$A^* = |A|A^{-1}$可得

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = (-1)^n |A||B|\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (-1)^n |A||B|B^{-1} \\ (-1)^n |A||B|A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (-1)^n |A|B^* \\ (-1)^n |B|A^* & 0 \end{pmatrix}$$

所以

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^T\right]^* = \left[\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^*\right]^T = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^n |A|B^* \\ (-1)^n |B|A^* & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & (-1)^n |B|(A^*)^T \\ (-1)^n |A|(B^*)^T & 0 \end{bmatrix}$$

上述结论可进一步推广到次对角线上有多个子块的情形，如

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ 0 & B & 0 \\ C & 0 & 0 \end{pmatrix}^T\right]^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (-1)^n |B||C|(A^*)^T \\ 0 & (-1)^n |A||C|(B^*)^T & 0 \\ (-1)^n |A||B|(C^*)^T & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

例 2　设A,B,C均为 3 阶可逆矩阵，且

$$|A| = 3, |B| = -2, |C| = 5,\ A^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, B^* = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, C^* = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

求$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ 0 & B & 0 \\ C & 0 & 0 \end{pmatrix}^T\right]^*$

解 由

$$\left[\begin{pmatrix}0&0&A\\0&B&0\\C&0&0\end{pmatrix}^T\right]^*=\begin{bmatrix}0&0&(-1)^n|B||C|(A^*)^T\\0&(-1)^n|A||C|(B^*)^T&0\\(-1)^n|A||B|(C^*)^T&0&0\end{bmatrix}$$

可得

$$\left[\begin{pmatrix}0&0&A\\0&B&0\\C&0&0\end{pmatrix}^T\right]^*=\begin{bmatrix}0&0&(-1)^3(-2)\cdot 5(A^*)^T\\0&(-1)^3 3\cdot 5(B^*)^T&0\\(-1)^3 3\cdot(-2)(C^*)^T&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&10(A^*)^T\\0&-15(B^*)^T&0\\6(C^*)^T&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&10&40&0\\0&0&0&0&0&0&-10&10&0\\0&0&0&0&0&0&0&2&9\\0&0&0&-60&-15&-30&0&0&0\\0&0&0&0&-15&15&0&0&0\\0&0&0&0&0&-15&0&0&0\\30&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&30&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&6&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

§2.4 矩阵逆的伴随矩阵的运算性质

性质 2.4.1 设A是n阶非奇异阵，则 $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$

证明 由$A^*=|A|A^{-1}$得

$$(A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}$$

$$=\frac{1}{|A|}(A^{-1})^{-1}=\frac{1}{|A|}A$$

又

$$(A^{-1})^* = |A^{-1}|(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|}A$$

所以

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A$$

注 该性质说明求逆与求伴随矩阵两种运算可交换顺序.

推论 2.4.1 设A,B为n阶可逆矩阵, 则有

$$\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1}\right]^* = \left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^*\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{|A||B|}A & 0 \\ 0 & \frac{1}{|A||B|}B \end{bmatrix}$$

证明 由$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A$ 可得

$$\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1}\right]^* = \left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^*\right]^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A||B|}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{|A||B|}A & 0 \\ 0 & \frac{1}{|A||B|}B \end{bmatrix}$$

上述结果也可以进一步推广到主对角线上有多个子块的分块对角矩阵上来, 如

$$\left[\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}^{-1}\right]^* = \left[\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}^*\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{|A||B||C|}A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{|A||B||C|}B & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{|A||B||C|}C \end{bmatrix}$$

其中A,B,C均为n阶非奇异矩阵.

例 3 设$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&-1&0\\4&-1&-1\end{bmatrix}$，求$\left[\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}^{-1}\right]^{*}$

解 因为$|A|=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&-1&-2\\0&0&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$，$|B|=\begin{vmatrix}1&0&0\\3&-1&0\\4&-1&-1\end{vmatrix}=1\neq 0$

所以A,B均可逆，由推论 2.4.1 可得

$$\left[\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}^{-1}\right]^{*}=\begin{bmatrix}\frac{1}{|A||B|}A&0\\0&\frac{1}{|A||B|}B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-A&0\\0&-B\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}A&0\\0&B\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&-2&-1&0&0&0\\0&1&2&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&-3&1&0\\0&0&0&-4&1&1\end{bmatrix}$$

推论 2.4.2 设A,B为n阶可逆矩阵, 则有

$$\left[\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}^{-1}\right]^{*}=\left[\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}^{*}\right]^{-1}=\begin{bmatrix}0&(-1)^{n}\frac{1}{|A||B|}A\\(-1)^{n}\frac{1}{|A||B|}B&0\end{bmatrix}$$

上述结果也可以进一步推广到次对角线上有多个子块的分块对角矩阵上来,如

$$\left[\begin{pmatrix}0&0&A\\0&B&0\\C&0&0\end{pmatrix}^{-1}\right]^{*}=\left[\begin{pmatrix}0&0&A\\0&B&0\\C&0&0\end{pmatrix}^{*}\right]^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & (-1)^n \frac{1}{|A||B||C|}A \\ 0 & (-1)^n \frac{1}{|A||B||C|}B & 0 \\ (-1)^n \frac{1}{|A||B||C|}C & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中A,B,C均为n阶非奇异矩阵.

性质 2.4.2 设A是n阶非奇异阵，则

$$\left[(A^{-1})^T\right]^* = \left[(A^*)^T\right]^{-1} = \frac{1}{|A|}A^T$$

证明 由性质 2.3.1 可得

$$\left[(A^{-1})^T\right]^* = \left[(A^{-1})^*\right]^T$$

由性质 2.4.1 可得

$$\left[(A^{-1})^*\right]^T = \left[(A^*)^{-1}\right]^T$$

又因为

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E$$

所以
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

所以

$$\left[(A^*)^{-1}\right]^T = \left[(A^*)^T\right]^{-1}$$

即

$$\left[(A^{-1})^T\right]^* = \left[(A^*)^T\right]^{-1}$$

又
$$\left[(A^{-1})^T\right]^* = \left|(A^{-1})^T\right|\left[(A^{-1})^T\right]^{-1}$$

$$= \left|A^{-1}\right|\left[(A^T)^{-1}\right]^{-1} = \frac{1}{|A|}A^T$$

所以
$$\left[(A^{-1})^T\right]^* = \left[(A^*)^T\right]^{-1} = \frac{1}{|A|}A^T$$

例 4 设$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & \frac{5}{2}\end{bmatrix}$，$A^*$是$A$的伴随矩阵，求$\left[(A^*)^T\right]^{-1}$

解 因$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & \frac{5}{2}\end{vmatrix}=\frac{5}{4}-\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}\neq 0$，所以$A$可逆，由性质 2.4.2 可得

$$\left[(A^*)^T\right]^{-1}=\frac{1}{|A|}A^T \quad =-4\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -4\\ 0 & -6 & -10\end{bmatrix}$$

推论 2.4.2 设A,B为n阶可逆矩阵,则有

$$\left(\left[\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}^{-1}\right]^T\right)^*=\left(\left[\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}^*\right]^T\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{|B|}\left[(A^*)^T\right]^{-1} & 0\\ 0 & \frac{1}{|A|}\left[(B^*)^T\right]^{-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{|A||B|}A^T & 0\\ 0 & \frac{1}{|A||B|}B^T\end{pmatrix}$$

证明 因为A,B为n阶可逆矩阵，所以$\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$也可逆.

由性质 2.4.2 可得

$$\left(\left[\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}^{-1}\right]^T\right)^*=\left(\left[\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}^*\right]^T\right)^{-1}$$

又由推论 2.3.2 $\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{*}\right]^{T} = \begin{bmatrix} |B|(A^{*})^{T} & 0 \\ 0 & |A|(B^{*})^{T} \end{bmatrix}$ 得

$$\left(\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{*}\right]^{T}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} |B|(A^{*})^{T} & 0 \\ 0 & |A|(B^{*})^{T} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (|B|(A^{*})^{T})^{-1} & 0 \\ 0 & (|A|(B^{*})^{T})^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{|B|}\left[(A^{*})^{T}\right]^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{|A|}\left[(B^{*})^{T}\right]^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{|A||B|}A^{T} & 0 \\ 0 & \frac{1}{|A||B|}B^{T} \end{pmatrix}$$

上述结果也可以进一步推广到主对角线上有多个子块的分块对角矩阵上来，如

$$\left(\left[\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}^{-1}\right]^{T}\right)^{*} = \left(\left[\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}^{*}\right]^{T}\right)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{|B||C|}\left[(A^{*})^{T}\right]^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{|A||C|}\left[(B^{*})^{T}\right]^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{|A||B|}\left[(C^{*})^{T}\right]^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{|A||B||C|}A^{T} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{|A||B||C|}B^{T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{|A||B||C|}C^{T} \end{bmatrix}$$

推论 2.4.3 设A,B 为n 阶可逆矩阵，则有

$$\left(\left[\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1}\right]^{T}\right)^{*}=\left(\left[\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{*}\right]^{T}\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & (-1)^{n}\dfrac{1}{|A||B|}B^{T} \\ (-1)^{n}\dfrac{1}{|A||B|}A^{T} & 0 \end{pmatrix}$$

上述结果也可以进一步推广到次对角线上有多个子块的分块对角矩阵上来，如

$$\left(\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ 0 & B & 0 \\ C & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\right]^{T}\right)^{*}=\left(\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ 0 & B & 0 \\ C & 0 & 0 \end{pmatrix}^{*}\right]^{T}\right)^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & (-1)^{n}\dfrac{1}{|A||B||C|}C^{T} \\ 0 & (-1)^{n}\dfrac{1}{|A||B||C|}B^{T} & 0 \\ (-1)^{n}\dfrac{1}{|A||B||C|}A^{T} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

第三章 矩阵与其伴随矩阵的关联性质

§3．1 矩阵与其伴随矩阵的关联性质

性质 3.1.1 (1)若A是n阶对称矩阵,那么A^*也是n阶对称矩阵.

(2)若A是n阶反对称矩阵,那么当n是偶数时，A^*也是n阶反对称矩阵;当n是奇数时，A^*是n阶对称矩阵.

证明 (1)因为A是n阶对称矩阵，所以 $A^T=A$

又

$$(A^*)^T=(A^T)^*=A^*$$

所以A^*是n阶对称矩阵.

（2）因为A是n阶反对称矩阵，所以 $A^T=-A$

又

$$(A^*)^T=(A^T)^*=(-A)^*=(-1)^{n-1}A^*$$

当n是偶数时,有$(-1)^{n-1}A^*=-A^*$,即$(A^*)^T=-A^*$,所以A^*也是n阶反对称矩阵;

当n是奇数时,有$(-1)^{n-1}A^*=A^*$,即$(A^*)^T=A^*$,所以A^*是n阶对称矩阵.

性质 3.1.2 (1)若方阵A是n阶非奇异矩阵,则A^*也是n阶非奇异矩阵;

(2) 若方阵A是n阶奇异矩阵,则A^*也是n阶奇异矩阵.

证明 (1)因为A是n阶奇非异矩阵,所以$|A|\neq 0$,由性质 2.2 可得

$$|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$$

所以A^*也是n阶非奇异矩阵.

(2) 因为A是n阶奇异矩阵,所以$|A|=0$,由$AA^*=|A|E$得

$$|A||A^*|=|A|^n$$

1^0 当$A=0$时,则有$A^*=0$, $|A^*|=0$,所以A^*是n阶奇异矩阵.

2^0 当$A\neq 0$时,假设$|A^*|\neq 0$,则有

$$A=AE=A(A^*(A^*)^{-1})=AA^*(A^*)^{-1}$$

$$=|A|E(A^*)^{-1}=|A|(A^*)^{-1}=0$$

这与$A\neq 0$矛盾,所以$|A^*|=0$,即则A^*也是n阶奇异矩阵.

说明 矩阵与其伴随矩阵的奇异性相同.

性质 3.1.3 (1)若A是n阶正定矩阵,则A^*也是n阶正定矩阵;

(2) 若A是n阶半正定矩阵,则A^*也是n阶半正定矩阵.

证明 (1)设A是n阶正定矩阵,则$|A|>0$,且A^*为对称矩阵,另存在可逆矩阵P,使得

$$P^TAP=E$$

于是

$$P^{-1}A^{-1}(P^T)^{-1}=E$$

即有

$$P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^T=E$$

又由$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$得

$$P^{-1}\frac{1}{|A|}A^*(P^{-1})^T=E$$

即

$$(\sqrt{|A|}P)^{-1}A^*\left[(\sqrt{|A|}P)^{-1}\right]^T=E$$

所以A^*合同于单位矩阵E,即A^*是正定矩阵.

(2)设A为半正定矩阵,则A^*为对称矩阵,下面分三种情况讨论:

1^0 若$r(A)=n$,那么A正定矩阵,由(1)知A^*是正定矩阵;

2^0 若$r(A)<n-1$,则$A^*=0$,显然A^*是半正定矩阵;

3^0 若$r(A)=n-1$，则$r(A^*)=1$，

由于A 为半正定矩阵，所以A^*的一阶主子式$A_{ii}(i=1,2,\cdots n)$即A 的元素a_{ii}的代数余子式必大于或等于 0，且至少有一个大于 0（否则，若每个A_{ii}都等于 0，由$A^*\neq 0$和A^*的对称性知，A^*至少有一个二阶子式不等于 0，即$r(A^*)\geq 2$，这与$r(A^*)=1$矛盾），不妨设$A_{11}>0$，令

$$P=\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{A_{12}}{A_{11}} & \cdots & -\dfrac{A_{1n}}{A_{11}} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则P 可逆，且有

$$P^T A^* P=\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以A^*是半正定矩阵.

性质 3.1.4 (1)若A 是幂等矩阵，则A^*也是幂等矩阵；

(2) 若A 是幂零矩阵，则A^*也是幂零矩阵.

(3) 若A 是幂幺矩阵，则当$|A|=1$时，A^*也是幂幺矩阵.

证明 (1)若A 是幂等矩阵，即$A^m=A$，则$(A^m)^*=A^*$

由推论 2.1.1 可得

$$(A^m)^*=(AA\cdots A)^*=A^*A^*\cdots A^*=(A^*)^m$$

所以

$$(A^*)^m=A^*$$

即A^*也是幂等矩阵.

(2) 若A 是幂零矩阵，即$A^m=0$，则

$$(A^*)^m=(A^m)^*=0^*=0$$

即A^*也是幂零矩阵.

(3) 若A是幂幺矩阵,即$A^m=E$,则

$$(A^*)^m=(|A|A^{-1})^m=(A^{-1})^m=(A^m)^{-1}=E^{-1}=E$$

即A^*也是幂幺矩阵.

性质 3.1.5 若A是对合矩阵,则A^*也是对合矩阵.

证明 因为A是对合矩阵,所以有

$$A^2=E$$

两边取行列式，得

$$|A|^2=1$$

所以A可逆，且有

$$A^{-1}=A$$

由性质 2.1.1 知A^*也可逆，由$A^*=|A|A^{-1}$得

$$(A^*)^2=(|A|A^{-1})^2=|A|A^{-1}\cdot|A|A^{-1}=|A|^2AA^{-1}$$

$$=|A|^2E=E$$

所以A^*也是对合矩阵.

性质 3.1.6 若A是正交矩阵,则A^*也是正交矩阵.

证明 设A是正交矩阵,则有

$$A^TA=AA^T=E$$

又

$$A^*(A^*)^T=A^*(A^T)^*=(A^TA)^*$$

$$=E^*=|E|E^{-1}=E$$

所以A^*也是正交矩阵.

性质 3.1.7 若A是正规矩阵,则A^*也是正规矩阵.

证明 设A是正规矩阵,则有

$$AA^*=A^*A$$

又

$$A^*(A^*)^* = (A^*A)^* = (AA^*)^* = (A^*)^*A^*$$

所以A^*是正规矩阵.

性质 3.1.8 若A是上（下）三角形矩阵,则A^*也是上（下）三角形矩阵.

证明 设$A=(a_{ij})$是上三角矩阵，则当$i>j$时，有$a_{ij}=0$

当$i<j$时，a_{ij}的余子式M_{ij}为$n-1$阶的三角形行列式，且主对角线上的元素至少有一个为零，所以$M_{ij}=0 \quad (i<j)$，即有$A_{ij}=0\ (i<j)$，故A^*也是上三角形矩阵.

同理可证，若A是下三角形矩阵,则A^*也是下三角形矩阵.

推论 3.1.8 当A是对角矩阵时,A^*也是对角矩阵.

§3．2 小结

本章对矩阵与其伴随矩阵的关联性进行了较为详尽的研究,可以看出伴随矩阵对矩阵的性质有很好的继承性.

第四章　两伴随矩阵间的关系性质

§4. 1 两伴随矩阵间的关系性质

性质 4.1.1　若矩阵A与B可交换，则A^*与B^*也可交换.

证明　因为A,B可交换，所以有

$$AB=BA$$

又

$$A^*B^*=(BA)^*=(AB)^*=B^*A^*$$

所以A^*与B^*也可交换.

性质 4.1.2　若方阵A等价于B，则A^*等价于B^*.

证明　因为A等价于B，则存在可逆矩阵P,Q，使得

$$PAQ=B$$

上式两边取伴随矩阵，得

$$(PAQ)^*=B^*$$

即有

$$Q^*A^*P^*=B^*$$

因为P,Q可逆，所以P^*,Q^*也可逆，由矩阵等价的定义可知，A^*等价于B^*.

性质 4.1.3　若A与B相似，则A^*与B^*也相似.

证明　(1)当A可逆时，因为A与B相似，则存在可逆矩阵P，使得

$$P^{-1}AP=B$$

上式两边取行列式，得$|A|=|B|$，所以B也可逆. 在$P^{-1}AP=B$两边取逆，得

$$P^{-1}A^{-1}P=B^{-1}$$

上式两边分别乘以$|A|,|B|$，得

$$P^{-1}|A|A^{-1}P=|B|B^{-1}$$

即

$$P^{-1}A^{*}P=B^{*}$$

所以A^{*}与B^{*}相似.

(2)当A不可逆时，由$P^{-1}AP=B$知，B也不可逆，所以必存在$\delta>0$，当$t\in(0,\delta)$时，有

$$|tE+A|\neq 0,\quad |tE+B|\neq 0$$

令

$$A_1=tE+A,\quad B=tE+B$$

则$|A_1|\neq 0$, $|B_1|\neq 0$，且

$$B_1=tE+B=tE+P^{-1}AP=P^{-1}(tE)P+P^{-1}AP$$

$$=P^{-1}(tE+A)P=P^{-1}A_1P$$

由(1)知

$$P^{-1}A_1^{*}P=B_1^{*}$$

即

$$(tE+B)^{*}=P^{-1}(tE+A)^{*}P$$

上式两端矩阵中的元素都是关于t的多项式，由于两端对应元素相等，所以对应元素是相等的多项式，即上式对任意的t都成立，特别的取$t=0$，即得

$$P^{-1}A^{*}P=B^{*}$$

即A^{*}与B^{*}相似.

性质 4.1.4 若A与B合同，且A与B可逆，则A^{*}与B^{*}也合同.

证明 因为A与B合同，所以存在可逆矩阵P，使得

$$P^{T}AP=B$$

又A与B可逆，上式两边取逆，得

$$P^{-1}A^{-1}(P^{T})^{-1}=B^{-1}$$

即

$$P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^T=B^{-1}$$

令

$$(P^{-1})^T=C$$

则

$$P^{-1}=C^T$$

所以

$$C^TA^{-1}C=B^{-1}$$

又由$P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^T=B^{-1}$得

$$|P|^2\cdot|A|=|B|$$

所以

$$|P|^2\cdot|A|C^TA^{-1}C=|B|B^{-1}$$

即

$$(|P|C)^TA^*(|P|C)=B^*$$

令$Q=|P|C$，则

$$Q^TA^*Q=B^*$$

所以A^*与B^*合同.

§4. 2 小结

本章主要介绍了两伴随矩阵间的关系. 依据两矩阵的关系, 推导出对应的伴随矩也具有同种关系, 这为我们进一步研究伴随矩阵间的关系提供了理论指导.

第五章 伴随矩阵在特征值与特征向量方面的性质

性质 5.1 若A是可逆矩阵，λ是其特征值，α是A的属于λ的特征向量，则A^*的特征值为$\lambda^{-1}|A|$，α是A^*的属于特征值$\lambda^{-1}|A|$的特征向量.

证明 因为A是可逆矩阵，所以$\lambda \neq 0$,在$A\alpha = \lambda\alpha$两边左乘A^*,得

$$A^*A\alpha = A^*\lambda\alpha$$

即

$$A^*A\alpha = \lambda A^*\alpha$$

又

$$A^*A = |A|E$$

所以

$$|A|E\alpha = \lambda A^*\alpha$$

即有

$$A^*\alpha = \lambda^{-1}|A|E\alpha = (\lambda^{-1}|A|)\alpha$$

所以$\lambda^{-1}|A|$为A^*的特征值，α是A^*的属于特征值$\lambda^{-1}|A|$的特征向量.

性质 5.2 设A是不可逆矩阵，若λ是A的非零特征值，α是A的属于λ的特征向量，则α是A^*的属于特征值 0 的特征向量.

证明 由条件可知$A\alpha = \lambda\alpha \quad (\alpha \neq 0)$,两边左乘$A^*$,得

$$A^*A\alpha = A^*\lambda\alpha$$

即

$$|A|E\alpha = \lambda A^*\alpha$$

由于$|A| = 0$，$\lambda \neq 0$，所以

$$A^*\alpha = 0 \cdot \alpha$$

即α是A^*的属于特征值 0 的特征向量.

推论 5.1 设A是不可逆矩阵，若λ是A^*的非零特征值，α是A^*的属于λ的特征向量，则α是A的属于特征值 0 的特征向量.

性质 5.3 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是矩阵$A$的全部特征值，则$\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n$，$\lambda_1\lambda_3\cdots\lambda_n$，$\cdots$，$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}$是$A^*$的特征值.

证明　分三种情况

（1）若$r(A)=n$，即A可逆，则$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$全不为零，且$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，$|\lambda_i E-A|=0\ (i=1,2,\cdots,n)$，于是

$$\left|\frac{|A|}{\lambda_i}E-A^*\right|=\left|\frac{|A|}{\lambda_i}E-|A|A^{-1}\right|=(\frac{|A|}{\lambda_i})^n\,|\lambda_i E-A||-A^{-1}|=0$$

所以由矩阵特征值的定义知$\frac{|A|}{\lambda_i}\ (i=1,2,\cdots,n)$是$A^*$的特征值，也即$\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n$，$\lambda_1\lambda_3\cdots\lambda_n$，$\cdots$，$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}$是$A^*$的特征值.

（2）若$r(A)<n-1$，则$A^*=0$，A^*的特征值全部为 0，由于$r(A)<n-1$，所以 0 至少是A的二重特征值，即$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$中至少有两个是 0，所以$\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n$，$\lambda_1\lambda_3\cdots\lambda_n$，$\cdots$，$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}$必全部为 0，即$\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n$，$\lambda_1\lambda_3\cdots\lambda_n$，$\cdots$，$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}$是$A^*$的特征值.

（3）若$r(A)=n-1$，则 0 是A的一重特征值，取$\lambda_1=0$，则$\lambda_2,\cdots,\lambda_n$全为 0，因此只需证明 0 与$\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n$是$A^*$的特征值.

由$r(A)=n-1$可知，$r(A^*)=1$，于是 0 是A^*的至少$n-1$重特征值，设A^*的另一特征值为α，则

$$0+0+\cdots+0+\alpha=\alpha=A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\prod_{i\neq k}\lambda_i)=\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n$$

即 0 与$\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n$是$A^*$的特征值.

第六章 伴随矩阵的推广——m重伴随矩阵及其性质

§6．1 m重伴随矩阵的定义及一般形式

给定n阶方阵A，我们可以求出其伴随矩阵A^*，伴随矩阵A^*仍是n阶方阵，按伴随矩阵的定义，可以求出伴随矩阵A^*的伴随矩阵$(A^*)^*$，以此类推可以连续求伴随矩阵，下面给出方阵A的m重伴随矩阵的定义.

定义 设A为n阶方阵，称n阶方阵$\overbrace{\left(\cdots\left(\left(A^*\right)^*\right)\cdots\right)^*}^{m重}$为$A$的$m$重伴随矩阵，记为

$$A^{(m^*)}=\overbrace{\left(\cdots\left(\left(A^*\right)^*\right)\cdots\right)^*}^{m重},\quad m=1,2,3,\cdots$$

特别地，$A^{(0^*)}=A$，$A^{(1^*)}=A^*$.

下面我们来推导一下n阶可逆方阵A的m重伴随矩阵$A^{(m^*)}$的一般形式：

（1）不妨先看特殊情况

(a)当$m=2$时，将A的二次伴随矩阵记做$\left(A^*\right)^*$，

因为

$$A^*=|A|A^{-1}$$

所以

$$\left(A^*\right)^*=\left||A|A^{-1}\right|\left(|A|A^{-1}\right)^{-1}=|A|^n\left|A^{-1}\right|\frac{1}{|A|}A$$

$$=|A|^n\frac{1}{|A|}\frac{1}{|A|}A=|A|^{n-2}A$$

$$=|A|^{\frac{(n-1)^2-1}{n}}A$$

(b)当$m=3$时，将A的三次伴随矩阵写作$\left(\left(A^*\right)^*\right)^*$

因为

$$A^*=|A|A^{-1}\quad,\qquad\left(A^*\right)^*=|A|^{\frac{(n-1)^2-1}{n}}A$$

所以

$$\left(\left(A^*\right)^*\right)^*=\left[\left(A^*\right)^*\right]^*=\left[|A|^{\frac{(n-1)^2-1}{n}}A\right]^*=\left||A|^{\frac{(n-1)^2-1}{n}}A\right|\left(|A|^{\frac{(n-1)^2-1}{n}}A\right)^{-1}$$

$$=|A|^{\frac{(n-1)^2-1}{n}n}|A|\frac{1}{|A|^{\frac{(n-1)^2-1}{n}}}A^{-1}$$

$$=|A|^{n^2-3n+3}A^{-1}$$

$$=|A|^{\frac{(n-1)^3+1}{n}}A^{-1}$$

(c) $m=4$ 时, 将 A 的 4 阶伴随矩阵记做 $A^{(4^*)}$

因为

$$A^*=|A|A^{-1}\qquad \left(\left(A^*\right)^*\right)^*=|A|^{\frac{(n-1)^3+1}{n}}A^{-1}$$

用同样的方法, 有

$$A^{(4^*)}=\left[\left(\left((A)^*\right)^*\right)^*\right]^*=|A|^{\frac{(n-1)^4-1}{n}}A$$

(d) $m=5$ 时, 同理可知 $A^{(5^*)}=|A|^{\frac{(n-1)^5+1}{n}}A^{-1}$

(2) 再看一般情形

考虑到,

当 $m=2$ 时, $\left(A^*\right)^*=|A|^{\frac{(n-1)^2-1}{n}}A$,

当 $m=3$ 时, $\left(\left(A^*\right)^*\right)^*=|A|^{\frac{(n-1)^3+1}{n}}A^{-1}$,

当 $m=4$ 时, $A^{(4^*)}=|A|^{\frac{(n-1)^4-1}{n}}A$,

当 $m=5$ 时, $A^{(5^*)}=|A|^{\frac{(n-1)^5+1}{n}}A^{-1}$.

一般地有如下猜想:

定理 1 设 A 为 n 阶可逆方阵（n ≥ 2）, 则

$$A^{(m^*)}=\begin{cases}|A|^{\frac{(n-1)^{2k}-1}{n}}A & m=2k,\\ |A|^{\frac{(n-1)^{2k+1}+1}{n}}A^{-1} & m=2k+1,\end{cases}\qquad k=0,1,2,\cdots$$

证明 用数学归纳法证明结论

当$m=2k$, $k\in Z$时,

1^0 取$k=1$, 有$m=2$, 则

$$A^{(2^*)}=|A|^{n-2}A=|A|^{\frac{(n-1)^2-1}{n}}A$$

等式成立.

2^0 设$m=2k$时, 等式成立, 即

$$A^{(m^*)}=|A|^{\frac{(n-1)^{2k}-1}{n}}A$$

3^0 当$m=2(k+1)$时, $A^{(m^*)}=A^{(2(k+1)^*)}=\left|A^{((2k)^*)}\right|^{n-2}A^{((2k)^*)}$

$$=|A|^{n(n-2)\frac{(n-1)^{2k}-1}{n}+(n-2)}|A|^{\frac{(n-1)^{2k}-1}{n}}A$$

$$=|A|^{\frac{(n-1)^{2k}(n-1)^2-1}{n}}A$$

$$=|A|^{\frac{(n-1)^{2(k+1)}-1}{n}}A$$

等式成立.

综上所述, 当$m=2k$, $k\in Z$, 有

$$A^{(m^*)}=|A|^{\frac{(n-1)^{2k}-1}{n}}A.$$

同理可证, 当$m=2k+1$, $k\in Z$, 有

$$A^{(m^*)}=|A|^{\frac{(n-1)^{2k+1}+1}{n}}A^{-1}$$

此猜想得证.

若A为$n(n>2)$阶不可逆方阵，由性质 3 可得$r(A^*)\le 1<n-1$，进而可得

$r[(A^*)^*]=0$，所以$(A^*)^*=0$，故当$m>2$时，$A^{(m^*)}=0$.

§6. 2 m重伴随矩阵的主要性质

性质 6. 2. 1 当$n=2$时, $r(A^{(m^*)})=\begin{cases}2, & r(A)=2\\ 1, & r(A)=1\\ 0, & r(A)=0\end{cases}$

当$n>2$时, $r(A^{(m^*)})=\begin{cases}n, & r(A)=n\\ 0, & r(A)<n\end{cases}$

证明 (1)当$n=2$时,

设$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,则 $A^{*}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, $\left(A^{*}\right)^{*}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ……

所以

$$A^{(m*)}=\begin{cases}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & ,m=2k \quad k=0,1,2,\cdots \\ \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} & ,m=2k+1 \quad k=0,1,2,\cdots\end{cases}$$

因此
$$r(A^{(m*)})=r(A)=\begin{cases}2, & r(A)=2 \\ 1, & r(A)=1 \\ 0, & r(A)=0\end{cases}$$

当$n>2$时,由性质1.2.3知,

$$r(A^{*})=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)<n-1\end{cases}$$

所以
$$\left(A^{*}\right)^{*}=\begin{cases}n, & r(A)=n,\ r(A^{*})=n \\ 0, & r(A)<,\ r(A^{*})\le 1<n-1\end{cases}$$

$$\vdots$$

故
$$r(A^{(m*)})=\begin{cases}n, & r(A)=n \\ 0, & r(A)<n\end{cases}$$

本性质得证.

例5 求矩阵$A=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$的$k$重伴随矩阵$A^{(k*)}$的秩($k$可以为任意数).

分析 此题看似较为复杂,但如果我们熟知性质6.2.1,直接代入公式,问题就会迎刃而解,非常轻松.

解 根据性质6.2.1,因为矩阵A满秩,且$r(A)=3$所以根据性质6.2.1,无论k为何值,都有$r(A^{(k*)})=3$

性质6.2.2 设A为n阶方阵,则 $\left|A^{(m*)}\right|=\left|A\right|^{(n-1)^{m}}$

证明 (1)若$|A|=0$,由性质6.2.1知,当$m=2$时,$\left(A^{2*}\right)=0$,则有$\left|A^{(m*)}\right|=0$.

(2)若$|A|\neq 0$,则

$$\left|A^{(m^*)}\right|=\begin{cases}|A|^{(n-1)^{2k}-1+1}=|A|^{(n-1)^{2k}} & m=2k\\ |A|^{(n-1)^{2k+1}+1-1}=|A|^{(n-1)^{2k+1}} & m=2k+1\end{cases}\qquad k=0,1,2,\cdots$$

即　$m\in Z$时,有$\left|A^{(m^*)}\right|=|A|^{(n-1)^m}$.

例6 若$A=\begin{bmatrix}4&4&2\\3&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$,求$\left|A^{(2007^*)}\right|$

解 因为$|A|=0$,根据性质6.2.2,有

$$\left|A^{(2007^*)}\right|=0$$

性质6.2.3　A可逆时,有

$$\left(A^{(m^*)}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{(m^*)}=\begin{cases}\dfrac{1}{|A|^{\frac{(n-1)^{2k}-1}{n}}}A^{-1} & m=2k,\\ \dfrac{1}{|A|^{\frac{(n-1)^{2k+1}+1}{n}}}A & m=2k+1,\end{cases}\qquad k=0,1,2,3,\cdots$$

证明(数学归纳法)

(1)当$m=1$时,$\left(A^*\right)^{-1}=\left(|A|A^{-1}\right)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A=\left(A^{-1}\right)^*$,等式成立.

(2)设$m=k$时,$\left(A^{(k^*)}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{(k^*)}$.

(3)当$m=k+1$时,

$$\left(A^{((k+1)^*)}\right)^{-1}=\left(A^{((k^*)^*)}\right)^{-1}=\left(\left(A^{(k^*)}\right)^{-1}\right)^*=\left(\left(A^{-1}\right)^{(k^*)}\right)^*=\left(A^{-1}\right)^{((k+1)^*)}$$

综上所述,当$m\in Z$时,有$\left(A^{(m^*)}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{(m^*)}$.

又由性质2.4.1知,

$$\left(A^{(m^*)}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{(m^*)}=\begin{cases}\left|A^{-1}\right|^{\frac{(n-1)^{2k}-1}{n}}A^{-1} & m=2k\\ \left|A^{-1}\right|^{\frac{(n-1)^{2k+1}+1}{n}}A & m=2k+1\end{cases}\qquad k=0,1,2,\cdots$$

性质得证.

性质 6.2.4

$$\left(A^{(m^*)}\right)^T=\left(A^T\right)^{(m^*)}=\begin{cases}|A|^{\frac{(n-1)^{2k}-1}{n}}A^T & m=2k\\ |A|^{\frac{(n-1)^{2k+1}+1}{n}}\left(A^T\right)^{-1} & m=2k+1,\text{且}A\text{可逆}\end{cases}\qquad k=0,1,2,\cdots$$

证明 由数学归纳法和性质 2.3.1 即可证得.

性质 6.2.5 若 A 是幂等阵, 则 $A^{(m^*)}$ 也是幂等阵.

证明 因为 $A^2=A$, 所以 $|A|=1$ 或 $|A|=0$.

(1) 若 $|A|=0$, 由 6.2.1 知, $A^{(m^*)}=0$, 则 $\left(A^{(m^*)}\right)^2=A^{(m^*)}=0$

(2) 若 $|A|=1$, A 可逆, 则 $A^{-1}A^2=A^{-1}A$, 即 $A=E$, 所以 $\left(A^{(m^*)}\right)^2=A^{(m^*)}=E$

性质得证.

性质 6.2.6 若 A 是对合阵, 则 $A^{(m^*)}$ 也是对合阵, 反之也成立.

证明 (1) 由 $A^2=E$, 得 $|A|=1$ 或 $|A|=-1$, 且 $A=A^{-1}$

由定理 1 知, 当 $m=2k$ 时, 由 $\frac{(n-1)^{2k}-1}{n}\in Z$ 知

$$\left(A^{(m^*)}\right)^2=|A|^{\frac{(n-1)^{2k}-1}{n}\times 2}A^2=A^2=E\qquad k=0,1,2,\cdots$$

当 $m=2k+1$ 时, 由 $\frac{(n-1)^{2k+1}+1}{n}\in Z$ 知

$$\left(A^{(m^*)}\right)^2=|A|^{\frac{(n-1)^{2k+1}+1}{n}\times 2}\left(A^{-1}\right)^2=\left(A^{-1}\right)^2=E\qquad k=0,1,2,\cdots$$

所以, 当 $m\in Z$ 时, $A^2=E$ 有 $\left(A^{(m^*)}\right)^2=E$

(2) 反之, 若 $\left(A^{(m^*)}\right)^2=E$, 则 $\left|\left(A^{(m^*)}\right)\right|=1$ 或 $\left|\left(A^{(m^*)}\right)\right|=-1$, 且

$$\left(A^{(m^*)}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{(m^*)}=A^{(m^*)}$$

由性质 1.2.1 知, $|A|=1$ 或 $|A|=-1$, 由性质 6.2.3, 当 $m=2k$ 时,

$$\left(A^{(m^*)}\right)^{-1}=\frac{1}{|A|^{\frac{(n-1)^{2k}-1}{n}}}A^{-1}=A^{(m^*)}=|A|^{\frac{(n-1)^{2k}-1}{n}}A$$

所以
$$|A|^{\frac{(n-1)^{2k}-1}{n}\times 2}A=A^{-1},$$

由 $\frac{(n-1)^{2k}-1}{n}\in Z$ 知 $|A|^{\frac{(n-1)^{2k}-1}{n}\times 2}=1$,

即
$$A=A^{-1}$$

同理可证, 当 $m=2k+1$ 时, $A=A^{-1}$.

因此, 当 $m\in Z$, $\left(A^{(m^*)}\right)^2=E$ 时, 有 $A^2=E$

性质得证.

性质 6.2.7 若 A 是正定阵, 则 $A^{(m^*)}$ 也是正定阵, 反之 $A^{(m^*)}$ 为正定阵, 且 n 为偶数, A 可逆时, A 为正定阵.

证明 (1) 若 A 正定, 则 $A=A^T$, $|A|>0$, 有 $\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^T\right)^{-1}=A^{-1}$

因为 $\left(A^*\right)^T=\left(|A|A^{-1}\right)^T=|A|\left(A^T\right)^{-1}=|A|A^{-1}=A^*$,

又由 $A^*=|A|A^{-1}$, A^{-1} 正定, $|A|>0$, 得 A^* 正定.

同理可证, $\left(A^*\right)^*$ 正定, 以此类推, $A^{(m^*)}$ 正定.

(2) 反之, 若 $A^{(m^*)}$ 正定, 有 $\left(A^{(m^*)}\right)^{-1}$ 正定.

因为 $\left|A^{(m^*)}\right|=|A|^{(n-1)^m}>0$, 当 n 为偶数时, 有 $(n-1)^m$ 为奇数, 则 $|A|>0$.

由 6.2.2 知, 当 $m=2k$ 时, $A=\frac{1}{|A|^{\frac{(n-1)^{2k}-1}{n}}}A^{(m^*)}$, $A^{(m^*)}$ 正定, 所以 A 为正定阵.

同理可证, 当 $m=2k+1$ 时, A 也是正定阵.

性质得证.

例 7 若 A 为正定矩阵, B 也为正定矩阵, 求证 $AB^{(12^*)}$ 和 $\left(AB^{(12^*)}\right)^T$ 也正定.

分析 本题看似复杂, 实则不然, 如果明白了性质 6.2.7, 那么本题非常容易解决.

证明 因为 A 为正定矩阵, B 也为正定矩阵, 所以 AB 也为正定矩阵, 根据性质 6.2.7 有 $AB^{(12^*)}$ 为正定矩阵, 所以有 $AB^{(12^*)}$ 和 $\left(AB^{(12^*)}\right)^T$ 为正定阵.

性质 6.2.8 若 A 是正交阵, 则 $A^{(m^*)}$ 是正交阵, 反之也成立.

证明 (1) 由已知得 $A^T=A^{-1}$, 且 $|A|=1$ 或 $|A|=-1$.

$\langle 1\rangle$ 当 $|A|=1$ 时, 由 6.2.5 知,

$$\left(A^{(m*)}\right)^T=\left(A^T\right)^{(m*)}=\begin{cases}|A|^{\frac{(n-1)^{2k}-1}{n}}A^T=A^T & m=2k\\ |A|^{\frac{(n-1)^{2k+1}+1}{n}}\left(A_T\right)^{-1}=\left(A^T\right)^{-1}=A & m=2k+1\end{cases}\quad k=0,1,2,\cdots$$

由 6.2.3 知,

$$\left(A^{(m*)}\right)^{-1}=\begin{cases}\dfrac{1}{|A|^{\frac{(n-1)^{2k}-1}{n}}}A^{-1}=A^{-1}=A^T & m=2k\\ \dfrac{1}{|A|^{\frac{(n-1)^{2k+1}+1}{n}}}A=A & m=2k+1\end{cases}\quad k=0,1,2,\cdots$$

由上述可得$|A|=1$时, $A^T=A^{-1}$, 有$\left(A^{(m*)}\right)^T=\left(A^{(m*)}\right)^{-1}$,

即$A^{(m*)}$为正交阵.

$\langle 2\rangle$若$|A|=-1$, 当$m=2k$,

$$\left(A^{(m*)}\right)^T=\left(A^T\right)^{(m*)}=|A|^{\frac{(n-1)^{2k}-1}{n}}A^T\quad,\left(A^{(m*)}\right)^{-1}=\frac{1}{|A|^{\frac{(n-1)^{2k}-1}{n}}}A^{-1}$$

由$A^T=A^{-1}$, $|A|^{\frac{(n-1)^{2k}-1}{n}}=\dfrac{1}{|A|^{\frac{(n-1)^{2k}-1}{n}}}$, 知$\left(A^{(m*)}\right)^T=\left(A^{(m*)}\right)^{-1}$

同理可证, 当$m=2k+1$时, 有$\left(A^{(m*)}\right)^T=\left(A^{(m*)}\right)^{-1}$

所以, $|A|=-1$, $A^T=A^{-1}$, 有$\left(A^{(m*)}\right)^T=\left(A^{(m*)}\right)^{-1}$, 即$A^{(m*)}$为正交阵.

综上所述, 若A是正交阵, 则$A^{(m*)}$是正交阵.

(2) 反之, 若$\left(A^{(m*)}\right)^T=\left(A^{(m*)}\right)^{-1}$, 且$\left|A^{(m*)}\right|=1$或$\left|A^{(m*)}\right|=-1$,

则由性质 1.2.1 知 $\qquad |A|=-1$或$|A|=1$.

由 6.2.5 知, 当$m=2k$时,

$$\left(A^{(m*)}\right)^T=\left(A^T\right)^{(m*)}=|A|^{\frac{(n-1)^{2k}-1}{n}}A^T=\left(A^{(m*)}\right)^{-1}=\frac{1}{|A|^{\frac{(n-1)^{2k}-1}{n}}}A^{-1}$$

得 $$|A|^{\frac{(n-1)^{2k}-1}{n}\times 2}A^T=A^{-1},$$

由 $\frac{(n-1)^{2k}-1}{n} \in Z$ 知 $|A|^{\frac{(n-1)^{2k}-1}{n}\times 2}=1$，即 $A^T=A^{-1}$.

同理可证，当 $m=2k+1$ 时，$A^T=A^{-1}$.

综上所述，当 $m \in Z$ 时，$\left(A^{(m^*)}\right)^T=\left(A^{(m^*)}\right)^{-1}$ 有 $A^T=A^{-1}$.

性质得证.

性质 6.2.9 设 A 是 n 阶方阵（$n>2$），若 A 是幂零阵，则 $A^{(m^*)}$ 是幂零阵.

证明 由 $A^2=0$，得 $A=0$ 或秩 $A<n$.

（1）若 $A=0$，则 $\left(A^{(m^*)}\right)^2=0$.

（2）若秩 $A<n$，由 1.1 知，

当 $m>1$ 时，秩 $A^{(m^*)}=0$，则 $\left(A^{(m^*)}\right)^2=0$.

当 $m=1$ 时，$A^2=0$，有 $\left(A^{(m^*)}\right)^2=0$.

所以，当 $n>2$，$A^2=0$ 有 $\left(A^{(m^*)}\right)^2=0$.

性质 6.2.10 若 A 是对称阵，则 $A^{(m^*)}$ 也是对称阵. 反之 $A^{(m^*)}$ 是对称阵，且 A 是可逆的，则 A 是对称阵.

证明 运用性质 1.2.1 及定理 1 即可得到.

性质 6.2.11 若 A 为反对称阵，当 n 为奇数时，$A^{(m^*)}$ 为对称阵；当 n 为偶数时，$A^{(m^*)}$ 为反对称阵.

证明 运用性质 1.2.1 及定理 1 即可得到.

§6. 3 小结

本章研究了矩阵的 m 重伴随矩阵的一般形式及它的性质，可以发现矩阵的 m 重伴随矩阵与矩阵的伴随矩阵具有相似的一些性质，研究伴随矩阵性质的一些方法可直接应用到 m 重伴随矩阵上来.