第2章
母函数与递推关系

2.1 母函数的引入

- 母函数是求解计数问题的一个强有力的工具。
- 其中心思想是：将一个有限或无限序列

$$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

与一个函数项级数

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x)$$

联系起来，使得我们可以通过用解析的方法研究G(x)来得到序列 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 的一些性质。

- 最常用的函数项级数：

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad , \qquad G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

2.1 母函数的引入

- 定义2.1 对于序列 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ ，称函数

$$G(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

为序列 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 的母函数。

- 例 序列 $C(n,0), C(n,1), \ldots, C(n,n)$ 的母函数为

$$C(n,0) + C(n,1)x + \cdots + C(n,n)x^n = (1+x)^n$$

- 例 序列 1, 1, …, 1, …的母函数为

$$1 + x + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

2.1 母函数的引入

- 若我们已知某个序列的母函数，通常可通过对母函数的操作得到该序列的一些重要性质。
- 例 对等式

$$C(n,0)+C(n,1)x+\cdots+C(n,n)x^n=(1+x)^n$$

两边求导得

$$C(n,1)+2C(n,2)x\cdots+nC(n,n)x^{n-1}=n(1+x)^{n-1}$$

再令x=1便得

$$C(n,1)+2C(n,2)+\cdots+nC(n,n)=n2^{n-1}$$

2.1 母函数的引入

- 在等式

$$C(n,1)+2C(n,2)x\cdots+nC(n,n)x^{n-1}=n(1+x)^{n-1}$$

两边同乘以x，然后再对等式的两边求导得

$$C(n,1)x+2C(n,2)x^{2}\cdots+nC(n,n)x^{n}=nx(1+x)^{n-1}$$

$$C(n,1)+2^{2}C(n,2)x+\cdots+n^{2}C(n,n)x^{n-1}$$

$$=n(1+x)^{n-1}+n(n-1)x(1+x)^{n-2}$$

$$C(n,1)+2^{2}C(n,2)+\cdots+n^{2}C(n,n)$$

$$=n2^{n-1}+n(n-1)2^{n-2}=n(n+1)2^{n-2}$$

2.1 母函数的引入

- 通常序列$a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots$与某个问题序列$P_0,P_1,\cdots,P_n,\cdots$的计数问题相对应，若已知序列的母函数，则可确定该序列，从而可以解决相应的计数问题。
- 例2.2 有红球两只，白、黄球各一只，试求有多少种不同的组合方案?

解 所求组合方案的母函数为

$$A(x)=(1+rx+r^2x^2)(1+wx)(1+yx)$$
$$=1+(r+w+y)x+(r^2+rw+ry+wy)x^2$$
$$+(r^2w+r^2y+rwy)x^3+(r^2wy)x^4$$

2.1 母函数的引入

- 如果只需要求不同的组合方案数，那么可考虑下列母函数

$$A(x) = (1 + x + x^2)(1 + x)(1 + x)$$
$$= 1 + 3x + 4x^2 + 3x^3 + x^4$$

- 所求组合方案数为：**1+3+4+3+1=12**。

2.1 母函数的引入

- 例2.3 某单位有8位男同志，5位女同志。现要组织一个由偶数个男同志和数目不少于两个的女同志组成的小组，试求有多少种组成方式?

解 所求组成方式数序列的母函数为

$$C(x)$$

$$=(1+C(8,2)x^2+\cdots+C(8,8)x^8)(C(5,2)x^2+\cdots+C(5,5)x^5)$$

$$=(1+28x^2+70x^4+28x^6+x^8)(10x^2+10x^3+5x^4+x^5)$$

$$=10x^2+10x^3+285x^4+281x^5+840x^6+728x^7+630x^8$$

$$+350x^9+150x^{10}+38x^{11}+5x^{12}+x^{13}$$

2.1 母函数的引入

- 所求的组成方式数为

$$
\begin{aligned}
&10+10+285+281+840+728\\
&+630+350+150+38+5+1\\
&=3328
\end{aligned}
$$

2.2 母函数的性质

- 几个常见的母函数：
- (1) $$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$
- (2)

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x}$$

$$=(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)$$

$$=1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n+\cdots$$

2.2 母函数的性质

- (3)

$$\frac{1}{(1-x)^n}$$

$$=1+nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}x^k+\cdots$$

- (4)牛顿二项式公式：

$$(1\pm x)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(\pm x)^k$$

2.2 母函数的性质

$$(1-x)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}(-x)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-n(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}(-x)^k$$

$$=\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty}\frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}x^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k$$

2.2 母函数的性质

- 例2.4 已知 $G(x)=(x^4+x^5+x^6+\cdots)^6$，

  求 $a_k, k=0,1,2,\cdots$。

  解 $G(x)=(x^4+x^5+x^6+\cdots)^6$

$$=\left[x^4(1+x+x^2+\cdots)\right]^6=x^{24}(1-x)^{-6}$$

$$=x^{24}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-6}{k}(-x)^k$$

$$=x^{24}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-6)(-6-1)\cdots(-6-k+1)}{k!}(-1)^k x^k$$

$$=x^{24}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+5)(k+4)\cdots 6}{k!}x^k=x^{24}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+5}{k}x^k$$

2.2 母函数的性质

- 得

$$a_k=0,\text{当}k<24\text{时}，\quad a_k=\binom{k+5-24}{k-24},k\geq 24$$

2.1 母函数的引入

- 定理1.2 在n个不同的元素中取r个进行组合，若允许重复，则组合数为 $C(n+r-1,r)$ 。
- 证 所求组合数的母函数为

$$(1+x+x^2+\cdots+x^r+\cdots)^n$$

$$=\left(\frac{1}{1-x}\right)^n=(1-x)^{-n}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n+r-1}{r}x^r$$

2.2 母函数的性质

- 设 $\{x_k\}$，$\{y_k\}$为两个序列，其相应的母函数为A(x)，B(x)。

  性质1 若

$$b_k=\begin{cases}0, & k<l\\ a_{k-l}, & k\ge l\end{cases}$$

则 $B(x)=x^l A(x)$ 。

$$B(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{l-1}x^{l-1}+b_lx^l+b_{l+1}x^{l+1}+\cdots$$

$$=0+0+\cdots+0+a_0x^l+a_1x^{l+1}+\cdots$$

$$=x^l(a_0+a_1x+\cdots)=x^lA(x)$$

2.2 母函数的性质

- 性质2 若 $b_k = a_{k+l}$ ，则

$$B(x)=\left[A(x)-\sum_{k=0}^{l-1} a_k x^k\right] \Big/ x^l$$

- 证

$$B(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{l-1}x^{l-1}+b_lx^l+b_{l+1}x^{l+1}+\cdots$$

$$=a_l+a_{l+1}x+a_{l+2}x^2+\cdots$$

$$=(a_lx^l+a_{l+1}x^{l+1}+a_{l+2}x^{l+2}+\cdots)/x^l$$

$$=(A(x)-a_0-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_{l-1}x^{l-1})/x^l$$

2.2 母函数的性质

- 性质3 若 $b_k=\sum_{i=0}^{k}a_i$，则 $B(x)=\dfrac{A(x)}{1-x}$

$$B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^k$$

$$=a_0+(a_0+a_1)x+(a_0+a_1+a_2)x^2$$

$$+\cdots+(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_k)x^k+\cdots$$

$$=a_0\sum_{k=0}^{\infty}x^k+a_1x\sum_{k=0}^{\infty}x^k+\cdots+a_kx^k\sum_{k=0}^{\infty}x^k+\cdots$$

$$=\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k+\cdots\right)\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{A(x)}{1-x}$$

2.2 母函数的性质

- 性质4 若 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ 收敛，$b_k = \sum_{i=k}^{\infty} a_i$ ，则

$$B(x) = \frac{A(1) - xA(x)}{1 - x}$$

2.2 母函数的性质

$$B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^k$$

$$=A(1)+(A(1)-a_0)x+(A(1)-a_0-a_1)x^2$$

$$+\cdots+(A(1)-a_0-a_1-\cdots-a_{k-1})x^k+\cdots$$

$$=A(1)\sum_{k=0}^{\infty}x^k-a_0x\sum_{k=0}^{\infty}x^k-\cdots-a_{k-1}x^k\sum_{k=0}^{\infty}x^k-\cdots$$

$$=\left(A(1)-a_0x-a_1x^2-\cdots-a_{k-1}x^k-\cdots\right)\sum_{k=0}^{\infty}x^k$$

$$=\frac{\left(A(1)-xA(x)\right)}{1-x}$$

2.2 母函数的性质

- 性质5 若 $b_k = ka_k$ ，则 $B(x) = xA'(x)$ 。
- 证

$$A'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(a_k x^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1}$$

$$xA'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} ka_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = B(x)$$

2.2 母函数的性质

- 性质6 若 $b_k = \dfrac{a_k}{k+1}$，则 $B(x) = \dfrac{1}{x}\int_0^x A(x)dx$ 。
- 证

$$\int_0^x A(x)dx = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x a_k x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}a_k x^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+1} = x\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = xB(x)$$

2.2 母函数的性质

- 性质7 若 $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$，则 $C(x) = A(x)B(x)$
- 证

$$A(x)B(x) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right)x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = C(x)$$

2.2 母函数的性质

- 例 计算下列和式

$$\sum_{k=1}^{n-2} k^2 \binom{n-1}{k}$$

解 令

$$a_k = k^2 \binom{n-1}{k}, \quad b_k = k \binom{n-1}{k}, \quad c_k = \binom{n-1}{k}$$

因为$b_k = kc_k$ ，由性质5知 $B(x) = xC'(x)$。

又$a_k = kb_k$，由性质5知 $A(x) = xB'(x)$。

2.2 母函数的性质

$$C(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$$

$$= \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} x + \cdots + \binom{n-1}{n-1} x^{n-1}$$

$$= (1+x)^{n-1}$$

$$C'(x) = (n-1)(1+x)^{n-2}$$

$$C''(x) = (n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}$$

2.2 母函数的性质

$$A(x)=xB'(x)=x[C'(x)+xC''(x)]$$

$$=x[(n-1)(1+x)^{n-2}+x(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}]$$

$$=x(n-1)(1+x)^{n-2}+x^2(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}$$

$$A(1)=\sum_{k=1}^{n-1}k^2\binom{n-1}{k}$$

$$=(n-1)2^{n-2}+(n-1)(n-2)2^{n-3}=n(n-1)2^{n-3}$$

$$\sum_{k=1}^{n-2}k^2\binom{n-1}{k}=n(n-1)2^{n-3}-(n-1)^2$$

习题

- **1.9 试证n^2的正除数的数目是奇数。**

证 当n=1时，结论显然正确。

当 $n>1$ 时，设n的因子分解为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ ，

$$n^2=p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}\cdots p_k^{2\alpha_k}$$

所以n^2的正除数的数目是

$$(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)\cdots(2\alpha_k+1)=\text{奇数}$$

习题

- **1.16 n个完全一样的球，放到r个有标志的盒子($n \geq r$)中，无一空盒，试问有多少种方案？**
- **解 先将r个分别放入r个盒子，然后再将剩余的n-r个球任意地放到r个盒子中，所求方案数为**

$$\binom{r+n-r-1}{n-r} = \binom{n-1}{n-r} = \binom{n-1}{r-1}$$

习题

- **解2 所求组合方案的母函数为**

$$(x+x^2+\cdots+x^k+\cdots)^r$$

$$=x^r\left(\frac{1}{1-x}\right)^r=x^r(1-x)^{-r}=x^r\sum_{n=0}^{\infty}\binom{r+n-1}{n}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{r+n-1}{n}x^{n+r}=\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n-1}{n-r}x^n=\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n-1}{r-1}x^n$$

习题

- **1.27 6位男宾，5位女宾围一圆桌而坐，**
  (a) 女宾不相邻有多少种方案？
  (b) 所有女宾在一起有多少种方案？
  (c) 一女宾A和两位男宾相邻又有多少种方案？
  解 (a) 先让6位男宾围圆桌坐下，有5!种方案，再将5位女宾插入到男宾之间，有种

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 6!$$

方式，所以共有5!6!种方案。

习题

- (b) 将5位女宾视为一人，与6位男宾围圆桌坐下，有6!种方案，考虑到女宾之间的次序，共有6!5!种方案。
- (c) 从6位男宾中任取两人，其方案数为C(6,2)，对于任何取定的两位男宾，将A插入到这两位男宾之间，有2种方案，将这两位男宾与A视为一人，与其他人围圆桌坐下，有8!种方案，所以共有2C(6,2)8!种方案。

习题 2

- 2.1 2.4 2.6 2.48

2.3整数的拆分

- 所谓整数的拆分是把一个正整数n表示成若干个正整数的和，而这些正整数的次序是无关紧要的。

例 5，4+1，3+2，3+1+1，2+2+1，2+1+1+1，1+1+1+1+1是整数5的7个不同的拆分。

在整数的拆分表示 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ 中，常使

$$n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k$$

不同拆分的总数称为拆分数，通常用 $p(n)$ 表示n的拆分数。

2.3整数的拆分

- 例 求 $(1+x^4+x^8)^{100}$ 中项 x^{20} 的系数。

解 项 x^{20} 有以下三种生成方式：

① $x^4x^4x^4x^4x^4=x^{20}$ ：有$C(100,5)$ 种选取方法。

② $x^8x^4x^4x^4=x^{20}$ ：有 $C(100,1)C(99,3)$ 种选取方法。

③ $x^8x^8x^4=x^{20}$ ：有 $C(100,2)C(98,1)$ 种选取方法。

所以项 x^{20} 的系数为：

$$C(100,5)+C(100,1)C(99,3)+C(100,2)C(98,1)$$

2.3整数的拆分

- 例2. 10 若有1克、2克、3克、4克的砝码各一枚，问能称出哪几种重量？有几种可能的方案？

解 其母函数为

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$$
$$=1+x+x^2+2x^3+2x^4+2x^5+2x^6$$
$$+2x^7+x^8+x^9+x^{10}$$

知能称出1到10克的重量，系数为方案数。

譬如有 5=4+1=3+2， 6=4+2=3+2+1。

2.3整数的拆分

- 例2. 11 求用1角、2角、3角的邮票可贴出不同数值邮资的方案数的母函数。

解 因邮票允许重复，故其母函数为

$$(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)$$

$$=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^3}=\frac{1}{1-x-x^2+x^4+x^5-x^6}$$

$$=1+x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+7x^6+\cdots$$

由x^4的系数为4知，用1角、2角、3角的邮票贴出数值4的方案数为4。

2.3整数的拆分

- 例2. 12 若有1克的砝码3枚，2克的4枚，4克的2枚。问能称出哪些重量？各有几种方案？

$$
\begin{aligned}
&G(x)\\
&=(1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4+x^6+x^8)(1+x^4+x^8)\\
&=1+x+2x^2+2x^3+3x^4+3x^5+4x^6+4x^7\\
&\quad+5x^8+5x^9+5x^{10}+5x^{11}+4x^{12}+4x^{13}\\
&\quad+3x^{14}+3x^{15}+2x^{16}+2x^{17}+x^{18}+x^{19}
\end{aligned}
$$

2.3整数的拆分

- 例2.13 整数n拆分成1, 2, 3, ..., m的和，并允许重复，求其母函数。若m至少出现一次，其母函数如何？

解 其母函数为

$$G_1(x)$$

$$=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)\cdots(1+x^m+x^{2m}+\cdots)$$

$$=\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\cdots\frac{1}{1-x^m}=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$

2.3整数的拆分

- 若m至少出现一次，其母函数为

$$G_1(x)$$

$$=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)\cdots(x^m+x^{2m}+\cdots)$$

$$=\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\cdots\frac{x^m}{1-x^m}=\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$

$$=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}-\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^{m-1})}$$

2.3整数的拆分

- 例2.15 设有1、2、4、8、16、32克砝码各一枚，试问能称出哪些重量？分别有几种方案？

$$G(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})$$

$$=\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdot\frac{1-x^{16}}{1-x^8}\cdot\frac{1-x^{32}}{1-x^{16}}\cdot\frac{1-x^{64}}{1-x^{32}}$$

$$=\frac{1-x^{64}}{1-x}=(1+x+x^2+\cdots+x^{63})$$

用这些砝码可以称出从1克到63克的重量，而且方案是唯一的。

2.3整数的拆分

- 定理2.1 正整数n拆分成不同整数之和的拆分数等于拆分成奇整数之和的拆分数。

证 设 a_n 表示n拆分成不同整数之和的拆分数，则序列 $\{a_n\}$的母函数为

$$G(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots$$

$$=\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdots$$

$$=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1}{1-x^7}\cdots$$

2.3整数的拆分

- 定理2.2 n拆分成其重复数不超过2的数的和，其拆分数等于它拆分成不被3除尽的数的和的拆分数。

证 $\{a_n\}$的母函数为

$$G(x)$$

$$=(1+x+x^2)(1+x^2+x^4)(1+x^3+x^6)(1+x^4+x^8)\cdots$$

$$=\frac{1-x^3}{1-x}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^9}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^{12}}{1-x^4}\cdots$$

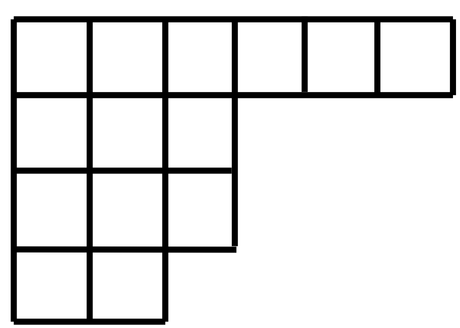
$$=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^4}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdots$$

2.3整数的拆分

- 定理2.3　n拆分成其重复数不超过k的数的和，其拆分数等于它拆分成不被k+1除尽的数的和的拆分数。

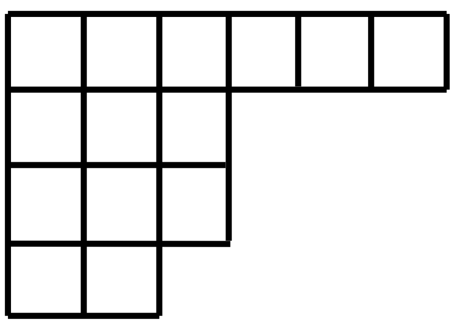
2.4 Ferrers图象

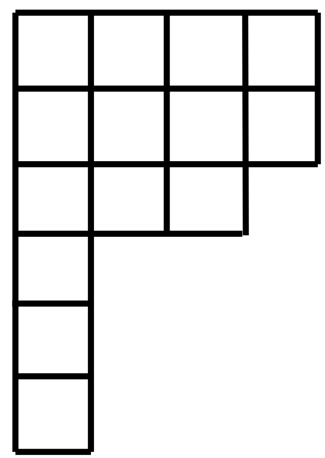
- Ferrers图象：一个从上而下的n层格子，n_i为第i层的格子数。当 $n_i \geq n_{i+1}(i=1,2,\cdots,n-1)$ 时，即上层的格子数不少于下层的格子数时，称之为Ferrers图象。
- 整数的一个拆分可以用一个Ferrers图象来表示，图象中的每一行对应于拆分的一部分。
- 例 整数14的拆分6+3+3+2可以用下列Ferrers图象来表示



2.4 Ferrers图象

- Ferrers图象的性质：
- 每一层至少有一个格子；
- 第一行与第一列互换，第二行与第二列互换，…，所得到的图象仍然是Ferrers图象，这两个Ferrers图象称为是一对共轭的Ferrers图象。





2.4 Ferrers图象

- 利用Ferrers图象可得到关于整数拆分的一些性 质。

  (1) 整数n拆分成最大数为k的拆分数和数n拆分成k个数的和的拆分数相等。

  (2) 整数n拆分成最多不超过k个数的和的拆分数和n拆分成最大数不超过k的拆分数相等。

2.4 Ferrers图象

- 由(2)知，拆分成最多不超过m个数的和的拆分数的母函数为

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$

- 正好拆分成m个数的和的拆分数的母函数为

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}-\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^{m-1})}$$

2.4 Ferrers图象

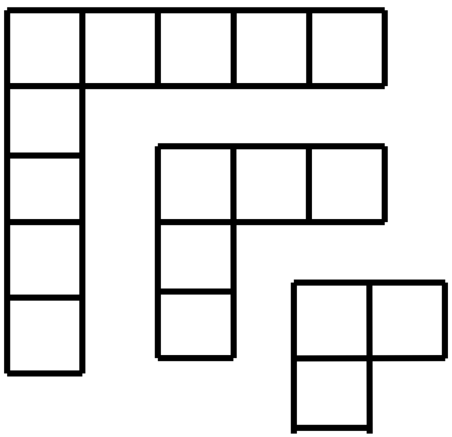
- （3）整数n拆分成互不相同的若干奇数的和的拆分数，和n拆分成有自共轭的Ferrers图象的拆分数相等。

  设 $n=(2n_1+1)+\cdots+(2n_k+1)$，$n_1>n_2>\cdots>n_k$

  构造一个Ferrers图象，其第一行，第一列都是 $2n_1+1$ 格，第二行，第二列都是 $2n_2+1$ 格，…，第k行，第k列都是 $2n_k+1$ 格，这样所得的Ferrers图象是自共轭的。反之亦然。

2.4 Ferrers图象

- 例　17=9+5+3所对应的Ferrers图象为



2.6 指数型母函数

- 问题：设有n个元素，其中元素 a_1重复了 n_1 次，元素 a_2 重复了n_2次，…，元素 a_k 重复了n_k次，$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$ ，从中取r个排列，求不同的排列数。

2.6 指数型母函数

- 定理 设 $S=\{n_1a_1,n_2a_2,\cdots,n_ka_k\}$为一多重集，其中 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$，那么从S中取n个元素的排列数为

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

- 证 排列的个数为

$$C(n,n_1)C(n-n_1,n_2)\cdots C(n-n_1-n_2\cdots n_{k-1},n_k)$$

$$=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

2.6 指数型母函数

- 例2.16 8个元素中 a_1 重复了3次，a_2 重复了2次，a_3 重复了3次，从中取r个，设其组合数为 c_r，则 $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_8$ 的母函数为

$$G(x) = (1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + x^3)$$

$$= 1 + 3x + 6x^2 + 9x^3 + 10x^4 + 9x^5 + 6x^6 + 3x^7 + x^8$$

由 x^4 的系数为10知，从这8个元素中取4个组合，其组合数为10。这10个组合是如何构成的呢？考虑

2.6 指数型母函数

$$(1+x_1+x_1^2+x_1^3)(1+x_2+x_2^2)(1+x_3+x_3^2+x_3^3)$$

$$=\cdots+(x_1x_3^3+\cdots)+\cdots$$

其中项 $x_1x_3^3$ 表示1个a_1，3个 a_3 。而由1个 a_1 ，3 a_3 个所组成排列的个数为

$$\frac{4!}{1!3!}\Rightarrow\frac{4!}{1!3!}\cdot\frac{x^4}{4!}$$

2.6 指数型母函数

- 定义 对于序列称函数 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$

$$G_e(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + \cdots + a_n \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

为序列的指数型母函数。

- 例2. 17 序列1, 1, 1, ..., 1, ...的指数型母函数为

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots = e^x$$

2.6 指数型母函数

- 例2. 18 序列0!, 1!, 2!, ..., k!, ...的指数型母函数为

$$0!+1!\frac{x}{1!}+2!\frac{x^2}{2!}+\cdots=1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

2.6 指数型母函数

- 例2. 20 证明序列 $1, 1\cdot 3, 1\cdot 3\cdot 5, 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7, \cdots$ 的指数型母函数为 $(1-2x)^{-\frac{3}{2}}$。

2.6 指数型母函数

$$(1-2x)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-\frac{3}{2}}{r}(-2x)^r$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{-\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{3}{2}-r+1\right)}{r!}(-1)^r 2^r x^r$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdots\frac{2r+1}{2}}{r!}2^r x^r=\sum_{r=0}^{\infty}[1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdot(2r+1)]\frac{x^r}{r!}$$

2.6 指数型母函数

- 定理 设 $S=\{n_1b_1,n_2b_2,\cdots,n_kb_k\}$为一多重集，其中 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$，并设 $a_r(r=0,1,2,\ldots)$ 为S的r排列，则 $\{a_r\}$ 的指数型母函数为：

$$G_e(x)=$$

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^{n1}}{n_1!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^{n2}}{n_2!}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^{nk}}{n_k!}\right)$$

2.6 指数型母函数

- 例2.22 由 a,b,c,d 这4个符号取5个进行排列，要求 a 出现的次数不超过2次，但不能不出现；b 出现的次数不超过1次；c 出现的次数不超过3次，可以不出现；d 出现的次数为偶数。求满足上述条件排列的个数。

解 设满足上述条件的r排列的个数为 p_r 个，序列 $p_1,p_2,\cdots,p_{10}$ 的指数型母函数为

2.6 指数型母函数

$$G_e(x)=\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)(1+x)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)$$

$$=\frac{x}{1!}+5\frac{x^2}{2!}+18\frac{x^3}{3!}+64\frac{x^4}{4!}+215\frac{x^5}{5!}+645\frac{x^6}{6!}$$

$$+1785\frac{x^7}{7!}+140\frac{x^8}{8!}+7650\frac{x^9}{9!}+12600\frac{x^{10}}{10!}$$

- 故所求排列的个数为215。

2.6 指数型母函数

- 例2. 23 求1, 3, 5, 7, 9这5个数字组成的n位数的个数，要求其中3, 7出现的次数为偶数，其它数字出现的次数不加限制。

解 设满足条件的r位数的个数为a_r，则$\{a_r\}$对应的指数型母函数为

$$G_e(x)=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^3$$

2.6 指数型母函数

$$=\left(\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right)^2(e^x)^3=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2e^{3x}$$

$$=\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})e^{3x}=\frac{1}{4}(e^{5x}+2e^{3x}+e^x)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\right)$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(5^n+2\cdot 3^n+1)\frac{x^n}{n!}$$

- 所以 $a_n=\frac{1}{4}(5^n+2\cdot 3^n+1)$

习题

- 2.11 2.12 2.50

2.6 指数型母函数

- 例2.24 设为7个有区别的球，将它们放进4个有标标志的盒子，要求1，2两盒必须含偶数个球，第3盒含奇数个球，问有多少种不同的分配方案？

解

$$3\ 1\ 2\ 4\ 2\ 1\ 4 \longleftrightarrow \underset{1}{\boxed{2,6}}\quad \underset{2}{\boxed{3,5}}\quad \underset{3}{\boxed{1}}\quad \underset{4}{\boxed{4,7}}$$

设将r个有区别的球放进4个有标志的盒子的方案数为 a_r，那么序列 $\{a_r\}$ 的指数型母函数为

2.6 指数型母函数

$$\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)$$

$$=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)e^x=\frac{1}{8}(e^{2x}+2+e^{-2x})(e^x-e^{-x})e^x$$

$$=\frac{1}{8}(e^{4x}+e^{2x}-e^{-2x}-1)=\frac{1}{8}\sum_{r=1}^{\infty}[4^r+2^r-(-2)^r]\frac{x^r}{r!}$$

- 所求方案数为 $a_7=\frac{1}{8}\left[4^7+2^7-(-2)^7\right]=2080$

2.6 指数型母函数

- 例 2.25 r个有标志的球，放进n个不同的盒子，要求无一空盒，问有多少种不同的分配方案？

解 这相当于n个有标志的对象取r个作允许重复的排列，且每个对象至少出现一次。

设排列数为 a_r ，则序列 $\{a_r\}$ 的指数型母函数为

$$G(x)=\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^n=(e^x-1)^n$$

2.6 指数型母函数

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{x})^{n-k}(-1)^{k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(n-k)^{r}}{r!}x^{r}\right](-1)^{k}$$

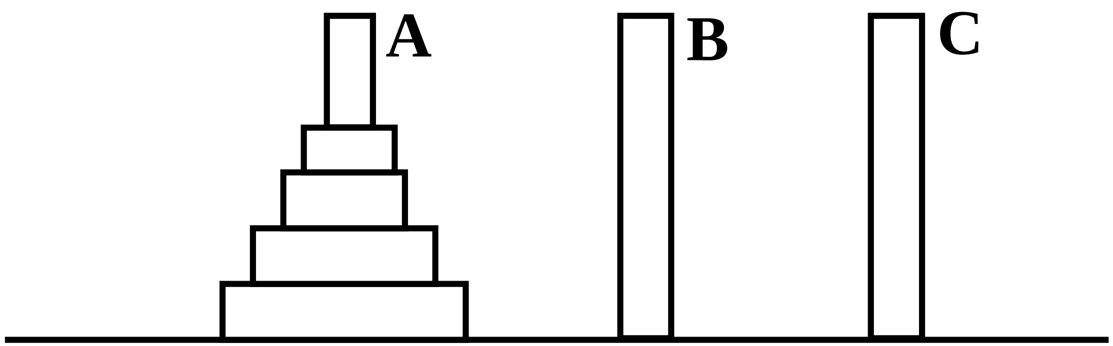
$$=\sum_{r=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}(n-k)^{r}\right]\frac{x^{r}}{r!}$$

- 故

$$a_{r}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}(n-k)^{r}$$

2.7 递推关系举例

- 例2.26 Hanoi塔问题。



2.7 递推关系举例

- 算法的分析：设h_n 为将n个圆盘从塔座A移动到塔座B上所需要的移动次数，则有

$$\begin{cases} h_n = 2h_{n-1} + 1 & \mathrm{n} > 1 \\ h_1 = 1 & \mathrm{n} = 1 \end{cases}$$

- 解法1： $h_n = 2h_{n-1} + 1 = 2(2h_{n-2} + 1) + 1$

$$= 2^2 h_{n-2} + 2 + 1 = 2^2(2h_{n-3} + 1) + 2 + 1$$

$$= 2^3 h_{n-3} + 2^2 + 2 + 1$$

$$= 2^{n-1} h_1 + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 = 2^n - 1$$

2.7 递推关系举例

- 解法2：用母函数求解

$$H(x) = h_1 x + h_2 x^2 + \cdots + h_n x^n + \cdots$$

$$-2xH(x) = \quad -2h_1 x^2 - \cdots - 2h_{n-1} x^n + \cdots$$

$$(1-2x)H(x) = x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{x}{1-x}$$

$$H(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \left[\frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}(2^n - 1)x^n$$

$$h(n) = 2^n - 1$$

2.7 递推关系举例

- 例2.28 求n位十进制数中出现偶数个5的数的个数。

解 设 =n位十进制数中出现偶数个5的数的个数，

a_n=n位十进制数中出现奇数个5的数的个数。

则有 b_n

$$\begin{cases} a_n = 9a_{n-1} + b_{n-1}, & n > 1 \\ b_n = 9b_{n-1} + a_{n-1}, & n > 1 \end{cases}$$

且有 。

$$a_1 = 8,\ b_1 = 1$$

2.7 递推关系举例

- 设序列 $a_1,\cdots,a_n,\cdots$ 和序列 $b_1,\cdots,b_n,\cdots$ 的母函数分别为 $A(x),B(x)$ 。

$$A(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

$$B(x)=b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots$$

$$\begin{array}{rl}
A(x)= & a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \\
-9xA(x)= & -9a_1x^2-\cdots-9a_{n-1}x^n-\cdots \\
-xB(x)= & -b_1x^2-\cdots-b_{n-1}x^n-\cdots \\
\hline
\end{array}$$

$$(1-9x)A(x)-xB(x)=a_1x=8x$$

2.7 递推关系举例

- 类似地可得

$$(1-9x)B(x)-xA(x)=b_1x=x$$

- 解方程组

$$\begin{cases}(1-9x)A(x)-xB(x)=8x\\-xA(x)+(1-9x)B(x)=x\end{cases}$$

其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}(1-9x) & -x\\ -x & (1-9x)\end{vmatrix}=(1-9x)^2-x^2$$

$$=1-18x+80x^2=(1-8x)(1-10x)$$

2.7 递推关系举例

$$A(x)=\frac{\begin{vmatrix}8x & -x\\ x & (1-9x)\end{vmatrix}}{(1-8x)(1-10x)}=\frac{-71x^2+8x}{(1-8x)(1-10x)}$$

$$A(x)=\frac{-71x^2+8x}{(1-8x)(1-10x)}=\frac{x}{2}\left(\frac{7}{1-8x}+\frac{9}{1-10x}\right)$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(7\cdot 8^n+9\cdot 10^n)x^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(7\cdot 8^n+9\cdot 10^n)x^{n+1}$$

$$a_n=\frac{1}{2}(7\cdot 8^{n-1}+9\cdot 10^{n-1})$$

2.7 递推关系举例

$$a_n = 9a_{n-1} + b_{n-1}，\ b_{n-1} = 9\times 10^{n-2} - a_{n-1}$$

$$a_n = 8a_{n-1} + 9\times 10^{n-2},\ a_1 = 8$$

$$A(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

$$-8xA(x) = \qquad -8a_1 x^2 - \cdots - 8a_{n-1} x^n - \cdots$$

$$(1-8x)A(x) = a_1 x + 9\cdot 10^0 x^2 + 9\cdot 10 x^3 + \cdots + 9\cdot 10^{n-2} x^n + \cdots$$

$$= 8x + \frac{9x^2}{1-10x} = \frac{8x-71x^2}{1-10x}$$

2.7 递推关系举例

$$A(x)=\frac{8x-71x^2}{(1-8x)(1-10x)}=\frac{x}{2}\left(\frac{7}{1-8x}+\frac{9}{1-10x}\right)$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[7\times 8^n+9\cdot 10^n\right]x^n$$

$$a_n=\frac{1}{2}(7\cdot 8^{n-1}+9\cdot 10^{n-1})$$

2.7 递推关系举例

- 方法3：设由0, 1, …, 9组成的含有偶数个5的n位位串的个数为a_n, 那么$\{a_n\}$的母函数为

$$G_e(x)=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^9\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)$$

$$=e^{9x}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{10x}+e^{8x}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(10^n+8^n\right)\frac{x^n}{n!}$$

$$a_n=\frac{1}{2}\left(10^n+8^n\right)$$

- 所求数的个数

$$\frac{1}{2}\left(10^n+8^n\right)-\frac{1}{2}\left(10^{n-1}+8^{n-1}\right)=\frac{1}{2}\left(9\cdot10^{n-1}+7\cdot8^{n-1}\right)$$

2.7 递推关系举例

- 例2. 30 从n个元素中取r个进行允许重复的组合。假定允许重复的组合数用 $C^*(n,r)$表示，那么有以下递推关系

$$\begin{cases} C^*(n,r) = C^*(n,r-1) + C^*(n-1,r) \\ C^*(n,0) = 1 \end{cases}$$

$$G_n(x) = C^*(n,0) + C^*(n,1)x + C^*(n,2)x^2 + \cdots$$

$$-xG_n(x) = \qquad -C^*(n,0)x - C^*(n,1)x^2 - \cdots$$

$$-G_{n-1}(x) = -C^*(n-1,0) - C^*(n-1,1)x - \cdots$$

$$(1-x)G_n(x) - G_{n-1}(x) = 0$$

2.7 递推关系举例

$$G_n(x) = \frac{1}{1-x}G_{n-1}(x) = \frac{1}{(1-x)^2}G_{n-2}(x)$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{1}{(1-x)^{n-1}}G_1(x)$$

$$= \frac{1}{(1-x)^{n-1}}[C^*(1,0) + C^*(1,1)x + C^*(1,2)x^2 + \cdots]$$

$$= \frac{1}{(1-x)^{n-1}}[1 + x + x^2 + \cdots] = \frac{1}{(1-x)^n}$$

2.7 递推关系举例

$$(1-x)^{-n}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n}{r}(-x)^r$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-r+1)}{r!}(-x)^r$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2r}n(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!}x^r$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}C(n+r-1,r)x^r$$

$$\Rightarrow\qquad C^*(n,r)=C(n+r-1,r)$$

2.8 Fibonacci数列

- 问题：有初生的雌、雄小兔一对，假定第2个月后便每月繁殖雌、雄各一的小兔一对。问n个月后共有多少对兔子？

第一个月：只有1对兔子。

第二个月：仍然只有1对兔子。

第三个月：有2对兔子。

第四个月：有3对兔子。

第五个月：有5对兔子

2.8 Fibonacci数列

- 设 F_n 为第n个月时兔子的对数，那么有

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_1 = 1, F_2 = 1 \end{cases}$$

- 设$G(x) = F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 \cdots + F_nx^n + \cdots$

$$-xG(x) = \quad -F_1x^2 - F_2x^3 - \cdots - F_{n-1}x^n - \cdots$$

$$-x^2G(x) = \quad -F_1x^3 - \cdots - F_{n-2}x^n - \cdots$$

$$(1 - x - x^2)G(x) = x$$

2.8 Fibonacci数列

$$G(x)=\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{x}{\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)}$$

$$=\frac{A}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}+\frac{B}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}$$

2.8 Fibonacci数列

$$x = A\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)+B\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)$$

$$=(A+B)-\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\mathrm{A}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)B\right]x$$

- 解方程组

$$\begin{cases} A+B=0 \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)A+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)B=-1 \end{cases}$$

$$A=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$B=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

2.8 Fibonacci数列

- $$G(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}-\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]x^n$$

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

2.8 Fibonacci数列

- 若干等式
- ① $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$
- 证

$$F_1 = F_3 - F_2$$

$$F_2 = F_4 - F_3$$

$$\cdots\cdots$$

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$$

2.8 Fibonacci数列

- ② $F_1+F_3+\cdots+F_{2n-1}=F_{2n}$
- 证

$$F_1=F_2$$

$$F_3=F_4-F_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$F_{2n-1}=F_{2n}-F_{2n-2}$$

$$F_1+F_3+\cdots+F_{2n-1}=F_{2n}$$

2.8 Fibonacci数列

- ③ $F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2=F_nF_{n+1}$
- 证

$$F_1^2=F_1F_2$$

$$F_2^2=F_2(F_3-F_1)=F_2F_3-F_1F_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$F_n^2=F_n(F_{n+1}-F_{n-1})=F_nF_{n+1}-F_{n-1}F_n$$

$$F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2=F_nF_{n+1}$$

习题

- **2.5**
- **2.14**
- **2.18 (a) $a_0=1, a_1=1$**

2.10 线性常系数递推关系

- 定义 设k是给定的正整数，如果序列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = f(n), n \ge k,\ c_k \ne 0$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 是常数，则该方程称为序列$\{a_n\}$的 k 阶常系数线性递推关系。若 $f(n)=0$ ，则线性递推关系称为齐次的。

- 定义 方程 $x^k + c_1 x^{k-1} + \cdots + c_{k-1} x + c_k = 0$ 称为递推关系的特征方程，其根称为递推关系的特征根。

k阶常系数线性齐次递推关系

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0$$

- 引理1 r 设为非零数，则 $a_n = r^n$ 是齐次递推关系的一个解当且仅当 r 是递推关系的特征根。

证 必要性。

若 $a_n = r^n$ 是递推关系的一个解，那么有

$$r^n + c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k} = 0$$

$$r^{n-k}(r^k + c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \cdots + c_k) = 0$$

$$r^k + c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \cdots + c_k = 0$$

k阶常系数线性齐次递推关系

- 充分性。

若r 是递推关系的特征根。那么有

$$r^k + c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \cdots + c_k = 0$$

在方程的两端同乘以 r^{n-k} ，便得

$$r^n + c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k} = 0$$

即 $a_n = r^n$ 是递推关系的一个解。

k阶常系数线性齐次递推关系

- 引理2 若 $\{a_n\},\{b_n\}$都是齐次递推关系的解，那么 $\{A_1a_n + A_2b_n\}$也是齐次递推关系的解。

证 由 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是齐次递推关系的解知

$$a_n + c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k} = 0$$

$$b_n + c_1b_{n-1} + c_2b_{n-2} + \cdots + c_kb_{n-k} = 0$$

$$A_1a_n + c_1A_1a_{n-1} + c_2A_1a_{n-2} + \cdots + c_kA_1a_{n-k} = 0$$

$$A_2b_n + c_1A_2b_{n-1} + c_2A_2b_{n-2} + \cdots + c_kA_2b_{n-k} = 0$$

$$(A_1a_n + A_2b_n) + c_1(A_1a_{n-1} + A_2b_{n-1}) + \cdots + c_k(A_1a_{n-k} + A_2b_{n-k}) = 0$$

k阶常系数线性齐次递推关系

- 定义 设 $\{a_n^1\},\{a_n^2\},\cdots,\{a_n^t\}$ 是齐次递推关系的t个不同的解，若对齐次递推关系的每一个解，都存在常数 $A_1',A_2',\cdots,A_t'$ ，使得

$$a_n = A_1'a_n^1 + A_2'a_n^2 + \cdots + A_t'a_n^t$$

成立，则称 $A_1a_n^1 + A_2a_n^2 + \cdots + A_ta_n^t$ 为齐次递推关系的通解，其中 $A_1,A_2,\cdots,A_t$ 为任意常数。

k阶常系数线性齐次递推关系

- 定理 设 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 是齐次递推关系的k个不同的特征根，那么

$$a_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + \cdots + A_k r_k^n$$

是齐次递推关系的通解。

证 设 $\{h_n\}$ 是齐次递推关系的任意一个解，那么 $\{h_n\}$ 由k个初值 $h_0 = d_0, h_1 = d_1, \cdots, h_{k-1} = d_{k-1}$ 唯一确定。于是有

k阶常系数线性齐次递推关系

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \cdots + A_k = d_0 \\ A_1 r_1 + A_2 r_2 + \cdots + A_k r_k = d_1 \\ \cdots \\ A_1 r_1^{k-1} + A_2 r_2^{k-1} + \cdots + A_k r_k^{k-1} = d_{k-1} \end{cases}$$

系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \cdots & r_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le k} (r_i - r_j) \ne 0$$

k阶常系数线性齐次递推关系

- 例 2.36 求解递归关系

$$\begin{cases} a_n - 9a_{n-1} + 26a_{n-2} - 24a_{n-3} = 0, \quad \mathrm{n} \geq 3 \\ a_0 = 6, a_1 = 17, a_2 = 53 \end{cases}$$

其特征方程为

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$$

解方程得

$$x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$$

故通解为

$$a_n = A_1 2^n + A_2 3^n + A_3 4^n$$

k阶常系数线性齐次递推关系

解方程组 $\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 6 \\ 2A_1 + 3A_2 + 4A_3 = 17 \\ 4A_1 + 9A_2 + 16A_3 = 53 \end{cases}$

得 $A_1 = 3,\ A_2 = 1,\ A_3 = 2$

因此 $a_n = 3 \cdot 2^n + 3^n + 2 \cdot 4^n,\ n \geq 0$

k阶常系数线性齐次递推关系

$$A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

$$-9xA(x)=-9a_0x-9a_1x^2-9a_2x^3-\cdots-9a_nx^{n+1}-\cdots$$

$$26x^2A(x)=26a_0x^2+26a_1x^3+26a_2x^4+\cdots+26a_nx^{n+2}+\cdots$$

$$-24x^3A(x)=-24a_0x^3-24a_1x^4-24a_2x^5-\cdots-24a_nx^{n+3}+\cdots$$

$$(1-9x+26x^2-24x^3)A(x)=6-37x+56x^2$$

k阶常系数线性齐次递推关系

$$A(x)=\frac{6-37x+56x^2}{1-9x+26x^2-24x^3}=\frac{6-37x+56x^2}{(1-2x)(1-3x)(1-4x)}$$

$$=\frac{A_1}{1-2x}+\frac{A_2}{1-3x}+\frac{A_3}{1-4x}$$

$$(6-37x+56x^2)$$

$$=A_1(1-3x)(1-4x)+A_2(1-2x)(1-4x)+A_3(1-2x)(1-3x)$$

令 $x=\frac{1}{2}$ 得 $A_1=3$，类似地可得 $A_2=1,\ A_3=2$

k阶常系数线性齐次递推关系

$$A(x)=\frac{3}{1-2x}+\frac{1}{1-3x}+\frac{2}{1-4x}$$

$$a_n=3\cdot 2^n+3^n+2\cdot 4^n,\ n\geq 0$$

k阶常系数线性齐次递推关系

- 例 考虑下列递推关系

$$\begin{cases} a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0,\ n \geq 2 \\ a_0 = 1, a_1 = 3 \end{cases}$$

其特征方程为

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

解方程得 $x_1 = x_2 = 2$ 。

此时有

$$a_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n \ = A_1 2^n + A_2 2^n$$

$$= (A_1 + A_2) 2^n = A 2^n$$

k阶常系数线性齐次递推关系

- 为了满足初始条件 $a_0 = 1,\ a_1 = 3$，有

$$\begin{cases} A = 1 \\ 2A = 3 \end{cases}$$

但这是不可能的。

k阶常系数线性齐次递推关系

- 定理 2. 11 设 $r_1, r_2, \cdots, r_s$ 是递推关系

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0, n \geq k, \ c_k \neq 0$$

的全部不同的特征根，其重数分别为 $h_1, h_2, \cdots, h_s$，$(h_1 + h_2 + \cdots + h_s = k)$ 那么递推关系的通解为

$$a_n = a_n^1 + a_n^2 + \cdots + a_n^s$$

其中

$$a_n^i = (b_0^i + b_1^i n + b_2^i n^2 + \cdots + b_{h_i}^i n^{h_i - 1}) r_i^n, \quad i = 1, 2, \cdots, s$$

k阶常系数线性齐次递推关系

- 例 求解递推关系

$$\begin{cases} a_n = -a_{n-1} + 3a_{n-2} + 5a_{n-3} + 2a_{n-4}, \quad n \geq 4 \\ a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2 \end{cases}$$

解 其特征方程为

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$$

特征根为 $x_1 = x_2 = x_3 = -1,\ x_4 = 2$ 。

其通解为

$$a_n = (A + Bn + Cn^2)(-1)^n + D2^n$$

k阶常系数线性齐次递推关系

- 解方程组

$$\begin{cases} A+D=1 \\ -A-B-C+2D=0 \\ A+2B+4C+4D=1 \\ -A-3B-9C+8D=2 \end{cases}$$

得

$$A=\frac{7}{9},\ B=-\frac{1}{3},\ C=0,\ D=\frac{2}{9}$$

$$a_n=(\frac{7}{9}-\frac{1}{3}n)(-1)^n+\frac{2}{9}2^n,\ n\geq 0$$

常系数线性非齐次递推关系

- 定理 k阶常系数线性非齐次递推关系

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = f(n), \quad c_k \neq 0 \quad \textbf{(1)}$$

的通解是该递推关系的一个特解加上其相应的齐次递推关系

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0, \quad c_k \neq 0 \quad \textbf{(2)}$$

的通解。

证 设 a'_n, a''_n 分别为(1)的特解和(2)的通解。则

常系数线性非齐次递推关系

$$a'_n + c_1 a'_{n-1} + c_2 a'_{n-2} + \cdots + c_k a'_{n-k} = f(n)$$

$$a''_n + c_1 a''_{n-1} + c_2 a''_{n-2} + \cdots + c_k a''_{n-k} = 0$$

- 因此有

$$(a'_n + a''_n) + c_1(a'_{n-1} + a''_{n-1}) + \cdots + c_k(a'_{n-k} + a''_{n-k}) = f(n)$$

若 a_n 为(1)的任意一个解，易知 $a_n - a'_n = a''_n$ 是(2)的解，所以 $a_n = a'_n + a''_n$

常系数线性非齐次递推关系

- 定理 2.12 若$b(n)$是 q 次多项式，r是线性非齐次递推关系

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = r^n b(n) \quad ,c_k \neq 0$$

的特征方程的m重根，则递推关系的特解有以下形式

$$n^m (k_0 + k_2 n + \cdots + k_q n^q) r^n$$

常系数线性非齐次递推关系

- 例2.39 求解递推关系

$$\begin{cases} a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 5\cdot 4^n \\ a_0 = 5, a_1 = 3 \end{cases}$$

- 解 其特征方程为

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) = 0$$

特征根为 $x = 3,-2$ 。

相应的齐次递推关系的通解为 $A3^n + B(-2)^n$ 。

常系数线性非齐次递推关系

又4不是特征方程的根，所以特解的形式为 $C4^n$,

代入递推关系得

$$C4^n - C4^{n-1} - 6C4^{n-2} = 5\cdot 4^n \Rightarrow \quad C = \frac{40}{3}$$

该递推关系的通解为：

$$a_n = A3^n + B(-2)^n + \frac{40}{3}4^n$$

由 $a_0 = 5, a_1 = 3$ 得方程组

常系数线性非齐次递推关系

$$\begin{cases} A+B+40/3=5 \\ 3A-2B+160/3=3 \end{cases}$$ 解之得 $$\begin{cases} A=-67/5 \\ B=76/15 \end{cases}$$

$$a_n = -\frac{67}{5}3^n + \frac{76}{15}(-2)^n + \frac{40}{3}4^n$$

k阶常系数线性非齐次递推关系

- 例2.40 求解递推关系

$$\begin{cases} a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 3^n \\ a_0 = 5, a_1 = 2 \end{cases}$$

- 解 由例2.39知相应的齐次递推关系的通解为

$$A3^n + B(-2)^n$$

由3是特征方程的单根知，特解的一般形式为 $Cn3^n$

代入递推关系得

$$Cn3^n - C(n-1)3^{n-1} - 6C(n-2)3^{n-2} = 3^n$$

k阶常系数线性非齐次递推关系

$$C[9n-3(n-1)-6(n-2)]3^{n-2}=3^n$$

$$\Rightarrow 15C=9 \quad \Rightarrow \quad C=9/15=3/5$$

于是递推关系的通解为

$$a_n = A3^n + B(-2)^n + \frac{3}{5}3^n$$

由 $a_0=5, a_1=2$ 得方程组

$$\begin{cases} A+B+\dfrac{3}{5}=5 \\ 3A-2B+\dfrac{9}{5}=2 \end{cases} \quad \text{解之得} \quad \begin{cases} A=\dfrac{27}{15} \\ B=\dfrac{39}{15} \end{cases}$$

常系数线性非齐次递推关系

$$a_n = \frac{27}{15}3^n + \frac{39}{15}(-2)^n + \frac{3}{5}3^n$$

常系数线性非齐次递推关系

- 例2.41求解递推关系 $a_n+3a_{n-1}-10a_{n-2}=(-7)^n n$

  解 特征方程为

  $$x^2+3x-10=(x-2)(x+5)=0$$

  特征根为 $x=2,-5$, 故相应的齐次递推关系的通解为 $A2^n+B(-5)^n$。

-7不是特征方程的根，所以特解的形式为 $(Cn+D)(-7)^n$

代入递推关系得

常系数线性非齐次递推关系习题

$$(Cn+D)(-7)^n+3[C(n-1)+D](-7)^{n-1}-10[C(n-2)+D](-7)^{n-2}$$
$$=(-7)^n n$$

$$(Cn+D)(-7)^2+3[C(n-1)+D](-7)-10[C(n-2)+D]=49n$$

$$18Cn+(41C+18D)=49n$$

$$\Rightarrow\quad \mathrm{C}=49/18,\ \mathrm{D}=-2009/324$$

$$a_n=A2^n+B(-5)^n+\left(\frac{49}{18}n-\frac{2009}{324}\right)(-7)^n$$

常系数线性非齐次递推关系

- 例2.43 求解递推关系

$$\begin{cases} a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 6n^2 \\ a_0 = 6, a_1 = 7 \end{cases}$$

解 其特征方程为

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0$$

特征根为$x = 1,2$,相应的齐次递推关系的通解为

$$A1^n + B2^n = A + B2^n$$

常系数线性非齐次递推关系

- 由于1是特征方程的单根，故特解形式为

$$n(C+Dn+En^2)=Cn+Dn^2+En^3$$

代入递推关系得

$$(Cn+Dn^2+En^3)-3[C(n-1)+D(n-1)^2+E(n-1)^3]$$
$$+2[C(n-2)+D(n-2)^2+E(n-2)^3]=6n^2$$

比较系数得

$$\begin{cases}-3E=6\\-2D+15E=0\\-C+5D-13E=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=-49\\D=-15\\E=-2\end{cases}$$

常系数线性非齐次递推关系

- 所求特解为

$$-49n-15n^2-2n^3$$

递推关系的通解为

$$a_n = A + B2^n - 49n - 15n^2 - 2n^3$$

由 $a_0 = 6, a_1 = 7$ 得方程组

$$\begin{cases} A + B = 6 \\ A + 2B - 66 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -61 \\ B = 67 \end{cases}$$

$$a_n = -16 + 67 \cdot 2^n - 49n - 15n^2 - 2n^3$$

常系数线性非齐次递推关系

- 例2.44 求解下列递推关系

$$a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 10 \cdot 4^n - 7 \cdot 3^n$$

解 相应的齐次递推关系的通解为

$$A3^n + B(-2)^n$$

由例2.39和2.40知其特解为

$$a_n' = 2 \cdot \frac{40}{3} \cdot 4^n - 7 \cdot \frac{3}{5} \cdot 3^n = \frac{80}{3} \cdot 4^n - \frac{21}{5} \cdot 3^n$$

$$a_n = A3^n + B(-2)^n + \frac{80}{3} \cdot 4^n - \frac{21}{5} n \cdot 3^n$$

习题

- 2.20　2.21　2.23

应用举例

- 例2.48 求下列n阶行列式的值。

$$d_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

- 解 由行列式的性质知

$$d_n = 2d_{n-1} - d_{n-2},\ d_1 = 2, d_2 = 3$$

应用举例

特征方程为

$$x^2-2x+1=0$$

其解为 $x_1=x_2=1$，故通解为

$$d_n=(A+Bn)1^n=A+Bn$$

由 $d_1=2,\ d_2=3$ 得方程组

$$\begin{cases}A+B=2\\A+2B=3\end{cases}$$ 解之得 $A=B=1$

$$d_n=1+n=n+1$$

应用举例

- 例2. 49 求 $S_n = \sum_{k=0}^{n} k$

  解 由

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n \qquad S_{n-1} = 1 + 2 + \cdots + (n-1)$$

$$S_n - S_{n-1} = n \qquad S_{n-1} - S_{n-2} = n - 1$$

$$S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2} = 1 \qquad S_{n-1} - 2S_{n-2} + S_{n-3} = 1$$

$$S_n - 3S_{n-1} + 3S_{n-2} - S_{n-3} = 0$$

特征方程为 $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3 = 0$

应用举例

- x=1为其三重根，故通解为

$$S_n=(A+Bn+Cn^2)1^n=A+Bn+Cn^2$$

由 $S_0=0,\ S_1=1,\ S_2=3$ 得方程组

$$\begin{cases}A=0\\A+B+C=1\\A+2B+4C=3\end{cases}\quad \text{解之得} \quad \begin{cases}A=0\\B=1/2\\C=1/2\end{cases}$$

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}k=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}n^2=\frac{n(n+1)}{2}$$

应用举例

- 设 $\{a_n\}$ 是给定的序列，令

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n \qquad \Delta^k a_n = \Delta(\Delta^{k-1} a_n)$$

$\Delta^k a_n$ 称为 a_n 的k阶差分。

- 例 给定序列 1 6 15 28 45 66 91....

那么有 $\Delta^2 a_2 = 4$。

- 若 Δa_n 是n的r次多项式，那么a_n是n的r+1次多项式。

应用举例

- 例2. 51 求 $S_n=\sum_{k=0}^{n}k^3$

解 由 $\Delta S_n=S_{n+1}-S_n=(n+1)^3$ 知S_n为n的4次多项式。

$$S_n=A_0\binom{n}{0}+A_1\binom{n}{1}+A_2\binom{n}{2}+A_3\binom{n}{3}+A_4\binom{n}{4}$$

$$S_0=0=A_0$$

$$S_1=1=A_0+A_1=0+A_1,\quad A_1=1$$

$$S_2=1^3+2^3=2A_1+A_2=2+A_2,\quad A_2=7$$

应用举例

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 \cdot 3 + 7 \cdot 3 + A_3 = 24 + A_3, \quad A_3 = 12$$

$$S_4 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 \cdot 4 + 7 \cdot 6 + 12 \cdot 4 + A_4 = 94 + A_3$$

$$A_4 = 6$$

$$S_n = \binom{n}{1} + 7\binom{n}{2} + 12\binom{n}{3} + 6\binom{n}{4}$$

应用举例

- 例2.53 10个数字(0到9)和4个四则运算符(+，－，×，÷)组成的14个元素。求由其中的n个元素的排列构成一算术表达式的个数。
- 解 设 a_n 为n个元素排列成算术表达式的个数，那么有

$$\begin{cases} a_n = 10a_{n-1} + 40a_{n-2}, & n \geq 3 \\ a_1 = 10, a_2 = 120 \end{cases}$$

由递推关系，可令 $a_0 = \frac{1}{2}$ 。

应用举例

- 特征方程为 $x^2-10x-40=0$

  其特征根为 $x=5\pm\sqrt{65}$

  故通解为

$$a_n=A(5+\sqrt{65})^n+B(5-\sqrt{65})^n$$

  由 $a_0=1/2,\ a_1=10$ 得方程组

$$\begin{cases} A+B=\dfrac{1}{2} \\ (5+\sqrt{65})A+(5-\sqrt{65})B=10 \end{cases}$$

应用举例

- 解之得

$$A=(15+\sqrt{65})/4\sqrt{65},\ \ B=-(15-\sqrt{65})/4\sqrt{65}$$

$$a_n=\frac{1}{4\sqrt{65}}\left[\left(15+\sqrt{65}\right)\left(5+\sqrt{65}\right)^n-\left(15-\sqrt{65}\right)\left(5-\sqrt{65}\right)^n\right]$$

应用举例

- 例2.56 设有n条封闭曲线，两两相交于两点，任意三条封闭曲线不相交一点。求这样的n条曲线将平面分割为几个部分？
- 解 设这样的n条曲线把平面分割为 a_n 部分，则有

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2(n-1) \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

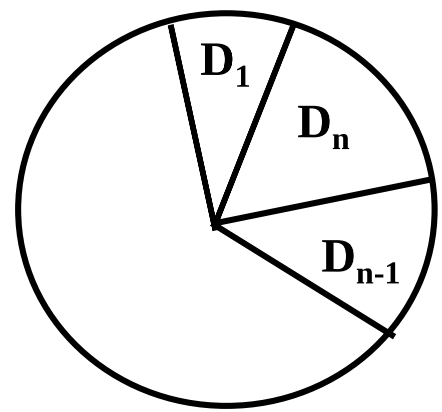
$$a_n = a_{n-1} + 2(n-1) = a_{n-2} + 2(n-2) + 2(n-1)$$

$$= \cdots = a_1 + 2[1 + 2 + \cdots + (n-1)]$$

$$= 2 + 2\frac{n(n-1)}{2} = 2 + n(n-1)$$

应用举例

- 例2.57 一个圆域，依圆心等分成n个部分，现取k种颜色对这n个域进行染色，要求相邻两个域的着的颜色不同。试求着色的方案数。
- 解 设 a_n 为所求的方案数，那么有



$$\begin{cases} a_n = (k-2)a_{n-1} + (k-1)a_{n-2}, \ n \ge 4 \\ a_2 = k(k-1), a_3 = k(k-1)(k-2) \end{cases}$$

由递推关系可得 $a_1 = 0,\ a_0 = k$ 。

应用举例

- 特征方程为

$$x^2-(k-2)x-(k-1)=[x-(k-1)](x+1)=0$$

解之得 $x_1=k-1,\ x_2=-1$

故通解为 $a_n=A(k-1)^n+B(-1)^n$

由 $a_0=k,\ a_1=0$ ，得方程组

$$\begin{cases}A+B=k\\(k-1)A-B=0\end{cases}\qquad\begin{cases}A=1\\B=k-1\end{cases}$$

$$a_n=(k-1)^n+(k-1)(-1)^n,\quad n\geq 2$$

应用举例

- 例2.59 求n位2进制数最后三位出现010图象的数的个数。

解 先解释010图象。

对11位二进制数00101001010，2~4，7~9位出现010图象。

设 a_n 为所求n位二进制数的个数。那么有

$$\begin{cases} a_n + a_{n-2} = 2^{n-3}, \quad n \geq 5 \\ a_3 = 1, a_4 = 2, \end{cases}$$

应用举例

- 由递推关系，可得 $a_2=0,\ a_1=0,\ a_0=1/2$

  特征方程为 $x^2+1=0$

  其特征根为

$$x=\pm i=e^{\pm\frac{\pi}{2}i}$$

当特征方程的系数均为实数时，若特征方程有复根 $\alpha_1=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$，则其共轭复数

$$\alpha_2=\overline{\alpha_1}=\rho(\cos\theta-i\sin\theta)$$

也是特征方程的根，这时对应的齐次解为

应用举例

$$A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n$$

$$= A_1\rho^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n + A_2\rho^n(\cos\theta - i\sin\theta)^n$$

$$= A_1\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) + A_2\rho^n(\cos n\theta - i\sin n\theta)$$

$$= (A_1 + A_2)\rho^n\cos n\theta + i(A_1 - A_2)\rho^n\sin n\theta$$

$$= A\rho^n\cos n\theta + B\rho^n\sin n\theta$$

应用举例

- 相应齐次递推关系的通解为

$$A\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)+B\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

- 递推关系特解的形式为 $C2^n$ 。
- 递推关系解的一般形式为

$$a_n=A\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)+B\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)+C2^n$$

应用举例

- 解方程组

$$\begin{cases} A+C=\dfrac{1}{2} \\ B+2C=0 \\ -A+4C=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=\dfrac{2}{5} \\ B=-\dfrac{1}{5} \\ C=\dfrac{1}{10} \end{cases}$$

- $a_n=\dfrac{2}{5}\cos\left(n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)-\dfrac{1}{5}\sin\left(n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{1}{10}2^n$ ， $n\geq 3$

应用举例

- 例2.60 求n位2进制数最后三位才第一次出现010图象的数的个数。

解 最后三位数为010的n位2进制数共有 2^{n-3} 个。这 2^{n-3} 个数分类如下：

(a)最后三位第一次出现010图象，其个数为 a_n；

(b)在第(n-4)~第(n-2)位第一次出现010图象，其个数为 a_{n-2}。

(c)在第(n-5)~第(n-3)位第一次出现010图象，其个数为 a_{n-3}。

应用举例

- (d) 在第 (n-6)~第 (n-4) 位第一次出现010图象，其个数为 a_{n-4} 。

  一般有，在第 (n-k-2)~第 (n-k) 位第一次出现010图象，其个数为 $2^{k-3}a_{n-k}$。

  所以有以下递推关系：

$$\begin{cases} a_n + a_{n-2} + a_{n-3} + 2a_{n-4} + \cdots + 2^{n-6}a_3 = 2^{n-3}, \quad n \geq 6 \\ a_3 = 1, a_4 = 2, a_5 = 3 \end{cases}$$

设 $A(x) = a_3 + a_4 x + a_5 x^2 + a_6 x^3 + a_7 x^4 + \cdots$

应用举例

$$x^3: \quad a_6 + a_4 + a_3 = 2^3$$

$$x^4: \quad a_7 + a_5 + a_4 + 2a_3 = 2^4$$

$$x^5: \quad a_8 + a_7 + a_5 + 2a_4 + 2^2 a_3 = 2^5$$

……

$$[A(x) - 1 - 2x - 3x^2] + x^2[A(x) - 1] + (x^3 + 2x^4 + 2^2 x^5 + \cdots)A(x)$$

$$= \frac{2^3 x^3}{1 - 2x}$$

应用举例

$$\left(1+x^2+\frac{x^3}{1-2x}\right)A(x)=\frac{2^3x^3}{1-2x}+1+2x+4x^2=\frac{1}{1-2x}$$

$$\left(\frac{1-2x+x^2-x^3}{1-2x}\right)A(x)=\frac{1}{1-2x}$$

$$A(x)=\frac{1}{1-2x+x^2-x^3}$$

$$=1+2x+3x^2+5x^3+9x^4+16x^5+28x^6+49x^7+\cdots$$

应用举例

- 例2.64错排问题

给定n个元素的集合，它的每个元素都有一个指定的位置，若一个排列使得所有的元素都不在指定的位置上，则称这个排列为一个错排。

当n=1时，{1}没有错排。

当n=2时，{1,2}有一个错排2 1。

当n=3时，{1,2,3}有两个错排 2 3 1，3 1 2。

当n=4时，{1,2,3,4}有下列9个错排：

2 1 4 3，2 3 4 1，2 4 1 3，3 1 4 2，3 4 1 2，3 4 2 1，4 1 2 3，4 3 1 2，4 3 2 1。

应用举例

- **定理** 对任意正整数n，有

$$D_n = n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$$

证 设 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是{1, 2, ..., n}的一个错排，将{1, 2, ..., n}的所有错排按照 i_1 的取值分为n−1类，记 $A_j(j=2,\cdots,n)$ 为 $i_1=j$ 的错排的全体，则

$$|A_2|=|A_3|=\cdots=|A_n|$$

令 $|A_2|=d_n$，则 $D_n=(n-1)d_n$。

应用举例

集合 A_2 中的错排可以分为两类：

(i) $i_2 = 1$：$i_3 \cdots i_n$ 是{3, 4, …, n}的一个错排，

有 D_{n-2} 个；

(ii) $i_2 \neq 1$：则 $i_2 \cdots i_n$ 相当于{1, 3, 4, …, n}的一个错排，有 D_{n-1} 个。

从而有

$$\begin{cases} D_n = (n-1)d_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}), \quad n > 2 \\ D_1 = 0, D_2 = 1 \end{cases}$$

应用举例

$$D_n - nD_{n-1} = -(D_{n-1} - (n-1)D_{n-2})$$

$$= (D_{n-2} - (n-2)D_{n-3})$$

$$\cdots\cdots$$

$$= (-1)^{n-2}(D_2 - 2D_1) = (-1)^{n-2} = (-1)^n$$

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n = n(n-1)D_{n-2} + (-1)^{n-1}n + (-1)^n$$

$$= n(n-1)\cdots 3D_2 + \cdots + (-1)^{n-1}n + (-1)^n$$

$$= n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

应用举例

- 例2.65 数1，2，3，…，9的全排列中，求偶数在原来位置上，其余都不在原来位置上的错排数目。

解 所求数目为

$$D_5 = 5!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right) = 44$$

习题

- 2.51　2.60　2.78

非线性递推关系举例

例 在下列展开式

$$(x_1+x_2+x_3)^3 = x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1^2x_2+3x_1^2x_3+3x_1x_2^2$$
$$+3x_1x_3^2+3x_2^2x_3+3x_2x_3^2+6x_1x_2x_3$$

中，每项都是 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}$ 的形式，其中 n_1,n_2,n_3 都是非负整数，且 $n_1+n_2+n_3=3$ 。项 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}$ 的系数为

$$\frac{3!}{n_1!n_2!n_3!}$$

多项式系数

- 定理 设n为正整数，则

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n} \binom{n}{n_1 n_2 \cdots n_m} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}$$

其中 $n_1, n_2, \cdots, n_m$ 为非负整数。

证 项 $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}$ 的系数为

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{m-1}}{n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!}$$

多项式系数

- 例 展开 $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^7$，则 $x_1^2 x_3 x_4^3 x_5$ 的系数为

$$\frac{7!}{2!0!1!3!1!} = 420$$

- 例 展开 $(2x_1 - 3x_2 + 5x_3)^6$，则 $x_1^3 x_2 x_3^2$ 的系数为

$$\frac{6!}{3!\,1!\,2!} \cdot 2^3 \cdot (-3) \cdot 5^2 = -36000$$

多项式系数

- 定理2.13 展开式 $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ 的项数等于 $C(n+m-1,n)$ ，而且这些项的系数之和等于 m^n

证 展开式的项 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}$ ，$(n_1+n_2+\cdots+n_m=n)$ 与从m个元素中取n个允许重复的组合一一对应，

故其项数为 $C(n+m-1,n)$。

当令 $x_1=x_2=\cdots=x_m=1$ 时，便知这些系数之和等于 m^n 。

多项式系数

- 例 多项式 $(x_1+x_2+x_3)^3$ 的展开式中恰有

$$\binom{n+m-1}{n}=\binom{3+3-1}{3}=\binom{5}{3}=10$$

项。

Stirling数

- 有两类Stirling数，称之为第一类Stirling数和第二类Stirling数。

定义2.3

$$[x]_n = x(x-1)\cdots(x-n+1)$$
$$= s(n,n)x^n - s(n,n-1)x^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}s(n,1)x + (-1)^n s(n,0)$$

称 $s(n,0), s(n,1), \cdots, s(n,n)$ 为第一类Stirling数。

由定义知

$$s(n,0)=0,\ \ s(n,n)=1$$

Stirling数

- 例

$$[x]_1 = x$$

$$[x]_2 = x(x-1) = x^2 - x$$

$$[x]_3 = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

$$[x]_4 = x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$

$$s(3,2) = 3,\quad s(4,3) = 6$$

Stirling数

$$[x]_n = [x]_{n-1}(x-n+1)$$

$$= [s(n-1,n-1)x^{n-1} - s(n-1,n-2)x^{n-2} + \cdots$$

$$+ (-1)^{n-2}s(n-1,1)x + (-1)^{n-1}s(n-1,0)][x-(n-1)]$$

- 比较等式两边的系数可得

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1)s(n-1,k)$$

Stirling数

- 一个置换可以分解为若干循环之积。例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 3\ \ 6)(2\ \ 5)(4)$$

- 定理 可以分解为k个循环的n个元素置换的个数为第一类Stirling数 $s(n,k)$ 。

Stirling数

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=(1)(2)(3)\qquad\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=(1)(2\,3)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=(1\,2)(3)\qquad\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(1\,2\,3)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=(1\,3\,2)\qquad\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=(1\,3)(2)$$

$$s(3,1)=2\qquad s(3,2)=3\qquad s(3,3)=1$$

Stirling数

- 一般有

$$s(n,1)=(n-1)!$$

$$\sum_{k=1}^{n} s(n,k)=n!$$

Stirling数

- 定义2.4 n个有区别的球放到m个相同的盒子中，要求无一空盒，其不同的方案数用S(n,m)表示，称为第二类Stirling数。
- 例 由 $\{r,y,b,w\}=\{r\}\cup\{y,b,w\}=\{y\}\cup\{r,b,w\}$

$$=\{b\}\cup\{r,y,w\}=\{w\}\cup\{r,y,b\}$$

$$=\{r,y\}\cup\{b,w\}=\{r,b\}\cup\{y,w\}$$

$$=\{r,w\}\cup\{y,b\}$$

知 S(4,2)=7。

Stirling数

- **定理2.14 第二类Stirling数S(n,k)有下列性质：**

  (1) $S(n,k)=0,\ k>n\geq 1$

  (2) $S(n,1)=1$

  (3) $S(n,n)=1$

  (4) $S(n,2)=2^{n-1}-1$

  (5) $S(n,n-1)=C(n,2)$

Stirling数

- **定理2.15 第二类Stirling数满足下列递推关系**

$$S(n,m) = mS(n-1,m) + S(n-1,m-1), \quad n > 1,\ m \geq 1$$

证 任取一球b，分两种情形讨论：

(a) b 独占一盒：有 $S(n-1,m-1)$ 种放法；

(b) b 不独占一盒：有 $mS(n-1,m)$ 种放法；

所以结论成立。

Stirling数

- 例

$$S(5,2) = 2S(4,2) + S(4,1) = 2 \cdot 7 + 1 = 15$$

n\m	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0
3	1	3	1	0	0	0	0
4	1	7	6	1	0	0	0
5	1	15	25	10	1	0	0
6	1	31	90	65	15	1	0
7	1	63	301	350	140	21	1

Catalan数

- 数

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

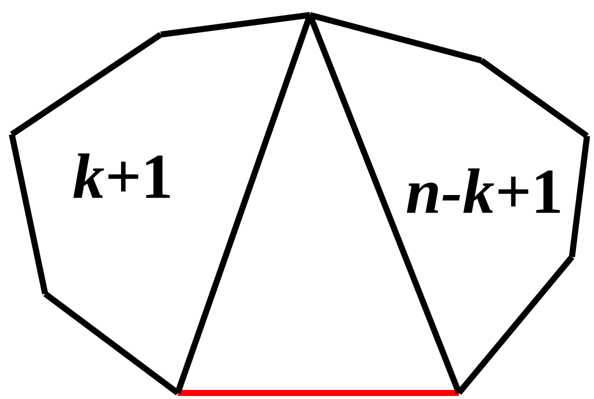
称为第 n个Catalan数。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

Catalan数

- 问题：在一个凸n+1边形中，通过插入内部不相交的对角线，将其分成一些三角形，问有多少种不同的分法？

设 h_n 为将凸n+1边形划分为三角形的不同分法的个数，定义 $h_1 = 1$。



Catalan数

$$h_n = h_1 h_{n-1} + h_2 h_{n-2} + \cdots + h_{n-1} h_1,\ n \geq 3$$

令序列 $h_1, h_2, h_3, \cdots, h_n, \cdots$ 的生成函数为

$$G(x) = h_1 x + h_2 x^2 + \cdots + h_n x^n + \cdots$$

$$G(x)^2 = h_1^2 x^2 + (h_1 h_2 + h_2 h_1) x^3 + (h_1 h_3 + h_2 h_2 + h_3 h_1) x^4$$
$$+ \cdots + (h_1 h_{n-1} + h_2 h_{n-2} + \cdots + h_{n-1} h_1) x^n + \cdots$$

$$= h_1^2 x^2 + h_3 x^3 + h_4 x^4 + \cdots + h_n x^n + \cdots = G(x) - x$$

$$G(x)^2 - G(x) + x = 0$$

Catalan数

- 解之得

$$G_1(x)=\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2} \qquad G_2(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$

由G(0)=0 知

$$G(x)=G_2(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}=\frac{1}{2}\left(1-(1-4x)^{1/2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4x)^n\right)=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4x)^n$$

Catalan数

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-1)^n4^nx^n$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-3}{2}}{n!}(-1)^n4^nx^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}[1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)]}{n!}x^n$$

Catalan数

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n$$

$$h_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1},\quad n=1,2,3\ldots$$

例如将凸6边形划分为三角形的划分数为

$$h_5=\frac{1}{5}\binom{2\cdot 5-2}{5-1}=\frac{1}{5}\binom{8}{4}=14$$

Catalan数

- 例2.70 设 $a_1a_2\cdots a_n$ 为n个数的乘积，问有几种不同的乘法方案?

解 设 p_n 为所求的方案数，那么有

$$\begin{cases} p_n = p_1p_{n-1} + p_2p_{n-2} + \cdots + p_{n-1}p_1 \\ p_1 = p_2 = 1 \end{cases}$$

$$p_n = h_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

Catalan数

- 例 当n=4时，有

$$p_4 = \frac{1}{4}\binom{2\cdot 4-2}{4-1} = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = 5$$

种不同的乘法方案。

Catalan数

- 例2.71 n个1和n个0组成一2n位2进制数，要求从左到右扫描，1的累计数不小于0的累计数，试求满足条件的数有多少？

解 显然由n个1和n个0构成的字符串的总数为$\binom{2n}{n}$
首先计算不符合要求字符串的个数。

由于字符串不合乎要求，存在一个最小的k使得从左到右扫描时，1的累计数小于0的累计数，将前k个字符中的0，1互换，则得到一个有n+1个1和

Catalan数

- n-1个0的字符串。

反之，任给一个有n+1个1和n-1个0组成的字符串，则存在最小的k，使得1的个数大于0的个数，将前k个字符中的0，1互换，则得到一个有n个1和n个0的字符串，且该字符串不合乎要求。

10100101 $\leftrightarrow$ 01011101。

故不合乎要求的数的个数为 $\binom{2n}{n-1}$

Catalan数

- 所求字符串的个数为

$$\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=\frac{(2n)!}{n!n!}-\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$$

$$=\frac{(2n)!}{n!(n-1)!}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{(2n)!}{n!(n-1)!}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=C_n$$

习题

- 证明

$$S(n,n-2)=\binom{n}{3}+3\binom{n}{4}$$