第十三章　递推方程与生成函数

漳州师范学院计算机科学与工程系

第十三章　递推方程的与生成函数

- 递推方程的定义及实例
- 递推方程的公式解法
- 递推方程的其他解法
- 生成函数及其应用
- 指数生成函数及其应用
- **Catalan数与Stirling数**
- 知 识 点：递推方程 、生成函数和指数型生成函数的概念、递推方程的解法、**Catalan**数与**Stirling**数。
- 教学要求：深刻理解递推方程的基本概念及基本应用 。
- 教学重点：递归方程和递推方程的解法。
- 学时**: 8**

§13.1　递推方程的定义及实例

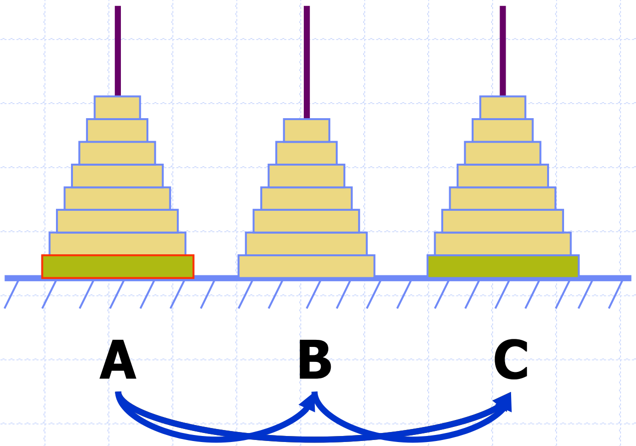
- **定义13.1**　设序列 $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$,简记为$\{a_n\}$,一个把 a_n 与某些个 $a_i\ (i<n)$联系起来的等式叫做关于序列$\{a_n\}$的递推方程。
- **例13.1　Hanoi塔**

解　设使用Hanoi算法移动n个盘子的总次数为T(n)

$$T(n) = 2\,T(n-1)+1\ ,\ T(1)=1$$

解得　$T(n)=2^n-1$

```
算法　Hanoi(A,C,n)
if n=1 then move(A,C)
   else
      Hanoi(A,B,n-1)
      move(A,C)
      Hanoi(B,C,n-1)
```



当n=64时,$T(64)=2^{64}-1=18\,466\,744\,073\,709\,551\,615$

如果一秒钟移动1次,那么移动64个盘子需要大约5000亿年

§ 13.1　递推方程的定义及实例

- 例13.2　一个著名的数列称作 Fibonacci数列,这个数列的项是:

  1,1,2,3,5,8,13,21, ……　　$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$, $f_0=1$, $f_1=1$

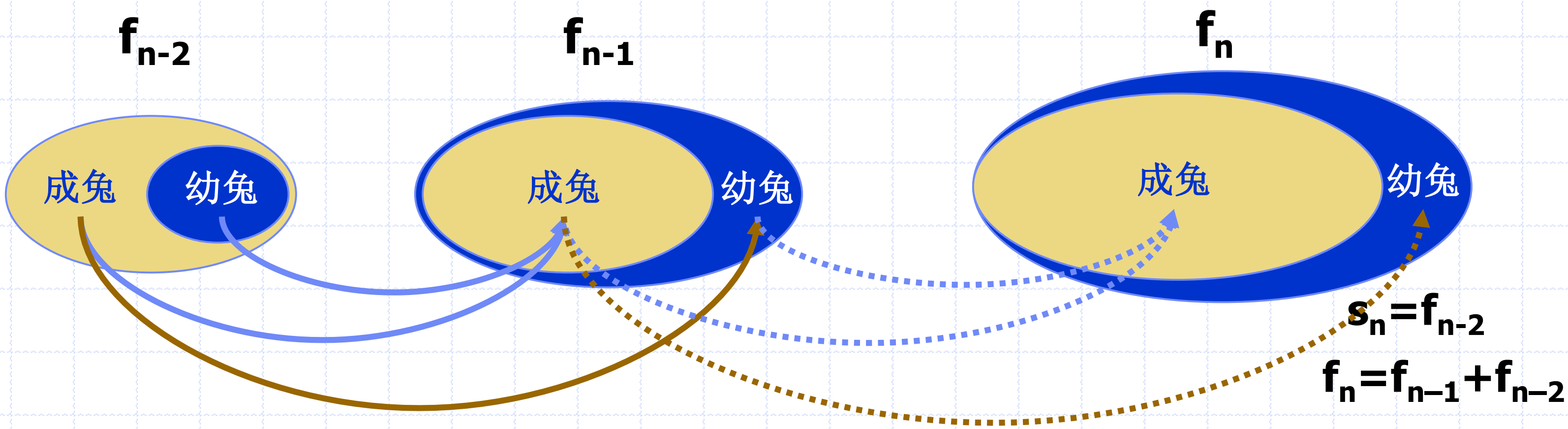
  即第n项(n≥2)恰好等于第n-1项与第n-2项之和

  解得

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

- 例　有雌雄一对幼兔, 过一月后长成成兔, 便可每月生雌雄一对幼兔, 每对幼兔过一月后又长成成兔, 也可每月生雌雄一对幼兔. 假设起初只有雌雄一对幼兔, 问第n个月共有多少对兔子?

解 设第 n个月共有 f_n 对兔子, 第 n 个月新生的兔子共有 s_n 对



§13.2　递推方程的公式解法

- **定义13.2** 设递推方程满足

$$\begin{cases} H(n)-a_1H(n-1)-a_2H(n-2)-\cdots-a_kH(n-k)=f(n) \\ H(0)=b_0, H(1)=b_1, H(2)=b_2, \cdots, H(k-1)=b_{k-1} \end{cases}$$

其中$a_1,a_2,\ldots,a_k$为常数,$a_k\neq 0$,这个方程称为k阶常系数线性递推方程,$b_0,b_1,\ldots,b_{k-1}$为k个初值．当f(n)=0时称这个递推方程为齐次方程。

- **例　Hanoi塔的递推方程**

$$T(n) = 2\,T(n-1)+1\ ,\ T(1)=1$$

是1阶常系数线性非齐次递推方程 , T(1)=1是初值

Fibonacci数列的递推方程

$$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}\ ,\ f_0=1\ ,\ f_1=1$$

是2阶常系数线性齐次递推方程, $f_0=1$, $f_1=1$是初值

§13.2 递推方程的公式解法

- **定义13.3** 设给定常系数线性齐次递推方程如下:

$$\begin{cases} H(n)-a_1H(n-1)-a_2H(n-2)-\cdots-a_kH(n-k)=0 \\ H(0)=b_0, H(1)=b_1, H(2)=b_2, \cdots, H(k-1)=b_{k-1} \end{cases} \qquad \textbf{(13.2)}$$

方程

$$x^k-a_1x^{k-1}-\cdots-a_k=0$$

称为该递推方程的特征方程,特征方程的根称为递推方程的特征根。

- **定理13.1** 设q是非零复数,则 q^n 是递推方程的解当且仅当q是它的特征根
- **定理13.2** 设$h_1(n)$和$h_2(n)$是递推方程(13.2)的解, c_1,c_2为任意常数,

  则 $c_1h_1(n)+c_2h_2(n)$ 也是这个递推方程的解
- 推论 若 $q_1,q_2,\ldots q_k$ 是递推方程(13.2)的特征根,则

  $c_1q_1^n+c_2q_2^n+\ldots+c_kq_k^n$ 是递推方程的解，其中$c_1,c_2,\ldots,c_k$是任意常数

§13.2 递推方程的公式解法

- 定义**13.4** 若对递推方程(13.2)的每个解 h(n) 都存在一组常数 $c_1', c_2', \ldots, c_k'$ 使得 $h(n)=c_1' q_1^n + c_2' q_2^n + \ldots + c_k' q_k^n$ 成立

  则称 $c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \ldots + c_k q_k^n$ 为该递推方程的通解

- 定理**13.3** 设 $q_1, q_2, \ldots, q_k$ 是递推方程(13.2)不等的特征根,则

  $H(n)= c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \ldots + c_k q_k^n$ 为该递推方程的通解

- 例**13.3** 求解Fibonacci数列的递推方程

解 递推方程是 $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$, 初值是 $f_0=1$, $f_1=1$

特征方程是 $x^2-x-1=0$,求解得到特征根是 $q_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad q_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

因此它的通解是

$$f_n=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

代入初值得

$$\begin{cases} f_0=c_1+c_2=1 \\ f_1=c_1\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}+c_2\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1 \end{cases}$$

解得

$$c_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad c_2=-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

§ 13.2 递推方程的公式解法

- **定理13.4** 设 $q_1,q_2,\ldots,q_t$ 是递推方程(13.2)不等的特征根,且 q_i 的重数是 e_i ,其中 $i=1,2,\ldots,t$. 令

$$H_i(n)=(c_{i1}+c_{i2}n+\ldots+c_{ie_i}n^{e_i-1})\,q_i^n$$

则

$$H(n)=H_1(n)+H_2(n)+\ldots+H_t(n)$$ 为该递推方程的通解

- **例13.4** 求解以下递推方程

$$\begin{cases} H(n)-3H(n-1)+4H(n-3)=0 \\ H(0)=1, H(1)=0, H(2)=0 \end{cases}$$

解 特征方程 $x^3-3x^2+4=0$,特征根 -1,2,2

通解为 $H(n)=(c_1+c_2n)2^n+c_3(-1)^n$

代入初值得
$$\begin{cases} c_1+c_2=1 \\ 2c_1+2c_2-c_3=0 \\ 4c_1+8c_2+c_3=0 \end{cases}$$

解得 $c_1=\frac{5}{9}, c_2=-\frac{1}{3}, c_3=\frac{4}{9}$

原方程的解为 $H(n)=\frac{5}{9}2^n-\frac{1}{3}n2^n+\frac{4}{9}(-1)^n$

§13.2 递推方程的公式解法

- 常系数线性非齐次递推方程的标准形

$$H(n)-a_1H(n-1)-a_2H(n-2)-\cdots-a_kH(n-k)=f(n) \qquad \textbf{(13.3)}$$

其中$n\geq k$,a_1,a_2,…,a_k为常数,$a_k\neq 0$,$f(n)\neq 0$

- 定理13.5 设$H'(n)$是对应的齐次方程(13.2)通解,$H^*(n)$是一个特解则

$$H(n)=H'(n)+H^*(n)$$

是递推方程(13.3)的通解

- 求针对某些特殊函数形式求递推方程(13.3)特解的两种方法
  - 如果$f(n)$为n的t次多项式,那么特解一般也为n的t次多项式.但是如果递推方程的特征根是1,就必须提高所设定特解的多项式次数
  - 如果$f(n)$为指数函数 $A\beta^n$,这里的A代表某个常数.

    若β不是特征根,则特解为 $P\beta^n$.其中P为待定系数;

    若β是 $e(e\geq 1)$重特征根,则特解为 $Pn^e\beta^n$

§ 13.3 递推方程的其他解法

- 非常系数线性递推方程的求解方法
  - 换元法: 将原来关于某个变元的递推方程通过函数变换转变成关于其他变元的常系数线性递推方程,然后使用公式法求解

例 $\begin{cases} W(n) = 2W(n/2) + n - 1, n = 2^k \\ W(1) = 0 \end{cases}$

将n=2^k代入,得到 $\begin{cases} H(k) = 2H(k-1) + 2^k - 1 \\ H(0) = 0 \end{cases}$

  - 迭代归纳法: 所谓迭代法就是从原始递推方程开始,利用方程所表达的数列中后项对前项的依赖关系,把表达式中的后项用相等的前项的表达式代入,直到表达式中没有函数项为止. 然后,将右边的项求和并将结果进行化简.

例(同上例) $W(n) = 2W(2^{k-1}) + (2^k - 1) \ = 2[2W(2^{k-2}) + (2^{k-1} - 1)] + (2^k - 1)$

$= 2^2 W(2^{k-2}) + (2^k - 2) + (2^k - 1) \ = 2^2[2W(2^{k-3}) + (2^{k-2} - 1)] + (2^k - 2) + (2^k - 1)$

$= 2^3 W(2^{k-3}) + (2^k - 2^2) + (2^k - 2) + (2^k - 1) = \cdots = 2^k W(1) + (2^k - 2^{k-1}) + \cdots + (2^k - 2^2) + (2^k - 2) + (2^k - 1)$

$= k2^k - (2^k - 1) \ = k2^k - 2^k + 1 \ = n\log(n) - n + 1$

§13.4 生成函数及其应用

- 例 设A={a,b,c},求从A中取2个元素的所有组合

解：任意的从A中取2个元素的组合可表示为 $a^{k1}b^{k2}c^{k3}$

其中 k_1,k_2,k_3取值为0或1 且 $k_1+k_2+k_3=2$

比如 ac 可表示为 $a^1b^0c^1$

因此在关于 t 的多项式(1+at)(1+bt)(1+ct)的展开式中t^2前的系数就是所有从A中取2个元素的无重组合

$(1+at)(1+bt)(1+ct)=1+(a+b+c)t+(ab+ab+bc)t^2+(abc)t^3$

若令 a=b=c=1,则有$(1+t)(1+t)(1+t)=1+3t+3t^2+t^3$

$1,t,t^2,t^3$前的系数分别表示无重组合数C(3,0)C(3,1),C(3,2),C(3,3)

- 从A中取0,1,2,3个元素的无重组合分别对应于

  (1+at)(1+bt)(1+ct)展开式中 t^0,t^1,t^2,t^3前的系数

- 从A中取0,1,2,3个元素的无重组合数分别对应于

  (1+t)(1+t)(1+t)展开式中 t^0,t^1,t^2,t^3前的系数

§13.4 生成函数及其应用

- **定义13.5** 设r为实数,n为整数,引入形式符号

$$\binom{r}{n}=\begin{cases}0 & , \quad n<0\\ 1 & , \quad n=0\\ \dfrac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!} & , \quad n>0\end{cases}$$

称为牛顿二项式系数

当r为自然数时,牛顿二项式系数就成为普通的二项式系数

- **定理13.6** 牛顿二项式定理,设α为实数,则对一切实数x, y, |x/y|<1,

有 $(x+y)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^{n}y^{\alpha-n}$,其中$\binom{\alpha}{n}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$

- 设m为正整数

$$(1).\alpha=-m,\binom{\alpha}{n}=\binom{-m}{n}=\frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-n+1)}{n!}=(-1)^{n}\binom{m+n-1}{n}$$

$$(2)x=z,y=1,(1+z)^{-m}=\frac{1}{(1+z)^{m}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\binom{m+n-1}{n}z^{n},|z|<1$$

$$(4).m=1,\frac{1}{1-x}=1+x+x^{2}+\cdots\cdots$$

$$(3)x=-z,y=1,(1-z)^{-m}=\frac{1}{(1-z)^{m}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n-1}{n}z^{n},|z|<1$$

$$(7).\frac{1}{1-kx}=1+kx+k^{2}x^{2}+k^{3}x^{3}+\cdots$$

$$(5).m=2,\frac{1}{(1-x)^{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n}$$

$$(6).m=\frac{1}{2},(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}k}\binom{2k-2}{k-1}x^{k}$$

§13.4 生成函数及其应用

- 定义13.6 设序列$\{a_n\}$,构造形式幂级数

$$G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

称$G(x)$为序列$\{a_n\}$的生成函数

- $\{C(m,n)\}$ 的生成函数为 $(1+x)^m$
- $\{7\cdot3^n\}$的生成函数$G(x)=7+7\cdot3x+7\cdot3^2x^2+\cdots+7\cdot3^nx^n+\cdots=7/(1-3x)$
- $\{(-1)^n(n+1)\}$ 的生成函数 $G(x)=1/(1+x)^2$
- 已知$\{a_n\}$的生成函数为$G(x)=(2+3x-6x^2)/(1-2x)$,求a_n

$$G(x)=2/(1-2x)+3x$$

$$=2(1+2x+2^2x^2+\cdots)+3x$$

$$=2+7x+2^3x^2+2^4x^3+\cdots$$

所以 $a_1=7$, $a_n=2^{n+1}, n\neq1$

§13.4 生成函数及其应用

- 应用生成函数求解递推方程
- 例13.14 求解递推方程 $\begin{cases} h_n = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}, n \ge 2 \\ h_1 = 1 \end{cases}$

解 设{h_n}的生成函数为 $H(x)=\sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n$,两边平方得

$$H^2(x)=\sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n \sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n = \sum_{k=1}^{\infty} h_k x^k \sum_{t=1}^{\infty} h_t x^t = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} h_k h_t x^{k+t}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} (x^n \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}) = \sum_{n=2}^{\infty} h_n x^n = H(x)-h_1 x = H(x)-x$$

得到一个关于H(x)的一元二次方程 $H(x)^2-H(x)+x=0$

解得 $H_1(x)=\dfrac{1+(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2}, H_2(x)=\dfrac{1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2}$

由于H(0)=0,因此取 $H(x)=H_2(x)$

$$H(x)=\frac{1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-4x)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}n}\binom{2n-2}{n-1}(-4x)^n]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n$$

所以 $H(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n$ 即 $h_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$

§ 13.4　生成函数及其应用

- 应用生成函数求解例12.9关于栈输出结果的计数问题
- 考虑字符序列1,2,…,n
  - 当某个字符X进栈时,在X前面记录一个左括号（；
  - 当某个字符X出栈时,在X后面记录一个右括号）；
  - 在括号的配对序列中,从左边算起到序列的任何位置,左括号的数目不少于右括号的数目
  - 例如　（1（2（3 3）2）1）（4（5 5）4）　表示

    1进栈, 2进栈, 3进栈, 3出栈, 2出栈, 1出栈, 4进栈, 5进栈, 5出栈, 4出栈
  - 设n对括号的配对方法数为 T(n) ,求与最左边的括号配对的右括号

    在这对括号中间有 k 对其他括号,配对方法数为 T(k)

    在这对括号后面有 n-1-k 对括号,配对方法数为 T(n-k-1)

    对于给定的 k , 这些括号的配对方法数为 T(k) T(n-k-1)

得到递推方程

$$\begin{cases} T(n) = \sum_{k=0}^{n-1} T(k)T(n-1-k) \\ T(0) = 1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^n \\ T(n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \end{cases}$$

最左边的括号与它配对的括号

中间k对括号的配对方法数为T(k)

剩余n-k-1对括号的配对方法数为T(n-k-1)

§13.4 生成函数及其应用

- 应用生成函数计算多重集的r组合数
- 设 $S=\{ n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\ldots,n_k\cdot a_k \}$
  - S的一个r组合就是一个子多重集 $\{ x_1\cdot a_1,x_2\cdot a_2,\ldots,x_k\cdot a_k \}$

    其中 x_i表示这个r组合中含有元素a_i的个数,$0\le x_i\le n_i,i=1,2,\ldots,k$

    $$x_1 + x_2 + \ldots + x_k=r$$

    由此可见 上述不定方程的解与S的r组合是一一对应的
  - 函数$G(y)=(1+y+\ldots+y^{n_1}) (1+y+\ldots+y^{n_2})\ldots\ldots(1+y+\ldots+y^{n_k})$

    展开式中的每一项 $y^r=y^{x_1+x_2+\ldots+x_k}$ 的系数,恰好就是不定方程

    $$x_1 + x_2 + \ldots + x_k=r\ , 0\le x_i\le n_i\, , i=1,2,\ldots,k$$

    的解的个数,也就是S的 r 组合数

§13.4　生成函数及其应用

- 例13.15　求$S=\{3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c\}$的10组合数N

　解　依题意　，　有关元素a的生成函数为　$1+y+y^2+y^3$

　　　　　　　　有关元素b的生成函数为　$1+y+y^2+y^3+y^4$

　　　　　　　　有关元素c的生成函数为　$1+y+y^2+y^3+y^4+y^5$

　　所以 本组合问题的生成函数为

$$G(y)=(1+y+y^2+y^3)(1+y+y^2+y^3+y^4)(1+y+y^2+y^3+y^4+y^5)$$

　　展开后y^{10}的系数是6，因此N=6

- 例　设有6个红球和4个黄球, 现要从这10个球中选取一些球, 要求红球必须取非负偶数个, 黄球必须取不少于两个, 问共有多少种不同的取法? (同种颜色的球之间无区别)

　解　与红球、黄球相关的函数分别是 $1+y^2+y^4+y^6$ ，$y^2+y^3+y^4$

　　该问题的生成函数是$(1+y^2+y^4+y^6)(y^2+y^3+y^4)$,

　　展开式为 $y^2+y^3+2y^4+y^5+2y^6+y^7+2y^8+y^9+y^{10}$

　　各项的系数和=1+1+2+1+2+1+2+1+1=12, 共有12种取法

§13.4 生成函数及其应用

- 利用生成函数求不定方程的解的个数

不定方程 $x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$，$x_i$为自然数

设多重集 $S=\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_k\}$,

S的 r 组合与上述不定方程的解之间存在一一对应的关系

S的 r 组合数就是上述不定方程的解的个数

S中每个元素的生成函数为 $1+y+y^2+y^3+\dots$

S的 r 组合数为生成函数

$G(x)=(1+y+y^2+y^3+\dots)^k$ 中 y^r 的系数

由于

$$G(x)=(1+y+y^2+\cdots)^k=\frac{1}{(1-y)^k}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-k)(-k-1)\cdots(-k-r+1)}{r!}(-y)^r$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(k)(k+1)\cdots(k+r-1)}{r!}(-1)^r y^r=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{k+r-1}{r}y^r$$

所以S的r组合数等于 $C(k+r-1,r)$

§ 13.4　生成函数及其应用

- **例13.6** 设n为自然数,求平面上由直线 $x+2y=n$ 与两个坐标轴所围成的直角三角形内(包括边上)的整点个数,其中整点表示横、纵坐标都是整数的点。

解　对于 $r=0,1,2,\ldots$, 直线 $x+2y=r$ 上的整点个数就是不定方程 $x+2y=r$ 的非负整数解的个数 a_r,设关于 $\{a_r\}$ 的生成函数为 $A(z)$,则

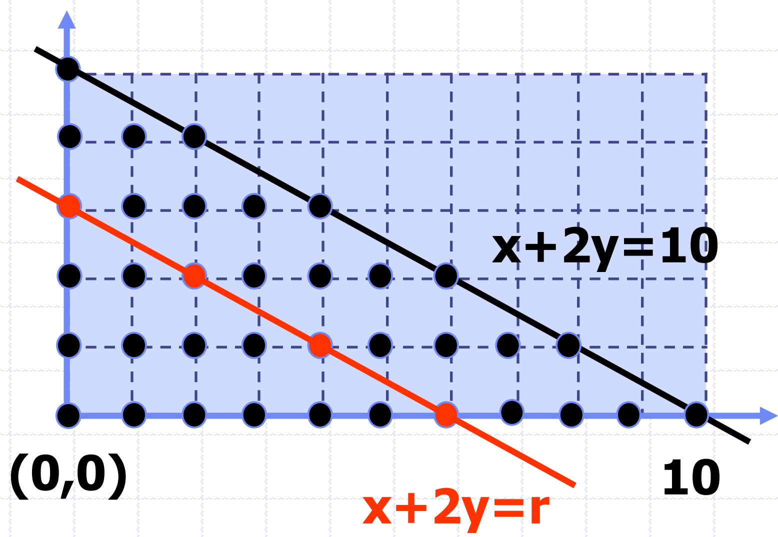
$$A(z)=(1+z+z^2+\cdots)(1+z^2+z^4+\cdots)$$

$$=\frac{1}{(1-z)(1-z^2)}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+z}+\left(-\frac{z}{4}+\frac{3}{4}\right)\frac{1}{(1-z)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r z^r-\frac{z}{4}\sum_{r=0}^{\infty}(1+r)z^r+\frac{3}{4}\sum_{r=0}^{\infty}(1+r)z^r$$

$$a_r=\frac{r}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}(-1)^r$$

$$N=\sum_{r=0}^{n}a_r=\frac{1}{4}(n+1)(n+3)+\frac{1}{8}[1+(-1)^n]$$



§13.4 生成函数及其应用

- 利用生成函数求解整数拆分问题
- 设N是给定正整数,将N无序拆分成正整数 $a_1,a_2,\ldots,a_n$,则有等式

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots\ldots+a_nx_n=N$$

- 拆分后的部分不允许重复,即每个a_i,$i=1,2,\ldots,n$,只能出现0次或1次

  对应的生成函数 $G(y)=(1+y^{a_1})(1+y^{a_2})\ldots\ldots(1+y^{a_n})$

  展开式中 y^N的系数就是问题的解
- 拆分后的部分允许重复,即每个a_i,$i=1,2,\ldots,n$,出现的次数不受限制

  对应的生成函数

$$G(y)=(1+y^{a_1}+y^{2a_1}+y^{3a_1}+\ldots)\ldots(1+y^{a_n}+y^{2a_n}+y^{3a_n}+\ldots)$$

$$=1/[(1-y^{a_1})(1-y^{a_2})\ldots(1-y^{a_n})]$$

  展开式中 y^N的系数就是问题的解

§ 13.4 生成函数及其应用

- **例13.8 给定r,求将正整数N无序并允许重复地拆分成k个部分(k≤r)的方法数**

解 任意一个将**N**无序并允许重复地拆分成**k**个部分**(k≤r)**的方案可以用**Ferrers**图来表示,

Ferrers图画法:首先将被拆分的部分按照从大到小的顺序排列

拆分后的每个数从左到右分别用一列点来表示

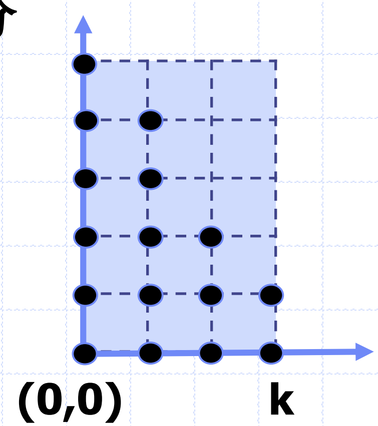
将**Ferrers**图围绕直线**y=x**翻转**180**度,就得到另一个共轭的**Ferrers**图

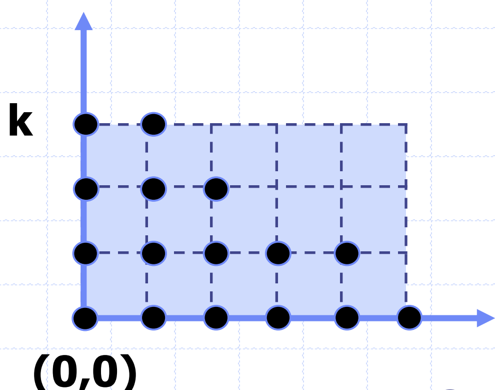
这个图恰好对应了每个部分不超过**r**的一种方案

问题转变为将**N**无序并允许重复的拆分成不超过**r**的数的方案

对应生成函数为

$G(x)=1/[(1-y)(1-y^2)\ldots(1-y^r)]$





§13.4　生成函数及其应用

- **定理13.7**　设**N**是正整数,将**N**允许重复地有序拆分成**r**个部分的方案为

  C(N-1,r-1)

证　　设　$N=a_1+a_2+\ldots\ldots+a_r$ 是满足条件的拆分,则令

$$S_i=\sum_{k=1}^{i}a_i,i=1,2,\cdots,r$$

那么　$0<S_1<S_2<\ldots<S_{r-1}<S_r=N$

则拆分方案与S_i的选择方法是一一对应的

由于**r-1**个$S_i(i=1,2,\ldots,r-1)$取值于集合　**{1,2,……,N-1}**,

所以选择的方法数是 **C(N-1,r-1)**

- **推论** 对正整数**N**做任意重复的有序拆分,方案数为 $\sum_{r=1}^{N}\binom{N-1}{r-1}=2^{N-1}$

§ 13.4　生成函数及其应用

- 例　设有 1 克的砝码 3 枚，2 克的砝码 4 枚，4 克的砝码 2 枚，问能称出哪些重量? 各有几种方案数?

解　本题中 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$, 因此其生成函数为

$$(1+y+y^2+y^3)(1+y^2+y^4+y^6+y^8)(1+y^4+y^8)$$
$$=1+y+2y^2+2y^3+3y^4+3y^5+4y^6+4y^7+5y^8+5y^9+5y^{10}$$
$$+5y^{11}+4y^{12}+4y^{13}+3y^{14}+3y^{15}+2y^{16}+2y^{17}+y^{18}+y^{19}$$

由此可知，用这些砝码可以称出从 1 克到 19 克的重量.

从1克到19克所对应的方案数依次为

1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1

- 在上例中称10克的重量都有哪些方案?

依题意其生成函数为

$$(1+a_1y+a_1^2y^2+a_1^3y^3)(1+a_2y^2+a_2^2y^4+a_2^3y^6+a_2^4y^8)(1+a_4y^4+a_4^2y^8)$$
$$=\cdots+(a_1^2a_2^2a_4+a_1^2a_2^4+a_1^2a_4^2+a_2a_4^2+a_2^3a_4)y^{10}+\cdots$$

2个1克,2个2克,1个4克
2个1克,4个2克
2个1克,2个4克
1个2克,2个4克
3个2克,1个4克

§13.5 指数生成函数及其应用

- **定义13.7** 设 $\{a_n\}$ 为序列,称

$$G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}$$

为 $\{a_n\}$ 的指数生成函数

- **例13.20** 给定正整数m, $\{a_n\}=P(m,n)$,则 $\{a_n\}$ 的指数生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}P(m,n)\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}C(m,n)x^n=\sum_{n=0}^{m}C(m,n)x^n=(1+x)^m=G_e(x)$$

- **例13.21** 设 $b_n=1$,$\{b_n\}$ 指数生成函数为 $G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$

- **定理13.8** 设 $S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\ldots,n_k\cdot a_k\}$ 为多重集,

则S的r排列数的指数生成函数为

$$G_e(x)=f_{n_1}(x)f_{n_2}(x)\cdots f_{n_k}(x)$$

其中

$$f_{n_i}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n_i}}{n_i!},i=1,2,\cdots,k$$

§13.5 指数生成函数及其应用

- **例13.22** 由**1,2,3,4**组成的五位数中,要求**1**出现不超过**2**次,但不能不出现,**2**出现不超过**1**次,**3**出现至多**3**次,**4**出现偶数次.求这样的五位数个数**N.**

解 依题意 与**1**相关的指数生成函数为 $f_1(x)=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}$

与**2**相关的指数生成函数为 $f_2(x)=1+x$

与**3**相关的指数生成函数为 $f_3(x)=(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})$

与**4**相关的指数生成函数为 $f_4(x)=(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!})$

所以本问题的指数生成函数为

$$G_e(x)=f_1(x)f_2(x)f_3(x)f_4(x)=\left(\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}\right)(1+x)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)$$

$$=x+5\frac{x^2}{2!}+18\frac{x^3}{3!}+64\frac{x^4}{4!}+215\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

N=215

§ 13.5 指数生成函数及其应用

- **例13.23** 由**A,B,C,D,E,F**构成长度为**n**的序列,如果要求在排列中**A**与**B**出现的次数之和为偶数,问这样的序列有多少个?

解 将序列分成两类:第一类**A**出现奇数次,第一类**A**出现偶数次

1) A出现奇数次(这时**B**也出现奇数次)

与**A**相关的指数生成函数为

与**B**相关的指数生成函数为

$$f_{A1}(x)=f_{B1}(x)=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

2) A出现偶数次(这时**B**也出现偶数次)

与**A**相关的指数生成函数为

与**B**相关的指数生成函数为

$$f_{A2}(x)=f_{B2}(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

与**C,D,E,F**相关的指数生成函数均为 $f_C(x)=f_D(x)=f_E(x)=f_F(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots=e^x$

所以与问题对应的指数生成函数为

$$G_e(x)=[f_{A1}(x)f_{B1}(x)+f_{A2}(x)f_{B2}(x)]f_C(x)f_D(x)f_E(x)f_F(x)=\left[\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2\right]e^{4x}$$

$$=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}e^{4x}=\frac{e^{6x}+e^{2x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{6^n+2^n}{2}\right)\frac{x^n}{n!}$$

$$a_n=\frac{6^n+2^n}{2}$$

§ 13.5 指数生成函数及其应用

- 例 从**chance and choice**的字母中每次选取**4**个的排列数为多少?

解 在 **chance and choice 4**个**c,** 各**2**个**h, a, n, e,** 各**1**个**d, o, i**

与 **c** 有关的指数生成函数为 $f_c(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}$

与 **h,a,n,e** 有关的指数生成函数为 $f_h(x)=f_a(x)=f_n(x)=f_e(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}$

与 **d,o,i** 有关的指数生成函数为 $f_d(x)=f_o(x)=f_i(x)=f_e(x)=1+x$

所以本问题的指数生成函数为

$$G_e(x)=f_c(x)f_h(x)f_a(x)f_n(x)f_e(x)f_d(x)f_o(x)f_i(x)$$

$$=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)^4(1+x)^3$$

$$=\cdots+\boxed{3029\cdot\frac{x^4}{4!}}+\cdots$$

所求的排列数为 **3029**

§ 13.6 Catalan数与Stirling数

- **Catalan数：** 称 $h_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ 为第n个Catalan数,n=1,2,…
- 例 给定一个凸n+1边形,通过内部不相交的对角线把它划分成三角形,不同的划分方案数恰好是第n个Catalan数。

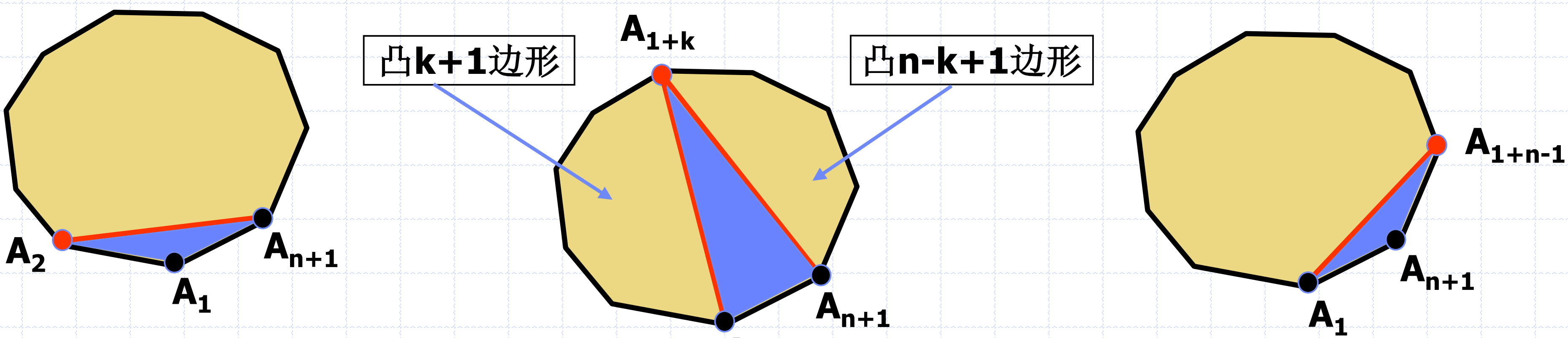
解 设一个凸n+1边形满足要求的不同划分方案数为 h_n

对于任意一个划分方案,恰好只有一个以底边 A_1A_{n+1} 为边的三角形

不妨设这个三角形的另一个顶点为 A_{1+k}，

则以 A_{1+k} 的位置对划分方案进行分类如下:

k=1(h_1h_{n-1}种方案),…, (h_kh_{n-k}种方案) ,…,k=n-1(h_n=$h_{n-1}h_1$种方案)



A_1

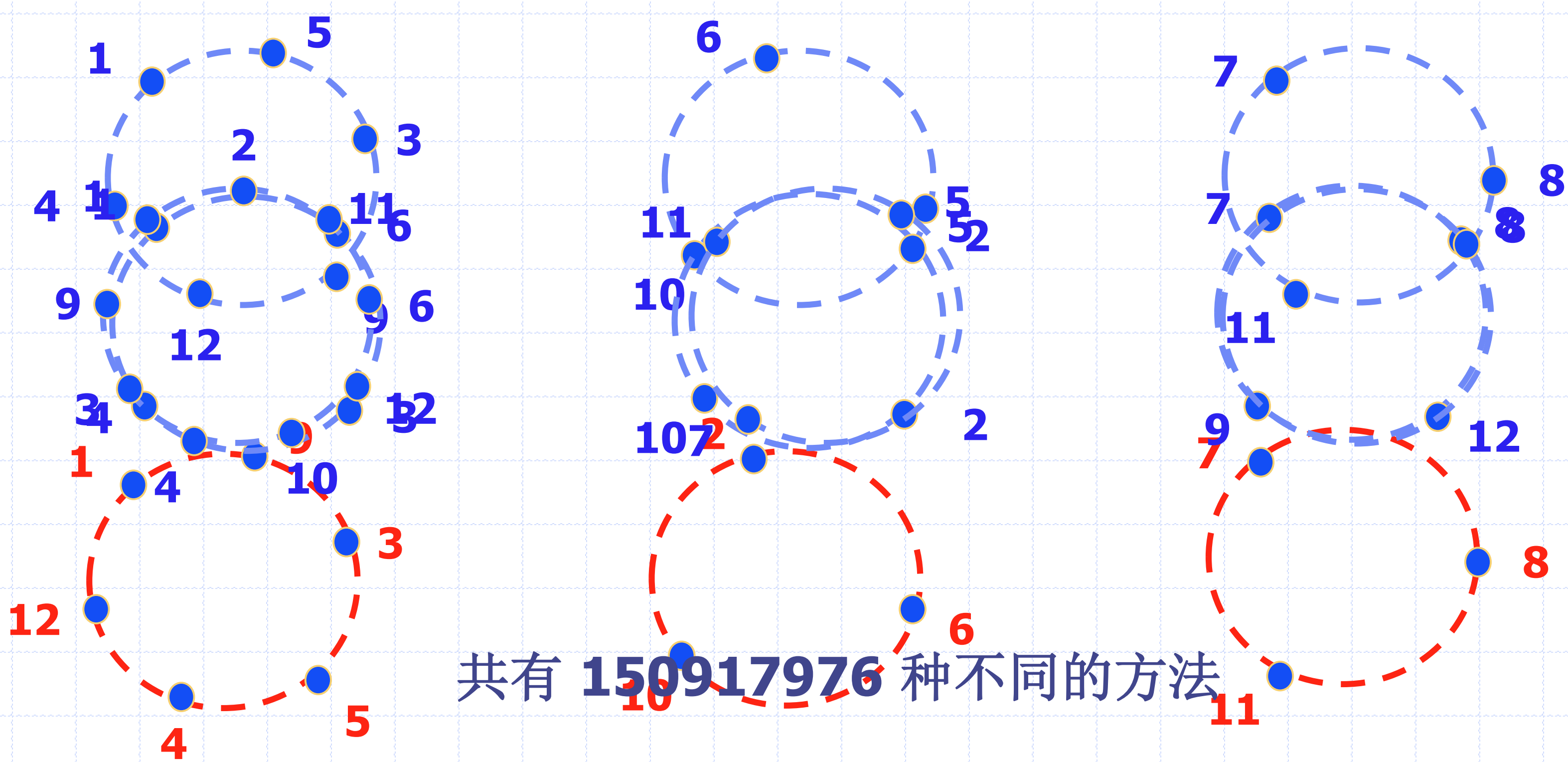
根据加法法则,总的方案数为

$$h_n=\sum_{k=1}^{n-1}h_kh_{n-k},n\geq 2,h_1=1$$

解得 $h_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$

§13.6 Catalan数与Stirling数

- 第一类**Stirling**数:与**n**个不同文字划分的计数相关,在这些划分中**n**个文字被分成**r**个环排列。即将**n**个不同文字划分成**r**组,在每组内再作环排列的方法数.
- 例 在一次有**12**个人参加宴席中,要将客人安排在**3**张桌子,每张桌子至少有一个人.如果只考虑位置的相邻关系,则共有多少种的不同方法?



共有 **150917976** 种不同的方法

§13.6 Catalan数与Stirling数

- 考虑多项式 x(x-1)(x-2)…(x-n+1) 的展开式

$$S_n x^n - S_{n-1} x^{n-1} + S_{n-2} x^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} S_1 x$$

将上述展开式中x_r的系数的绝对值S_r,记作$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$,称为第一类Stirlign数

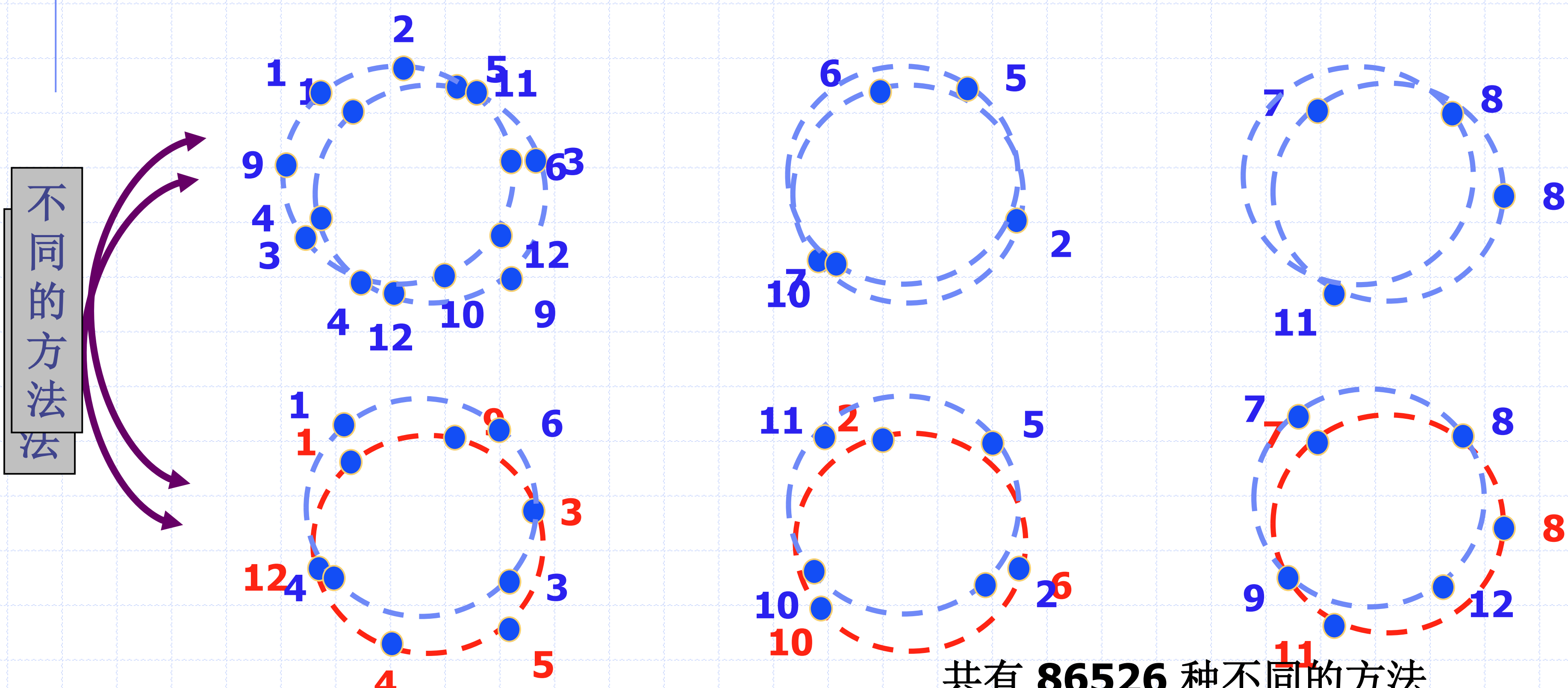
- $1.\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}, n > r \geq 1$

$$\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1, \qquad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$$

- $2.\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
- $3.\sum_{r=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = n!$

§13.6 Catalan数与Stirling数

- 第二类Stirling数:与n个不同文划分的计数相关,在这些划分中n个文字被分成r个部分。
- 例 在一次有12个人参加宴席中,要将客人安排在3张桌子,每张桌子至少有一个人.如果只考虑客人是否同桌,则共有多少种的不同方法?



共有 **86526** 种不同的方法

§13.6 Catalan数与Stirling数

- 考虑n个不同的球恰好放到r个相同的盒子里的方法数,

  称作第二类Stirling数,记作 $\left\{ {n \atop r} \right\}$

  - $1.\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$
  - $2.\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$
  - $3.\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$
  - $4.\sum \binom{n}{n_1 n_2 \cdots n_m} = m!\left\{ {n \atop m} \right\}$ 其中Σ是对 $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$ 的正整数解求和
  - $5.\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \left\{ {n \atop k} \right\} k! = m^n$
  - $6.\left\{ {n+1 \atop r} \right\} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left\{ {i \atop r-1} \right\}$

§ 13.6 Catalan数与Stirling数

- 设有n个球,m个盒子,与这个放球问题相关的计数结果如下表所示

球区别	盒区别	是否空盒	模型	方案计数
有	有	有	选取	m^n
有	有	无	放球子模型	$m!\left\{\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\}$
有	无	有		$\sum_{m=1}^{n}\left\{\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\}$
有	无	无		$\left\{\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\}$
无	有	有	不定方程	$C(n+m-1,n)$
无	有	无		$C(n-1,m-1)$
无	无	有	正整数拆分	$G(x)=\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$, x^n 系数
无	无	无		$G(x)=\dfrac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$, x^n系数

§ 13.6 Catalan数与Stirling数

- 例13.25 设A,B为集合,其中|A|=n,|B|=m,问:

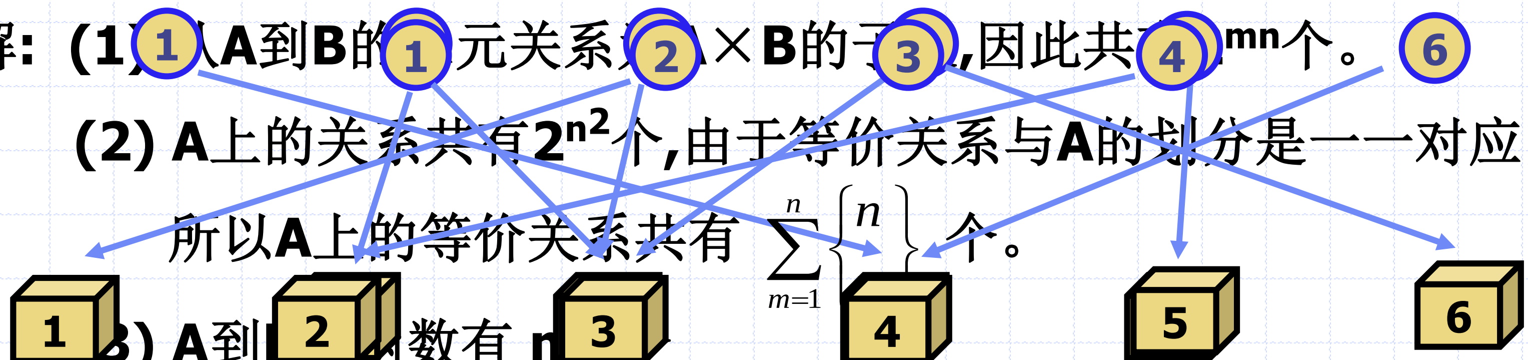
  (1) 从A到B的关系有多少个?

  (2) A上关系有多少个?其中等价关系有多少个?

  (3) 从A到B的函数有多少个?其中单射有多少个?满射有多少个?双射有多少个?

解: (1) 从A到B的二元关系是A×B的子集,因此共有2^{mn}个。

(2) A上的关系共有2^{n^2}个,由于等价关系与A的划分是一一对应的,所以A上的等价关系共有 $\sum_{m=1}^{n}\left\{ n \atop m \right\}$ 个。



(3) A到B的函数有 n

设A={1,2,3,4,5,6},B={1,2,3,4},函数 f: A→B 是满射

则$f^{-1}(\{1\}),f^{-1}(\{2\}),f^{-1}(\{3\}),f^{-1}(\{4\})$ 是对集合A的一个4划分,

并且不同划分方法得到不同的函数,

相同的划分方法但划分块对应的像不同也得到不同的函数

因此A到B的满射共有 $4!\left\{ 6 \atop 4 \right\} = 24\times 65 = 1560$ 个