

SuperPrime Rib

Μια απλή προσέγγιση θα ήταν να ελέξουμε όλους τους αριθμούς όμως αυτό θα ήταν πολύ αργό (κάθε φορά που κόβουμε τον αριθμό ελέγχουμε αν είναι πρώτος ένας αριθμός που έχουμε ελέξει ήδη, λύνουμε το ίδιο πρόβλημα πολλές φορές). Για 8 ψηφία θα χρειάζονταν $8 \cdot (10^9 - 10^8)$ ελέγχοι του αν είναι πρώτος.

Είναι καλό να προσέξουμε ότι ένας πρώτος δεν τελειώνει ποτέ σε ζυγό ψηφίο (εκτός αν είναι το 2). Ούτε σε 5 εκτός αν είναι μονοψήφιος (γιατί θα διαιρείται με το 5). Πιο συγκεκριμένα θα δημιουργήσουμε (generate) τους αριθμούς ως ακολούθως:

Επιλέγουμε ένα από τα ψηφία 2, 3, 5, 7 και κάθε φορά προσθέτουμε στο τέλος ένα από τα ψηφία 1, 3, 7, 9 ελέγχοντας αν είναι πρώτος. Όταν φτάσουμε τα N ψηφία τυπώνουμε τον αριθμό. Αυτό χρειάζεται $4^8 = 65536$ ελεγχους για N=8 οπότε είναι αρκετά γρήγορο.

Σημείωση:

Αν ένα αριθμό x δεν το διαιρεί κανένας μέχρι την τετραγωνική του ρίζα τότε είναι πρώτος. Απόδειξη:

Έστω $x = a \cdot b$ και $a > \sqrt{x}$ και $b > \sqrt{x}$, τότε $a \cdot b > \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$ δηλαδή $a \cdot b > x$ άτοπο, πρέπει $a < \sqrt{x}$ ή $b < \sqrt{x}$ αν ο ένας είναι μεγαλύτερος από την τετραγωνική ρίζα.

Οπότε για να ελέγξουμε αν ένας αριθμός είναι πρώτος ελέγχουμε:

- αν είναι ίσος με 2 τότε είναι πρώτος
- αν διαιρείται με 2 δεν είναι πρώτος
- αν διαρείται με κάποιο μονό αριθμό μέχρι την τετραγωνική του ρίζα είναι πρώτος
- αλλιώς δεν είναι πρώτος