

3-13. 고유값과 고유벡터

정방행렬 A 가 있고, A 의 식을 만족하는 벡터 x ($x \neq 0$)가 존재하면,
 λ 를 행렬 A 의 **고유값**, x 를 **고유벡터**라고 함.

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda Ex \\ \Rightarrow (A - \lambda E)x &= 0 \end{aligned}$$

위 식의 $A - \lambda E$ 가 역행렬 $(A - \lambda E)^{-1}$ 를 가지면

다음과 같이 양변에 역행렬을 곱해볼 수 있음

$$(A - \lambda E)x \times (A - \lambda E)^{-1} = 0 \times (A - \lambda E)^{-1}$$

$$x = (A - \lambda E)^{-1} \times 0 = 0$$

이 식은 $x=0$ 이라는 자명한 해를 가짐
trivial solution

이 경우 x 의 존재인 $x \neq 0$ 를 보일 필요 없음.

이 보증을 위해 고유벡터가 존재하려면

$(A - \lambda E)$ 가 역행렬 $(A - \lambda E)^{-1}$ 를 가지면 안됨.

고유벡터가 존재하기 위한 조건식

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

이러한 λ 의 방정식을 행렬 A 의 **고유 방정식**이라고 함

행렬의 크기가 3×3 이상일 때도 그에 대응하는 행렬식과 고유 방정식이 있기 때문에, 같은 방식으로 고유값과 고유 벡터 정의 가능 함

고윳값과 고윳벡터는 어떤 의미를 갖고있는가?

- 공학자의 수학정리요

어떤 벡터들은 마치 행렬과 한쌍인 것처럼

특정한 선형변환에서 크기와 방향이 바뀌지 않을 수 있음

예시

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

크기만 세배가 됨

↓
x와 Ax가 평행할 때

↓
이 것을 찾아내는데

← 고윳값, 고윳벡터의 역할

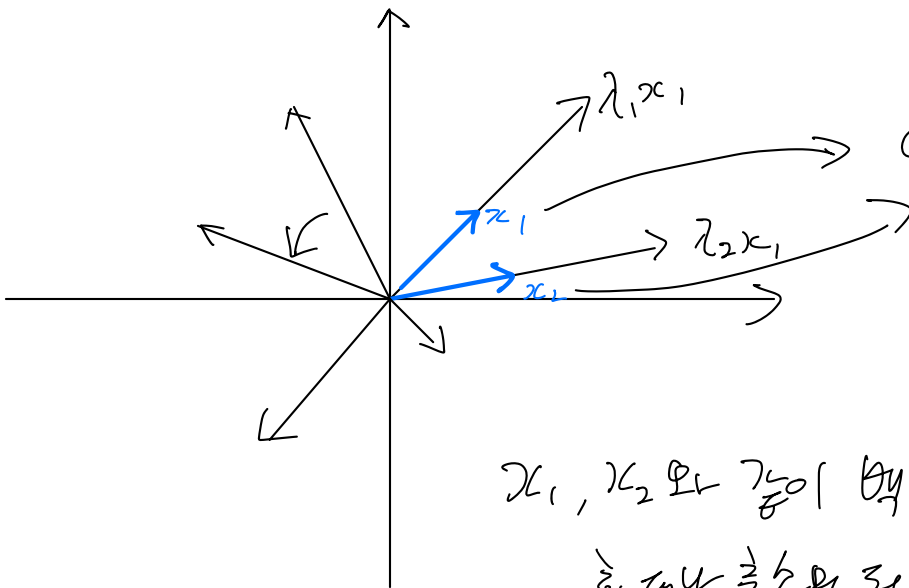
고윳값, 고윳벡터가 물어보는 것

→ 벡터 x에 선형변환 A를 취했을 때,

크기만 변하고 원래 벡터와 평행한 벡터 x는 무엇인가?

변한 크기 λ가 고윳값, 벡터 x가 고윳벡터

→ 무조건 2개씩 존재



어떤 평행한 고윳벡터를 주면
방향은 바뀌지 않거나
역방향이 됨.

x_1, x_2 와 같이 벡터가 회전하지 않고

회전할 때 크기는 변할 수 있음 벡터의 길이 비율이 고윳값

벡터 방향에 고윳벡터

고유값과 고유벡터를 어떻게 구하나요?

예시)

고유값 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ 의 고유값과 고유벡터를 구하기.

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\det \left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ -1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(-3-\lambda) - 4(-1) = 0$$

$$-6 - 2\lambda + 3\lambda + \lambda^2 + 4 = 0$$

$$= \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda = -2 \text{ or } \lambda = 1$$

$\lambda = -2$ 일 때,

$$(A + 2E)x = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

$x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 라고 하자

임의의 상수 t 가 있을 때
가장

$$\alpha + \beta = 0$$

$$\alpha = t, \beta = -t$$

$$x = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

따라서 고유벡터 x 은 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 의 상수배이다.

$$\lambda = 1 \text{ 일 때,}$$

$$(A - E)x = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha + 4\beta = 0$$

$$\alpha = -4\beta$$

$$\alpha = t \text{ 라고 하자}$$

$$\beta = -\frac{1}{4}t$$

$$x = t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = t \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

따라서 고유벡터 x 는 $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ 상수배.

인공신경망?

- 머신러닝의 **주요 방법론 (PCA)** 기법은 다차원 데이터를 더 보기 쉽도록 2차원이나 3차원으로 축소함
- 데이터가 많이 주어지는 분포 상황에서서는 주어진 문제를 해결하기 위해 고윳값과 고유벡터의 도움을 받아야 함.
- 고윳값은 어떤 데이터가 가진 특징을 얼마나 잘 설명할 수 있는지 가능할 때 사용됨.

기어울 \Rightarrow 각 주성분 (고윳벡터) 에 대응하는 고윳값들을 전체 고윳값의 총합으로 나누고 주성분이 데이터의 특징을 얼마나 잘 설명할 수 있는지 평가하는 척도로 사용됨