3-12. 선형변환

선형 변환이란?

벡터에 행렬을 곱해 또다른 벡터를 만드는 함수

하나의 벡터공간에서 또다른 벡터 공간으로, 벡터의 특징을 유지한채 변환하는 방법

예시

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ 이고, } b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ 일때 } Ab_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

표준기저 e 란? - Standard basis

벡터 공간을 구성하는 기준

x, y, z 축처럼 일종의 '좌표계'를 정할 수 있는 좌표의 집합

b_1 은 표준기저 $e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 로 다음과 같이 표현 가능하다.

$$b_1 = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3e_x + 2e_y$$

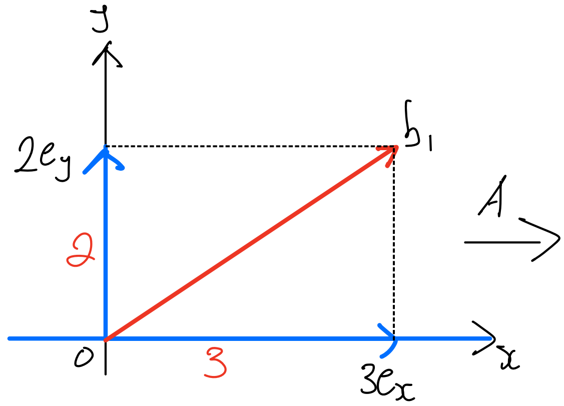
A를 두개의 열벡터 $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 로 나누어 $A = (e_1, e_2)$ 로 만들 수 있음

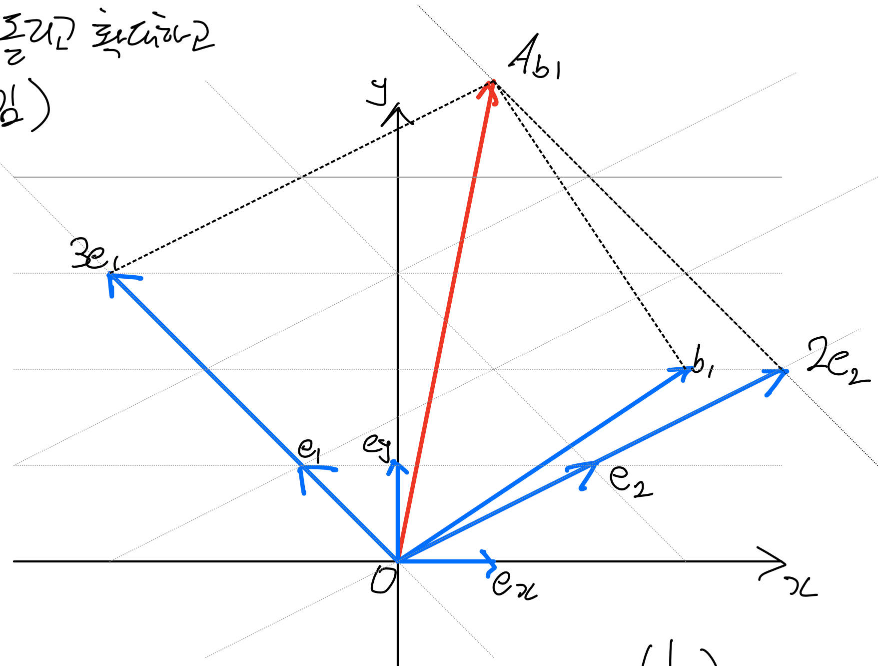
$$Ab_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left\{ 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= 3\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3e_1 + 2e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

기하학적 의미 (전체 선택해서 돌리고 확대하고 줄이고 한 느낌)





$b_1 = 3e_x + 2e_y$

$Ab_1 = 3e_1 + 2e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

각각의 교점은 표준기저 e_x e_y를 정수크기로 스칼라배 한다음 합한 식을 의미

$xe_x + ye_y$

(이때 x와 y는 정수)

왼쪽 그림에서 b_1은 기준점 O로부터 e_x 방향으로 3, e_y 방향으로 2만큼 움직인 지점

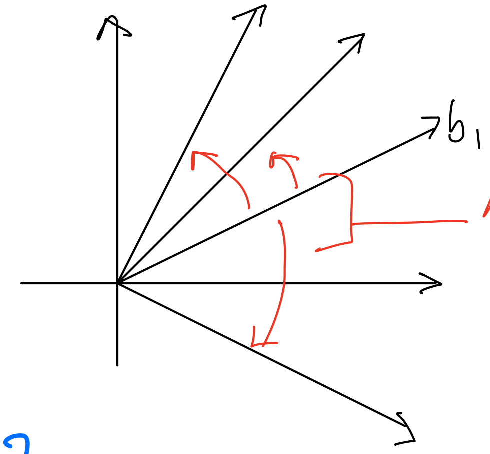
마찬가지로 오른쪽 그림에서 Ab_1은 e_1 방향으로 3만큼, e_2 방향으로 2만큼 움직인 지점

왼쪽에선 e_x가, 오른쪽에서는 e_1이 3만큼 움직였고,
왼쪽에선 e_y가, 오른쪽에서는 e_2가 2만큼 움직임
→ 방향은 다르지만 동률로 움직임

따라서
어떤 벡터의 왼쪽에 행렬 A를 곱한다는 것은
그 벡터를 회전, 확대, 축소 등 변형하는 것임.

표준기저 $e_x, e_y, \dots$에서 다른기저 $e_1, e_2 \dots$로 변환한다 라고 표현

→ 선형 변환 / 1차 변환



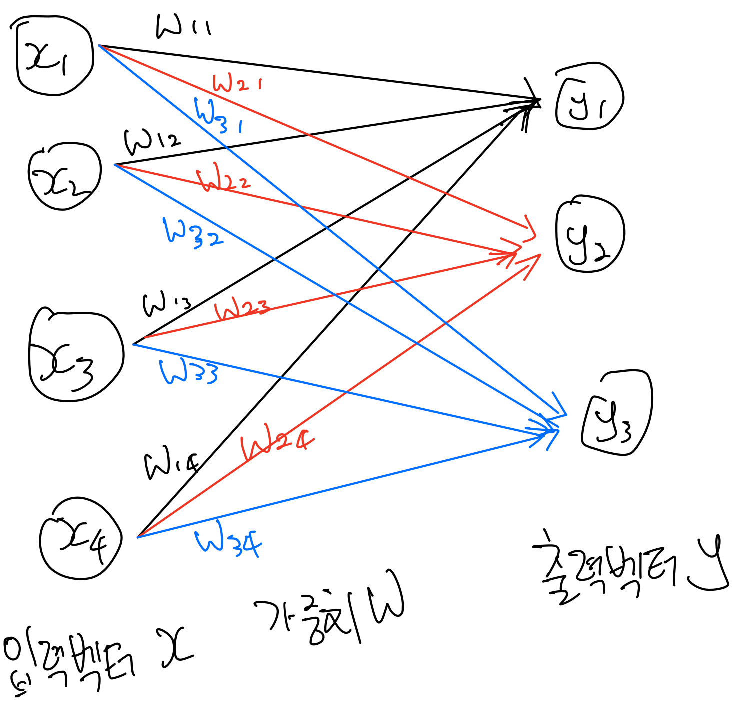
선형변환을 할 때, 다양한 행렬을 사용하여 벡터 b을 회전하거나 확대 또는 축소할 수 있음

인공지능에선?

인공지능에서 많이 사용하는 알고리즘 중 신경망의 계산에서, 파라미터와 가중치를 곱한 뒤에, 그 결과를 모아서 합산하는 처리가 많음.

이때, 파라미터와 가중치를 곱하는 과정을 일종의 선형 변환으로 볼 수 있음.

아래는 신경망에서 발생하는 계산 과정과 선형 변환의 관계를 나타낸 그림.



$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} \end{pmatrix}$$

$y = Wx$ ⇒ 선형 변환