2-2. 미분의 기초

미분 이해를 위한 예제

강남역에서 인천공항까지의 72.56km 거리를 가는데
자동차로 1시간반 걸렸다.
이 때 자동차의 평균 속도를 구하시오.

평균속도 $v = \frac{72.56km}{1.5h} = 48.37 km/h$.

↳ 항상 이 속도는 아니고, 신호 대기 중일 수도,
고속도로에서 고속 주행 중일수도 있음.

시간을 줄여가며 10분동안, 1분동안, 1초동안 몇Km를 달렸는지 알아내면
자동차의 속도를 더 정확히 알 수 있음.

↳ 순간 속도

자동차의 이동거리를 x, 이동시간을 t, 시간이 t일 때 자동차의 위치를 $x(t)$
라고 가정할 때, 순간 속도 v는 아래 수식과 같음

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$ → 미분

$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ → 이동 거리의 변화량 / → 이동 시간의 변화량

⇒ 극한의 개념을 이용해
시간의 변화량 Δt를 최대한 0에 가깝게
만들 때 순간 속도가 얼마인지 알아내기 위한 식

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$x(t+\Delta t)$는 시간이 $t+\Delta t$일 때 자동차의 위치

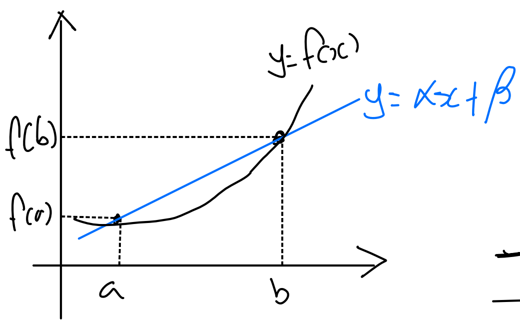
Δt를 0에 가깝게 극한으로 만들 때의 Δx가 미분.

변화량이 극도로 작을 때엔 Δ 대신 d를 사용하여 dt 나 dx로 표기.

마찬가지로 미분도 $\frac{dx(t)}{dt}$로 표기.

순간속도 $v = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$

일반적인 함수에 적용했을때, 두점 $(a, f(a))$ 와 $(b, f(b))$가 있다고 가정



$$
\begin{aligned}
f(b) &= \alpha b + \beta \\
-\quad f(a) &= \alpha a + \beta \\
\hline
f(b) - f(a) &= \alpha b - \alpha a
\end{aligned}
$$

$$\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\beta = f(a) - \alpha a$$

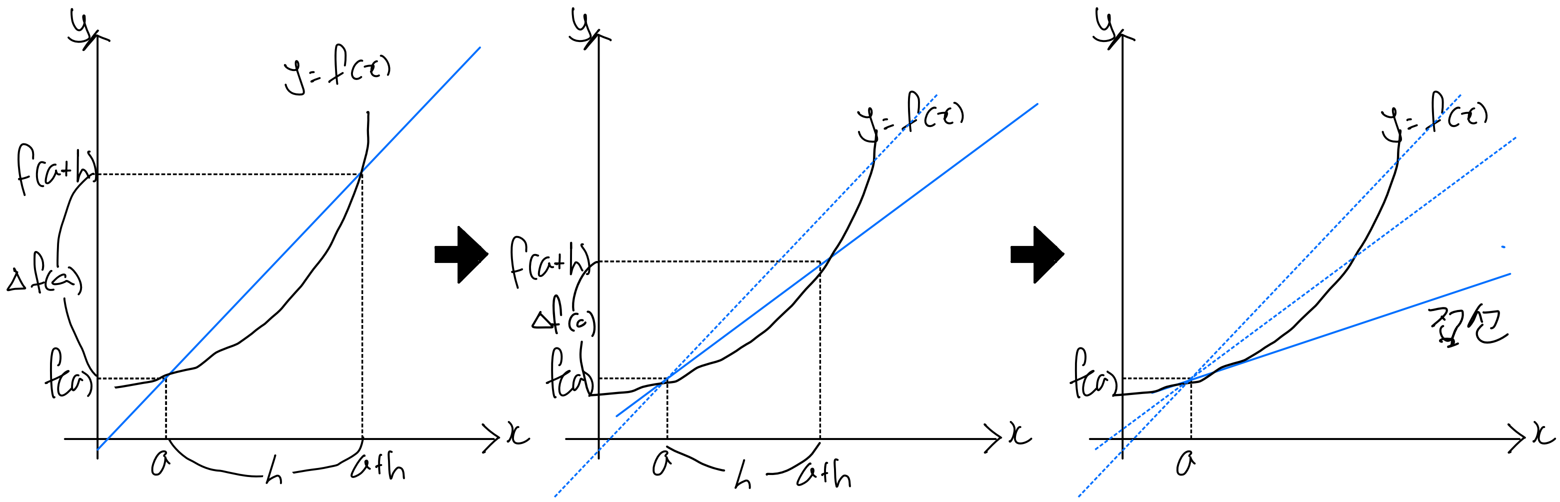
$$\beta = f(a) - \alpha a = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} a$$

기울기 α = 두점 사이에서 평균적으로 변화한 정도

기울기 $\alpha = \frac{d\, f(a)}{dx}$를 구하려면 극한을 사용해야함

어떤함수의 특정한 지점에서 기울기를 구하는 것 $\Rightarrow$ 미분한다.

두점의 간격을 좁게 했을 때의 극한과 접선



수식

$$\frac{df(a)}{d(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

점 $(a, f(a))$ 에서 $y = f(x)$ 에 접하는 직선 $y = \alpha x + \beta$ 를 접선이라고 함

tangent, tangent line

평균 변화율의 극한값인 α 는 $x = a$ 일때의 **미분계수**라고 함

$$y = \frac{df(a)}{dx} x + \left(f(a) - \frac{df(a)}{dx} a \right) = \frac{df(a)}{dx} (x - a) + f(a)$$

위 수식에서 a 는 변수 x 가 가질수 있는 수많은 값들 중 하나.

상수 a 에 어떤 x를 대입하도 $\frac{df(a)}{dx}$ 의 값은 결정되어

$\frac{df(a)}{dx}$ 는 x 에 대한 일종의 함수

$\frac{df(x)}{dx}$ 도함수

공식

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

변수 x가 dx 만큼 아주 조금 변화할 때
함수 f(x) 가 얼마나 변화 (df(x)) 하는지 를
아주 짧은 순간의 변화율로 표현함.

미분 한 번 한 것을 **1계 미분**,
미분한 식을 a 시한 번 더 미분한, 총 두번 미분한 것을 **2계 미분**이라고 함

$$2계 미분 = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = f''(x)$$

인공지능에서?

함수의 값이 어느 지점에서 최소가 되는 지를 알아내는게 중요함

예시) 손실함수 (loss function)는 정답과 예측값 (측정값) 사이의 오차를
표현하는 함수.
이 함수의 값을 최소로 만들기 위해 다양한 방법을 사용.

손실함수를 미분하면 어떤 특정 지점에서 어느 정도의 기울기가
나오는지 알 수 있음.
이 기울기의 절댓값이 작아지는 방향으로 그 지점을 옮기다보면
손실함수의 최솟값을 구할 수 있음

⇒ 경사하강법