3 - 10. 행렬의 곱셈

행벡터 $a_1 = (-1, 2)$, $b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(1x2 행렬) (2x1 행렬)

$$a_1 \times b_1 = -1 \times 3 + 2 \times 2 = 1$$

정의

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 이고 $b = \begin{pmatrix} b_1, \\ b_2, \\ \vdots, \\ b_n \end{pmatrix}$ 일 때

$$\vec{a} \times \vec{b} = \langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

예시

$a_1 = (-1, 2)$ $a_2 = (1, 1)$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \times b_1 = \begin{pmatrix} \langle a_1, b_1 \rangle \\ \langle a_2, b_1 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3+4) \\ (3+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$a_3 = (3, 0)$

$$A' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A' \times b_1 = \begin{pmatrix} \langle a_1, b_1 \rangle \\ \langle a_2, b_1 \rangle \\ \langle a_3, b_1 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

공식

$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1, \\ \vec{a}_2, \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}, & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2}, & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 이고 $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 일 때

$$Ab = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} \langle \vec{a}_1, b \rangle \\ \langle \vec{a}_2, b \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{a}_m, b \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} b_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i} b_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi} b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} b_1 + a_{12} b_2 + \dots + a_{1n} b_n \\ a_{21} b_1 + a_{22} b_2 + \dots + a_{2n} b_n \\ \vdots \\ a_{m1} b_n + a_{m2} b_n + \dots + a_{mn} b_n \end{pmatrix}$$

예제

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$ 이고 $B = (b_1, b_2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 일때

$a_1 = (-1, 2)$, $a_2 = (1, 1)$, $b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$A \times B = \begin{pmatrix} \langle a_1, b_1 \rangle & \langle a_1 b_2 \rangle \\ \langle a_2, b_1 \rangle & \langle a_2 b_2 \rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

공식

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$ 이고 $B = (b_1, b_2, \cdots b_k)$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}, & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21}, & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots \\ b_{m1}, & b_{m2} & \cdots & b_{mk} \end{pmatrix}$$ 일때

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} (b_1, b_2, \cdots b_k)$$

$$= \begin{pmatrix} \langle a_1, b_1 \rangle & \langle a_1 b_2 \rangle, & \cdots & \langle a_1 b_k \rangle \\ \langle a_2, b_1 \rangle & \langle a_2 b_2 \rangle, & \cdots & \langle a_2 b_k \rangle \\ \vdots \\ \langle a_m, b_1 \rangle & \langle a_m b_2 \rangle, & \cdots & \langle a_m b_k \rangle \end{pmatrix}$$

$$= \langle a_p, a_q \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{p_i} b_{q_i}$$

$$= a_{p_1} b_{1q} + a_{p_2} b_{2q} + \cdots + a_{pn} b_{nq}$$

조금더쉽게

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 11 \end{pmatrix}$$

행렬 B

행렬 A

	0 0	1 −3	0 11
1 4	1×0 + 4×0	1×1 + 4×(−3)	1×0 + 4×11
0 0	0×0 + 0×0	0×1 + 0×(−3)	0×0 + 0×11
8 0	8×0 + 0×0	8×1 + 0×−3	8×0 + 0×11

=

행렬 B

행렬 A

	0 0	1 −3	0 11
1 4	0	−3	44
0 0	0	0	0
8 0	0	8	0

$$= \begin{pmatrix} 0 & -3 & 44 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

스칼라 배의 개념은 행렬에도 적용가능

공식

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1}, & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

일때 이 행렬을 k 배 한 kA는 다음과 같다.

$$kA = k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & & & \\ ka_{m1}, & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

예제

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 을 $\frac{5}{2}$ 스칼라 배 하시오

$$= \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

행렬 곱셈의 규칙

① 행렬 A와 행렬 B를 곱할때 행렬A의 열의 갯수와 행렬B의 행의 갯수가 같아야함

↳ $A = (m \times n)$행렬, $B = (n \times l)$ 행렬

결과 ⇒ $AB = (m \times l)$행렬

② 곱셈의 순서에 따라 결과와 행렬의 크기가 달라짐

$A' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $B' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 일때

$A'B' = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & 2 \\ 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ $B'A' = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

영행렬 zero-matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 0으로 채워진 행렬

0영행렬을 곱하지 않아도 영행렬이 되는 경우가 있음

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

단위행렬 Identity matrix

항등사상 Identity map

$a \times 1 = a$ 와 같이 곱해도 값이 달라지지 않는 행렬

왼쪽위, 오른쪽 아래의 대각선상의 성분이 모두 1이고, 나머지가 0인행렬

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \text{등}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$