3-13. 고윳값과 고유벡터

정방행렬 A가 있고, 다음의 식을 만족하는 열벡터 x (단, $x \neq 0$)가 존재할 때,
λ를 행렬 A의 **고윳값**, x를 **고유벡터**라고 함.

$$Ax = \lambda E x$$

$$(A - \lambda E)x = 0$$

위 식의 $A - \lambda E$가 역행렬 $(A - \lambda E)^{-1}$를 가진다면

다음과 같이 양변에 역행렬을 곱해줄 수 있음

$$(A - \lambda E)x \times (A - \lambda E)^{-1} = 0 \times (A - \lambda E)^{-1}$$

$$x = (A - \lambda E)^{-1} \times 0 = 0$$

이 식은 $x = 0$ 이라는 자명한 해를 가짐
trivial solution

이 경우 처음의 전제인 $x \neq 0$과 모순됨.
이 모순을 없애고 고유벡터가 존재하려면,
$(A - \lambda E)$가 역행렬 $(A - \lambda E)^{-1}$를 가지면 안됨.

고유벡터가 존재하기 위한 조건식

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

이러한 λ의 방정식을 행렬 A의 **고유 방정식**이라고 함

행렬의 크기가 3×3 이상일 때도 그에 대응하는 행렬식과 고유 방정식이 있기 때문에, 같은 방식으로 고윳값과 고유 벡터 정의 가능 함

고윳값과 고유벡터는 어떤 의미를 갖고있는가?

- 공돌이의 수학정리노트

어떤 벡터들은 마치 행렬과 한쌍인것처럼

특정한 선형변환에서 크기만 바뀌고 방향이 바뀌지 않을 수 있음

예시

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

크기만 세배가됨

⇓

x와 Ax가 평행할 때

⇓

이 것을 찾아내는게

고윳값, 고유벡터의 역할

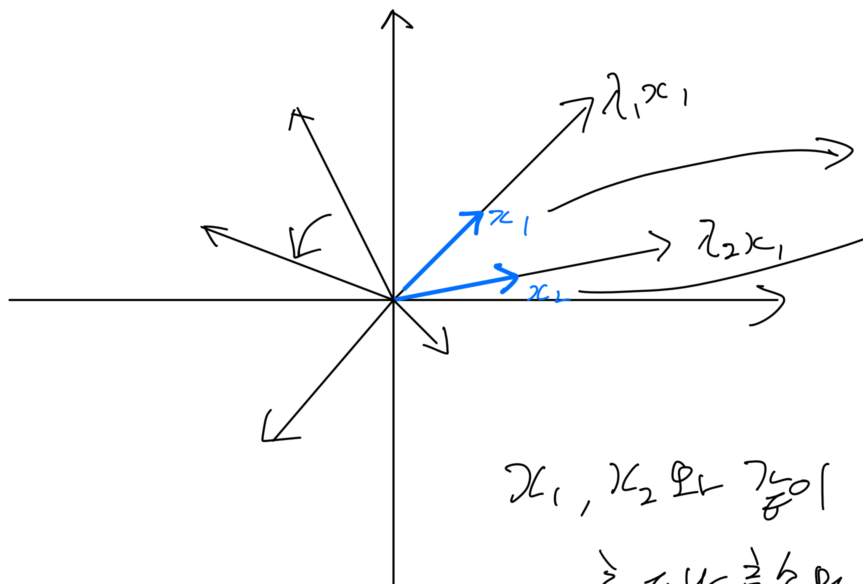
고윳값, 고유벡터가 물어보는것

→ 벡터 x에 선형변환 A를 취했을 때,

그 크기만 변하고 원래 벡터와 평행한 벡터 x는 무엇인가?

변한크기 λ가 고윳값, 벡터 x가 고유벡터

→ 무조건 2개씩 존재



어떤행렬에 고유벡터를 곱하면

방향이 바뀌지 않거나

역방향이 된다.

x_1, x_2와 같이 벡터가 회전하지 않고

확대나 축소만 될때 벡터의 길이 비율이 **고윳값**

벡터방향이 **고유벡터**

고유값과 고유벡터는 어떻게 구할까?

예시)

행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ 의 고유값과 고유벡터 구하기.

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left[\begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & -3-\lambda \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$(2-\lambda)\times(-3-\lambda) - 4(-1) = 0$$

$$-6 - 2\lambda + 3\lambda + \lambda^2 + 4$$

$$= \lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda+2)(\lambda-1) = 0$$

$$\lambda = -2 \quad \text{or} \quad \lambda = 1$$

$\lambda = -2$ 일때,

$$(A+2E)x = \begin{pmatrix} 2-(-2) & 4 \\ -1 & -3-(-2) \end{pmatrix} x$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

$x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 라고 가정

임의의 상수 t가 있다고 가정

$\alpha + \beta = 0 \qquad \alpha = t,\ \beta = -t$

$$x = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

따라서 고유벡터 x는 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$의 상수배이다.

$\lambda = 1$ 일때,

$$(A-E)x = \begin{pmatrix} 2-1 & 4 \\ -1 & -3-1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha + 4\beta = 0$

$\alpha = -4\beta$

$\alpha = \overset{상수}{t}$ 라고 가정

$\beta = -\frac{1}{4} t$

$$x = t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = t \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

따라서 고유벡터 x는 $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ 상수배다.

인공지능에선?

- 비지도학습의 **주성분분석(PCA)** 기법은 다차원 데이터를 다루기 쉽도록 2차원이나 3차원으로 압축함
- 데이터가 많이 흩어져있는 분포 상황에서는 주어진 문제를 해결하기 위해 고윳값과 고유벡터의 도움을 받아야 함.
- 고유 값은 어떤 데이터가 가진 특징을 얼마나 잘 설명할 수 있는지 가늠할 때 사용됨.

기여율 => 각 주성분 (고유벡터)에 대응하는 고윳값들을 전체 고윳값의 총합으로 나눈것

주성분이 데이터의 특성을 얼마나 잘 설명할 수 있는지 평가하는 척도로 사용됨