2-6. 초등함수와 합성함수의 미분

초등함수란?

이전에 다루었던 x^r (멱함수), a^x (지수함수), $\log_e x$ (로그함수), $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ (삼각함수)를 이르는 총칭

원래 함수		원래함수를 x로 미분한 것
멱함수	x^r	rx^{r-1}
지수함수	e^x, $\exp(x)$	e^x, $\exp(x)$
	a^x	$a^x \log_e a$
로그함수	$\log_e x$ $(x>0)$	$\frac{1}{x}$
삼각함수	$\sin x$	$\cos x$
	$\cos x$	$-\sin x$
	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

지수함수와 로그함수의 미분결과가 왜 저런가?

유튜브 - "수악중독" - "지수함수와 로그함수의 도함수" 참조

↳ **지수함수의 도함수**

$$y = e^x \xrightarrow{\text{도함수}} y' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h}$$

$$= e^x \times \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

자연상수

따라서 e^x를 미분해도 자기 자신이 된다.

$$y = a^x \xrightarrow{\text{도함수}} y' = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$

자연로그 a

$$= a^x \times \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a$$

$$= a^x \times \ln a$$

$$= a^x \times \log_e a$$

로그함수의 도함수

$$y = \ln x \xrightarrow{\text{도함수}} y' = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$$

$$= \log_e x$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \\ &\lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 \\ &\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \times \ln(1+x) = 1 \end{aligned}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \times \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$h \to 0$ 일때 $\frac{h}{x} \to 0$ 이다.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \times \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \times \lim_{h \to 0} \frac{x}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \times 1$$

$$= \frac{1}{x}$$

$$y = \ln x \xrightarrow{\text{도함수}} y' = \frac{1}{x}$$

$$y = \log_a x \xrightarrow{\text{도함수}} y' = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$y' = \frac{1}{\ln a} \times (\ln x)'$$

$$y' = \frac{1}{\ln a} \times \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{1}{x \times \ln a}$$

지수함수 $\exp(x)$는 미분해도 달라지지않음을

로그함수 $\log_e x$는 미분하면 $\frac{1}{x}$

→ 이런특징으로 시그모이드 함수 등 다양한 곳에서 활용

$$
\begin{tikzcd}
\cos x \arrow[d, "미분"'] & \sin x \arrow[l, "미분"'] \\
-\sin x \arrow[r, "미분"'] \arrow[ur, phantom, "\text{삼각함수의 상보연적관계}"] & -\cos x \arrow[u, "미분"']
\end{tikzcd}
$$

공식 - 복잡한 함수들의 미분

ⓐ 합성함수 (변수가 1개) $y=f(x)$의 미분법

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$ ⟹ Chain Rule (연쇄법칙)

ⓑ 합성함수 (변수가 여러개) $z=f(x,y)$의 미분법

x에 대한 미분일때

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x}$$

ⓒ 곱의 법칙

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = \frac{df(x)}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg(x)}{dx}$$

ⓐ를 살펴보면

임의의 식을 끼워 넣음

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dv} \times \frac{dv}{dw} \times \frac{dw}{dx}$$

예제

$f(x) = (3x-4)^{50}$ 을 x에 대해 미분하시오

$u = 3x-4$ 라고 가정

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df(x)}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d(3x-4)^{50}}{d(3x-4)} \times \frac{d(3x-4)}{dx}$$

$$= 50(3x-4)^{49} \times 3$$

$$= 150(3x-4)^{49}$$

ⓑ를 살펴보면 마찬가지로 연쇄법칙, Chain Rule 이 적용됨

예제 $f(x,y) = (3x+1)^2 + (x+y+1)^3$ 을 x에 대해 미분하시오.

$u = 3x+1$, $v = x+y+1$ 이라고 가정, $f(x,y) = u^2 + v^3$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\cancel{\partial} u^2}{\cancel{\partial} \cancel{u}} \times \frac{\cancel{\partial} u}{\cancel{\partial} x} + \frac{\cancel{\partial} v^{\cancel{3} 2}}{\cancel{\partial} \cancel{v}} \times \frac{\cancel{\partial} v}{\cancel{\partial} x}$$

$$= 3 \times 2u + 1 \times 3v^2$$

$$= 6(3x+1) + 3 \times (x+y+1)^2$$

$$= 3x^2 + (6y+24)x + 3y^2 + 6y + 9$$

ⓒ를 살펴볼때

예제) $y = xe^x$ 를 x에 대해 미분하시오.

$f(x) = x$, $g(x) = e^x$라고 가정,

$y = f(x)g(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \times g(x) + \frac{dg(x)}{dx} \times f(x)$$

$$= 1 \times e^x + e^x \times x$$

$$= (1+x)e^x$$

인공지능에선?

- 신경망에서는 학습한 결과로 도출한 답이 정답데이터에 가까워질 수 있도록 가중치(W)를 조정하는 과정을 반복함.

- 이때, 실제 정답과 학습 결과 사이의 오차값을 가중치로 편미분한 다음 그 값을 가중치의 조정량으로 사용함.

- 이렇게 편미분하는 과정에서 Chain Rule이 사용됨

↳ 이를 BackPropagation, 오차 역전파법 이라고 함