矩 (moment)

2018 年 10 月 21 日

在物理学中 矩表示距离 r 和物理量 v 的乘积 $(r \times v)$, 表征物体的空间分布.

比如*力矩*, 物体上某点的力矩为 $\mu = r^n Q$, 其中 r 为到某参考点的距离,n 代表矩的阶数, 如 $n = 0$ 为零阶矩,$n = 1$ 为一阶矩等.Q 为该点上的力. 物体上多个点上的力矩则涉及到积分 $\mu = \int r^n Q(r) dr$.

如果其中物理量是质量 m,

零阶矩为总质量 $\int m_r dr$,

一阶矩为重心 $\int r m_r dr$,

二阶矩为转动惯量 $\int r^2 m_r dr$.

在统计学中 矩可以用来表征变量的分布.

比如*期望* (一阶原点矩)$E = \int x p(x) dx$.

比如*方差* (二阶中心矩)$Var = \int (x - Ex)^2 p(x) dx$.

比如偏态 (三阶中心矩)$S = \int (x - Ex)^3 f(x) dx$

在图像处理中 矩可以用来描述图像的某些特征.

零阶原点矩:$M_{00} = \int \int_D x^0 y^0 f(x,y) dx dy$, 可以用于描述光斑的面积 (对于二值图像).

一阶原点矩:$M_{10} = \int \int_D x^1 y^0 f(x,y) dx dy$,$M_{01} = \int \int x^0 y^1 f(x,y) dx dy$, 当其除以 M_{00} 可用于描述光斑质心 $(\frac{M_{10}}{M_{00}}, \frac{M_{01}}{M_{00}})$.

二阶中心矩: 二阶中心矩一般需要组合成二阶矩阵.

$$\begin{bmatrix} M_{20} & M_{11} \\ M_{11} & M_{02} \end{bmatrix} \tag{1}$$

借用统计学中二阶中心矩的理解, 可以将 M_{20} 理解为在 x 方向上的方差 (波动程度), 将 M_{02} 理解为在 y 方向上的方差. 将 M_{11} 理解为光斑在 x 方向和 y 方向上的协方差. 也即将上述二阶矩阵理解为光斑的*协方差矩阵*.

事实上, 式 (1) 的二阶矩阵描述了二维随机变量 (光斑) 的分布情况, 一般情况下可以用一个椭圆去拟合这个分布.

椭圆的求解 式 (1) 描述的椭圆不是椭圆的标准公式.[1]

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{20} & M_{11} \\ M_{11} & M_{02} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = 0$$

需要通过二次型化简[2], 化成标准的椭圆公式 (标准的二次型).

令 $M = \begin{bmatrix} M_{20} & M_{11} \\ M_{11} & M_{02} \end{bmatrix}$, 先求其特征值和特征向量.

$$\begin{aligned} |M - \lambda E| &= \begin{vmatrix} M_{20} - \lambda & M_{11} \\ M_{11} & M_{02} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (M_{20} - \lambda)(M_{02} - \lambda) - M_{11}^2 \\ &= \lambda^2 - (M_{20} + M_{02})\lambda + M_{20}M_{02} - M_{11}^2 \end{aligned}$$

所以:

$$\lambda = \frac{(M_{20} + M_{02}) \pm \sqrt{(M_{20} + M_{02})^2 - 4(M_{20}M_{02} - M_{11}^2)}}{2}$$

经过化简:

$$\lambda_1 = \frac{(M_{20} + M_{02}) + \sqrt{(M_{20} - M_{02})^2 + 4M_{11}^2}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{(M_{20} + M_{02}) - \sqrt{(M_{20} - M_{02})^2 + 4M_{11}^2}}{2}$$

特征向量这里省略, 至此求得式 (1) 标准型为:

$$\begin{bmatrix} \frac{(M_{20}+M_{02})+\sqrt{(M_{20}-M_{02})^2+4M_{11}^2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(M_{20}+M_{02})-\sqrt{(M_{20}-M_{02})^2+4M_{11}^2}}{2} \end{bmatrix}$$

[1] 注: 此时 $M_{20} = \sum (x - x_c)^2 I(x, y)$, 而 $I(x, y)$ 为二值化的图像.

[2] 线性代数

根据椭圆标准公式[3], 可以看出椭圆两轴分别为

$$l = \sqrt{\frac{\lambda_1}{M_{00}}}$$

$$w = \sqrt{\frac{\lambda_2}{M_{00}}}$$

关于椭圆　椭圆是在笛卡尔坐标系[4]上如下形式的方程所定义的曲线.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

其中 $B^2 < 4AC$ 且所有系数均为实数, 存在定义在椭圆上的点 (x, y) 的多于一个的解.

中心为于原点的椭圆方程为

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$$

[3] $Ax^2 + By^2 + C = 0$

[4] 直角坐标系