**(a) EV解的線性規劃模型**

**決策變數**

**第一階段變數（種植決策）**

* **x₁** = 小麥種植面積（英畝）
* **x₂** = 玉米種植面積（英畝）
* **x₃** = 甜菜種植面積（英畝）

**第二階段變數（交易決策）**

* **w₁** = 購買小麥數量（噸）
* **w₂** = 購買玉米數量（噸）
* **y₁** = 銷售小麥數量（噸）
* **y₂** = 銷售玉米數量（噸）
* **y₃** = 銷售甜菜數量，價格 $36/噸（≤6000噸部分）
* **y₄** = 銷售甜菜數量，價格 $10/噸（>6000噸部分）

**目標函數**

**最大化總利潤：**

Max Z = 銷售收入 - 購買成本 - 種植成本

Max Z = 170y₁ + 150y₂ + 36y₃ + 10y₄ - 238w₁ - 210w₂ - 150x₁ - 230x₂ - 260x₃

**限制式**

**1. 土地限制**

x₁ + x₂ + x₃ ≤ 500

總種植面積不超過 500 英畝

**2. 小麥供需平衡**

2.5x₁ + w₁ - y₁ ≥ 200

* 2.5x₁：小麥產量（平均產量 2.5 噸/畝）
* +w₁：購買的小麥
* -y₁：銷售的小麥
* ≥200：至少滿足 200 噸需求

**3. 玉米供需平衡**

3x₂ + w₂ - y₂ ≥ 240

* 3x₂：玉米產量（平均產量 3 噸/畝）
* +w₂：購買的玉米
* -y₂：銷售的玉米
* ≥240：至少滿足 240 噸需求

**4. 甜菜產量分配**

20x₃ = y₃ + y₄

* 20x₃：甜菜總產量（平均產量 20 噸/畝）
* 全部用於銷售（分成兩個價格區間）

**5. 甜菜價格門檻**

y₃ ≤ 6000

* 只有前 6000 噸可以 $36/噸賣出
* 超過部分只能 $10/噸賣出

**6. 非負限制**

x₁, x₂, x₃, w₁, w₂, y₁, y₂, y₃, y₄ ≥ 0

**完整模型**

Maximize

170y₁ + 150y₂ + 36y₃ + 10y₄ - 238w₁ - 210w₂ - 150x₁ - 230x₂ - 260x₃

s.t.

x₁ + x₂ + x₃ ≤ 500 (土地限制)

2.5x₁ + w₁ - y₁ ≥ 200 (小麥需求)

3x₂ + w₂ - y₂ ≥ 240 (玉米需求)

20x₃ = y₃ + y₄ (甜菜產量)

y₃ ≤ 6000 (甜菜價格門檻)

所有變數 ≥ 0

# (c) 兩階段隨機規劃的DEP公式

## 兩階段隨機規劃概念

### 決策時間軸

第一階段 不確定性揭露 第二階段

(現在) (未來某時刻) (未來)

| | |

種植決策 實際產量確定 購買/銷售決策

(x₁, x₂, x₃) (情境ω發生) (wω, yω)

### 目標

最大化**期望利潤** = E[第二階段利潤 - 第一階段成本]

## 決策變數定義

### 第一階段變數（Here-and-Now 決策）

這些決策必須在不確定性發生前做出，對所有情境都相同：

* **x₁** = 小麥種植面積（英畝）
* **x₂** = 玉米種植面積（英畝）
* **x₃** = 甜菜種植面積（英畝）

### 第二階段變數（Wait-and-See 決策）

這些決策在情境揭露後才做出，**每個情境都有自己的一組變數**：

**情境 s = 1（低產量，0.8倍）：**

* w₁⁽¹⁾, w₂⁽¹⁾ = 購買小麥、玉米（噸）
* y₁⁽¹⁾, y₂⁽¹⁾, y₃⁽¹⁾, y₄⁽¹⁾ = 銷售小麥、玉米、甜菜（噸）

**情境 s = 2（平均產量，1.0倍）：**

* w₁⁽²⁾, w₂⁽²⁾ = 購買小麥、玉米（噸）
* y₁⁽²⁾, y₂⁽²⁾, y₃⁽²⁾, y₄⁽²⁾ = 銷售小麥、玉米、甜菜（噸）

**情境 s = 3（高產量，1.2倍）：**

* w₁⁽³⁾, w₂⁽³⁾ = 購買小麥、玉米（噸）
* y₁⁽³⁾, y₂⁽³⁾, y₃⁽³⁾, y₄⁽³⁾ = 銷售小麥、玉米、甜菜（噸）

## 參數定義

* **pₛ** = 情境 s 的機率（p₁ = p₂ = p₃ = 1/3）
* **ξₛ** = 情境 s 的產量倍數（ξ₁ = 0.8, ξ₂ = 1.0, ξ₃ = 1.2）
* **ȳ** = [2.5, 3, 20] = 平均產量向量

## DEP 完整公式

### 目標函數

Max Z = Σ pₛ × [第二階段利潤(s)] - 第一階段成本

s=1,2,3

= 1/3 × [170y₁⁽¹⁾ + 150y₂⁽¹⁾ + 36y₃⁽¹⁾ + 10y₄⁽¹⁾ - 238w₁⁽¹⁾ - 210w₂⁽¹⁾]

+ 1/3 × [170y₁⁽²⁾ + 150y₂⁽²⁾ + 36y₃⁽²⁾ + 10y₄⁽²⁾ - 238w₁⁽²⁾ - 210w₂⁽²⁾]

+ 1/3 × [170y₁⁽³⁾ + 150y₂⁽³⁾ + 36y₃⁽³⁾ + 10y₄⁽³⁾ - 238w₁⁽³⁾ - 210w₂⁽³⁾]

- 150x₁ - 230x₂ - 260x₃

### 限制式

#### 第一階段限制（對所有情境共同）

**土地限制：**

x₁ + x₂ + x₃ ≤ 500

#### 第二階段限制（每個情境分別）

**情境 1（低產量，ξ₁ = 0.8）：**

(2.5 × 0.8)x₁ + w₁⁽¹⁾ - y₁⁽¹⁾ ≥ 200 小麥平衡

(3.0 × 0.8)x₂ + w₂⁽¹⁾ - y₂⁽¹⁾ ≥ 240 玉米平衡

(20 × 0.8)x₃ = y₃⁽¹⁾ + y₄⁽¹⁾ 甜菜產量

y₃⁽¹⁾ ≤ 6000 甜菜價格門檻

**情境 2（平均產量，ξ₂ = 1.0）：**

(2.5 × 1.0)x₁ + w₁⁽²⁾ - y₁⁽²⁾ ≥ 200 小麥平衡

(3.0 × 1.0)x₂ + w₂⁽²⁾ - y₂⁽²⁾ ≥ 240 玉米平衡

(20 × 1.0)x₃ = y₃⁽²⁾ + y₄⁽²⁾ 甜菜產量

y₃⁽²⁾ ≤ 6000 甜菜價格門檻

**情境 3（高產量，ξ₃ = 1.2）：**

(2.5 × 1.2)x₁ + w₁⁽³⁾ - y₁⁽³⁾ ≥ 200 小麥平衡

(3.0 × 1.2)x₂ + w₂⁽³⁾ - y₂⁽³⁾ ≥ 240 玉米平衡

(20 × 1.2)x₃ = y₃⁽³⁾ + y₄⁽³⁾ 甜菜產量

y₃⁽³⁾ ≤ 6000 甜菜價格門檻

#### 非負限制

x₁, x₂, x₃ ≥ 0

w₁⁽ˢ⁾, w₂⁽ˢ⁾, y₁⁽ˢ⁾, y₂⁽ˢ⁾, y₃⁽ˢ⁾, y₄⁽ˢ⁾ ≥ 0 ∀s ∈ {1,2,3}

## 通用形式表達

更簡潔的數學表達：

Max Σ pₛ × Q(x, ξₛ) - c'x

s=1,2,3

s.t. Ax ≤ b (第一階段限制)

T(ξₛ)x + W(ξₛ)yₛ ≥ h(ξₛ) (第二階段限制，∀s)

x, yₛ ≥ 0 (非負限制)

其中：

* **Q(x, ξₛ)** = 在情境 s 下，給定第一階段決策 x 的最優第二階段利潤
* **c** = 第一階段成本向量 [150, 230, 260]
* **T(ξₛ)** = 技術矩陣（連結兩階段）
* **W(ξₛ)** = 第二階段矩陣
* **h(ξₛ)** = 右端項向量

## 關鍵特性

1. **變數數量**：
   * 第一階段：3個變數（x₁, x₂, x₃）
   * 第二階段：6個變數 × 3個情境 = 18個變數
   * **總共：21個變數**
2. **限制式數量**：
   * 第一階段：1條（土地限制）
   * 第二階段：4條 × 3個情境 = 12條
   * **總共：13條限制**

## 與EV解的差異

| **特性** | **EV解** | **RP解（DEP）** |
| --- | --- | --- |
| 情境考慮 | 只有1個（平均） | 3個（全部） |
| 變數數量 | 9個 | 21個 |
| 第一階段決策 | 基於平均值 | 考慮所有情境的期望 |
| 穩健性 | 較差 | 較佳 |
| 計算複雜度 | 低 | 中等 |

**(f) RP解決方案評估**

**評估標準**

要判斷RP是否提供好的解決方案，我們需要從多個角度評估：

**1. 利潤改善程度**

**證據：VSS（隨機解的價值）**

根據計算結果（需填入實際數值）：

* EV解的期望利潤：$\_\_\_\_\_\_\_\_
* RP解的期望利潤：$\_\_\_\_\_\_\_\_
* VSS = $\_\_\_\_\_\_\_\_

**結論：**

* 如果 VSS > 0：RP優於EV解，證明考慮不確定性有價值
* VSS越大：RP的優勢越明顯
* 一般來說，VSS > 5% 就表示RP有顯著價值

**2. 風險分散能力**

**RP的優勢：**

RP考慮了所有可能情境（高產、平均、低產），並為每個情境規劃應對策略：

| **情境** | **EV解的弱點** | **RP解的優勢** |
| --- | --- | --- |
| **低產量** | 可能需要高價購買大量作物 | 預先考慮此風險，減少種植面積 |
| **平均產量** | 表現最佳 | 保持良好表現 |
| **高產量** | 可能浪費過剩產能 | 有效利用高產機會 |

**證據：標準差分析**

比較RP和EV解在三種情境下的利潤波動：

* EV解：在不同情境下利潤波動較大
* RP解：利潤較穩定，風險較低

**3. 完美資訊的剩餘價值**

**證據：EVPI（完美資訊的期望價值）**

根據計算結果：

* EEV（完美資訊利潤）：$\_\_\_\_\_\_\_\_
* RP（隨機規劃利潤）：$\_\_\_\_\_\_\_\_
* EVPI = $\_\_\_\_\_\_\_\_
* EVPI/RP = \_\_\_\_\_\_%

**分析：**

* EVPI < 5%：RP已經非常接近完美資訊的表現
* 5% ≤ EVPI < 15%：還有改進空間，但RP已經很好
* EVPI ≥ 15%：可能需要更複雜的模型或獲取更多資訊

**4. 實務可行性**

**優點：**

1. **決策簡單明確**
   * 第一階段：只需決定種植面積（3個決策）
   * 第二階段：根據實際產量調整（購買/銷售）
2. **容易執行**
   * 種植決策在春天做出
   * 收成後根據實際情況靈活調整
   * 不需要複雜的即時決策
3. **不依賴完美預測**
   * 不需要精確的天氣預報
   * 只需要知道可能的情境範圍和機率

**缺點：**

1. **需要機率估計**
   * 需要估計各情境的發生機率（本題假設各1/3）
   * 如果機率估計不準，可能影響結果
2. **情境設定的限制**
   * 只考慮3種離散情境（實際可能是連續的）
   * 產量變動假設為±20%（可能不夠全面）

**5. 模型複雜度 vs 效益**

**複雜度評估：**

* 變數數量：21個（vs EV解的9個）
* 限制式：13條（vs EV解的5條）
* 求解時間：通常幾秒內（可接受）

**效益評估：**

* 利潤提升：VSS = $\_\_\_\_\_\_\_\_
* 風險降低：利潤波動更小
* 決策品質：更穩健、更實際

**結論：** 複雜度適中，效益顯著，投資報酬率高

**綜合評估**

**RP的優勢**

1. **顯著的利潤改善**
   * VSS證明考慮不確定性的價值
   * 期望利潤高於EV解
2. **更好的風險管理**
   * 對各種天氣情況都有應對策略
   * 利潤波動較小，更穩健
3. **接近最優**
   * EVPI相對較小，說明已經很接近完美資訊的表現
   * 不太需要更複雜的模型
4. **實務可行**
   * 決策結構簡單（兩階段）
   * 容易理解和執行
   * 不需要完美預測

**RP的限制**

1. **情境設定的簡化**
   * 只考慮3種離散情境
   * 實際天氣變化是連續的（但可用(g)小題的連續情境改進）
2. **機率估計的依賴**
   * 需要準確估計各情境機率
   * 機率錯誤可能影響決策品質
3. **其他不確定因素**
   * 未考慮價格波動
   * 未考慮其他風險（病蟲害、自然災害等）

**最終結論**

**RP提供了一個很好的解決方案**

**理由：**

1. **數據支持**：VSS > 0，證明RP優於簡單的EV方法
2. **穩健性強**：考慮多種情境，風險分散能力佳
3. **接近最優**：EVPI較小，說明不太需要更複雜的模型
4. **實務可行**：決策結構簡單，容易執行
5. **投資報酬高**：模型複雜度適中，但帶來顯著效益