离散数学

第十章: 平面图及图的着色

卢杨
厦门大学信息学院计算机科学与技术系
luyang@xmu.edu.cn

10.1 平面图

平面图

- 图的平面性问题有着许多实际的应用.
- 电路设计经常要考虑布线是否可以避免交叉以减少元件间的互感影响. 建筑物中的地下水管, 煤气管和电缆线等为安全起见, 要求它们不交叉. 如果必然交叉, 那么怎样才能使交叉处尽可能的少.
- 这些问题实际上与图的平面表示有关.
- 平面图中所讨论的是无向连通图, 本章简称为图.

平面图

定义 10.1

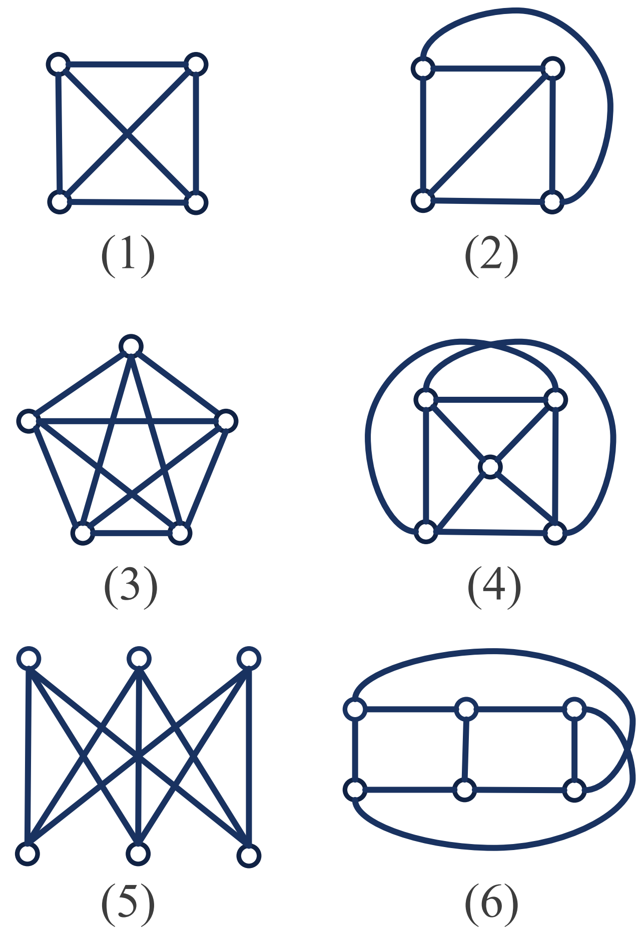
如果图G能以这样的方式画在平面上：除顶点处外没有边交叉出现，则称G为平面图. 画出的没有边交叉的图称为G的一个平面嵌入或平面表示. 无平面嵌入的图称为非平面图.

G是平面图不代表G没有边交叉，指的是G可以画成一个没有边交叉的平面嵌入.

平面图

例

- (1)是K_4, (2)是它的平面嵌入, 所以K_4是平面图. 单看(2), 它当然也是平面图.
- (3)是K_5, 无论怎样改变画法, 边的交叉都不能完全去掉, 所以K_5是非平面图. (4)是K_5的边交叉的最少的画法.
- (5)是$K_{3,3}$. 同K_5类似, 无论如何画, 边的交叉都不能完全去掉, 所以$K_{3,3}$是非平面图. (6)是$K_{3,3}$的边的交叉最少的画法.



边界

定义 10.2

(1) 设G是一个平面图的平面嵌入, G的边将G所在的平面划分成若干区域, 每个区域都称为G的一个面.

(2) 其中有一个面积无限的区域称为无限面或外部面, 常记为R_0, 面积有限的区域称为内部面或有限面, 常记为$R_1, R_2, \ldots, R_k$.

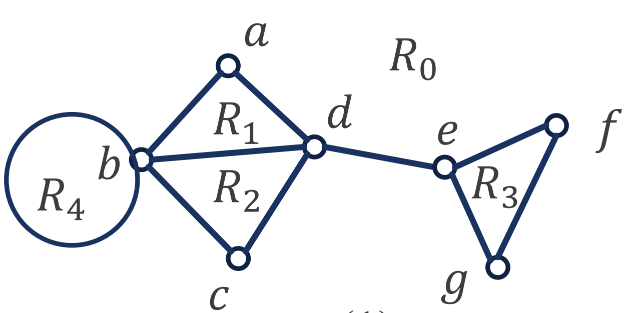
(3) 包围每个面的所有边构成的回路称为该面的边界. 边界的长度称为该面的次数. 面R的次数记为$\deg(R)$.

- 边界有可能由不止一个回路构成.
- 构成边界的回路有可能是初级回路, 简单回路, 或者是复杂回路.
- 因为我们假设平面的面积是无限的, 因此在每个平面嵌入中, 总有一个区域是无限面.

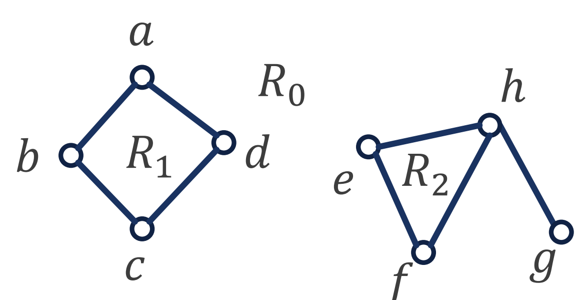
边界

例 (1)和(2)都是平面图.

- (1)有5个面, 其中R_1, R_2, R_3, R_4是内部面, R_0是外部面. R_1的边界是$abda$, $\deg(R_1)=3$. R_4的边界是bb , $\deg(R_4)=1$. R_0的边界是$abbcdegfeda$, 是一个复杂回路, $\deg(R_0)=10$.
- (2)有3个面, 其中R_1, R_2是内部面, R_0是外部面. R_0的边界由$abcda$和$efhghe$两个回路组成, $\deg(R_0)=9$. 割边hg在计算次数时算了2次.



(1)



(2)

边界

- 割边只能是一个面的边界, 若一条边不是割边, 它必是两个面的公共边界.

定理 10.1

平面图G中所有面的次数之和等于边数的2倍.

$$\sum_{i=1}^{k} \deg(R_i) = 2m.$$

证明 对于G中任意一条边e,

当e为面R_i和$R_j (i \neq j)$的公共边界上的边时，在计算R_i和R_j的次数时各提供次数1.

当e只在某一个面R的边界上出现时，它必出现两次，所以在计算R的次数时，e提供的次数为2.

因此, 每一条边e在次数之和中都计算两次.

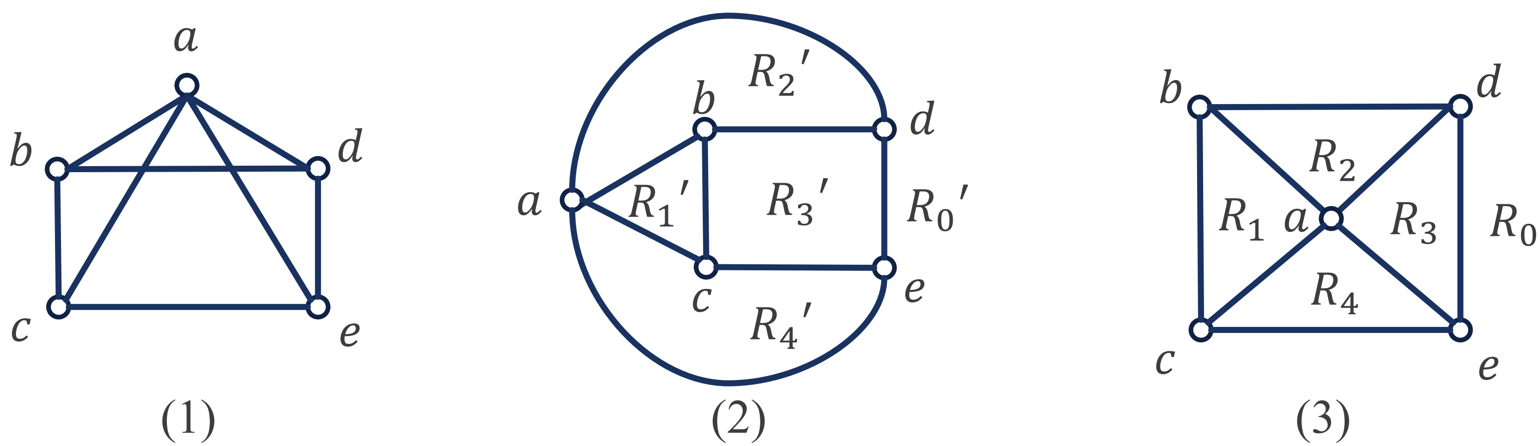
平面图的特性

- 同一个平面图G, 可以有不同形式的平面嵌入, 但它们都是与G同构的.
  - 平面嵌入本质上只是图的不同画法.
- 一个平面图的有限面和无限面没有什么本质区别.
  - 若把平面图画在球面上, 它的无限面就变成有限面.
- 有限面 (内部面) 和无限面 (外部面) 可以相互转化.
  - 对于画在球面上的任何一个有限面R, 都能以R中的任意一点为球的北极, 向与球的南极相切的平面做这个图的投影, 使有限面在平面上成为平面图的无限面.

平面图的特性

例 (2)和(3)都是(1)的平面嵌入，它们的形状不同，但都与(1)同构.

- 边界为$bdecb$的面在(2)中是有限面$R_3{}'$，但是在(3)中变成了无限面R_0.
- 边界为$adea$的面在(2)中是无限面$R_0{}'$，但是在(3)中变成了有限面R_3.



欧拉公式

- 欧拉发现在研究多面体时发现，多面体的顶点数n，棱数e和面数f之间满足$n-e+f=2$. 从多面体得到启发，便得出平面图的欧拉公式.

定理 10.2 (欧拉公式)

对于任意的连通平面图G, 有

$$n-m+r=2,$$

其中, n, m, r分别是G的阶数, 边数和面数 (包括无限面).

欧拉公式

证明 对边数m进行归纳法.

- 若$m=0$, 由于G是连通图, 故必有$n=1$, 这时只有一个无限面, 即 $r=1$. 所以$n-m+r=1-0+1=2$. 定理成立.
- 若$m=k-1(k\geq 1)$时结论成立，要证明$m=k$时结论也成立．对G进行分类讨论:
  - 若G是树, 任取一片树叶v并将它删除, 得$G'=G-v$, 则G'是连通的, 还是平面图. G'中的顶点数$n'=n-1$, 边数$m'=m-1$, 面数没变$r'=r$, 由归纳假设得$n'-m'+r'=2$, 将n,m,r代入后得$n-m+r=2$.
  - 若G不是树，则G中必存在初级回路C，设e为C上的某一条边，令$G'=G-e$，所得图G'仍连通，G中的两个面合并成为了G'中的一个面，面数少了1, $n'=n, m'=m-1, r'=r-1$. 将n,m,r代入后得$n-m+r=2$.

欧拉公式

推论

对于任何具有$k(k \geq 2)$个连通分支的平面图G, 有

$$n - m + r = k + 1.$$

证明 设G的连通分支为$G_1, G_2, \dots, G_k$, 并设n_i, m_i, r_i, 为G_i的顶点数, 边数和面数, $i = 1, 2, \dots, k$. 由欧拉公式可得:

$$n_i - m_i + r_i = 2.$$

由于所有连通分支G_i和G共享同一个外部面, 所以G的面数需要扣除重复计算的G_i的外部面$r = \sum_{i=1}^{k} r_i - k + 1$. 而$m = \sum_{i=1}^{k} m_i$, $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$. 于是

$$\sum_{i=1}^{k} (n_i - m_i + r_i) = 2k = n - m + r + k - 1.$$

得到$n - m + r = k + 1$.

欧拉公式

利用欧拉公式可以证明下面定理.

定理 10.3

设G是连通的平面图, 且G的各面的次数至少为$l(l \geq 3)$, 则G的边数m, 顶点数n, 与l有如下关系:

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2).$$

并且当G的各面的次数均为l时等号成立.

证明 由定理10.1及本定理中的条件可知:

$$2m = \sum_{i=1}^{r} \deg(R_i) \geq lr\,,$$

其中r为G的面数. 由于G是连通的平面图, 因而满足欧拉公式$r = 2 - n + m$. 代入后整理即完成证明.

欧拉公式

例 10.1 利用定理10.3证明K_5和$K_{3,3}$都不是平面图.

解 (1) K_5的顶点数$n = 5$, 边数$m = 10$. 若K_5是平面图, 则它的每个面的次数至少为3 (没有平行边和环). 由定理10.3得:

$$10 \leq \frac{3}{3-2}(5-2) = 9,$$

产生矛盾, 但是K_5又是连通的, 因而不是平面图.

(2) $K_{3,3}$的顶点数$n = 6$, 边数$m = 9$. 若$K_{3,3}$是平面图, 则它的每个面的次数至少为4 (没有长度为奇数的回路). 由定理10.3得:

$$9 \leq \frac{4}{4-2}(6-2) = 8,$$

产生矛盾, 但是$K_{3,3}$又是连通的, 因而不是平面图.

- K_5和$K_{3,3}$是两个特殊的非平面图, 它们在平面图的判断上起很重要的作用.

平面图的判断

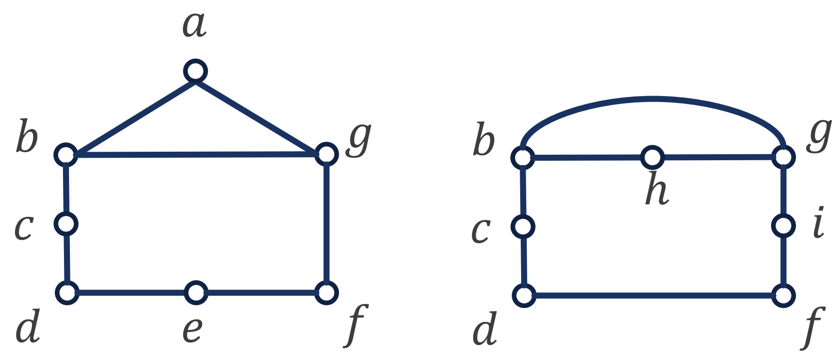
- 上面欧拉公式及等定理是判断一个图为平面图的必要条件，其逆否定理为判断一个图为非平面图的充分条件.
- G含K_5或$K_{3,3}$为子图也是G为非平面图的充分条件.
- 一个图是否有平面的图形表示（即平面嵌入）是判别平面图的最具说服力的方法，但因其工作量太大而不实用.
- 研究判断平面图的充要条件直到1930年才由波兰数学家库拉图斯基 (Kuratowski) 给出.
- 与定理有关的概念是同胚与收缩.

插入与消去2度顶点

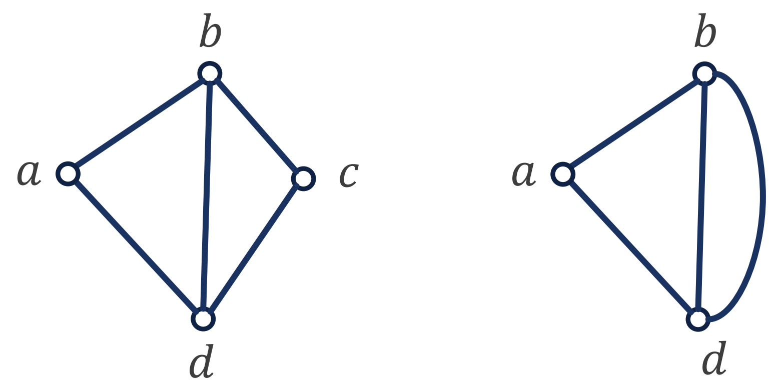
定义

(1) 设$e=(u,v)$为图$G=\langle V,E\rangle$中一条边，在G中删除e，增加新的顶点w，使u与v均与w相邻，即$G'=\langle V',E'\rangle$, $V'=V(G-e)\cup\{w\}$, $E'=E(G-e)\cup\{(u,w),(w,v)\}$, 称为在$G$中插入2度顶点.

(2) 设w为G中一个2度顶点，w与u, v相邻，删除w，增加新边(u,v)，即$G'=\langle V',E'\rangle$，$V'=V(G-w)$，$E'=E(G-e)\cup\{(u,v)\}$，称为在G中消去2度顶点.



消去2度顶点e和a, 插入2度顶点h和i.



消去2度顶点c.

同胚

定义 10.3

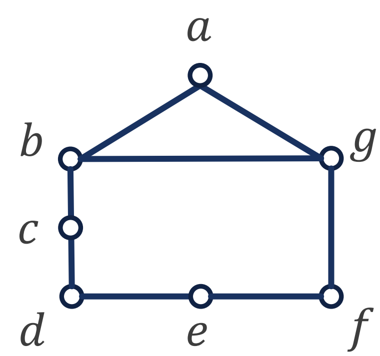
若两个图G_1和G_2

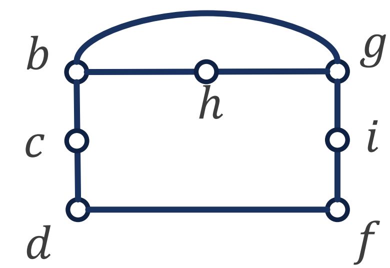
(1) 是同构的,

(2) 或通过反复插入或消去2度顶点后是同构的,

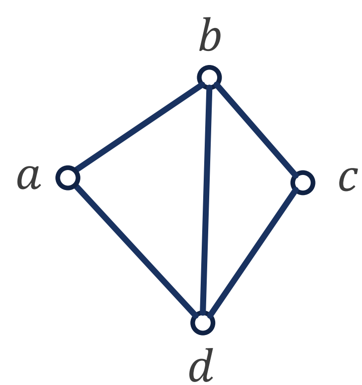
则称G_1和G_2是同胚的.

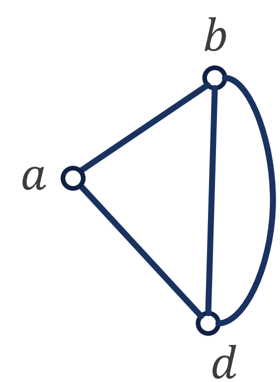
例 右图中同一排的图都是同胚的.





消去2度顶点e和a, 插入2度顶点h和i.





消去2度顶点c.

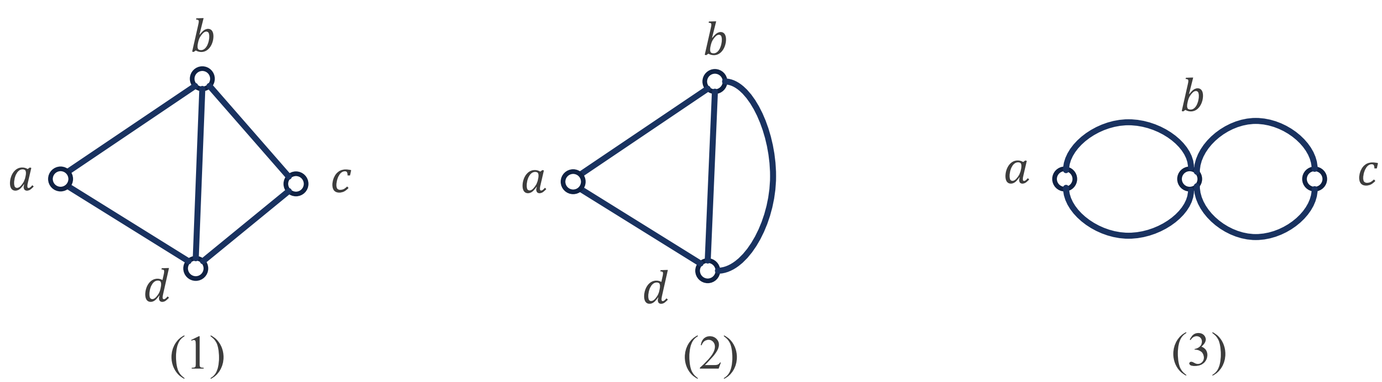
收缩

定义 10.4

设$e=(u,v)$是图G的一条边, 删去e, 用一个新的顶点w (可以用u或v)取代u和v, 并与除e外u和v关联的所有的边关联, 称这样的操作为**收缩边**e. 如果G能通过收缩若干条边得到G', 则称G可以**收缩**到G'.

例 (1)经过收缩边(b,c), 用b取代b和c, 得到(2).

(1)经过收缩边(b,d), 用b取代b和d, 得到(3).



平面图的充要条件

在同胚和收缩这两个概念的基础之上，Kuratowski定理给出了一个图是平面图的充要条件.

定理10.4

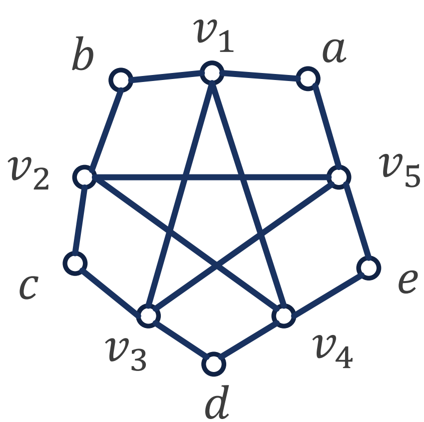
图G是平面图当且仅当G不含与K_5同胚的子图，也不含与$K_{3,3}$同胚的子图.

定理 10.5

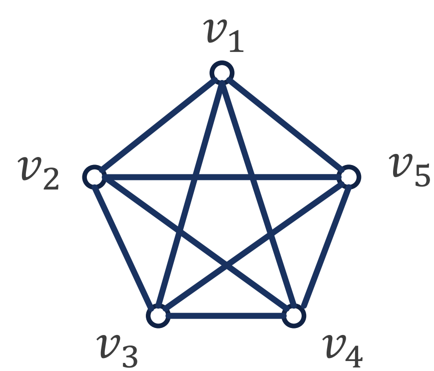
图G是平面图当且仅当G中没有可以收缩到K_5的子图，也没有可以收缩到$K_{3,3}$的子图.

平面图的充要条件

例 (1)既可以通过消去2度顶点a, b, c, d, e来得到K_5, 即与K_5同胚, 也可以通过收缩边得到K_5, 所以不是平面图.



(1)

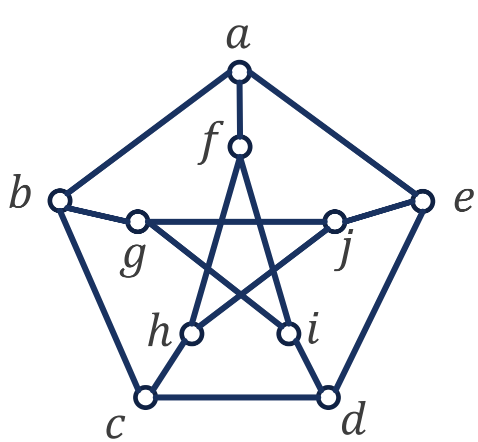


(2)

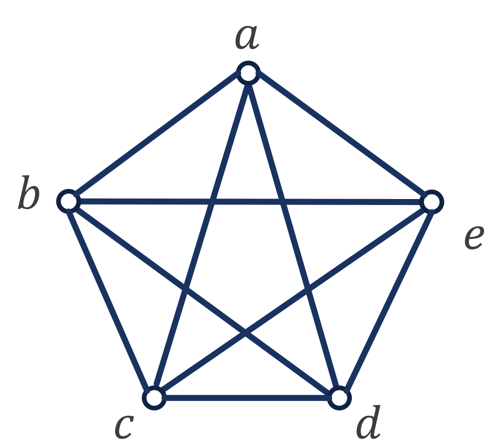
平面图的充要条件

例 通过收缩边证明(1)不是平面图.

解 可以通过收缩边(a, f), (b, g), (c, h), (d, i), (e, j)得到K_5.



(1)

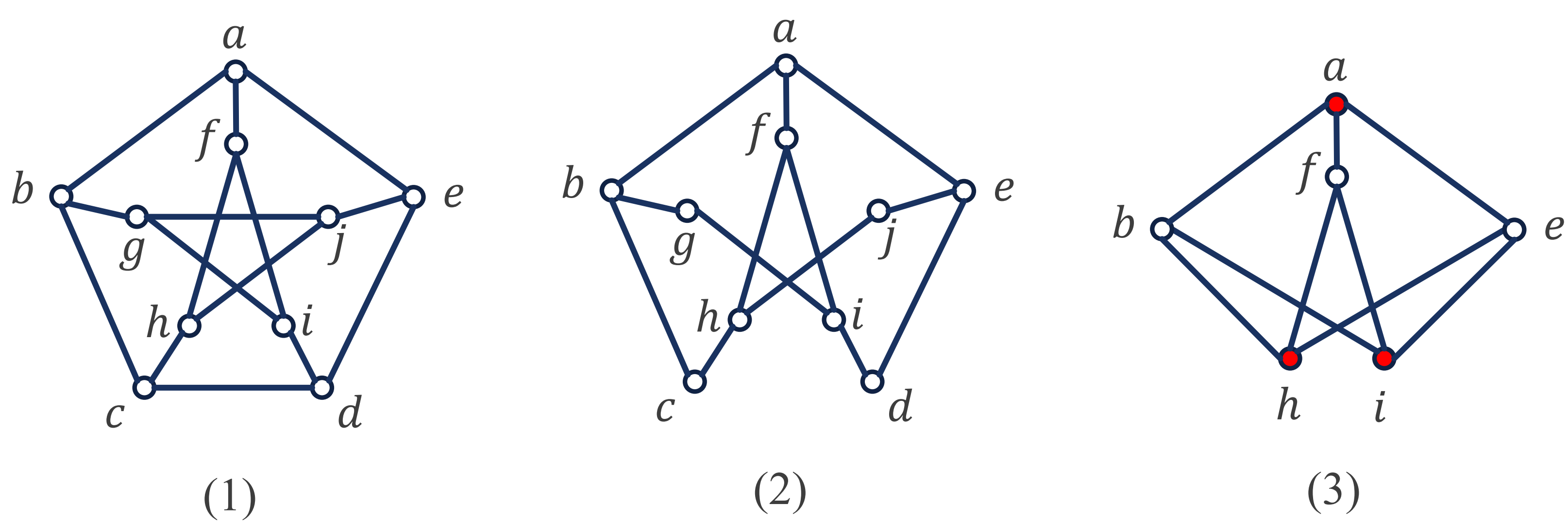


(2)

平面图的充要条件

例 通过子图与$K_{3,3}$同胚证明(1)不是平面图.

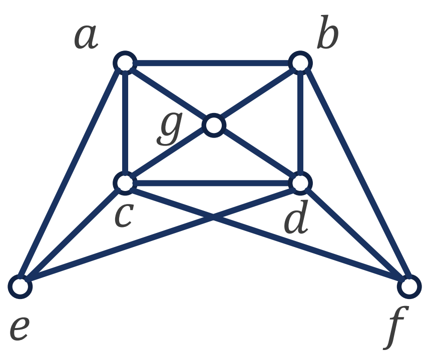
解 先删去(g,j), (c,d)得到子图(2). 再消去2度顶点g, j, c, d得到(3). (3)是$K_{3,3}$, 因此(1)含有与$K_{3,3}$同胚的子图.



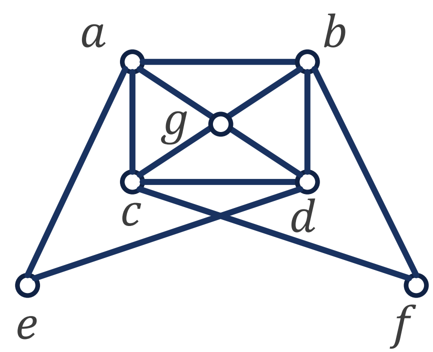
平面图的充要条件

例 通过子图与K_5同胚证明(1)不是平面图.

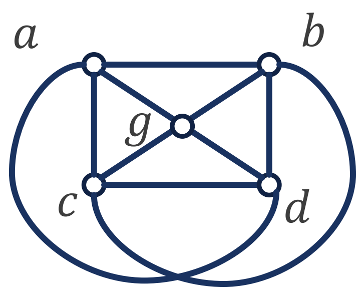
解 先删去(e,c), (f,d)得到子图(2). 再消去2度顶点e和f得到(3). (3)是K_5, 因此(1)含有与K_5同胚的子图.



(1)



(2)

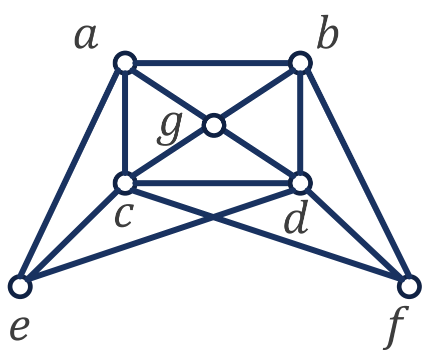


(3)

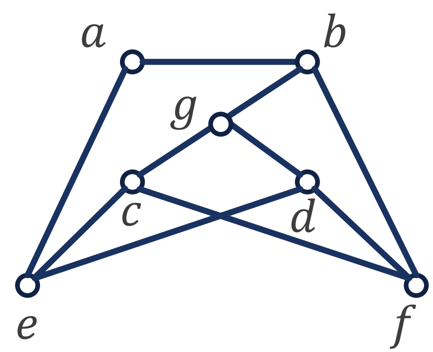
平面图的充要条件

例 通过子图与$K_{3,3}$同胚证明(1)不是平面图.

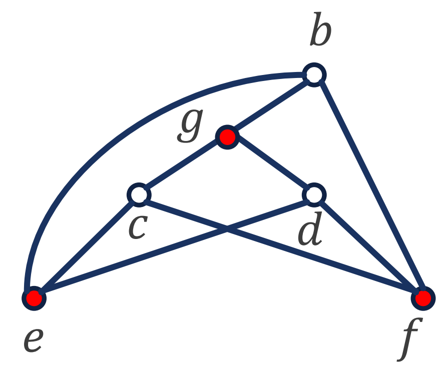
解 先删去(a,g), (a,c), (c,d), (b,d)得到子图(2). 再消去2度顶点a得到(3). (3)是$K_{3,3}$, 因此(1)含有与$K_{3,3}$同胚的子图.



(1)



(2)



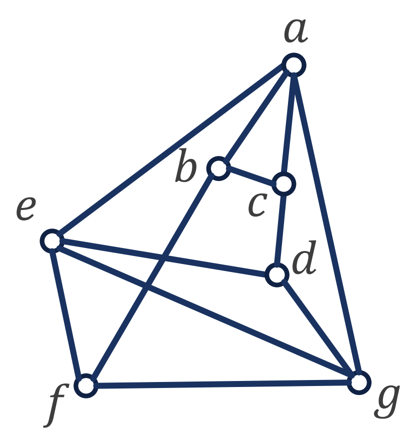
(3)

课堂练习

证明该图不是平面图.

(1) 通过收缩到K_5.

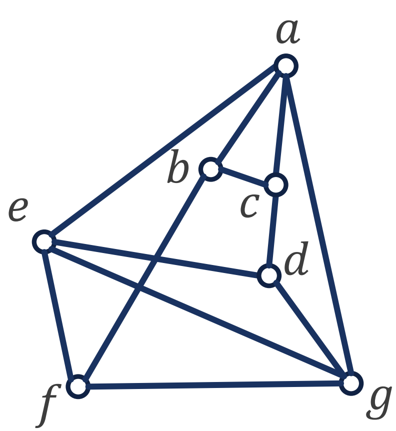
(2) 通过子图与$K_{3,3}$同胚.



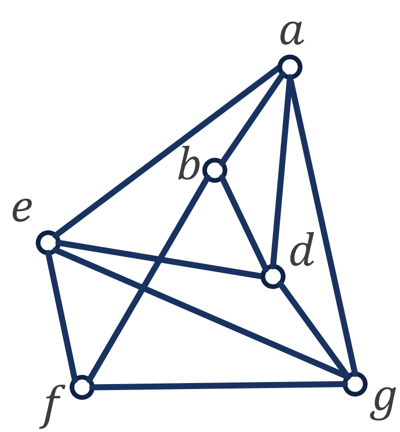
课堂练习

解 通过收缩到K_5.

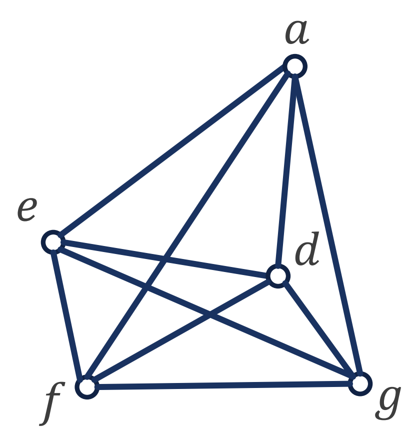
先收缩边(c,d), 用d代替, 得到(2), 再收缩边(b,f), 用f代替, 得到(3), (3)是K_5.



(1)



(2)

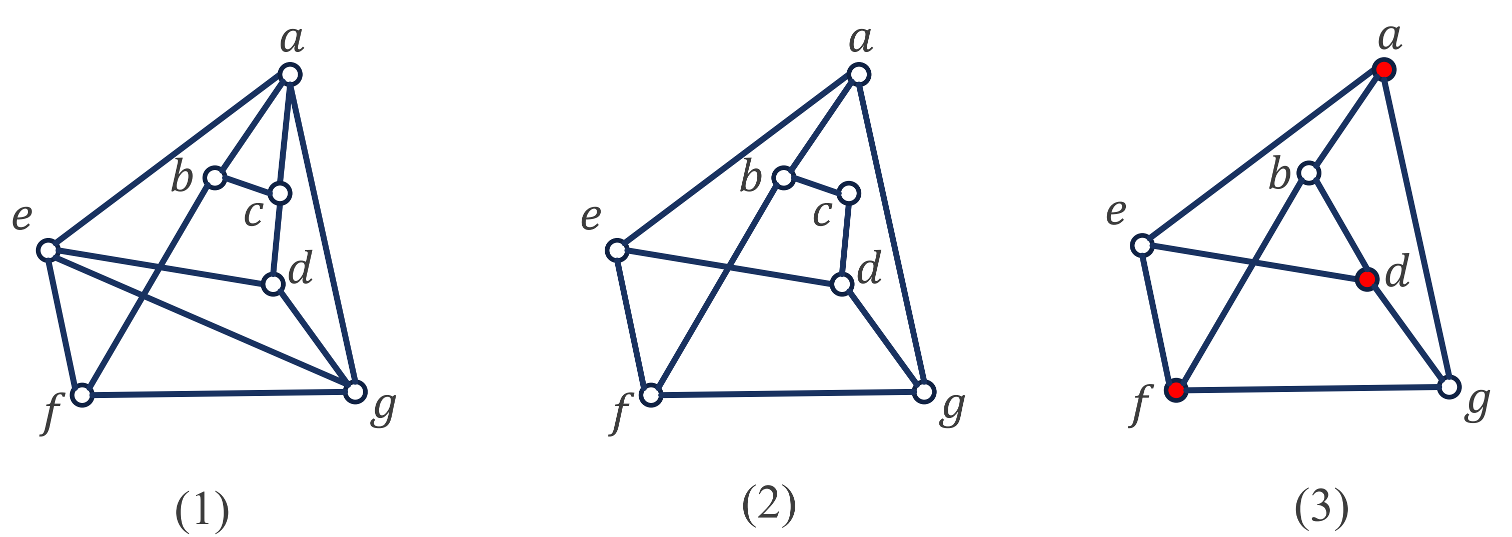


(3)

课堂练习

解 通过子图与$K_{3,3}$同胚.

先删去(a,c), (e,g)后得到子图(2), 再消去2度顶点c后得到(3), (3)是$K_{3,3}$.



平面图的判定

- 判定连通图G是否为平面图的步骤如下:

1. 满足以下条件之一, 则G必是平面图:

   (1) $m < 9$;

   (2) $n < 5$.

2. 通过必要条件: 若$m > \frac{l}{l-2}(n-2)$, 则G是非平面图.
3. 尝试能否画一个相应的边不相交的平面嵌入.
4. 否则利用Kuratowski定理检测.

对偶图

定义 10.7

设G是平面图的某一个平面嵌入，有m条边$e_1, e_2, \dots, e_m$，和r个面$R_1, R_2, \dots, R_r$. 可以用下述方法构造图G^*:

1. 在G的每个面R_i中放置一个顶点v_i^*作为G^*的顶点. 记$V^* = \{v_1^*, v_2^*, \dots, v_r^*\}$.

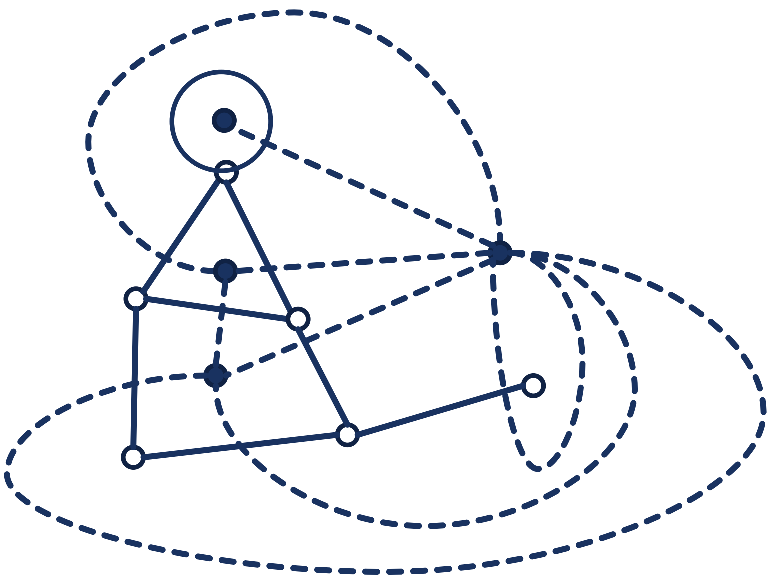
2. 对G的一条边e，若e是面R_i和$R_j(i \neq j)$共同边界，则连接对应顶点v_i^*和v_j^*，记$e^* = (v_i^*, v_j^*)$. e^*与e相交且不与其它任何边相交. 若e只在G的一个面R_i的边界中出现（e是G中的桥），则以R_i中顶点v_i^*为顶点做环e^*. $E^* = \{e_1^*, e_2^*, \dots, e_r^*\}$.

称$G^* = \langle V^*, E^* \rangle$为$G$的对偶图.

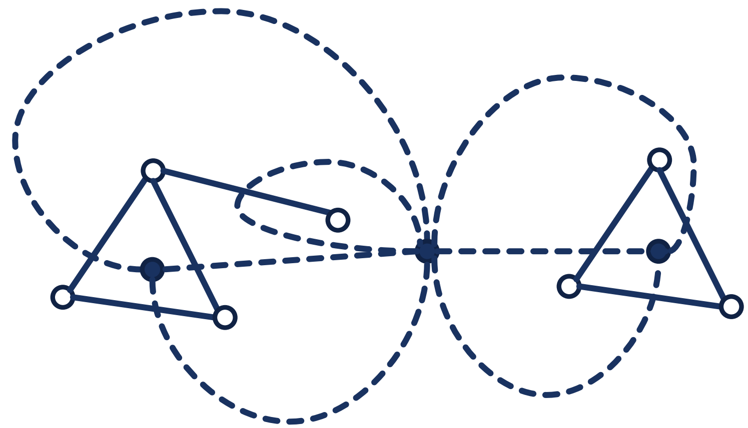
- 每个面都对应生成一个新的顶点，再根据之前的边生成新的边.

对偶图

例 由实心点和虚线边构成的图为由空心点和实线边构成的图的对偶图.



(1)



(2)

对偶图

- 从定义不难看出以下几点:

(1) G^*是连通的平面图, 而且是平面嵌入.

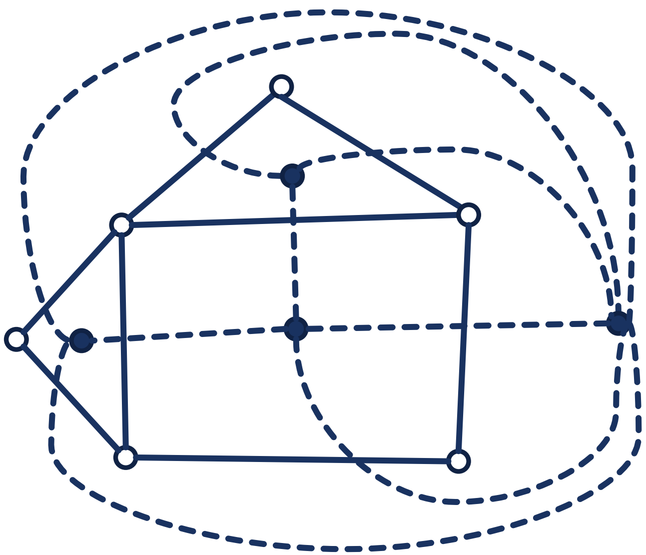
(2) 环桥对应: 若边e为G中的环, 则它对应的边e^*为G^*的桥; 若e为G中的桥, 则e^*为G^*上的环.

(3) 同构的平面图的对偶图不一定是同构的, 即同构的平面图的对偶图未必是唯一的.

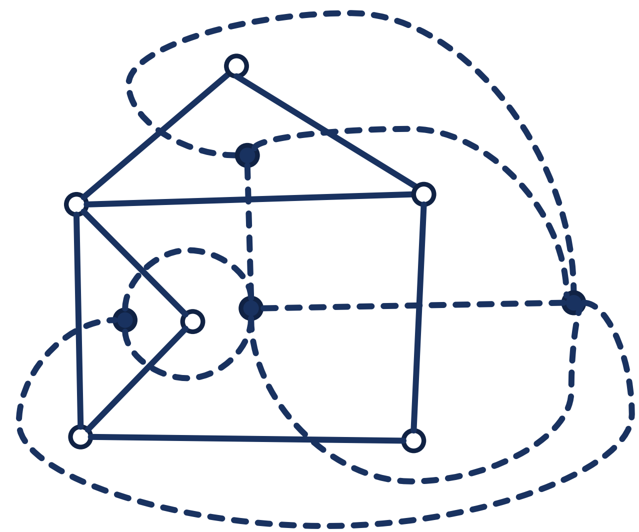
(3) 平面图与它的对偶图的对偶图不一定同构.

对偶图

例 (1)和(2)中由空心点和实线边构成的图是同构的，但是它们的对偶图是不同构的，(1)中的最大度数是6，而(2)中的最大度数是5. 可见同构的图的对偶图不一定同构.



(1)



(2)

对偶图

定理 10.6

设G^*是连通平面图G的对偶图, n^*, m^*, r^*和n, m, r分别为G^*和G的顶点数, 边数和面数, 则:

(1) $n^* = r$,

(2) $m^* = m$,

(3) $r^* = n$,

(4) 设G^*的顶点v_i^*位于G的面R_i中, 则

$$d(v_i^*) = \deg(R_i), i = 1,2, \dots, r.$$

- 也就是说, 连通平面图和对偶图的边数一样, 顶点数和面数互换.
- 非连通的平面图不满足该定理.

对偶图

证明

(1) G的面与G^*的顶点一一对应.

(2) 根据对偶图定义, 对每一条边e, 建立一条边e^*.

(3) 因为G和G^*都是连通的平面图, 都满足欧拉公式:

$$n - m + r = 2,\ n^* - m^* + r^* = 2,$$

得到: $r^* = 2 + m^* - n^* = 2 + m - r = n.$

(4) 顶点v_i^*在R_i中, 每一度对应R_i的一个边界, 因此度数等于边界之和, 即次数.

对偶图

定理 10.6.2

设G^*是具有$k(k \geq 2)$个连通分支的平面图G的对偶图，n^*，m^*，r^*和n, m, r分别为G^*和G的顶点数, 边数和面数, 则:

(1) $n^* = r$,

(2) $m^* = m$,

(3) $r^* = n - k + 1$,

(4) 设G^*的顶点v_i^*位于G的面R_i中, 则

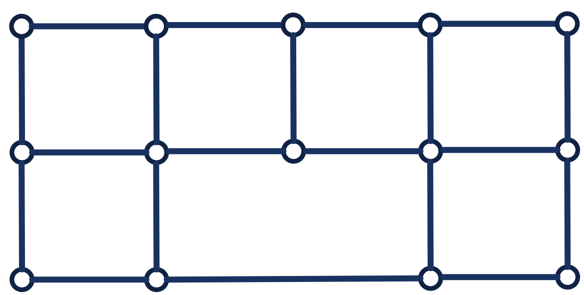
$$d(v_i^*) = \deg(R_i)\,, i = 1,2, \dots, r.$$

- 只有(3)与定理10.6不同, 通过欧拉公式的推论可轻易证明.

对偶图

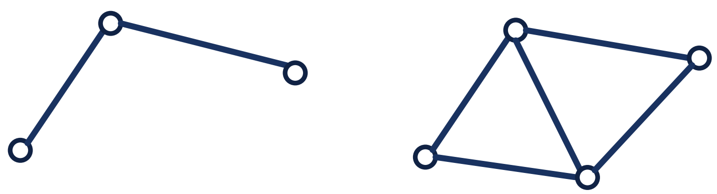
例 下图是一所房子的俯视图，设每一面墙都有一个门，问能否从某个房间开始过每扇门一次最后返回.

解 作G的对偶图G^*，原问题就转化为G^*是否存在欧拉回路. 即G^*中是否存在奇数度数的顶点，也就是说G中是否存在奇数次数的面. 容易找到G中是否存在奇数次数的面，因此不存在欧拉回路.



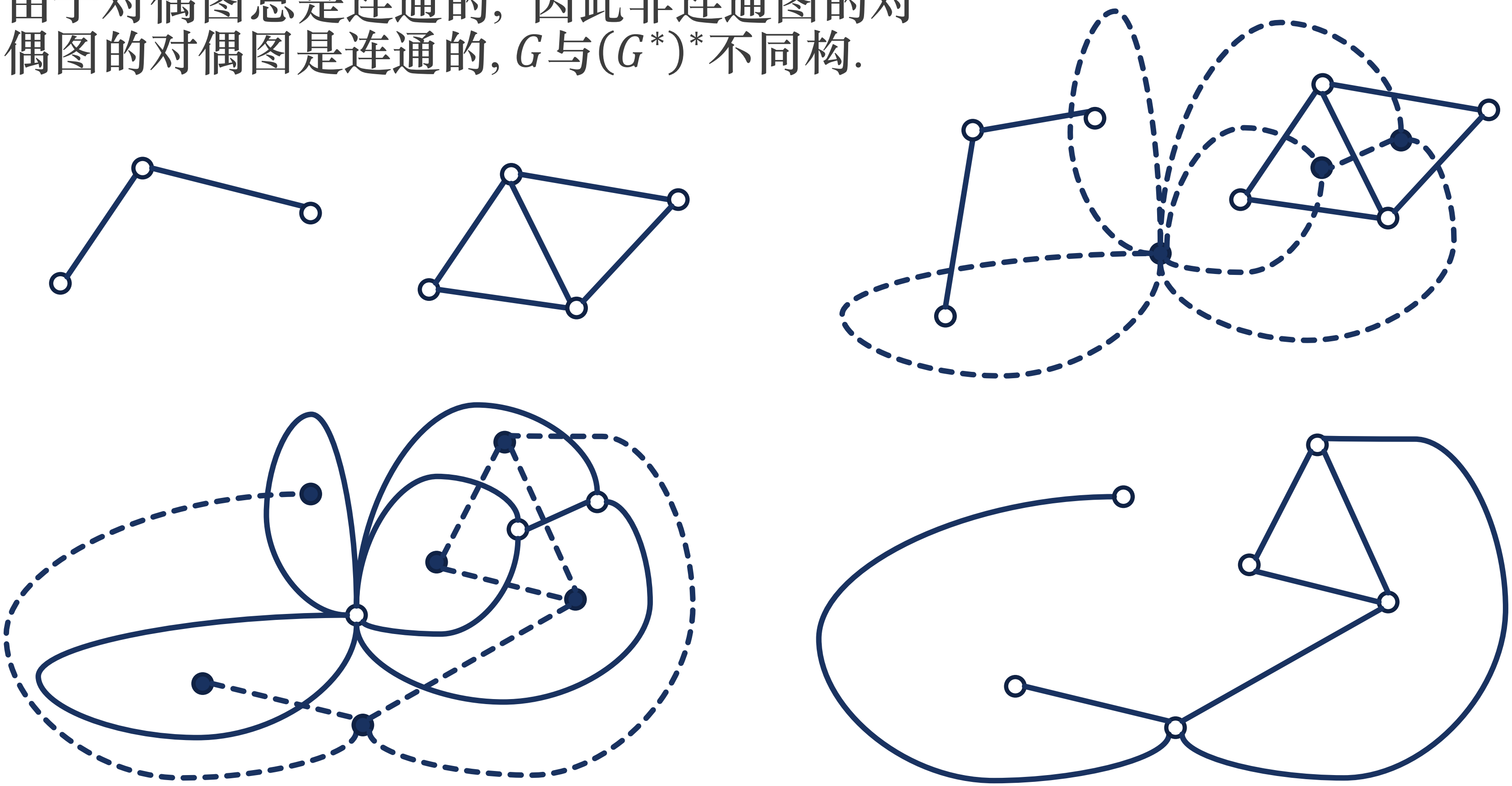
课堂练习

画图说明G与$(G^*)^*$不同构.



课堂练习

由于对偶图总是连通的，因此非连通图的对偶图的对偶图是连通的，G与$(G^*)^*$不同构.



10.2 图的着色

四色猜想

- 本节介绍图中顶点、边和平面地图面的着色问题.
- 图的着色问题起源于19世纪的四色猜想：至多用4种颜色给平面或球面上的地图着色，使得相邻的国家着不同颜色.
- 这个问题的提法简单易懂，但其证明却极其困难.
- 1976年，数学家凯尼斯·阿佩尔和沃夫冈·哈肯借助计算机首次得到一个完全的证明，但仍有数学家希望能够找到更简洁或不借助计算机的证明.
- 和哈密顿回路一样，计算机科学家至今也没有找到一个高效的算法来给一个图进行着色，该问题也是NP完全问题.

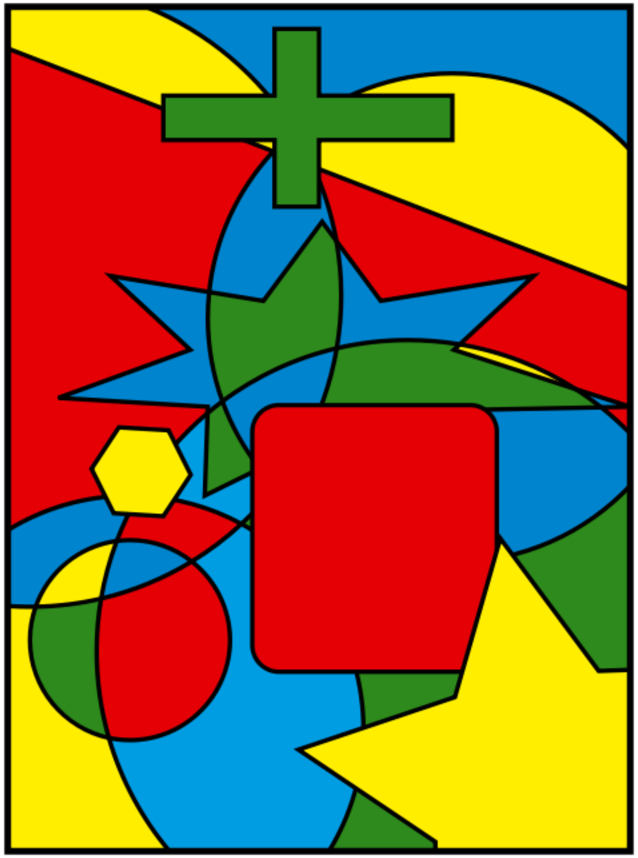


Image source: https://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem

着色

定义 10.6

(1) 对无环无向图G的每个顶点涂上一种颜色，使相邻的顶点涂不同颜色，称为对G的一种点着色，简称着色.

(2) 若能用k种颜色给G的顶点着色，称对G进行k着色，也称G是k-可着色的.

(3) 若G是k-可着色的，但不是$(k-1)$-可着色的，就称G是k-色图，称k为G的色数，记作$\chi(G)=k$，简记为$\chi=k$.

- 也就是说，图G的点着色所需颜色的最小数称作G的色数.

着色

- 从点着色定义不难证明下面定理.

(1) $\chi(G)=1$当且仅当G为零图. 因为但凡有边存在，1种颜色都不够.

(2) $\chi(G)=n$当且仅当$G\cong K_n$. 因为K_n中每个点都与其余$n-1$个点相邻.

(3) 设C_n为n阶圈, n为奇数时, $\chi(C_n)=3$, n为偶数时, $\chi(C_n)=2$.

(4) G为非零图, $\chi(G)=2$当且仅当G为二部图.

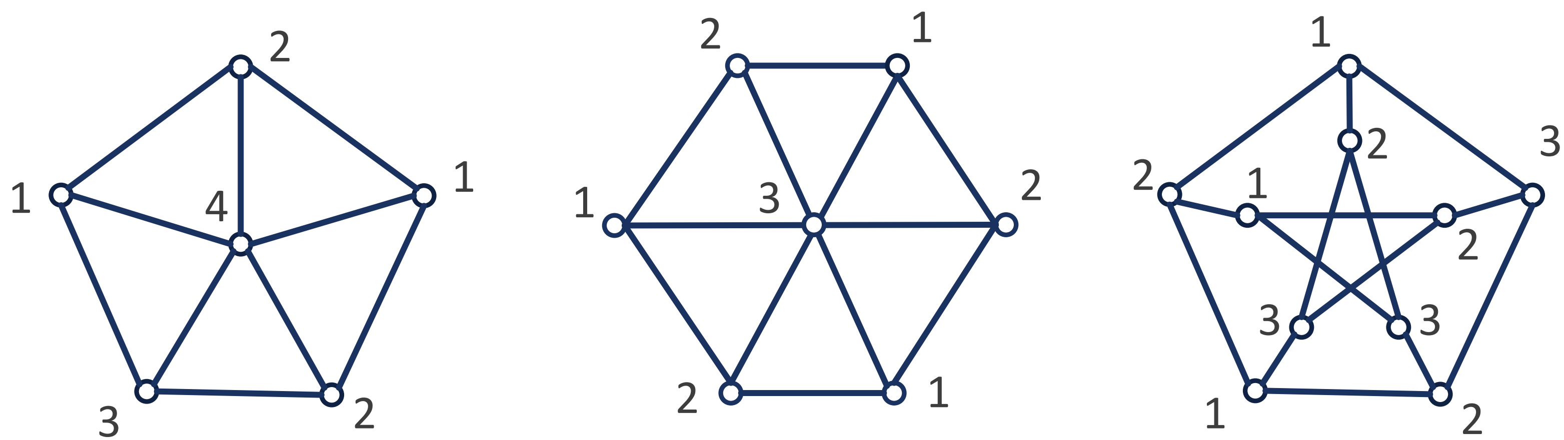
着色

例 求下图所示3个图的色数.

解 (1)的外围是5阶圈, 要用3种颜色, 中心与圈上每个点都相邻, 必须用另一种颜色, 因此色数为4.

(2)的外围是6阶圈, 要用2种颜色, 中心与圈上每个点都相邻, 必须用另一种颜色, 因此色数为3.

(3)的外围是5阶圈, 要用3种颜色, 但是仍可以用这3种颜色给里面的5个顶点着色.



(1) (2) (3)

着色

- 着色问题很容易推广到现实中的一般计数问题.

例

(1) 电冰箱的分隔间里放有不同种类食品, 某些能放在一起保存, 但另一些必须分开保存. 如香肉和干酪应该同一般的肉和蔬菜分开. 苹果, 蛋和洋葱应该分开存放, 否则串味.

(2) 化学实验室所需的最小试剂瓶数.

(3) 养鱼: 避免有些鱼吃另一种鱼, 计算最少需要买多少个鱼缸.

- 这些问题都可以构造图G着色模型如下:

  每种事物构造一个顶点, 如果两种事物 (有冲突) 需要隔离开, 则用一条边连接它们. 那么$\chi(G)$是适当保存事物所需隔离容器的最小数.

着色

定理 10.7 对于任意的图G, 均有

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

证明 对G的阶数n作归纳法. $n = 1$时, 结论显然成立.

- 设$n = k(k \geq 1)$时结论成立. 当$n = k + 1$时, v为G中任一顶点, 设$G_1 = G - v$, 则G_1的阶数为k. 由归纳假设应有

$$\chi(G_1) \leq \Delta(G_1) + 1 \leq \Delta(G) + 1.$$

- 当将G_1还原成G时，由于v至多与G_1中$\Delta(G)$个顶点相邻，而在G_1的点着色中, $\Delta(G)$个顶点至多用了$\Delta(G)$种颜色, 于是$\Delta(G) + 1$种颜色中至少存在一种颜色给v着色, 使v与相邻的顶点均着不同的颜色.

着色

- 对有些图来说，定理10.7中给出的色数的上界是比较大. 例如，若G是二部图，$\Delta(G)$可以很大，但$\chi(G) = 2$. 于是有必要缩小定理中$\chi(G)$的上界.
- 布鲁克斯 (Brooks) 改进了定理12.5中$\chi(G)$的上界，不过要求G不是完全图，也不是奇圈，因为奇圈和完全图是达到定理中10.7上界的仅有连通图.

定理 10.8 (Brooks定理)

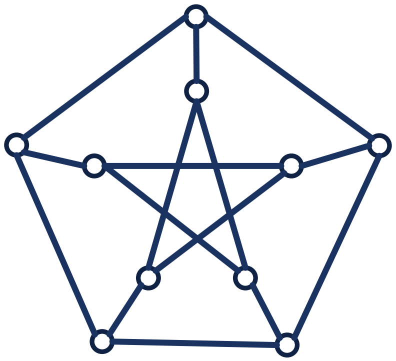
设连通图不是完全图$K_n(n \geq 3)$也不是奇圈，则

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

着色

例 再看该图, 使用Brooks定理计算其色数.

解 由Brooks定理可知$\chi \le \Delta = 3$. 又因为图中有奇圈, $\chi \ge 3$, 所以$\chi = 3$.



面着色

定义 10.8

连通的无桥平面图的平面嵌入及其所有的面称为平面地图或地图，平面地图的面称为国家. 若两个国家的边界至少有一条公共边, 则称这两个国家是相邻的.

定义 10.9

(1) 平面地图G的一种着色，是指对它的每个国家涂上一种颜色，使得相邻的国家涂不同颜色.

(2) 若能用k种颜色给G着色, 就称对G的面进行了k着色, 或称G是k-面可着色的.

(3) 若G是k-面可着色的，但不是$(k-1)$-面可着色的，就称G是k-色地图，或称G的面色数为k, 记作$\chi^*(G)=k$, 简记为$\chi^*=k$.

定理 10.9

地图G是k-面可着色的当且仅当它的对偶图G^*是k-点可着色的.

边着色

定义 10.10

(1) 对图G边的一种的着色，是指对它的每条边涂上一种颜色，使得相邻的边涂不同的颜色.

(2) 若能用k种颜色给G的边着色，就称对G的边进行了k着色，或称G是k-边可着色的.

(3) 若G是k-边可着色的，但不是$(k-1)$-边可着色的，就称k为G的边色数，记作$\chi'(G)=k$，简记为$\chi'=k$.

- 与点色数不同，边色数有着与图的最大度Δ相关的简明结论.

边着色

定理 10.12 (维津定理)

设G是简单图, 则

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1.$$

- 维津定理说明, 对于简单图,

$$\chi'(G)=\Delta(G) \quad 或\chi'(G)=\Delta(G)+1,$$

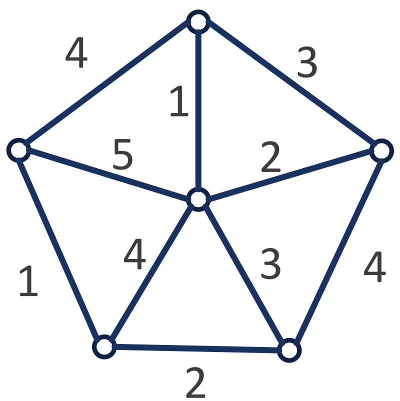
- 但究竟哪些图的χ'是$\Delta(G)$，哪些是$\Delta(G)+1$，至今还是一个没有解决的问题.

边着色

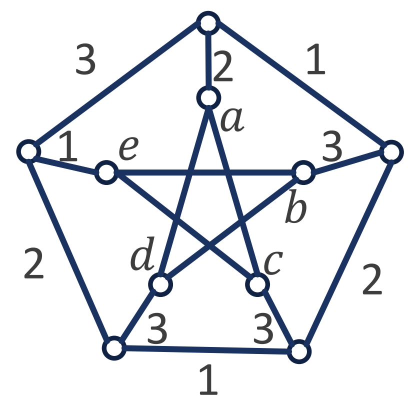
例 求以下所以图的边色数.

解 (1)中$\Delta(G_1) = 5$, 由维津定理可知$5 \le \chi' \le 6$, 尝试之后发现5种颜色足够着色.

(2)中$\Delta(G_2) = 3$, 由维津定理可知$3 \le \chi' \le 4$, 如果使用3种颜色, 则中间的5条边的颜色都确定了，里面的5条边无法使用3种颜色着色，例如(a, d)和(a, c)都只能涂1, 因此$\chi' = 4$.



(1)



(2)

作业

p183

4 (3)(4)

6 (2)(3)

8

11

p192

2

4

5

6

7

谢谢

有问题欢迎随时跟我讨论