离散数学

第七章: 图的基本概念

卢杨
厦门大学信息学院计算机科学与技术系
luyang@xmu.edu.cn

图的基本概念

- 现实世界中许多关系是由图形来形象而直观地描绘出来，人们常用点表示事物，用点之间是否有连线表示事物之间是否有某种关系，于是点以及点之间的若干条连线就构成了图模型.
- 当研究的对象能够被抽象为离散的元素集合和集合上的二元关系时，用关系图进行表示和处理是很方便.
- 图论研究的图是不同于几何图形、机械图形的另一种数学结构，不关心图中顶点的位置，边的长短和曲直形状，只关心有多少顶点，哪些顶点之间有边.

图的基本概念

- 称两个元素构成的集合为$\{a,b\}$无序对. 设A, B为任意的两个集合, 称$\{\{a,b\} \mid a \in A \land b \in B\}$为$A$与$B$的无序积, 记作$A\&B$.
- 为方便起见, 将无序积中的无序对$\{a,b\}$记为(a,b), 并且允许$a=b$, 需要注意的是, 无论a, b是否相等, 均有$(a,b)=(b,a)$.

例 $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2\}$, 则

$$A\&B = B\&A = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\};$$

$$A\&A = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(b,c),(c,c)\};$$

$$B\&B = \{(1,1),(1,2),(2,2)\}.$$

无向图和有向图

定义 7.1

无向图G是一个二元组$\langle V,E\rangle$， 其中$V\neq\emptyset$称为G的顶点集, V中元素称为G的顶点或结点; E是无序积$V\&V$的多重子集, 称E为G的边集, 其元素称无向边, 简称边.

定义 7.2

有向图G是一个二元组$\langle V,E\rangle$， 其中顶点集V同无向图中的顶点集; E是笛卡尔积$V\times V$的多重子集, 称E为G的边集, 其元素称有向边, 简称边.

- 元素可重复出现的集合成为多重集合. E中的元素可重复出现.
- 常将V记成$V(G)$, E记成$E(G)$.
- 顶点通常用$v_1,v_2,\ldots v_i$来表示. 像这样给顶点标定记号的图称为标定图, 不标定几号的图称为非标定图.
- 在标定图中, 无向图的边通常用(v_i,v_j)来表示.

无向图和有向图

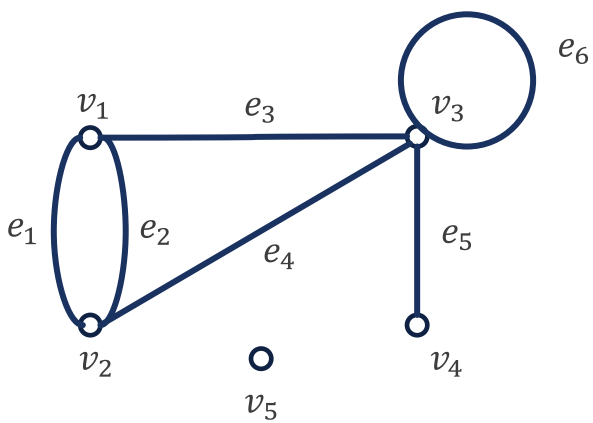
例

(1) 无向图$G = \langle V, E \rangle$, 其中$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$,

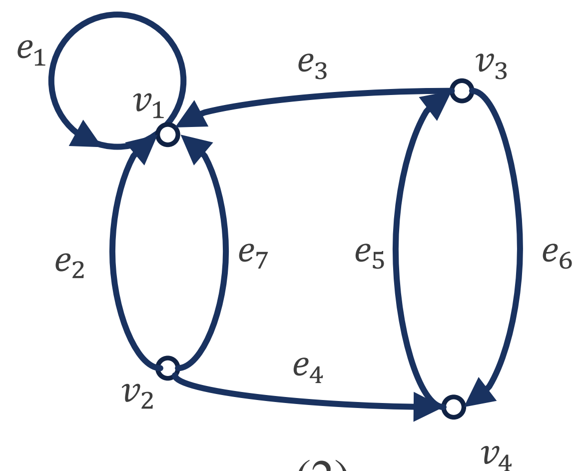
$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_3, v_2), (v_3, v_3), (v_3, v_4)\}$.

(2) 有向图$D = \langle V, E \rangle$, 其中$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,

$E = \{\langle v_1, v_1 \rangle, \langle v_2, v_1 \rangle, \langle v_3, v_1 \rangle, \langle v_2, v_4 \rangle, \langle v_4, v_3 \rangle, \langle v_3, v_4 \rangle, \langle v_2, v_1 \rangle\}$.



(1)



(2)

图的基本概念

关于无向图和有向图说明如下:

(1) 在无向图中, 无向边(a,b)是顶点a与b之间的线段, 无方向. 在有向图中$\langle a,b\rangle$是有方向的, a称为起始顶点, b称为终止顶点. 用从a指向b的箭头表示.

(2) 无论是在无向图还是有向图中, 常用字母e_i表示表示边. 例如无向图的$e_k=(v_i,v_j)$, 以及有向图中的$e_k=\langle v_i,v_j\rangle$.

(3) 无向图和有向图统称为图. 但也常把无向图简称为图. 通常用G表示无向图, D表示有向图. 但有时用G泛指一个图 (无向的或有向的), 可是D只能表示有向图.

(4) 本课程只讨论有限图, 即顶点集和边集都是有穷集的图. 如果图G中既有无向边, 又有有向边, 则称G为混合图. 本课程不讨论混合图.

(5) 若G的顶点集V的元素个数$|V|=n$, 则称G是n阶图.

图的基本概念

(6) 若边集$E = \emptyset$, 即没有边, 则称G为零图. 此时, 若$|V| = n$, 则称G为n阶零图; 若$|V| = 1$, 则称G为平凡图.

(7) 设$e_k = (v_i, v_j)$为无向图$G = \langle V, E\rangle$中的一条边, 称v_i, v_j为e_k的端点, e_k与v_i, v_j是彼此相关联的. 无边关联的顶点称为孤立点. 若一条边所关联的两个顶点重合, 则称此边为环.

a. 若$v_i \neq v_j$, 则称e_k与v_i或v_j的关联次数为1;

b. 若$v_i = v_j$, 则称e_k与v_i的关联次数为2;

c. 若v_l不是e_k的端点, 则称e_k与v_l的关联次数为0;

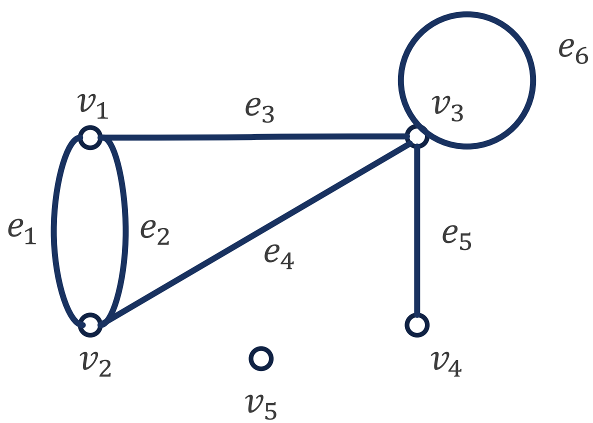
(8) 设无向图$G = \langle V, E\rangle$, 若存在一条边$e_k = (v_i, v_j)$, 则称v_i与v_j彼此相邻的, 简称相邻的. 若e_k与e_l至少有一个公共端点,则称e_k与e_l彼此相邻的, 简称相邻的.

(9)设$e_k = \langle v_i, v_j\rangle$为有向图$D = \langle V, E\rangle$中的一条边, 除称$v_i$, v_j为e_k的端点外, 还称是v_i的e_k始点, v_j是e_k的终点, v_i邻接到v_j, v_j邻接于v_i.

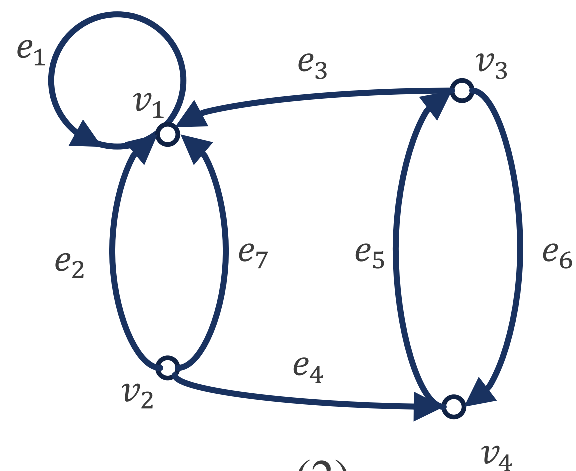
图的基本概念

例

- 图(1)中, v_5是孤立点, e_6是环, e_1, e_2, e_3与v_1的关联次数均为1, 而e_6与v_3的关联次数为2.
- 图(1)中, v_1与v_4, v_5不相邻, v_1与其他顶点都是相邻的. e_5与e_1, e_2不相邻, 与其他边均是相邻的.
- 图(2)中, $e_4 = \langle v_2, v_4 \rangle$, v_2是e_4的始点, v_4是e_4的终点. v_2邻接到v_4, v_4邻接于v_2.



(1)



(2)

图的基本概念

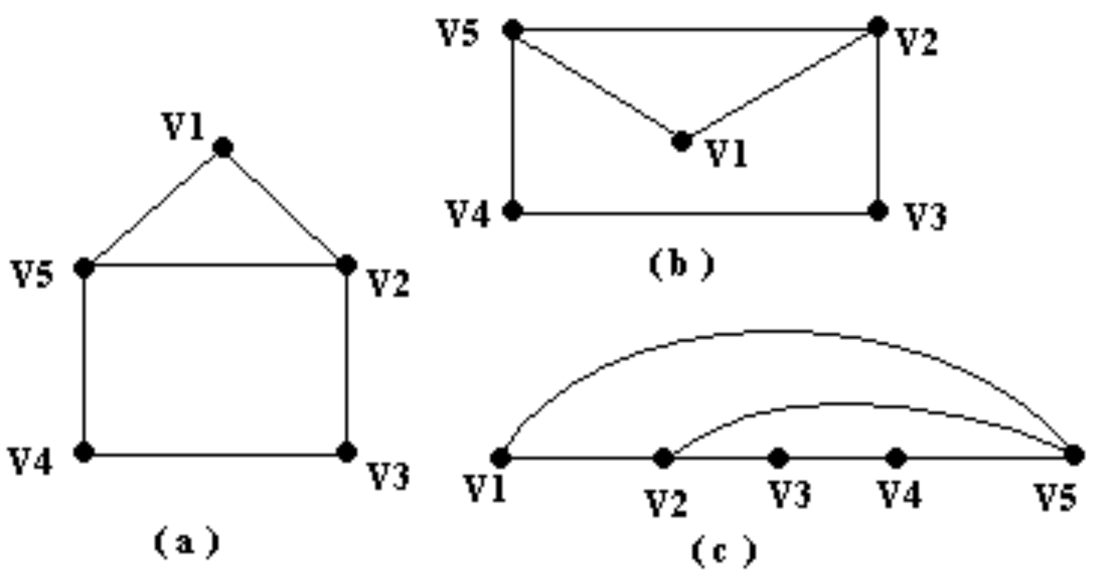
- 由于图的顶点位置和边的长度的任意性，一个图的图形表示并不是唯一的.
- 图论只关心图有多少个顶点，哪些顶点之间有边连接.
- 顶点的标号和位置，边的长短和曲直都不改变图连接的本质. 从连接的意义上， 它们本质上都是一样的，可以把它们看成是同一个图的不同表现形式.

图的基本概念

例 无向图G中，$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$;

$E=\{\{v_1,v_2\},\{v_1,v_3\},\{v_2,v_3\},\{v_2,v_4\},\{v_3,v_5\},\{v_4,v_5\}\}$,

G的图可分别画成下图的(a), (b)和(c)



多重图与简单图

定义 7.4

在无向图中, 关联一对顶点的无向边如果多余1条, 称这些边为平行边, 平行边的条数为重数.

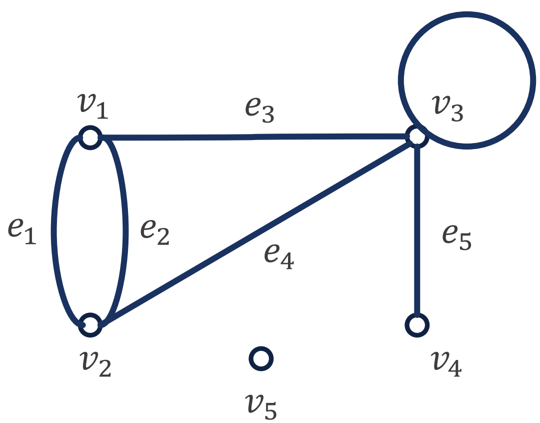
在有向图中，关联一对顶点的有向边如果多余1条并且它们的方向相同, 则称这些边为有向平行边, 简称平行边.

含平行边的图称为多重图. 既不含平行边也不含环的图称为简单图.

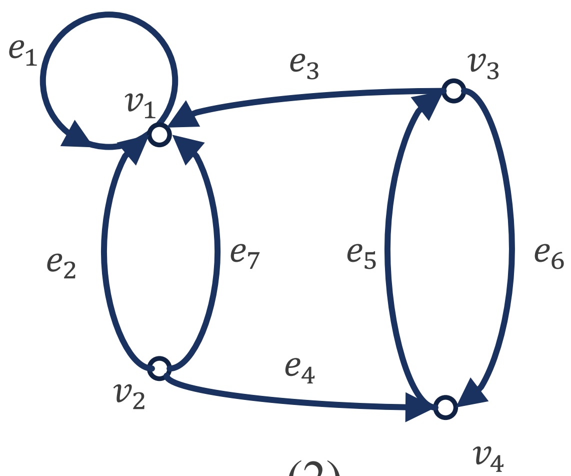
多重图与简单图

例

- 图(1)中，e_1与e_2是平行边．该图既有平行边，又有环，是多重图，不是简单图．
- 图(2)中，e_2与e_7是平行边，但e_5与e_6不是平行边 (方向不同)．



(1)

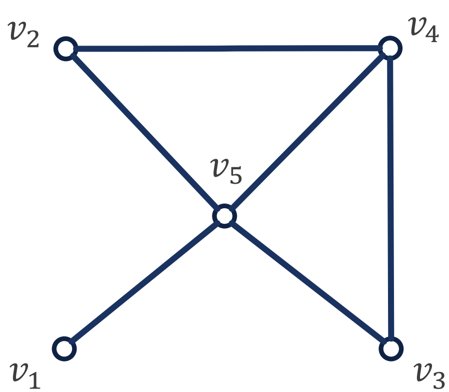


(2)

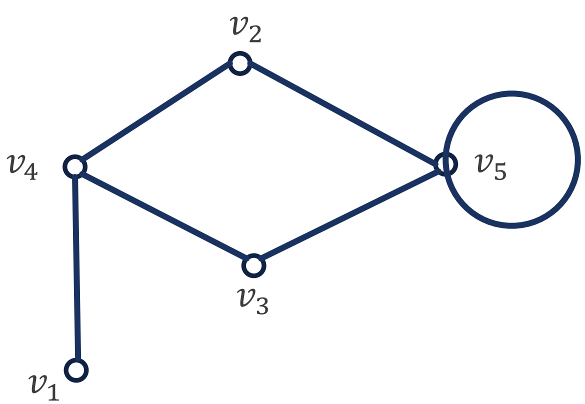
多重图与简单图

例

- 图(1)既无平行边, 又无环, 因而是简单图.
- 图(2)无平行边, 但是含环, 因而不是简单图.



(1)



(2)

度

定义 7.3

设无向图$G=\langle V,E\rangle$, 对于任意的$v\in V$, 与v关联的边数之和称为v的度数, 简称为度, 记作$d_G(v)$, 或简记为$d(v)$.

- 每个环提供给它的端点2度.

定义 7.3.1

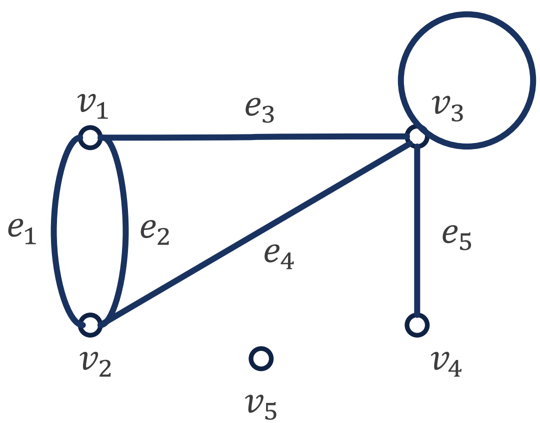
设有向图$D=\langle V,E\rangle$, 对于任意的$v\in V$, 以v为始点的边数之和称v的出度, 记作$d_D^+(v)$; 以v为终点的边数之和称v的入度, 记作$d_D^-(v)$.

- 显然, $d_D^+(v)+d_D^-(v)=d_D(v)$
- 称度数为1的顶点为悬挂顶点, 与它关联的边为悬挂边.

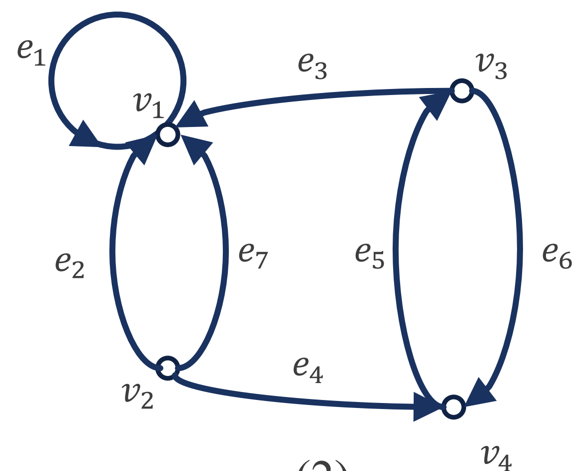
度

例

- 图(1)中, $d(v_1) = d(v_2) = 3$, $d(v_3) = 5$, $d(v_4) = 1$, $d(v_5) = 0$. v_4 是悬挂顶点, e_5是悬挂边.
- 图(2)中, $d^+(v_1) = 1$, $d^-(v_1) = 4$, $d(v_1) = 5$, $d^+(v_2) = 3$, $d^-(v_2) = 0$, $d(v_2) = 3$, ...



(1)



(2)

度

- 设G为无向图, 令

$$\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V(G)\},$$

$$\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V(G)\},$$

称$\Delta(G)$和$\delta(G)$分别为G的最大度数和最小度数.

- 一个顶点的度是一个局部的性质, 而$\Delta(G)$和$\delta(G)$是全局的.
- 若G为n阶无向简单图, 则对于$\forall v \in V$, 有

$$0 \leq \delta(G) \leq d(v) \leq \Delta(G) \leq n - 1.$$

度

- 设D为有向图，类似可定义$\Delta(D)$和$\delta(D)$为D的最大度和最小度，

$$\Delta^+(D) = \max\{d^+(v) \mid v \in V(D)\},$$
$$\delta^+(D) = \min\{d^+(v) \mid v \in V(D)\},$$
$$\Delta^-(D) = \max\{d^-(v) \mid v \in V(D)\},$$
$$\delta^-(D) = \min\{d^-(v) \mid v \in V(D)\},$$

依次称为D的最大出度、最小出度、最大入度、最小入度.

- 若D为n阶有向简单图, 则对于$\forall v \in V$, 有

$$0 \le \delta(D) \le d(v) \le \Delta(D) \le 2(n-1).$$

图的基本定理

定理 7.1 (握手定理)

设$G = \langle V, E\rangle$为任意一图 (有向的或无向的), $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 边的条数$|E| = m$，则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m\,.$$

证明 在G中的每一条边(包括环)均有两个端点，所以在计算G中各顶点度数之和时，均提供2度，因而m条边共提供$2m$度.

定理 7.2

设$D = \langle V, E\rangle$为一有向图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 边的条数$|E| = m$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} d^{+}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^{-}(v_i) = m.$$

图的基本定理

推论

任何图 (有向的或无向的) 中, 度数为奇数的顶点个数是偶数.

证明 设V_o为度数为奇数的顶点集合，V_e为度数为偶数的顶点集合. 根据握手定理, 则有

$$\sum_{v\in V} d(v) = \sum_{v\in V_o} d(v) + \sum_{v\in V_e} d(v) = 2m.$$

对于$\forall v \in V_e$，$d(v)$都是偶数，因此$\sum_{v\in V_e} d(v)$是偶数．由于$2m$是偶数，因此$\sum_{v\in V_o} d(v)$是偶数．由于$\sum_{v\in V_o} d(v)$中的$d(v)$都是奇数, 且偶数个奇数之和才能是偶数, 因此$|V_o|$是偶数.

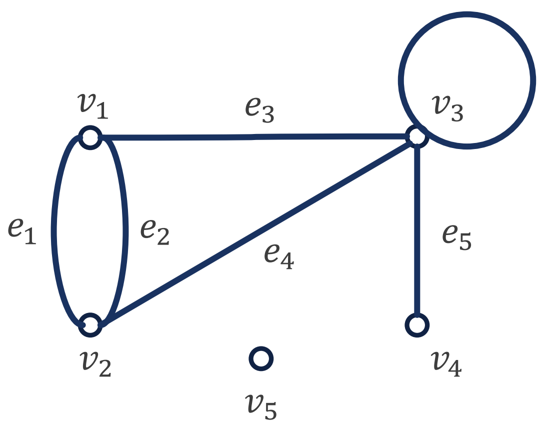
度数列

定义

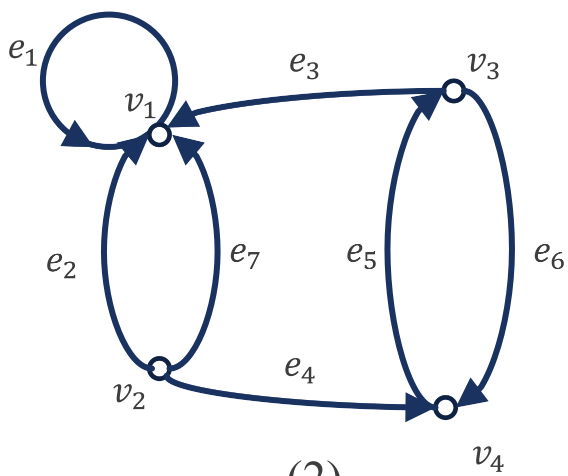
设$G = \langle V, E \rangle$为一无向图，$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$，称$d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)$为$G$的度数列. 对于有向图, 还可以分出度列和入度列.

例 图(1)的度数列为3, 3, 5, 1, 0.

图(2)的度数列为5, 3, 3, 3; 其中出度列为1, 3, 2, 1; 入度列为4, 0, 1, 2.



(1)



(2)

度数列

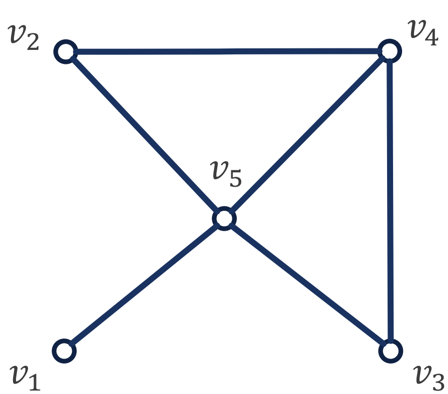
例 7.1 (1) 下面整数列能构成无向图的度数列吗?

(a) 2, 3, 4, 5, 6, 7.

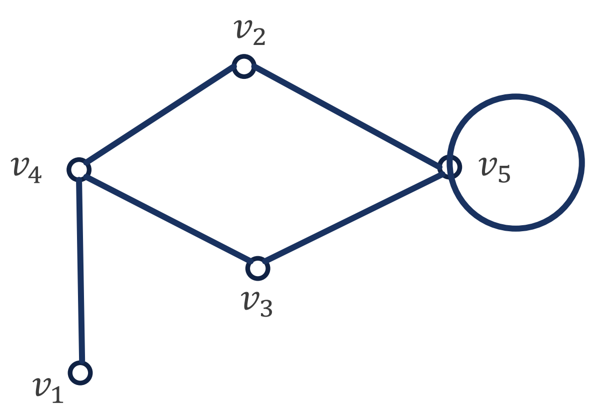
(b) 1, 2, 2, 3, 4.

解 (a)中有3个顶点的度数是奇数, 所以不能构成图的度数列, 否则与握手定理的推论矛盾.

(b) 可以构成多个无向图, 如下所示.



(1)



(2)

度数列

例 7.1 (2) 已知图G中有11条边, 1个4度顶点, 4个3度顶点, 其余顶点的度数均小于等于2, 问G中至少有几个顶点?

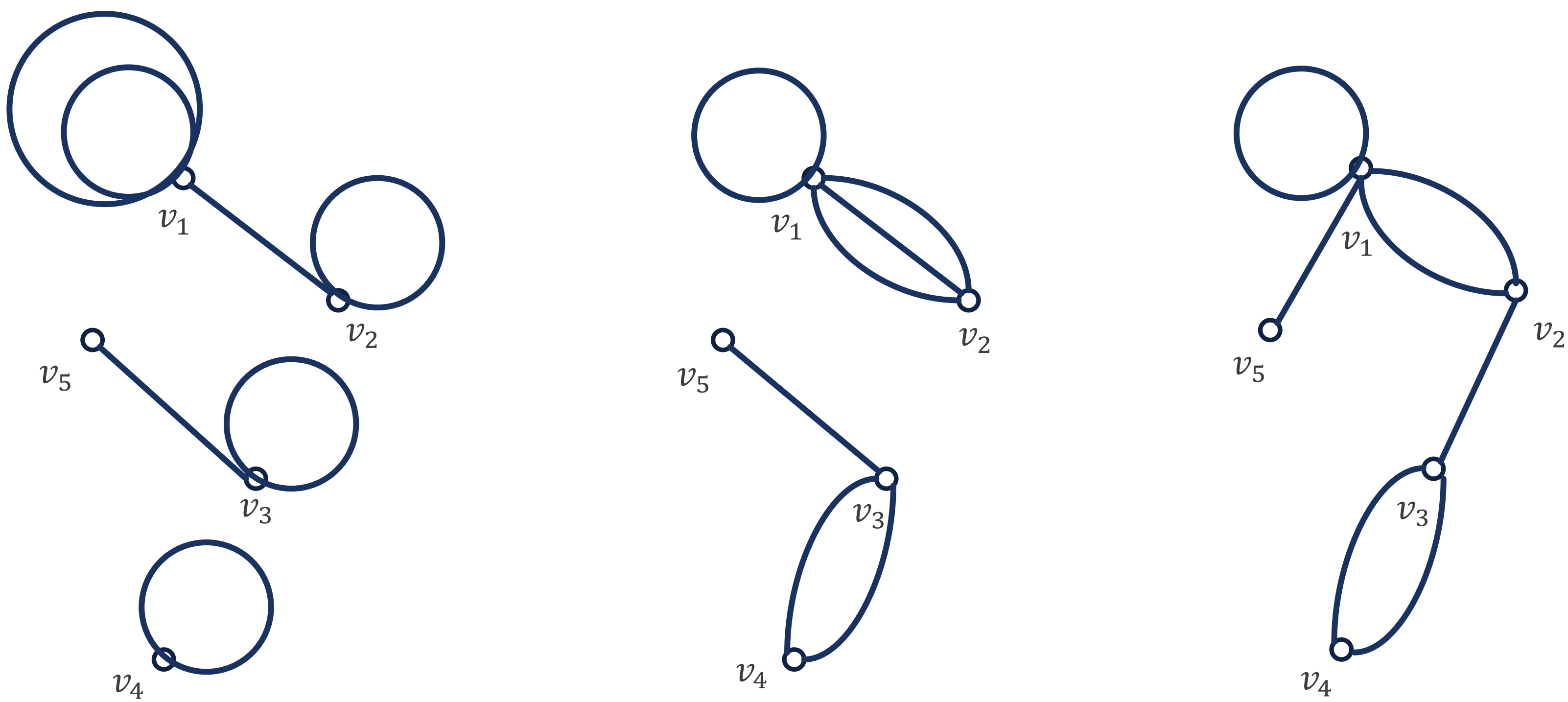
解　由握手定理, G中各顶点度数之和为22. 1个4度顶点, 4个3度顶点共占去16度. 还剩下6度, 其余顶点的度数若全是2, 还需要3个顶点, 所以G中至少有1+4+3=8个顶点.

课堂练习

画出3个有度数列 5, 3, 3, 2, 1 的无向图.

课堂练习

画出3个有度数列 5, 3, 3, 2, 1 的无向图.



完全图

定义 7.5

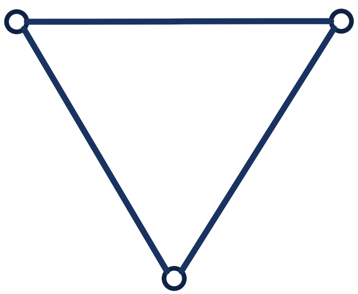
设G为n阶无向简单图, 若G中任意两个不同的顶点都是相邻的, 则称G为n阶无向完全图记作K_n.

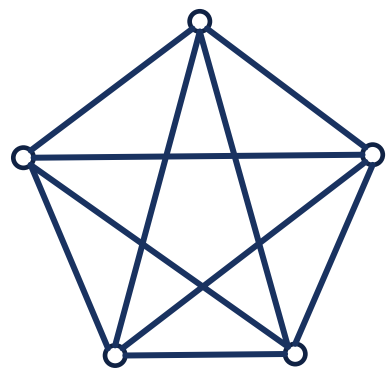
设D为n阶有向简单图, 若对于任意的u, $v \in V(D)$ $(u \neq v)$, 均有$\langle u, v\rangle \in E(D), \langle v, u\rangle \in E(D)$, 则称$D$是$n$阶有向完全图.

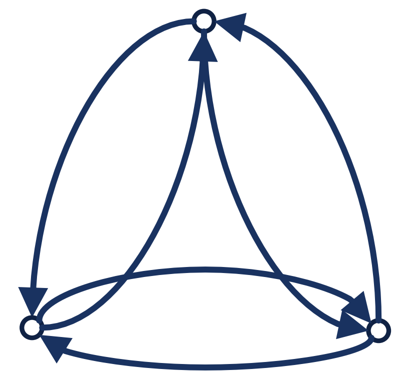
- 在无向完全图K_n中, 边数$m = C_n^2 = n(n-1)/2$.
- 在有向完全图中, 边数$m = 2C_n^2 = n(n-1)$.

完全图

- 例 (1)和(2)分别是无向完全图K_3和K_5, (3)是3阶有向完全图.


(1)


(2)

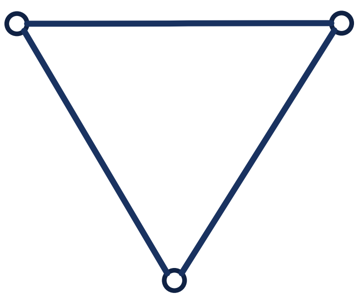

(3)

正则图

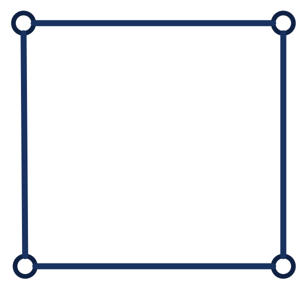
定义 7.6

设$G = \langle V, E\rangle$无向简单图，若$\Delta(G) = \delta(G) = k$，即各顶点度数均等于$k$，则称图$G$为$k$-正则图.

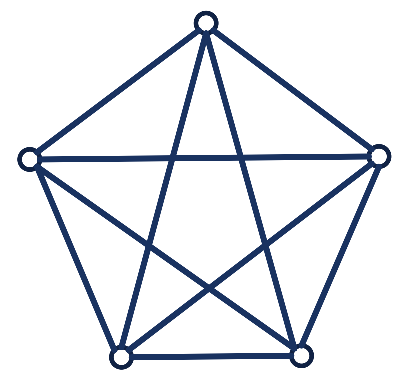
- 由握手定理可知，n阶k-正则图的边数$m = kn/2$. 所以，k和n中至少必有一个为偶数.
- K_n都是$(n-1)$-正则图.



2-正则图



2-正则图



4-正则图

子图

定义 7.7

设$G = \langle V, E\rangle$和$G' = \langle V', E'\rangle$是两个图 (两图同为无向的或有向的).

(1) 若$V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$, 则称G'是G的子图, G是G'的母图,记作$G' \subseteq G$;

(2) 若$V' \subset V$, $E' \subset E$, 称G'是G的真子图;

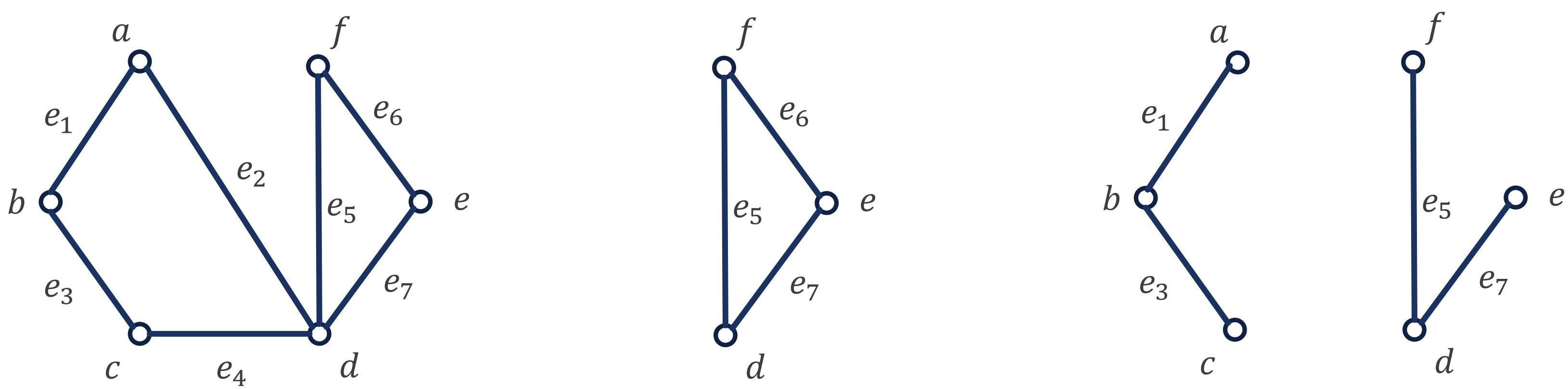
(3) 若$G' \subseteq G$且$V' = V$, 称G'是G的生成子图;

(4) 若$\emptyset \neq V_1 \subseteq V$, 以$V_1$为顶点集, 以两个端点均在$V_1$中的全体边为边集的$G$的子图, 称为$V_1$导出的导出子图, 记作$G[V_1]$;

若$\emptyset \neq E_1 \subseteq E$, 以$E_1$为边集, 以$E_1$中的边关联的顶点全体为顶点集的$G$的子图, 称为$E_1$导出的导出子图, 记作$G[E_1]$.

子图

- 在下图中，(1), (2), (3)都是(1)的子图，其中(2), (3)是真子图. (1), (3)是(1)的生成子图.
- (2) 既可以看成$V_1 = \{d, e, f\}$的导出子图$G[V_1]$，也可以看成$E_1 = \{e_5, e_6, e_7\}$的导出子图$G[E_1]$.
- (3)可以看成$E_2 = \{e_1, e_3, e_5, e_7\}$导出的子图$G[E_2]$，但是不能看成是$V_2 = \{a, b, c, d, e, f\}$的导出子图$G[V_2]$.



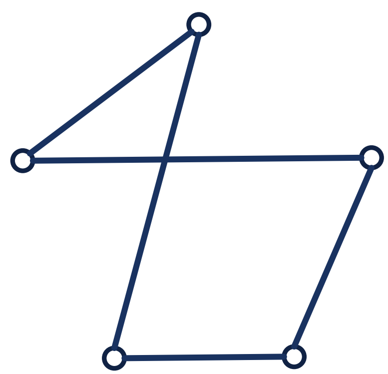
(1) (2) (3)

补图

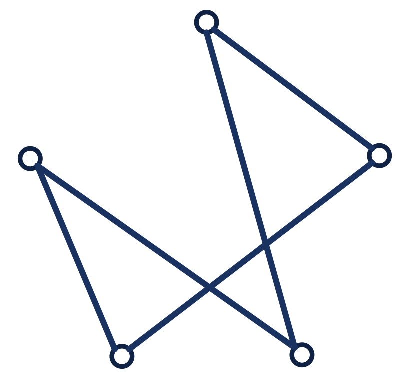
定义 7.8

设$G=\langle V,E\rangle$为n阶无向简单图. 以V为顶点集, 以K_n中所有不在G中的边组成的集合为边集的图, 称为G相对于K_n的补图, 简称为G的补图, 记作$\bar{G}$.

- 补图都是针对完全图而言, 而且只针对边求补, 不针对顶点.
- K_n的补图为n阶零图, 反之亦然.
- 在补图G中两个顶点u与v相邻的充要条件是u与v在$\bar{G}$中不相邻.



G



$\bar{G}$

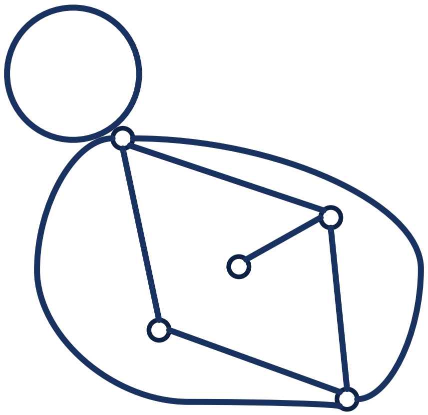
同构

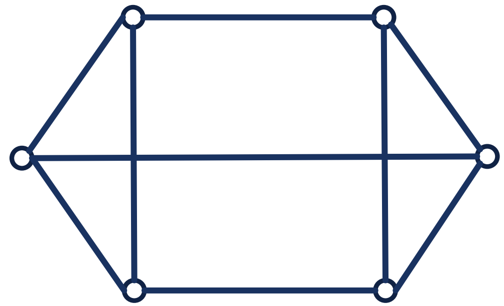
定义 7.9

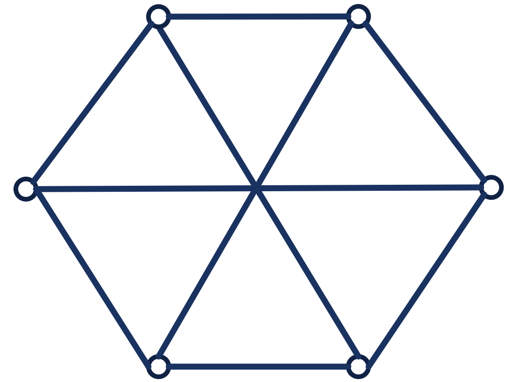
设$G_1=\langle V_1,E_1\rangle$，$G_2=\langle V_2,E_2\rangle$为两个无向图．若存在双射函数$f\colon V_1\to V_2$，对于任意的$v_i,v_j\in V_1$，$e=(v_i,v_j)\in E_1$当且仅当$e'=\big(f(v_i),f(v_j)\big)\in E_2$，且$e$与$e'$重数相同，则称$G_1$和$G_2$**同构**，记为$G_1\cong G_2$.

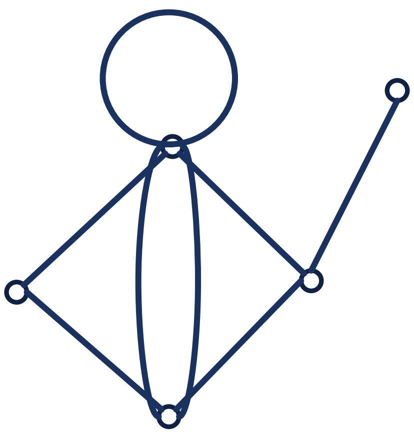
- 类似地可以定义两个有向图之间同构的概念，只是应该注意方向.
- 图之间的同构关系是全体图集合上的等价关系.
- 同构的图本质上是同一图，具有相同的结构和二元关系，只是画法和标号不同而已.
- 到目前为止，还**没有找到**判断两个图同构的简单有效的充分判别法.
- 若$G_1=\langle V_1,E_1\rangle$，$G_2=\langle V_2,E_2\rangle$同构，则必有$|V_1|=|V_2|$，$|E_1|=|E_2|$.

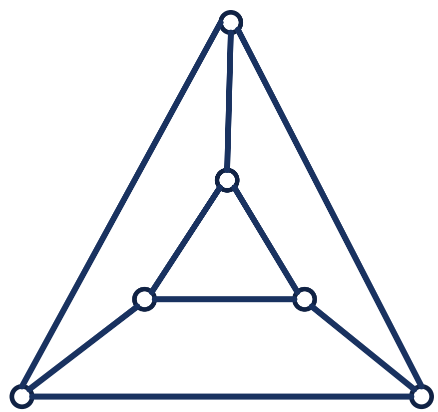
- (1)与(2)同构, (3)与(4)同构, (5)与(6)同构.

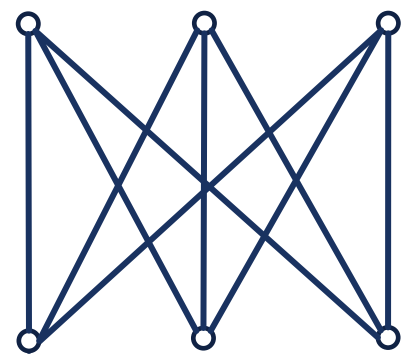

(1)


(3)


(5)


(2)


(4)


(6)

同构

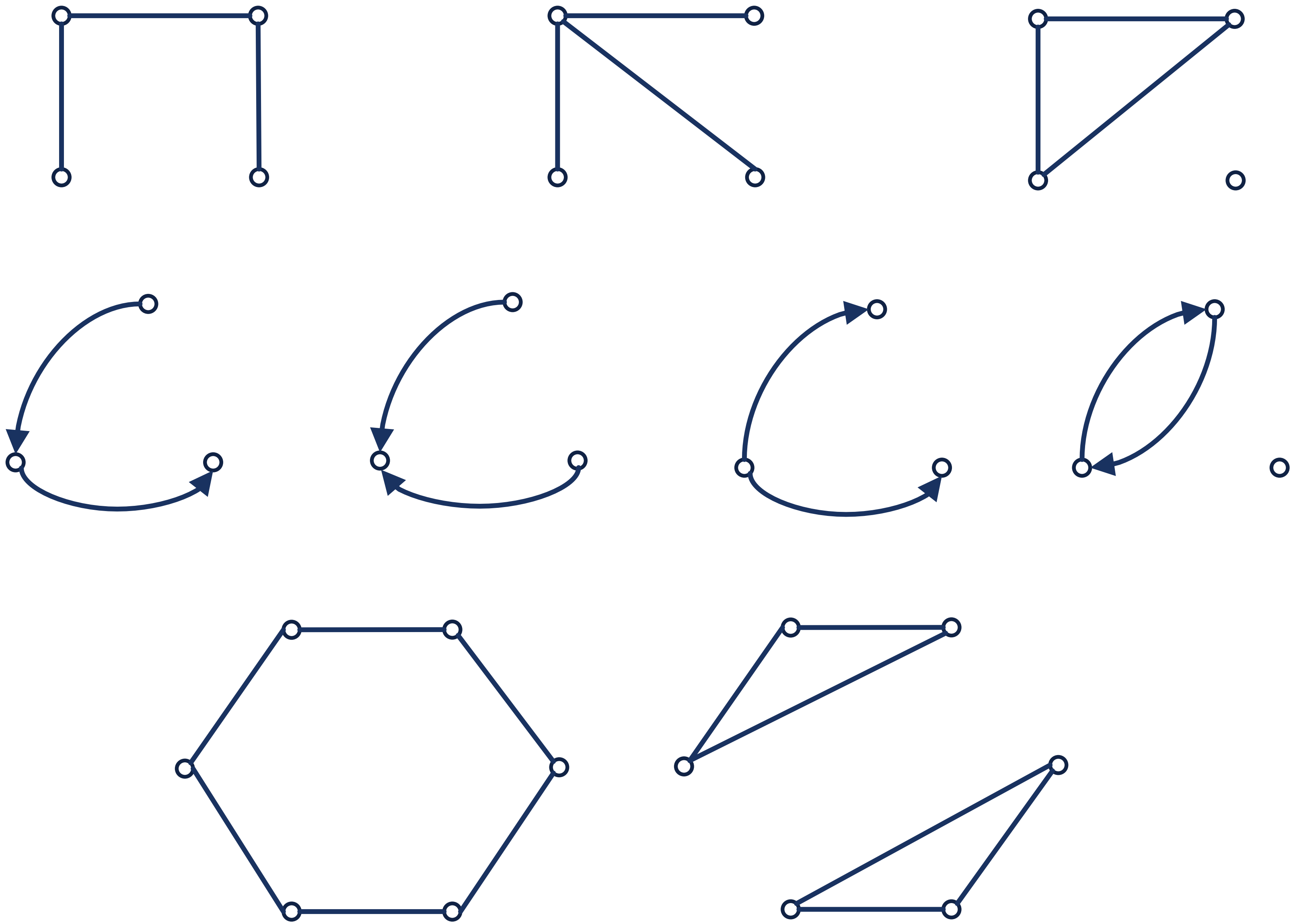
- 对于给定的正整数n和m，构造出所有非同构的n阶m条边的无向简单图（要求$m \leq n(n-1)/2$），或有向简单图（要求$m \leq n(n-1)$），是一个比较困难的问题，但对于较小的n，m，还是容易构造出来的.

例 7.2

(1) 画出4阶3条边的所有非同构的无向简单图.

(2) 画出3阶2条边的所有非同构的有向简单图.

(3) 画出2个6阶非同构的2-正则图.



课堂练习

画出5阶4条边的所有非同构的无向简单图.

课堂练习

画出5阶4条边的所有非同构的无向简单图.

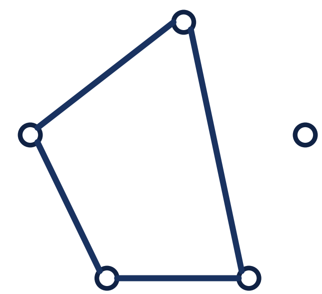
解

由握手定理可知，所画的图各顶点的度数之和为8，最大度≤4.

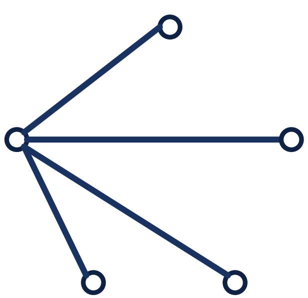
一共有五种度数列

(4,1,1,1,1), (3,2,1,1,1), (3,2,2,1,0), (2,2,2,1,1), (2,2,2,2,0).

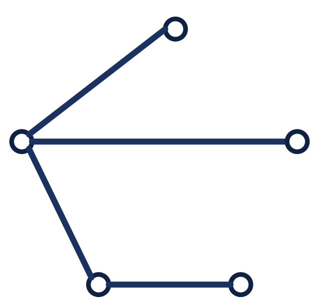
其中度数列(2,2,2,1,1)有两种非同构图.



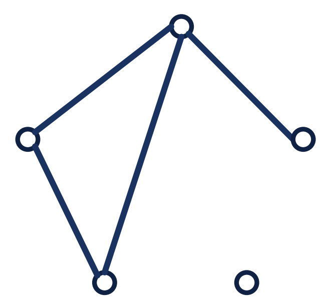
2,2,2,2,0



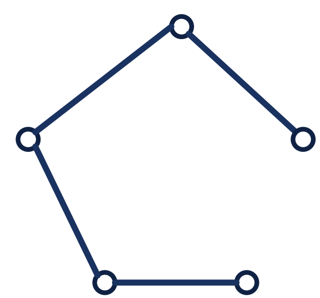
4,1,1,1,1



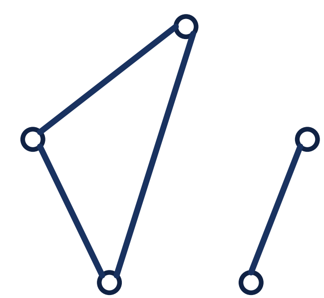
3,2,1,1,1



3,2,2,1,0



2,2,2,1,1



2,2,2,1,1

7.2 图的连通性

通路与回路

- 图的最基本性质是它是否是连通的.

定义 7.10

给定图$G = \langle V, E \rangle$, 设G中顶点和边的交替序列为$\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_l v_l$. 其中$v_{i-1}$和$v_i$是$e_i$的端点（$G$为有向图时，要求$v_{i-1}$是$e_i$的始点，$v_i$是$e_i$的终点), $i = 1,2,\dots,l$. 称Γ为v_0到v_l的通路，v_0和v_l分别称为通路Γ的始点和终点. Γ中所含边数l称为Γ的长度. 若$v_0 = v_l$, 则称通路Γ为回路.

若Γ中的所有边互不相同，则称Γ为简单通路；此时，又若$v_0 = v_l$，则称Γ为简单回路.

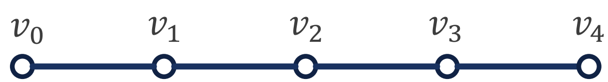
若Γ中除v_0与v_l的所有顶点互不相同（从而所有边也互不相同)，则称Γ为初级通路或路径. 此时, 又若$v_0 = v_l$, 则称Γ为初级回路或圈.

若Γ中的有边重复, 则称Γ为复杂通路; 有边重复出现的回路称为复杂回路.

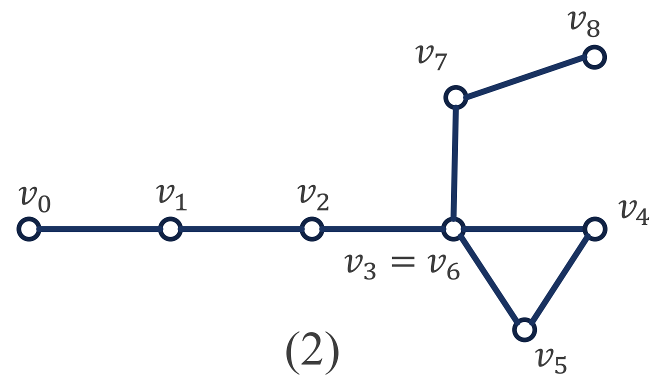
- 按照要求严格程度递进: 通路(回路)→简单通路(回路) →初级通路(回路).

通路与回路

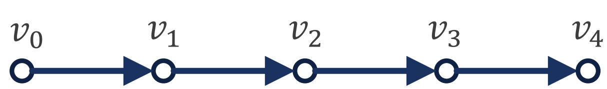
- (1)(3)为v_0到v_4的长度为4的初级通路, 同时也是简单通路.
- (2)(4)为v_0到v_8的长度为8的简单通路, 但是它不是初级的.



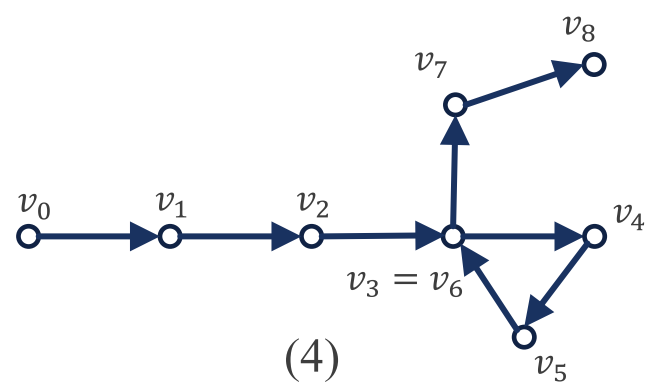
(1)



(2)



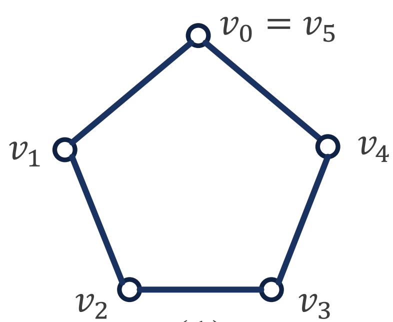
(3)



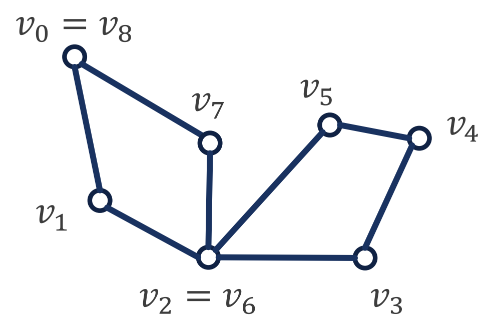
(4)

通路与回路

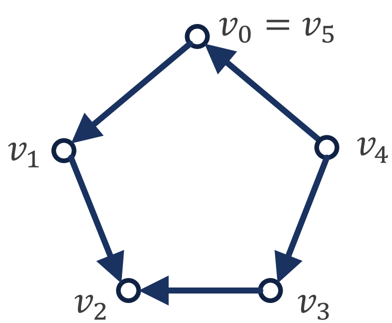
- (1)(3)为v_0到$v_5(=v_0)$的长度为5的初级回路, 同时也是简单回路.
- (2)(4)为v_0到$v_8(=v_0)$的长度为8的简单回路, 但是它不是初级的.



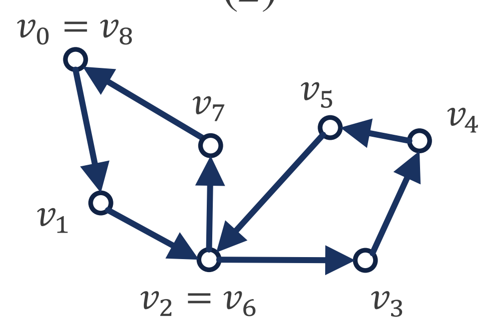
(1)



(2)



(3)



(4)

通路与回路

- 在无向图中，长度为1和2的初级回路分别由环和两条平行边构成.
  - 一条边来回各走一次, 得到一条长度为2的复杂回路.
- 在无向**简单**图中, 若有初级回路, 则长度≥3.
- 在有向图中, 长度为1的初级回路由环构成.
- 在有向**简单**图中, 若有初级回路, 则长度≥2.
- 对于简单图来说，也可以只用顶点的序列表示通路与回路，将Γ表示为$v_0v_1 \ldots v_l$.

通路与回路

定理 7.3

在n阶图中，若从顶点u到$v(u \neq v)$存在通路，则从u到v存在长度小于等于$n-1$的初级通路.

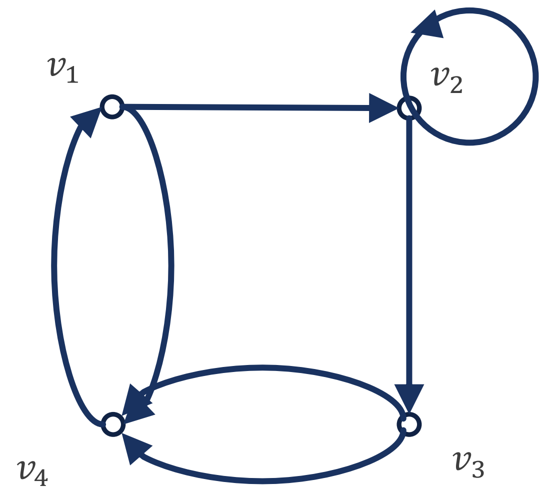
证明 设$\Gamma = v_0 e_1 v_1, e_2 \dots e_l v_l$ $(v_0 = u, v_l = v)$为u到v的通路. 我们可以通过构造性的方式生成一条从u到v的初级通路.

若不是初级通路，则必存在$t < s$有$v_t = v_s$. 在Γ中去掉从v_t到v_s的这一段，所得到的通路仍为u到v的通路. 若还有重复的点出现，就做同样的处理，直到无重复出现的顶点为止. 最后得到的通路就是u到v的初级通路.

由于通路中的顶点都不相同，至多有n个，所以它的长度小于等于$n-1$.

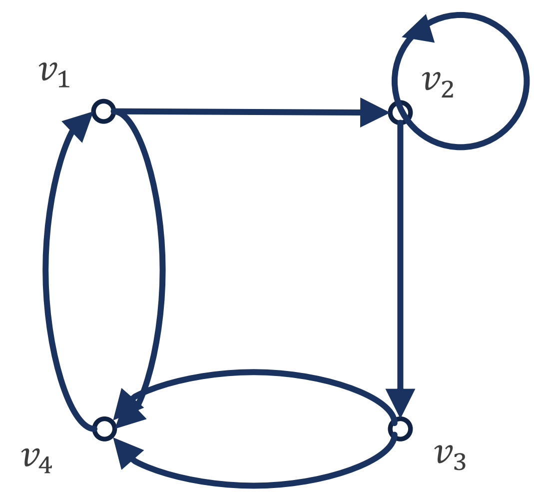
课堂练习

假设从不同顶点出发的回路是不同的，那么该有向图中共有多少条长度为4的回路？



课堂练习

假设从不同顶点出发的回路是不同的，那么该有向图中共有多少条长度为4的回路?



解

以v_1为始点: $v_1v_4v_1v_4v_1$, $v_1v_2v_3v_4v_1\times 2$.

以v_2为始点: $v_2v_2v_2v_2v_2$, $v_2v_3v_4v_1v_2\times 2$.

以v_3为始点: $v_3v_4v_1v_2v_3\times 2$.

以v_4为始点: $v_4v_1v_4v_1v_4$, $v_4v_1v_2v_3v_4\times 2$.

共11种.

连通

- 同理可证以下定理

定理 7.3

在n阶图中，如果存在v到自身的回路，则从v到自身存在长度不超过n的初级回路.

定义 7.11

在无向图G中, 若顶点u, v之间存在通路, 则称u, v是**连通的**. 规定v与自身是连通的.

若无向图G是平凡图，或G中任意二顶点都是连通的，则称G是**连通图**, 否则称G是**非连通图**.

连通

- 无向图$G = \langle V, E\rangle$顶点间的连通关系R是V上的一个等价关系，

$$R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in G \text{ 且 } x\text{与}y\text{连通}\},$$

它的所有等价类构成V的一个划分. 任意两个顶点v_i和v_j属于同一个等价类当且仅当它们有路相连通.

定义

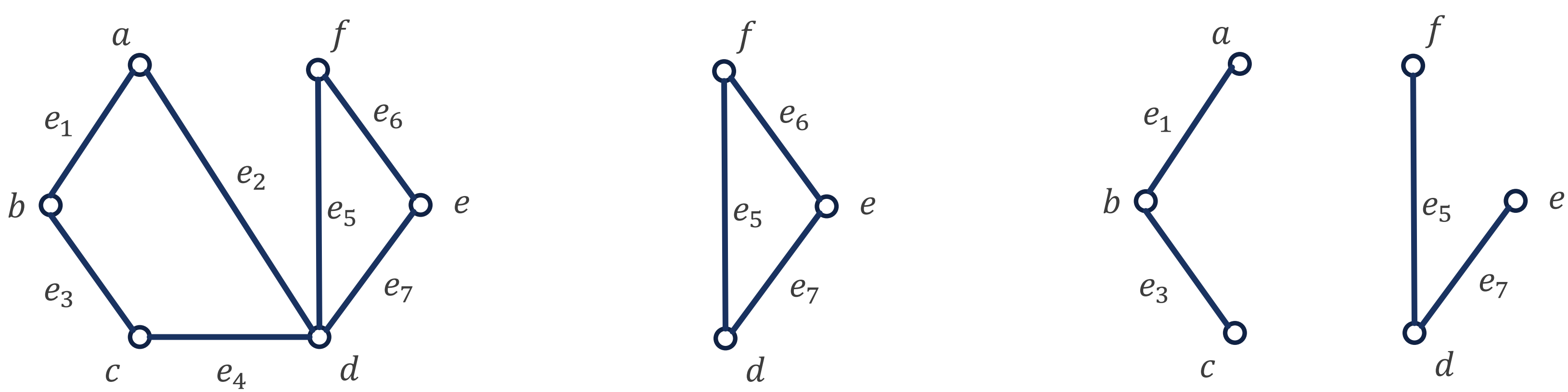
设$G = \langle V, E\rangle$，R将V划分为等价类$V_1, V_2, \ldots, V_k$，称它们的导出子图$G[V_i]\ (i = 1, 2, \ldots, k)$为$G$的连通分支，连通分支数$k$记作$p(G)$.

- G是连通图 $\Leftrightarrow p(G) = 1$. G是非连通图 $\Leftrightarrow p(G) \geq 2$.

连通

例 (1), (2)为连通图.

(3)是具有两个连通分支的非连通图，但是并不是(1)的连通分支.



(1) (2) (3)

距离

定义

设u, v为无向图G中任意两个顶点, 若u与v是连通的, 则称u与v之间长度最短的通路为u与v之间的短程线. 短程线的长度称为u与v之间的距离, 记作$d(u, v)$. 若u与v不连通时, 规定$d(u, v) = \infty$.

- 无向图的距离定义满足欧式距离三条公理:

(1)非负性: $d(v_i, v_j) \geq 0$, 并且当且仅当$v_i = v_j$时, 等号成立.

(2)三角不等式: $\forall v_i, v_j, v_k \in V(G)$, 有

$$d(v_i, v_j) + d(v_j, v_k) \geq d(v_i, v_k).$$

(3) 对称性: $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$.

距离

- 对无向连通图G来说，常由删除G中的一些顶点或删除一些边, 而破坏其连通性. 设$G = \langle V, E\rangle$为一无向图.

  (1) 设$e \in E$，用$G - e$表示从G中去掉边e，称为删除e. 又设$E' \subset E$, 用$G - E'$表示从G中删除E'中的所有边, 称为删除E'.

  (2) 设$v \in V$，用$G - v$表示从G中去掉v及v关联的一切边，称为删除v. 又设$V' \subset V$，用$G - V'$表示从G中删除V'中的所有顶点, 称为删除V'.

- 没边，顶点自己可以生存，但是没了顶点，边无法自己生存. 所以删顶点必须要删关联的边，但是删边不需要删关联的顶点.

割集

- 连通性是图的最为重要性质之一．图的连通性在计算机网络，交通网和电力网等方面有着重要的应用.
- 实际问题中，除了考察一个图是否连通外，往往还要研究一个图连通的程度，作为系统的可靠性度量.

定义 7.12

设$G=\langle V,E\rangle$，若$V'\subset V$使得$p(G-V')>p(G)$，且对于$\forall V''\subset V'$，均有$p(G-V'')=p(G)$，则称V'是G的点割集．若点割集中只有一个顶点，则称该顶点为割点.

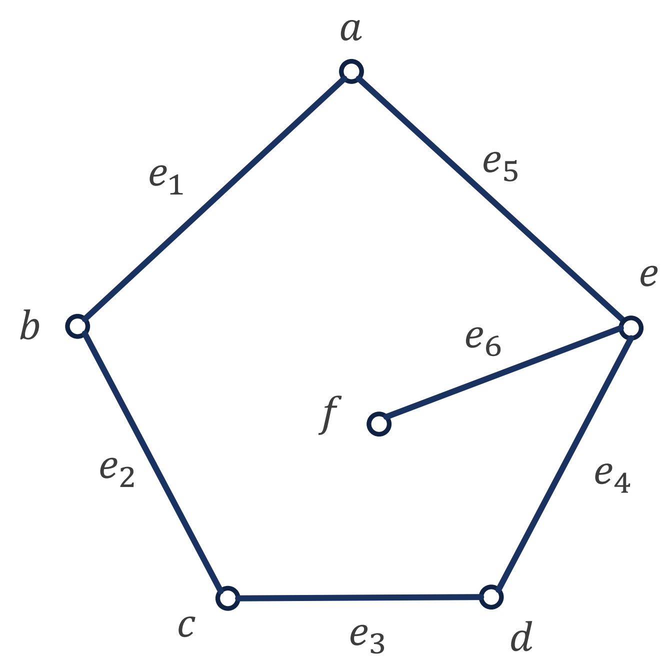
类似地，若$E'\subset E$使得$p(G-E')>p(G)$，且对于$\forall E''\subset E'$，均有$p(G-E'')=p(G)$，则称E'是G的边割集，简称割集．若边割集中只有一条边，则称该边为割边或桥.

- 点 (边) 割集有着最小的概念，不存在它的真子集是G的点 (边) 割集.

割集

例

- $\{e\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, d\}$等都是点割集, 其中e是割点.
- $\{a\}, \{b, e\}, \{a, c, d\}$等都不是点割集.
- $\{e_6\}$, $\{e_1, e_5\}$, $\{e_1, e_3\}$等都是边割集, 其中e_6是桥.
- $\{e_1, e_6\}, \{e_2, e_3, e_4\}$等都不是边割集.



割集

从定义可以看出以下几点:

1. 完全图K_n无点割集, 因为从K_n中删除$k(k \leq n-1)$个顶点后, 所得图仍然是连通的.

- K_n删除任一顶点后, 变为K_{n-1}.

2. n阶零图既无点割集, 也无边割集.

3. 若G是连通图, E'是G的边割集, 则$p(G-E')=2$.

4. 若G是连通图, V'是G的点割集, 则$p(G-V')\geq 2$.

5. G存在点割集 $\Leftrightarrow$ G不是完全图.

- 若G不是完全图, 那么G包含两个不邻接的顶点, 删除G的除这两个顶点外的所有顶点, 即可得到一个不连通图. 即任意一个非完全图都存在点割集.

连通度

对一个连通图来说，若它存在点割集和边割集，就可以用含元素个数最少的点割集和边割集来刻画它的连通程度.

定义 7.13

设G是一个无向连通图, 称

(1) $\kappa(G)=\min\{|V'|\,|\,V'$为$G$的点割集或$V'$使$G-V'$成为平凡图$\}$为$G$的点连通度.

(2) $\lambda(G)=\min\{|E'|\,|\,E'$是$G$的边割集$\}$为$G$的边连通度.

- 图G的点连通度是为了使连通图G成为一个非连通图或平凡图，需要删除最少的点数. 所以$\kappa(G)\le n-1$.
- 图G的边连通度是为了使连通图G成为一个非连通图, 需要删除最少的边数.
- 规定无向非连通图的点连通度和边连通度都为0.

连通度

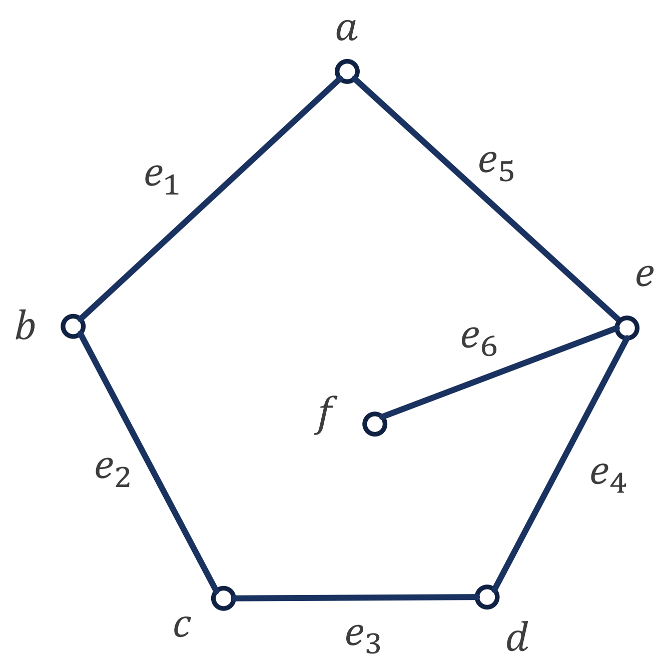
从定义可以看出以下几点:

1. 若G是平凡图，它既没有点割集，也没有边割集, 所以$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$.

2. 若G是完全图K_n，由于G没有点割集，当删除$n-1$个顶点后, G成为平凡图, 所以$\kappa(G) = n-1$.

3. 若G中存在割点，则$\kappa(G) = 1$；若G中存在割边, 则$\lambda(G) = 1$.

例 该图既有割点又有桥, 因而$\kappa(G) = \lambda(G) = 1$.



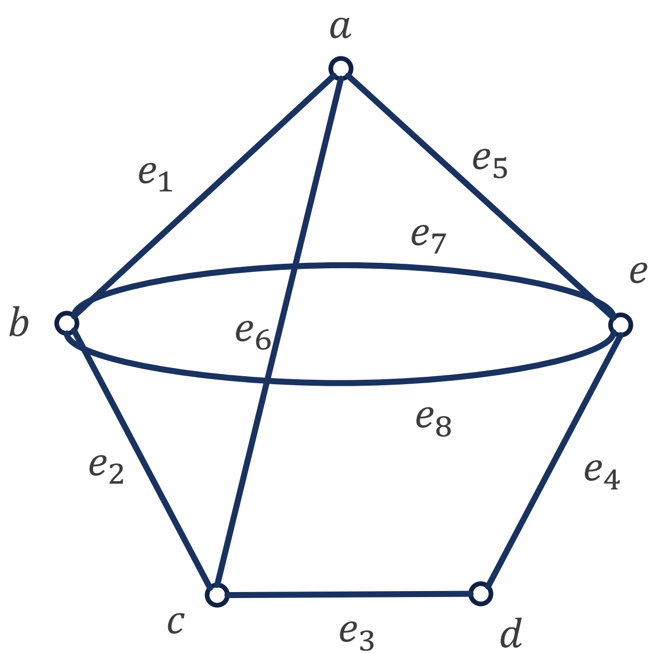
定理 7.5

对于任何无向图G, 有

$$\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G).$$

课堂练习

判断该无向图的点连通度和边连通度.



课堂练习

判断该无向图的点连通度和边连通度.

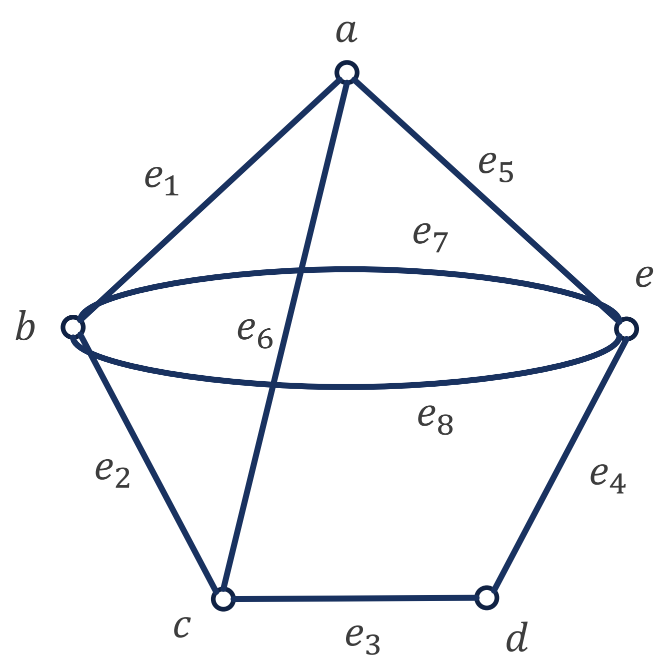
解

删除该图中任意一个顶点都无法破坏其连通性, 因此$\kappa(G) > 1$.

可以找到点割集$\{c, e\}$使该图成为非连通图, 因此$\kappa(G) = 2$.

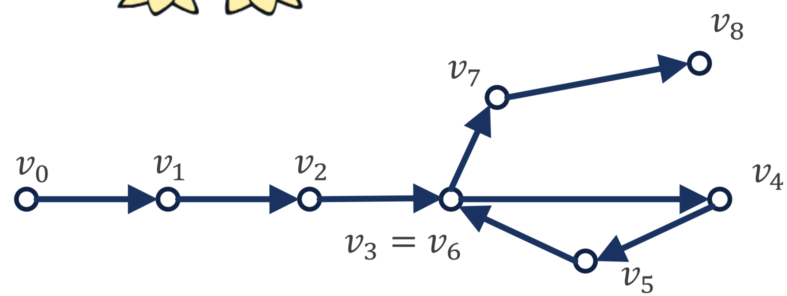
删除该图中任意一条边都无法破坏其连通性, 因此$\lambda(G) > 1$.

可以找到边割集$\{e_3, e_4\}$使该图成为非连通图, 因此$\lambda(G) = 2$.



有向图的连通性

- 以上讨论的都是无向图连通的概念和连通度, 下面介绍有向图连通性的概念.



定义 7.14

设$D = \langle V, E\rangle$为一有向图，若从顶点v_i到v_j有通路，则称v_i**可达**v_j. 规定v_i到自身总是可达的. 若v_i可达v_j，v_j也可达v_i，则称v_i与v_j是**相互可达的**. v_i与自身是相互可达的.

若v_i可达v_j，则称v_i到v_j长度最短的通路为v_i到v_j的**短程线**，短程线的长度称为v_i到v_j的**距离**, 记作$d\langle v_i, v_j\rangle$. 若v_i不可达v_j, 规定$d\langle v_i, v_j\rangle = \infty$.

例 在该图中, $d\langle v_0, v_7\rangle = 4$, $d\langle v_7, v_0\rangle = \infty$.

注意, 无向图顶点间的距离用圆括号: $d(v_i, v_j)$.

有向图的连通性

- 与无向图中顶点v_i与v_j之间的距离$d(v_i,v_j)$相比，$d\langle v_i,v_j\rangle$除无对称性外, 具有$d(v_i,v_j)$的一切性质:

  (1) 非负性: $d\langle v_i,v_j\rangle \geq 0$, 并且当且仅当$v_i=v_j$时, 等号成立.

  (2) 三角不等式: $\forall v_i,v_j,v_k \in V(G)$, 有

$$d\langle v_i,v_j\rangle + d\langle v_j,v_k\rangle \geq d\langle v_i,v_k\rangle.$$

- 有向图D两点间的距离一般不满足对称性，即使$d\langle v_i,v_j\rangle$和$d\langle v_j,v_i\rangle$都不是∞, 它们也可能不相等.
  - 所以, 连通性不是有向图的顶点集上的等价关系.

有向图的连通性

定义 7.15

设D为一有向图,

(1) 若略去D中各边的方向所得无向图 (称为基图) 是连通图, 则称D是弱连通图或连通图.

(2) 若D中任意2个顶点至少一个可达另一个, 则称D是单向连通图.

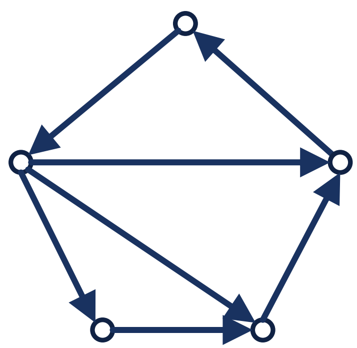
(3) 若D中任意2个顶点都是相互可达的, 则称D是强连通图.

- 若图D是强连通的, 则它必是单向连通的; 若图D是单向连通的, 则它必是弱连通的.
  - 但这两个命题, 其逆不成立.
  - 有向图的连通性强弱: 强连通图>单向连通图>弱连通图.

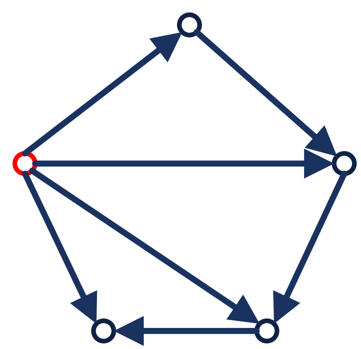
有向图的连通性

例

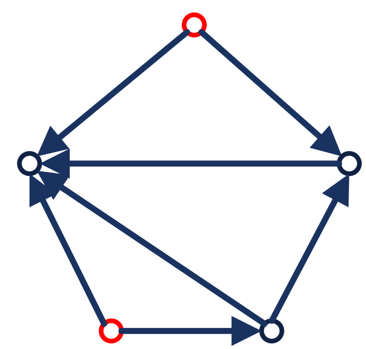
- (1)是强连通的, 当然也是单向连通的和弱连通的.
- (2)是单向连通的, 也是弱连通的, 但不是强连通的.
- (3)是弱连通的, 不是单向连通的, 更不是强连通的.



(1)



(2)



(3)

有向图连通性的判别方法

有向图连通性的判别定理1

有向图D是强连通的当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的回路.

证明 充分性 如果D中有一个回路, 它至少包含每个顶点一次, 则在该回路上D中任何两个顶点都是相互可达的, 即D是强连通图.

必要性 设D中的顶点为$v_1, v_2, \ldots, v_n$. 由D的强连通性质可知, v_i可达v_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, 设Γ_i为v_i到v_{i+1}的通路, 又有v_n可达v_1, 设Γ_n为v_n到v_1的通路. 于是, $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$所围回路经过$D$中每个顶点至少一次.

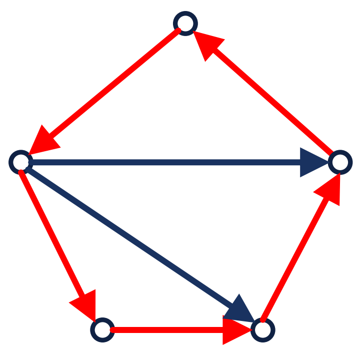
有向图连通性的判别定理2

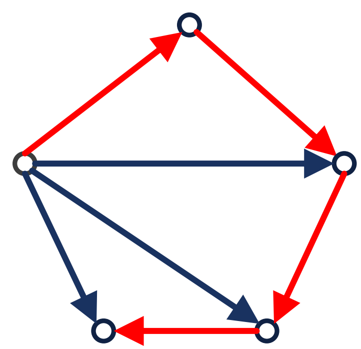
设D为n阶有向图, D是单向连通图当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的通路.

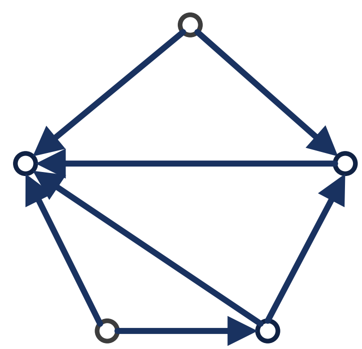
有向图连通性的判别方法

例

- (1)的外圈是一条回路, 它经过所有的顶点, 故(1)是强连通的.
- (2)有一个入度为0的顶点和一个出度为0的顶点，不存在经过这两个顶点的回路, 所以它不是强连通的.
- (2)的外圈除去左下角的一条边后是一条经过所有顶点的通路，故(2)是单向连通的.
- (3)中有2个入度为0的顶点, 不存在经过所有顶点的通路, 故不是单向连通的.

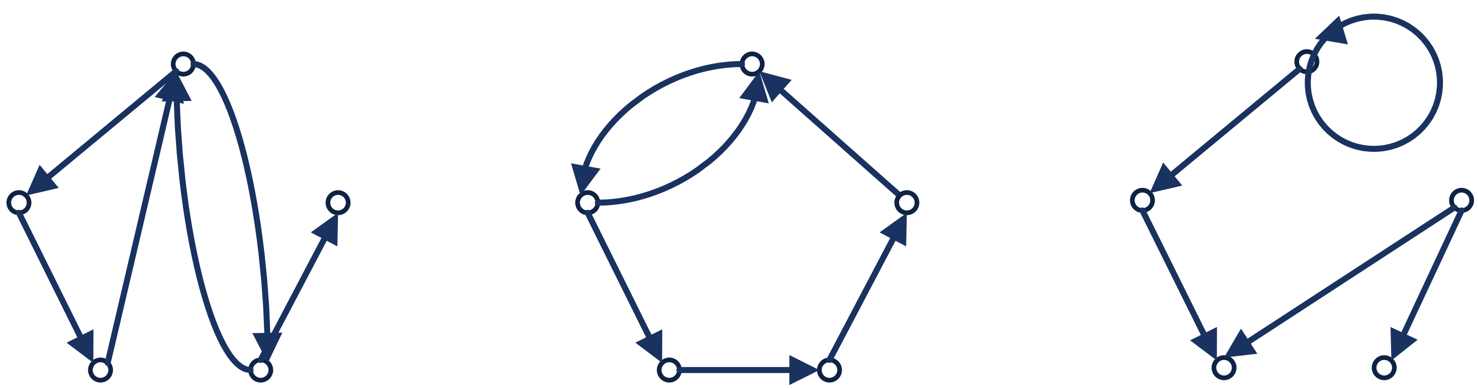

(1)


(2)


(3)

课堂练习

以下图中哪几个是强连通图？哪几个是单向连通图？哪几个是弱连通图？



(1)　　　(2)　　　(3)

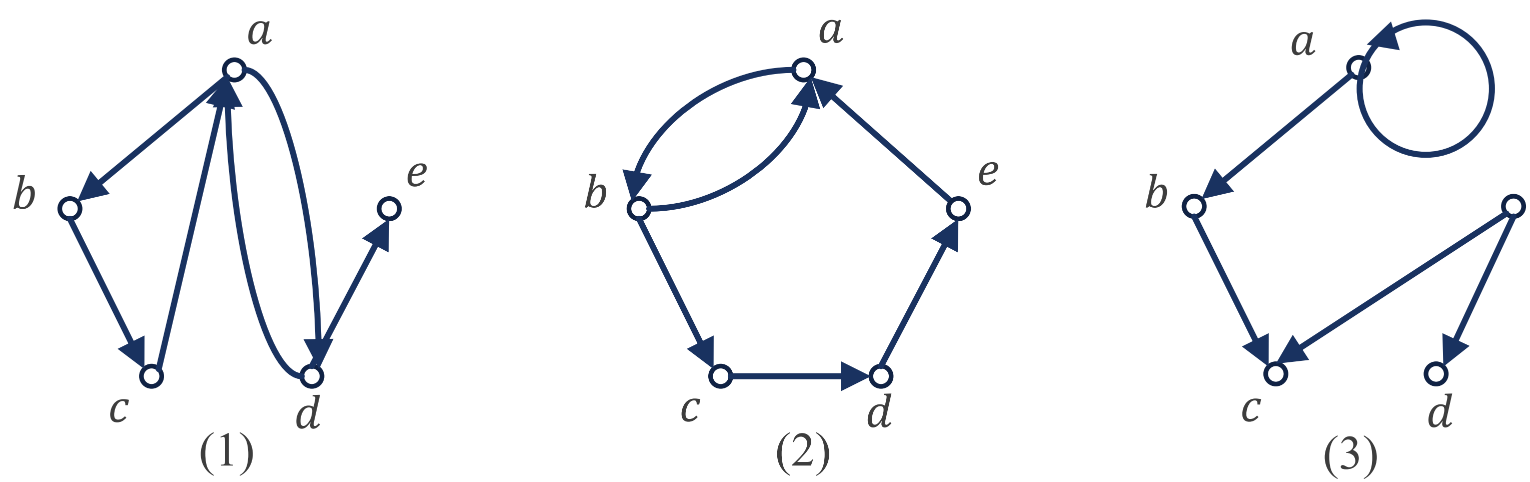
课堂练习

以下图中哪几个是强连通图? 哪几个是单向连通图? 哪几个是弱连通图?

解 (1)中存在经过每个顶点的通路$abcade$, 但是无回路, 因此是单向连通图, 自然也是弱连通图.

(2) 中存在经过每个顶点的回路$abcdea$, 所以是强连通图, 自然也是单向连通图和弱连通图.

(3) 没有经过每个顶点的通路或回路, 但是其基图是连通的, 因此是弱连通图.



7.3 图的矩阵表示

图的矩阵表示

- 二元关系, 关系图, 关系矩阵是一一对应的.
- 但是任意图G却无法和二元关系一一对应，因为图是多重集合，而二元关系是集合.
- 为了方便计算机来处理图, 我们可以用矩阵来表示图, 但是需要注意区分这一节中的矩阵和关系矩阵.

定义

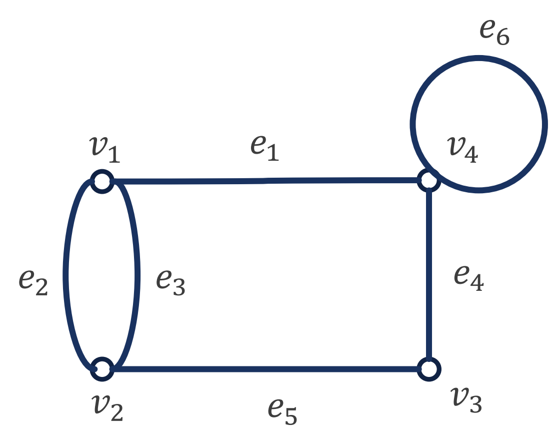
设无向图$G = \langle V, E\rangle$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 令$m_{ij}$为顶点$v_i$与边$e_j$的关联次数, 称$(m_{ij})_{n\times m}$为$G$的关联矩阵, 记作$M(G)$.

- 在图的矩阵表示中, 要求图必须是标定图.

无向图的关联矩阵

- m_{ij}的可能取值有3种:
  - 0: v_i与e_j不关联;
  - 1: v_i与e_j关联次数为1;
  - 2: v_i与e_j关联次数为2, 即e_j是以v_i为端点的环.

例 7.3 求该图所示无向图的关联矩阵.



解

列是边

$$M(G)=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0&2\end{bmatrix}$$

行是顶点

无向图的关联矩阵

- $M(G)$有如下性质:

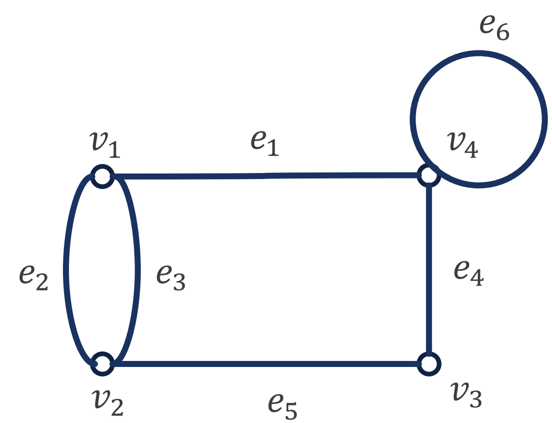
(1) $M(G)$每列元素之和为2, 即$\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 2$, 这是因为每条边一定关联两个顶点 (环关联的两个顶点重合).

(2) $M(G)$中第i行元素之和为v_i的度数, 即$\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i)$.

(3) 根据握手定理, 关联矩阵中所有元素之和=各顶点之和=边数的2倍, 即$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij} = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$.

(4) 第i列与第j列相同, 当且仅当e_i与e_j是平行边.

(5) 第i行中元素全为0, 即$\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = 0$, 当且仅当$v_i$为孤立点.



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

有向无环图的关联矩阵

定义

设$D = \langle V, E\rangle$为有向无环图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 令

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i\text{是}e_j\text{的起点}, \\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}, \\ -1, & v_i\text{是}e_j\text{的终点}, \end{cases}$$

则称$(m_{ij})_{n\times m}$为D的关联矩阵, 记作$M(D)$.

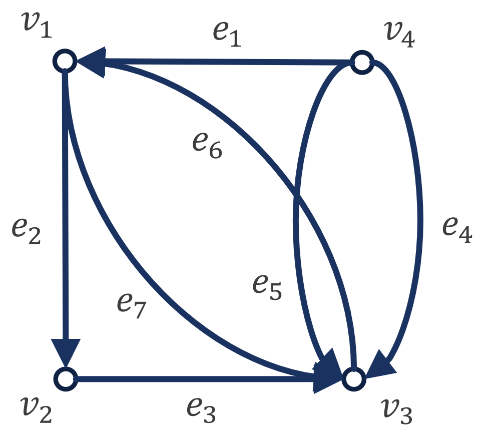
- 有向有环图没有关联矩阵，因为若e_j是v_i上的环，则v_i既是e_j的起点, 又是其终点, 在m_{ij}的取值中没有定义.

有向无环图的关联矩阵

例 7.4 求该有向无环图的关联矩阵.

解

$$M(D)=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$



有向无环图的关联矩阵

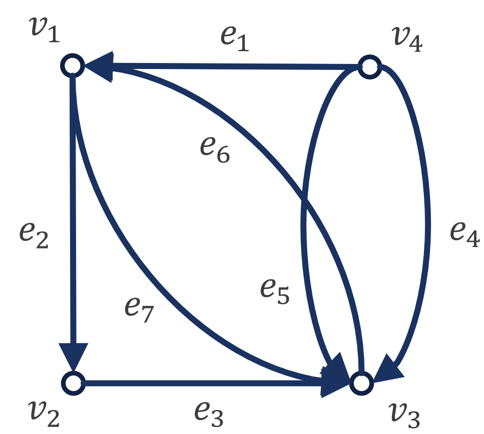
- 容易看出$M(D)$有如下性质:

(1) D每列元素之和为0, 即$\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 0$, 这是因为$D$中每条边关联两个顶点，一个始点，一个终点.

(2) 第i行元素绝对值之和等于$d(v_i)$，即$\sum_{j=1}^{m} |m_{ij}| = d(v_i)$，而其中1的个数为出度$d^+(v_i)$，–1的个数入度$d^-(v_i)$.

(3) 矩阵中1的个数与–1的个数相等，都等于m, 这正说明D中各顶点入度之和等于出度之和，都等于m，于是各顶点度数之和等于$2m$. 这是有向图D的握手定理的全部内容.

(4) 若$M(D)$中两列相同, 说明D中这两列对应的边有相同的始点和终点, 即它们是平行边.



$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

有向图的邻接矩阵

- 以下讨论的有向图不加限制, 并且矩阵运算均为普通的乘法和加法.

定义

设有向图$D=\langle V,E\rangle$, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $E=|m|$. 令$a_{ij}^{(1)}$为顶点v_i邻接到顶点v_j的长度为1的通路数,即v_i与v_j相邻, 称$\left(a_{ij}^{(1)}\right)_{n\times n}$为$D$的邻接矩阵, 记作$A(D)$.

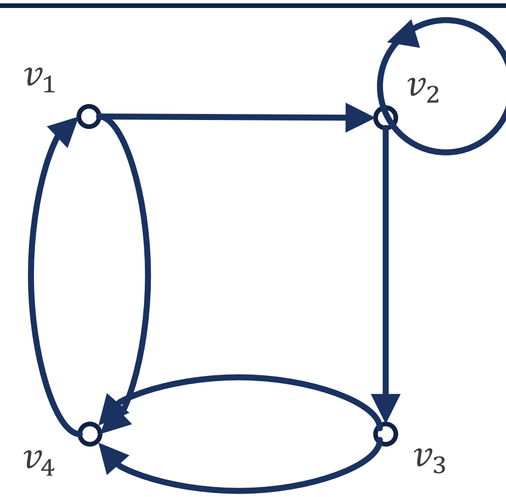
例 7.5 求该有向图D的邻接矩阵.

解

列是顶点

$$A(D)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

行是顶点



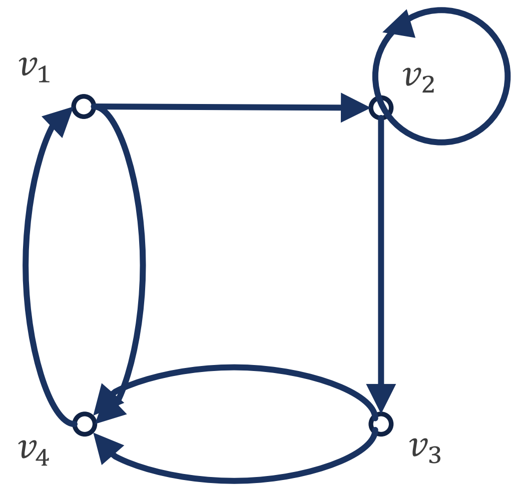
有向图的邻接矩阵

- 邻接矩阵$A(D)$有如下性质:

(1) 第i行元素之和为v_i的出度，即$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^+(v_i)$.

(2) 第j列元素之和为v_j的入度，即$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^-(v_j)$.

(3) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)}$为$D$中长度为1的通路数, 而$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(1)}$为$D$中长度为1的回路数, 即环的个数.



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

有向图的邻接矩阵

- 每条v_i到v_j的长度为2的通路, 中间必须经过一个顶点v_r.
- 如果图G中有通路$v_i v_r v_j$存在, 那么$a_{ir}^{(1)} = a_{rj}^{(1)} = 1$.
- 反之, 图G中不存在通路$v_i v_r v_j$, 那么$a_{ir}^{(1)} = 0$或$a_{rj}^{(1)} = 0$, 即$a_{ir}^{(1)} a_{rj}^{(1)} = 0$.
- 于是从v_i到v_j的长度为2的通路数等于

$$a_{i1} a_{1j} + a_{i2} a_{2j} + \cdots + a_{in} a_{nj} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} a_{rj},$$

这恰好等于矩阵乘法$A \times A$, 即A^2, 中的第i行, 第j列的元素$a_{ij}^{(2)}$.

- 所以, A^2中元素$a_{ij}^{(2)}$表示从v_i到v_j的长度为2的通路数.
- 注意区分邻接矩阵的次幂和关系矩阵的次幂.

有向图的邻接矩阵

- 继续推广, 则有以下定理及其推论:

定理 7.6

设A是n阶有向图的邻接矩阵, $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$为D的顶点集, 则$A^l(l\geq 1)$中元素$a_{ij}^{(l)}$为v_i到v_j的长度为l的通路数, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(l)}$为$D$中长度为$l$的通路总数, 其中$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^{(l)}$为$D$中长度为$l$的回路数.

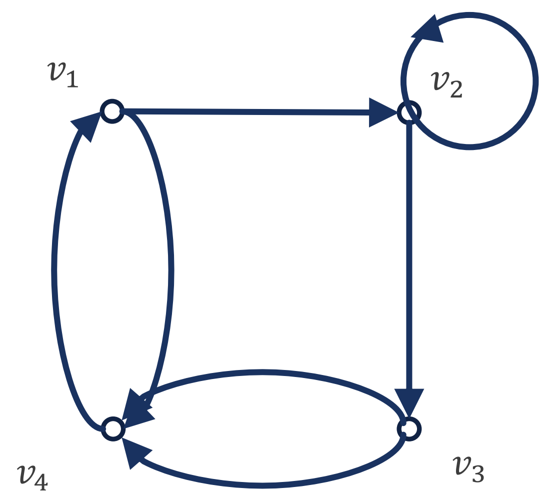
推论

设$B_l=A+A^2+\cdots+A^l\ (l\geq 1)$, 则$B_l$中元素$b_{ij}^{(l)}$为$D$中$v_i$到$v_j$的长度小于等于$l$的通路数, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^{(l)}$为$D$中长度小于等于$l$的通路总数, 其中$\sum_{i=1}^{n}b_{ii}^{(l)}$为$D$中长度小于等于$l$的回路数.

- 按照通路和回路的定义, 只要顶点或边的排列顺序不同就认为是**不同的通路和回路**.

课堂练习

假设从不同顶点出发的回路是不同的，那么该有向图中共有多少条长度为4的回路？



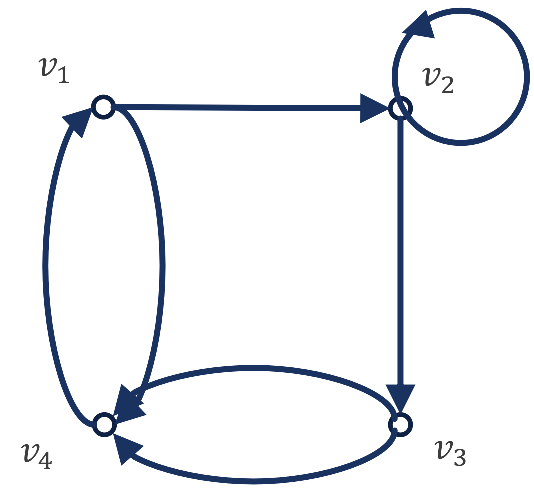
有向图的邻接矩阵

例 计算该图的邻接矩阵的各次幂

解

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&2\\1&0&0&0\end{bmatrix},A^2=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&2\\2&0&0&0\\0&1&0&1\end{bmatrix},$$

$$A^3=\begin{bmatrix}0&2&1&3\\2&1&1&2\\0&2&0&2\\1&1&1&0\end{bmatrix},A^4=\begin{bmatrix}3&2&2&2\\2&3&1&4\\2&2&2&0\\0&2&1&3\end{bmatrix}.$$



- 通过邻接矩阵，可以轻易计算得出，图中长度为4的通路共有$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}a_{ij}^{(4)}=31$条，其中有$\sum_{i=1}^{4}a_{ii}^{(4)}=11$条是回路.

可达矩阵

- 有时仅关心图中顶点之间是否连通，而不关心顶点之间存在多少条通路和它们的长度.

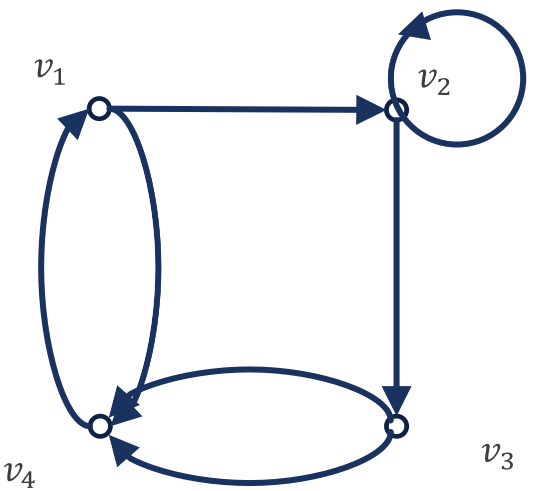
定义

设有向图$D=\langle V,E\rangle, V=\{v_1,v_2,\ldots\ v_n\}$. 令

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{可达}v_j,\\ 0, & \text{否则},\end{cases}\qquad i\neq j.$$

$$p_{ii}=1,\qquad\qquad i=1,2,\ldots,n.$$

称$(p_{ij})_{n\times n}$为D的可达矩阵, 记作$P(D)$, 简记为P.



例 该有向图是强连通图, 因此可达矩阵P中全体元素都是1:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}.$$

可达矩阵

- 可达矩阵有下列性质:

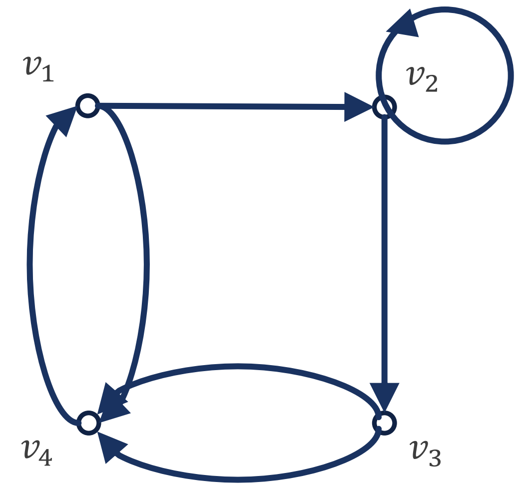
  (1) $\forall v_i \in V(D)$, v_i可达v_i, 所以P的主对角元素p_{ii}全为1.

  (2) 若D是强连通的, 则P的全体元素均为1.

  (3) 由D的邻接矩阵可求D的可达矩阵,

$$P(D) = I + B_{n-1},$$

  由于P中的元素只有0或1，此处加法为布尔加法.



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

课堂练习

在右图所示的有向图中，通过邻接矩阵求:

(1) v_2到v_4长度为3的通路数;

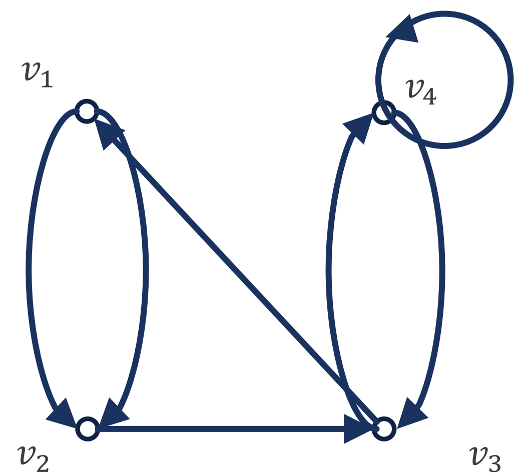
(2) v_2到v_4长度小于等于3的通路数;

(3) v_4到自身长度为3的回路数;

(4) v_4到自身长度小于等于3的回路数;

(5) D中长度为3的通路 (不含回路) 数;

(6) D中长度小于等于3的通路数, 其中有几条是回路?

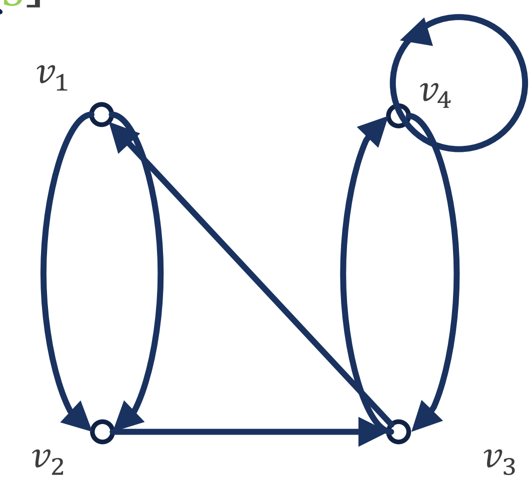


课堂练习

解 先求出D的邻接矩阵A, 及它的前3次幂, 以及B_2 , B_3.

$$A=\begin{bmatrix}0&2&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}, A^2=\begin{bmatrix}0&0&2&0\\1&0&0&1\\0&2&1&1\\1&0&1&2\end{bmatrix}, A^3=\begin{bmatrix}2&0&0&2\\0&2&1&1\\1&0&3&2\\1&2&2&3\end{bmatrix},$$

$$B_2=\begin{bmatrix}0&2&2&0\\1&0&1&1\\1&2&1&2\\1&0&2&3\end{bmatrix}, B_3=\begin{bmatrix}2&2&2&2\\1&2&2&2\\2&2&4&4\\2&2&4&6\end{bmatrix}.$$



(1) v_2到v_4长度为3的通路数: 1.

(2) v_2到v_4长度小于等于3的通路数: 2.

(3) v_4到自身长度为3的回路数: 3.

(4) v_4到自身长度小于等于3的回路数: 6.

(5) D中长度为3的通路 (不含回路) 数: 2+1+1+2+1+1+2+2=12.

(6) D中长度小于等于3的通路数, 其中有14条是回路.

作业

p162

1

2

4

7

9

11

12

15

谢谢

有问题欢迎随时跟我讨论