

离散数学

第九章: 二部图, 欧拉图, 哈密顿图

卢杨

厦门大学信息学院计算机科学与技术系

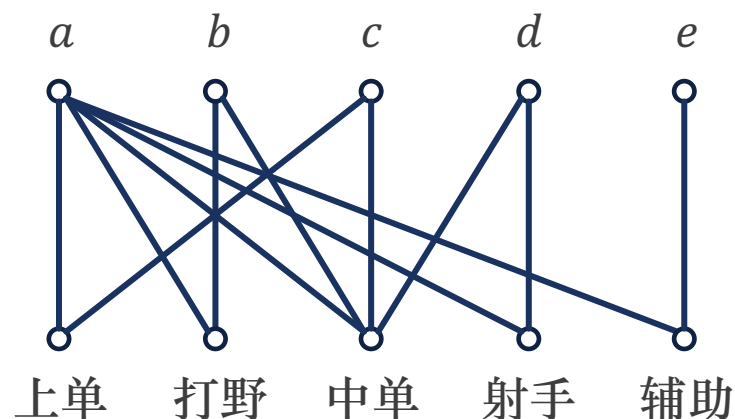
luyang@xmu.edu.cn



9.1 二部图

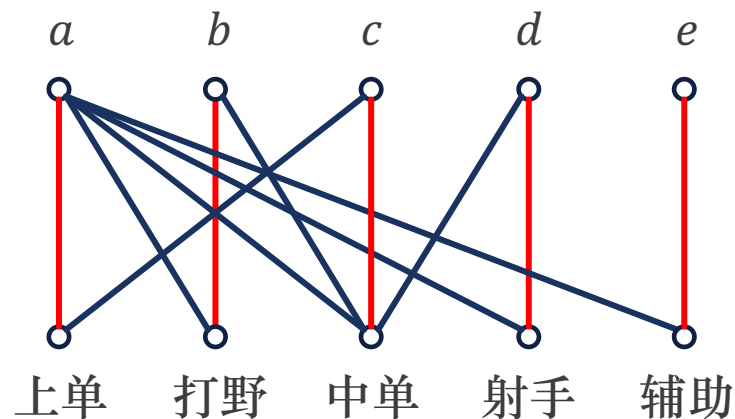
任务分配问题

- 今有5个王者玩家: a, b, c, d, e ; 5个游戏角色位置: 上单, 打野, 中单, 射手, 辅助.
 - 玩家 a 是大神, 啥都会;
 - 玩家 b 只会打野和中单;
 - 玩家 c 只会上单和中单;
 - 玩家 d 只会中单和射手;
 - 玩家 e 是妹子, 只会辅助.
- 问如何分配玩家, 才能使每人都用自己擅长的位置, 且每个位置都有人玩?
- 只要以 $V = \{a, b, c, d, e, \text{上单}, \text{打野}, \text{中单}, \text{射手}, \text{辅助}\}$ 为顶点集, 若某人会玩某位置, 就在某人与某位置之间连边, 得边集 E , 构成无向图 $G = \langle V, E \rangle$.



任务分配问题

- 由图显而易见
 - 让妹子 e 去玩辅助;
 - b, c, d 分别玩打野, 中单, 射手;
 - 大神 a 挑剩下的, 玩上单.
- 在此图中, 玩家之间彼此不相邻, 角色位置之间也彼此不相邻.
- 像这样的图, 称它为二部图. 下面给出它的严格定义. 在本节我们只讨论无向图.



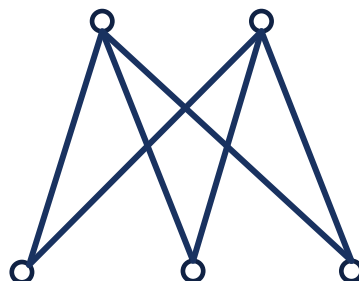
二部图

定义 9.1

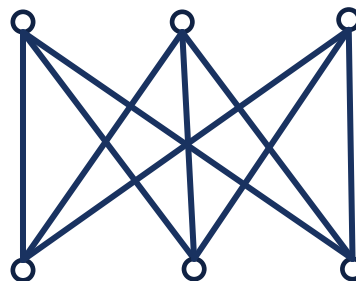
若能将无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 的顶点集划分成两个不相交的子集 V_1 和 V_2 ($V_1 \cap V_2 = \emptyset$), 使得 G 中任何一条边的两个端点都一个属于 V_1 , 另一个属于 V_2 , 则称 G 为**二部图**, 记为 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$, V_1, V_2 称为**互补顶点子集**.

又若 V_1 中任一顶点与 V_2 中任一顶点均有且仅有一条边相关联, 则称 G 为**完全二部图**. 若 $|V_1| = r, |V_2| = s$, 则记完全二部图为 $K_{r,s}$.

- 完全二部图的顶点数为 $n = r + s$, 边数为 $m = rs$.
- 零图是二部图.



$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



二部图

定理 9.1

一个无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 是二部图当且仅当 G 中无奇数长度的回路.

证明 必要性

- 若 G 中无回路, 自然也没有奇数长度的回路, 结论显然成立.
- 若 G 中有回路, 设 $C = v_1 v_2 \dots v_{l-1} v_l v_1$ 为 G 中任意一个回路, 不妨设 $v_1 \in V_1$, 与 v_1 相邻的顶点 v_2 和 v_l 都属于 V_2 , 与 v_2 相邻的顶点 v_1 和 v_3 都属于 V_1 , 以此类推:

v_3, v_5, \dots, v_{l-1} 均属于 V_1 ,

v_2, v_4, \dots, v_l 均属于 V_2 .

于是 l 为偶数, 且回路 C 中的顶点数 l 等于其长度, 因而 C 是长度为偶数的回路.

- 由于 C 的任意性, 所以结论成立.



二部图

证明 充分性

- 若 G 是零图, 结论显然成立. 不妨设 G 是连通图, 否则可对它的每个连通分支进行讨论.
- 要证明 G 是二部图, 需要先在 G 中找到两个互补顶点子集.

- 设 v_0 为 G 中任意一个顶点, 令 V_1 与 V_2 为与 v_0 的距离是偶数和奇数的顶点集合:

$$V_1 = \{v \mid v \in V(G) \wedge d(v_0, v) \text{ 为偶数} \},$$

$$V_2 = \{v \mid v \in V(G) \wedge d(v_0, v) \text{ 为奇数} \},$$

易知 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ 且 $V_1 \cup V_2 = V(G)$.

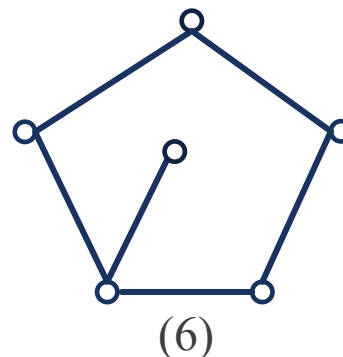
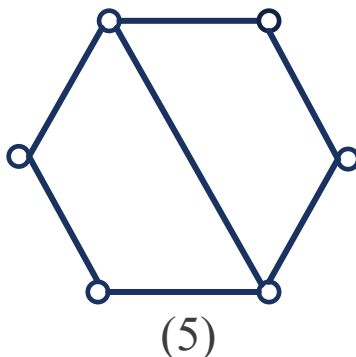
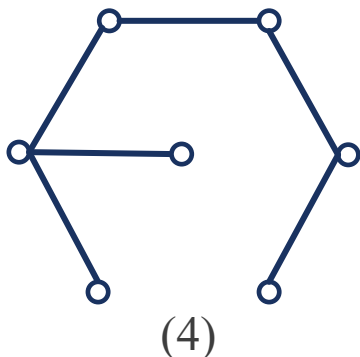
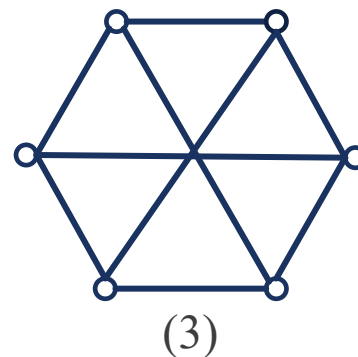
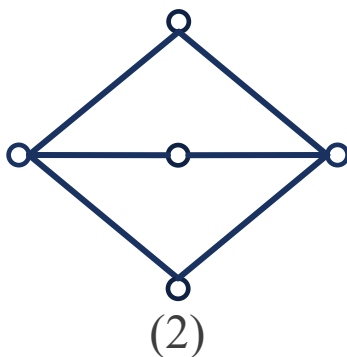
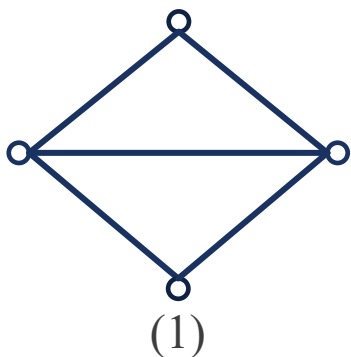
- 然后证明 G 中的任何一条边的两个端点一个属于 V_1 , 一个属于 V_2 , 即 V_1 中任二顶点不相邻, V_2 中的任二顶点也不相邻. 使用反证法.
 - 假设存在 $v_i, v_j \in V_1$ (V_2 同理可证), 且 v_i 与 v_j 相邻, 则有边 $e = (v_i, v_j) \in E$.
 - 设 v_0 到 v_i 和 v_j 的短程线分别为 Γ_1 和 Γ_2 , 则 Γ_1 和 Γ_2 的长度均为偶数.
 - 于是 $\Gamma_1 \cup e \cup \Gamma_2$ 是 G 中长度为奇数的回路, 这与已知矛盾, 所以 V_1 中任二顶点不相邻, V_2 中的任二顶点也不相邻, G 是二部图.



二部图

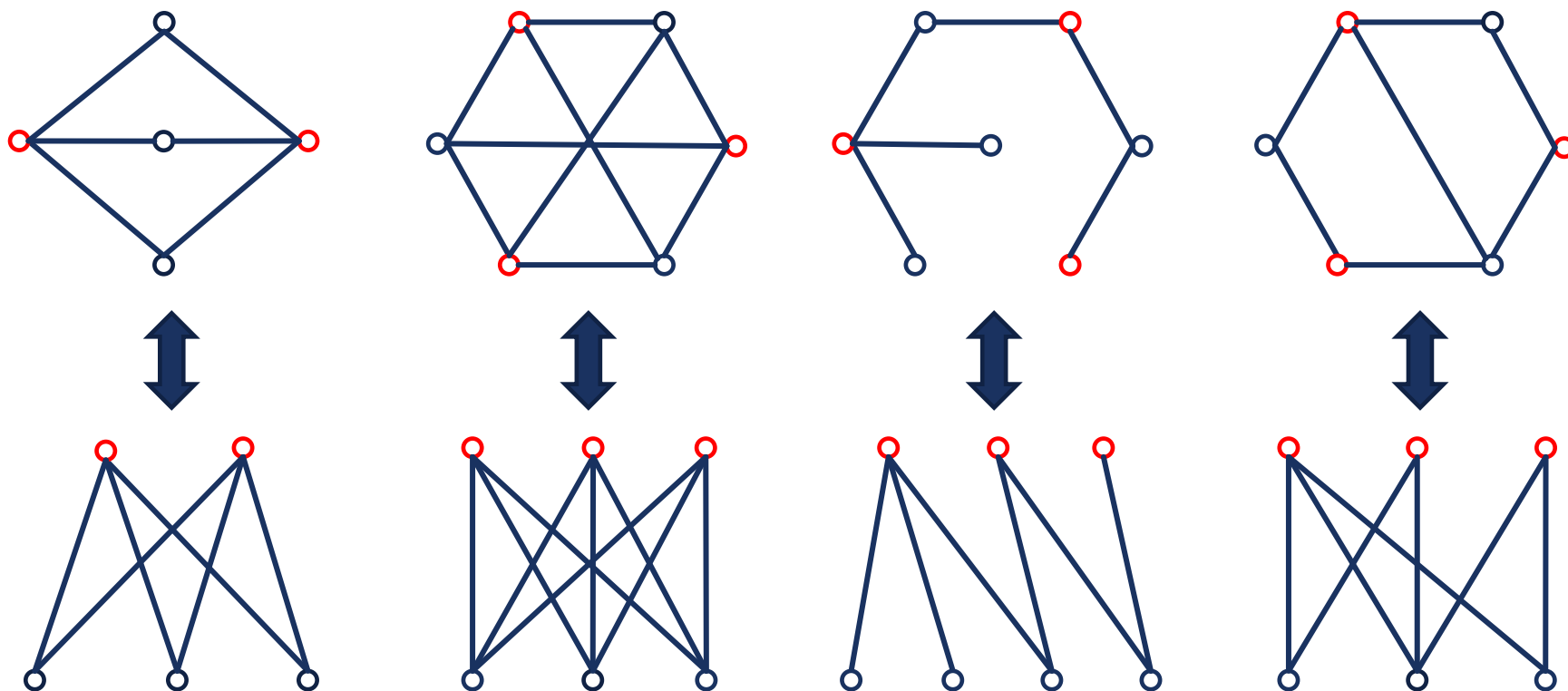
例 在以下图中, 哪些是二部图?

解 (1)和(6)不是二部图, 因为它们中均含有奇数长的回路. 其余的都是二部图.



二部图

- 在画图时, 通常将 V_1 放在图的上方, V_2 放在图的下方:



匹配

- 在二部图中, 均可将 V_1 和 V_2 看成性质不同事物的集合.
- 比如 V_1 看成员工的集合, V_2 看成是任务的集合.
- V_1 中顶点 v_i 与 V_2 中顶点 u_j 相邻当且仅当 v_i 能承担任务 u_j .
- 从二部图上容易看出满足某种要求的任务的分配方案, 这就是二部图的匹配问题.

定义 9.2

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, $M \subseteq E$, 若 M 中的任意两条边均不相邻, 则称 M 为 G 中的一个**匹配**. 若在 M 中再加进任意一条边后不再是匹配, 则称 M 为 G 中的**极大匹配**. 称 G 中边数最多的匹配为**最大匹配**, 其边数称为**边独立数**或**匹配数**, 记作 $\beta_1(G)$, 或简记为 β_1 .

设 M 为 G 中的一个匹配, 与 M 中的边关联的顶点称为 M 的**饱和点**, 否则称为 M 的**非饱和点**. 若 G 中所有顶点都是 M 的饱和点, 则称 M 为 G 中的**完美匹配**.



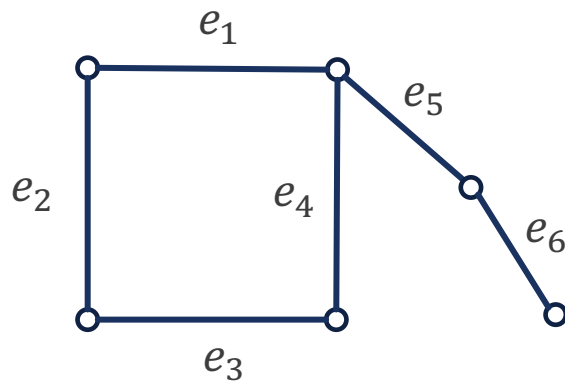
匹配

例 该图中 $E_1 = \{e_3, e_5\}$, $E_2 = \{e_1, e_3, e_6\}$, $E_3 = \{e_2, e_4\}$ 均为 G 中的匹配.

其中 E_1 , E_2 都是极大匹配, E_2 又是最大匹配, 同时也是完美匹配, 其匹配数 $\beta_1 = 3$.

而 E_3 不是极大匹配, 更不是最大匹配.

- 最大匹配必是极大匹配, 但是反之不然.
- 完美匹配必是最大匹配, 但是反之不然.



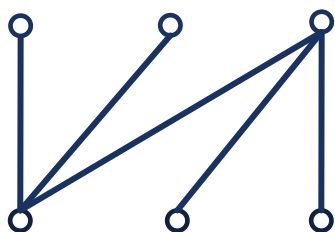
完备匹配

定义 9.3

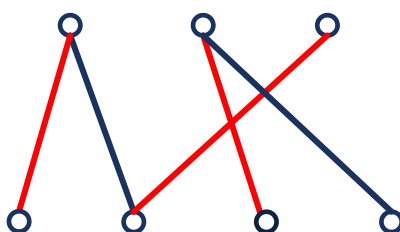
设 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$ 为二部图, 且 $|V_1| \leq |V_2|$, M 为 G 中的一个匹配, 若 $|M| = |V_1|$, 则称 M 为 G 中的**完备匹配**.

■ 当 $|V_1| = |V_2|$ 时, G 中的完备匹配是完美匹配.

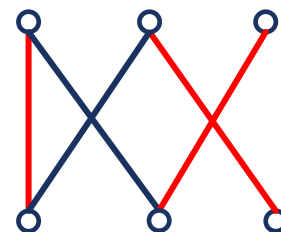
例 (1)中无完备匹配, (2)与(3)中都存在完备匹配, 而且(3)中的完备匹配也是完美匹配.



(1)



(2)



(3)



完备匹配

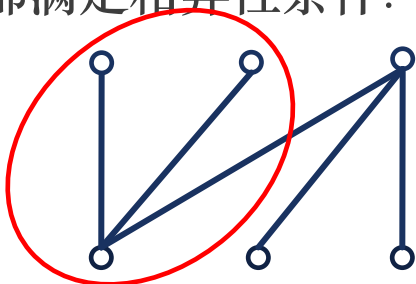
- 英国数学家Hall给出了二部图中存在完备匹配的充要条件，这就是著名的Hall定理, 也称为Hall婚姻定理.

定理 9.2 (Hall定理)

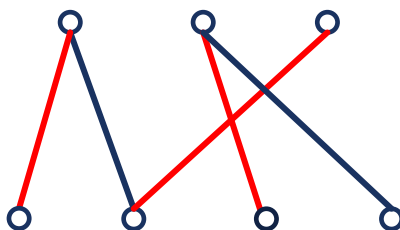
设二部图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$ 中 $|V_1| \leq |V_2|$, G 中存在完备匹配当且仅当 V_1 中任意 k 个顶点至少与 V_2 中的 k 个顶点相邻. $k = 1, 2, \dots, |V_1|$.

- 其中的条件称为相异性条件.

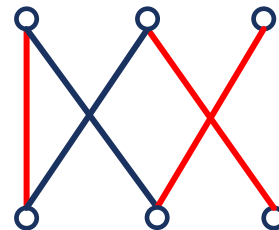
例 (1)中存在两个顶点只与 V_2 中的一个顶点相邻, 因而不存在完备匹配. 而(2), (3)都满足相异性条件.



(1)



(2)



(3)



完备匹配

例 9.1 某中学有3个课外活动小组: 数学组, 计算机组和生物组. 今有赵, 钱, 孙, 李, 周5名学生. 已知:

- (1) 赵, 钱为数学组成员, 赵, 孙, 李为计算机组成员, 孙, 李, 周为生物组成员;
 - (2) 赵为数学组成员, 钱, 孙, 李为计算机组成员, 钱, 孙, 李, 周为生物组成员;
 - (3) 赵为数学组和计算机组成员, 钱, 孙, 李, 周为生物组成员.
- 问在以上3种情况下, 能否分别选出3名不兼职的组长?



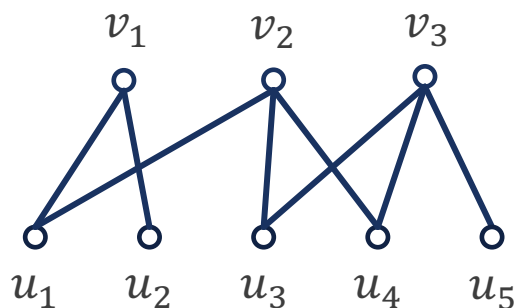
完备匹配

解 用 v_1, v_2, v_3 分别表示数学组, 计算机组和生物组. 用 u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 分别表示赵, 钱, 孙, 李, 周. 若 u_i 是 v_j 成员, 就在 u_i 与 v_j 之间连边. 每种情况都对应一个二部图. 每种情况下能否选出不兼职组长, 就看它们所对应的二部图中是否存在完备匹配.

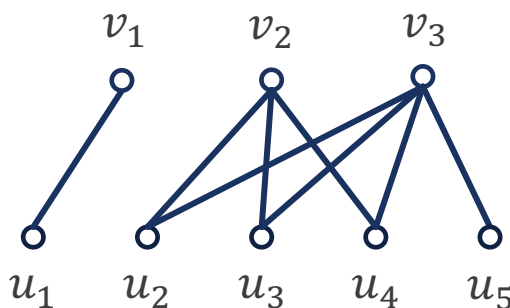
(1) 满足相异性条件, 因而选出3位不兼职的组长, 而且有多种方案.

(2) 也满足相异性条件, 因而也能选出3位不兼职的组长, 且也有不同的方案, 不过数学组组长必由赵担任.

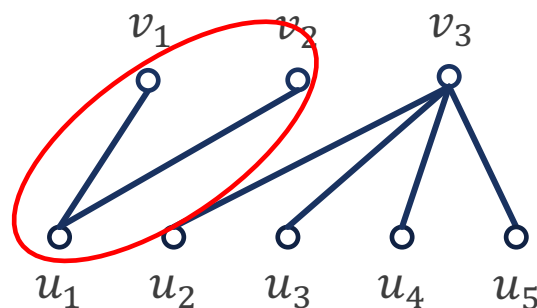
(3) 就不同, 它不满足相异性条件, 不存在完备匹配.



(1)



(2)



(3)



课堂练习

7名计算机系毕业生 A, B, C, D, E, F, G 在寻找工作准备当码农迎接996福报, 某大厂公开招聘岗位有前端 a , 运维 c , 算法 e , 后台 p , 产品 r , 设计 s 和架构 t , 每个学生申请的岗位如下:

$A: c, e;$ $B: a, c, p, s, t;$ $C: c, r;$ $D: c, e, r;$

$E: a, e, p, s;$ $F: e, r;$ $G: p, r, s, t.$

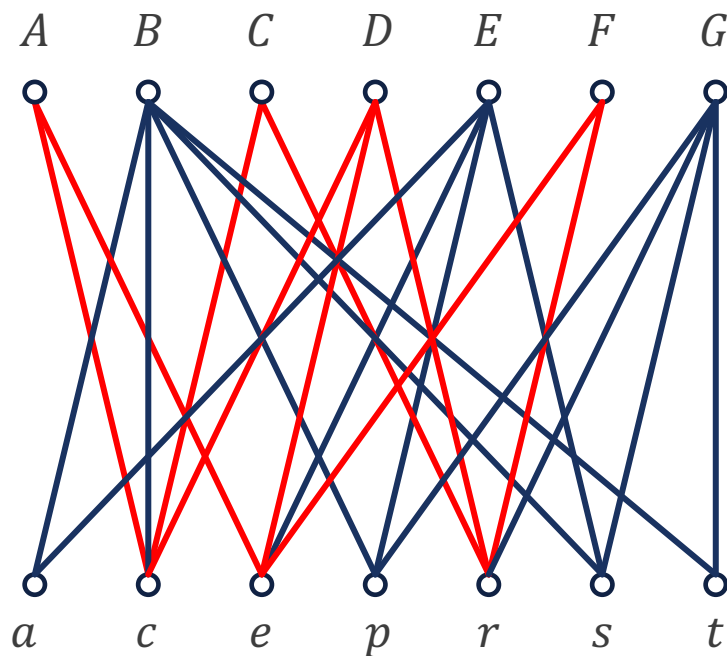
如果每个岗位只招一个人, 每个学生是否都能得到其所申请的岗位?



课堂练习

解 建立二部图模型 G ，其中部集 $V_1 = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ 为学生集合，另一部集 $V_2 = \{a, c, e, p, r, s, t\}$ 为岗位集合，若 u 申请了岗位 w ，则顶点 u 邻接于顶点 w 。

答案是不可能。由于 A, C, D, F 仅仅申请了 c, e, r 这3个岗位集合的子集，不满足相异性条件。

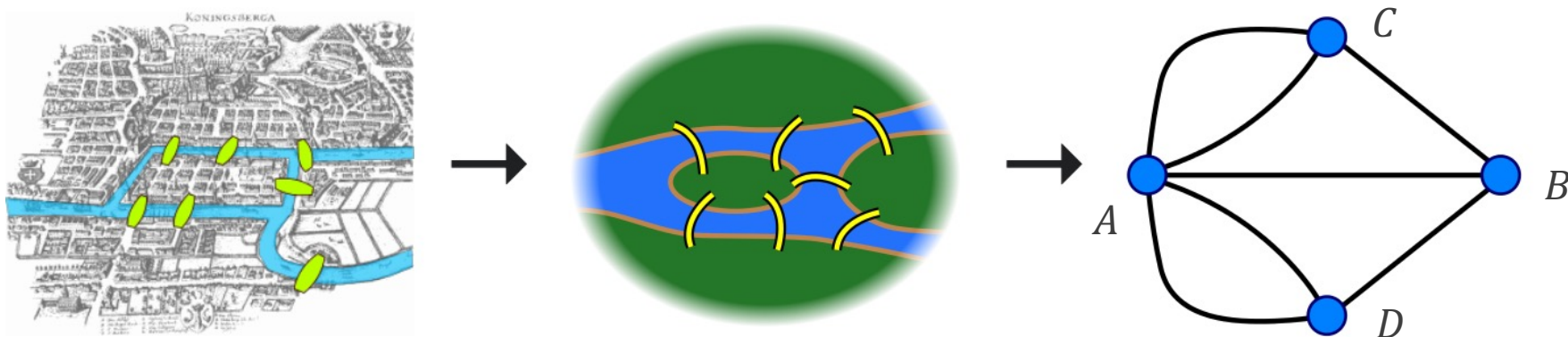




9.2 欧拉图

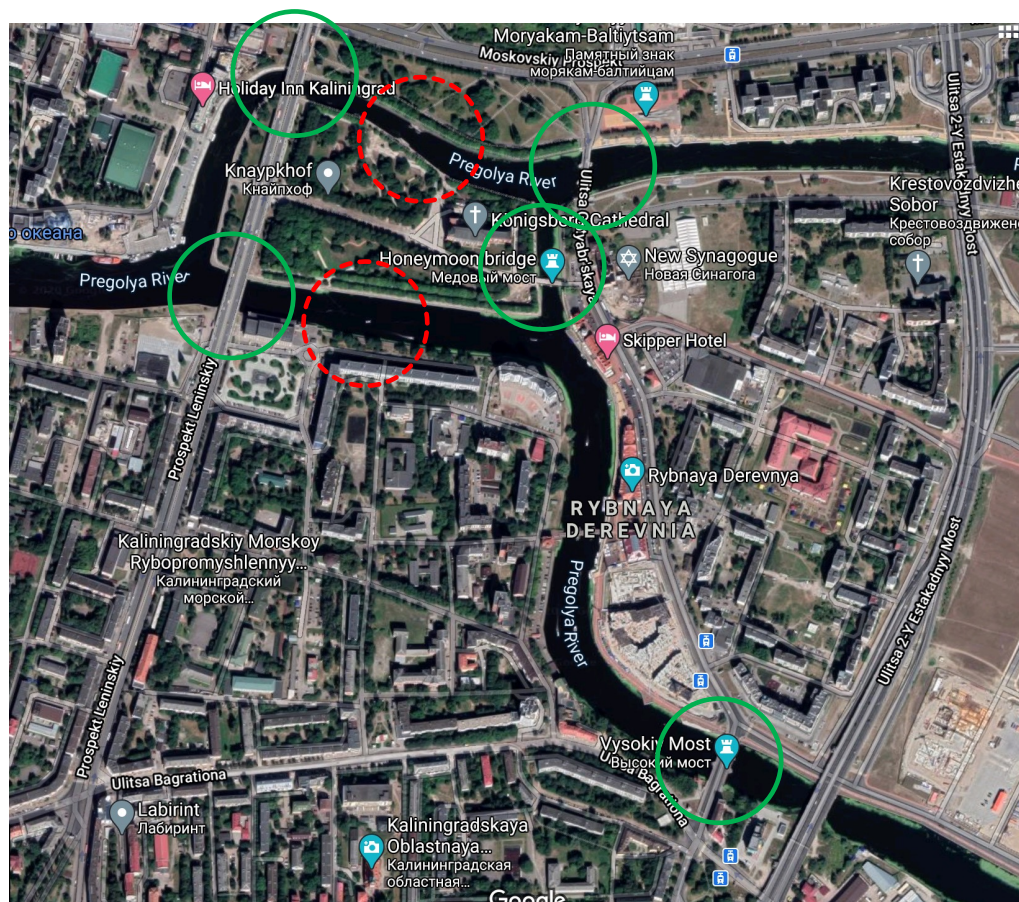
哥尼斯堡七桥问题

- **哥尼斯堡城七桥问题**: 哥尼斯堡城中有一条横贯全市的普雷格尔河, 河中有两个岛屿, 两岸与岛屿由七座桥连接. 一个散步者怎样能不重复地走完七座桥?
- 欧拉把四块陆地设想为四个顶点, 分别用 A, B, C, D 表示, 而将桥画成相应的边. 于是问题转化为该图中是否存在经过每条边一次且仅一次的回路.
- 欧拉经过研究, 终于找到解决这类问题的一个简便原则, 可以鉴别一个图(包括多重图)能否一笔画, 并对七桥问题给出了否定的结论.



哥尼斯堡七桥问题

- 七桥问题的发源地当时（1736年）是东普鲁士哥尼斯堡，如今是俄罗斯加里宁格勒州.
- 非常遗憾，在二战期间两座桥被炸毁。如今只剩下五座桥.



欧拉图

定义 9.4

设 $G = \langle V, E \rangle$ 是连通图 (无向图和有向图),

- (1) G 中经过每条边一次并且仅一次的通路称为欧拉通路.
- (2) G 中经过每条边一次并且仅一次的回路称为欧拉回路.
- (3) 具有欧拉回路的图称为欧拉图.

平凡图为欧拉图.

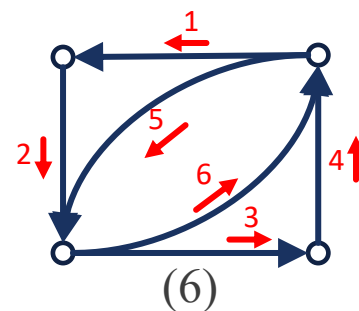
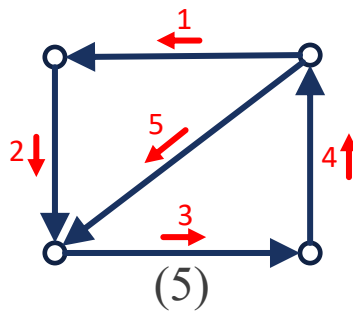
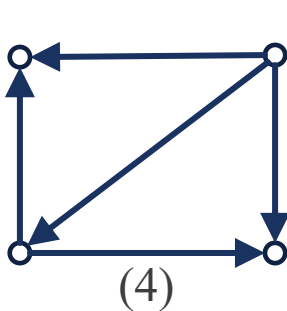
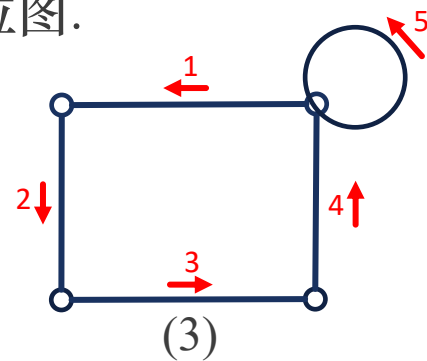
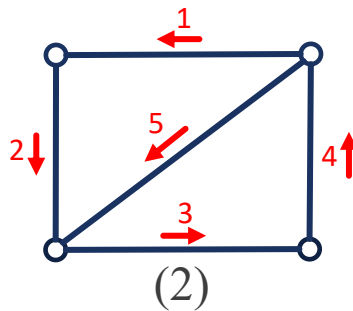
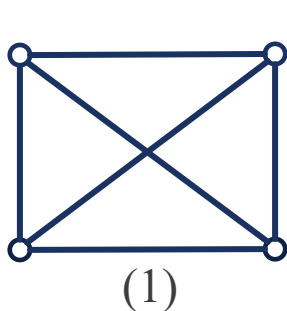
- 只有欧拉通路没有欧拉回路的图不是欧拉图.
- 定义包含多重图在内, 即欧拉回路中允许平行边出现.
- 欧拉通路是经过所有边的简单通路, 欧拉回路是经过所有边的简单回路.
 - 简单通路和简单回路意味着可以经过相同的顶点.



欧拉图

例 以下哪些图有欧拉通路或者有欧拉回路呢？

- (1)和(4)既无欧拉回路, 也无欧拉通路.
- (2)和(5)只有欧拉通路, 没有欧拉回路.
- (3)和(6)均存在欧拉回路, 所以只有它们才是欧拉图.



欧拉图

定理9.3

设 G 为无向图,

- (1) G 是欧拉图当且仅当 G 是连通的且不存在度数为奇数的顶点.
- (2) G 有欧拉通路, 但无欧拉回路, 当且仅当 G 是连通的且恰好有两个顶点的度数是奇数.

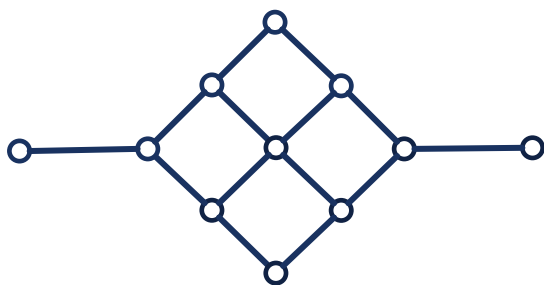
- 定理的必要性是显然的.
 - 当 L 是 G 的一条欧拉回路时, L 每次经过一个顶点时都是一进一出, 顶点获得2度. 并且所有的顶点和边都在回路上, 因此所有顶点的度数都是2的倍数即偶数.
 - 当 L 是 G 的一条欧拉通路 (非欧拉回路) 时, 同理 L 上除两个端点外的顶点的度数都是偶数, 而只有两个端点的度数是奇数.
- 现在再来看哥尼斯堡七桥问题, 4个顶点的度数都是奇数, 即不存在欧拉通路, 更不存在欧拉回路.



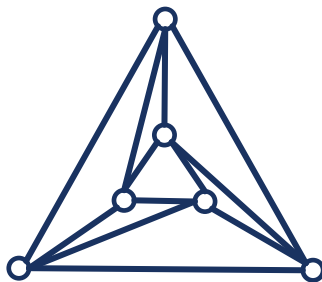
欧拉图

例 通过定理9.3来判断以下哪些图有欧拉通路和欧拉回路？

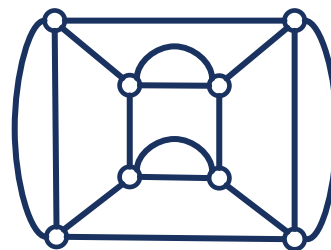
- (4)和(5)各有两个顶点的度数是奇数, 因而它们有欧拉通路, 无欧拉回路.
- (1)和(6)中度数为奇数的顶点个数都超过了2, 因此不存在欧拉通路和欧拉回路.
- (2)和(3)中所有顶点的度数都是偶数, 因此它们是欧拉图.



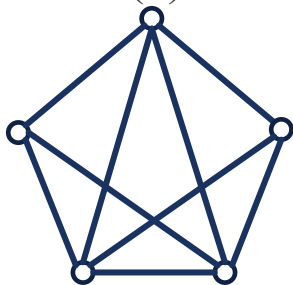
(1)



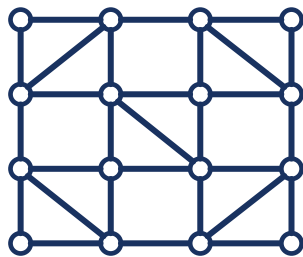
(2)



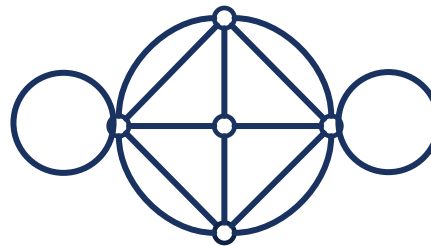
(3)



(4)



(5)



(6)



欧拉图

定理 9.4

设 D 为有向图,

- (1) D 是欧拉图当且仅当 D 是连通的且所有顶点的入度等于出度.
- (2) D 有欧拉通路, 但无欧拉回路, 当且仅当 D 是连通的且一个顶点的入度比出度大1, 另一个顶点的入度比出度小1, 其余顶点的入度均等于出度.

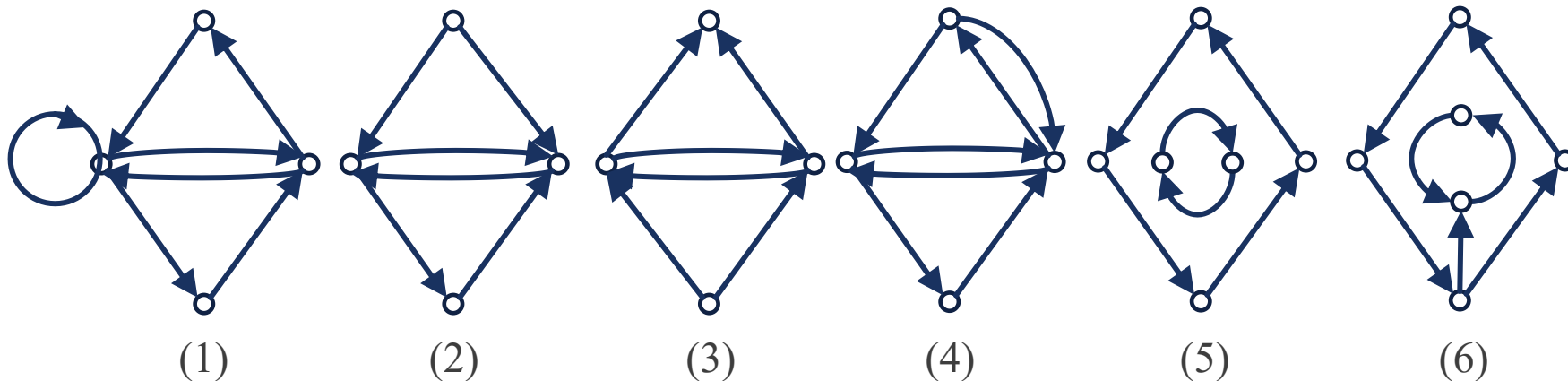
定理的必要性与无向图类似, 是显然的.



欧拉图

例 通过定理9.4来判断以下哪些图有欧拉通路和欧拉回路?

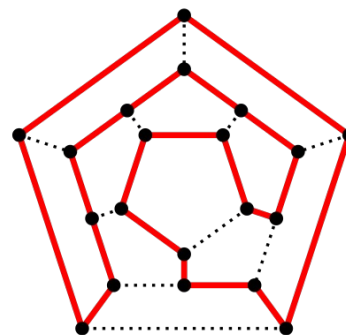
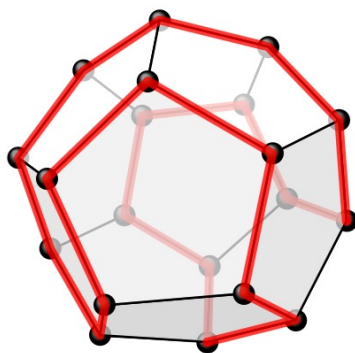
- (1)中每个顶点的出度等于入度, 因此是欧拉图.
- (2)和(3)有一个出度2入度0的顶点, 因此它们都不存在欧拉通路.
- (4)中存在一个出度2入度1的顶点, 和一个入度3出度2的顶点; (6)中存在一个出度2入度1的顶点, 和一个入度2出度1的顶点. (4)和(6)的其他顶点出度和入度都相等, 因此它们存在欧拉通路.
- (5)不是连通图.



9.3 哈密顿图

周游世界问题

- 1859年爱尔兰数学家哈密顿设计了一个在正十二面体上的游戏：周游世界问题。
- 他将20个顶点看作20个城市，每一条棱看作一条公路，要求从一个城市出发，沿着公路经过每一个城市一次且仅一次，最后回到出发的城市。
- 可以把正十二面体的一个面撕开，平摊到平面上成为一个图，问题就变成在该图中找一条经过每一个顶点恰好一次的回路，这样的回路现在称作哈密顿回路。



哈密顿图

定义 9.5

设 $G = \langle V, E \rangle$ 是连通图 (无向图和有向图),

- (1) G 中经过每个顶点一次并且仅一次的通路称为**哈密顿通路**.
- (2) G 中经过每个顶点一次并且仅一次的回路称为**哈密顿回路**.
- (3) 具有哈密顿回路的图称为**哈密顿图**.

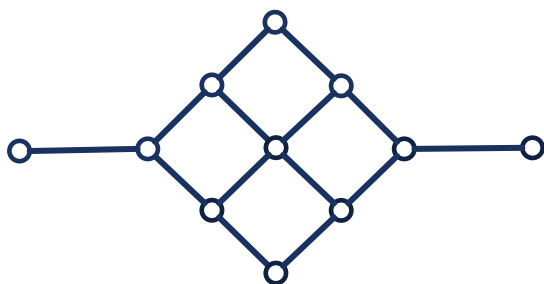
- 欧拉回路和哈密顿回路的区别在于:
 - 欧拉回路经过所有的**边一次**, 哈密顿回路经过所有的**顶点一次**.
 - 欧拉回路是**简单回路**, 哈密顿回路是**初级回路**.
- 欧拉图和哈密顿图之间**几乎没有什么联系**, 有的图只是欧拉图, 有的图只是哈密顿图, 有的图既是欧拉图又是哈密顿图, 有的图则两者皆不是.



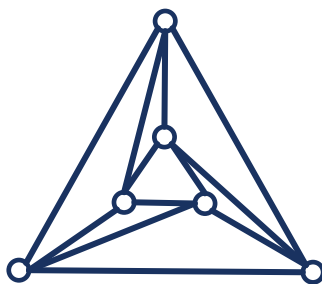
哈密顿图

例 以下哪些图有哈密顿通路和哈密顿回路？

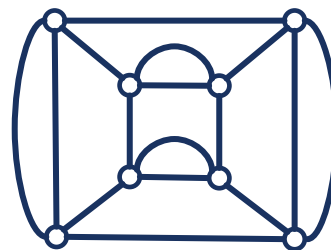
- 只有(1)没有哈密顿回路，它只有哈密顿通路。
- 其余的图均有哈密顿回路。



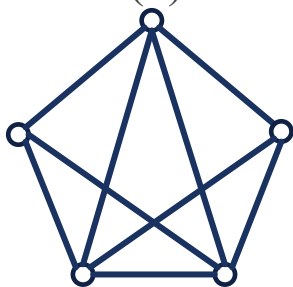
(1)



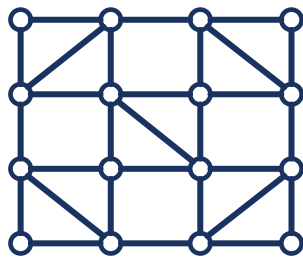
(2)



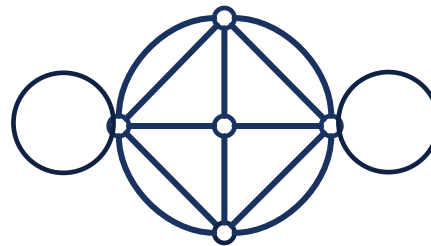
(3)



(4)



(5)



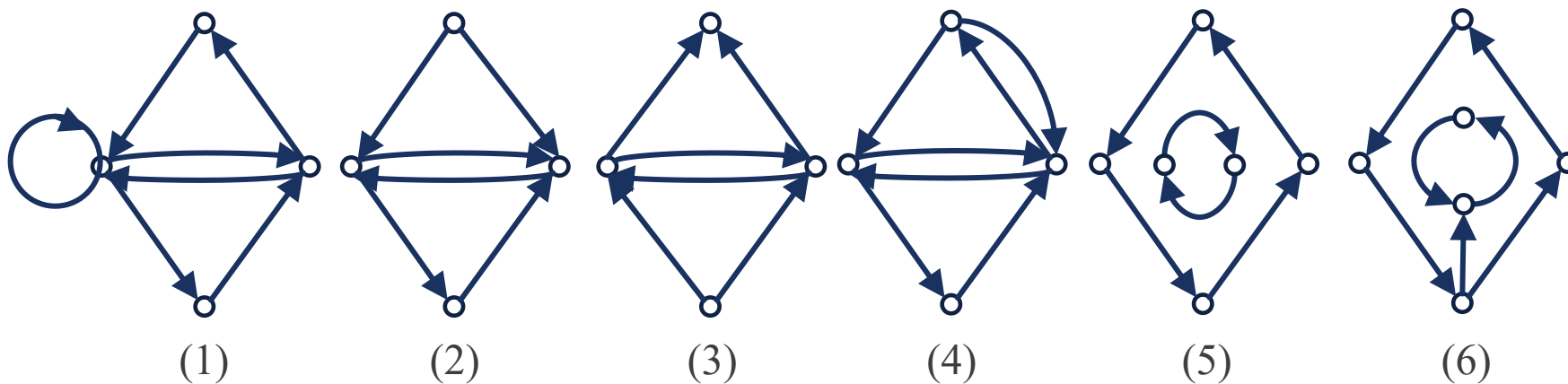
(6)



哈密顿图

例 以下哪些图有哈密顿通路和哈密顿回路？

- 除了(5)以外, 都有哈密顿通路.
- (2), (3)和(6)只有哈密顿通路, 没有哈密顿回路.
- (1)和(4)有哈密顿回路, 它们是哈密顿图.



哈密顿图

- 虽然欧拉回路和哈密顿回路都是遍历图，定义看起来相似，但两者判定的**困难程度却天差地别**。
- 欧拉图已“彻底和漂亮”地解决了（给出了判定的充要条件）。到目前为止，还**没有找到**一个**简明可行的条件**作为一个图是否为哈密顿图的简单充要条件。确定图有哈密顿回路是非常困难的。
- 判断一个图是否是哈密顿图是一个NP完全问题。它是可解的，我们可以通过回溯算法来解决该问题。
- 目前，只能找到一些判定哈密顿回路存在性的充分条件和必要条件。**尚未找到判定的充要条件**。



哈密顿图

定理 9.5 (哈密顿图的必要条件)

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 是哈密顿图, V_1 是 V 的任意非空真子集, 则

$$p(G - V_1) \leq |V_1|.$$

证明 因为 G 是哈密顿图, 所以 G 中存在哈密顿回路.

设 C 为 G 中任意一条哈密顿回路, 当 V_1 中顶点在 C 中均不相邻时, $p(C - V_1) = |V_1|$ 最大. 其余情况下均有 $p(C - V_1) < |V_1|$, 所以有

$$p(C - V_1) \leq |V_1|.$$

而 $C - V_1$ 是 $G - V_1$ 的子图, 因此 $G - V_1$ 的连通分支数不会超过 $C - V_1$ 的连通分支数, 故

$$p(G - V_1) \leq p(C - V_1) \leq |V_1|.$$

该定理给出的条件是**必要的**. 因此对一个图来说, 如果不满足这个必要条件, 它一定不是哈密顿图. 但是满足这个条件的图不一定是哈密顿图.



哈密顿图

推论

有割点的图一定不是哈密顿图.

证明 当 $V_1 = \{v\}$ 为割点时, $p(G - \{v\}) > |\{v\}| = 1$, 与定理9.5的必要性矛盾.

推论

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 有哈密顿通路, V_1 是 V 的任意非空真子集, 则

$$p(G - V_1) \leq |V_1| + 1.$$

证明 设 P 是 G 的一条哈密顿通路, 两个端点为 u 和 v . 在 u 和 v 之间加一条边 $e = (u, v)$, 所得到的图记作 G' , 显然 G' 是哈密顿图.

由定理9.5可得

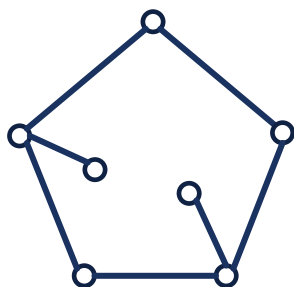
$$p(G - V_1) = p(G' - V_1 - e) \leq p(G' - V_1) + 1 \leq |V_1| + 1.$$



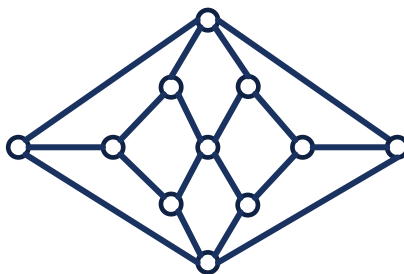
哈密顿图

例 以下哪些图有哈密顿通路和哈密顿回路？

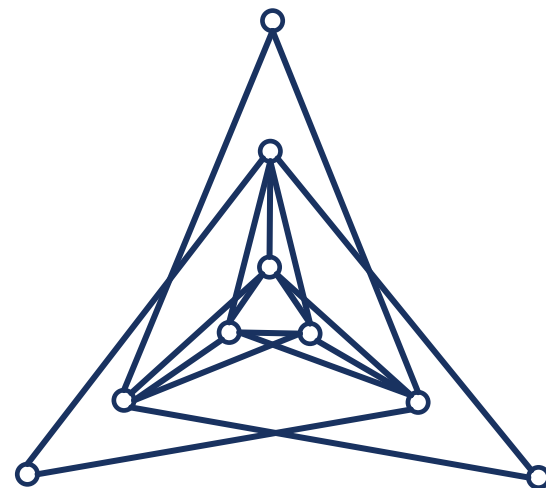
- (1)中存在割点，必然不是哈密顿图，将两个割点的集合删去后，得到4个连通分支，所以也不存在哈密顿通路。
- (2)中删除这5个顶点的集合后得到6个连通分支，所以也不是哈密顿图，但是存在哈密顿通路。
- (3)中删除这3个顶点的集合后得到4个连通分支，所以也不是哈密顿图，但是存在哈密顿通路。



(1)



(2)



(3)



哈密顿图

定理 9.6 (哈密顿图的充分条件)

设 G 是 $n(n \geq 3)$ 阶无向简单图, 若对于 G 中任意不相邻的顶点 u, v , 均有

$$d(u) + d(v) \geq n - 1,$$

则 G 中存在哈密顿通路. 若

$$d(u) + d(v) \geq n,$$

则 G 为哈密顿图.

推论 设 G 是 $n(n \geq 3)$ 阶无向简单图, $\delta(D) \geq n/2$, 则 G 为哈密顿图.

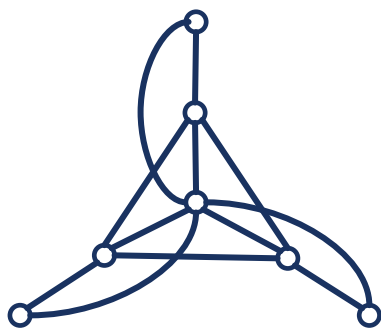
- 由推论可知, 对于完全图 K_n , 当 $n \geq 3$ 时为哈密顿图; 完全二部图 $K_{r,s}$, 当 $r = s \geq 2$ 时为哈密顿图.



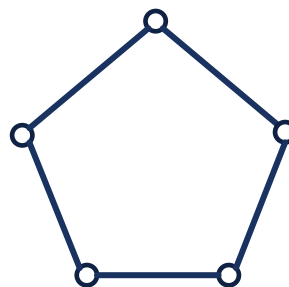
哈密顿图

例

- (1) 满足定理9.5中的必要性条件“ V_1 是 V 的任意非空真子集, 则 $p(G - V_1) \leq |V_1|$ ”, 但不是哈密顿图.
- (2) 是哈密顿图, 但是不满足定理9.6的推论1中的充分性条件“对于 G 中任意不相邻的顶点 u, v , 均有 $d(u) + d(v) \geq n$ ”.



(1)



(2)



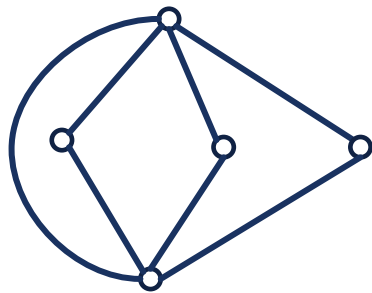
小结

- 判断二部图: 是否有奇数长度回路.
- 判断二部图的完备匹配: 是否满足相异性条件.
- 判断欧拉图: 判断是否存在度数为奇数的顶点.
- 判断哈密顿图:
 - 必要条件: 若 $p(G - V_1) > |V_1|$, 一定不是;
 - 充分条件: 若 $d(u) + d(v) \geq n$, 一定是.

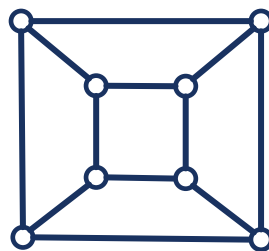


课堂练习

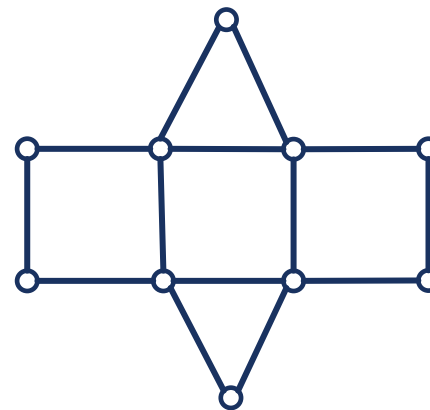
以下哪些图是二部图, 欧拉图, 哈密顿图?



(1)



(2)



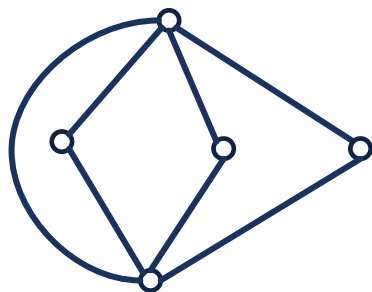
(3)



课堂练习

以下哪些图是二部图, 欧拉图, 哈密顿图?

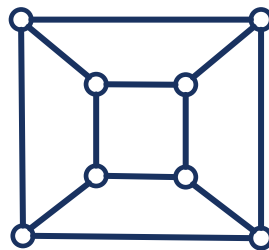
- (1)(3)中存在奇数长度的回路, 因此不是二部图. (2)是二部图.
- (1)(3)连通且无顶点的度数是奇数, 因此都是欧拉图. (2)存在度数是奇数的顶点, 因此不是欧拉图.
- (2)(3)中都可以找到哈密顿回路, 因此他们是哈密顿图. (1)中存在删除2个顶点得到3个连通分支, 因此不是哈密顿图.



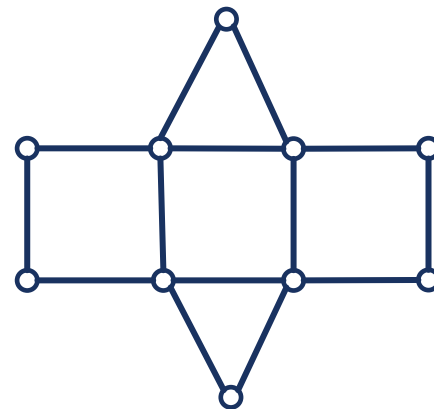
(1)



廈門大學信息學院 (特色化示范性软件学院)
School of Informatics Xiamen University (National Characteristic Demonstration Software School)



(2)



(3)



廈門大學 计算机科学与技术系
Department of Computer Science and Technology, Xiamen University

作业

本章作业和下章一起做



谢谢

有问题欢迎随时跟我讨论

