Seite 109

Aufgabe 4

> Bestimmen Sie alle ganzrationalen Funktionen vom Grad 3, deren Graph durch die Punkte geht.

4a)

> $A(0 \mid 1);\ B(1 \mid 0);\ C(-1 \mid 4);\ D(2 \mid -5)$

Die Bedingungen folgen für die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$:

- $f(0) = 1$
- $f(1) = 0$
- $f(-1) = 4$
- $f(2) = -5$

> Es liegen genug Bedingungen vor

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \\ \text{IV:} \end{array} \left| \begin{array}{rcr} a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d & = & 1 \\ a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d & = & 0 \\ a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d & = & 4 \\ a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d & = & -5 \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \\ \text{IV:} \end{array} \left| \begin{array}{rcr} d & = & 1 \\ a + b + c + d & = & 0 \\ -a + b - c + d & = & 4 \\ 8a + 4b + 2c + d & = & -5 \end{array} \right|$$

$$\text{I:} \quad d = 1$$

$$\begin{array}{r} \text{II:} \\ \text{III:} \\ \text{IV:} \end{array} \left| \begin{array}{rcr} a + b + c & = & -1 \\ -a + b - c & = & 3 \\ 8a + 4b + 2c & = & -6 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \mid \text{III} + \text{II} \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{II:} \\ \text{III:} \\ \text{IV:} \end{array} \left| \begin{array}{rcr} a + b + c & = & -1 \\ 2b & = & 2 \\ 8a + 4b + 2c & = & -6 \end{array} \right|$$

$$\text{III:} \quad 2b = 2 \quad \Rightarrow \quad b = 1$$

$$\begin{array}{r} \text{II:} \\ \text{IV:} \end{array} \left| \begin{array}{rcr} a + c & = & -2 \\ 8a + 2c & = & -10 \end{array} \right| \begin{array}{l} \mid \cdot(-2) \\ \mid \text{II} + \text{IV} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{II:} \\ \text{IV:} \end{array} \left| \begin{array}{rcr} a + c & = & -2 \\ 6a & = & -6 \end{array} \right|$$

$$\text{IV:} \quad 6a = -6 \quad \Rightarrow \quad a = -1$$

$$\text{II:} \quad a + c = -2 \quad \Rightarrow \quad c = -1$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = -1$
- $b = 1$
- $c = -1$
- $d = 1$

  Die Funktion f lautet $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$

4b)

> $A(0 \mid -1);\ B(1 \mid 1);\ C(-1 \mid -7);\ D(2 \mid 17)$

Die Bedingungen folgen für die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$:

- $f(0) = -1$
- $f(1) = 1$
- $f(-1) = -7$
- $f(2) = 17$

> Es liegen genug Bedingungen vor

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d & = & -1 \\
\text{II:} & a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d & = & 1 \\
\text{III:} & a\cdot(-1)^3+b\cdot(-1)^2+c\cdot(-1)+d & = & -7 \\
\text{IV:} & a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c\cdot 2+d & = & 17
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & d & = & -1 \\
\text{II:} & a+b+c+d & = & 1 \\
\text{III:} & -a+b-c+d & = & -7 \\
\text{IV:} & 8a+4b+2c+d & = & 17
\end{array}$$

$$\text{I:}\quad d=-1$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{II:} & a+b+c & = & 2 & \\
\text{III:} & -a+b-c & = & -6 & \mid \text{III}+\text{II} \\
\text{IV:} & 8a+4b+2c & = & 18 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{II:} & a+b+c & = & 2 \\
\text{III:} & 2b & = & -4 \\
\text{IV:} & 8a+4b+2c & = & 18
\end{array}$$

$$\text{III:}\quad 2b=-4 \quad\Rightarrow\quad b=-2$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{II:} & a+c & = & 4 & \mid \text{II}+\text{IV} \\
\text{IV:} & 8a+2c & = & 26 & \mid \cdot(-0,5)
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{II:} & -3a & = & -9 \\
\text{IV:} & 8a+2c & = & 26
\end{array}$$

$$\text{II:}\quad -3a=-9 \quad\Rightarrow\quad a=3$$

$$\text{IV:}\quad 8a+2c=26 \quad\Rightarrow\quad c=1$$

Somit lautet die Lösung:

- $a=3$
- $b=-2$
- $c=1$
- $d=-1$

  Die Funktion f lautet $f(x)=3x^3-2x^2+x-1$

4c)

> $A(1\mid 0);\ B(0\mid 2);\ C(-2\mid 2)$

Die Bedingungen folgen für die Funktion $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$:

- $f(1)=0$
- $f(0)=2$
- $f(-2)=2$

  > Es liegen nicht genug Bedingungen vor:
  > Scharfunktion von f mit einem Parameter

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d & = & 0 \\
\text{II:} & a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d & = & 2 \\
\text{III:} & a\cdot(-2)^3+b\cdot(-2)^2+c\cdot(-2)+d & = & 2
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & a+b+c+d & = & 0 \\
\text{II:} & d & = & 2 \\
\text{III:} & -8a+4b-2c+d & = & 2
\end{array}$$

$$\text{I:}\quad d=2$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{I:} & a+b+c & = & -2 & \mid \cdot 2 \\
\text{III:} & -8a+4b-2c & = & 0 & \mid \text{III}+\text{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & a+b+c & = & -2 \\
\text{III:} & -6a+6b & = & -4
\end{array}$$

$$\text{III:}\quad -6a+6b=-4 \quad\Rightarrow\quad b=-\frac{2}{3}+a$$

$$\text{I:}\quad a+b+c=-2 \quad\Rightarrow\quad c=-\frac{4}{3}-2a$$

Somit lautet die Lösung:

- $a=a$
- $b=-\frac{2}{3}+a$
- $c=-\frac{4}{3}-2a$
- $d=2$

  Die Funktion f lautet $f_a(x)=ax^3+\left(-\frac{2}{3}+a\right)x^2+\left(-\frac{4}{3}-2a\right)x+2$

4d)

> $A(1\mid 1);\ B(0\mid 1)$

Die Bedingungen folgen für die Funktion $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$:

- $f(1)=1$
- $f(0)=1$

  > Es liegen nicht genug Bedingungen vor:
  > Scharfunktion von f mit zwei Parametern

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{I:} & a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d & = & 1 \\ \text{II:} & a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{I:} & a+b+c+d & = & 1 \\ \text{II:} & d & = & 1 \end{array}$$

$$\text{II:} \quad d=1$$

$$\text{I:} \left| \; a+b+c \quad = \quad 0 \right|$$

$$\text{I:} \quad a+b+c=0 \quad \Rightarrow \quad a=-b-c$$

Somit lautet die Lösung:

- $a=-b-c$
- $b=b$
- $c=c$
- $d=1$

  Die Funktion f lautet $f_{b;c}(x)=(-b-c)x^3+bx^2+c+1$

Aufgabe 5

> Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion vom Grad 3, deren Graph

5a)

> durch $A(2\mid 0)$, $B(-2\mid 4)$ und $A(-4\mid 8)$ geht und einen Tiefpunkt auf der y-Achse hat.

Die Bedingungen folgen für die Funktion $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$:

- $f(2)=0$
- $f(-2)=4$
- $f(-4)=8$
- $f'(0)=0$

  > Es liegen genug Bedingungen vor

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{I:} & a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c\cdot 2+d & = & 0 \\ \text{II:} & a\cdot(-2)^3+b\cdot(-2)^2+c\cdot(-2)+d & = & 4 \\ \text{III:} & a\cdot(-4)^3+b\cdot(-4)^2+c\cdot(-4)+d & = & 8 \\ \text{IV:} & 3a\cdot 0^2+2b\cdot 0+c & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{I:} & 8a+4b+2c+d & = & 0 \\ \text{II:} & -8a+4b-2c+d & = & 4 \\ \text{III:} & -64a+16b-4c+d & = & 8 \\ \text{IV:} & c & = & 0 \end{array}$$

$$\text{I:} \quad c=0$$

$$\begin{array}{r|rcl|l} \text{I:} & 8a+4b+d & = & 0 & \\ \text{II:} & -8a+4b+d & = & 4 & \mid \text{II}+\text{I} \\ \text{III:} & -64a+16b+d & = & 8 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l} \text{I:} & 8a+4b+d & = & 0 & \mid \cdot 8 \\ \text{II:} & 8b+2d & = & 4 & \\ \text{III:} & -64a+16b+d & = & 8 & \quad \mid \text{III}+\text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l} \text{I:} & 8a+4b+d & = & 0 & \\ \text{II:} & 8b+2d & = & 4 & \mid \cdot(-6) \\ \text{III:} & 48b+9d & = & 8 & \quad \mid \text{III}+\text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{I:} & 8a+4b+d & = & 0 \\ \text{II:} & 8b+2d & = & 4 \\ \text{III:} & -3d & = & -16 \end{array}$$

$$\text{III:} \quad -3d=-16 \quad \Rightarrow \quad d=\frac{16}{3}$$

$$\text{II:} \quad 8b+2d=4 \quad \Rightarrow \quad b=-\frac{5}{6}$$

$$\text{I:} \quad 8a+4b+d=0 \quad \Rightarrow \quad a=-\frac{1}{4}$$

Somit lautet die Lösung:

- $a=-\frac{1}{4}$
- $b=-\frac{5}{6}$
- $c=0$
- $d=\frac{16}{3}$

  Die Funktion f lautet $f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{5}{6}x^2+\frac{16}{3}$.

Überprüfung des Extremum bei $x=0$

> Es muss gelten: $f''(0)>0$

$f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{5}{6}x^2+\frac{16}{3}$
$f'(x)=-\frac{3}{4}x^2-\frac{5}{3}x$
$f''(x)=-\frac{3}{2}x-\frac{5}{3}$

$f''(0)=-\frac{5}{3}<0$

> Da $f''(0)$ die Bedingung nicht erfüllt, so stellt f nicht die gesuchte Funktion dar. Es existiert nur eine Lösung des Gleichungssystems, daher kann f nach den Bedingungen nie existieren.

5b)

> durch $A(2\mid 2)$, $B(3\mid 9)$ geht und den Tiefpunkt $T(1\mid 1)$ hat.

Die Bedingungen folgen für die Funktion $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$:

- $f(2)=2$
- $f(3)=9$
- $f(1)=1$
- $f'(1)=0$

  > Es liegen genug Bedingungen vor

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c\cdot 2+d & = & 2 \\
\text{II:} & a\cdot 3^3+b\cdot 3^2+c\cdot 3+d & = & 9 \\
\text{III:} & a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d & = & 1 \\
\text{IV:} & 3a\cdot 1^2+2b\cdot 1+c & = & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & 8a+4b+2c+d & = & 2 \\
\text{II:} & 27a+9b+3c+d & = & 9 \\
\text{III:} & a+b+c+d & = & 1 \\
\text{IV:} & 3a+2b+c & = & 0
\end{array}$$

Dieses LGS werde ich anschließend umsortieren

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{I:} & a+b+c+d & = & 1 & \mid\cdot(-8) \\
\text{II:} & 8a+4b+2c+d & = & 2 & \quad\mid \text{II}+\text{I} \\
\text{III:} & 27a+9b+3c+d & = & 9 & \\
\text{IV:} & 3a+2b+c & = & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{I:} & a+b+c+d & = & 1 & \mid\cdot(-27) \\
\text{II:} & -4b-6c-7d & = & -6 & \\
\text{III:} & 27a+9b+3c+d & = & 9 & \quad\mid \text{III}+\text{I} \\
\text{IV:} & 3a+2b+c & = & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{I:} & a+b+c+d & = & 1 & \mid\cdot(-3) \\
\text{II:} & -4b-6c-7d & = & -6 & \\
\text{III:} & -18b-24c-26d & = & -18 & \\
\text{IV:} & 3a+2b+c & = & 0 & \quad\mid \text{IV}+\text{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{I:} & a+b+c+d & = & 1 & \\
\text{II:} & -4b-6c-7d & = & -6 & \mid\cdot(-1) \\
\text{III:} & -18b-24c-26d & = & -18 & \mid\cdot(-1) \\
\text{IV:} & -b-2c-3d & = & -3 & \mid\cdot(-1)
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{I:} & a+b+c+d & = & 1 & \\
\text{II:} & 4b+6c+7d & = & 6 & \mid\cdot\frac{18}{4} \\
\text{III:} & 18b+24c+26d & = & 18 & \quad\mid \text{III}+\text{II} \\
\text{IV:} & b+2c+3d & = & 3 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{I:} & a+b+c+d & = & 1 & \\
\text{II:} & 4b+6c+7d & = & 6 & \mid\cdot\frac{-1}{4} \\
\text{III:} & -3c-\frac{11}{2}d & = & -9 & \\
\text{IV:} & b+2c+3d & = & 3 & \quad\mid \text{IV}+\text{II}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{I:} & a+b+c+d & = & 1 & \\
\text{II:} & 4b+6c+7d & = & 6 & \\
\text{III:} & -3c-\frac{11}{2}d & = & -9 & \mid\cdot\frac{1}{6} \\
\text{IV:} & \frac{1}{2}c+\frac{5}{4}d & = & \frac{3}{2} & \quad\mid \text{IV}+\text{III}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & a+b+c+d & = & 1 \\
\text{II:} & 4b+6c+7d & = & 6 \\
\text{III:} & -3c-\frac{11}{2}d & = & -9 \\
\text{IV:} & \frac{1}{3}d & = & 0
\end{array}$$

$$\text{IV:}\quad \frac{1}{3}d=0 \quad\Rightarrow\quad d=0$$

$$\text{III:}\quad -3c-\frac{11}{2}d=-9 \quad\Rightarrow\quad c=3$$

$$\text{II:}\quad 4b+6c+7d=6 \quad\Rightarrow\quad b=-3$$

$$\text{I:}\quad a+b+c+d=1 \quad\Rightarrow\quad a=1$$

Somit lautet die Lösung:

- $a=1$
- $b=-3$
- $c=3$
- $d=0$

  Die Funktion f lautet $f(x)=x^3-3x^2+3x$.

Überprüfung des Extremum bei $x=1$

> Es muss gelten: $f''(1)>0$

$f(x)=x^3-3x^2+3x$
$f'(x)=3x^2-6x+3$

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(1) = 6 - 6 = 0$

> Da $f''(1)$ die Bedingung nicht erfüllt, so stellt f nicht die gesuchte Funktion dar. Es existiert nur eine Lösung des Gleichungssystems, daher kann f nach den Bedingungen nie existieren.

Aufgabe 6

> Bestimmen Sie die ganzrationale Funktion f mit niedrigsten Grades mit den Funktionswerten.

6a)

- $f(0) = 1$
- $f(1) = 0$
- $f(2) = 1$

> Es liegen 3 Bedingungen vor, daher gilt für den niedrigsten Grad:
>
> $$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{I:} & a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & = & 1 \\ \text{II:} & a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c & = & 0 \\ \text{III:} & a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{I:} & c & = & 1 \\ \text{II:} & a + b + c & = & 0 \\ \text{III:} & 4a + 2b + c & = & 1 \end{array}$$

$$\text{I:} \quad c = 1$$

$$\begin{array}{r|rcr|l} \text{II:} & a + b & = & -1 & \mid \cdot(-2) \\ \text{III:} & 4a + 2b & = & 0 & \mid \text{III} + \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcr|} \text{II:} & a + b & = & -1 \\ \text{III:} & 2a & = & 2 \end{array}$$

$$\text{III:} \quad 2a = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

$$\text{II:} \quad a + b = -1 \quad \Rightarrow \quad b = -2$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = 1$
- $b = -2$
- $c = 1$
  Die Funktion f lautet $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

6b)

- $f(0) = 0$
- $f(1) = 1$
- $f(2) = 2$

> Es liegen 3 Bedingungen vor, daher gilt für den niedrigsten Grad:
>
> $$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{I:} & a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & = & 0 \\ \text{II:} & a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c & = & 1 \\ \text{III:} & a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{I:} & c & = & 0 \\ \text{II:} & a + b + c & = & 1 \\ \text{III:} & 4a + 2b + c & = & 2 \end{array}$$

$$\text{I:} \quad c = 0$$

$$\begin{array}{r|rcr|l} \text{II:} & a + b & = & 1 & \mid \cdot(-2) \\ \text{III:} & 4a + 2b & = & 2 & \mid \text{III} + \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcr|} \text{II:} & a + b & = & 1 \\ \text{III:} & 2a & = & 0 \end{array}$$

$$\text{III:} \quad 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

$$\text{II:} \quad a + b = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 1$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = 0$
- $b = 1$
- $c = 0$
  Die Funktion f lautet $f(x) = x$.

6c)

- $f(0) = 1$

- $f(1) = 1$
- $f(2) = 1$

> Es liegen 3 Bedingungen vor, daher gilt für den niedrigsten Grad:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left| \begin{array}{rcl} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & = & 1 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c & = & 1 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & = & 1 \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left| \begin{array}{rcl} c & = & 1 \\ a + b + c & = & 1 \\ 4a + 2b + c & = & 1 \end{array} \right|$$

$$\text{I:} \quad c = 1$$

$$\begin{array}{r} \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left| \begin{array}{rcl} a + b & = & 0 \\ 4a + 2b & = & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} | \cdot (-2) \\ \quad | \text{ III} + \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left| \begin{array}{rcl} a + b & = & 0 \\ 2a & = & 0 \end{array} \right|$$

$$\text{III:} \quad 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

$$\text{II:} \quad a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = 0$
- $b = 0$
- $c = 1$
  Die Funktion f lautet $f(x) = 1$.

6d)

- $f(-1) = 0$
- $f(0) = 1$
- $f(2) = 0$

> Es liegen 3 Bedingungen vor, daher gilt für den niedrigsten Grad:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left| \begin{array}{rcl} a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c & = & 0 \\ a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & = & 1 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & = & 0 \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left| \begin{array}{rcl} a - b + c & = & 0 \\ c & = & 1 \\ 4a + 2b + c & = & 0 \end{array} \right|$$

$$\text{II:} \quad c = 1$$

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{III:} \end{array} \left| \begin{array}{rcl} a - b & = & -1 \\ 4a + 2b & = & -1 \end{array} \right| \begin{array}{l} | \cdot 2 \\ \quad | \text{ III} + \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{III:} \end{array} \left| \begin{array}{rcl} a + b & = & -1 \\ 6a & = & -3 \end{array} \right|$$

$$\text{III:} \quad 6a = -3 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{I:} \quad a - b = -1 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{2}$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = -\frac{1}{2}$
- $b = \frac{1}{2}$
- $c = 1$
  Die Funktion f lautet $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$.

6e)

- $f(0) = 0$
- $f(-1) = 0$
- $f(1) = 2$
- $f(2) = 6$

> Es liegen 4 Bedingungen vor, daher gilt für den niedrigsten Grad:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d & = & 0 \\
\text{II:} & a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d & = & 0 \\
\text{III:} & a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d & = & 2 \\
\text{IV:} & a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d & = & 6
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & d & = & 0 \\
\text{II:} & -a + b - c + d & = & 0 \\
\text{III:} & a + b + c + d & = & 2 \\
\text{IV:} & 8a + 4b + 2c + d & = & 6
\end{array}$$

$$\text{I:} \quad d = 0$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{II:} & -a + b - c & = & 0 & \\
\text{III:} & a + b + c & = & 2 & \mid \text{III} + \text{II} \\
\text{IV:} & 8a + 4b + 2c & = & 6 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{II:} & -a + b - c & = & 0 \\
\text{III:} & 2b & = & 2 \\
\text{IV:} & 8a + 4b + 2c & = & 6
\end{array}$$

$$\text{III:} \quad 2b = 2 \quad \Rightarrow \quad b = 1$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{II:} & -a - c & = & -1 & \mid \cdot 2 \\
\text{IV:} & 8a + 2c & = & 2 & \mid \text{IV} + \text{II}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{II:} & -a - c & = & -1 \\
\text{IV:} & 6a & = & 0
\end{array}$$

$$\text{IV:} \quad 6a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

$$\text{II:} \quad -a - c = -1 \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = 0$
- $b = 1$
- $c = 1$
- $d = 0$
  Die Funktion f lautet $f(x) = x^2 + x$.

6f)

- $f(-1) = 0$
- $f(0) = 1$
- $f(1) = 3$
- $f(2) = 4$

> Es liegen 4 Bedingungen vor, daher gilt für den niedrigsten Grad:
>
> $$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d & = & 0 \\
\text{II:} & a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d & = & 1 \\
\text{III:} & a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d & = & 3 \\
\text{IV:} & a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d & = & 4
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & -a + b - c + d & = & 0 \\
\text{II:} & d & = & 1 \\
\text{III:} & a + b + c + d & = & 3 \\
\text{IV:} & 8a + 4b + 2c + d & = & 4
\end{array}$$

$$\text{II:} \quad d = 1$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{I:} & -a + b - c & = & -1 & \\
\text{III:} & a + b + c & = & 2 & \mid \text{III} + \text{I} \\
\text{IV:} & 8a + 4b + 2c & = & 3 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & -a + b - c & = & -1 \\
\text{III:} & 2b & = & 1 \\
\text{IV:} & 8a + 4b + 2c & = & 3
\end{array}$$

$$\text{III:} \quad 2b = 1 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{I:} & -a - c & = & -\frac{3}{2} & \mid \cdot (2) \\
\text{IV:} & 8a + 2c & = & 1 & \mid \text{IV} + \text{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & -a - c & = & -\frac{3}{2} \\
\text{IV:} & 6a & = & -2
\end{array}$$

$$\text{IV:} \quad 6a = -2 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{3}$$

$$\text{II:} \quad -a - c = -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{11}{6}$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = -\frac{1}{3}$
- $b = \frac{1}{2}$
- $c = \frac{11}{6}$

- $d = 1$

Die Funktion f lautet $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{6}x + 1$.

6g)

- $f(0) = 0$
- $f(1) = 0$
- $f(2) = 0$
- $f(3) = 1$

> Es liegen 4 Bedingungen vor, daher gilt für den niedrigsten Grad:
>
> $$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{I:} & a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d & = & 0 \\ \text{II:} & a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 + d & = & 0 \\ \text{III:} & a\cdot 2^3 + b\cdot 2^2 + c\cdot 2 + d & = & 0 \\ \text{IV:} & a\cdot 3^3 + b\cdot 3^2 + c\cdot 3 + d & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{I:} & d & = & 0 \\ \text{II:} & a+b+c+d & = & 0 \\ \text{III:} & 8a+4b+2c+d & = & 0 \\ \text{IV:} & 27a+9b+3c+d & = & 1 \end{array}$$

$$\text{I:} \quad d = 0$$

$$\begin{array}{r|rcl|l} \text{II:} & a+b+c & = & 0 & \mid \cdot(-8) \\ \text{III:} & 8a+4b+2c & = & 0 & \quad \mid \text{III}+\text{II} \\ \text{IV:} & 27a+9b+3c & = & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l} \text{II:} & a+b+c & = & 0 & \mid \cdot(-27) \\ \text{III:} & -4b-6c & = & 0 & \\ \text{IV:} & 27a+9b+3c & = & 1 & \quad \mid \text{IV}+\text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l} \text{II:} & a+b+c & = & 0 & \\ \text{III:} & -4b-6c & = & 0 & \mid \cdot\frac{-18}{4} \\ \text{IV:} & -18b-24c & = & 1 & \quad \mid \text{IV}+\text{III} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{II:} & a+b+c & = & 0 \\ \text{III:} & -4b-6c & = & 0 \\ \text{IV:} & 3c & = & 1 \end{array}$$

$$\text{IV:} \quad 3c = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{3}$$

$$\text{III:} \quad -4b - 6c = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{2}$$

$$\text{II:} \quad a + b + c = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{6}$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = \frac{1}{6}$
- $b = -\frac{1}{2}$
- $c = \frac{1}{3}$
- $d = 0$

Die Funktion f lautet $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x$.

Aufgabe 7

> Begründen Sie, dass es für die folgenden Bedingungen keine ganzrationale Funktion f gibt.

7a)

> Grad von f gleich 2; Nullstellen für $x = 2$ und $x = 4$; Maximum für $x = 0$.

Diese Funktion kann nicht existieren, da das Extremum durch Symmetrie an der Stelle $x = 3$ sein muss.

7b)

> Grad von f gleich 3; Extremwerte für $x = 0$ und $x = 3$; Wendestelle für $x = 1$.

Diese Funktion kann nicht existieren, da die Wendestelle mittig der Extremwerte liegen muss. (Siehe Aufgabe 7a)

7c)

> Grad von f gleich 4; f gerade, Wendestelle für $x = 1$; Maximum für $x = 2$

Es ist für $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ mit $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$ und $f''(x) = 12ax^2 + 2b$. Es muss gelten:

- $f''(1) = 0$
- $f'(2) = 0$

$$
\begin{aligned}
0 &= f''(1) \\
0 &= 12a + 2b && \mid -12a \\
2b &= -12a && \mid \div 2 \\
b &= -6a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= f'(2) \\
0 &= 4a \cdot 2^3 + 2b \cdot 2 \\
0 &= 32a + 4b && \mid -32a \\
4b &= -32a && \mid \div 4 \\
b &= -8a
\end{aligned}
$$

Für a und b existieren aufgrund von $\{b = -6a\} \neq \{b = -8a\}$ keine Lösungen. Folglich kann es keine Funktion f nach diesen Bedingungen geben.

Aufgabe 8

> Bestimmen Sie die ganzrationale Funktion 3ten Grades, deren Graph

8a)

> die x-Achse im Ursprung berührt und deren Tangente in $P(-3 \mid 0)$ parallel zur Gerade $y = 6x$ ist.

Die Bedingungen folgen für die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$:

- $f(0) = 0$
- $f(-3) = 0$
- $f'(0) = 0$
- $f'(-3) = 6$

  > Es liegen genug Bedingungen vor

$$
\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d & = & 0 \\
\text{II:} & a \cdot (-3)^3 + b \cdot (-3)^2 + c \cdot (-3) + d & = & 0 \\
\text{III:} & 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c & = & 0 \\
\text{IV:} & 3a \cdot (-3)^2 + 2b \cdot (-3) + c & = & 6
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & d & = & 0 \\
\text{II:} & -27a + 9b - 3c + d & = & 0 \\
\text{III:} & c & = & 0 \\
\text{IV:} & 27a - 6b + c & = & 6
\end{array}
$$

$$\text{I:} \quad d = 0$$

$$\text{III:} \quad c = 0$$

$$
\begin{array}{r|rcl|l}
\text{II:} & -27a + 9b & = & 0 & \\
\text{IV:} & 27a - 6b & = & 6 & \mid \text{IV} + \text{II}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rcl|}
\text{II:} & -27a + 9b & = & 0 \\
\text{IV:} & 3b & = & 6
\end{array}
$$

$$\text{II:} \quad 3b = 6 \quad \Rightarrow \quad b = 2$$

$$\text{IV:} \quad -27a + 9b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{3}$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = \frac{2}{3}$
- $b = 2$
- $c = 0$
- $d = 0$
  Die Funktion f lautet $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2$.

8b)

> in $P(1 \mid 4)$ einen Extrempunkt und in $Q(0 \mid 2)$ einen Wendepunkt hat.

Die Bedingungen folgen für die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und $f''(x) = 6ax + 2b$:

- $f(0) = 2$
- $f(1) = 4$
- $f'(1) = 0$
- $f''(0) = 0$

  > Es liegen genug Bedingungen vor

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d & = & 2 \\
\text{II:} & a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d & = & 4 \\
\text{III:} & 3a\cdot 1^2+2b\cdot 1+c & = & 0 \\
\text{IV:} & 6a\cdot 0^2+2b & = & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & d & = & 2 \\
\text{II:} & a+b+c+d & = & 4 \\
\text{III:} & 3a+2b+c & = & 0 \\
\text{IV:} & 2b & = & 0
\end{array}$$

$$\text{I:} \quad d=2$$

$$\text{II:} \quad 2b=0 \quad \Rightarrow \quad b=0$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{II:} & a+c & = & 2 & \mid \cdot(-1) \\
\text{III:} & 3a+c & = & 0 & \mid \text{III}+\text{II}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{II:} & a+c & = & 2 \\
\text{III:} & 2a & = & -2
\end{array}$$

$$\text{III:} \quad 2a=-2 \quad \Rightarrow \quad a=-1$$

$$\text{II:} \quad a+c=2 \quad \Rightarrow \quad c=3$$

Somit lautet die Lösung:

- $a=-1$
- $b=0$
- $c=3$
- $d=2$

  Die Funktion f lautet $f(x)=-x^3+3x+2$.

Aufgabe 9

> Bestimmen Sie alle ganzrationalen Funktionen 3ten Grades, deren Graph

9a)

> punktsymmetrisch zum Ursprung ist und für $x=2$ einen Extrempunkt hat

Es gilt durch die Punktsymmetrie zum Ursprung:

- $f(x)=ax^3+bx$
- $f'(x)=3ax^2+b$

  Generell gilt:
- $f'(2)=0$

$$\begin{aligned}
&0=f'(2) \\
&0=3a\cdot 2^2+b \qquad \mid -12a \\
&b=-12a
\end{aligned}$$

Somit lautet die Funktion $f(x)=ax^3-12ax$; $a\neq 0$.

9b)

> im Ursprung einen Wendepunkt mit der Wendetangente $y=x$ hat.

Es gilt für $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$:

- $f(0)=0$
- $f'(0)=1$
- $f''(0)=0$

> Es liegen nicht genug Bedingungen (3 von 4) vor:
> Scharfunktion von f mit einem Parameter

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d & = & 0 \\
\text{II:} & 3a\cdot 0^2+2b\cdot 0+c & = & 1 \\
\text{III:} & 6a\cdot 0+2b & = & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & d & = & 0 \\
\text{II:} & c & = & 1 \\
\text{III:} & 2b & = & 0
\end{array}$$

$$\text{I:} \quad d=0$$

$$\text{II:} \quad c=1$$

$$\text{III:} \quad 2b=0 \quad \Rightarrow \quad b=0$$

Somit lautet die Lösung:

- $a=a$
- $b=0$
- $c=1$
- $d=0$

  Die Funktion f lautet $f(x)=ax^3+x$; $a\neq 0$

Aufgabe 10

> Bestimmen Sie die ganzrationale Funktion 4ten Grades, deren Graph

10a)

> den Wendepunkt $O(0\mid 0)$ mit der x-Achse als Wendetangente und den Tiefpunkt $A(-1\mid -2)$ hat.

Die Bedingungen folgen für die Funktion $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ mit $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ und $f''(x)=12ax^2+6bx+2c$

- $f(0)=0$
- $f(-1)=-2$
- $f'(-1)=0$
- $f'(0)=0$
- $f''(0)=0$

> Es liegen genug Bedingungen vor (5 von 5)

$$\begin{array}{r|rcl|}\text{I:} & a\cdot 0^4+b\cdot 0^3+c\cdot 0^2+d\cdot 0+e & = & 0\\ \text{II:} & a\cdot(-1)^4+b\cdot(-1)^3+c\cdot(-1)^2+d\cdot(-1)+e & = & -2\\ \text{III:} & 4a\cdot(-1)^3+3b\cdot(-1)^2+2c\cdot(-1)+d & = & 0\\ \text{IV:} & 4a\cdot 0^3+3b\cdot 0^2+2c\cdot 0+d & = & 0\\ \text{V:} & 12a\cdot 0^2+6b\cdot 0+2c & = & 0\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}\text{I:} & e & = & 0\\ \text{II:} & a-b+c-d+e & = & -2\\ \text{III:} & -4a+3b-2c+d & = & 0\\ \text{IV:} & d & = & 0\\ \text{V:} & 2c & = & 0\end{array}$$

$$\text{I:}\quad e=0$$

$$\text{IV:}\quad d=0$$

$$\text{V:}\quad 2c=0\quad\Rightarrow\quad c=0$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}\text{II:} & a-b & = & -2 & \mid\cdot 3\\ \text{III:} & -4a+3b & = & 0 & \mid\text{III}+\text{II}\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}\text{II:} & a-b & = & -2\\ \text{III:} & -a & = & -6\end{array}$$

$$\text{III:}\quad -a=-6\quad\Rightarrow\quad a=6$$

$$\text{II:}\quad a-b=-2\quad\Rightarrow\quad b=8$$

Somit lautet die Lösung:

- $a=6$
- $b=8$
- $c=0$
- $d=0$
- $e=0$

  Die Funktion f lautet $f(x)=6x^4+8x^3$.

10b)

> in $O(0\mid 0)$ und im Wendepunkt $W(-2\mid 2)$ Tangenten parallel zur x-Achse hat.

Die Bedingungen folgen für die Funktion $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ mit $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ und $f''(x)=12ax^2+6bx+2c$

- $f(0)=0$
- $f(-2)=2$
- $f'(0)=0$
- $f'(-2)=0$
- $f''(-2)=0$

> Es liegen genug Bedingungen vor (5 von 5)

$$
\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e & = & 0 \\
\text{II:} & a \cdot (-2)^4 + b \cdot (-2)^3 + c \cdot (-2)^2 + d \cdot (-2) + e & = & 2 \\
\text{III:} & 4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d & = & 0 \\
\text{IV:} & 4a \cdot (-2)^3 + 3b \cdot (-2)^2 + 2c \cdot (-2) + d & = & 0 \\
\text{V:} & 12a \cdot (-2)^2 + 6b \cdot (-2) + 2c & = & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & e & = & 0 \\
\text{II:} & 16a - 8b + 4c - 2d + e & = & 2 \\
\text{III:} & d & = & 0 \\
\text{IV:} & -32a + 12b - 4c + d & = & 0 \\
\text{V:} & 48a - 12b + 2c & = & 0
\end{array}
$$

$$\text{I:} \quad e = 0$$

$$\text{III:} \quad d = 0$$

$$
\begin{array}{r|rcl|l}
\text{II:} & 16a - 8b + 4c & = & 2 & \mid \cdot(2) \\
\text{IV:} & -32a + 12b - 4c & = & 0 & \quad \mid \text{IV} + \text{II} \\
\text{V:} & 48a - 12b + 2c & = & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rcl|l}
\text{II:} & 16a - 8b + 4c & = & 2 & \mid \cdot(-3) \\
\text{IV:} & -4b + 4c & = & 4 & \\
\text{V:} & 48a - 12b + 2c & = & 0 & \quad \mid \text{V} + \text{II}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rcl|l}
\text{II:} & 16a - 8b + 4c & = & 2 & \\
\text{IV:} & -4b + 4c & = & 4 & \mid \cdot(3) \\
\text{V:} & 12b - 10c & = & -6 & \quad \mid \text{V} + \text{IV}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rcl|l}
\text{II:} & 16a - 8b + 4c & = & 2 & \\
\text{IV:} & -4b + 4c & = & 4 & \mid \cdot(3) \\
\text{V:} & 2c & = & 6 & \quad \mid \text{V} + \text{IV}
\end{array}
$$

$$\text{V:} \quad 2c = 6 \quad \Rightarrow \quad c = 3$$

$$\text{IV:} \quad -4b + 4c = 4 \quad \Rightarrow \quad b = 2$$

$$\text{II:} \quad 16a - 8b + 4c = 2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{8}$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = \frac{3}{8}$
- $b = 2$
- $c = 3$
- $d = 0$
- $e = 0$
  Die Funktion f lautet $f(x) = 6x^4 + 8x^3$.

Aufgabe 11

> Bestimmen Sie die ganzrationale Funktion 4ten Grades, deren Graph

11a)

> symmetrisch zur y-Achse ist, durch $A(0 \mid 2)$ geht und den Tiefpunkt $B(1 \mid 0)$ hat.

Die Bedingungen folgen für die Funktion $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ mit $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$:

- $f(0) = 2$
- $f(1) = 0$
- $f'(1) = 0$

  > Es liegen genug Bedingungen vor (3 von 3)

$$
\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & a \cdot 0^4 + b \cdot 0^2 + c & = & 2 \\
\text{II:} & a \cdot 1^4 + b \cdot 1^2 + c & = & 0 \\
\text{III:} & 4a \cdot 1^3 + 2b \cdot 1 & = & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & c & = & 2 \\
\text{II:} & a + b + c & = & 0 \\
\text{III:} & 4a + 2b & = & 0
\end{array}
$$

$$\text{I:} \quad c = 2$$

$$
\begin{array}{r|rcl|l}
\text{II:} & a + b & = & -2 & \mid \cdot(-2) \\
\text{III:} & 4a + 2b & = & 0 & \quad \mid \text{III} + \text{II}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rcl|}
\text{II:} & a + b & = & -2 \\
\text{III:} & 2a & = & 4
\end{array}
$$

$$\text{III:} \quad 2a = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

$$\text{II:} \quad a + b = -2 \quad \Rightarrow \quad b = -4$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = 2$
- $b = -4$
- $c = 2$
  Die Funktion f lautet $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 2$.

Überprüfung des Extremum bei $x = 1$

> Es muss gelten: $f''(1) > 0$

$f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 2$
$f'(x) = 8x^3 - 8x$
$f''(x) = 24x^2 - 8$

$f''(1) = 16 > 0$

> Da $f''(1)$ die Bedingung erfüllt, so stellt f die gesuchte Funktion dar.

11b)

> symmetrisch zur y-Achse ist und in $P(2 \mid 0)$ eine Wendetangente mit der Steigung $-\frac{4}{3}$ hat.

Die Bedingungen folgen für die Funktion $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ mit $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$ und $f''(x) = 12ax^2 + 2b$:

- $f(2) = 0$
- $f'(2) = -\frac{4}{3}$
- $f''(2) = 0$

  > Es liegen genug Bedingungen vor (3 von 3)

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & a \cdot 2^4 + b \cdot 2^2 + c & = & 0 \\
\text{II:} & 4a \cdot 2^3 + 2b \cdot 2 & = & -\frac{4}{3} \\
\text{III:} & 12a \cdot 2^2 + 2b & = & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{I:} & 16a + 4b + c & = & 0 & \mid \cdot(-2) \\
\text{II:} & 32a + 4b & = & -\frac{4}{3} & \mid \text{II} + \text{I} \\
\text{III:} & 48a + 2b & = & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{I:} & 16a + 4b + c & = & 0 & \mid \cdot(-3) \\
\text{II:} & -4b - 2c & = & -\frac{4}{3} & \\
\text{III:} & 48a + 2b & = & 0 & \mid \text{III} + \text{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{I:} & 16a + 4b + c & = & 0 & \\
\text{II:} & -4b - 2c & = & -\frac{4}{3} & \mid \cdot(-2,5) \\
\text{III:} & -10b - 3c & = & 0 & \mid \text{III} + \text{II}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & 16a + 4b + c & = & 0 \\
\text{II:} & -4b - 2c & = & -\frac{4}{3} \\
\text{III:} & 2c & = & \frac{10}{3}
\end{array}$$

$$\text{III:} \quad 2c = \frac{10}{3} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{5}{3}$$

$$\text{II:} \quad -4b - 2c = -\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{2}$$

$$\text{I:} \quad 16a + 4b + c = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{48}$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = \frac{1}{48}$
- $b = -\frac{1}{2}$
- $c = \frac{5}{3}$
  Die Funktion f lautet $f(x) = \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}$.

Aufgabe 12

> Bestimmen Sie alle ganzrationalen Funktionen

12a)

> vom Grad 2, deren Graph durch $A(0 \mid 2)$ und $B(6 \mid 8)$ geht und die x-Achse berührt.

Die Bedingungen folgen für die Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $f'(x) = 2ax + b$:

- $f(0) = 2$
- $f(6) = 8$
- $f'(k) = 0$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{I:} & a\cdot 0^2+b\cdot 0+c & = & 2 \\ \text{II:} & a\cdot 6^2+b\cdot 6+c & = & 8 \\ \text{III:} & 2a\cdot k+b & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{I:} & c & = & 2 \\ \text{II:} & 36a+6b+c & = & 8 \\ \text{III:} & 2ka+b & = & 0 \end{array}$$

$$\text{I:}\quad c=2$$

$$\begin{array}{r|rcl|l} \text{II:} & 36a+6b & = & 6 & \div(-6) \\ \text{III:} & 2ka+b & = & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l} \text{II:} & -6a-b & = & -1 & \\ \text{III:} & 2ka+b & = & 0 & \mid \text{III}+\text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{II:} & -6a-b & = & -1 \\ \text{III:} & (2k-6)a & = & -1 \end{array}$$

$$\text{III:}\quad (2k-6)a=-1 \quad\Rightarrow\quad a=-\frac{1}{2k-6}$$

$$\text{II:}\quad -6a-b=-1 \quad\Rightarrow\quad b=1+\frac{3}{k-3}$$

Somit lautet die Lösung:

- $a=-\frac{1}{2k-6}$
- $b=1+\frac{3}{k-3}=\frac{k}{k-3}$
- $c=2$
  Die Funktion f lautet $f(x)=-\frac{1}{2k-6}x^2+\frac{k}{k-3}x+2$.

Berechnung der gesuchten k

> Es sollen die k gefunden werden, die zu einer doppelten Nullstelle der Funktion f führen.

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2k-6}x^2+\frac{k}{k-3}x+2 \\ x_{1;2} &= \frac{-\frac{k}{k-3}\pm\sqrt{\left[\frac{k}{k-3}\right]^2+4\cdot\frac{1}{2k-6}\cdot 2}}{\frac{2}{2k-6}} \\ &= \frac{-\frac{k}{k-3}\pm\sqrt{\frac{k^2}{(k-3)^2}+\frac{4}{k-3}}}{\frac{2}{2k-6}} \end{aligned}$$

Der Wurzelterm gibt die Anzahl der Nullstellen an. Dieser muss zwanghaft exakt 0 sein, damit die doppelte Nullstelle vorhanden ist.
Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \sqrt{\frac{k^2}{(k-3)^2}+\frac{4}{k-3}} && \mid ()^2 \\ 0 &= \frac{k^2}{(k-3)^2}+\frac{4(k-3)}{(k-3)^2} \\ 0 &= \frac{k^2+4k-12}{(k-3)^2} && \mid \cdot(k-3)^2 \\ 0 &= k^2+4k-12 \\ k_{1;2} &= -\frac{4}{2}\pm\sqrt{\left[\frac{4}{2}\right]^2+12} \\ &= -2\pm\sqrt{16} \\ &= -2\pm 4 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Funktion f mit den Parametern $k=-6$ und $k=2$ gebildet wird. Somit gilt:

- $f(x)=\frac{1}{18}x^2+\frac{2}{3}x+2$
- $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+2$

12b)

> vom Grad 3, deren Graph durch $A(-2\mid 2)$, $B(0\mid 2)$ und $A(2\mid 2)$ geht und die x-Achse berührt.

Anstelle, dass f über ein LGS gefunden wird, verwende ich eine andere Methode.
Es fällt auf, dass die y-Koordinate aller drei Punkte 2 beträgt. So lässt sich jede Funktion, die durch diese Punkte verläuft durch $f_k(x)=k(x+2)(x)(x-2)+2$ beschreiben.
Die passenden k sind dann gefunden, sobald ein Extrempunkt auf der x-Achse ist. Somit gilt:

- $f_k(x_{1;2})=0$
- $f_k'(x_{1;2})=0$

$$\begin{aligned} f_k(x) &= k(x+2)(x)(x-2)+2 \\ &= kx^3-4kx+2 \end{aligned}$$

$$f_k'(x)=3kx^2-4k$$

$$\begin{aligned} 0 &= f_k'(x) \\ 0 &= 3kx^2-4k && \mid +4k \\ 4k &= 3kx^2 && \mid \div(3k) \\ \frac{4k}{3k} &= x^2 && \mid \sqrt{} \\ x_{1;2} &= \pm\sqrt{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

Für $f_k(x_1)=0$:

$$
\begin{aligned}
0 &= k\cdot\left[\sqrt{\frac{4}{3}}\right]^3 - 4k\sqrt{\frac{4}{3}} + 2 && \mid -2\\
-2 &= k\cdot\frac{8\sqrt{3}}{9} - \frac{8\sqrt{3}}{3}\cdot k\\
-2 &= \left(\frac{8\sqrt{3}}{9} - \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)k && \mid\cdot\left(-\frac{9}{16\sqrt{3}}\right)\\
k &= \frac{3\sqrt{3}}{8}
\end{aligned}
$$

Für $f_k(x_2) = 0$:

$$
\begin{aligned}
0 &= k\cdot\left[-\sqrt{\frac{4}{3}}\right]^3 - 4k\left[-\sqrt{\frac{4}{3}}\right] + 2 && \mid -2\\
-2 &= -k\cdot\frac{8\sqrt{3}}{9} + \frac{8\sqrt{3}}{3}\cdot k\\
-2 &= \left(-\frac{8\sqrt{3}}{9} + \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)k && \mid\cdot\left(\frac{9}{16\sqrt{3}}\right)\\
k &= -\frac{3\sqrt{3}}{8}
\end{aligned}
$$

Daraus folgen die Funktionen für f:

- $f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{8}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x + 2$
- $f(x) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}x^3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}x + 2$

12c)

> vom Grad 4, die gerade ist, die Wendestelle $x = 1$ und das relative Minimum 0 hat.

Die Bedingungen folgen für die Funktion $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ mit $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$ und $f''(x) = 12ax^2 + 2b$:

- $f(0) = 0$
- $f'(0) = 0$
- $f''(1) = 0$

> Es liegen genug Bedingungen vor:

$$
\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & a\cdot 0^4 + b\cdot 0^2 + c & = & 0\\
\text{II:} & 4a\cdot 0^3 + 2b\cdot 0 & = & 0\\
\text{III:} & 12a\cdot 1^2 + 2b & = & 0
\end{array}
$$

$$\text{I:}\quad c = 0$$

$$
\begin{array}{r|rcl|}
\text{II:} & 0 & = & 0\\
\text{III:} & 12a + 2b & = & 0
\end{array}
$$

$$\text{III:}\quad 12a + 2b = 0 \quad\Rightarrow\quad b = -6a$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = a$
- $b = -6a$
- $c = 0$
  Die Funktion f lautet $f(x) = ax^4 - 6ax^2$.

> Damit für $x = 0$ ein Minimum vorliegt, so muss gelten:

- $f''(0) > 0$

Finden der Bedingung $f''(x) > 0$:

$$
\begin{aligned}
&0 < f''(0)\\
&0 < 12a\cdot 0^2 - 12a\\
&0 < -12a && \mid \div(-12)\\
&a < 0
\end{aligned}
$$

Somit ist jede geeignete Funktion f:

- $f(x) = ax^4 - 6ax^2$ mit $a < 0$

Aufgabe 13

> Eine ganzrationale Funktion f_2 vom Grad 2 und die $\cos$-Funktion haben für $x = 0$ den selben Funktionswert und dieselben Werte der 1ten und 2ten Ableitung.

13a)

> Bestimmen Sie f_2. Zeichnen Sie die Graphen von f_2 und der $\cos$-Funktion für $|x| \leq 0,5\pi$.

Die Bedingungen folgen für die Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $f'(x) = 2ax + b$ und $f''(x) = 2a$:

- $f(0) = 1$
- $f'(0) = 0$
- $f''(0) = -1$

$$\begin{array}{r|rcr|} \text{I:} & a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & = & 1 \\ \text{II:} & 2a \cdot 0 + b & = & 0 \\ \text{III:} & 2a & = & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcr|} \text{I:} & c & = & 1 \\ \text{II:} & b & = & 0 \\ \text{III:} & 2a & = & -1 \end{array}$$

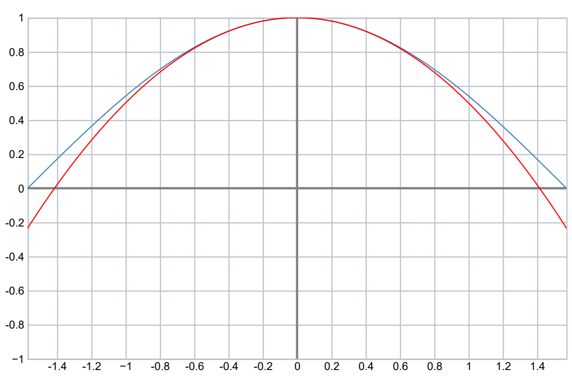
$$\text{I:} \quad c = 1$$

$$\text{II:} \quad b = 0$$

$$\text{III:} \quad 2a = -1 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{2}$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = -\frac{1}{2}$
- $b = 0$
- $c = 1$
  Die Funktion f_2 lautet $f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1$.



- $f(x) = \cos(x)$
- $f_2(x)$

13b)

> Bestimmen Sie die ganzrationale Funktion f_4 vom Grad 4 so, dass f_4 und die $\cos$-Funktion für $x = 0$ denselben Funktionswert und dieselben Werte der 1ten, 2ten und 3ten Ableitung haben. Zeichnen Sie den Graphen von f_4 in die vorhandene Abbildung ein.

Die Bedingungen folgen für die Funktion $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ und $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$:

- $f(0) = 1$
- $f'(0) = 0$
- $f''(0) = -1$
- $f'''(0) = 0$

$$\begin{array}{r|rcr|} \text{I:} & a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e & = & 1 \\ \text{II:} & 4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d & = & 0 \\ \text{III:} & 12a \cdot 0^2 + 6b \cdot 0 + 2c & = & -1 \\ \text{IV:} & 24a \cdot 0 + 6b & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcr|} \text{I:} & e & = & 1 \\ \text{II:} & d & = & 0 \\ \text{III:} & 2c & = & -1 \\ \text{IV:} & 6b & = & 0 \end{array}$$

$$\text{I:} \quad e = 1$$

$$\text{II:} \quad d = 0$$

$$\text{III:} \quad 2c = -1 \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{2}$$

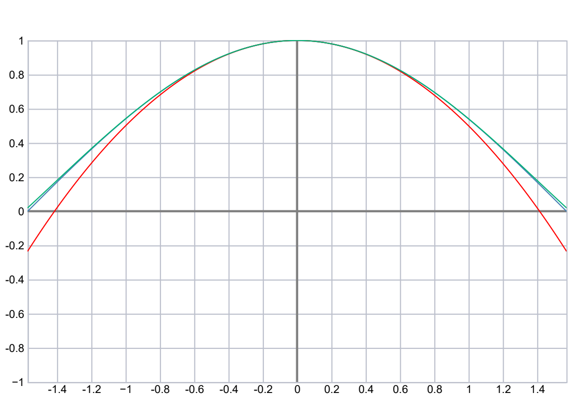
$$\text{IV:} \quad 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = a;$
- $b = 0$
- $c = -\frac{1}{2}$
- $d = 0$
- $e = 1$
  Die Funktion f_4 lautet $f_4(x) = ax^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$.

  > Da es sich um Taylorpolynome handelt, muss folgendes gelten:

- $a = \frac{f^n(0)}{n!} = \frac{\cos(0)}{24} = \frac{1}{24}$
  Demnach: $f_4(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$



- $f(x) = \cos(x)$

- $f_2(x)$
- $f_4(x)$

13c)

> Berechnen Sie $\cos(1)$ und $f_4(1)$. Wie groß ist der Fehler, wenn man $\cos(1) = f_4(1)$ setzt?

$$\begin{aligned}
\cos(1) &= f_4(1) \\
\cos(1) &= \frac{1}{24} \cdot 1^4 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 \\
\cos(1) &= \frac{1}{24} - \frac{1}{2} + 1 \\
0,5403 &= 0,541\overline{6}
\end{aligned}$$

Der Fehler ist $\Delta y = 0,0013\overline{6}$.

13d)

> Bestimmen Sie entsprechend eine Funktion f_6. Vergleichen Sie $f_6(1)$ bis $\cos(1)$.

Für Taylorpolynome gilt: $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$.
Daraus folglich gilt für $x_0 = 0$, $n = 6$ und $f(x) = \cos(x)$:

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k \\
f_6(x) &= \sum_{k=0}^{6} \frac{f^k(0)}{k!} \cdot x^k \\
&= \frac{f^6(0)}{6!} \cdot x^6 + \frac{f^5(0)}{5!} \cdot x^5 + \frac{f^4(0)}{4!} \cdot x^4 + \frac{f^3(0)}{3!} \cdot x^3 + \frac{f^2(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f^1(0)}{1!} \cdot x^1 + \frac{f^0(0)}{0!} \cdot x^0 \\
&= \frac{-\cos(0)}{6!} \cdot x^6 + \frac{-\sin(0)}{5!} \cdot x^5 + \frac{\cos(0)}{4!} \cdot x^4 + \frac{\sin(0)}{3!} \cdot x^3 + \frac{-\cos(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{-\sin(0)}{1!} \cdot x^1 + \frac{\cos(0)}{0!} \\
&= \frac{-1}{720} \cdot x^6 + \frac{0}{120} \cdot x^5 + \frac{1}{24} \cdot x^4 + \frac{0}{6} \cdot x^3 + \frac{-1}{2} \cdot x^2 + \frac{0}{1} \cdot x^1 + 1 \\
f_6(x) &= -\frac{1}{720} \cdot x^6 + \frac{1}{24} \cdot x^4 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + 1
\end{aligned}$$

Die Funktion f_6 lautet $f_6(x) = -\frac{1}{720} \cdot x^6 + \frac{1}{24} \cdot x^4 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + 1$.

$$\begin{aligned}
\cos(1) &= f_6(1) \\
\cos(1) &= -\frac{1}{720} \cdot 1^6 + \frac{1}{24} \cdot 1^4 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 \\
\cos(1) &= -\frac{1}{720} + \frac{1}{24} - \frac{1}{2} + 1 \\
0,5403 &= 0,5402\overline{7}
\end{aligned}$$

Der Fehler ist $\Delta y \approx 0,000\,0245$.

> $f_6(1)$ ist ähnlich zu $\cos(1)$. In kleineren Intervallen lässt sich demnach $\cos(x)$ durch $f_6(x)$ annähern.
