Seite 41 Nr. 1) 2) 5) 6)

1)

> Berechnen Sie zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ jeweils einen Vektor $\vec{c}$, für den $\vec{a} \circ \vec{c} = 0$ und $\vec{b} \circ \vec{c} = 0$ gilt und weisen Sie nach, dass er diese Bedingungen erfüllt.

a)

- $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{a} \times \vec{b} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \circ \vec{c} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot 3 - 1 \cdot 6 + 0 \cdot 1 \\ &= 0 \\ \vec{b} \circ \vec{c} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot 3 - 1 \cdot 6 + 3 \cdot 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

b)

- $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{a} \times \vec{b} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 \cdot (-3) - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 - (-3) \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 - (-3) \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \circ \vec{c} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot 7 - 3 \cdot 8 + 2 \cdot 5 \\ &= 0 \\ \vec{b} \circ \vec{c} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot 7 + 1 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \\ &= 0 \end{aligned}$$

c)

- $\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
\vec{c} &= \vec{a} \times \vec{b} \\
&= \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 - 1 \cdot (-4) \\ 1 \cdot 2 - 9 \cdot 5 \\ 9 \cdot (-4) - 3 \cdot 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 19 \\ -43 \\ -42 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \circ \vec{c} &= \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 19 \\ -43 \\ -42 \end{pmatrix} \\
&= 9 \cdot 19 - 3 \cdot 43 - 1 \cdot 42 \\
&= 0 \\
\vec{b} \circ \vec{c} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 19 \\ -43 \\ -42 \end{pmatrix} \\
&= 2 \cdot 19 + 4 \cdot 43 - 5 \cdot 42 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

---

2)

> Für die Ebenen E sind Normalenvektoren zu ermitteln. Geben Sie zu jeder Ebene drei mögliche Normalenvektoren an.

a)

$$
E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{n} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4 \\ -28 \\ 12 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{n}_1 &= \begin{pmatrix} -4 \\ -28 \\ 12 \end{pmatrix} \\
\vec{n}_2 &= \begin{pmatrix} 4 \\ 28 \\ -12 \end{pmatrix} \\
\vec{n}_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

b)

$$
E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{n} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{n}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{n}_2 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{n}_3 &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

---

3)

> Berechnen Sie für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Vektorprodukte

a)

> $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ und $\vec{c} \times \vec{a}$

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\vec{b} \times \vec{c} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix} \\
\vec{c} \times \vec{a} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \\ -11 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

b)

> $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ und $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

$$\begin{aligned}\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\5\\0\end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-5\\-1\\17\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-22\\59\\-3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= \left[\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix}-1\\5\\0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-9\\13\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-1\\-32\end{pmatrix}\end{aligned}$$

---

5)

> Berechnen Sie mithilfe des Vektorprodukts den Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$ mit $A(1 \mid 1 \mid 1)$, $B(0 \mid 1 \mid 3)$, $C(-1 \mid 2 \mid 3)$ und $D(0 \mid 2 \mid 1)$.

$$\begin{aligned}A_{ABCD} &= \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix}0-1\\1-1\\3-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0-1\\2-1\\1-1\end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\end{pmatrix}\right| = 3\ [FE]\end{aligned}$$

---

6)

> Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

a)

> $A(4 \mid 7 \mid 5)$, $B(0 \mid 5 \mid 9)$, $C(8 \mid 7 \mid 3)$

$$\begin{aligned}A_{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}0-4\\5-7\\9-5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}8-4\\7-7\\3-5\end{pmatrix}\right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}4\\8\\8\end{pmatrix}\right| = 6\ [FE]\end{aligned}$$

b)

> $A(-1 \mid 0 \mid 5)$, $B(2 \mid 2 \mid 2)$, $C(2 \mid 2 \mid 0)$

$$\begin{aligned}A_{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}-1-2\\0-2\\5-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2-2\\2-2\\0-2\end{pmatrix}\right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}-3\\-2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}4\\-6\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{13}\ [FE]\end{aligned}$$
