

# Schneiden von Kreisen

Versuchen werde ich hier einen funktionalen Zusammenhang des folgenden Sachverhaltes zu ermitteln:

Wenn man einen Kreis mit dem Radius  $r$  an einer Sekante mit abstand  $h$  zu einer parallelen Tangente schneidet, wie wird der Flächeninhalt  $A$  verändert.

Pasted image 20240103145623.png

## Beschreibung in Bezügen

Ein Kreis kann durch  $x^2 + y^2 = r^2$  dargestellt werden. Vereinfacht man dies nun auf  $y$ , so gilt für den Kreis  $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ . Da ich diesen Term folglich als eine Funktion behandeln werde, so muss das  $\pm$  aus diesem verschwinden. Dadurch verlieren wir die untere Hälfte des Kreises.

Verschiebt man nun diesen Halbkreis so, dass Nullstellen von  $y$  den Schnittpunkten der Sekante in der Distanz zueinander gleich sind, so bildet sich folgende Funktion:

$$a_o(x) = \sqrt{r^2 - x^2} + h - r$$

Allerdings muss beachtet werden, dass für  $h$  folgender Definitionsbereich gelten muss.

$$D_1 : 0 \leq h \leq r$$

## Beschreiben des Flächeninhaltes der kleineren Fläche

Da  $a_o(x) = \sqrt{r^2 - x^2} + h - r$  gültig für den Flächeninhalt ist, und die Fläche der x-Achse identisch ist wie beim Kreis, so müssen die Nullstellen gefunden werden.

$$\begin{array}{lcl} 0 = \sqrt{r^2 - x^2} + h - r & | + r - h \\ r - h = \sqrt{r^2 - x^2} & | ()^2 \\ r^2 - x^2 = (r - h)^2 & \\ r^2 - x^2 = r^2 - 2rh + h^2 & | - r^2 \\ -x^2 = -2rh + h^2 & | \cdot (-1) \\ x^2 = 2rh - h^2 & | \sqrt{\phantom{x}} \\ x_{l,r} = \mp \sqrt{2rh - h^2} \end{array}$$

Mit diesem Ausdruck für Nullstellen kann nun der Flächeninhalt der Funktion gebildet werden. Es gilt:

$$A(x) = \left| \int_{x_l}^{x_r} a_o(x) dx \right|$$

## Berechnung des Flächeninhaltes

Durch  $A(x)$  wird der Flächeninhalt dargestellt.

$$\begin{aligned} A_o(x) &= \left| \int_{x_l}^{x_r} a_o(x) dx \right| \\ &= \left| \int_{x_l}^{x_r} \sqrt{r^2 - x^2} + h - r \, dx \right| \\ &= \left| \int_{x_l}^{x_r} \sqrt{d^2 - x^2} \, dx + \int_{x_l}^{x_r} h \, dx + \int_{x_l}^{x_r} -r \, dx \right| \end{aligned}$$

Weil die Funktion  $a_o(x)$  eine y-Achsen Symmetrie besitzt, so kann eine der Integralgrenzen auf 0 gesetzt werden. Zusätzlich muss das Integral darauf mit 2 multipliziert werden, da das Intervall davor um die hälfte kleiner gemacht wurde.

$$\begin{aligned}
A_o(x) &= 2 \left| \int_0^{x_r} a_o(x) dx \right| \\
&= 2 \cdot \left| \int_0^{x_r} \sqrt{r^2 - x^2} \, dx + \int_0^{x_r} h \, dx + \int_0^{x_r} -r \, dx \right| \\
&= 2 \cdot \left| \left[ \frac{1}{2} \cdot \left( x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \cdot \sin^{-1} \left( \frac{x}{r} \right) \cdot \operatorname{sgn}(r) \right) \right]_0^{x_r} + \left[ hx \right]_0^{x_r} + \left[ -rx \right]_0^{x_r} \right| \\
&= 2 \cdot \left| \frac{1}{2} \cdot \left( \sqrt{2rh - h^2} \cdot \sqrt{r^2 - \sqrt{2rh - h^2}^2} + r^2 \cdot \sin^{-1} \left( \frac{\sqrt{2rh - h^2}}{r} \right) \cdot \operatorname{sgn}(r) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot \left( 0 \cdot \sqrt{r^2 - 0^2} + r^2 \cdot \sin^{-1} \left( \frac{0}{r} \right) \cdot \operatorname{sgn}(r) \right) + \left( h \cdot \sqrt{2rh - h^2} - h \cdot 0 \right) + \left( -r \cdot \sqrt{2rh - h^2} - (-r \cdot 0) \right) \right| \\
&= 2 \cdot \left| \frac{1}{2} \cdot \left( \sqrt{2rh - h^2} \cdot \sqrt{r^2 - \sqrt{2rh - h^2}^2} + r^2 \cdot \sin^{-1} \left( \frac{\sqrt{2rh - h^2}}{r} \right) \cdot \operatorname{sgn}(r) \right) \right. \\
&\quad \left. + h \cdot \sqrt{2rh - h^2} - r \cdot \sqrt{2rh - h^2} \right| \\
&= 2 \cdot \left| \frac{1}{2} \cdot \left( \sqrt{2rh - h^2} \cdot \sqrt{r^2 - 2rh + h^2} + r^2 \cdot \sin^{-1} \left( \frac{\sqrt{2rh - h^2}}{r} \right) \cdot \operatorname{sgn}(r) \right) + \sqrt{2rh - h^2} \cdot (h - r) \right| \\
&= \left| \sqrt{2rh - h^2} \cdot (r - h) + r^2 \cdot \sin^{-1} \left( \frac{\sqrt{2rh - h^2}}{r} \right) + 2 \cdot \sqrt{2rh - h^2} \cdot (h - r) \right| \\
&= \left| \sqrt{2rh - h^2} \cdot ((r - h) + 2(h - r)) + r^2 \cdot \sin^{-1} \left( \frac{\sqrt{2rh - h^2}}{r} \right) \right| \\
&= \left| \sqrt{2rh - h^2} \cdot (-(h - r) + 2(h - r)) + r^2 \cdot \sin^{-1} \left( \frac{\sqrt{2rh - h^2}}{r} \right) \right| \\
&= \left| \sqrt{2rh - h^2} \cdot (h - r) + r^2 \cdot \sin^{-1} \left( \frac{\sqrt{2rh - h^2}}{r} \right) \right| \\
A_o(h) &= \left| \sqrt{r^2 - (h - r)^2} \cdot (h - r) + r^2 \cdot \sin^{-1} \left( \frac{\sqrt{r^2 - (h - r)^2}}{r} \right) \right|
\end{aligned}$$

Diese Funktion unter Abhängigkeit von  $h$  gilt nur, insofern  $D_1$  erfüllt, und  $r > 0$  ist.  
*Der Betrag kann zusätzlich ebenfalls entfernt werden, da die Funktion in dem Intervall in dem integriert wird immer  $\geq 0$  ist.*

Wenn man einen Kreis laut der Formel in der hälfte teilt, also  $h = r$  ist, so fällt folgendes auf:

$$\begin{aligned}
A_o(h) &= \left| \sqrt{r^2 - (h - r)^2} \cdot (h - r) + r^2 \cdot \sin^{-1} \left( \frac{\sqrt{r^2 - (h - r)^2}}{r} \right) \right| \\
A_o(r) &= \left| \sqrt{r^2 - (r - r)^2} \cdot (r - r) + r^2 \cdot \sin^{-1} \left( \frac{\sqrt{r^2 - (r - r)^2}}{r} \right) \right| \\
&= \left| \sqrt{r^2 - (0)^2} \cdot (0) + r^2 \cdot \sin^{-1} \left( \frac{\sqrt{r^2 - (0)^2}}{r} \right) \right| \\
&= \left| \sqrt{r^2} \cdot 0 + r^2 \cdot \sin^{-1} \left( \frac{\sqrt{r^2}}{r} \right) \right| \\
&= \left| r^2 \cdot \sin^{-1}(1) \right| \\
&= r^2 \cdot \frac{\pi}{2} = 0,5 \cdot (\pi r^2) \Rightarrow 0,5 \cdot A_g
\end{aligned}$$

## Verbindungen von $A_o(h)$

Da  $A_o(h)$  den Flächeninhalt des kleineren Segments beschreibt, und dieser von der Gesamtfläche abgezogen wird, so kann man folgenden Schluss ziehen:

$$A_{o+u} = A_o(h) + A_u$$

$A_{o+u}$  ist hier die Gesamtfläche des Kreises dessen Teilabschnitt getrennt wird.  $A_u$  ist die untere Fläche nach der Teilung.

Da die Gesamtfläche von  $A_{o+u}$  mit  $A_{o+u} = \pi \cdot r^2$  beschrieben werden kann, so kann folglich der Flächeninhalt der unteren Fläche ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
A_u &= A_{o+u} - A_o(h) \\
A_u &= \pi \cdot r^2 - A_o(h)
\end{aligned}$$

## Bildung von $A_g(h)$

Da in  $A_o$  ein Definitionsbereich  $D_1$  gegeben ist, so werde ich versuchen eine zusammengesetzte Funktion zu finden, welche diesen Bereich erweitert, damit anstelle des halben Kreises, der ganze von  $h$  getrennt werden kann.

### Symmetrie

Da es sich bei der Form um einen Kreis handelt, so kann ein größer abgeschnittenes Stück von dem Kreis mit  $h > r$  als das Anschneiden von einem kleinerem Stück gesehen werden.

Wenn  $h = r$  gilt ist, wie zuvor gezeigt, die hälfte des Kreises auf beiden Seiten getrennt.

Folglich muss wegen der Symmetrie ab der hälfte eine Punktsymmetrie in der Funktion am Ende von  $D_1$  vorliegen. Diese Symmetrie führt dazu, dass bei  $2r$  die Fläche nun mit der neuen Erweiterung auf  $\pi r^2$  steigt.

### Bilden der "halben" Punktsymmetrie an dem oberen Ende von $D_1$

Anstelle eine Punktsymmetrie an dem Punkt  $P(r \mid 0,5\pi r^2)$  durch den folgenden Ausdruck an  $A_o$  zu testen, werde ich die entstehende Bedingung mit dem Punkt  $(a \mid b)$  durch

$$\begin{aligned} f(a+x) - b &= -f(a-x) + b && | \\ &\Downarrow \\ f(x) &= 2b - f(2a-x) \end{aligned}$$

dazu benutzen mir die andere Funktion zu erstellen.

$$\begin{aligned} A_u(h) &= -A_o(2r-h) + \pi r^2 \\ &= -\sqrt{r^2 - ((2r-h)-r)^2} \cdot ((2r-h)-r) - r^2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{r^2 - ((2r-h)-r)^2}}{r}\right) + \pi r^2 \\ &= -\sqrt{r^2 - (r-h)^2} \cdot (r-h) - r^2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{r^2 - (r-h)^2}}{r}\right) + \pi r^2 \\ A_u(h) &= \sqrt{r^2 - (h-r)^2} \cdot (h-r) - r^2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{r^2 - (h-r)^2}}{r}\right) + \pi r^2 \end{aligned}$$

Zu bedenken von dieser neuen Funktion ist jetzt, dass der Definitionsbereich dadurch ebenfalls geändert wurde. Nun ist dieser Definitionsbereich der folgende:

$$D_2 : r \leq h \leq 2r$$

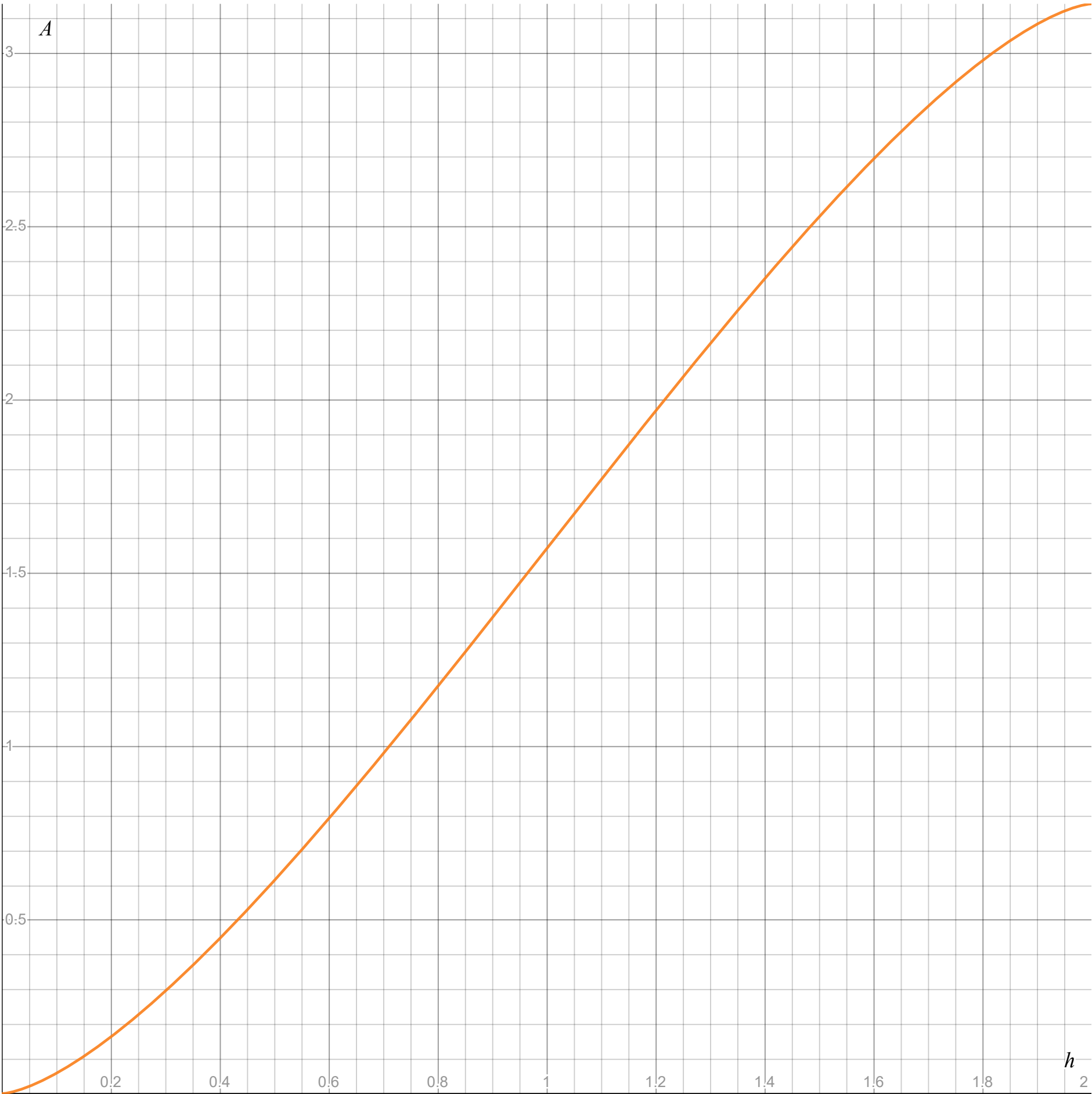
---

### Bilden der bedingten Funktion

Nun sind die für mich wichtigen Funktionshälften fertig definiert und müssen nun vereint werden. Als Resultat erhält man folgende Funktion:

$$\begin{aligned} A_g(h) &= \begin{cases} A_o(h) & \text{wenn } D_1 \\ A_u(h) & \text{wenn } D_2 \end{cases} \\ A_g(h) &= \begin{cases} \sqrt{r^2 - (h-r)^2} \cdot (h-r) + r^2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{r^2 - (h-r)^2}}{r}\right) & \text{wenn } 0 \leq h \leq r \\ \sqrt{r^2 - (h-r)^2} \cdot (h-r) - r^2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{r^2 - (h-r)^2}}{r}\right) + \pi r^2 & \text{wenn } r \leq h \leq 2r \end{cases} \end{aligned}$$

Da neben  $h$  auch  $r$  verändert betrachtet werden kann, so kann  $A_g$  durch  $A_g(h,r)$  ebenfalls ausgedrückt werden. Die Bedingungen bleiben hierbei allerdings bestehen.



---

---

---

## Schneiden von Kugeln in $\mathbb{R}^3$

Versuchen werde ich hier einen funktionalen Zusammenhang des folgenden Sachverhaltes zu ermitteln:

Wenn man eine Kugel mit dem Radius  $r$  an einer Ebene mit abstand  $h$  zu einer parallelen Tangierenden Ebene schneidet, wie wird der Flächeninhalt  $A$  verändert.

### Beschreibung in Bezügen

Erneut werde ich das Kugelsegment mit einer Funktion darstellen, mit welchem das Volumen ermittelt werden kann.

Eine Kugel kann durch  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  dargestellt werden. Vereinfacht man dies nun auf  $y$ , so gilt für den Kreis  $z = \pm\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$

Da ich mich von Volumina in  $\mathbb{R}^3$  direkt aus diesem Auszug fernhalten möchte, so werde ich die Bezugsfunktion  $a_o(x) = \sqrt{r^2 - x^2} + h - r$  für die Segmentgröße eines Kreises als Rotationskörper um die  $y$ -Achse verwenden um somit das Volumen der getrennten Kugel auszudrücken.

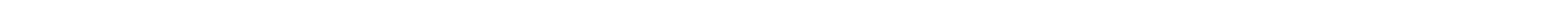
### Bildung einer geeigneten Umkehrfunktion

Wenn  $a_o(x) = \sqrt{r^2 - x^2} + h - r$  die um die y-Achse gedrehte Funktion ist, so werde ich diese zu  $a_o^{-1}(x)$  umwandeln, um diese anschließend um die x-Achse rotieren zu lassen um einfacher mit dieser zu arbeiten.

$$\begin{aligned} a_o(x) &= \sqrt{r^2 - x^2} + h - r \\ y &= \sqrt{r^2 - x^2} + h - r && | -h + r \\ y - h + r &= \sqrt{r^2 - x^2} && | ()^2 \\ (y - h + r)^2 &= r^2 - x^2 && | -r^2 \\ -r^2 + (y - h + r)^2 &= -x^2 && | \cdot (-1) \\ r^2 - (y - h + r)^2 &= x^2 && | \sqrt{\phantom{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \pm \sqrt{r^2 - (y - h + r)^2} \\ &\Downarrow \\ a_o^{-1}(x) &= \sqrt{r^2 - (x - h + r)^2} \end{aligned}$$

Die negative Version des Wurzelterms entfällt hier, da dieser für weitere Arbeiten unwichtig ist.



## Bilden der Rotationskörpervolumina

Die Darstellung von generellen Rotationskörpern ist die folgende:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

Die Grenzwerte unseres Integrals liegen hierbei bei  $a = 0$  und  $b = h$ , da das von  $a_o$  existente Maximum auf der y-Achse liegt und dabei die höhe  $h$  hat.  $a_o(0) = h$ . Durch die Umkehrfunktion ist dieser Punkt nun eine Nullstelle, welche als Intervallgrenzen gewertet werden kann.  $a_o^{-1}(h) = 0$ . Die Nullstelle welche zuvor bei  $x_{l,r} = \sqrt{2rh - h^2}$  lag, ist nun bei der Stelle  $a_o^{-1}(0)$ . Dadurch werden die Grenzen für das Integral klar.

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_a^b \left(a_o^{-1}(x)\right)^2 \, dx \\ &= \pi \cdot \int_0^h \left(\sqrt{r^2 - (x - h + r)^2}\right)^2 \, dx \\ &= \pi \cdot \int_0^h r^2 - (x - h + r)^2 \, dx \\ &= \pi \cdot \int_0^h r^2 - (x^2 + h^2 + r^2 - 2hx + 2rx - 2hr) \, dx \\ &= \pi \cdot \int_0^h r^2 - x^2 - h^2 - r^2 + 2hx - 2rx + 2hr \, dx \\ &= \pi \cdot \int_0^h -x^2 - h^2 + 2hx - 2rx + 2hr \, dx \\ &= \pi \cdot \left( \int_0^h -x^2 \, dx \quad + \int_0^h -h^2 \, dx \quad + \int_0^h 2hx \, dx \quad + \int_0^h -2rx \, dx \quad + \int_0^h -2hr \, dx \right) \end{aligned}$$