Seite 159 Nr. 9) 10) 11)

9)

> Aus der Schale in Fig. 2 entnimmt man "blind" nacheinander vier Kugeln und legt sie vor sich auf den Tisch. X sei die Anzahl roter Kugeln, die man zieht.
> Wie groß ist der Erwartungswert und die Standartabweichung von X? Beschreiben Sie Ihren Lösungsweg genau.

Aus Abbildung 2:

- $w = 7$
- $m = 3$
- $n = 4$
  Wir haben w rote und m blaue Kugeln in der Schale. Variablenbezeichnung nach belieben. n gibt hier die Anzahl der Ziehungen an.

> Es kommt hervor, dass X Hypergeometrisch verteilt ist.

Es folgt für X die folgende Verteilung und Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \frac{\binom{w}{k} \cdot \binom{m}{4-k}}{\binom{w+m}{4}} \\ &= \frac{\binom{7}{k} \cdot \binom{3}{4-k}}{\binom{10}{4}} \end{aligned}$$

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	$P(X=0)$	$P(X=1)$	$P(X=2)$	$P(X=3)$	$P(X=4)$

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	0	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Der Erwartungswert ergibt sich durch:

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{i=0}^{k} i \cdot P(X=i) \\ &= 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3) + 4 \cdot P(X=4) \\ &= 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{30} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{6} \\ \mu &= 2,8 \end{aligned}$$

> Der Erwartungswert dieser Verteilung ist $2,8$. Es können also bei unendlich vielen Durchführungen im Schnitt $2,8$ rote kugeln erwartet werden.

Die Standartabweichung ergibt sich durch:

$$\begin{aligned} \sigma(X)^2 = V(X) &= \sum_{i=0}^{k} (i-\mu)^2 \cdot P(X=i) \\ &= (0-\mu)^2 \cdot P(X=0) + (1-\mu)^2 \cdot P(X=1) + (2-\mu)^2 \cdot P(X=2) + (3-\mu)^2 \cdot P(X=3) + (4-\mu)^2 \cdot P(X=4) \\ &= (0-2,8)^2 \cdot 0 + (1-2,8)^2 \cdot \frac{1}{30} + (2-2,8)^2 \cdot \frac{3}{10} + (3-2,8)^2 \cdot \frac{1}{2} + (4-2,8)^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &\vdots \\ \sigma(X)^2 &= 0,56 \\ \sigma(X) &= \sqrt{0,56} \approx 0,748 \end{aligned}$$

> Die Standartabweichung der Verteilung liegt bei ungefähr $0,748$. Die Verteilung ist daher nicht sehr gestreut.

---

10)

> Bei einem Spiel würfelt man nach einem Einsatz von einem Euro mit fünf Würfeln. Für jede Sechs erhält man einen Euro ausbezahlt.

a)

> Welchen mittleren gewinn oder Verlust kann man auf lange Sicht erwarten? Welchen Gewinn oder Verlust kann man bei 120 Spielen erwarten?

- $X: \text{Anzahl Sechsen}$
- $X \sim \mathcal{B}\left(5; \frac{1}{6}\right)$

$1 \cdot x_i - 1$	-1	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$P(X=0)$	$P(X=1)$	$P(X=2)$	$P(X=3)$	$P(X=4)$	$P(X=5)$

Der Erwartungswert ergibt sich durch:

$$\begin{aligned} \mu &= -1 \cdot P(X=0) + {\color{red}0 \cdot P(X=1)} + 1 \cdot P(X=2) + 2 \cdot P(X=3) + 3 \cdot P(X=4) + 4 \cdot P(X=5) \\ &= -1 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=2) + 2 \cdot P(X=3) + 3 \cdot P(X=4) + 4 \cdot P(X=5) \\ &\vdots \\ \mu &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

> Der Erwartungswert dieser Verteilung ist $-\frac{1}{6}$. Es werden durchschnittlich demnach für jedes Spiel $17¢$ an Verlust generiert.
> Nach 120 Spielen sind hier durchschnittlich folglich $-\frac{1}{6} \cdot 120 = -20€$ an Verlust zu beschreiben.

b)

> Wie könnte man die Spielregeln abändern, damit das Spiel fair ist?

Nehmen wir an, dass 6 Würfel geworfen werden dürfen:

- $X: \text{Anzahl Sechsen}$
- $X \sim \mathcal{B}\left(6; \frac{1}{6}\right)$

$1 \cdot x_i - 1$	-1	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$P(X=0)$	$P(X=1)$	$P(X=2)$	$P(X=3)$	$P(X=4)$	$P(X=5)$	$P(X=6)$

Der Erwartungswert ergibt sich durch:

$$\begin{aligned}
\mu &= -1\cdot P(X=0) + {\color{red}0\cdot P(X=1)} + 1\cdot P(X=2) + 2\cdot P(X=3) + 3\cdot P(X=4) + 4\cdot P(X=5) + 5\cdot P(X=6)\\
&= -1\cdot P(X=0) + 1\cdot P(X=2) + 2\cdot P(X=3) + 3\cdot P(X=4) + 4\cdot P(X=5) + 5\cdot P(X=6)\\
&\vdots\\
\mu &= 0
\end{aligned}$$

> Hier ist der Erwartungswert 0. Somit muss der Würfel 6 mal geworfen werden, damit das Spiel fair ist.

---

11)

> Begründen Sie, dass der Graph der binomialverteilten Zufallsvariablen X mit den Parametern $n=10$ und $p=\frac{1}{2}$ symmetrisch zur Geraden $x=5$ ist. Verwenden Sie die Bernoulli-Formel.

Damit die Geradensymmetrie von $P(X=k)=\binom{10}{k}\cdot 0,5^k\cdot(1-0,5)^{10-k}$ für $x=5$ bewiesen werden kann, gilt $f(a-x)=f(a+x)$ ($P(X=a-x)=P(X=a+x)$), wobei $a=5$, durch $x=5$ der Gerade gegeben ist.

$$\begin{gathered}
P(X=a-x)=P(X=a+x)\\
P(X=5-x)=P(X=5+x)\\
\binom{10}{5-x}\cdot 0,5^{5-x}\cdot(1-0,5)^{10-(5-x)}=\binom{10}{5+x}\cdot 0,5^{5+x}\cdot(1-0,5)^{10-(5+x)}\\
\frac{10!}{(10-(5-x))!\cdot(5-x)!}\cdot 0,5^5\cdot\frac{1}{0,5^x}\cdot 0,5^{10-5+x}=\frac{10!}{(10-(5+x))!\cdot(5+x)!}\cdot 0,5^5\cdot 0,5^x\cdot 0,5^{10-5-x}\\
\frac{10!}{(10-5+x)!\cdot(5-x)!}\cdot\cancel{0,5^5}\cdot\cancel{\frac{1}{0,5^x}}\cdot 0,5^{10}\cdot\cancel{\frac{1}{0,5^5}}\cdot\cancel{0,5^x}=\frac{10!}{(10-5-x)!\cdot(5+x)!}\cdot\cancel{0,5^5}\cdot\cancel{0,5^x}\cdot 0,5^{10}\cdot\cancel{\frac{1}{0,5^5}}\cdot\cancel{\frac{1}{0,5^x}}\\
\frac{10!}{(10-5+x)!\cdot(5-x)!}\cdot 0,5^{10}=\frac{10!}{(10-5-x)!\cdot(5+x)!}\cdot 0,5^{10}\\
\frac{10!}{(5+x)!\cdot(5-x)!}\cdot 0,5^{10}=\frac{10!}{(5-x)!\cdot(5+x)!}\cdot 0,5^{10}\\
1=1
\end{gathered}$$

Durch dem Erfüllen der Bedingung $P(X=5-x)=P(X=5+x)$ ist folglich "bewiesen", dass eine Geradensymmetrie zu der Gerade $x=5$ bei dieser Binomialverteilung besteht.

Beweisführung: Seite 159 Nr. 11)
