Seite 109 Nr. 4ac) 5a)

Aufgabe 4

> Bestimmen Sie alle ganzrationalen Funktionen vom Grad 3, deren Graph durch die Punkte geht.

4a)

> $A(0 \mid 1);\ B(1 \mid 0);\ C(-1 \mid 4);\ D(2 \mid -5)$

Die Bedingungen folgen für die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$:

- $f(0) = 1$
- $f(1) = 0$
- $f(-1) = 4$
- $f(2) = -5$

  > Es liegen genug Bedingungen vor

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{I:} & a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d & = & 1 \\ \text{II:} & a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d & = & 0 \\ \text{III:} & a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d & = & 4 \\ \text{IV:} & a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d & = & -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{I:} & d & = & 1 \\ \text{II:} & a + b + c + d & = & 0 \\ \text{III:} & -a + b - c + d & = & 4 \\ \text{IV:} & 8a + 4b + 2c + d & = & -5 \end{array}$$

$$\text{I:} \quad d = 1$$

$$\begin{array}{r|rcl|l} \text{II:} & a + b + c & = & -1 & \\ \text{III:} & -a + b - c & = & 3 & \mid \text{III} + \text{II} \\ \text{IV:} & 8a + 4b + 2c & = & -6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{II:} & a + b + c & = & -1 \\ \text{III:} & 2b & = & 2 \\ \text{IV:} & 8a + 4b + 2c & = & -6 \end{array}$$

$$\text{III:} \quad 2b = 2 \quad \Rightarrow \quad b = 1$$

$$\begin{array}{r|rcl|l} \text{II:} & a + c & = & -2 & \mid \cdot(-2) \\ \text{IV:} & 8a + 2c & = & -10 & \quad \mid \text{II} + \text{IV} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{II:} & a + c & = & -2 \\ \text{IV:} & 6a & = & -6 \end{array}$$

$$\text{IV:} \quad 6a = -6 \quad \Rightarrow \quad a = -1$$

$$\text{II:} \quad a + c = -2 \quad \Rightarrow \quad c = -1$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = -1$
- $b = 1$
- $c = -1$
- $d = 1$

  Die Funktion f lautet $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$

4b)

> $A(0 \mid -1);\ B(1 \mid 1);\ C(-1 \mid -7);\ D(2 \mid 17)$

Die Bedingungen folgen für die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$:

- $f(0) = -1$
- $f(1) = 1$
- $f(-1) = -7$
- $f(2) = 17$

  > Es liegen genug Bedingungen vor

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{I:} & a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d & = & -1 \\ \text{II:} & a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d & = & 1 \\ \text{III:} & a\cdot(-1)^3+b\cdot(-1)^2+c\cdot(-1)+d & = & -7 \\ \text{IV:} & a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c\cdot 2+d & = & 17 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{I:} & d & = & -1 \\ \text{II:} & a+b+c+d & = & 1 \\ \text{III:} & -a+b-c+d & = & -7 \\ \text{IV:} & 8a+4b+2c+d & = & 17 \end{array}$$

$$\text{I:}\quad d=-1$$

$$\begin{array}{r|rcl|l} \text{II:} & a+b+c & = & 2 & \\ \text{III:} & -a+b-c & = & -6 & \mid \text{III}+\text{II} \\ \text{IV:} & 8a+4b+2c & = & 18 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{II:} & a+b+c & = & 2 \\ \text{III:} & 2b & = & -4 \\ \text{IV:} & 8a+4b+2c & = & 18 \end{array}$$

$$\text{III:}\quad 2b=-4 \quad\Rightarrow\quad b=-2$$

$$\begin{array}{r|rcl|l} \text{II:} & a+c & = & 4 & \mid \text{II}+\text{IV} \\ \text{IV:} & 8a+2c & = & 26 & \mid \cdot(-0,5) \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{II:} & -3a & = & -9 \\ \text{IV:} & 8a+2c & = & 26 \end{array}$$

$$\text{II:}\quad -3a=-9 \quad\Rightarrow\quad a=3$$

$$\text{IV:}\quad 8a+2c=26 \quad\Rightarrow\quad c=1$$

Somit lautet die Lösung:

- $a=3$
- $b=-2$
- $c=1$
- $d=-1$
  Die Funktion f lautet $f(x)=3x^3-2x^2+x-1$

4c)

> $A(1\mid 0);\ B(0\mid 2);\ C(-2\mid 2)$

Die Bedingungen folgen für die Funktion $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$:

- $f(1)=0$
- $f(0)=2$
- $f(-2)=2$

> Es liegen nicht genug Bedingungen vor:
> Scharfunktion von f mit einem Parameter

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{I:} & a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d & = & 0 \\ \text{II:} & a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d & = & 2 \\ \text{III:} & a\cdot(-2)^3+b\cdot(-2)^2+c\cdot(-2)+d & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{I:} & a+b+c+d & = & 0 \\ \text{II:} & d & = & 2 \\ \text{III:} & -8a+4b-2c+d & = & 2 \end{array}$$

$$\text{I:}\quad d=2$$

$$\begin{array}{r|rcl|l} \text{I:} & a+b+c & = & -2 & \mid \cdot 2 \\ \text{III:} & -8a+4b-2c & = & 0 & \mid \text{III}+\text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{I:} & a+b+c & = & -2 \\ \text{III:} & -6a+6b & = & -4 \end{array}$$

$$\text{III:}\quad -6a+6b=-4 \quad\Rightarrow\quad b=-\frac{2}{3}+a$$

$$\text{I:}\quad a+b+c=-2 \quad\Rightarrow\quad c=-\frac{4}{3}-2a$$

Somit lautet die Lösung:

- $a=a$
- $b=-\frac{2}{3}+a$
- $c=-\frac{4}{3}-2a$
- $d=2$
  Die Funktion f lautet $f_a(x)=ax^3+\left(-\frac{2}{3}+a\right)x^2+\left(-\frac{4}{3}-2a\right)x+2$

4d)

> $A(1\mid 1);\ B(0\mid 1)$

Die Bedingungen folgen für die Funktion $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$:

- $f(1)=1$
- $f(0)=1$

> Es liegen nicht genug Bedingungen vor:
> Scharfunktion von f mit zwei Parametern

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d & = & 1 \\
\text{II:} & a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d & = & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl}
\text{I:} & a+b+c+d & = & 1 \\
\text{II:} & d & = & 1
\end{array}$$

$$\text{II:}\quad d=1$$

$$\text{I:}\ \left|\ a+b+c \quad = \quad 0\ \right|$$

$$\text{I:}\quad a+b+c=0 \quad \Rightarrow \quad a=-b-c$$

Somit lautet die Lösung:

- $a=-b-c$
- $b=b$
- $c=c$
- $d=1$

  Die Funktion f lautet $f_{b;c}(x)=(-b-c)x^3+bx^2+c+1$

Aufgabe 5

> Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion vom Grad 3, deren Graph

5a)

> durch $A(2\mid 0)$, $B(-2\mid 4)$ und $A(-4\mid 8)$ geht und einen Tiefpunkt auf der y-Achse hat.

Die Bedingungen folgen für die Funktion $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$:

- $f(2)=0$
- $f(-2)=4$
- $f(-4)=8$
- $f'(0)=0$

  > Es liegen genug Bedingungen vor

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c\cdot 2+d & = & 0 \\
\text{II:} & a\cdot(-2)^3+b\cdot(-2)^2+c\cdot(-2)+d & = & 4 \\
\text{III:} & a\cdot(-4)^3+b\cdot(-4)^2+c\cdot(-4)+d & = & 8 \\
\text{IV:} & 3a\cdot 0^2+2b\cdot 0+c & = & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & 8a+4b+2c+d & = & 0 \\
\text{II:} & -8a+4b-2c+d & = & 4 \\
\text{III:} & -64a+16b-4c+d & = & 8 \\
\text{IV:} & c & = & 0
\end{array}$$

$$\text{I:}\quad c=0$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{I:} & 8a+4b+d & = & 0 & \\
\text{II:} & -8a+4b+d & = & 4 & \mid \text{II}+\text{I} \\
\text{III:} & -64a+16b+d & = & 8 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{I:} & 8a+4b+d & = & 0 & \mid\cdot 8 \\
\text{II:} & 8b+2d & = & 4 & \\
\text{III:} & -64a+16b+d & = & 8 & \quad\mid \text{III}+\text{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{I:} & 8a+4b+d & = & 0 & \\
\text{II:} & 8b+2d & = & 4 & \mid\cdot(-6) \\
\text{III:} & 48b+9d & = & 8 & \quad\mid \text{III}+\text{II}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & 8a+4b+d & = & 0 \\
\text{II:} & 8b+2d & = & 4 \\
\text{III:} & -3d & = & -16
\end{array}$$

$$\text{III:}\quad -3d=-16 \quad \Rightarrow \quad d=\frac{16}{3}$$

$$\text{II:}\quad 8b+2d=4 \quad \Rightarrow \quad b=-\frac{5}{6}$$

$$\text{I:}\quad 8a+4b+d=0 \quad \Rightarrow \quad a=-\frac{1}{4}$$

Somit lautet die Lösung:

- $a=-\frac{1}{4}$
- $b=-\frac{5}{6}$
- $c=0$
- $d=\frac{16}{3}$

  Die Funktion f lautet $f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{5}{6}x^2+\frac{16}{3}$.

Überprüfung des Extremum bei $x=0$

> Es muss gelten: $f''(0)>0$

$f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{5}{6}x^2+\frac{16}{3}$
$f'(x)=-\frac{3}{4}x^2-\frac{5}{3}x$
$f''(x)=-\frac{3}{2}x-\frac{5}{3}$

$f''(0)=-\frac{5}{3}<0$

> Da $f''(0)$ die Bedingung nicht erfüllt, so stellt f nicht die gesuchte Funktion dar. Es existiert nur eine Lösung des Gleichungssystems, daher kann f nach den Bedingungen nie existieren.

5b)

> durch $A(2\mid 2)$, $B(3\mid 9)$ geht und den Tiefpunkt $T(1\mid 1)$ hat.

Die Bedingungen folgen für die Funktion $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$:

- $f(2)=2$
- $f(3)=9$
- $f(1)=1$
- $f'(1)=0$

> Es liegen genug Bedingungen vor

$$\begin{array}{r|rcl|}\text{I:} & a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c\cdot 2+d &=& 2\\ \text{II:} & a\cdot 3^3+b\cdot 3^2+c\cdot 3+d &=& 9\\ \text{III:} & a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d &=& 1\\ \text{IV:} & 3a\cdot 1^2+2b\cdot 1+c &=& 0\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}\text{I:} & 8a+4b+2c+d &=& 2\\ \text{II:} & 27a+9b+3c+d &=& 9\\ \text{III:} & a+b+c+d &=& 1\\ \text{IV:} & 3a+2b+c &=& 0\end{array}$$

Dieses LGS werde ich anschließend umsortieren

$$\begin{array}{r|rcl|l}\text{I:} & a+b+c+d &=& 1 & \mid\cdot(-8)\\ \text{II:} & 8a+4b+2c+d &=& 2 & \mid \text{II}+\text{I}\\ \text{III:} & 27a+9b+3c+d &=& 9 &\\ \text{IV:} & 3a+2b+c &=& 0 &\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}\text{I:} & a+b+c+d &=& 1 & \mid\cdot(-27)\\ \text{II:} & -4b-6c-7d &=& -6 &\\ \text{III:} & 27a+9b+3c+d &=& 9 & \mid \text{III}+\text{I}\\ \text{IV:} & 3a+2b+c &=& 0 &\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}\text{I:} & a+b+c+d &=& 1 & \mid\cdot(-3)\\ \text{II:} & -4b-6c-7d &=& -6 &\\ \text{III:} & -18b-24c-26d &=& -18 &\\ \text{IV:} & 3a+2b+c &=& 0 & \mid \text{IV}+\text{I}\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}\text{I:} & a+b+c+d &=& 1 &\\ \text{II:} & -4b-6c-7d &=& -6 & \mid\cdot(-1)\\ \text{III:} & -18b-24c-26d &=& -18 & \mid\cdot(-1)\\ \text{IV:} & -b-2c-3d &=& -3 & \mid\cdot(-1)\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}\text{I:} & a+b+c+d &=& 1 &\\ \text{II:} & 4b+6c+7d &=& 6 & \mid\cdot\frac{18}{4}\\ \text{III:} & 18b+24c+26d &=& 18 & \mid \text{III}+\text{II}\\ \text{IV:} & b+2c+3d &=& 3 &\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}\text{I:} & a+b+c+d &=& 1 &\\ \text{II:} & 4b+6c+7d &=& 6 & \mid\cdot\frac{-1}{4}\\ \text{III:} & -3c-\frac{11}{2}d &=& -9 &\\ \text{IV:} & b+2c+3d &=& 3 & \mid \text{IV}+\text{II}\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}\text{I:} & a+b+c+d &=& 1 &\\ \text{II:} & 4b+6c+7d &=& 6 &\\ \text{III:} & -3c-\frac{11}{2}d &=& -9 & \mid\cdot\frac{1}{6}\\ \text{IV:} & \frac{1}{2}c+\frac{5}{4}d &=& \frac{3}{2} & \mid \text{IV}+\text{III}\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}\text{I:} & a+b+c+d &=& 1\\ \text{II:} & 4b+6c+7d &=& 6\\ \text{III:} & -3c-\frac{11}{2}d &=& -9\\ \text{IV:} & \frac{1}{3}d &=& 0\end{array}$$

$$\text{IV:}\quad \frac{1}{3}d=0 \quad\Rightarrow\quad d=0$$

$$\text{III:}\quad -3c-\frac{11}{2}d=-9 \quad\Rightarrow\quad c=3$$

$$\text{II:}\quad 4b+6c+7d=6 \quad\Rightarrow\quad b=-3$$

$$\text{I:}\quad a+b+c+d=1 \quad\Rightarrow\quad a=1$$

Somit lautet die Lösung:

- $a=1$
- $b=-3$
- $c=3$
- $d=0$

  Die Funktion f lautet $f(x)=x^3-3x^2+3x$.

Überprüfung des Extremum bei $x=1$

> Es muss gelten: $f''(1)>0$

$f(x)=x^3-3x^2+3x$
$f'(x)=3x^2-6x+3$

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(1) = 6 - 6 = 0$

> Da $f''(1)$ die Bedingung nicht erfüllt, so stellt f nicht die gesuchte Funktion dar. Es existiert nur eine Lösung des Gleichungssystems, daher kann f nach den Bedingungen nie existieren.

Aufgabe 6

> Bestimmen Sie die ganzrationale Funktion f mit niedrigsten Grades mit den Funktionswerten.

6a)

- $f(0) = 1$
- $f(1) = 0$
- $f(2) = 1$

> Es liegen 3 Bedingungen vor, daher gilt für den niedrigsten Grad:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left| \begin{array}{rcr} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & = & 1 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c & = & 0 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & = & 1 \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left| \begin{array}{rcr} c & = & 1 \\ a + b + c & = & 0 \\ 4a + 2b + c & = & 1 \end{array} \right|$$

$$\text{I:} \quad c = 1$$

$$\begin{array}{r} \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left| \begin{array}{rcr} a + b & = & -1 \\ 4a + 2b & = & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} | \cdot (-2) \\ \quad | \text{III} + \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left| \begin{array}{rcr} a + b & = & -1 \\ 2a & = & 2 \end{array} \right|$$

$$\text{III:} \quad 2a = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

$$\text{II:} \quad a + b = -1 \quad \Rightarrow \quad b = -2$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = 1$
- $b = -2$
- $c = 1$

  Die Funktion f lautet $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

6b)

- $f(0) = 0$
- $f(1) = 1$
- $f(2) = 2$

> Es liegen 3 Bedingungen vor, daher gilt für den niedrigsten Grad:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left| \begin{array}{rcr} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & = & 0 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c & = & 1 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & = & 2 \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left| \begin{array}{rcr} c & = & 0 \\ a + b + c & = & 1 \\ 4a + 2b + c & = & 2 \end{array} \right|$$

$$\text{I:} \quad c = 0$$

$$\begin{array}{r} \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left| \begin{array}{rcr} a + b & = & 1 \\ 4a + 2b & = & 2 \end{array} \right| \begin{array}{l} | \cdot (-2) \\ \quad | \text{III} + \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left| \begin{array}{rcr} a + b & = & 1 \\ 2a & = & 0 \end{array} \right|$$

$$\text{III:} \quad 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

$$\text{II:} \quad a + b = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 1$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = 0$
- $b = 1$
- $c = 0$

  Die Funktion f lautet $f(x) = x$.

6c)

- $f(0) = 1$

- $f(1) = 1$
- $f(2) = 1$

> Es liegen 3 Bedingungen vor, daher gilt für den niedrigsten Grad:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{I:} & a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & = & 1 \\ \text{II:} & a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c & = & 1 \\ \text{III:} & a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{I:} & c & = & 1 \\ \text{II:} & a + b + c & = & 1 \\ \text{III:} & 4a + 2b + c & = & 1 \end{array}$$

$$\text{I:} \quad c = 1$$

$$\begin{array}{r|rcl|l} \text{II:} & a + b & = & 0 & | \cdot(-2) \\ \text{III:} & 4a + 2b & = & 0 & | \text{ III} + \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{II:} & a + b & = & 0 \\ \text{III:} & 2a & = & 0 \end{array}$$

$$\text{III:} \quad 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

$$\text{II:} \quad a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = 0$
- $b = 0$
- $c = 1$
  Die Funktion f lautet $f(x) = 1$.

6d)

- $f(-1) = 0$
- $f(0) = 1$
- $f(2) = 0$

> Es liegen 3 Bedingungen vor, daher gilt für den niedrigsten Grad:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{I:} & a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c & = & 0 \\ \text{II:} & a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & = & 1 \\ \text{III:} & a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{I:} & a - b + c & = & 0 \\ \text{II:} & c & = & 1 \\ \text{III:} & 4a + 2b + c & = & 0 \end{array}$$

$$\text{II:} \quad c = 1$$

$$\begin{array}{r|rcl|l} \text{I:} & a - b & = & -1 & | \cdot 2 \\ \text{III:} & 4a + 2b & = & -1 & | \text{ III} + \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{I:} & a + b & = & -1 \\ \text{III:} & 6a & = & -3 \end{array}$$

$$\text{III:} \quad 6a = -3 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{I:} \quad a - b = -1 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{2}$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = -\frac{1}{2}$
- $b = \frac{1}{2}$
- $c = 1$
  Die Funktion f lautet $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$.

6e)

- $f(0) = 0$
- $f(-1) = 0$
- $f(1) = 2$
- $f(2) = 6$

> Es liegen 4 Bedingungen vor, daher gilt für den niedrigsten Grad:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d & = & 0\\
\text{II:} & a\cdot(-1)^3+b\cdot(-1)^2+c\cdot(-1)+d & = & 0\\
\text{III:} & a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d & = & 2\\
\text{IV:} & a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c\cdot 2+d & = & 6
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & d & = & 0\\
\text{II:} & -a+b-c+d & = & 0\\
\text{III:} & a+b+c+d & = & 2\\
\text{IV:} & 8a+4b+2c+d & = & 6
\end{array}$$

$$\text{I:}\quad d=0$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{II:} & -a+b-c & = & 0 & \\
\text{III:} & a+b+c & = & 2 & \mid \text{III}+\text{II}\\
\text{IV:} & 8a+4b+2c & = & 6 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{II:} & -a+b-c & = & 0\\
\text{III:} & 2b & = & 2\\
\text{IV:} & 8a+4b+2c & = & 6
\end{array}$$

$$\text{III:}\quad 2b=2 \quad\Rightarrow\quad b=1$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{II:} & -a-c & = & -1 & \mid \cdot 2\\
\text{IV:} & 8a+2c & = & 2 & \mid \text{IV}+\text{II}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{II:} & -a-c & = & -1\\
\text{IV:} & 6a & = & 0
\end{array}$$

$$\text{IV:}\quad 6a=0 \quad\Rightarrow\quad a=0$$

$$\text{II:}\quad -a-c=-1 \quad\Rightarrow\quad c=1$$

Somit lautet die Lösung:

- $a=0$
- $b=1$
- $c=1$
- $d=0$

  Die Funktion f lautet $f(x)=x^2+x$.

6f)

- $f(-1)=0$
- $f(0)=1$
- $f(1)=3$
- $f(2)=4$

> Es liegen 4 Bedingungen vor, daher gilt für den niedrigsten Grad:
>
> $$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & a\cdot(-1)^3+b\cdot(-1)^2+c\cdot(-1)+d & = & 0\\
\text{II:} & a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d & = & 1\\
\text{III:} & a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d & = & 3\\
\text{IV:} & a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c\cdot 2+d & = & 4
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & -a+b-c+d & = & 0\\
\text{II:} & d & = & 1\\
\text{III:} & a+b+c+d & = & 3\\
\text{IV:} & 8a+4b+2c+d & = & 4
\end{array}$$

$$\text{II:}\quad d=1$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{I:} & -a+b-c & = & -1 & \\
\text{III:} & a+b+c & = & 2 & \mid \text{III}+\text{I}\\
\text{IV:} & 8a+4b+2c & = & 3 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & -a+b-c & = & -1\\
\text{III:} & 2b & = & 1\\
\text{IV:} & 8a+4b+2c & = & 3
\end{array}$$

$$\text{III:}\quad 2b=1 \quad\Rightarrow\quad b=\frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{I:} & -a-c & = & -\frac{3}{2} & \mid \cdot(2)\\
\text{IV:} & 8a+2c & = & 1 & \mid \text{IV}+\text{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & -a-c & = & -\frac{3}{2}\\
\text{IV:} & 6a & = & -2
\end{array}$$

$$\text{IV:}\quad 6a=-2 \quad\Rightarrow\quad a=-\frac{1}{3}$$

$$\text{II:}\quad -a-c=-\frac{3}{2} \quad\Rightarrow\quad c=\frac{11}{6}$$

Somit lautet die Lösung:

- $a=-\frac{1}{3}$
- $b=\frac{1}{2}$
- $c=\frac{11}{6}$

- $d = 1$
  Die Funktion f lautet $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{6}x + 1$.

6g)

- $f(0) = 0$
- $f(1) = 0$
- $f(2) = 0$
- $f(3) = 1$

> Es liegen 4 Bedingungen vor, daher gilt für den niedrigsten Grad:
> $$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{I:} & a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d & = & 0 \\ \text{II:} & a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d & = & 0 \\ \text{III:} & a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d & = & 0 \\ \text{IV:} & a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{I:} & d & = & 0 \\ \text{II:} & a + b + c + d & = & 0 \\ \text{III:} & 8a + 4b + 2c + d & = & 0 \\ \text{IV:} & 27a + 9b + 3c + d & = & 1 \end{array}$$

$$\text{I:} \quad d = 0$$

$$\begin{array}{r|rcl|l} \text{II:} & a + b + c & = & 0 & \mid \cdot(-8) \\ \text{III:} & 8a + 4b + 2c & = & 0 & \quad \mid \text{III} + \text{II} \\ \text{IV:} & 27a + 9b + 3c & = & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l} \text{II:} & a + b + c & = & 0 & \mid \cdot(-27) \\ \text{III:} & -4b - 6c & = & 0 & \\ \text{IV:} & 27a + 9b + 3c & = & 1 & \quad \mid \text{IV} + \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l} \text{II:} & a + b + c & = & 0 & \\ \text{III:} & -4b - 6c & = & 0 & \mid \cdot \frac{-18}{4} \\ \text{IV:} & -18b - 24c & = & 1 & \quad \mid \text{IV} + \text{III} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|} \text{II:} & a + b + c & = & 0 \\ \text{III:} & -4b - 6c & = & 0 \\ \text{IV:} & 3c & = & 1 \end{array}$$

$$\text{IV:} \quad 3c = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{3}$$

$$\text{III:} \quad -4b - 6c = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{2}$$

$$\text{II:} \quad a + b + c = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{6}$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = \frac{1}{6}$
- $b = -\frac{1}{2}$
- $c = \frac{1}{3}$
- $d = 0$
  Die Funktion f lautet $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x$.

Aufgabe 7

> Begründen Sie, dass es für die folgenden Bedingungen keine ganzrationale Funktion f gibt.

7a)

> Grad von f gleich 2; Nullstellen für $x = 2$ und $x = 4$; Maximum für $x = 0$.

Diese Funktion kann nicht existieren, da das Extremum durch Symmetrie an der Stelle $x = 3$ sein muss.

7b)

> Grad von f gleich 3; Extremwerte für $x = 0$ und $x = 3$; Wendestelle für $x = 1$.

Diese Funktion kann nicht existieren, da die Wendestelle mittig der Extremwerte liegen muss. (Siehe Aufgabe 7a)

--

7c)

> Grad von f gleich 4; f gerade, Wendestelle für $x = 1$; Maximum für $x = 2$

Es muss für $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ gelten:
$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$ und $f''(x) = 12ax^2 + 2b$. Es wird gegeben:

- $f''(1) = 0$
- $f'(2) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= f''(1) \\ 0 &= 12a + 2b && \mid -12a \\ 2b &= -12a && \mid \div 2 \\ b &= -6a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= f'(2) \\ 0 &= 4a \cdot 2^3 + 2b \cdot 2 \\ 0 &= 32a + 4b && \mid -32a \\ 4b &= -32a && \mid \div 4 \\ b &= -8a \end{aligned}$$

Für a und b existieren aufgrund von $\{b = -6a\} \neq \{b = -8a\}$ keine Lösungen. Folglich kann es keine Funktion f nach diesen Bedingungen geben.

Aufgabe 8

> Bestimmen Sie die ganzrationale Funktion 3ten Grades, deren Graph

8a)

> die x-Achse im Ursprung berührt und deren Tangente in $P(-3 \mid 0)$ parallel zur Gerade $y = 6x$ ist.

Die Bedingungen folgen für die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$:

- $f(0) = 0$
- $f(-3) = 0$
- $f'(0) = 0$
- $f'(-3) = 6$

  > Es liegen genug Bedingungen vor

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \\ \text{IV:} \end{array} \left| \begin{array}{rcl} a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d &=& 0 \\ a \cdot (-3)^3 + b \cdot (-3)^2 + c \cdot (-3) + d &=& 0 \\ 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c &=& 0 \\ 3a \cdot (-3)^2 + 2b \cdot (-3) + c &=& 6 \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \\ \text{IV:} \end{array} \left| \begin{array}{rcl} d &=& 0 \\ -27a + 9b - 3c + d &=& 0 \\ c &=& 0 \\ 27a - 6b + c &=& 6 \end{array} \right|$$

$$\text{I:} \quad d = 0$$

$$\text{III:} \quad c = 0$$

$$\begin{array}{r} \text{II:} \\ \text{IV:} \end{array} \left| \begin{array}{rcl} -27a + 9b &=& 0 \\ 27a - 6b &=& 6 \end{array} \right| \mid \text{IV} + \text{II}$$

$$\begin{array}{r} \text{II:} \\ \text{IV:} \end{array} \left| \begin{array}{rcl} -27a + 9b &=& 0 \\ 3b &=& 6 \end{array} \right|$$

$$\text{II:} \quad 3b = 6 \quad \Rightarrow \quad b = 2$$

$$\text{IV:} \quad -27a + 9b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{3}$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = \frac{2}{3}$
- $b = 2$
- $c = 0$
- $d = 0$
  Die Funktion f lautet $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2$.

8b)

> in $P(1 \mid 4)$ einen Extrempunkt und in $Q(0 \mid 2)$ einen Wendepunkt hat.

Die Bedingungen folgen für die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und $f''(x) = 6ax + 2b$:

- $f(0) = 2$
- $f(1) = 4$
- $f'(1) = 0$
- $f''(0) = 0$

  > Es liegen genug Bedingungen vor

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d & = & 2 \\
\text{II:} & a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d & = & 4 \\
\text{III:} & 3a\cdot 1^2+2b\cdot 1+c & = & 0 \\
\text{IV:} & 6a\cdot 0^2+2b & = & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl}
\text{I:} & d & = & 2 \\
\text{II:} & a+b+c+d & = & 4 \\
\text{III:} & 3a+2b+c & = & 0 \\
\text{IV:} & 2b & = & 0
\end{array}$$

$$\text{I:} \quad d=2$$

$$\text{II:} \quad 2b=0 \quad \Rightarrow \quad b=0$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{II:} & a+c & = & 2 & \mid \cdot(-1) \\
\text{III:} & 3a+c & = & 0 & \quad \mid \text{III}+\text{II}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcr|}
\text{II:} & a+c & = & 2 \\
\text{III:} & 2a & = & -2
\end{array}$$

$$\text{III:} \quad 2a=-2 \quad \Rightarrow \quad a=-1$$

$$\text{II:} \quad a+c=2 \quad \Rightarrow \quad c=3$$

Somit lautet die Lösung:

- $a=-1$
- $b=0$
- $c=3$
- $d=2$
  Die Funktion f lautet $f(x)=-x^3+3x+2$.

Aufgabe 9)