Seite Nr. 5)

> Gegeben ist die Kurvenschar $f_a(x) = \frac{1}{2}x^4 - ax^2 \quad (a > 0)$.

a)

> Diskutieren Sie die Kurvenschar allgemein.

Nullstellen der Funktion:

$$\begin{aligned} 0 &= f_a(x) \\ 0 &= \frac{1}{2}x^4 - ax^2 \\ 0 &= x^2\left(\frac{1}{2}x^2 - a\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}x^2 - a && \mid +a \\ a &= \frac{1}{2}x^2 && \mid \cdot 2 \\ 2a &= x^2 && \mid \surd \\ x_{1;2} &= \mp\sqrt{2a} \end{aligned}$$

> Daraus ergibt sich für alle $a > 0$ folgendes:

- $N_1(-\sqrt{2a} \mid 0)$
- $N_2(0 \mid 0)$
- $N_3(0 \mid 0)$
- $N_4(\sqrt{2a} \mid 0)$

$$\text{Notwendiges Kriterium für lokale Extrema:} \quad f_a'(x) = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= f_a'(x) \\ 0 &= 2x^3 - 2ax \\ 0 &= x(2x^2 - 2a) \\ 0 &= 2x^2 - 2a && \mid +2a \\ 2a &= 2x^2 && \mid \div 2 \\ a &= x^2 && \mid \surd \\ x_{1;3} &= \mp\sqrt{a} \end{aligned}$$

- $x_1 = -\sqrt{a}$
- $x_2 = 0$
- $x_3 = \sqrt{a}$

$$\text{Erstes hinrichteichendes Kriterium für lokale Extrema:} \quad f_a''(x) \neq 0$$

$$\begin{aligned} f_a''(x) &= 6x^2 - 2a \\ f_a''(-\sqrt{a}) &= 6\left(-\sqrt{a}\right)^2 - 2a \\ &= 6a - 2a \\ &= 4a > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_a''(x) &= 6x^2 - 2a \\ f_a''(0) &= 6(0)^2 - 2a \\ &= -2a < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_a''(\sqrt{a}) &= 6\left(\sqrt{a}\right)^2 - 2a \\ &= 6a - 2a \\ &= 4a > 0 \end{aligned}$$

> Daraus ergibt sich für alle $a > 0$ folgendes:

- Hochpunkt: $E_2(0 \mid 0)$
- Tiefpunkt: $E_1(-\sqrt{a} \mid -\frac{1}{2}a^2)$
- Tiefpunkt: $E_3(\sqrt{a} \mid -\frac{1}{2}a^2)$

$$\text{Notwendiges Kriterium Wendestellen:} \quad f_a''(x) = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= f_a''(x) \\ 0 &= 6x^2 - 2a \mid +2a \\ 2a &= 6x^2 && \mid \div 6 \\ \frac{a}{3} &= x^2 && \mid \surd \\ x_{1;2} &= \mp\sqrt{\frac{a}{3}} \end{aligned}$$

$$\text{Erstes hinrichteichendes Kriterium für Wendestellen:} \quad f_a'''(x) \neq 0$$

$$\begin{aligned} f_a'''(x) &= 12x \\ f_a''\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right) &= 12\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right) \\ &= -12\sqrt{\frac{a}{3}} < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_a''\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) &= 12\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) \\ &= 12\sqrt{\frac{a}{3}} > 0 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für alle $a > 0$ folgendes:

- Links-Rechts WP: $W_1\left(-\sqrt{\frac{a}{3}} \mid -\frac{5a^2}{18}\right)$
- Rechts-Links WP: $W_2\left(\sqrt{\frac{a}{3}} \mid -\frac{5a^2}{18}\right)$

Aus diesen Informationen folgen folgende Monotonieintervalle:

- Streng monoton steigend in: $x \in \left\{ \ \left]-\sqrt{a}; 0\right[\ ; \ \left]\sqrt{a}; \infty\right[\ \right\}$
- Streng monoton fallend in: $x \in \left\{ \ \left]-\infty; -\sqrt{a}\right[\ ; \ \left]0; \sqrt{a}\right[\ \right\}$

Verhalten im unendlichen.
Durch den $\frac{1}{2}x^4$ als Polynom größten Grades ergibt sich für das Grenzverhalten:

- $\lim_{x\to\infty} f_a(x) = \infty$
- $\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \infty$

---

b)

> Ortskurve Extrempunkte:

Von oben sind die Extrema bei

- $x_1 = -\sqrt{a}$
- $x_2 = 0$
- $x_3 = \sqrt{a}$
  Umgestellt ergibt sich daraus:
- $a = x_1^2$
- $0 = x_2$
- $a = x_3^2$
  Die Ortskurve lautet daher:

$$\begin{aligned} o(x) &= \frac{1}{2}x^4 - x^2 \cdot x^2 \\ &= -\frac{1}{2}x^4 \end{aligned}$$

> Ortskurve der Wendepunkte:

Von oben sind die Wendepunkte bei:

- $x_1 = -\sqrt{\frac{a}{3}}$
- $x_2 = \sqrt{\frac{a}{3}}$
  Umgestellt ergibt sich daraus:
- $a = 3x_1^2$
- $a = 3x_2^2$
  Die Ortskurve lautet daher:

$$\begin{aligned} o(x) &= \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 \cdot x^2 \\ &= -\frac{5}{2}x^4 \end{aligned}$$
