Seite 159, 11)

> Begründen Sie, dass der Graph der binomialverteilten Zufallsvariablen X mit den Parametern $n = 10$ und $p = \frac{1}{2}$ symmetrisch zur Geraden $x = 5$ ist. Verwenden Sie die Bernoulli-Formel.

$$
\begin{aligned}
P(X = k) &= \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\
P(X = k) &= \binom{10}{k} \cdot 0,5^k \cdot (1-0,5)^{10-k}
\end{aligned}
$$

Eine Funktion ist symmetrisch zu der Y-Achse, insofern $f(-x) = f(x)$ gilt. Die Symmetrie befindet sich hier an der Stelle $x = 0$. Laut Definition sind Werte für Stellen, die die gleiche Entfernung zu der Symmetriestelle haben, gleich. Insofern eine Funktion eine Achsensymmetrie zu einer Gerade $x = a$ hat, so muss durch die Beschreibung für Y-Achsensymmetrien folgendes gelten, damit eine Funktion Symmetrisch zu dieser Geraden heißt: $f(a-x) \equiv f(a+x)$.
Beispielsweise sei die Funktion $f(x) = 0,1(x-a)^4 + (x-a)^2$ gegeben, welche eine Achsensymmetrie zu der Geraden $x = a$ besitzt. Damit $f(a-x) \equiv f(a+x)$ für dieses Beispiel "bewiesen" werden kann, werde ich dies zunächst nur einsetzen und vereinfachen und auf Identität vergleichen.

$$
\begin{aligned}
f(a-x) &\stackrel{?}{=} f(a+x) \\
0,1((a-x)-a)^4 + ((a-x)-a)^2 &= 0,1((a+x)-a)^4 + ((a+x)-a)^2 \\
0,1(a-x-a)^4 + (a-x-a)^2 &= 0,1(a-x-a)^4 + (a-x-a)^2 \\
0,1(-x)^4 + (-x)^2 &= 0,1(x)^4 + (x)^2 && \left| \boxed{\begin{matrix} (-x)^4 = x^4 \\ (-x)^2 = x^2 \end{matrix}} \right. \\
0,1x^4 + x^2 &\equiv 0,1x^4 + x^2
\end{aligned}
$$

Da hier das beschriebene gilt, ist die Symmetrie an der Stelle a dargestellt. Generell gesehen lässt sich (anzunehmen) sagen, dass eine Geradensymmetrie an einer Funktion vorhanden ist, insofern es für $f(a-x) = f(a+x)$ eine Lösung $0 = 0$ gibt.

$$\exists a \in \mathbb{R}, f(a-x) \equiv f(a+x)$$

Beispiel zur Aussage

$f(x) = x^2 - 2x + 1$ wird auf eine Geradensymmetrie $x = a$ untersucht.

$$
\begin{aligned}
f(a-x) &= f(a+x) \\
(a-x)^2 - 2(a-x) + 1 &= (a+x)^2 - 2(a+x) + 1 \\
(a-x)^2 - 2a + 2x + 1 &= (a+x)^2 - 2a - 2x + 1 \\
a^2 - 2ax + x^2 - 2a + 2x + 1 &= a^2 + 2ax + x^2 - 2a - 2x + 1 \\
-2ax + 2x &= 2ax - 2x && | +2ax \\
2x &= 4ax - 2x && | +2x \\
4x &= 4ax && | \div(4x) \\
a &= 1
\end{aligned}
$$

Die Symmetrie besteht zu der Geraden $x = 1$.

Aufgabe

Damit die Geradensymmetrie von $P(X = k) = \binom{10}{k} \cdot 0,5^k \cdot (1-0,5)^{10-k}$ für $x = 5$ bewiesen werden kann, gilt erneut $f(a-x) = f(a+x)$ ($P(X = a-x) = P(X = a+x)$), wobei $a = 5$, durch $x = 5$ der Gerade gegeben ist.

$$
\begin{aligned}
P(X = a-x) &= P(X = a+x) \\
P(X = 5-x) &= P(X = 5+x) \\
\binom{10}{5-x} \cdot 0,5^{5-x} \cdot (1-0,5)^{10-(5-x)} &= \binom{10}{5+x} \cdot 0,5^{5+x} \cdot (1-0,5)^{10-(5+x)} \\
\frac{10!}{(10-(5-x))! \cdot (5-x)!} \cdot 0,5^5 \cdot \frac{1}{0,5^x} \cdot 0,5^{10-5+x} &= \frac{10!}{(10-(5+x))! \cdot (5+x)!} \cdot 0,5^5 \cdot 0,5^x \cdot 0,5^{10-5-x} \\
\frac{10!}{(10-5+x)! \cdot (5-x)!} \cdot \cancel{0,5^5} \cdot \cancel{\frac{1}{0,5^x}} \cdot 0,5^{10} \cdot \cancel{\frac{1}{0,5^5}} \cdot \cancel{0,5^x} &= \frac{10!}{(10-5-x)! \cdot (5+x)!} \cdot \cancel{0,5^5} \cdot \cancel{0,5^x} \cdot 0,5^{10} \cdot \cancel{\frac{1}{0,5^5}} \cdot \cancel{\frac{1}{0,5^x}} \\
\frac{10!}{(10-5+x)! \cdot (5-x)!} \cdot 0,5^{10} &= \frac{10!}{(10-5-x)! \cdot (5+x)!} \cdot 0,5^{10} \\
\frac{10!}{(5+x)! \cdot (5-x)!} \cdot 0,5^{10} &= \frac{10!}{(5-x)! \cdot (5+x)!} \cdot 0,5^{10} \\
1 &= 1
\end{aligned}
$$

Durch dem Erfüllen der Bedingung $P(X = 5-x) = P(X = 5+x)$ ist folglich bewiesen, dass eine Geradensymmetrie zu der Gerade $x = 5$ bei dieser Binomialverteilung besteht.

Übertragen auf generelle Verteilungen

Hier werde ich versuchen einen Zusammenhang zwischen einer Symmetriegerade und der Auswahl verschiedener n und p aufzustellen, insofern einer besteht.
Eine Binomialverteilung sei gegeben, mit den Parametern

> - $0 \leq p \leq 1$
> - $n \in \mathbb{N}_0$
> - $0 \leq k \leq n$
> - $0 \leq a \leq n$

$$
\begin{aligned}
P(X = a - x) &= P(X = a + x) \\
\binom{n}{a-x} \cdot p^{a-x} \cdot (1-p)^{n-(a-x)} &= \binom{n}{a+x} \cdot p^{a+x} \cdot (1-p)^{n-(a+x)} \\
\binom{n}{a-x} \cdot p^{a} \cdot \frac{1}{p^x} \cdot (1-p)^{n-a+x} &= \binom{n}{a+x} \cdot p^{a} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-a-x} \\
\binom{n}{a-x} \cdot p^{a} \cdot \frac{1}{p^x} \cdot (1-p)^{n} \cdot \frac{1}{(1-p)^a} \cdot (1-p)^x &= \binom{n}{a+x} \cdot p^{a} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n} \frac{1}{(1-p)^a} \cdot \frac{1}{(1-p)^x} \\
\binom{n}{a-x} \cdot \frac{(1-p)^x}{p^x} \cdot (1-p)^n \cdot \frac{p^a}{(1-p)^a} &= \binom{n}{a+x} \cdot (1-p)^n \cdot \frac{p^a}{(1-p)^a} \cdot \frac{p^x}{(1-p)^x} \\
\binom{n}{a-x} \cdot \frac{(1-p)^x}{p^x} &= \binom{n}{a+x} \cdot \frac{p^x}{(1-p)^x} \\
\frac{n!}{(n-(a-x))! \cdot (a-x)!} \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^x &= \frac{n!}{(n-(a+x))! \cdot (a+x)!} \cdot \left(\frac{p}{1-p}\right)^x \\
\frac{n!}{(n-a+x)! \cdot (a-x)!} \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^x &= \frac{n!}{(n-a-x)! \cdot (a+x)!} \cdot \left(\frac{p}{1-p}\right)^x
\end{aligned}
$$