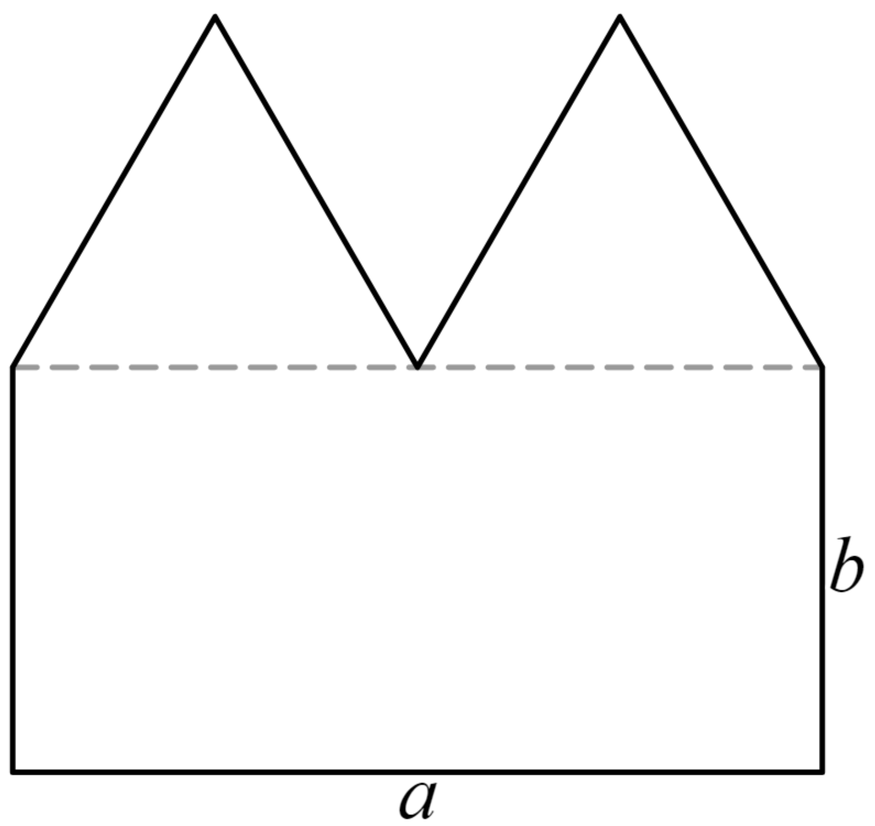
Hausform

> Eine Fläche ist aus einem Rechteck und zwei gleichseitigen Dreiecken aufgebaut. Die Abbildung verdeutlicht den Aufbau konkret. Der Umfang soll $100\,cm$ sein, während die Gesamtfläche maximal ist.



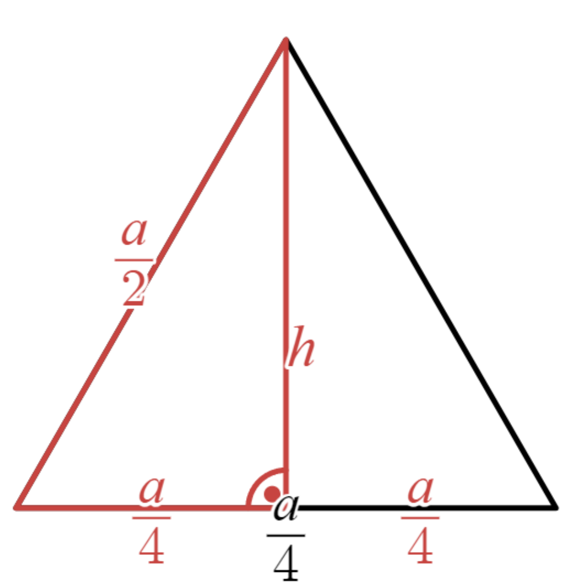
Wir erkennen das Rechteck mit den Maßen $a \times b$, und die zwei gleichseitigen Dreiecke mit Seitenlängen $\frac{a}{2}$.

Hauptbedingung

> Die Fläche soll maximiert werden. Daraus folgt folgende Hauptbedingung, wobei h die Höhe eines Dreiecks ist:

$$A(a;b) = a \cdot b + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h\right)$$
$$A(a;b) = a \cdot b + \frac{a}{2} \cdot h$$

Die Höhe h lässt sich mittels des Dreiecks selbst bestimmen.



Hier ergibt sich für h:

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{2^2} &= \frac{a^2}{4^2} + h^2 && \mid -\frac{a^2}{4^2} \\
h^2 &= \frac{a^2}{2^2} - \frac{a^2}{4^2} \\
h^2 &= \frac{4a^2}{16} - \frac{a^2}{16} \\
h^2 &= \frac{4a^2 - a^2}{16} \\
h^2 &= \frac{3a^2}{16} && \mid \sqrt{} \\
h &= \frac{\sqrt{3} \cdot a}{4}
\end{aligned}$$

Die Hauptbedingung ist daher:

$$\begin{aligned}
A(a;b) &= a \cdot b + \frac{a}{2} \cdot h \\
A(a;b) &= a \cdot b + \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot a}{4} \\
A(a;b) &= a \cdot b + \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{8}
\end{aligned}$$

Nebenbedingung

> Der Umfang beschreibt die Nebenbedingung.

$$\begin{aligned} 100 &= a + 2b + 4 \cdot \frac{a}{2} \\ 100 &= a + 2b + 2a \\ 100 &= 3a + 2b && \mid -3a \\ 2b &= 100 - 3a && \mid \div 2 \\ b &= \frac{100 - 3a}{2} \end{aligned}$$

Zielfunktion

> Die Nebenbedingung nach b wird in $A(a;b)$ eingesetzt.

$$\begin{aligned} A(a;b) &= a \cdot b + \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{8} \\ A\left(a; \frac{100-3a}{2}\right) &= a \cdot \frac{100-3a}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{8} \\ &= \frac{100a - 3a^2}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{8} \\ &= \frac{400a - 12a^2}{8} + \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{8} \\ &= \frac{\sqrt{3} \cdot a^2 - 12a^2 + 400a}{8} \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{12}{8}\right)a^2 + \frac{400}{8}a \\ A(a) &= \left(\frac{\sqrt{3} - 12}{8}\right)a^2 + 50a \end{aligned}$$

Extremwertanalyse

$$\text{Notwendiges Kriterium für lokale Extrema:} \quad A'(a) = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= A'(a) \\ 0 &= \left(\frac{\sqrt{3} - 12}{4}\right)a + 50 && \mid -50 \\ -50 &= \left(\frac{\sqrt{3} - 12}{4}\right)a && \mid \cdot \frac{4}{\sqrt{3} - 12} \\ a &= -50 \cdot \frac{4}{\sqrt{3} - 12} \\ a &= \frac{200\sqrt{3} + 2400}{141} \approx 19,478 \ cm \end{aligned}$$

$$\text{Erstes hinreichendes Kriterium für lokale Extrema:} \quad A''(a) \neq 0$$

$$\begin{aligned} A''(a) &= \left(\frac{\sqrt{3} - 12}{4}\right) \\ A''\left(\frac{200\sqrt{3} + 2400}{141}\right) &= \left(\frac{\sqrt{3} - 12}{4}\right) < 0 \end{aligned}$$

$a = \frac{200\sqrt{3}+2400}{141}$ ist die Kantenlänge, die eine maximale Fläche beschreibt.
Demnach gilt für b:

$$\begin{aligned} b &= \frac{100 - 3a}{2} \\ b &= \frac{100 - 3 \cdot \frac{200\sqrt{3}+2400}{141}}{2} \\ &\vdots \\ b &= \frac{6900 - 600\sqrt{3}}{282} \approx 20,783 \ cm \end{aligned}$$
