Seite 194 Nr. 7ad)

> Für welche reellen Zahlen c liegt der Punkt P innerhalb der Kugel, auf der Kugel bzw. außerhalb der Kugel mit der Gleichung $x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1+6x_2-2x_3-36=0$?

---

a)

Gegeben ist $P(3\mid 2\mid c)$.
Der Punkt P ist auf der Kugel, wenn:

- $x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1+6x_2-2x_3=36$.
  Der Punkt P ist in der Kugel, wenn:
- $x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1+6x_2-2x_3<36$.
  Der Punkt P ist außerhalb der Kugel, wenn:
- $x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1+6x_2-2x_3>36$.

> Vereinfachung der Gleichung nach Einsetzen von P:

- $x_1=3$
- $x_2=2$
- $x_3=c$

$$\begin{aligned} x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1+6x_2-2x_3&=36 \\ 3^2+2^2+c^2-4\cdot 3+6\cdot 2-2c&=36 && \mid -13 \\ c^2-2c&=23 && \mid -23 \\ c^2-2c-23&=0 \end{aligned}$$

Punkt P ist auf der Kugel:

$$\begin{aligned} c^2-2c-23&=0 && \mid \text{pq-Formel} \\ c_{1;2}&=-\frac{p}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} && \mid \boxed{p=-2 \qquad q=-23} \\ &=-\frac{-2}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2+23} \\ &=1\mp\sqrt{24} \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $c_1=1-2\sqrt{6}$, oder $c_2=1+2\sqrt{6}$ sein muss, damit P auf der Kugel liegt.

> Da c_1 und c_2 Grenzen zwischen "Punkt innerhalb" und "Punkt außerhalb" sind, so sind diese ebenfalls in den Intervallen auffindbar.
> Somit gilt:

- Auf: $c\in\{c_1;c_2\}$
- In: $c\in(c_1;c_2)$
- Außerhalb: $c\in(-\infty;c_1)\cup(c_2;\infty)$

Daraus folgt:

- Auf: $c\in\{1-2\sqrt{6};1+2\sqrt{6}\}$
- In: $c\in\left(1-2\sqrt{6};1+2\sqrt{6}\right)$
- Außerhalb: $c\in\left(-\infty;1-2\sqrt{6}\right)\cup\left(1+2\sqrt{6};\infty\right)$.

---

d)

> Vereinfachung der Gleichung nach Einsetzen von P:

- $x_1=0$
- $x_2=0$
- $x_3=c$

$$\begin{aligned} x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1+6x_2-2x_3&=36 \\ 0^2+0^2+c^2-0\cdot 3+0\cdot 2-2c&=36 \\ c^2-2c&=36 && \mid -36 \\ c^2-2c-36&=0 && \mid \text{pq-Formel} \\ c_{1;2}&=-\frac{p}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} && \mid \boxed{p=-2 \qquad q=-36} \\ &=-\frac{-2}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2+36} \\ &=1\mp\sqrt{37} \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $c_1=1-\sqrt{37}$, oder $c_2=1+\sqrt{37}$ sein muss, damit P auf der Kugel liegt.

> Da c_1 und c_2 Grenzen zwischen "Punkt innerhalb" und "Punkt außerhalb" sind, so sind diese ebenfalls in den Intervallen auffindbar.
> Somit gilt:

- Auf: $c\in\{c_1;c_2\}$
- In: $c\in(c_1;c_2)$
- Außerhalb: $c\in(-\infty;c_1)\cup(c_2;\infty)$

Daraus folgt:

- Auf: $c \in \{1-\sqrt{37}; 1+\sqrt{37}\}$
- In: $c \in \left(1-\sqrt{37}; 1+\sqrt{37}\right)$
- Außerhalb: $c \in \left(-\infty; 1-\sqrt{37}\right) \cup \left(1+\sqrt{37}; \infty\right)$.