Seite 197 Nr. 1bcd)

> Untersuchen Sie, ob die Ebene E die Kugel K schneidet, oder keinen Punkt mit ihr gemeinsam hat.

b)

- $E: \; -3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 27$
- $K: \; (x_1 - 4)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 2)^2 = 49$

Durch $\sqrt{49} = 7$ folgt ein Radius r der Kugel von 7.

- $r = 7 \, [LE]$

Der kürzeste Abstand zwischen dem Mittelpunkt der Kugel und der Ebene bestimmt die Lagebeziehung zwischen Kugel K und Ebene E.
Dieser Punkt wird weitergehend mit M' beschrieben.

$$q: \vec{x} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

Der Mittelpunkt lässt sich ablesen, wie auch der Normalenvektor der Ebene.

- $M(4 \mid -1 \mid 2)$
- $\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$
  - $\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$

$$q: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

> Setzen wir diese Lotgerade nun in die Ebene ein, so erhalten wir durch bestimmen von λ einen Wert, der die Länge des Verbindungsvektors zwischen M und M' beschreibt.

$$\begin{aligned} E: \; -3x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 27 \\ -3 \cdot \left(4 - \frac{3}{7}\lambda\right) + 6 \cdot \left(-1 + \frac{6}{7}\lambda\right) - 2 \cdot \left(2 - \frac{2}{7}\lambda\right) &= 27 \\ -12 + \frac{9}{7}\lambda - 6 + \frac{36}{7}\lambda - 4 + \frac{4}{7}\lambda &= 27 \\ -22 + 7\lambda &= 27 \qquad\qquad \mid +22 \quad \div 7 \\ \lambda &= \frac{49}{7} = 7. \end{aligned}$$

Da hier $\lambda = 7$, dadurch ist diese Ebene eine Tangentialebene der Kugel K.

---

c)

- $E: \; 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 30$
- $K: x_1^2 - 6x_1 + x_2^2 - 2x_2 + x_3^2 - 15 = 0$

$$\begin{aligned} x_1^2 - 6x_1 + 9 + x_2^2 - 2x_2 + 1 + x_3^2 &= 15 + 9 + 1 \\ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2 &= 25 \end{aligned}$$

Daraus folgt ein Mittelpunkt $M(3 \mid 1 \mid 0)$, und ein Radius $r = 5$.

Der Normaleneinheitsvektor der Ebene lautet $\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{29}$.

Die normierte Lotgerade lautet somit:

$$q: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{29}} \\ -\frac{3}{\sqrt{29}} \\ \frac{4}{\sqrt{29}} \end{pmatrix}$$

Diese in E eingesetzt gibt den Abstand der Ebene zu M an:

$$\begin{aligned} E: \; 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 30 \\ 2 \cdot \left(3 + \frac{2}{\sqrt{29}}\lambda\right) - 3 \cdot \left(1 - \frac{3}{\sqrt{29}}\lambda\right) + 4 \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{29}}\lambda\right) &= 30 \\ 6 + \frac{4}{\sqrt{29}}\lambda - 3 + \frac{9}{\sqrt{29}}\lambda + \frac{16}{\sqrt{29}}\lambda &= 30 \\ 3 + \sqrt{29}\lambda &= 30 \qquad\qquad \mid -3 \quad \div \sqrt{29} \\ \lambda &= \frac{27 \cdot \sqrt{29}}{29} \approx 5{,}0138 > r \end{aligned}$$

Da $\lambda > r$, so berührt sich die Ebene und die Kugel nicht.

---

d)

- $E: \vec{x} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + 22 = 0$
- $K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}\right]^2 = 29$

Daraus folgt ein Mittelpunkt $M(5 \mid -3 \mid -7)$, und ein Radius $r = \sqrt{29}$.

Der Normaleneinheitsvektor der Ebene lautet $\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{29}$.

Die normierte Lotgerade lautet somit:

$$q : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{29}} \\ \frac{4}{\sqrt{29}} \\ -\frac{3}{\sqrt{29}} \end{pmatrix}$$

Diese in E eingesetzt gibt den Abstand der Ebene zu M an:

$$\begin{aligned} E : \vec{x} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + 22 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= -22 \\ -2 \cdot \left(5 - \frac{2}{\sqrt{29}}\lambda\right) + 4 \cdot \left(-3 + \frac{4}{\sqrt{29}}\lambda\right) - 3 \cdot \left(-7 - \frac{3}{\sqrt{29}}\lambda\right) &= -22 \\ -10 + \frac{4}{\sqrt{29}}\lambda - 12 + \frac{16}{\sqrt{29}}\lambda + 21 + \frac{9}{\sqrt{29}}\lambda &= -22 \\ -1 + \sqrt{29}\lambda &= -22 \qquad\qquad | +1 \quad \div \sqrt{29} \\ \lambda &= -\frac{21 \cdot \sqrt{29}}{29} \approx -3,8996 \end{aligned}$$

Da $|\lambda| < r$, so schneidet die Ebene E die Kugel K.