Parallele Tangentialebenen auf generellen Kugeln

> Eine Ebene $E: \vec{n} \circ \overrightarrow{OX} = \vec{n} \circ \overrightarrow{OP}$, und eine Kugel $K: \left(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OM}\right)^2 = r^2$ seien gegeben.
> Zwei zu E parallele Ebenen $F_{1;2}$ sollen unterschiedlich sein, und Tangentialebene der Kugel K heißen.

Zunächst einmal definiere ich folgendermaßen:

- $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Die Ebenen $F_{1;2}$ besitzen den gleichen Abstand zu dem Mittelpunkt, da diese tangential auf der Kugel K mit Radius r liegen. Folglich $d(M;F_1) = d(M;F_2) = r$.

> Da die Ebene E_M den Punkt M enthält und parallel zu E ist, so kann E_M zur Bildung von $F_{1;2}$ verwendet werden.
> Es gilt:
>
> - $M \in E_M$
> - $E_M \parallel E$
>   - $E_M \parallel F_{1;2}$
> - $d(E_M;F_1) = d(E_M;F_2)$

Definiert lautet E_M folgendermaßen:

$$E_M: \vec{n} \circ \overrightarrow{OX} = \vec{n} \circ \overrightarrow{OM}$$

Wie beschrieben wird E_M verwendet, um $F_{1;2}$ zu bestimmen. Hierzu wird d als Variable verwendet, die die Ebene zur Tangentialebene von K macht.

$$E_M: \vec{n} \circ \overrightarrow{OX} = \vec{n} \circ \overrightarrow{OM} + d$$

Folgend werde ich einen generell beschriebenen Schnittpunkt darstellen:

> GeradeInKugel
>
> Gegeben seien
>
> - $K_1: \left[\vec{x} - \overrightarrow{OM_1}\right]^2 = r^2$
> - $g: \vec{x} = \overrightarrow{OM_1} + \lambda \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$
>
> Um die Schnittmenge der Kugel K und g zu bestimmen, muss g in K eingesetzt werden:
>
> $$\begin{aligned} K_1: \left[\vec{x} - \overrightarrow{OM_1}\right]^2 &= r^2 \\ \left[\overrightarrow{OM_1} + \lambda \cdot \overrightarrow{M_1M_2} - \overrightarrow{OM_1}\right]^2 &= r^2 \\ \left[\lambda \cdot \overrightarrow{M_1M_2}\right]^2 &= r^2 \\ \lambda^2 \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \circ \overrightarrow{M_1M_2} &= r^2 \\ \lambda^2 &= \frac{r^2}{\overrightarrow{M_1M_2} \circ \overrightarrow{M_1M_2}} \\ \lambda^2 &= \frac{r^2}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|^2} \\ \lambda &= \pm \frac{r}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|} \end{aligned}$$
>
> Die Schnittmenge lautet daher:
>
> $$\overrightarrow{OS_{1;2}} = \overrightarrow{OM_1} \pm \frac{r}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$$
>
> ---
>
> ---

Bedenken wir hier, dass $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{n}$ ist, und $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM}$ ist, so erhalten wir für die Schnittmenge, die unsere gesuchten Berührungspunkte beschreibt:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS_{1;2}} &= \overrightarrow{OM_1} \pm \frac{r}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \\ \overrightarrow{OS_{1;2}} &= \overrightarrow{OM} \pm \frac{r}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

Setzen wir diese Schnittpunkte in E_M ein, und lösen anschließend nach d auf, erhalten wir folgendes für die Werte d:

$$\begin{aligned} E_M: \vec{n} \circ \overrightarrow{OX} &= \vec{n} \circ \overrightarrow{OM} + d \\ \vec{n} \circ \left[\overrightarrow{OM} \pm \frac{r}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}\right] &= \vec{n} \circ \overrightarrow{OM} + d \\ \vec{n} \circ \overrightarrow{OM} \pm \frac{r}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \circ \vec{n} &= \vec{n} \circ \overrightarrow{OM} + d \\ \pm \frac{r}{|\vec{n}|} \cdot |\vec{n}|^2 &= d \\ d &= \pm r \cdot |\vec{n}| \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Ebenen $F_{1;2}$:

$$E_M : \vec{n} \circ \overrightarrow{OX} = \vec{n} \circ \overrightarrow{OM} + d$$
$$F_{1;2} : \vec{n} \circ \overrightarrow{OX} = \vec{n} \circ \overrightarrow{OM} \pm r \cdot \left|\vec{n}\right|$$