Seite 159, 11)

> Begründen Sie, dass der Graph der binomialverteilten Zufallsvariablen X mit den Parametern $n = 10$ und $p = \frac{1}{2}$ symmetrisch zur Geraden $x = 5$ ist. Verwenden Sie die Bernoulli-Formel.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$
$$P(X = k) = \binom{10}{k} \cdot 0,5^k \cdot (1-0,5)^{10-k}$$

Eine Funktion ist symmetrisch zu der Y-Achse, insofern $f(-x) \equiv f(x)$ gilt. Die Symmetrie befindet sich hier an der Stelle $x = 0$. Laut Definition sind Werte für Stellen, die die gleiche Entfernung zu der Symmetriestelle haben, gleich. Insofern eine Funktion eine Symmetrie zu einer Gerade $x = a$ hat, so muss durch die Beschreibung für Y-Achsensymmetrien folgendes gelten, damit eine Funktion Symmetrisch zu dieser Geraden heißt: $f(a-x) \equiv f(a+x)$.
Beispielsweise sei die Funktion $f(x) = 0,1(x-a)^4 + (x-a)^2$ gegeben, welche eine Achsensymmetrie zu der Geraden $x = a$ besitzt. Damit $f(a-x) \equiv f(a+x)$ für dieses Beispiel "bewiesen" werden kann, werde ich dies zunächst nur einsetzen und vereinfachen und auf Identität vergleichen.

$$\begin{aligned}
f(a-x) &\overset{?}{=} f(a+x) \\
0,1((a-x)-a)^4 + ((a-x)-a)^2 &= 0,1((a+x)-a)^4 + ((a+x)-a)^2 \\
0,1(a-x-a)^4 + (a-x-a)^2 &= 0,1(a-x-a)^4 + (a-x-a)^2 \\
0,1(-x)^4 + (-x)^2 &= 0,1(x)^4 + (x)^2 \qquad \Big| \boxed{\begin{matrix}(-x)^4 = x^4 \\ (-x)^2 = x^2\end{matrix}} \\
0,1x^4 + x^2 &\equiv 0,1x^4 + x^2
\end{aligned}$$

Da hier das beschriebene gilt, ist die Symmetrie an der Stelle a dargestellt. Generell gesehen lässt sich (anzunehmen) sagen, dass eine Geradensymmetrie an einer Funktion vorhanden ist, insofern es für $f(a-x) = f(a+x)$ eine Lösung $0 = 0$ gibt.

$$\forall x \exists a \in \mathbb{R}, \quad f(a-x) \equiv f(a+x)$$

> Geradensymmetrie
>
> ## Y-Achse
>
> Wenn der Funktionsterm nur Polynome mit geraden Graden besitzt, dann ist der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse und umgekehrt.
>
> $$f(x) = f(-x)$$
>
> ## *"Geradensymmetrie"*
>
> Wenn ein Funktionsterm zu einer Gerade $x = a$ eine Symmetrie besitzt, dann gilt:
>
> $$\forall x \exists a \in \mathbb{R}, \quad f(a-x) \equiv f(a+x)$$
>
> (Es gibt einen Parameter a, durch welchen die aus f entstehenden Terme identisch für alle x sind)
>
> Eine Gerade ist gegeben, von welcher alle Werte der Funktion x Stellen entfernt gleich sind. Die Verschiebung der Funktion wird mit a dargestellt. Insofern $a = 0$, so ist die Gerade die Y-Achse, wodurch $f(x) = f(-x)$ wieder gilt.
> (Hier ist es mindestens ein Wert für a, da für periodische Funktionen mehrere Symmetriegeraden vorhanden sein können)

Aufgabe

Damit die Geradensymmetrie von $P(X = k) = \binom{10}{k} \cdot 0,5^k \cdot (1-0,5)^{10-k}$ für $x = 5$ bewiesen werden kann, gilt erneut
$f(a-x) = f(a+x)$
$(P(X = a-x) = P(X = a+x))$, wobei $a = 5$, durch $x = 5$ der Gerade gegeben ist.

$$\begin{aligned}
P(X = a-x) &= P(X = a+x) \\
P(X = 5-x) &= P(X = 5+x) \\
\binom{10}{5-x} \cdot 0,5^{5-x} \cdot (1-0,5)^{10-(5-x)} &= \binom{10}{5+x} \cdot 0,5^{5+x} \cdot (1-0,5)^{10-(5+x)} \\
\frac{10!}{(10-(5-x))! \cdot (5-x)!} \cdot 0,5^5 \cdot \frac{1}{0,5^x} \cdot 0,5^{10-5+x} &= \frac{10!}{(10-(5+x))! \cdot (5+x)!} \cdot 0,5^5 \cdot 0,5^x \cdot 0,5^{10-5-x} \\
\frac{10!}{(10-5+x)! \cdot (5-x)!} \cdot \cancel{0,5^5} \cdot \cancel{\frac{1}{0,5^x}} \cdot 0,5^{10} \cdot \cancel{\frac{1}{0,5^5}} \cdot \cancel{0,5^x} &= \frac{10!}{(10-5-x)! \cdot (5+x)!} \cdot \cancel{0,5^5} \cdot \cancel{0,5^x} \cdot 0,5^{10} \cdot \cancel{\frac{1}{0,5^5}} \cdot \cancel{\frac{1}{0,5^x}} \\
\frac{10!}{(10-5+x)! \cdot (5-x)!} \cdot 0,5^{10} &= \frac{10!}{(10-5-x)! \cdot (5+x)!} \cdot 0,5^{10} \\
\frac{10!}{(5+x)! \cdot (5-x)!} \cdot 0,5^{10} &= \frac{10!}{(5-x)! \cdot (5+x)!} \cdot 0,5^{10} \\
1 &= 1
\end{aligned}$$

Durch dem Erfüllen der Bedingung $P(X=5-x)=P(X=5+x)$ ist folglich "bewiesen", dass eine Geradensymmetrie zu der Gerade $x=5$ bei dieser Binomialverteilung besteht.

Übertragen auf generelle Verteilungen

Hier werde ich versuchen einen Zusammenhang zwischen einer *"Symmetriegerade"* und der Auswahl verschiedener n und p aufzustellen, insofern einer besteht.
Eine Binomialverteilung sei gegeben, mit den Parametern

> - $0<p<1$
> - $n\in\mathbb{N}_0$
> - $0\leq(k,a)\leq n$

$$\begin{aligned}
P(X=a-k) &= P(X=a+k)\\
\binom{n}{a-k}\cdot p^{a-k}\cdot(1-p)^{n-(a-k)} &= \binom{n}{a+k}\cdot p^{a+k}\cdot(1-p)^{n-(a+k)}\\
\binom{n}{a-k}\cdot p^{a}\cdot\frac{1}{p^k}\cdot(1-p)^{n-a+k} &= \binom{n}{a+k}\cdot p^{a}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-a-k}\\
\binom{n}{a-k}\cdot p^{a}\cdot\frac{1}{p^k}\cdot(1-p)^{n}\cdot\frac{1}{(1-p)^a}\cdot(1-p)^k &= \binom{n}{a+k}\cdot p^{a}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n}\frac{1}{(1-p)^a}\cdot\frac{1}{(1-p)^k}\\
\binom{n}{a-k}\cdot\frac{(1-p)^k}{p^k}\cdot(1-p)^n\cdot\frac{p^a}{(1-p)^a} &= \binom{n}{a+k}\cdot(1-p)^n\cdot\frac{p^a}{(1-p)^a}\cdot\frac{p^k}{(1-p)^k}\\
\binom{n}{a-k}\cdot\frac{(1-p)^k}{p^k} &= \binom{n}{a+k}\cdot\frac{p^k}{(1-p)^k}\\
\binom{n}{a-k}\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^k &= \binom{n}{a+k}\cdot\left(\frac{p}{1-p}\right)^k
\end{aligned}$$

Gesehen kann dies wie eine Art von Koeffizientenvergleich, wobei die beiden Binomialkoeffizienten und die Basen der Exponentialfunktionen auf einen identischen Wert (hier für alle k) gebracht werden sollen.
Insofern beide identisch sind, so sind beide Terme ebenfalls identisch.

Vergleich der Binomialkoeffizienten

Anfangen werde ich mit den Binomialkoeffizienten.

> nÜberK=nÜberN-k
>
> $$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &\overset{?}{=} \binom{n}{n-k}\\
\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} &= \frac{n!}{(n-(n-k))!\cdot(n-k)!}\\
\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} &= \frac{n!}{(n-n+k)!\cdot(n-k)!}\\
\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} &\equiv \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}
\end{aligned}$$

Da hier $k=n-k$ im ***(Nenner vom Binomialkoeffizienten?)*** dargestellt ist, werde ich diesen dazu benutzen, um $a-k$ und $a+k$ durch diesen gleich zu setzen.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0n & k & a & -k\\ n & -k & a & k\end{array}\right)\quad\begin{array}{l}|+k\\ |-k\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0n & 2k & a\\ n & -2k & a\end{array}\right)\quad |+II$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} n & 0 & 2a\\ n & -k & a\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{lll}\text{Aus I:} & n=2a & |\div 2\\ & a=0,5n & \end{array}$$

Folglich existiert eine Symmetriegerade $x=0,5n$ für aktuell unbekannte p.

Vergleich der Exponentialfunktionen

Für die Exponentialfunktionen der beiden Terme gilt, damit diese identisch sind $\left(\frac{1-p}{p}\right)^k=\left(\frac{p}{1-p}\right)^k$. Die Exponenten sind hier identisch, weshalb gleiche Werte der Basen diese Bedingung herstellt.
Folglich gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1-p}{p} &= \frac{p}{1-p} \qquad\qquad\qquad \left| -\frac{1-p}{p}\right. \\
0 &= \frac{p}{1-p} - \frac{1-p}{p} \\
0 &= \frac{p^2-(1-p)^2}{p-p^2} \\
0 &= \frac{p^2-(1-2p+p^2)}{p-p^2} \\
0 &= \frac{p^2-1+2p-p^2}{p-p^2} \\
0 &= \frac{2p-1}{p-p^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccll|cccl}
0 & = & 2p-1 & \mid +1 & 0 & = & p-p^2 & \\
-1 & = & 2p & \mid \div 2 & 0 & = & p\cdot(1-p) & \mid p_{n1}=0 \\
p & = & 0,5 & & 0 & = & 1-p & \mid -1 \quad \mid \div(-1) \\
p & = & 0,5 & & p & = 1 & &
\end{array}$$

Folglich daraus muss $p = 0,5$ sein. Zusätzlich dazu darf p weder 0, noch 1 annehmen, da hier durch null geteilt werden würde.

Einsetzen der Werte p und a

Die erhaltenen Werte und Verbindungen der Variablen $p = 0,5$ und $a = 0,5n$ werde ich zum Schluss in die Ursprüngliche Funktion oben einsetzen um diese auf Identität zu bringen:

$$\begin{aligned}
P(X=a-k) &= P(X=a+k) \\
\binom{n}{a-k}\cdot p^{a-k}\cdot(1-p)^{n-(a-k)} &= \binom{n}{a+k}\cdot p^{a+k}\cdot(1-p)^{n-(a+k)} \\
\binom{n}{0,5n-k}\cdot 0,5^{0,5n-k}\cdot(1-0,5)^{n-(0,5n-k)} &= \binom{n}{0,5n+k}\cdot 0,5^{0,5n+k}\cdot(1-0,5)^{n-(0,5n+k)} \\
\binom{n}{0,5n-k}\cdot 0,5^{0,5n-k}\cdot 0,5^{n-0,5n+k} &= \binom{n}{0,5n+k}\cdot 0,5^{0,5n+k}\cdot 0,5^{n-0,5n-k} \\
\binom{n}{0,5n-k}\cdot 0,5^{0,5n-k}\cdot 0,5^{0,5n+k} &= \binom{n}{0,5n+k}\cdot 0,5^{0,5n+k}\cdot 0,5^{0,5n-k} \\
\binom{n}{0,5n-k} &= \binom{n}{0,5n+k} \\
\frac{n!}{(n-(0,5n-k))!\cdot(0,5n-k)!} &= \frac{n!}{(n-(0,5n+k))!\cdot(0,5n+k)!} \\
\frac{n!}{(n-0,5n+k)!\cdot(0,5n-k)!} &= \frac{n!}{(n-0,5n-k)!\cdot(0,5n+k)!} \\
\frac{n!}{(0,5n+k)!\cdot(0,5n-k)!} &\equiv \frac{n!}{(0,5n-k)!\cdot(0,5n+k)!} \\
0 &\equiv 0
\end{aligned}$$

Ende der Untersuchung und "Fazit"

Durch diese letzten beiden "Untersuchungen" zeigt sich, dass jede Binomialverteilung mit dem Wert $p = 0,5$ für alle n eine Geradensymmetrie mit der Geraden $x = 0,5n$ besitzt.

■

$p = 0,5:$