# Schneiden von Kreisen und Kugeln

Versuchen werde ich hier einen funktionalen Zusammenhang des folgenden Sachverhaltes zu ermitteln:

> Wenn man einen Kreis mit dem Radius $r$ an einer Sekante mit abstand $h$ zu einer parallelen Tangente schneidet, wie wird der Flächeninhalt $A$ verändert.

Pasted image 20240103145623.png

---

## Beschreibung in Bezügen

Ein Kreis kann durch $x^2 + y^2 = r^2$ dargestellt werden. Vereinfacht man dies nun auf $y$, so gilt für den Kreis $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ . Da ich diesen Term folglich als eine Funktion behandeln werde, so muss das $\pm$ aus diesem verschwinden. Dadurch verlieren wir die untere Hälfte des Kreises.

Verschiebt man nun diesen Halbkreis so, dass Nullstellen von $y$ den Schnittpunkten der Sekante in der Distanz zueinander gleich sind, so bildet sich folgende Funktion:

$$a_o(x) = \sqrt{r^2 - x^2} + h - r$$

Allerdings muss beachtet werden, dass für $h$ folgender Definitionsbereich gelten muss.

$$D_1 : 0 \leq h \leq r$$

---

## Beschreiben des Flächeninhaltes der kleineren Fläche

Da $a_o(x) = \sqrt{r^2 - x^2} + h - r$ gültig für den Flächeninhalt ist, und die Fläche der x-Achse identisch ist wie beim Kreis, so müssen die Nullstellen gefunden werden.

$$\begin{aligned}
0 &= \sqrt{r^2 - x^2} + h - r && |+r-h \\
r - h &= \sqrt{r^2 - x^2} && |()^2 \\
r^2 - x^2 &= (r-h)^2 \\
r^2 - x^2 &= r^2 - 2rh + h^2 && |-r^2 \\
-x^2 &= -2rh + h^2 && |\cdot(-1) \\
x^2 &= 2rh - h^2 && |\sqrt{} \\
x_{l,r} &= \mp\sqrt{2rh - h^2}
\end{aligned}$$

Mit diesem Ausdruck für Nullstellen kann nun der Flächeninhalt der Funktion gebildet werden. Es gilt:

$$A(x) = \left| \int_{x_l}^{x_r} a_o(x) dx \right|$$

---

## Berechnung des Flächeninhaltes

Durch $A(x)$ wird der Flächeninhalt dargestellt.

$$\begin{aligned}
A_o(x) &= \left| \int_{x_l}^{x_r} a_o(x) dx \right| \\
&= \left| \int_{x_l}^{x_r} \sqrt{r^2 - x^2} + h - r \; dx \right| \\
&= \left| \int_{x_l}^{x_r} \sqrt{d^2 - x^2} \; dx + \int_{x_l}^{x_r} h \; dx + \int_{x_l}^{x_r} -r \; dx \right|
\end{aligned}$$

Weil die Funktion $a_o(x)$ eine y-Achsen Symmetrie besitzt, so kann eine der Integralgrenzen auf $0$ gesetzt werden. Zusätzlich muss das Integral darauf mit $2$ multipliziert werden, da das Intervall davor um die hälfte kleiner gemacht wurde.

$$
\begin{aligned}
A_o(x) &= 2\left|\int_0^{x_r} a_o(x)dx\right| \\
&= 2\cdot\left|\int_0^{x_r}\sqrt{r^2-x^2}\ dx + \int_0^{x_r} h\ dx + \int_0^{x_r} -r\ dx\right| \\
&= 2\cdot\left|\left[\frac{1}{2}\cdot\left(x\cdot\sqrt{r^2-x^2}+r^2\cdot\sin^{-1}\left(\frac{x}{r}\right)\cdot\operatorname{sgn}(r)\right)\right]_0^{x_r} + \left[hx\right]_0^{x_r} + \left[-rx\right]_0^{x_r}\right| \\
&= 2\cdot\left|\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2rh-h^2}\cdot\sqrt{r^2-\sqrt{2rh-h^2}^2}+r^2\cdot\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2rh-h^2}}{r}\right)\cdot\operatorname{sgn}(r)\right)\right. \\
&\quad\left. -\frac{1}{2}\cdot\left(0\cdot\sqrt{r^2-0^2}+r^2\cdot\sin^{-1}\left(\frac{0}{r}\right)\cdot\operatorname{sgn}(r)\right)+\left(h\cdot\sqrt{2rh-h^2}-h\cdot 0\right)+\left(-r\cdot\sqrt{2rh-h^2}-(-r\cdot 0)\right)\right| \\
&= 2\cdot\left|\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2rh-h^2}\cdot\sqrt{r^2-\sqrt{2rh-h^2}^2}+r^2\cdot\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2rh-h^2}}{r}\right)\cdot\operatorname{sgn}(r)\right)\right. \\
&\quad\left. +h\cdot\sqrt{2rh-h^2}-r\cdot\sqrt{2rh-h^2}\right| \\
&= 2\cdot\left|\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2rh-h^2}\cdot\sqrt{r^2-2rh+h^2}+r^2\cdot\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2rh-h^2}}{r}\right)\cdot\operatorname{sgn}(r)\right)+\sqrt{2rh-h^2}\cdot(h-r)\right| \\
&= \left|\sqrt{2rh-h^2}\cdot(r-h)+r^2\cdot\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2rh-h^2}}{r}\right)+2\cdot\sqrt{2rh-h^2}\cdot(h-r)\right| \\
&= \left|\sqrt{2rh-h^2}\cdot\big((r-h)+2(h-r)\big)+r^2\cdot\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2rh-h^2}}{r}\right)\right| \\
&= \left|\sqrt{2rh-h^2}\cdot\big(-(h-r)+2(h-r)\big)+r^2\cdot\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2rh-h^2}}{r}\right)\right| \\
&= \left|\sqrt{2rh-h^2}\cdot(h-r)+r^2\cdot\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2rh-h^2}}{r}\right)\right| \\
A_o(h) &= \left|\sqrt{r^2-(h-r)^2}\cdot(h-r)+r^2\cdot\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{r^2-(h-r)^2}}{r}\right)\right|
\end{aligned}
$$

Diese Funktion unter Abhängigkeit von $h$ gilt nur, insofern $D_1$ erfüllt, und $r > 0$ ist.
*Der Betrag kann zusätzlich ebenfalls entfernt werden, da die Funktion in dem Intervall in dem integriert wird immer $\geq 0$ ist.*

Wenn man einen Kreis laut der Formel in der hälfte teilt, also $h = r$ ist, so fällt folgendes auf:

$$
\begin{aligned}
A_o(h) &= \left|\sqrt{r^2-(h-r)^2}\cdot(h-r)+r^2\cdot\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{r^2-(h-r)^2}}{r}\right)\right| \\
A_o(r) &= \left|\sqrt{r^2-(r-r)^2}\cdot(r-r)+r^2\cdot\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{r^2-(r-r)^2}}{r}\right)\right| \\
&= \left|\sqrt{r^2-(0)^2}\cdot(0)+r^2\cdot\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{r^2-(0)^2}}{r}\right)\right| \\
&= \left|\sqrt{r^2}\cdot 0+r^2\cdot\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{r^2}}{r}\right)\right| \\
&= \left|r^2\cdot\sin^{-1}(1)\right| \\
&= r^2\cdot\frac{\pi}{2} = 0,5\cdot(\pi r^2) \Rightarrow 0,5\cdot A_g
\end{aligned}
$$

---

## Verbindungen von $A_o(h)$

Da $A_o(h)$ den Flächeninhalt des kleineren Segments beschreibt, und dieser von der Gesamtfläche abgezogen wird, so kann man folgenden Schluss ziehen:

$$A_{o+u} = A_o(h) + A_u$$

$A_{o+u}$ ist hier die Gesamtfläche des Kreises dessen Teilabschnitt getrennt wird. $A_u$ ist die untere Fläche nach der Teilung.

Da die Gesamtfläche von $A_{o+u}$ mit $A_{o+u} = \pi\cdot r^2$ beschrieben werden kann, so kann folglich der Flächeninhalt der unteren Fläche ausgedrückt werden:

$$
\begin{aligned}
A_u &= A_{o+u} - A_o(h) \\
A_u &= \pi\cdot r^2 - A_o(h)
\end{aligned}
$$

---

## Bildung von $A_g(h)$

Da in $A_o$ ein Definitionsbereich $D_1$ gegeben ist, so werde ich versuchen eine zusammengesetzte Funktion zu finden, welche diesen Bereich erweitert, damit anstelle des halben Kreises, der ganze von $h$ getrennt werden kann.

### Symmetrie

Da es sich bei der Form um einen Kreis handelt, so kann ein größer abgeschnittenes Stück von dem Kreis mit $h > r$ als das Anschneiden von einem kleinerem Stück gesehen werden.

Wenn $h = r$ gilt ist, wie zuvor gezeigt, die hälfte des Kreises auf beiden Seiten getrennt.

Folglich muss wegen der Symmetrie ab der hälfte eine Punktsymmetrie in der Funktion am Ende von $D_1$ vorliegen.
Diese Symmetrie führt dazu, dass bei $2r$ die Fläche nun mit der neuen Erweiterung auf $\pi r^2$ steigt.

## Bilden der "halben" Punktsymmetrie an dem oberen Ende von $D_1$

Anstelle eine Punktsymmetrie an dem Punkt $P\left(r \mid 0,5\pi r^2\right)$ durch den folgenden Ausdruck an $A_o$ zu testen, werde ich die entstehende Bedingung mit dem Punkt $(a \mid b)$ durch

$$\begin{gathered} f(a+x) - b = -f(a-x) + b \qquad \mid \\ \Downarrow \\ f(x) = 2b - f(2a-x) \end{gathered}$$

dazu benutzen mir die andere Funktion zu erstellen.

$$\begin{aligned} A_u(h) &= -A_o(2r-h) + \pi r^2 \\ &= -\sqrt{r^2 - ((2r-h)-r)^2} \cdot ((2r-h)-r) - r^2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{r^2-((2r-h)-r)^2}}{r}\right) + \pi r^2 \\ &= -\sqrt{r^2-(r-h)^2} \cdot (r-h) - r^2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{r^2-(r-h)^2}}{r}\right) + \pi r^2 \\ A_u(h) &= \sqrt{r^2-(h-r)^2} \cdot (h-r) - r^2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{r^2-(h-r)^2}}{r}\right) + \pi r^2 \end{aligned}$$

Zu bedenken von dieser neuen Funktion ist jetzt, dass der Definitionsbereich dadurch ebenfalls geändert wurde. Nun ist dieser Definitionsbereich der folgende:

$$D_2 : r \leq h \leq 2r$$

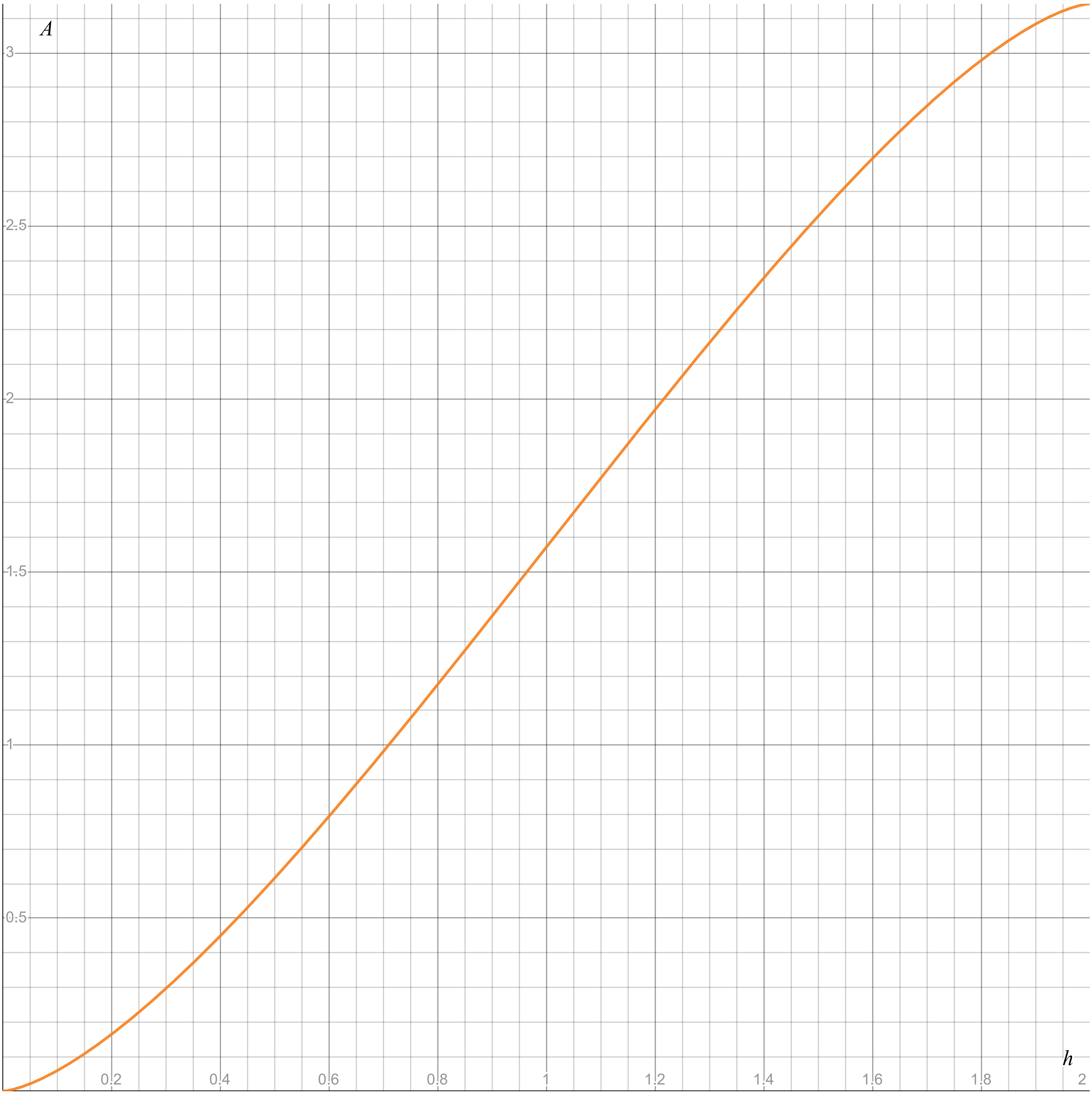
---

## Bilden der bedingten Funktion

Nun sind die für mich wichtigen Funktionshälften fertig definiert und müssen nun vereint werden.
Als Resultat erhält man folgende Funktion:

$$\begin{aligned} A_g(h) &= \begin{cases} A_o(h) & \text{wenn } D_1 \\ A_u(h) & \text{wenn } D_2 \end{cases} \\ A_g(h) &= \begin{cases} \sqrt{r^2-(h-r)^2} \cdot (h-r) + r^2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{r^2-(h-r)^2}}{r}\right) & \text{wenn } 0 \leq h \leq r \\ \sqrt{r^2-(h-r)^2} \cdot (h-r) - r^2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{r^2-(h-r)^2}}{r}\right) + \pi r^2 & \text{wenn } r \leq h \leq 2r \end{cases} \end{aligned}$$

Da neben $h$ auch $r$ verändert betrachtet werden kann, so kann $A_g$ durch $A_g(h, r)$ ebenfalls ausgedrückt werden. Die Bedingungen bleiben hierbei allerdings bestehen.




---

---

---

# Schneiden von Kugeln in $\mathbb{R}^3$

Versuchen werde ich hier einen funktionalen Zusammenhang des folgenden Sachverhaltes zu ermitteln:

> Wenn man eine Kugel mit dem Radius $r$ an einer Ebene mit abstand $h$ zu einer parallelen Tangierenden Ebene schneidet, wie wird der Flächeninhalt $A$ verändert.

---

## Beschreibung in Bezügen

Erneut werde ich das Kugelsegment mit einer Funktion darstellen, mit welchem das Volumen ermittelt werden kann.

Eine Kugel kann durch $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ dargestellt werden. Vereinfacht man dies nun auf $y$, so gilt für den Kreis
$z = \pm\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$
Da ich mich von Volumina in $\mathbb{R}^3$ direkt aus diesem Auszug fernhalten möchte, so werde ich die Bezugsfunktion
$a_o(x) = \sqrt{r^2 - x^2} + h - r$ für die Segmentgröße eines Kreises als Rotationskörper um die y-Achse verwenden um somit das Volumen der getrennten Kugel auszudrücken.

---

## Bildung einer geeigneten Umkehrfunktion

Wenn $a_o(x) = \sqrt{r^2 - x^2} + h - r$ die um die y-Achse gedrehte Funktion ist, so werde ich diese zu $a_o^{-1}(x)$ umwandeln, um diese anschließend um die x-Achse rotieren zu lassen um einfacher mit dieser zu arbeiten.

$$\begin{aligned}
a_o(x) &= \sqrt{r^2 - x^2} + h - r & \\
y &= \sqrt{r^2 - x^2} + h - r & &| -h + r \\
y - h + r &= \sqrt{r^2 - x^2} & &|()^2 \\
(y - h + r)^2 &= r^2 - x^2 & &| -r^2 \\
-r^2 + (y - h + r)^2 &= -x^2 & &| \cdot (-1) \\
r^2 - (y - h + r)^2 &= x^2 & &|\sqrt{} \\
x &= \pm\sqrt{r^2 - (y - h + r)^2} & \\
&\Downarrow & \\
a_o^{-1}(x) &= \sqrt{r^2 - (x - h + r)^2} &
\end{aligned}$$

Die negative Version des Wurzelterms entfällt hier, da dieser für weitere Arbeiten unwichtig ist.

---

## Bilden der Rotationskörpervolumina

Die Darstellung von generellen Rotationskörpern ist die folgende:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

Die Grenzwerte unseres Integrals liegen hierbei bei $a = 0$ und $b = h$, da das von $a_o$ existente Maximum auf der y-Achse liegt und dabei die höhe $h$ hat. $a_o(0) = h$. Durch die Umkehrfunktion ist dieser Punkt nun eine Nullstelle, welche als Intervallgrenzen gewertet werden kann. $a_o^{-1}(h) = 0$. Die Nullstelle welche zuvor bei $x_{l,r} = \sqrt{2rh - h^2}$ lag, ist nun bei der Stelle $a_o^{-1}(0)$. Dadurch werden die Grenzen für das Integral klar.

$$\begin{aligned}
V &= \pi \cdot \int_a^b \left(a_o^{-1}(x)\right)^2 \, dx \\
&= \pi \cdot \int_0^h \left(\sqrt{r^2 - (x - h + r)^2}\right)^2 \, dx \\
&= \pi \cdot \int_0^h r^2 - (x - h + r)^2 \, dx \\
&= \pi \cdot \int_0^h r^2 - \left(x^2 + h^2 + r^2 - 2hx + 2rx - 2hr\right) \, dx \\
&= \pi \cdot \int_0^h r^2 - x^2 - h^2 - r^2 + 2hx - 2rx + 2hr \, dx \\
&= \pi \cdot \int_0^h -x^2 - h^2 + 2hx - 2rx + 2hr \, dx \\
&= \pi \cdot \left(\int_0^h -x^2 \, dx \;+ \int_0^h -h^2 \, dx \;+ \int_0^h 2hx \, dx \;+ \int_0^h -2rx \, dx \;+ \int_0^h 2hr \, dx\right) \\
&= \pi \cdot \left(\left[-\frac{1}{3}x^3\right]_0^h + \left[-h^2x\right]_0^h + \left[hx^2\right]_0^h + \left[-rx^2\right]_0^h + \left[2hrx\right]_0^h\right) \\
&= \pi \cdot \left(\left(-\frac{1}{3}h^3 - \left(-\frac{1}{3}0^3\right)\right) + \left(-h^2h - (-h^2 \cdot 0)\right) + \left(h \cdot h^2 - \left(h \cdot 0^2\right)\right) + \left(-rh^2 - \left(-r0^2\right)\right) + \left(2hrh - (2hr0)\right)\right) \\
&= \pi \cdot \left(\left(-\frac{1}{3}h^3\right) + \left(-h^3\right) + \left(h^3\right) + \left(-rh^2\right) + \left(2h^2r\right)\right) \\
&= \pi \cdot \left(-\frac{1}{3}h^3 - h^3 + h^3 - h^2r + 2h^2r\right) \\
V_g(h) &= -\frac{\pi}{3}h^3 + \pi h^2 r
\end{aligned}$$

Für $V$ gilt wie bei dem Kreis der gleiche Definitionsbereich. Allerdings da dieser durch eine Polynomfunkion gebildet ist, so ist der Definitionsbereich hier $D_3 : 0 \leq h \leq 2r$.

---

## Vergleich der Funktion

$V_g(h)$ stellt das Volumen des zunächst kleineren Segments dar, falls die Ebene der $x_1, x_2$ Ebene zuzutragen ist und die Kugel sich unter ihr mit $h \to 2r$ der $x_3$ Achse steigt nähert.

Folglich ist bei $h = 2r$ die komplette Kugel über oder in der Ebene, wodurch sich die allgemeine Funktion für Volumina mit Kugeln zeigen sollte:

$$V_K(r) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$\begin{aligned}
V_g(h) &= -\frac{\pi}{3}h^3 + \pi h^2 r \\
V_g(2r) &= -\frac{\pi}{3}(2r)^3 + \pi(2r)^2 r \\
&= -\frac{\pi}{3}2^3 r^3 + \pi 2^2 r^2 r \\
&= -\frac{8\pi}{3}r^3 + 4\pi r^3 \\
&= \left(4\pi - \frac{8\pi}{3}\right) \cdot r^3 \\
&= \left(\frac{12\pi - 8\pi}{3}\right) \cdot r^3 \\
&= \left(\frac{4\pi}{3}\right) \cdot r^3 \\
&= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3
\end{aligned}$$

In diesem Fall ist $V_k(r) \equiv V_g(2r)$. Als einen weiteren Test werde ich die Kugel nun mittels meinem Zusammenhang diese halbieren. Erneut sollte eine Kongruenz ersichtlich sein.

$$V_K(r) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$\begin{aligned}
V_g(h) &= -\frac{\pi}{3}h^3 + \pi h^2 r \\
V_g(r) &= -\frac{\pi}{3}(r)^3 + \pi(r)^2 r \\
&= -\frac{\pi}{3}r^3 + \pi r^2 r \\
&= -\frac{\pi}{3}r^3 + \pi r^3 \\
&= \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \pi r^3 \\
&= \left(\frac{3-1}{3}\right) \cdot \pi r^3 \\
&= \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \pi r^3 \\
&= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\right) \cdot \pi r^3 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3
\end{aligned}$$

Hier in diesem Fall gilt $\frac{1}{2} \cdot V_K(r) \equiv V_g(\frac{1}{2} \cdot 2r)$.
Allerdings gilt nicht durch diesen Aufschrieb, dass $\frac{1}{n} \cdot V_K(r) \equiv V_g\left(\frac{1}{n} \cdot 2r\right)$. Diese These werde ich nun klären:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \cdot V_K(r) &= V_g\left(\frac{1}{n} \cdot 2r\right) \\
\frac{1}{n} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 &\equiv -\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{n} \cdot 2r\right)^3 + \pi\left(\frac{1}{n} \cdot 2r\right)^2 r \\
\frac{4}{3n} \cdot \pi r^3 &= -\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{n^3} \cdot 2^3 r^3\right) + \pi\left(\frac{1}{n^2} \cdot 2^2 r^2\right) r \\
\frac{4}{3n} \cdot \pi r^3 &= -\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{n^3} \cdot 2^3 r^3 + \pi \frac{1}{n^2} \cdot 2^2 r^2 r \\
\frac{4}{3n} \cdot \pi r^3 &= -\frac{8}{3n^3} \cdot \pi r^3 + \frac{4}{n^2} \cdot \pi r^3 \\
\frac{4}{3n} \cdot \pi r^3 &= \left(\frac{4}{n^2} - \frac{8}{3n^3}\right) \cdot \pi r^3 \\
\frac{4}{3n} \cdot \pi r^3 &= \left(\frac{12n^3 - 8n^2}{3n^5}\right) \cdot \pi r^3 && \left| \cdot \frac{1}{\pi r^3}\right. \\
\frac{4}{3n} &= \frac{12n^3 - 8n^2}{3n^5} \\
\frac{4}{3n} &= \frac{n^2(12n - 8)}{3n^5} \\
\frac{4}{3n} &= \frac{12n - 8}{3n^3} && | \cdot 3n^3 \\
\frac{12n^3}{3n} &= 12n - 8 \\
4n^2 &= 12n - 8 && | - 4n^2 \\
0 &= -4n^2 + 12n - 8 && | - 4n^2 \\
n_{1,2} &= 1,5 \pm 0,5
\end{aligned}$$

Weil $|\mathbb{L}| \neq \infty$, so sind die beiden Aussagen nicht identisch.