Seite 198 Nr. 7)

> Gegeben ist eine Kugel mit dem Ursprung als Mittelpunkt, Für welchen Radius schneidet die Kugel die Ebene E, berührt sie die Ebene oder hat keinen Punkt mit ihr gemeinsam? Wie lauten die Koordinaten des Berührpunktes?

---

a)

- $E: 3x_1 + 12x_2 + 4x_3 - 13 = 0$
  Aus E resultiert folgender Normalvektor n:
- $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$
- $\vec{n}_0 = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$

> Eine normierte Lotgerade, die durch den Mittelpunkt der Kugel geht, besitzt einen Schnittpunkt mit E, der den kürzesten Abstand besitzt. Durch die Normierung ist der Parameter hier der Radius, den die Kugel für diesen Schnittpunkt benötigt.

> NormierteGerade
>
> > Eine normierte Gerade definiere ich hier so, dass der Richtungsvektor dieser Gerade die Länge 1 besitzt.
>
> Somit ist die folgende Gerade nicht normiert:
>
> $$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$
>
> $g: \vec{x}$ wäre hier normiert:
>
> $$g_0: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$
>
> ---
>
> Alle Geraden $g_0: \vec{x} = \vec{p} + \frac{\lambda}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$ besitzen die Eigenschaft, dass λ eine Verschiebung der Entfernung $\lambda\,[LE]$ hervorruft.
>
> ---

Die normierte Lotgerade g_0 lautet daher:

$$g_0: \vec{x} = \frac{\lambda}{13} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Schnittmenge $g_0 \cap E$ beschreibt sowohl in $|\lambda|$ den Radius der Kugel, als auch den Schnittpunkt S.

Bestimmung von λ und S siehe anhand des Anhangs:

> GeradeInEbene
>
> > Eine Gerade $g: \vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{v}$ und eine Ebene $E: \vec{n} \circ \vec{x} = \vec{n} \circ \vec{q}$ sollen auf einen Schnittpunkt untersucht werden.
>
> Hierzu wird g in E eingesetzt und nach λ umgestellt:
>
> $$\begin{aligned} E: \vec{n} \circ \vec{x} &= \vec{n} \circ \vec{q} \\ \vec{n} \circ \left[\vec{p} + \lambda \cdot \vec{v}\right] &= \vec{n} \circ \vec{q} \\ \vec{n} \circ \vec{p} + \lambda \cdot \vec{n} \circ \vec{v} &= \vec{n} \circ \vec{q} && \mid -\vec{n} \circ \vec{p} \\ \lambda \cdot \vec{n} \circ \vec{v} &= \vec{n} \circ \vec{q} - \vec{n} \circ \vec{p} \\ \lambda \cdot \vec{n} \circ \vec{v} &= \vec{n} \circ \left[\vec{q} - \vec{p}\right] && \mid \div \vec{n} \circ \vec{v} \\ \lambda &= \frac{\vec{n} \circ \left[\vec{q} - \vec{p}\right]}{\vec{n} \circ \vec{v}} \end{aligned}$$
>
> $$\Rightarrow \overrightarrow{OS} = \vec{p} + \frac{\vec{n} \circ \left[\vec{q} - \vec{p}\right]}{\vec{n} \circ \vec{v}} \cdot \vec{v}$$
>
> Da $\vec{q}$ oft nicht gegeben ist, so ist per Definition von $d = \vec{n} \circ \vec{q}$ auch folgende Form für $\overrightarrow{OS}$ möglich:
>
> $$\overrightarrow{OS} = \vec{p} + \frac{d - \vec{n} \circ \vec{p}}{\vec{n} \circ \vec{v}} \cdot \vec{v}$$
>
> ---
>
> > Sollte es sich bei der Gerade um eine normierte Lotgerade der Ebene E handeln, dann gilt folgendes:
> >
> > - $g_0: \vec{x} = \vec{p} + \frac{\lambda}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}$

$$
\begin{aligned}
E: \vec{n} \circ \vec{x} &= \vec{n} \circ \vec{q} \\
\vec{n} \circ \left[\vec{p} + \frac{\lambda}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}\right] &= \vec{n} \circ \vec{q} \\
\vec{n} \circ \vec{p} + \frac{\lambda}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \circ \vec{n} &= \vec{n} \circ \vec{q} && \mid -\vec{n} \circ \vec{p} \\
\frac{\lambda}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \circ \vec{n} &= \vec{n} \circ \vec{q} - \vec{n} \circ \vec{p} \\
\frac{\lambda}{|\vec{n}|} \cdot \underbrace{\vec{n} \circ \vec{n}}_{=|\vec{n}|^2} &= \vec{n} \circ [\vec{q} - \vec{p}] \\
\lambda \cdot |\vec{n}| &= \vec{n} \circ [\vec{q} - \vec{p}] && \mid \div |\vec{n}| \\
\lambda &= \frac{\vec{n} \circ [\vec{q} - \vec{p}]}{|\vec{n}|}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \overrightarrow{OS} &= \vec{p} + \frac{\frac{\vec{n} \circ [\vec{q} - \vec{p}]}{|\vec{n}|}}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \\
&= \vec{p} + \frac{\vec{n} \circ [\vec{q} - \vec{p}]}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n}
\end{aligned}
$$

Da $\vec{q}$ oft nicht gegeben ist, so ist per Definition von $d = \vec{n} \circ \vec{q}$ auch folgende Form für $\overrightarrow{OS}$ möglich:

$$
\overrightarrow{OS} = \vec{p} + \frac{d - \vec{n} \circ \vec{p}}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n}
$$

Es gilt mit den Vektoren von dem Anhang unten:

- $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$
- $|\vec{n}| = 13$
- $d = 13$

Der Schnittpunkt S lautet somit:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OS} &= \vec{p} + \frac{d - \vec{n} \circ \vec{p}}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{13 - \overbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{=0}}{\underbrace{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}\right|^2}_{=13^2}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{13}{13^2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} \\ \frac{12}{13} \\ \frac{4}{13} \end{pmatrix} \\
\Rightarrow S &\left(\frac{3}{13} \mid \frac{12}{13} \mid \frac{4}{13}\right)
\end{aligned}
$$

Für λ gilt $\lambda = \frac{\vec{n} \circ [\vec{q} - \vec{p}]}{|\vec{n}|}$, woraus resultiert:

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \frac{\vec{n} \circ [\vec{q} - \vec{p}]}{|\vec{n}|} \\
&= \frac{d - \vec{n} \circ \vec{p}}{|\vec{n}|} \\
&= \frac{13 - \overbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{=0}}{\underbrace{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}_{=13}} \\
&= \frac{13}{13} = 1
\end{aligned}
$$

Der Radius r der Kugel K ist also $r = 1$. Damit die Kugel folgende Lagebeziehungen zu E besitzt, so gilt folgendes:

> Es gibt keine Schnittmenge:
>
> - $r \in (0; 1)$
>   Es gibt einen Berührpunkt $S\left(\frac{3}{13} \mid \frac{12}{13} \mid \frac{4}{13}\right)$:
> - $r = 1$
>   Es gibt einen Schnittkreis:
> - $r \in (1; \infty)$

---

b)

- $E: 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 14 = 0$
  Aus E resultiert folgender Normalvektor n:
- $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

- $\vec{n}_0 = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

  Die normierte Lotgerade g_0 lautet daher:

$$g_0 : \vec{x} = \frac{\lambda}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Die Schnittmenge $g_0 \cap E$ beschreibt sowohl in $|\lambda|$ den Radius der Kugel, als auch den Schnittpunkt S.

Es gilt mit den Vektoren von dem Anhang unten:

- $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$
- $|\vec{n}| = 7$
- $d = 14$

Der Schnittpunkt S lautet somit:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= \vec{p} + \frac{d - \vec{n} \circ \vec{p}}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{14 - \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{=0}}{\underbrace{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \right|^2}_{=7^2=49}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{14}{49} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{6}{7} \\ -\frac{12}{7} \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow S\left(\frac{4}{7} \mid \frac{6}{7} \mid -\frac{12}{7}\right) \end{aligned}$$

Für λ gilt $\lambda = \frac{\vec{n} \circ [\vec{q} - \vec{p}]}{|\vec{n}|}$, woraus resultiert:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\vec{n} \circ [\vec{q} - \vec{p}]}{|\vec{n}|} \\ &= \frac{d - \vec{n} \circ \vec{p}}{|\vec{n}|} \\ &= \frac{14 - \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{=0}}{\underbrace{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \right|}_{=7}} \\ &= \frac{14}{7} = 2 \end{aligned}$$

Der Radius r der Kugel K ist also $r = 2$. Damit die Kugel folgende Lagebeziehungen zu E besitzt, so gilt folgendes:

> Es gibt keine Schnittmenge:
>
> - $r \in (0; 2)$
>
>   Es gibt einen Berührpunkt $S\left(\frac{4}{7} \mid \frac{6}{7} \mid -\frac{12}{7}\right)$:
> - $r = 2$
>
>   Es gibt einen Schnittkreis:
> - $r \in (2; \infty)$
