Seite 111 3) 4) 5)

Aufgabe 3

> Bei einseitig eingeklemmten Blattfedern, auf deren Ende eine Kraft wirkt, kann die Biegung durch eine ganzrationale Funktion f vom Grad 3 beschrieben werden.

a)

> Bestimmen Sie für die angegebenen Abmessungen die Funktion f.

Aus der Abbildung ist mit einem Koordinatensystem mit Ursprung am Federanfang für $1\,[LE] \mathrel{\widehat{=}} 1\,cm$ erkennbar:
Es gilt für $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

- $f(0) = 0$
- $f(5) = -0,5$
- $f(10) = -1,6$
- $f'(0) = 0$

$$\begin{array}{r|rcr|} \text{I:} & a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d & = & 0 \\ \text{II:} & a\cdot 5^3 + b\cdot 5^2 + c\cdot 5 + d & = & -0,5 \\ \text{III:} & a\cdot 10^3 + b\cdot 10^2 + c\cdot 10 + d & = & -1,6 \\ \text{IV:} & 3a\cdot 0^2 + 2b\cdot 0 + c & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcr|} \text{I:} & d & = & 0 \\ \text{II:} & 125a + 25b + 5c + d & = & -0,5 \\ \text{III:} & 1000a + 100b + 10c + d & = & -1,6 \\ \text{IV:} & c & = & 0 \end{array}$$

$$\text{I:}\quad d = 0$$

$$\text{IV:}\quad c = 0$$

$$\begin{array}{r|rcr|l} \text{II:} & 125a + 25b & = & -0,5 & \mid \cdot(-4) \\ \text{III:} & 1000a + 100b & = & -1,6 & \mid \text{III} + \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcr|} \text{II:} & 125a + 25b & = & -0,5 \\ \text{III:} & 500a & = & 0,4 \end{array}$$

$$\text{III:}\quad 500a = 0,4 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{1250}$$

$$\text{II:}\quad 125a + 25b = -0,5 \quad \Leftrightarrow \quad b = -\frac{3}{125}$$

Die Lösung lautet:

- $a = \frac{1}{1250}$
- $b = -\frac{3}{125}$
- $c = 0$
- $d = 0$
  Die Funktion f lautet somit: $f(x) = \frac{1}{1250}x^3 - \frac{3}{125}x^2$

---

b)

> Wie groß ist die Auslenkung bei 7 cm?

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1250}x^3 - \frac{3}{125}x^2 \\ f(7) &= \frac{1}{1250}\cdot 7^3 - \frac{3}{125}\cdot 7^2 \\ &= -\frac{1127}{1250} = -0,9016 \end{aligned}$$

Die Auslenkung an der Stelle 7 cm beträgt $9,016$ cm nach unten.

Aufgabe 4 Ursprünglich

> Ein Metallstreifen ist im Punkt F waagerecht befestigt und liegt im Abstand von 10 cm im Punkt L lose auf. Durch Belastung biegt sich der Streifen so durch, dass die maximale Durchbiegung 2 cm beträgt.

a)

> Beschreiben Sie die Form des Metallstreifens durch eine ganzrationale Funktion.

Aus der Abbildung ist mit einem Koordinatensystem mit Ursprung auf F für $1\,[LE] \mathrel{\widehat{=}} 1\,cm$ erkennbar:

- $f(0) = 0$
- $f(10) = 0$
- $f(x_0) = y_0$
- $f'(0) = 0$
- $f'(x_0) = 0$
  $D = \{x_0; y_0 \in \mathbb{R} \mid 0 < x_0 < 10; -2 < y_0 < 0\}$
  Aus diesen 5 Bedingungen folgt eine ganzrationale Funktion 4ten Grades mit:
- $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
- $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & a\cdot 0^4+b\cdot 0^3+c\cdot 0^2+d\cdot 0+e & = & 0\\
\text{II:} & a\cdot 10^4+b\cdot 10^3+c\cdot 10^2+d\cdot 10+e & = & 0\\
\text{III:} & a\cdot x_0^4+b\cdot x_0^3+c\cdot x_0^2+d\cdot x_0+e & = & y_0\\
\text{IV:} & 4a\cdot 0^3+3b\cdot 0^2+2c\cdot 0+d & = & 0\\
\text{V:} & 4a\cdot x_0^3+3b\cdot x_0^2+2c\cdot x_0+d & = & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & e & = & 0\\
\text{II:} & 10000a+1000b+100c+10d+e & = & 0\\
\text{III:} & x_0^4a+x_0^3b+x_0^2c+x_0d+e & = & y_0\\
\text{IV:} & d & = & 0\\
\text{V:} & 4x_0^3a+3x_0^2b+2x_0c+d & = & 0
\end{array}$$

$$\text{I:}\quad e=0$$

$$\text{IV:}\quad d=0$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{II:} & 10000a+1000b+100c & = & 0\\
\text{III:} & x_0^4a+x_0^3b+x_0^2c & = & y_0\\
\text{V:} & 4x_0^3a+3x_0^2b+2x_0c & = & 0
\end{array}$$

Aus diesem LGS resultieren die Lösungen:

- $a=\frac{-3x_0y_0+20y_0}{x_0^5-20x_0^4+100x_0^3}$
- $b=\frac{4x_0^2y_0-200y_0}{x_0^5-20x_0^4+100x_0^3}$
- $c=\frac{-40x_0y_0+300y_0}{x_0^4-20x_0^3+100x_0^2}$

  Die Funktion ist somit:

$$f(x)=\frac{-3x_0y_0+20y_0}{x_0^5-20x_0^4+100x_0^3}x^4+\frac{4x_0^2y_0-200y_0}{x_0^5-20x_0^4+100x_0^3}x^3+\frac{-40x_0y_0+300y_0}{x_0^4-20x_0^3+100x_0^2}x^2$$

  Oder auch alternativ

$$f(x)=y_0\cdot\left[\frac{-3x_0+20}{x_0^5-20x_0^4+100x_0^3}x^4+\frac{4x_0^2-200}{x_0^5-20x_0^4+100x_0^3}x^3+\frac{-40x_0+300}{x_0^4-20x_0^3+100x_0^2}x^2\right]$$

  Sobald $x_0=\frac{20}{3}$ ist, dann ist f eine Funktion 3ten Grades.

Aufgabe 4 tatsächlich

> Ein Metallstreifen ist im Punkt F waagerecht befestigt und liegt im Abstand von 10 cm im Punkt L lose auf. Durch Belastung biegt sich der Streifen so durch, dass die maximale Durchbiegung 2 cm beträgt.

a)

> Beschreiben Sie die Form des Metallstreifens durch eine ganzrationale Funktion.

Aus der Abbildung ist mit einem Koordinatensystem mit Ursprung auf F für $1\,[LE]\mathrel{\widehat{=}}1\,cm$ erkennbar:

- $f(0)=0$
- $f(10)=0$
- $f'(0)=0$
- $f'(x_0)=0$
  - $f(x_0)=y_0$

  $D=\{x_0;y_0\in\mathbb{R}\mid 0<x_0<10;-2<y_0<0\}$

  Aus diesen 4 Bedingungen folgt eine ganzrationale Funktion 3ten Grades mit:
- $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
- $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d & = & 0\\
\text{II:} & a\cdot 10^3+b\cdot 10^2+c\cdot 10+d & = & 0\\
\text{III:} & 3a\cdot 0^2+2b\cdot 0+c & = & 0\\
\text{IV:} & 3a\cdot x_0^2+2b\cdot x_0+c & = & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl}
\text{I:} & d & = & 0\\
\text{II:} & 1000a+100b+10c+d & = & 0\\
\text{III:} & c & = & 0\\
\text{IV:} & 3x_0^2a+2x_0b+c & = & 0
\end{array}$$

$$\text{I:}\quad d=0$$

$$\text{III:}\quad c=0$$

$$\begin{array}{r|rcl}
\text{II:} & 1000a+100b & = & 0\\
\text{IV:} & 3x_0^2a+2x_0b & = & 0
\end{array}$$

$$\text{Aus I:}\quad 1000a+100b=0\quad\Leftrightarrow\quad b=-10a$$

In IV kann nun ein x_0 gewählt werden, sodass die Zeile stimmt.

$$\begin{aligned}
3x_0^2a+2x_0b&=0 &&\boxed{b=-10a}\\
3ax_0^2-20ax_0&=0\\
ax_0\,(3x_0-20)&=0\\
x_0=0\quad\bigvee&\quad 3x_0-20=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3x_0-20&=0 &&\mid +20\\
3x_0&=20 &&\mid \div 3\\
x_0&=\frac{20}{3}
\end{aligned}$$

Da hier $x_0=\frac{20}{3}$ ist, so kann dies in die 5. Bedingung $f(x_0)=-2$ eingesetzt werden und im LGS gelöst werden.

$$
\begin{aligned}
-2 &= f(x_0) \\
-2 &= f\left(\frac{20}{3}\right) \\
-2 &= a \cdot \left(\frac{20}{3}\right)^3 + \underbrace{b}_{=-10a} \cdot \left(\frac{20}{3}\right)^2 + \underbrace{c \cdot \left(\frac{20}{3}\right)}_{=0} + \underbrace{d}_{=0} \\
-2 &= a \cdot \left(\frac{20}{3}\right)^3 - 10a \cdot \left(\frac{20}{3}\right)^2 \\
-2 &= \frac{20^3}{27} \cdot a - 10 \cdot \frac{20^2}{9} \cdot a \\
-2 &= \left[\frac{20^3}{27} - \frac{4000}{9}\right] \cdot a \\
-2 &= -\frac{4000}{27} \cdot a \qquad\qquad\qquad\qquad \mid \cdot \left(-\frac{27}{4000}\right) \\
a &= -2 \cdot \left(-\frac{27}{4000}\right) \\
a &= \frac{27}{2000}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b &= -10a \\
b &= -10 \cdot \frac{27}{2000} \\
b &= -\frac{27}{200}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt:
$f(x) = \frac{27}{2000}x^3 - \frac{27}{200}x^2$.