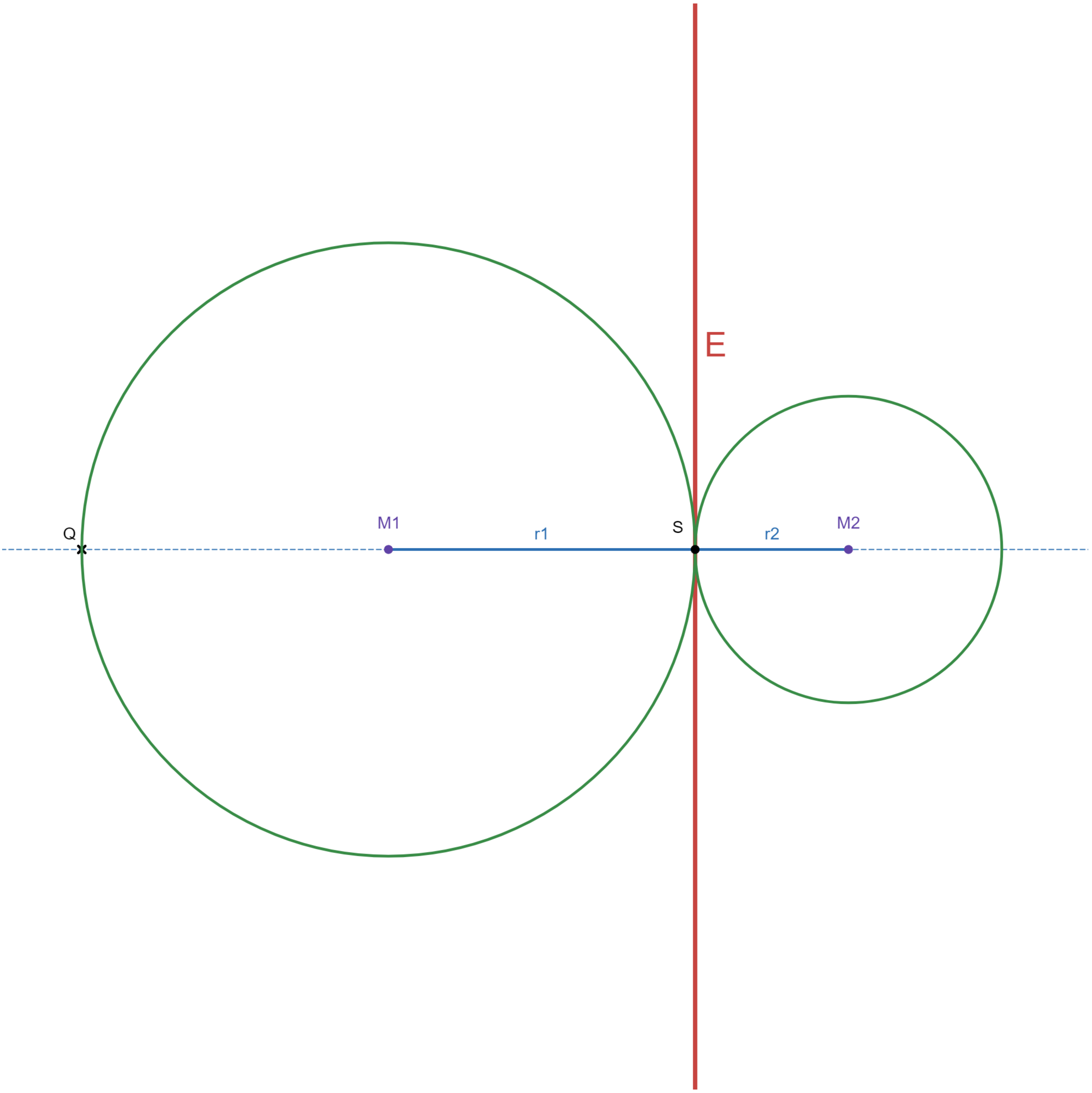
Seite 197 Nr. 4)

> Die Kugeln $K_1 : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}\right]^2 = 36$ und $K_2 : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^2 = 9$ berühren sich. Bestimmen Sie eine Gleichung der gemeinsamen Tangentialebene.

Gegeben durch K_1:

- $M_1(1 \mid 7 \mid -2)$
- $r_1 = 6$
  Gegeben durch K_2:
- $M_2(7 \mid 13 \mid 1)$
- $r_2 = 3$

In dem folgendem Bild ist ein Querschnitt beider Kugeln durch beide Mittelpunkte abgebildet. Variablenbezeichnungen werden weitergehend wie in der Abbildung behandelt:



Die Kreise K_1 und K_2 berühren sich hier in dem Punkt S, durch welchen die Ebene E verläuft.

> Da eine Gerade durch M_1 und M_2 den kürzesten Weg von M_1 und M_2 beschreibt, so muss S auf dieser Geraden g liegen.
> Es gilt hier für den Punkt S:
> $\{M_1 \cap M_2\} \in g : \vec{x}$
> $\Rightarrow S = \{g \cap K_1\} \wedge \{g \cap K_2\}$

Eine solche Gerade g definiere ich hier durch $g : \vec{x} = \overrightarrow{OM_1} + \frac{\lambda}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$.

> λ gibt hier durch die Normierung einen Punkt P auf der Gerade g an, dessen Abstand sich mit $d(M_1; P) = |\lambda|$ beschreiben lässt. Der Radius r_1 von K_1 ist 6, wodurch wir den Abstand $d(M_1; P)$ ebenfalls bei 6 erhalten müssen. λ muss folglich ± 6 sein.

> GeradeInKugel

Gegeben seien

- $K_1: \left[\vec{x} - \overrightarrow{OM_1}\right]^2 = r^2$
- $g: \vec{x} = \overrightarrow{OM_1} + \lambda \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$

Um die Schnittmenge der Kugel K und g zu bestimmen, muss g in K eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}
K_1: \left[\vec{x} - \overrightarrow{OM_1}\right]^2 &= r^2 \\
\left[\overrightarrow{OM_1} + \lambda \cdot \overrightarrow{M_1M_2} - \overrightarrow{OM_1}\right]^2 &= r^2 \\
\left[\lambda \cdot \overrightarrow{M_1M_2}\right]^2 &= r^2 \\
\lambda^2 \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \circ \overrightarrow{M_1M_2} &= r^2 \\
\lambda^2 &= \frac{r^2}{\overrightarrow{M_1M_2} \circ \overrightarrow{M_1M_2}} \\
\lambda^2 &= \frac{r^2}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|^2} \\
\lambda &= \pm\frac{r}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}
\end{aligned}$$

Da der Richtungsvektor $\overrightarrow{M_1M_2}$ die Verschiebung in Richtung K_2 von M_1 beschreibt, nähert sich mit positiven λ der Punkt P, wodurch $\lambda = 6$ sein muss. $\lambda = -6$ gibt hier folglich in g den Punkt Q an.

$$\begin{aligned}
g: \vec{x} &= \overrightarrow{OM_1} + \frac{\lambda}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \\
\overrightarrow{OS} &= \begin{pmatrix}1\\7\\-2\end{pmatrix} + \frac{6}{\left|\begin{pmatrix}7-1\\13-7\\1+2\end{pmatrix}\right|} \cdot \begin{pmatrix}7-1\\13-7\\1+2\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1\\7\\-2\end{pmatrix} + \frac{6}{\left|\begin{pmatrix}6\\6\\3\end{pmatrix}\right|} \cdot \begin{pmatrix}6\\6\\3\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1\\7\\-2\end{pmatrix} + \frac{6}{\sqrt{6^2+6^2+3^2}} \cdot \begin{pmatrix}6\\6\\3\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1\\7\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix} \\
\overrightarrow{OS} &= \begin{pmatrix}5\\11\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

> Der gemeinsame Punkt lautet also $S(5 \mid 11 \mid 0)$.

> Die Ebene E heißt Tangentialebene zu den Kugeln K_1 und K_2. Daraus folgt für die Ebene E:
> $\{E \perp \{K_1 \wedge K_2\}\} \wedge \{S \in E\}$

Damit E tangential zu den Kugeln K_1 und K_2 durch den Punkt P geht, muss der Normalenvektor der Verbindungsvektor $\overrightarrow{M_1M_2}$ sein. Daraus resultiert die folgende Ebene:

$$\begin{aligned}
E: \overrightarrow{M_1M_2} \circ \left[\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OS}\right] &= 0 \\
\overrightarrow{M_1M_2} \circ \overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{M_1M_2} \circ \overrightarrow{OS} \\
\begin{pmatrix}6\\6\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}6\\6\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}5\\11\\0\end{pmatrix} \\
6x_1 + 6x_2 + 3x_3 &= 96 \\
2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 32
\end{aligned}$$
