

S. 159 Nr. 9) 10) 11)

9)

Aus der Schale in Fig. 2 entnimmt man "blind" nacheinander vier Kugeln und legt sie vor sich auf den Tisch.  $X$  sei die Anzahl roter Kugeln, die man zieht. Wie groß ist der Erwartungswert und die Standartabweichung von  $X$ ? Beschreiben Sie Ihren Lösungsweg genau.

Aus Abbildung 2:

- $w = 7$
  - $m = 3$
  - $n = 4$
- Wir haben  $w$  rote und  $m$  blaue Kugeln in der Schale. Variablenbezeichnung nach belieben.  $n$  gibt hier die Anzahl der Ziehungen an.
- Es kommt hervor, dass  $X$  Hypergeometrisch verteilt ist.

Es folgt für  $X$  die folgende Verteilung und Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$P(X = k) = \frac{\binom{w}{k} \cdot \binom{m}{4 - k}}{\binom{w + m}{4}} = \frac{\binom{7}{k} \cdot \binom{3}{4 - k}}{\binom{10}{4}}$$

$k$	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$P(X = 0)$	$P(X = 1)$	$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$

$k$	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	0	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Der Erwartungswert ergibt sich durch:

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{i=0}^k i \cdot P(X = i) \\ &= 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) + 4 \cdot P(X = 4) \\ &= 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{30} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{6} \\ \mu &= 2,8 \end{aligned}$$

Der Erwartungswert dieser Verteilung ist 2,8. Es können also bei unendlich vielen Durchführungen im Schnitt 2,8 rote kugeln erwartet werden.

Die Standartabweichung ergibt sich durch:

$$\begin{aligned} \sigma(X)^2 &= V(X) = \sum_{i=0}^k (i - \mu)^2 \cdot P(X = i) \\ &= (0 - \mu)^2 \cdot P(X = 0) + (1 - \mu)^2 \cdot P(X = 1) + (2 - \mu)^2 \cdot P(X = 2) + (3 - \mu)^2 \cdot P(X = 3) + (4 - \mu)^2 \cdot P(X = 4) \\ &= (0 - 2,8)^2 \cdot 0 + (1 - 2,8)^2 \cdot \frac{1}{30} + (2 - 2,8)^2 \cdot \frac{3}{10} + (3 - 2,8)^2 \cdot \frac{1}{2} + (4 - 2,8)^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &\vdots \\ \sigma(X)^2 &= 0,56 \\ \sigma(X) &= \sqrt{0,56} \approx 0,748 \end{aligned}$$

Die Standartabweichung der Verteilung liegt bei ungefähr 0,748. Die Verteilung ist daher nicht sehr gestreut.

10)

Bei einem Spiel würfelt man nach einem Einsatz von einem Euro mit fünf Würfeln. Für jede Sechs erhält man einen Euro ausbezahlt.

a)

Welchen mittleren gewinn oder Verlust kann man auf lange Sicht erwarten? Welchen Gewinn oder Verlust kann man bei 120 Spielen erwarten?

- $X$  : Anzahl Sechsen
- $X \sim \mathcal{B}\left(5; \frac{1}{6}\right)$

$1 \cdot x_i - 1$	-1	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$P(X = 0)$	$P(X = 1)$	$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$

Der Erwartungswert ergibt sich durch:

$$\begin{aligned} \mu &= -1 \cdot P(X = 0) + 0 \cdot P(X = 1) + 1 \cdot P(X = 2) + 2 \cdot P(X = 3) + 3 \cdot P(X = 4) + 4 \cdot P(X = 5) \\ &= -1 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 2) + 2 \cdot P(X = 3) + 3 \cdot P(X = 4) + 4 \cdot P(X = 5) \\ &\vdots \\ \mu &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Der Erwartungswert dieser Verteilung ist  $-\frac{1}{6}$ . Es werden durchschnittlich demnach für jedes Spiel 17¢ an Verlust generiert. Nach 120 Spielen sind hier durchschnittlich folglich  $-\frac{1}{6} \cdot 120 = -20\text{€}$  an Verlust zu beschreiben.

b)

Wie könnte man die Spielregeln abändern, damit das Spiel fair ist?

Nehmen wir an, dass 6 Würfel geworfen werden dürfen:

- $X$  : Anzahl Sechsen
- $X \sim \mathcal{B}\left(6; \frac{1}{6}\right)$

$1 \cdot x_i - 1$	-1	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$P(X = 0)$	$P(X = 1)$	$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	$P(X = 6)$

Der Erwartungswert ergibt sich durch:

$$\begin{aligned}\mu &= -1 \cdot P(X=0) + 0 \cdot P(X=1) + 1 \cdot P(X=2) + 2 \cdot P(X=3) + 3 \cdot P(X=4) + 4 \cdot P(X=5) + 5 \cdot P(X=6) \\ &= -1 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=2) + 2 \cdot P(X=3) + 3 \cdot P(X=4) + 4 \cdot P(X=5) + 5 \cdot P(X=6) \\ &\vdots \\ \mu &= 0\end{aligned}$$

Hier ist der Erwartungswert 0. Somit muss der Würfel 6 mal geworfen werden, damit das Spiel fair ist.

## 11)

Begründen Sie, dass der Graph der binomialverteilten Zufallsvariablen  $X$  mit den Parametern  $n=10$  und  $p=\frac{1}{2}$  symmetrisch zur Geraden  $x=5$  ist. Verwenden Sie die Bernoulli-Formel.

Damit die Geradensymmetrie von  $P(X=k) = \binom{10}{k} \cdot 0,5^k \cdot (1-0,5)^{10-k}$  für  $x=5$  bewiesen werden kann, gilt  $f(a-x) = f(a+x)$  ( $P(X=a-x) = P(X=a+x)$ ), wobei  $a=5$ , durch  $x=5$  der Gerade gegeben ist.

$$\begin{aligned}P(X=a-x) &= P(X=a+x) \\ P(X=5-x) &= P(X=5+x) \\ \binom{10}{5-x} \cdot 0,5^{5-x} \cdot (1-0,5)^{10-(5-x)} &= \binom{10}{5+x} \cdot 0,5^{5+x} \cdot (1-0,5)^{10-(5+x)} \\ \frac{10!}{(10-(5-x))! \cdot (5-x)!} \cdot 0,5^5 \cdot \frac{1}{0,5^x} \cdot 0,5^{10-5+x} &= \frac{10!}{(10-(5+x))! \cdot (5+x)!} \cdot 0,5^5 \cdot 0,5^x \cdot 0,5^{10-5-x} \\ \frac{10!}{(10-5+x)! \cdot (5-x)!} \cdot 0,5^5 \cdot \frac{1}{0,5^x} \cdot 0,5^{10} \cdot \frac{1}{0,5^5} \cdot 0,5^x &= \frac{10!}{(10-5-x)! \cdot (5+x)!} \cdot 0,5^5 \cdot 0,5^x \cdot 0,5^{10} \cdot \frac{1}{0,5^5} \cdot \frac{1}{0,5^x} \\ \frac{10!}{(10-5+x)! \cdot (5-x)!} \cdot 0,5^{10} &= \frac{10!}{(10-5-x)! \cdot (5+x)!} \cdot 0,5^{10} \\ \frac{10!}{(5+x)! \cdot (5-x)!} \cdot 0,5^{10} &= \frac{10!}{(5-x)! \cdot (5+x)!} \cdot 0,5^{10} \\ 1 &= 1\end{aligned}$$

Durch dem Erfüllen der Bedingung  $P(X=5-x) = P(X=5+x)$  ist folglich "bewiesen", dass eine Geradensymmetrie zu der Gerade  $x=5$  bei dieser Binomialverteilung besteht.

Beweisführung: Seite 159 Nr. 11)