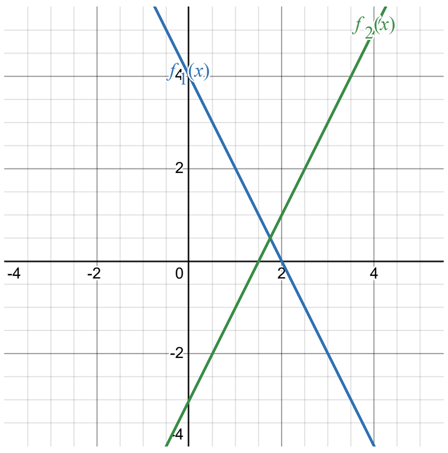
Umkehrfunktionsaufgaben 1) 2)

1)

> Gegeben sind die beiden linearen Funktionen $f_1(x) = -2x + 4$ und $f_2(x) = 2x - 3$.

a)

> Zeichnen Sie beide Funktionsbilder ein!



b)

> Bestimmen Sie rechnerisch die beiden Umkehrfunktionen!

Für $f_1(x) = -2x + 4$ gilt:

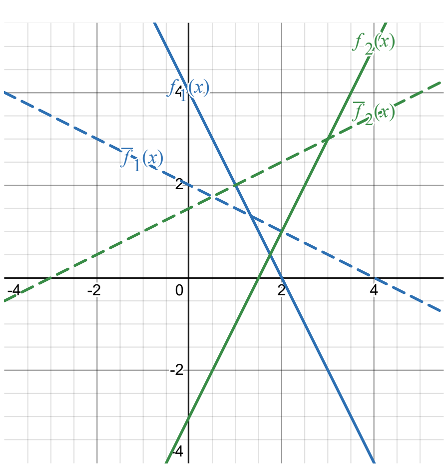
$$\begin{aligned} f_1(x) &= -2x + 4 && \\ y &= -2x + 4 && \mid -4 \\ y - 4 &= -2x && \mid \div(-2) \\ x &= \frac{y-4}{-2} = -\frac{1}{2}y + 2 && \mid (x;y) \to (y;x) \\ y &= -\frac{1}{2}x + 2 && \\ \bar{f}_1(x) &= -\frac{1}{2}x + 2 && \end{aligned}$$

Für $f_2(x) = 2x - 3$ gilt:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 2x - 3 && \\ y &= 2x - 3 && \mid +3 \\ y + 3 &= 2x && \mid \div 2 \\ x &= \frac{y+3}{2} = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} && \mid (x;y) \to (y;x) \\ y &= \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} && \\ \bar{f}_2(x) &= \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} && \end{aligned}$$

c)

> Zeichnen Sie die Graphen der Umkehrfunktionen ein!



d)

> Stellen Sie für die einander entsprechenden Funktionen und Umkehrfunktionen folgende Merkmale gegenüber: Definitionsbereich, Wertebereich, Achsenschnittpunkte und Monotonie!

Für $f_1(x) = -2 + 4$ und $\bar{f}_1(x) = 0,5x + 2$:
Der Definitionsbereich von $f_1(x)$ ist $D_{f_1} = \mathbb{R}$. Hierdurch ist der Wertebereich von $\bar{f}_1(x)$ ebenfalls $\mathbb{R}$. Wir erhalten $D_{f_1} = \mathbb{R}$ und $W_{\bar{f}_1} = \mathbb{R}$. Der Wertebereich von $f_1(x)$ ist $W_{f_1} = \mathbb{R}$. Hierdurch ist der Definitionsbereich von $\bar{f}_1(x)$ ebenfalls $\mathbb{R}$.
Allgemein erhalten wir:

- $D_{f_1} = \mathbb{R};\ W_{f_1} = \mathbb{R}$
- $D_{\bar{f}_1} = \mathbb{R};\ W_{\bar{f}_1} = \mathbb{R}$
  ($D_{f_1} = W_{\bar{f}_1}$ und $D_{\bar{f}_1} = W_{f_1}$)
  Durch $\deg f_1(x) = 1$ ist $f_1(x)$ bijektiv und $\bar{f}_1(x)$ wohldefinitert.

Die Achsenschnittpunkte sind für $f_1(x)$:

- x-Achse: 2
- y-Achse: 4
  Die Achsenschnittpunkte sind für $\bar{f}_1(x)$:
- x-Achse: 4
- y-Achse: 2
  Allgemein sind Nullstellen einer Funktion f die y-Achsenschnittpunkte der Umkehrfunktion $\bar{f}$. Dies lässt sich durch die Umwandlung von $(x;y) \to (y;x)$ begründen. Eine Nullstelle ist an der Umkehrfunktion auf der y-Achse: $(n;0) \to (0;n)$.

Die Monotonie der Funktion $f_1(x)$ ist streng monoton fallend, wie $\overline{f}_1(x)$ auch (erkennbar durch die Funktionen und Graphen).

Annahmeweise ist eine lineare Funktion $g(x)$ streng monoton fallend, dann gilt: $g'(x) < 0$. Für die Umkehrfunktion gilt dann: $\overline{g}'(x) = \frac{1}{g'(\overline{g}(x))} < 0$, durch $g'(\overline{g}(x)) < 0$. Hierdurch ist gezeigt, dass jede streng monoton fallende Funktion in ihrer Umkehrfunktion ebenfalls streng monoton fallend sein muss.

Für $f_2(x) = 2x - 3$ und $\overline{f}_2(x) = 0,5x + 1,5$:
Der Definitionsbereich von $f_2(x)$ ist $D_{f_1} = \mathbb{R}$. Hierdurch ist der Wertebereich von $\overline{f}_2(x)$ ebenfalls $\mathbb{R}$. Wir erhalten $D_{f_2} = \mathbb{R}$ und $W_{\overline{f}_2} = \mathbb{R}$. Der Wertebereich von $f_2(x)$ ist $W_{f_2} = \mathbb{R}$. Hierdurch ist der Definitionsbereich von $\overline{f}_2(x)$ ebenfalls $\mathbb{R}$.
Allgemein erhalten wir:

- $D_{f_2} = \mathbb{R}$; $W_{f_2} = \mathbb{R}$
- $D_{\overline{f}_2} = \mathbb{R}$; $W_{\overline{f}_2} = \mathbb{R}$
  ($D_{f_2} = W_{\overline{f}_2}$ und $D_{\overline{f}_2} = W_{f_2}$)
  Durch $\deg f_2(x) = 1$ ist $f_2(x)$ bijektiv und $\overline{f}_2(x)$ wohldefinitert.

Die Achsenschnittpunkte sind für $f_2(x)$:

- x-Achse: $1,5$
- y-Achse: -3
  Die Achsenschnittpunkte sind für $\overline{f}_2(x)$:
- x-Achse: -3
- y-Achse: $1,5$
  Allgemein sind Nullstellen einer Funktion f die y-Achsenschnittpunkte der Umkehrfunktion $\overline{f}$. Dies lässt sich durch die Umwandlung von $(x;y) \to (y;x)$ begründen. Eine Nullstelle ist an der Umkehrfunktion auf der y-Achse: $(n;0) \to (0;n)$.

Die Monotonie der Funktion $f_2(x)$ ist streng monoton steigend, wie $\overline{f}_2(x)$ auch (erkennbar durch die Funktionen und Graphen).
Annahmeweise ist eine lineare Funktion $g(x)$ streng monoton steigend, dann gilt: $g'(x) > 0$. Für die Umkehrfunktion gilt dann: $\overline{g}'(x) = \frac{1}{g'(\overline{g}(x))} > 0$, durch $g'(\overline{g}(x)) > 0$. Hierdurch ist gezeigt, dass jede streng monoton steigende Funktion in ihrer Umkehrfunktion ebenfalls streng monoton steigend sein muss.

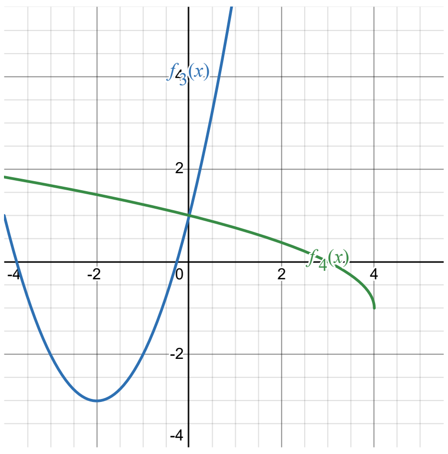
---

2)

> Gegeben sind die quadratische Funktion $f_3(x) = (x+2)^2 - 3$ und die Wurzelfunktion $f_4(x) = \sqrt{4-x} - 1$.

a)

> Zeichnen Sie beide Funktionsbilder ein!



b)

> Bestimmen Sie rechnerisch die beiden Umkehrfunktionen!

Für $f_3(x) = (x+2)^2 - 3$ gilt:

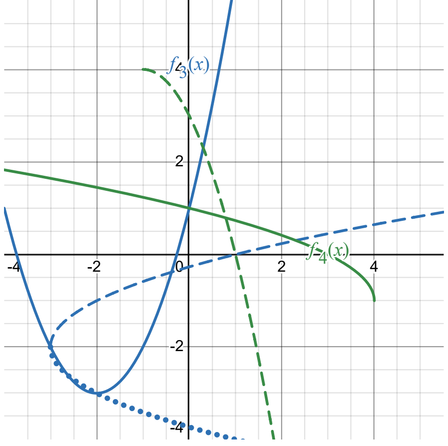
$$\begin{aligned} f_3(x) &= (x+2)^2 - 3 && \\ y &= (x+2)^2 - 3 && \mid +3 \\ y+3 &= (x+2)^2 && \mid \sqrt{} \\ x+2 &= \pm\sqrt{y+3} && \mid -2 \\ x &= \pm\sqrt{y+3} - 2 && \mid (x;y) \to (y;x) \\ y &= \pm\sqrt{x+3} - 2 && \\ \overline{f}_3(x) &= \pm\sqrt{x+3} - 2 && \end{aligned}$$

Für $f_4(x) = \sqrt{4-x} - 1$ gilt:

$$\begin{aligned} f_4(x) &= \sqrt{4-x} - 1 && \\ y &= \sqrt{4-x} - 1 && \mid +1 \\ y+1 &= \sqrt{4-x} && \mid ()^2 \\ 4-x &= (y+1)^2 && \mid -4 \\ -x &= (y+1)^2 - 4 && \mid \cdot(-1) \\ x &= -(y+1)^2 + 4 && \mid (x;y) \to (y;x) \\ y &= -(x+1)^2 + 4 && \\ \overline{f}_4(x) &= -(x+1)^2 + 4 && \end{aligned}$$

c)

> Zeichnen Sie die Graphen der Umkehrfunktionen ein!



d)

> Stellen Sie für die einander entsprechenden Funktionen und Umkehrfunktionen folgende Merkmale gegenüber: Definitionsbereich, Wertebereich, Achsenschnittpunkte und Monotonie!

Für $f_3(x) = (x+2)^2 - 3$ und $\overline{f}_3(x) = \pm\sqrt{x+3} - 2$:
Der Definitionsbereich von $f_3(x)$ ist $D_{f_3} = \mathbb{R}$, mit dem Wertebereich $W_{f_3} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$. Hierdurch ist der Definitionsbereich von $\overline{f}_3(x)$ ebenfalls $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$.
Da die Funktion f_3 nicht injektiv durch $\deg f_3(x) = 2$ ist, muss der Definitionsbereich von $f_3(x)$ jeweils der Umkehrfunktion angepasst werden. Wir erhalten:

$$D_{f_3} = W_{\overline{f}_3} = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}, & \text{wenn } \overline{f}_3(x) = -\sqrt{x+3} - 2 \\ \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}, & \text{wenn } \overline{f}_3(x) = \sqrt{x+3} - 2 \end{cases}$$

Allgemein erhalten wir:

- $D_{f_3} : \textit{Bedingung direkt oben};\ W_{f_3} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$
- $D_{\overline{f}_3} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\};\ W_{\overline{f}_3} : \textit{Bedingung direkt oben}$
  ($D_{f_1} = W_{\overline{f}_1}$ und $D_{\overline{f}_1} = W_{f_1}$)

Die Achsenschnittpunkte sind für $f_3(x)$:

- x-Achse: $-2 \mp \sqrt{3}$. (Minus bei erster Bedingung vom Definitionsbereich D_{f_3}, plus bei zweiter Bedingung)
- y-Achse: 1, wenn die zweite Bedingung vom Definitionsbereich gilt

Die Achsenschnittpunkte sind für $\overline{f}_1(x)$:

- x-Achse: 1, wenn die zweite Bedingung vom Definitionsbereich gilt
- y-Achse: $-2 \mp \sqrt{3}$. (Minus bei erster Bedingung vom Definitionsbereich D_{f_3}, plus bei zweiter Bedingung)

Allgemein sind Nullstellen einer Funktion f die y-Achsenschnittpunkte der Umkehrfunktion $\overline{f}$. Dies lässt sich durch die Umwandlung von $(x;y) \to (y;x)$ begründen. Eine Nullstelle ist an der Umkehrfunktion auf der y-Achse: $(n;0) \to (0;n)$.

Die Monotonie der Funktion $f_3(x)$ ist streng monoton fallend, wenn die erste Bedingung gilt, und streng monoton steigend, wenn die zweite Bedingung gilt. Die Monotonie der Umkehrfunktion orientiert sich identisch zu der Funktion $f_3(x)$.

Annahmeweise ist eine lineare Funktion $g(x)$ streng monoton fallend, dann gilt: $g'(x) < 0$. Für die Umkehrfunktion gilt dann: $\overline{g}'(x) = \frac{1}{g'(\overline{g}(x))} < 0$, durch $g'(\overline{g}(x)) < 0$. Hierdurch ist gezeigt, dass jede streng monoton fallende Funktion in ihrer Umkehrfunktion ebenfalls streng monoton fallend sein muss.

Für $f_4(x) = \sqrt{4-x} - 1$ und $\overline{f}_4(x) = -(x+1)^2 + 4$:
Der Definitionsbereich von $f_4(x)$ ist $D_{f_4} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$, mit dem Wertebereich $W_{f_4} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$. Hierdurch ist der Definitionsbereich von $\overline{f}_4(x)$ ebenfalls $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$.

Allgemein erhalten wir:

- $D_{f_4} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\};\ W_{f_4} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$
- $D_{\overline{f}_4} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\};\ W_{\overline{f}_4} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$
  ($D_{f_4} = W_{\overline{f}_4}$ und $D_{\overline{f}_4} = W_{f_4}$)

Die Achsenschnittpunkte sind für $f_4(x)$:

- x-Achse: 3
- y-Achse: 1
  Die Achsenschnittpunkte sind für $\overline{f}_4(x)$:
- x-Achse: 1
- y-Achse: 3
  Allgemein sind Nullstellen einer Funktion f die y-Achsenschnittpunkte der Umkehrfunktion $\overline{f}$. Dies lässt sich durch die Umwandlung von $(x;y) \to (y;x)$ begründen. Eine Nullstelle ist an der Umkehrfunktion auf der y-Achse: $(n;0) \to (0;n)$.

Die Monotonie der Funktion $f_4(x)$ ist streng monoton fallend, wie $\overline{f}_4(x)$ auch (erkennbar durch die Funktionen und Graphen).
