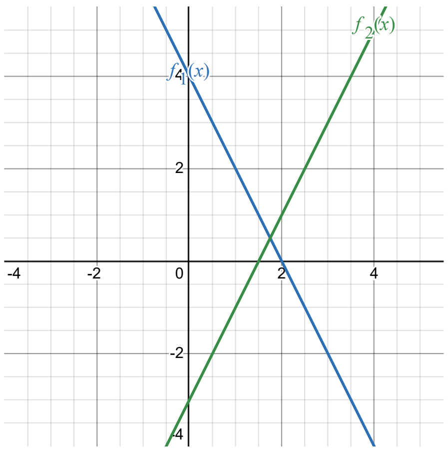
# Umkehrfunktionsaufgaben 1) 2)

## 1)

> Gegeben sind die beiden linearen Funktionen $f_1(x) = -2x + 4$ und $f_2(x) = 2x - 3$.

### a)

> Zeichnen Sie beide Funktionsbilder ein!




### b)

> Bestimmen Sie rechnerisch die beiden Umkehrfunktionen!

Für $f_1(x) = -2x + 4$ gilt:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -2x + 4 & \\ y &= -2x + 4 & \mid -4 \\ y - 4 &= -2x & \mid \div(-2) \\ x &= \frac{y-4}{-2} = -\frac{1}{2}y + 2 & \mid (x;y) \to (y;x) \\ y &= -\frac{1}{2}x + 2 & \\ \bar{f}_1(x) &= -\frac{1}{2}x + 2 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= -2 \\ \bar{f}_1'(x) &= -0,5 \end{aligned}$$

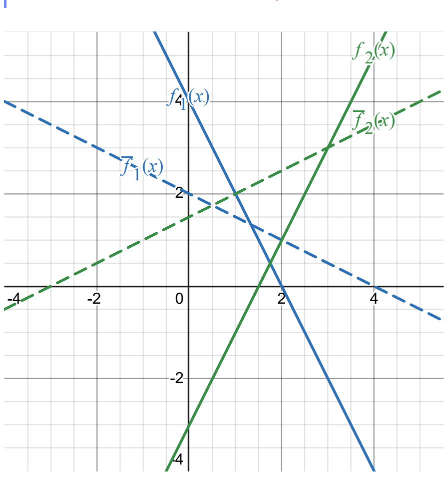
Für $f_2(x) = 2x - 3$ gilt:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 2x - 3 & \\ y &= 2x - 3 & \mid +3 \\ y + 3 &= 2x & \mid \div 2 \\ x &= \frac{y+3}{2} = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} & \mid (x;y) \to (y;x) \\ y &= \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \\ \bar{f}_2(x) &= \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= 2 \\ \bar{f}_2'(x) &= 0,5 \end{aligned}$$

### c)

> Zeichnen Sie die Graphen der Umkehrfunktionen ein!




### d)

> Stellen Sie für die einander entsprechenden Funktionen und Umkehrfunktionen folgende Merkmale gegenüber: Definitionsbereich, Wertebereich, Achsenschnittpunkte und Monotonie!

Für $f_1(x) = -2 + 4$ und $\bar{f}_1(x) = 0,5x + 2$:
Der Definitionsbereich von $f_1(x)$ ist $D_{f_1} = \mathbb{R}$. Hierdurch ist der Wertebereich von $\bar{f}_1(x)$ ebenfalls $\mathbb{R}$. Wir erhalten $D_{f_1} = \mathbb{R}$ und $W_{\bar{f}_1} = \mathbb{R}$. Der Wertebereich von $f_1(x)$ ist $W_{f_1} = \mathbb{R}$. Hierdurch ist der Definitionsbereich von $\bar{f}_1(x)$ ebenfalls $\mathbb{R}$.
Allgemein erhalten wir:

- $D_{f_1} = \mathbb{R};\ W_{f_1} = \mathbb{R}$
- $D_{\bar{f}_1} = \mathbb{R};\ W_{\bar{f}_1} = \mathbb{R}$
  ($D_{f_1} = W_{\bar{f}_1}$ und $D_{\bar{f}_1} = W_{f_1}$)

> Durch die streng monotone Steigung ($f_1'(x) = -2$) der Funktion $f_1$ ist diese injektiv (Verschiedene Elemente der Definitionsmenge werden auf verschiedene Elemente der Wertemenge abgebildet).
> Da die Funktion aufgrund ihrer Linearität alle Werte der reellen Zahlen annehmen kann, ist $f_1$ surjektiv (Für jedes $q \in W_{f_1}$ existiert ein $x \in D_{f_1}$, sodass $f_1(x) = q$).
> Damit ist $f_1$ bijektiv. Folglich muss die Umkehrfunktion $\bar{f}_1$ ebenfalls bijektiv sein.

Die Achsenschnittpunkte sind für $f_1(x)$:

- $x$-Achse: $2$
- $y$-Achse: $4$
  Die Achsenschnittpunkte sind für $\overline{f}_1(x)$:
- $x$-Achse: $4$
- $y$-Achse: $2$
  Allgemein sind Nullstellen einer Funktion $f$ die $y$-Achsenschnittpunkte der Umkehrfunktion $\overline{f}$. Dies lässt sich durch die Umwandlung von $(x;y) \to (y;x)$ begründen. Eine Nullstelle ist an der Umkehrfunktion auf der $y$-Achse: $(n;0) \to (0;n)$.

Die Monotonie der Funktion $f_1(x)$ ist streng monoton fallend, wie $\overline{f}_1(x)$ auch (erkennbar durch die Funktionen und Graphen).

Annahmeweise ist eine lineare Funktion $g(x)$ streng monoton fallend, dann gilt: $g'(x) < 0$. Für die Umkehrfunktion gilt dann: $\overline{g}'(x) = \frac{1}{g'(\overline{g}(x))} < 0$, durch $g'(\overline{g}(x)) < 0$. Hierdurch ist gezeigt, dass jede streng monoton fallende Funktion in ihrer Umkehrfunktion ebenfalls streng monoton fallend sein muss.

---

Für $f_2(x) = 2x - 3$ und $\overline{f}_2(x) = 0,5x + 1,5$:
Der Definitionsbereich von $f_2(x)$ ist $D_{f_1} = \mathbb{R}$. Hierdurch ist der Wertebereich von $\overline{f}_2(x)$ ebenfalls $\mathbb{R}$. Wir erhalten $D_{f_2} = \mathbb{R}$ und $W_{\overline{f}_2} = \mathbb{R}$. Der Wertebereich von $f_2(x)$ ist $W_{f_2} = \mathbb{R}$. Hierdurch ist der Definitionsbereich von $\overline{f}_2(x)$ ebenfalls $\mathbb{R}$.
Allgemein erhalten wir:

- $D_{f_2} = \mathbb{R}$; $W_{f_2} = \mathbb{R}$
- $D_{\overline{f}_2} = \mathbb{R}$; $W_{\overline{f}_2} = \mathbb{R}$
  ($D_{f_2} = W_{\overline{f}_2}$ und $D_{\overline{f}_2} = W_{f_2}$)

> Durch die streng monotone Steigung ($f_2'(x) = 2$) der Funktion $f_2$ ist diese injektiv (Verschiedene Elemente der Definitionsmenge werden auf verschiedene Elemente der Wertemenge abgebildet).
> Da die Funktion aufgrund ihrer Linearität alle Werte der reellen Zahlen annehmen kann, ist $f_2$ surjektiv (Für jedes $q \in W_{f_2}$ existiert ein $x \in D_{f_2}$, sodass $f_2(x) = q$).
> Damit ist $f_2$ bijektiv. Folglich muss die Umkehrfunktion $\overline{f}_2$ ebenfalls bijektiv sein.

Die Achsenschnittpunkte sind für $f_2(x)$:

- $x$-Achse: $1,5$
- $y$-Achse: $-3$
  Die Achsenschnittpunkte sind für $\overline{f}_2(x)$:
- $x$-Achse: $-3$
- $y$-Achse: $1,5$
  Allgemein sind Nullstellen einer Funktion $f$ die $y$-Achsenschnittpunkte der Umkehrfunktion $\overline{f}$. Dies lässt sich durch die Umwandlung von $(x;y) \to (y;x)$ begründen. Eine Nullstelle ist an der Umkehrfunktion auf der $y$-Achse: $(n;0) \to (0;n)$.

Die Monotonie der Funktion $f_2(x)$ ist streng monoton steigend, wie $\overline{f}_2(x)$ auch (erkennbar durch die Funktionen und Graphen).
Annahmeweise ist eine lineare Funktion $g(x)$ streng monoton steigend, dann gilt: $g'(x) > 0$. Für die Umkehrfunktion gilt dann: $\overline{g}'(x) = \frac{1}{g'(\overline{g}(x))} > 0$, durch $g'(\overline{g}(x)) > 0$. Hierdurch ist gezeigt, dass jede streng monoton steigende Funktion in ihrer Umkehrfunktion ebenfalls streng monoton steigend sein muss.

---

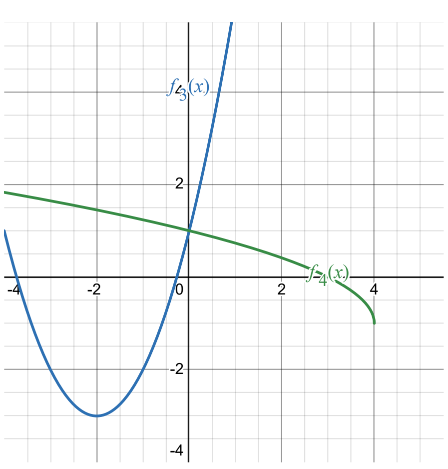
---

## 2)

> Gegeben sind die quadratische Funktion $f_3(x) = (x+2)^2 - 3$ und die Wurzelfunktion $f_4(x) = \sqrt{4-x} - 1$.

### a)

> Zeichnen Sie beide Funktionsbilder ein!




### b)

> Bestimmen Sie rechnerisch die beiden Umkehrfunktionen!

Für $f_3(x) = (x+2)^2 - 3$ gilt:

$$
\begin{aligned}
f_3(x) &= (x+2)^2 - 3 \\
y &= (x+2)^2 - 3 && \mid +3 \\
y + 3 &= (x+2)^2 && \mid \sqrt{} \\
x + 2 &= \pm\sqrt{y+3} && \mid -2 \\
x &= \pm\sqrt{y+3} - 2 && \mid (x;y) \to (y;x) \\
y &= \pm\sqrt{x+3} - 2 \\
\overline{f}_3(x) &= \pm\sqrt{x+3} - 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_3'(x) &= 2x + 4 \\
\overline{f}_3'(x) &= \pm\frac{1}{2\sqrt{x+3}} \\
\overline{f}_3^{(n)}(x) &= \pm(x+3)^{(0,5-n)} \cdot \prod_{i=1}^{n}(1,5-i)
\end{aligned}
$$

Für $f_4(x) = \sqrt{4-x} - 1$ gilt:

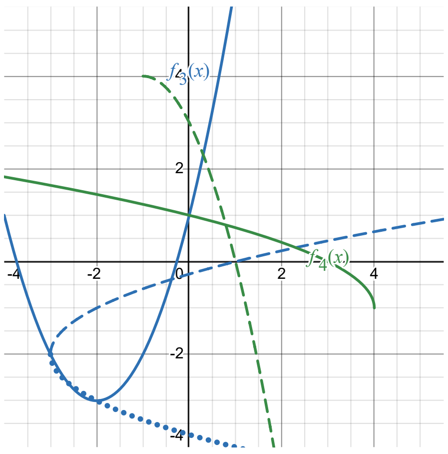
$$
\begin{aligned}
f_4(x) &= \sqrt{4-x}-1 && \\
y &= \sqrt{4-x}-1 && \mid +1 \\
y+1 &= \sqrt{4-x} && \mid ()^2 \\
4-x &= (y+1)^2 && \mid -4 \\
-x &= (y+1)^2-4 && \mid \cdot(-1) \\
x &= -(y+1)^2+4 && \mid (x;y) \to (y;x) \\
y &= -(x+1)^2+4 && \\
\overline{f}_4(x) &= -(x+1)^2+4 &&
\end{aligned}
$$

$$f_4^{(n)}(x) = (4-x)^{(0{,}5-n)} \cdot \prod_{i=1}^{d} -(1{,}5-i)$$

$$\overline{f}_4'(x) = -2x-2$$
$$\overline{f}_4''(x) = -2$$

## c)

> Zeichnen Sie die Graphen der Umkehrfunktionen ein!




## d)

> Stellen Sie für die einander entsprechenden Funktionen und Umkehrfunktionen folgende Merkmale gegenüber: Definitionsbereich, Wertebereich, Achsenschnittpunkte und Monotonie!

Für $f_3(x) = (x+2)^2 - 3$ und $\overline{f}_3(x) = \pm\sqrt{x+3} - 2$:
Der Definitionsbereich von $f_3(x)$ ist $D_{f_3} = \mathbb{R}$, mit dem Wertebereich $W_{f_3} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$. Hierdurch ist der Definitionsbereich von $\overline{f}_3(x)$ ebenfalls $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$.
Da die Funktion $f_3$ nicht injektiv durch $\deg f_3(x) = 2$ ist, muss der Definitionsbereich von $f_3(x)$ so angepasst werden, dass $f_3(x)$ injektiv ist. Dadurch erhalten wir zwei Möglichkeiten für den Definitionsbereich von $f_3(x)$:

$$D_{f_3} = W_{\overline{f}_3} = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}, & \text{wenn } \overline{f}_3(x) = -\sqrt{x+3}-2 \\ \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}, & \text{wenn } \overline{f}_3(x) = \sqrt{x+3}-2 \end{cases}$$

Allgemein erhalten wir:

- $D_{f_3} : \textit{Bedingung direkt oben};\ W_{f_3} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$
- $D_{\overline{f}_3} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\};\ W_{\overline{f}_3} : \textit{Bedingung direkt oben}$
  ($D_{f_3} = W_{\overline{f}_3}$ und $D_{\overline{f}_3} = W_{f_3}$)

> Durch die Beschränkung der Definitionsmenge $D_{f_3}$ erhalten wir die Injektivität. Die Wertemenge wurde der Funktion angepasst, sodass diese alle Elemente der Wertemenge abdeckt ($W_{f_3}$). $f_3$ ist surjekiv und injektiv, wodurch sie bijektiv ist. Die Umkehrfunktion ist hierdurch ebenfalls bijektiv, insofern wir die Werte und Definitionsmengen beachten.

Die Achsenschnittpunkte sind für $f_3(x)$:

- $x$-Achse: $-2 \mp \sqrt{3}$. (Minus bei erster Bedingung vom Definitionsbereich $D_{f_3}$, plus bei zweiter Bedingung)
- $y$-Achse: $1$, wenn die zweite Bedingung vom Definitionsbereich gilt

Die Achsenschnittpunkte sind für $\overline{f}_1(x)$:

- $x$-Achse: $1$, wenn die zweite Bedingung vom Definitionsbereich gilt
- $y$-Achse: $-2 \mp \sqrt{3}$. (Minus bei erster Bedingung vom Definitionsbereich $D_{f_3}$, plus bei zweiter Bedingung)

Allgemein sind Nullstellen einer Funktion $f$ die $y$-Achsenschnittpunkte der Umkehrfunktion $\overline{f}$. Dies lässt sich durch die Umwandlung von $(x;y) \to (y;x)$ begründen. Eine Nullstelle ist an der Umkehrfunktion auf der $y$-Achse: $(n;0) \to (0;n)$.

Die Monotonie der Funktion $f_3(x)$ ist streng monoton fallend, wenn die erste Bedingung gilt, und streng monoton steigend, wenn die zweite Bedingung gilt. Die Monotonie der Umkehrfunktion orientiert sich identisch zu der Funktion $f_3(x)$.

Annahmeweise ist eine lineare Funktion $g(x)$ streng monoton fallend, dann gilt: $g'(x) < 0$. Für die Umkehrfunktion gilt dann: $\overline{g}'(x) = \frac{1}{g'(\overline{g}(x))} < 0$, durch $g'(\overline{g}(x)) < 0$. Hierdurch ist gezeigt, dass jede streng monoton fallende Funktion in ihrer Umkehrfunktion ebenfalls streng monoton fallend sein muss.

---

Für $f_4(x) = \sqrt{4-x} - 1$ und $\overline{f}_4(x) = -(x+1)^2 + 4$:
Der Definitionsbereich von $f_4(x)$ ist $D_{f_4} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$, mit dem Wertebereich $W_{f_4} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$. Hierdurch ist der Definitionsbereich von $\overline{f}_4(x)$ ebenfalls $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$.

Allgemein erhalten wir:

- $D_{f_4} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\};\ W_{f_4} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$
- $D_{\overline{f}_4} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\};\ W_{\overline{f}_4} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$
  ($D_{f_4} = W_{\overline{f}_4}$ und $D_{\overline{f}_4} = W_{f_4}$)

> Durch die Beschränkung der Definitionsmenge $D_{f_4}$ erhalten wir die Injektivität. Die Wertemenge wurde der Funktion angepasst, sodass diese alle Elemente der Wertemenge abdeckt ($W_{f_4}$). $f_4$ ist surjekiv und injektiv, wodurch sie bijektiv ist. Die Umkehrfunktion ist hierdurch ebenfalls bijektiv.

Die Achsenschnittpunkte sind für $f_4(x)$:

- $x$-Achse: $3$
- $y$-Achse: $1$
  Die Achsenschnittpunkte sind für $\overline{f}_4(x)$:
- $x$-Achse: $1$

- $y$-Achse: $3$

  Allgemein sind Nullstellen einer Funktion $f$ die $y$-Achsenschnittpunkte der Umkehrfunktion $\overline{f}$. Dies lässt sich durch die Umwandlung von $(x;y) \to (y;x)$ begründen. Eine Nullstelle ist an der Umkehrfunktion auf der $y$-Achse: $(n;0) \to (0;n)$.

Die Monotonie der Funktion $f_4(x)$ ist streng monoton fallend, wie $\overline{f}_4(x)$ auch (erkennbar durch die Funktionen und Graphen).