Seite 198 Nr. 9)

> Zeigen Sie, dass sich die Kugeln $K_1 = \vec{x}^2 = 49$ und $K_2 = \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 4,5 \end{pmatrix}\right]^2 = \frac{49}{4}$ berühren.
>
> Bestimmen Sie die Koordinaten des Berührpunktes und geben Sie eine Gleichung der gemeinsamen Tangentialebene an.

Von oben gegeben ist:

- $r_1 = 7$
- $r_2 = 3,5$
- $M_1(0 \mid 0 \mid 0)$
- $M_2(3 \mid 9 \mid 4,5)$

Um zu zeigen, dass sich beide Kugeln berühren, so muss folgendes gelten: $|\overrightarrow{M_1M_2}| = r_1 + r_2$.

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{M_1M_2}| &= |\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}| \\ &= \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 4,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 4,5 \end{pmatrix} \right| \\ &= \sqrt{3^2 + 9^2 + 4,5^2} = 10,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= 7 + 3,5 \\ &= 10,5 \\ \Rightarrow \quad |\overrightarrow{M_1M_2}| &= r_1 + r_2 \end{aligned}$$

Dadurch ist gezeigt, dass sich die Kugeln berühren.

> GeradeInKugel
>
> Gegeben seien
>
> - $K_1 : \left[\vec{x} - \overrightarrow{OM_1}\right]^2 = r^2$
> - $g : \vec{x} = \overrightarrow{OM_1} + \lambda \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$
>
> Um die Schnittmenge der Kugel K und g zu bestimmen, muss g in K eingesetzt werden:
>
> $$\begin{aligned} K_1 : \left[\vec{x} - \overrightarrow{OM_1}\right]^2 &= r^2 \\ \left[\overrightarrow{OM_1} + \lambda \cdot \overrightarrow{M_1M_2} - \overrightarrow{OM_1}\right]^2 &= r^2 \\ \left[\lambda \cdot \overrightarrow{M_1M_2}\right]^2 &= r^2 \\ \lambda^2 \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \circ \overrightarrow{M_1M_2} &= r^2 \\ \lambda^2 &= \frac{r^2}{\overrightarrow{M_1M_2} \circ \overrightarrow{M_1M_2}} \\ \lambda^2 &= \frac{r^2}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|^2} \\ \lambda &= \pm \frac{r}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|} \end{aligned}$$
>
> Die Schnittmenge lautet daher:
>
> $$\overrightarrow{OS_{1;2}} = \overrightarrow{OM_1} \pm \frac{r}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$$
>
> ---
>
> ---

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS_1} &= \overrightarrow{OM_1} + \frac{r_1}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{7}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 4,5 \end{pmatrix} \right|} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 4,5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{7}{10,5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 4,5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow S(2 \mid 6 \mid 3) \end{aligned}$$

Die Tangentialebene lautet:

$$\begin{aligned} E : \overrightarrow{M_1M_2} \circ \left[\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OS}\right] &= 0 \\ 3x_1 + 9x_2 + 4,5x_3 &= 73,5 \end{aligned}$$
