Seite 109 Nr. 4ac) 5a)

> Bestimmen Sie alle ganzrationalen Funktionen vom Grad 3, deren Graph durch die Punkte geht.

a)

> $A(0 \mid 1);\ B(1 \mid 0);\ C(-1 \mid 4);\ D(2 \mid -5)$

Die Bedingungen folgen für die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$:

- $f(0) = 1$
- $f(1) = 0$
- $f(-1) = 4$
- $f(2) = -5$

  > Es liegen genug Bedingungen vor

$$\begin{array}{r|rcr|}
\text{I:} & a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d & = & 1 \\
\text{II:} & a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d & = & 0 \\
\text{III:} & a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d & = & 4 \\
\text{IV:} & a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d & = & -5
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcr|}
\text{I:} & d & = & 1 \\
\text{II:} & a + b + c + d & = & 0 \\
\text{III:} & -a + b - c + d & = & 4 \\
\text{IV:} & 8a + 4b + 2c + d & = & -5
\end{array}$$

$$\text{I:} \quad d = 1$$

$$\begin{array}{r|rcr|l}
\text{II:} & a + b + c & = & -1 & \\
\text{III:} & -a + b - c & = & 3 & \mid \text{III} + \text{II} \\
\text{IV:} & 8a + 4b + 2c & = & -6 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcr|}
\text{II:} & a + b + c & = & -1 \\
\text{III:} & 2b & = & 2 \\
\text{IV:} & 8a + 4b + 2c & = & -6
\end{array}$$

$$\text{III:} \quad 2b = 2 \quad \Rightarrow \quad b = 1$$

$$\begin{array}{r|rcr|l}
\text{II:} & a + c & = & -2 & \mid \cdot(-2) \\
\text{IV:} & 8a + 2c & = & -10 & \quad \mid \text{II} + \text{IV}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcr|}
\text{II:} & a + c & = & -2 \\
\text{IV:} & 6a & = & -6
\end{array}$$

$$\text{IV:} \quad 6a = -6 \quad \Rightarrow \quad a = -1$$

$$\text{II:} \quad a + c = -2 \quad \Rightarrow \quad c = -1$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = -1$
- $b = 1$
- $c = -1$
- $d = 1$
  Die Funktion f lautet $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$

---

c)

> $A(1 \mid 0);\ B(0 \mid 2);\ C(-2 \mid 2)$

Die Bedingungen folgen für die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$:

- $f(1) = 0$
- $f(0) = 2$
- $f(-2) = 2$

  > Es liegen nicht genug Bedingungen vor:
  > Scharfunktion von f mit einem Parameter

$$\begin{array}{r|rcr|}
\text{I:} & a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d & = & 0 \\
\text{II:} & a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d & = & 2 \\
\text{III:} & a \cdot (-2)^3 + b \cdot (-2)^2 + c \cdot (-2) + d & = & 2
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcr|}
\text{I:} & a + b + c + d & = & 0 \\
\text{II:} & d & = & 2 \\
\text{III:} & -8a + 4b - 2c + d & = & 2
\end{array}$$

$$\text{I:} \quad d = 2$$

$$\begin{array}{r|rcr|l}
\text{I:} & a + b + c & = & -2 & \mid \cdot 2 \\
\text{III:} & -8a + 4b - 2c & = & 0 & \quad \mid \text{III} + \text{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcr|}
\text{I:} & a + b + c & = & -2 \\
\text{III:} & -6a + 6b & = & -4
\end{array}$$

$$\text{III:} \quad -6a + 6b = -4 \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{2}{3} + a$$

$$\text{I:} \quad a + b + c = -2 \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{4}{3} - 2a$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = a$
- $b = -\frac{2}{3} + a$
- $c = -\frac{4}{3} - 2a$
- $d = 2$
  Die Funktion f lautet $f_a(x) = ax^3 + \left(-\frac{2}{3} + a\right)x^2 + \left(-\frac{4}{3} - 2a\right)x + 2$

Aufgabe 5

> Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion vom Grad 3, deren Graph

a)

> durch $A(2 \mid 0)$, $B(-2 \mid 4)$ und $A(-4 \mid 8)$ geht und einen Tiefpunkt auf der y-Achse hat.

Die Bedingungen folgen für die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$:

- $f(2) = 0$
- $f(-2) = 4$
- $f(-4) = 8$
- $f'(0) = 0$

> Es liegen genug Bedingungen vor

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d & = & 0 \\
\text{II:} & a \cdot (-2)^3 + b \cdot (-2)^2 + c \cdot (-2) + d & = & 4 \\
\text{III:} & a \cdot (-4)^3 + b \cdot (-4)^2 + c \cdot (-4) + d & = & 8 \\
\text{IV:} & 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c & = & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & 8a + 4b + 2c + d & = & 0 \\
\text{II:} & -8a + 4b - 2c + d & = & 4 \\
\text{III:} & -64a + 16b - 4c + d & = & 8 \\
\text{IV:} & c & = & 0
\end{array}$$

$$\text{I:} \quad c = 0$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{I:} & 8a + 4b + d & = & 0 & \\
\text{II:} & -8a + 4b + d & = & 4 & \mid \text{II} + \text{I} \\
\text{III:} & -64a + 16b + d & = & 8 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{I:} & 8a + 4b + d & = & 0 & \mid \cdot 8 \\
\text{II:} & 8b + 2d & = & 4 & \\
\text{III:} & -64a + 16b + d & = & 8 & \quad \mid \text{III} + \text{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|l}
\text{I:} & 8a + 4b + d & = & 0 & \\
\text{II:} & 8b + 2d & = & 4 & \mid \cdot (-6) \\
\text{III:} & 48b + 9d & = & 8 & \quad \mid \text{III} + \text{II}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcl|}
\text{I:} & 8a + 4b + d & = & 0 \\
\text{II:} & 8b + 2d & = & 4 \\
\text{III:} & -3d & = & -16
\end{array}$$

$$\text{III:} \quad -3d = -16 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{16}{3}$$

$$\text{II:} \quad 8b + 2d = 4 \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{5}{6}$$

$$\text{I:} \quad 8a + 4b + d = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{4}$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = -\frac{1}{4}$
- $b = -\frac{5}{6}$
- $c = 0$
- $d = \frac{16}{3}$
  Die Funktion f lautet $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{16}{3}$.

Überprüfung des Extremum bei $x = 0$

> Es muss gelten: $f''(0) > 0$

$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{16}{3}$
$f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{3}x$
$f''(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{3}$

$f''(0) = -\frac{5}{3} < 0$

> Da $f''(0)$ die Bedingung nicht erfüllt, so stellt f nicht die gesuchte Funktion dar. Es existiert nur eine Lösung des Gleichungssystems, daher kann f nach den Bedingungen nie existieren.