Seite 135 Nr. 3)

> Gegeben sind eine quadratische Pyramide mit den Ecken $A(-3 \mid -3 \mid 0)$, $B(3 \mid -3 \mid 0)$, $C(3 \mid 3 \mid 0)$, $D(-3 \mid 3 \mid 0)$ und der Spitze $S(0 \mid 0 \mid 9)$ sowie die Ebene $E: 3x_2 + 4x_3 = 21$.

a)

> Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Pyramidenkanten mit der Ebene E.

Für die Pyramidenkanten gilt:

$$\begin{aligned} g_{AS}: \vec{x} &= \overrightarrow{OS} + \lambda \cdot \overrightarrow{SA} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3-0 \\ -3-0 \\ 0-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix} \\ g_{BS}: \vec{x} &= \overrightarrow{OS} + \lambda \cdot \overrightarrow{SB} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3-0 \\ -3-0 \\ 0-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix} \\ g_{CS}: \vec{x} &= \overrightarrow{OS} + \lambda \cdot \overrightarrow{SC} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3-0 \\ 3-0 \\ 0-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} \\ g_{DS}: \vec{x} &= \overrightarrow{OS} + \lambda \cdot \overrightarrow{SD} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3-0 \\ 3-0 \\ 0-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für das gleichsetzen von Ebenen und Gerade gilt hier:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{p} + \frac{d - \vec{n} \circ \vec{p}}{\vec{n} \circ \vec{v}} \cdot \vec{v}$$

Zu nennen ist hier, dass diese Gleichung für den Punkt P durch

> GeradeInEbene
>
> > Eine Gerade $g: \vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{v}$ und eine Ebene $E: \vec{n} \circ \vec{x} = \vec{n} \circ \vec{q}$ sollen auf einen Schnittpunkt untersucht werden.
>
> Hierzu wird g in E eingesetzt und nach λ umgestellt:
>
> $$\begin{aligned} E: \vec{n} \circ \vec{x} &= \vec{n} \circ \vec{q} \\ \vec{n} \circ \left[\vec{p} + \lambda \cdot \vec{v}\right] &= \vec{n} \circ \vec{q} \\ \vec{n} \circ \vec{p} + \lambda \cdot \vec{n} \circ \vec{v} &= \vec{n} \circ \vec{q} && \mid -\vec{n} \circ \vec{p} \\ \lambda \cdot \vec{n} \circ \vec{v} &= \vec{n} \circ \vec{q} - \vec{n} \circ \vec{p} \\ \lambda \cdot \vec{n} \circ \vec{v} &= \vec{n} \circ \left[\vec{q} - \vec{p}\right] && \mid \div \vec{n} \circ \vec{v} \\ \lambda &= \frac{\vec{n} \circ \left[\vec{q} - \vec{p}\right]}{\vec{n} \circ \vec{v}} \end{aligned}$$
>
> $$\Rightarrow \overrightarrow{OS} = \vec{p} + \frac{\vec{n} \circ \left[\vec{q} - \vec{p}\right]}{\vec{n} \circ \vec{v}} \cdot \vec{v}$$
>
> Da $\vec{q}$ oft nicht gegeben ist, so ist per Definition von $d = \vec{n} \circ \vec{q}$ auch folgende Form für $\overrightarrow{OS}$ möglich:
>
> $$\overrightarrow{OS} = \vec{p} + \frac{d - \vec{n} \circ \vec{p}}{\vec{n} \circ \vec{v}} \cdot \vec{v}$$
>
> ---
>
> > Sollte es sich bei der Gerade um eine normierte Lotgerade der Ebene E handeln, dann gilt folgendes:
> >
> > - $g_0: \vec{x} = \vec{p} + \frac{\lambda}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}$
>
> $$\begin{aligned} E: \vec{n} \circ \vec{x} &= \vec{n} \circ \vec{q} \\ \vec{n} \circ \left[\vec{p} + \frac{\lambda}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}\right] &= \vec{n} \circ \vec{q} \\ \vec{n} \circ \vec{p} + \frac{\lambda}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \circ \vec{n} &= \vec{n} \circ \vec{q} && \mid -\vec{n} \circ \vec{p} \\ \frac{\lambda}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \circ \vec{n} &= \vec{n} \circ \vec{q} - \vec{n} \circ \vec{p} \\ \frac{\lambda}{|\vec{n}|} \cdot \underbrace{\vec{n} \circ \vec{n}}_{=|\vec{n}|^2} &= \vec{n} \circ \left[\vec{q} - \vec{p}\right] \\ \lambda \cdot |\vec{n}| &= \vec{n} \circ \left[\vec{q} - \vec{p}\right] && \mid \div |\vec{n}| \\ \lambda &= \frac{\vec{n} \circ \left[\vec{q} - \vec{p}\right]}{|\vec{n}|} \end{aligned}$$
>
> $$\begin{aligned} \Rightarrow \overrightarrow{OS} &= \vec{p} + \frac{\frac{\vec{n} \circ \left[\vec{q} - \vec{p}\right]}{|\vec{n}|}}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \\ &= \vec{p} + \frac{\vec{n} \circ \left[\vec{q} - \vec{p}\right]}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n} \end{aligned}$$
>
> Da $\vec{q}$ oft nicht gegeben ist, so ist per Definition von $d = \vec{n} \circ \vec{q}$ auch folgende Form für $\overrightarrow{OS}$ möglich:
>
> $$\overrightarrow{OS} = \vec{p} + \frac{d - \vec{n} \circ \vec{p}}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n}$$
>
> ---
>
> ---

gezeigt wird (Bereich 1).
(ich bin faul und will nicht immer das gleiche machen, deshalb eine Formel für das xdd)

Setzen wir generell ein, so erhalten wir zunächst:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{p} + \frac{d - \vec{n} \circ \vec{p}}{\vec{n} \circ \vec{v}} \cdot \vec{v}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS} + \frac{21 - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \overrightarrow{OS}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \vec{v}} \cdot \vec{v}$$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{21 - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \vec{v}} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{21 - 36}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \vec{v}} \cdot \vec{v}$$