Extremwertaufgabe_MetallPappDose

> Eine aus Metall und Pappe gebaute Dose soll gebaut werden. Diese soll ein Fassungsvolumen von $V = 1000\,cm^3$ besitzen und durch einen Zylinder modelliert werden. Der Mantel ist aus Pappe, die Ober- und Unterseiten sind aus Metall.
> Der Preis der verwendeten Pappe kostet P_P, wobei der Preis des Metalls pro Quadratzentimeter (P_M) viermal so viel wie P_P ist.
> Welche Oberfläche kostet am wenigsten?

Aus der Beschreibung erkennen wir:

$$P_M = 4P_P$$

Ein Zylinder besitzt folgende Eigenschaften:

- $O(r;h) = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{Grundseiten}} + \underbrace{2\pi rh}_{\text{Mantel}}$
- $V(r;h) = \pi r^2 h$

---

1. Hauptbedingung

Der Preis der Materialien soll minimiert werden. Dieser Wird durch $P(r;h) = P_M \cdot 2\pi r^2 + P_P \cdot 2\pi rh$ gegeben. Durch einsetzen von $P_M = 4P_P$ in $P(r;h)$, erhalten wir das folgende:

$$\begin{aligned} P(r;h) &= P_M \cdot 2\pi r^2 + P_P \cdot 2\pi rh \\ &= 4P_P \cdot 2\pi r^2 + P_P \cdot 2\pi rh \\ P(r;h) &= 8P_P \cdot \pi r^2 + 2P_P \cdot \pi rh \end{aligned}$$

---

2. Nebenbedingung

Die Dose muss ein Fassungsvolumen von exakt $1000\,cm^3$ besitzen. Daher gilt für die Nebenbedingung das folgende, wobei nach h umgestellt wird.

$$\begin{aligned} V(r;h) &= \pi r^2 h \\ 1000 &= \pi r^2 h \qquad \mid \div(\pi r^2) \\ h &= \frac{1000}{\pi r^2} \end{aligned}$$

---

3. Zielfunktion

Die Nebenbedingung nach h wird in die Hauptbedingung eingesetzt:

$$\begin{aligned} P(r;h) &= 8P_P \cdot \pi r^2 + 2P_P \cdot \pi rh \\ P(r) &= 8P_P \cdot \pi r^2 + 2P_P \cdot \pi r \cdot \frac{1000}{\pi r^2} \\ &= 8P_P \cdot \pi r^2 + P_P \cdot \frac{2000}{r} \\ P(r) &= 8P_P \cdot \pi r^2 + P_P \cdot \frac{2000}{r} \end{aligned}$$

---

4. Extrema von $P(r)$

$$\text{Notwendiges Kriterium für lokale Extrema:} \quad P'(r) = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= V'(d) \\ 0 &= 16P_P \cdot \pi r - P_P \cdot \frac{2000}{r^2} && \mid \div P_P \\ 0 &= 16\pi r - \frac{2000}{r^2} && \mid \cdot r^2 \\ 0 &= 16\pi r^3 - 2000 && \mid +2000 \\ 2000 &= 16\pi r^3 && \mid \div 16\pi \\ r^3 &= \frac{2000}{16\pi} \\ r^3 &= \frac{125}{\pi} && \mid \sqrt[3]{} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{125}{\pi}} \end{aligned}$$

$$\text{Erstes hinreichendes Kriterium für lokale Extrema:} \quad P''(r) \neq 0$$

$$\begin{aligned} P''(r) &= 16P_P \cdot \pi + P_P \cdot \frac{4000}{r^3} \\ P''\left(\sqrt[3]{\frac{125}{\pi}}\right) &= 16P_P \cdot \pi + P_P \cdot \frac{4000}{\left[\sqrt[3]{\frac{125}{\pi}}\right]^3} \\ &= 16P_P \cdot \pi + P_P \cdot \frac{4000}{\frac{125}{\pi}} > 0 \end{aligned}$$

Da der Preis P_P positiv ist, so ist hier der Minimalkostenpreis mit dem Radius $r = \sqrt[3]{\frac{125}{\pi}} \approx 3,414\,cm$ erreicht. Die Höhe hier ist:

$$\begin{aligned} h &= \frac{1000}{\pi r^2} \\ h &= \frac{1000}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{125}{\pi}}\right)^2} \approx 27,311\,cm \end{aligned}$$

Die Minimaloberfläche ist:

$$O\left(\sqrt[3]{\frac{125}{\pi}}; \frac{1000}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{125}{\pi}}\right)^2}\right) = 2\pi\left(\sqrt[3]{\frac{125}{\pi}}\right)^2 + 2\pi\sqrt[3]{\frac{125}{\pi}} \cdot \frac{1000}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{125}{\pi}}\right)^2} \approx 659,066\,cm^2$$

Mit diesen Werten ist der Kostenaufwand für die Materialien am geringsten.