# Seite 135 Nr. 3)

> Gegeben sind eine quadratische Pyramide mit den Ecken $A(-3\mid-3\mid0)$, $B(3\mid-3\mid0)$, $C(3\mid3\mid0)$, $D(-3\mid3\mid0)$ und der Spitze $S(0\mid0\mid9)$ sowie die Ebene $E: 3x_2+4x_3=21$.

## a)

> Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Pyramidenkanten mit der Ebene $E$.

Für die Pyramidenkanten gilt:

$$
\begin{aligned}
g_{AS}: \vec{x} &= \overrightarrow{OS} + \lambda \cdot \overrightarrow{SA} \\
&= \begin{pmatrix}0\\0\\9\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-3-0\\-3-0\\0-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\9\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-3\\-3\\-9\end{pmatrix} \\
g_{BS}: \vec{x} &= \overrightarrow{OS} + \lambda \cdot \overrightarrow{SB} \\
&= \begin{pmatrix}0\\0\\9\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3-0\\-3-0\\0-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\9\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3\\-3\\-9\end{pmatrix} \\
g_{CS}: \vec{x} &= \overrightarrow{OS} + \lambda \cdot \overrightarrow{SC} \\
&= \begin{pmatrix}0\\0\\9\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3-0\\3-0\\0-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\9\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3\\3\\-9\end{pmatrix} \\
g_{DS}: \vec{x} &= \overrightarrow{OS} + \lambda \cdot \overrightarrow{SD} \\
&= \begin{pmatrix}0\\0\\9\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3-0\\3-0\\0-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\9\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-3\\3\\-9\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Für das gleichsetzen von Ebenen und Gerade gilt hier:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{p} + \frac{d - \vec{n}\circ\vec{p}}{\vec{n}\circ\vec{v}} \cdot \vec{v}$$

Zu nennen ist hier, dass diese Gleichung für den Punkt $P$ durch

> GeradeInEbene
>
> > Eine Gerade $g: \vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{v}$ und eine Ebene $E: \vec{n}\circ\vec{x} = \vec{n}\circ\vec{q}$ sollen auf einen Schnittpunkt untersucht werden.
>
> Hierzu wird $g$ in $E$ eingesetzt und nach $\lambda$ umgestellt:
>
> $$
> \begin{aligned}
> E: \vec{n}\circ\vec{x} &= \vec{n}\circ\vec{q} \\
> \vec{n}\circ\left[\vec{p} + \lambda\cdot\vec{v}\right] &= \vec{n}\circ\vec{q} \\
> \vec{n}\circ\vec{p} + \lambda\cdot\vec{n}\circ\vec{v} &= \vec{n}\circ\vec{q} && \mid -\vec{n}\circ\vec{p} \\
> \lambda\cdot\vec{n}\circ\vec{v} &= \vec{n}\circ\vec{q} - \vec{n}\circ\vec{p} \\
> \lambda\cdot\vec{n}\circ\vec{v} &= \vec{n}\circ\left[\vec{q}-\vec{p}\right] && \mid \div\vec{n}\circ\vec{v} \\
> \lambda &= \frac{\vec{n}\circ\left[\vec{q}-\vec{p}\right]}{\vec{n}\circ\vec{v}}
> \end{aligned}
> $$
>
> $$\Rightarrow \overrightarrow{OS} = \vec{p} + \frac{\vec{n}\circ\left[\vec{q}-\vec{p}\right]}{\vec{n}\circ\vec{v}}\cdot\vec{v}$$
>
> Da $\vec{q}$ oft nicht gegeben ist, so ist per Definition von $d = \vec{n}\circ\vec{q}$ auch folgende Form für $\overrightarrow{OS}$ möglich:
>
> $$\overrightarrow{OS} = \vec{p} + \frac{d - \vec{n}\circ\vec{p}}{\vec{n}\circ\vec{v}}\cdot\vec{v}$$
>
> ---
>
> > Sollte es sich bei der Gerade um eine normierte Lotgerade der Ebene $E$ handeln, dann gilt folgendes:
> >
> > - $g_0: \vec{x} = \vec{p} + \frac{\lambda}{|\vec{n}|}\cdot\vec{n}$
>
> $$
> \begin{aligned}
> E: \vec{n}\circ\vec{x} &= \vec{n}\circ\vec{q} \\
> \vec{n}\circ\left[\vec{p} + \frac{\lambda}{|\vec{n}|}\cdot\vec{n}\right] &= \vec{n}\circ\vec{q} \\
> \vec{n}\circ\vec{p} + \frac{\lambda}{|\vec{n}|}\cdot\vec{n}\circ\vec{n} &= \vec{n}\circ\vec{q} && \mid -\vec{n}\circ\vec{p} \\
> \frac{\lambda}{|\vec{n}|}\cdot\vec{n}\circ\vec{n} &= \vec{n}\circ\vec{q} - \vec{n}\circ\vec{p} \\
> \frac{\lambda}{|\vec{n}|}\cdot\underbrace{\vec{n}\circ\vec{n}}_{=|\vec{n}|^2} &= \vec{n}\circ\left[\vec{q}-\vec{p}\right] \\
> \lambda\cdot|\vec{n}| &= \vec{n}\circ\left[\vec{q}-\vec{p}\right] && \mid \div|\vec{n}| \\
> \lambda &= \frac{\vec{n}\circ\left[\vec{q}-\vec{p}\right]}{|\vec{n}|}
> \end{aligned}
> $$
>
> $$
> \begin{aligned}
> \Rightarrow \overrightarrow{OS} &= \vec{p} + \frac{\frac{\vec{n}\circ\left[\vec{q}-\vec{p}\right]}{|\vec{n}|}}{|\vec{n}|}\cdot\vec{n} \\
> &= \vec{p} + \frac{\vec{n}\circ\left[\vec{q}-\vec{p}\right]}{|\vec{n}|^2}\cdot\vec{n}
> \end{aligned}
> $$
>
> Da $\vec{q}$ oft nicht gegeben ist, so ist per Definition von $d = \vec{n}\circ\vec{q}$ auch folgende Form für $\overrightarrow{OS}$ möglich:
>
> $$\overrightarrow{OS} = \vec{p} + \frac{d - \vec{n}\circ\vec{p}}{|\vec{n}|^2}\cdot\vec{n}$$
>
> ---
>
> ---

gezeigt wird (Bereich 1).
(ich bin faul und will nicht immer das gleiche machen, deshalb eine Formel für das xdd)

Setzen wir generell ein, so erhalten wir zunächst:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{p} + \frac{d - \vec{n} \circ \vec{p}}{\vec{n} \circ \vec{v}} \cdot \vec{v}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS} + \frac{21 - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \overrightarrow{OS}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \vec{v}} \cdot \vec{v}$$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{21 - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \vec{v}} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{-15}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \vec{v}} \cdot \vec{v}$$

Für jede einzelne Gerade erhalten wir:

$$\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{-15}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{5}{14} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1,0714 \\ -1,0714 \\ 5.7857 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{-15}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{5}{14} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,0714 \\ -1,0714 \\ 5.78571428571 \end{pmatrix}$$

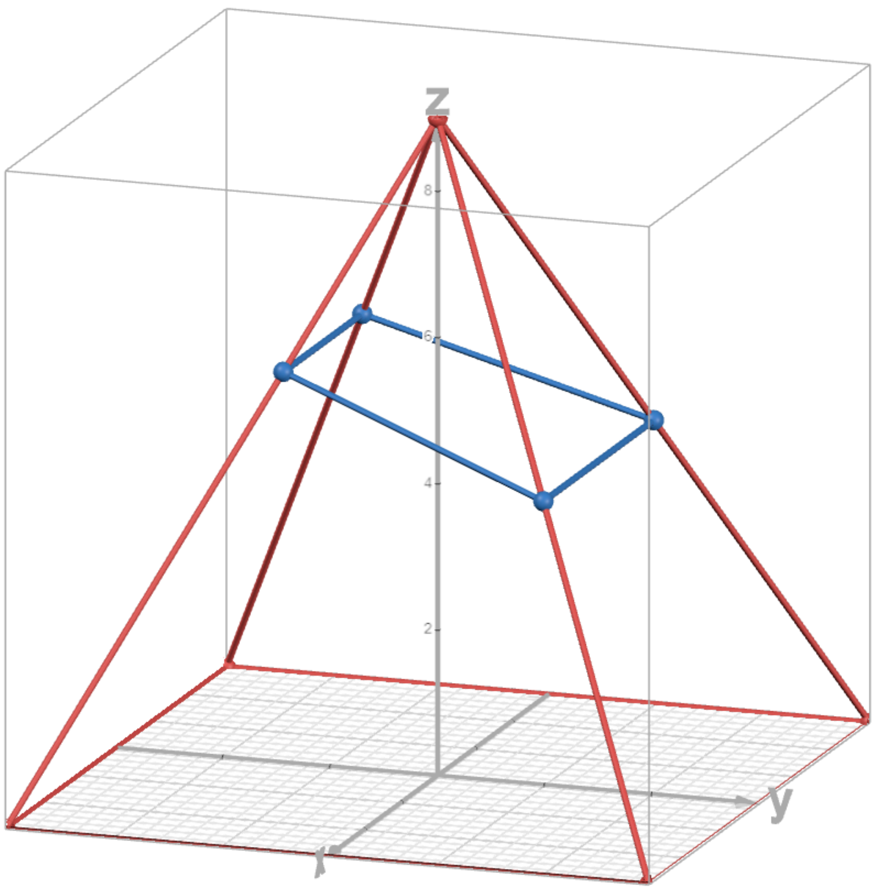
$$\overrightarrow{OC'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{-15}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ 4,5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{-15}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 1,5 \\ 4,5 \end{pmatrix}$$

---

## b)

> Zeichnen Sie die Pyramide mit der Schnittfläche als Schrägbild in ein Koordinatensystem. Beschreiben Sie die Form der Schnittfläche.




Die Schnittfläche ist ein Trapez. Da der Normalenvektor von $E$ in der $x_1$ 0 ist, und die Grundseiten parallel der $x_1$-Achse dadurch weiterhin parallel bleiben, so sind zwei Seiten zueinander parallel.

## c)

> Berechnen Sie den Flächeninhalt der Schnittfläche.

$$\begin{aligned}
A_{A'B'C'D'} &= A_{A'B'C'} + A_{A'C'D'} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\left|\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'}\right|\right] + \frac{1}{2} \cdot \left[\left|\overrightarrow{A'C'} \times \overrightarrow{A'D'}\right|\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\left|\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'}\right| + \left|\overrightarrow{A'C'} \times \overrightarrow{A'D'}\right|\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\left|\begin{pmatrix} \frac{15}{14} - \left(-\frac{15}{14}\right) \\ -\frac{15}{14} - \left(-\frac{15}{14}\right) \\ 9 - \frac{45}{14} - \left(9 - \frac{45}{14}\right) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1,5 - \left(-\frac{15}{14}\right) \\ 1,5 - \left(-\frac{15}{14}\right) \\ 4,5 - \left(9 - \frac{45}{14}\right) \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 1,5 - \left(-\frac{15}{14}\right) \\ 1,5 - \left(-\frac{15}{14}\right) \\ 4,5 - \left(9 - \frac{45}{14}\right) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1,5 - \left(-\frac{15}{14}\right) \\ 1,5 - \left(-\frac{15}{14}\right) \\ 4,5 - \left(9 - \frac{45}{14}\right) \end{pmatrix}\right|\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\left|\begin{pmatrix} \frac{15}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{18}{7} \\ \frac{18}{7} \\ -\frac{9}{7} \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} \frac{18}{7} \\ \frac{18}{7} \\ -\frac{9}{7} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{18}{7} \\ -\frac{9}{7} \end{pmatrix}\right|\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\left|\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{135}{39} \\ \frac{270}{49} \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{675}{196} \\ -\frac{675}{98} \end{pmatrix}\right|\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{\left(\frac{135}{39}\right)^2 + \left(\frac{270}{49}\right)^2} + \sqrt{\left(-\frac{675}{196}\right)^2 + \left(-\frac{675}{98}\right)^2}\right] \\
&= \frac{45\sqrt{8485}}{1274} + \frac{675\sqrt{5}}{392} \approx 7,104 \ [FE]
\end{aligned}$$

## d)

> Berechnen Sie den Abstand der Spitze $S$ von der Ebene $E$.

$$\begin{aligned}
d(X;E) = E &: \frac{1}{5} \cdot |3x_2 + 4x_3 - 21| \\
d(S;E) = E &: \frac{1}{5} \cdot |3 \cdot 0 + 4 \cdot 9 - 21| = \frac{1}{5} \cdot |15| \\
&= 3 \ [LE]
\end{aligned}$$

## e)

> Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide und der beiden Teilkörper, in die die Pyramide durch die Ebene $E$ zerlegt wurde.

Für das Gesamtvolumen der Pyramide gilt $A = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$. Folglich $A_G = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 9 = 108 \ [VE]$.

Für den oberen Teilkörper gilt ebenfalls $A = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$. Aus den vorherigen Aufgaben sehen wir, dass hier $A_o = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{45\sqrt{8485}}{1274} + \frac{675\sqrt{5}}{392}\right) \cdot 3 = \frac{45\sqrt{8485}}{1274} + \frac{675\sqrt{5}}{392} \ [VE]$ sein muss.
Für den unteren Teilkörper gilt:

$$\begin{aligned}
A_G &= A_u + A_o \qquad | -A_o \\
A_u &= A_G - A_o \\
&= 108 - \frac{45\sqrt{8485}}{1274} - \frac{675\sqrt{5}}{392} \\
&\approx 100,896 \ [VE]
\end{aligned}$$