

Aufgabe 4

Bestimmen Sie alle ganzrationalen Funktionen vom Grad 3, deren Graph durch die Punkte geht.

4a)

$A(0 \mid 1); B(1 \mid 0); C(-1 \mid 4); D(2 \mid -5)$

Die Bedingungen folgen für die Funktion  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ :

- $f(0) = 1$
- $f(1) = 0$
- $f(-1) = 4$
- $f(2) = -5$

Es liegen genug Bedingungen vor

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d & = 1 \\ \text{II:} & a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d & = 0 \\ \text{III:} & a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d & = 4 \\ \text{IV:} & a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d & = -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & d & = 1 \\ \text{II:} & a + b + c + d & = 0 \\ \text{III:} & -a + b - c + d & = 4 \\ \text{IV:} & 8a + 4b + 2c + d & = -5 \end{array}$$

I:  $d = 1$

$$\begin{array}{lcl} \text{II:} & a + b + c & = -1 \\ \text{III:} & -a + b - c & = 3 \\ \text{IV:} & 8a + 4b + 2c & = -6 \end{array} \quad | \text{ III} + \text{II}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{II:} & a + b + c & = -1 \\ \text{III:} & 2b & = 2 \\ \text{IV:} & 8a + 4b + 2c & = -6 \end{array}$$

III:  $2b = 2 \Rightarrow b = 1$

$$\begin{array}{lcl} \text{II:} & a + c & = -2 \\ \text{IV:} & 8a + 2c & = -10 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \cdot (-2) \\ | \text{ II} + \text{IV} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{II:} & a + c & = -2 \\ \text{IV:} & 6a & = -6 \end{array}$$

IV:  $6a = -6 \Rightarrow a = -1$

II:  $a + c = -2 \Rightarrow c = -1$

Somit lautet die Lösung:

- $a = -1$
  - $b = 1$
  - $c = -1$
  - $d = 1$
- Die Funktion  $f$  lautet  $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$

4b)

$A(0 \mid -1); B(1 \mid 1); C(-1 \mid -7); D(2 \mid 17)$

Die Bedingungen folgen für die Funktion  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ :

- $f(0) = -1$
- $f(1) = 1$
- $f(-1) = -7$
- $f(2) = 17$

Es liegen genug Bedingungen vor

I:  $a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = -1$

II:  $a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 1$

III:  $a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d = -7$

IV:  $a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 17$

I:  $d = -1$

II:  $a + b + c + d = 1$

III:  $-a + b - c + d = -7$

IV:  $8a + 4b + 2c + d = 17$

I:  $d = -1$

II:  $a + b + c = 2$

III:  $-a + b - c = -6$

IV:  $8a + 4b + 2c = 18$

$\mid \text{III} + \text{II}$

II:  $a + b + c = 2$

III:  $2b = -4$

IV:  $8a + 4b + 2c = 18$

III:  $2b = -4 \Rightarrow b = -2$

II:  $a + c = 4$

IV:  $8a + 2c = 26$

$\mid \text{II} + \text{IV}$

$\mid \cdot (-0,5)$

II:  $-3a = -9$

IV:  $8a + 2c = 26$

II:  $-3a = -9 \Rightarrow a = 3$

IV:  $8a + 2c = 26 \Rightarrow c = 1$

Somit lautet die Lösung:

- $a = 3$
  - $b = -2$
  - $c = 1$
  - $d = -1$
- Die Funktion  $f$  lautet  $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1$

4c)

$A(1 \mid 0); B(0 \mid 2); C(-2 \mid 2)$

Die Bedingungen folgen für die Funktion  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ :

- $f(1) = 0$
- $f(0) = 2$
- $f(-2) = 2$

Es liegen nicht genug Bedingungen vor:  
Scharfunktion von  $f$  mit einem Parameter

I:  $a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0$

II:  $a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 2$

III:  $a \cdot (-2)^3 + b \cdot (-2)^2 + c \cdot (-2) + d = 2$

I:  $a + b + c + d = 0$

II:  $d = 2$

III:  $-8a + 4b - 2c + d = 2$

I:  $d = 2$

I:  $a + b + c = -2$

III:  $-8a + 4b - 2c = 0$

$\mid \cdot 2$

$\mid \text{III} + \text{I}$

I:  $a + b + c = -2$

III:  $-6a + 6b = -4$

III:  $-6a + 6b = -4 \Rightarrow b = -\frac{2}{3} + a$

I:  $a + b + c = -2 \Rightarrow c = -\frac{4}{3} - 2a$

Somit lautet die Lösung:

- $a = a$
  - $b = -\frac{2}{3} + a$
  - $c = -\frac{4}{3} - 2a$
  - $d = 2$
- Die Funktion  $f$  lautet  $f_a(x) = ax^3 + (-\frac{2}{3} + a)x^2 + (-\frac{4}{3} - 2a)x + 2$

4d)

$A(1 \mid 1); B(0 \mid 1)$

Die Bedingungen folgen für die Funktion  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ :

- $f(1) = 1$
- $f(0) = 1$

Es liegen nicht genug Bedingungen vor:  
Scharfunktion von  $f$  mit zwei Parametern

I:  $\left| \begin{array}{cccc} a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d & = & 1 \\ a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d & = & 1 \end{array} \right|$

II:

I:  $\left| \begin{array}{ccc} a + b + c + d & = & 1 \\ & d & = & 1 \end{array} \right|$

II:

II:  $d = 1$

I:  $\left| \begin{array}{ccc} a + b + c & = & 0 \end{array} \right|$

I:  $a + b + c = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -b - c$

Somit lautet die Lösung:

- $a = -b - c$
  - $b = b$
  - $c = c$
  - $d = 1$
- Die Funktion  $f$  lautet  $f_{b,c}(x) = (-b - c)x^3 + bx^2 + c + 1$

## Aufgabe 5

Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion vom Grad 3, deren Graph

5a)

durch  $A(2 \mid 0)$ ,  $B(-2 \mid 4)$  und  $A(-4 \mid 8)$  geht und einen Tiefpunkt auf der y-Achse hat.

Die Bedingungen folgen für die Funktion  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ :

- $f(2) = 0$
- $f(-2) = 4$
- $f(-4) = 8$
- $f'(0) = 0$

Es liegen genug Bedingungen vor

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

I:  $\left| \begin{array}{ccc} a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d & = & 0 \\ a \cdot (-2)^3 + b \cdot (-2)^2 + c \cdot (-2) + d & = & 4 \\ a \cdot (-4)^3 + b \cdot (-4)^2 + c \cdot (-4) + d & = & 8 \\ 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c & = & 0 \end{array} \right|$

II:

III:

IV:

I:  $\left| \begin{array}{ccc} 8a + 4b + 2c + d & = & 0 \\ -8a + 4b - 2c + d & = & 4 \\ -64a + 16b - 4c + d & = & 8 \\ & c & = & 0 \end{array} \right|$

II:

III:

IV:

I:  $c = 0$

I:  $\left| \begin{array}{ccc} 8a + 4b + d & = & 0 \\ -8a + 4b + d & = & 4 \\ -64a + 16b + d & = & 8 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \text{II} + \text{I} \end{array} \right|$

II:

III:

I:  $\left| \begin{array}{ccc} 8a + 4b + d & = & 0 \\ 8b + 2d & = & 4 \\ -64a + 16b + d & = & 8 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 8 \\ \text{III} + \text{I} \end{array} \right|$

II:

III:

I:  $\left| \begin{array}{ccc} 8a + 4b + d & = & 0 \\ 8b + 2d & = & 4 \\ 48b + 9d & = & 8 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \cdot (-6) \\ \text{III} + \text{II} \end{array} \right|$

II:

III:

I:  $\left| \begin{array}{ccc} 8a + 4b + d & = & 0 \\ 8b + 2d & = & 4 \\ -3d & = & -16 \end{array} \right|$

II:

III:

III:  $-3d = -16 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{16}{3}$

II:  $8b + 2d = 4 \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{5}{6}$

I:  $8a + 4b + d = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{4}$

Somit lautet die Lösung:

- $a = -\frac{1}{4}$
  - $b = -\frac{5}{6}$
  - $c = 0$
  - $d = \frac{16}{3}$
- Die Funktion  $f$  lautet  $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{16}{3}$ .

### Überprüfung des Extremum bei $x = 0$

Es muss gelten:  $f''(0) > 0$

$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{16}{3}$

$f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{3}x$

$f''(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{3}$

$f''(0) = -\frac{5}{3} < 0$

Da  $f''(0)$  die Bedingung nicht erfüllt, s stellt  $f$  nicht die gesuchte Funktion dar. Es existiert nur eine Lösung des Gleichungssystems, daher kann  $f$  nach den Bedingungen nie existieren.

5b)

durch  $A(2 \mid 2)$ ,  $B(3 \mid 9)$  geht und den Tiefpunkt  $T(1 \mid 1)$  hat.

Die Bedingungen folgen für die Funktion  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ :

- $f(2) = 2$
- $f(3) = 9$
- $f(1) = 1$
- $f'(1) = 0$

Es liegen genug Bedingungen vor

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & \left| \begin{array}{l} a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d \\ a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d \\ a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d \end{array} \right. & = \begin{array}{l} 2 \\ 9 \\ 1 \end{array} \\ \text{II:} & & \\ \text{III:} & & \\ \text{IV:} & \left| \begin{array}{l} 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c \end{array} \right. & = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & \left| \begin{array}{l} 8a + 4b + 2c + d \\ 27a + 9b + 3c + d \\ a + b + c + d \end{array} \right. & = \begin{array}{l} 2 \\ 9 \\ 1 \end{array} \\ \text{II:} & & \\ \text{III:} & & \\ \text{IV:} & \left| \begin{array}{l} 3a + 2b + c \end{array} \right. & = 0 \end{array}$$

Dieses LGS werde ich anschließend umsortieren

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & \left| \begin{array}{l} a + b + c + d \\ 8a + 4b + 2c + d \\ 27a + 9b + 3c + d \end{array} \right. & = \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 9 \end{array} \\ \text{II:} & & \\ \text{III:} & & \\ \text{IV:} & \left| \begin{array}{l} 3a + 2b + c \end{array} \right. & = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \cdot (-8) \\ | \text{II} + \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & \left| \begin{array}{l} a + b + c + d \\ -4b - 6c - 7d \\ 27a + 9b + 3c + d \end{array} \right. & = \begin{array}{l} 1 \\ -6 \\ 9 \end{array} \\ \text{II:} & & \\ \text{III:} & & \\ \text{IV:} & \left| \begin{array}{l} 3a + 2b + c \end{array} \right. & = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \cdot (-27) \\ | \text{III} + \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & \left| \begin{array}{l} a + b + c + d \\ -4b - 6c - 7d \\ -18b - 24c - 26d \end{array} \right. & = \begin{array}{l} 1 \\ -6 \\ -18 \end{array} \\ \text{II:} & & \\ \text{III:} & & \\ \text{IV:} & \left| \begin{array}{l} 3a + 2b + c \end{array} \right. & = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \cdot (-3) \\ | \text{IV} + \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & \left| \begin{array}{l} a + b + c + d \\ -4b - 6c - 7d \\ -18b - 24c - 26d \end{array} \right. & = \begin{array}{l} 1 \\ -6 \\ -18 \end{array} \\ \text{II:} & & \\ \text{III:} & & \\ \text{IV:} & \left| \begin{array}{l} -b - 2c - 3d \end{array} \right. & = -3 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \cdot (-1) \\ | \cdot (-1) \\ | \cdot (-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & \left| \begin{array}{l} a + b + c + d \\ 4b + 6c + 7d \\ 18b + 24c + 26d \end{array} \right. & = \begin{array}{l} 1 \\ 6 \\ 18 \end{array} \\ \text{II:} & & \\ \text{III:} & & \\ \text{IV:} & \left| \begin{array}{l} b + 2c + 3d \end{array} \right. & = 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \cdot \frac{18}{4} \\ | \text{III} + \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & \left| \begin{array}{l} a + b + c + d \\ 4b + 6c + 7d \\ -3c - \frac{11}{2}d \end{array} \right. & = \begin{array}{l} 1 \\ 6 \\ -9 \end{array} \\ \text{II:} & & \\ \text{III:} & & \\ \text{IV:} & \left| \begin{array}{l} b + 2c + 3d \end{array} \right. & = 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \cdot \frac{-1}{4} \\ | \text{IV} + \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & \left| \begin{array}{l} a + b + c + d \\ 4b + 6c + 7d \\ -3c - \frac{11}{2}d \end{array} \right. & = \begin{array}{l} 1 \\ 6 \\ -9 \end{array} \\ \text{II:} & & \\ \text{III:} & & \\ \text{IV:} & \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2}c + \frac{5}{4}d \end{array} \right. & = \frac{3}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} | \cdot \frac{1}{6} \\ | \text{IV} + \text{III} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & \left| \begin{array}{l} a + b + c + d \\ 4b + 6c + 7d \\ -3c - \frac{11}{2}d \end{array} \right. & = \begin{array}{l} 1 \\ 6 \\ -9 \end{array} \\ \text{II:} & & \\ \text{III:} & & \\ \text{IV:} & \left| \begin{array}{l} \frac{1}{3}d \end{array} \right. & = 0 \end{array}$$

$$\text{IV:} \quad \frac{1}{3}d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 0$$

$$\text{III:} \quad -3c - \frac{11}{2}d = -9 \quad \Rightarrow \quad c = 3$$

$$\text{II:} \quad 4b + 6c + 7d = 6 \quad \Rightarrow \quad b = -3$$

$$\text{I:} \quad a + b + c + d = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = 1$
- $b = -3$
- $c = 3$
- $d = 0$

Die Funktion  $f$  lautet  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ .

Überprüfung des Extremum bei  $x = 1$

Es muss gelten:  $f''(1) > 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x^2 + 3x \\ f'(x) &= 3x^2 - 6x + 3 \end{aligned}$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f''(1) = 6 - 6 = 0$$

Da  $f''(1)$  die Bedingung nicht erfüllt, so stellt  $f$  nicht die gesuchte Funktion dar. Es existiert nur eine Lösung des Gleichungssystems, daher kann  $f$  nach den Bedingungen nie existieren.

## Aufgabe 6

Bestimmen Sie die ganzrationale Funktion  $f$  mit niedrigsten Grades mit den Funktionswerten.

### 6a)

- $f(0) = 1$
- $f(1) = 0$
- $f(2) = 1$

Es liegen 3 Bedingungen vor, daher gilt für den niedrigsten Grad:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{array}{l} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left| \begin{array}{rcl} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & = & 1 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c & = & 0 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & = & 1 \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{l} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left| \begin{array}{rcl} c & = & 1 \\ a + b + c & = & 0 \\ 4a + 2b + c & = & 1 \end{array} \right|$$

$$\text{I:} \quad c = 1$$

$$\begin{array}{l} \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left| \begin{array}{rcl} a + b & = & -1 \\ 4a + 2b & = & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} | \cdot (-2) \\ | \text{III} + \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left| \begin{array}{rcl} a + b & = & -1 \\ 2a & = & 2 \end{array} \right|$$

$$\text{III:} \quad 2a = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

$$\text{II:} \quad a + b = -1 \quad \Rightarrow \quad b = -2$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = 1$
  - $b = -2$
  - $c = 1$
- Die Funktion  $f$  lautet  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ .

### 6b)

- $f(0) = 0$
- $f(1) = 1$
- $f(2) = 2$

Es liegen 3 Bedingungen vor, daher gilt für den niedrigsten Grad:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{array}{l} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left| \begin{array}{rcl} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & = & 0 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c & = & 1 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & = & 2 \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{l} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left| \begin{array}{rcl} c & = & 0 \\ a + b + c & = & 1 \\ 4a + 2b + c & = & 2 \end{array} \right|$$

$$\text{I:} \quad c = 0$$

$$\begin{array}{l} \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left| \begin{array}{rcl} a + b & = & 1 \\ 4a + 2b & = & 2 \end{array} \right| \begin{array}{l} | \cdot (-2) \\ | \text{III} + \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left| \begin{array}{rcl} a + b & = & 1 \\ 2a & = & 0 \end{array} \right|$$

$$\text{III:} \quad 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

$$\text{II:} \quad a + b = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 1$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = 0$
  - $b = 1$
  - $c = 0$
- Die Funktion  $f$  lautet  $f(x) = x$ .

### 6c)

- $f(0) = 1$

- $f(1) = 1$
- $f(2) = 1$

Es liegen 3 Bedingungen vor, daher gilt für den niedrigsten Grad:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & = 1 \\ \text{II:} & a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c & = 1 \\ \text{III:} & a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & c & = 1 \\ \text{II:} & a + b + c & = 1 \\ \text{III:} & 4a + 2b + c & = 1 \end{array}$$

$$\text{I: } c = 1$$

$$\begin{array}{lcl} \text{II:} & a + b & = 0 \\ \text{III:} & 4a + 2b & = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ | \text{III} + \text{II} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{lcl} \text{II:} & a + b & = 0 \\ \text{III:} & 2a & = 0 \end{array}$$

$$\text{III: } 2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\text{II: } a + b = 0 \Rightarrow b = 0$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = 0$
  - $b = 0$
  - $c = 1$
- Die Funktion  $f$  lautet  $f(x) = 1$ .

### 6d)

- $f(-1) = 0$
- $f(0) = 1$
- $f(2) = 0$

Es liegen 3 Bedingungen vor, daher gilt für den niedrigsten Grad:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c & = 0 \\ \text{II:} & a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & = 1 \\ \text{III:} & a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & a - b + c & = 0 \\ \text{II:} & c & = 1 \\ \text{III:} & 4a + 2b + c & = 0 \end{array}$$

$$\text{II: } c = 1$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & a - b & = -1 \\ \text{III:} & 4a + 2b & = -1 \end{array} \left| \begin{array}{l} \cdot 2 \\ | \text{III} + \text{I} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & a + b & = -1 \\ \text{III:} & 6a & = -3 \end{array}$$

$$\text{III: } 6a = -3 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{I: } a - b = -1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = -\frac{1}{2}$
  - $b = \frac{1}{2}$
  - $c = 1$
- Die Funktion  $f$  lautet  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ .

### 6e)

- $f(0) = 0$
- $f(-1) = 0$
- $f(1) = 2$
- $f(2) = 6$

Es liegen 4 Bedingungen vor, daher gilt für den niedrigsten Grad:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & \left| \begin{array}{l} a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d \end{array} \right| & = 0 \\ \text{II:} & \left| \begin{array}{l} a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d \end{array} \right| & = 0 \\ \text{III:} & \left| \begin{array}{l} a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d \end{array} \right| & = 2 \\ \text{IV:} & \left| \begin{array}{l} a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d \end{array} \right| & = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & \left| \begin{array}{l} d \end{array} \right| & = 0 \\ \text{II:} & \left| \begin{array}{l} -a + b - c + d \end{array} \right| & = 0 \\ \text{III:} & \left| \begin{array}{l} a + b + c + d \end{array} \right| & = 2 \\ \text{IV:} & \left| \begin{array}{l} 8a + 4b + 2c + d \end{array} \right| & = 6 \end{array}$$

$$\text{I:} \quad d = 0$$

$$\begin{array}{lcl} \text{II:} & \left| \begin{array}{l} -a + b - c \end{array} \right| & = 0 \\ \text{III:} & \left| \begin{array}{l} a + b + c \end{array} \right| & = 2 \\ \text{IV:} & \left| \begin{array}{l} 8a + 4b + 2c \end{array} \right| & = 6 \end{array} \quad | \text{ III} + \text{II}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{II:} & \left| \begin{array}{l} -a + b - c \end{array} \right| & = 0 \\ \text{III:} & \left| \begin{array}{l} 2b \end{array} \right| & = 2 \\ \text{IV:} & \left| \begin{array}{l} 8a + 4b + 2c \end{array} \right| & = 6 \end{array}$$

$$\text{III:} \quad 2b = 2 \quad \Rightarrow \quad b = 1$$

$$\begin{array}{lcl} \text{II:} & \left| \begin{array}{l} -a - c \end{array} \right| & = -1 \\ \text{IV:} & \left| \begin{array}{l} 8a + 2c \end{array} \right| & = 2 \end{array} \quad | \cdot 2 \quad | \text{ IV} + \text{II}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{II:} & \left| \begin{array}{l} -a - c \end{array} \right| & = -1 \\ \text{IV:} & \left| \begin{array}{l} 6a \end{array} \right| & = 0 \end{array}$$

$$\text{IV:} \quad 6a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

$$\text{II:} \quad -a - c = -1 \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = 0$
  - $b = 1$
  - $c = 1$
  - $d = 0$
- Die Funktion  $f$  lautet  $f(x) = x^2 + x$ .

### 6f)

- $f(-1) = 0$
- $f(0) = 1$
- $f(1) = 3$
- $f(2) = 4$

Es liegen 4 Bedingungen vor, daher gilt für den niedrigsten Grad:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & \left| \begin{array}{l} a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d \end{array} \right| & = 0 \\ \text{II:} & \left| \begin{array}{l} a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d \end{array} \right| & = 1 \\ \text{III:} & \left| \begin{array}{l} a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d \end{array} \right| & = 3 \\ \text{IV:} & \left| \begin{array}{l} a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d \end{array} \right| & = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & \left| \begin{array}{l} -a + b - c + d \end{array} \right| & = 0 \\ \text{II:} & \left| \begin{array}{l} d \end{array} \right| & = 1 \\ \text{III:} & \left| \begin{array}{l} a + b + c + d \end{array} \right| & = 3 \\ \text{IV:} & \left| \begin{array}{l} 8a + 4b + 2c + d \end{array} \right| & = 4 \end{array}$$

$$\text{II:} \quad d = 1$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & \left| \begin{array}{l} -a + b - c \end{array} \right| & = -1 \\ \text{III:} & \left| \begin{array}{l} a + b + c \end{array} \right| & = 2 \\ \text{IV:} & \left| \begin{array}{l} 8a + 4b + 2c \end{array} \right| & = 3 \end{array} \quad | \text{ III} + \text{I}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & \left| \begin{array}{l} -a + b - c \end{array} \right| & = -1 \\ \text{III:} & \left| \begin{array}{l} 2b \end{array} \right| & = 1 \\ \text{IV:} & \left| \begin{array}{l} 8a + 4b + 2c \end{array} \right| & = 3 \end{array}$$

$$\text{III:} \quad 2b = 1 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & \left| \begin{array}{l} -a - c \end{array} \right| & = -\frac{3}{2} \\ \text{IV:} & \left| \begin{array}{l} 8a + 2c \end{array} \right| & = 1 \end{array} \quad | \cdot (2) \quad | \text{ IV} + \text{I}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & \left| \begin{array}{l} -a - c \end{array} \right| & = -\frac{3}{2} \\ \text{IV:} & \left| \begin{array}{l} 6a \end{array} \right| & = -2 \end{array}$$

$$\text{IV:} \quad 6a = -2 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{3}$$

$$\text{II:} \quad -a - c = -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{11}{6}$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = -\frac{1}{3}$
- $b = \frac{1}{2}$
- $c = \frac{11}{6}$

•  $d = 1$   
Die Funktion  $f$  lautet  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{6}x + 1$ .

6g)

- $f(0) = 0$
- $f(1) = 0$
- $f(2) = 0$
- $f(3) = 1$

Es liegen 4 Bedingungen vor, daher gilt für den niedrigsten Grad:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & \left| \begin{array}{l} a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d \\ a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d \\ a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d \\ a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d \end{array} \right| & = \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & \left| \begin{array}{l} d \\ a + b + c + d \\ 8a + 4b + 2c + d \\ 27a + 9b + 3c + d \end{array} \right| & = \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

I:  $d = 0$

---

$$\begin{array}{lcl} \text{II:} & \left| \begin{array}{l} a + b + c \\ 8a + 4b + 2c \\ 27a + 9b + 3c \end{array} \right| & = \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \end{array} \begin{array}{l} | \cdot (-8) \\ | \text{III} + \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{II:} & \left| \begin{array}{l} a + b + c \\ -4b - 6c \\ 27a + 9b + 3c \end{array} \right| & = \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \end{array} \begin{array}{l} | \cdot (-27) \\ | \text{IV} + \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{II:} & \left| \begin{array}{l} a + b + c \\ -4b - 6c \\ -18b - 24c \end{array} \right| & = \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \end{array} \begin{array}{l} | \cdot \frac{-18}{4} \\ | \text{IV} + \text{III} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{II:} & \left| \begin{array}{l} a + b + c \\ -4b - 6c \\ 3c \end{array} \right| & = \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

IV:  $3c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{3}$

III:  $-4b - 6c = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$

II:  $a + b + c = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{6}$

Somit lautet die Lösung:

- $a = \frac{1}{6}$
- $b = -\frac{1}{2}$
- $c = \frac{1}{3}$
- $d = 0$

Die Funktion  $f$  lautet  $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x$ .

Aufgabe 7

Begründen Sie, dass es für die folgenden Bedingungen keine ganzrationale Funktion  $f$  gibt.

7a)

Grad von  $f$  gleich 2; Nullstellen für  $x = 2$  und  $x = 4$ ; Maximum für  $x = 0$ .

Diese Funktion kann nicht existieren, da das Extremum durch Symmetrie an der Stelle  $x = 3$  sein muss.

7b)

Grad von  $f$  gleich 3; Extremwerte für  $x = 0$  und  $x = 3$ ; Wendestelle für  $x = 1$ .

Diese Funktion kann nicht existieren, da die Wendestelle mittig der Extremwerte liegen muss. (Siehe Aufgabe 7a)

7c)

Grad von  $f$  gleich 4;  $f$  gerade, Wendestelle für  $x = 1$ ; Maximum für  $x = 2$

Es ist für  $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$  mit  $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$  und  $f''(x) = 12ax^2 + 2b$ . Es muss gelten:

- $f''(1) = 0$
- $f'(2) = 0$



$$\begin{array}{lcl} 0 = f''(1) & & \\ 0 = 12a + 2b & | & -12a \\ 2b = -12a & | & \div 2 \\ b = -6a & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} 0 = f'(2) & & \\ 0 = 4a \cdot 2^3 + 2b \cdot 2 & & \\ 0 = 32a + 4b & | & -32a \\ 4b = -32a & | & \div 4 \\ b = -8a & & \end{array}$$

Für  $a$  und  $b$  existieren aufgrund von  $\{b = -6a\} \neq \{b = -8a\}$  keine Lösungen. Folglich kann es keine Funktion  $f$  nach diesen Bedingungen geben.

## Aufgabe 8

Bestimmen Sie die ganzrationale Funktion 3ten Grades, deren Graph

8a)

die  $x$ -Achse im Ursprung berührt und deren Tangente in  $P(-3 \mid 0)$  parallel zur Gerade  $y = 6x$  ist.

Die Bedingungen folgen für die Funktion  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  mit  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ :

- $f(0) = 0$
- $f(-3) = 0$
- $f'(0) = 0$
- $f'(-3) = 6$

Es liegen genug Bedingungen vor

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d & = 0 \\ \text{II:} & a \cdot (-3)^3 + b \cdot (-3)^2 + c \cdot (-3) + d & = 0 \\ \text{III:} & 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c & = 0 \\ \text{IV:} & 3a \cdot (-3)^2 + 2b \cdot (-3) + c & = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & d & = 0 \\ \text{II:} & -27a + 9b - 3c + d & = 0 \\ \text{III:} & c & = 0 \\ \text{IV:} & 27a - 6b + c & = 6 \end{array}$$

$$\text{I:} \quad d = 0$$

$$\text{III:} \quad c = 0$$

$$\begin{array}{lcl} \text{II:} & -27a + 9b & = 0 \\ \text{IV:} & 27a - 6b & = 6 \end{array} \Bigg| \text{IV} + \text{II}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{II:} & -27a + 9b & = 0 \\ \text{IV:} & 3b & = 6 \end{array}$$

$$\text{II:} \quad 3b = 6 \quad \Rightarrow \quad b = 2$$

$$\text{IV:} \quad -27a + 9b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{3}$$

Somit lautet die Lösung:

- $a = \frac{2}{3}$
  - $b = 2$
  - $c = 0$
  - $d = 0$
- Die Funktion  $f$  lautet  $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2$ .

8b)

in  $P(1 \mid 4)$  einen Extrempunkt und in  $Q(0 \mid 2)$  einen Wendepunkt hat.

Die Bedingungen folgen für die Funktion  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  mit  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$  und  $f''(x) = 6ax + 2b$ :

- $f(0) = 2$
- $f(1) = 4$
- $f'(1) = 0$
- $f''(0) = 0$

Es liegen genug Bedingungen vor

I:  $\left| \begin{array}{rcl} a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d & = & 2 \end{array} \right|$

II:  $\left| \begin{array}{rcl} a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d & = & 4 \end{array} \right|$

III:  $\left| \begin{array}{rcl} 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c & = & 0 \end{array} \right|$

IV:  $\left| \begin{array}{rcl} 6a \cdot 0^2 + 2b & = & 0 \end{array} \right|$

I:  $\left| \begin{array}{rcl} d & = & 2 \end{array} \right|$

II:  $\left| \begin{array}{rcl} a + b + c + d & = & 4 \end{array} \right|$

III:  $\left| \begin{array}{rcl} 3a + 2b + c & = & 0 \end{array} \right|$

IV:  $\left| \begin{array}{rcl} 2b & = & 0 \end{array} \right|$

I:  $d = 2$

II:  $2b = 0 \Rightarrow b = 0$

II:  $\left| \begin{array}{rcl} a + c & = & 2 \end{array} \right| \quad | \cdot (-1)$

III:  $\left| \begin{array}{rcl} 3a + c & = & 0 \end{array} \right| \quad | \text{III} + \text{II}$

II:  $\left| \begin{array}{rcl} a + c & = & 2 \end{array} \right|$

III:  $\left| \begin{array}{rcl} 2a & = & -2 \end{array} \right|$

III:  $2a = -2 \Rightarrow a = -1$

II:  $a + c = 2 \Rightarrow c = 3$

Somit lautet die Lösung:

- $a = -1$
  - $b = 0$
  - $c = 3$
  - $d = 2$
- Die Funktion  $f$  lautet  $f(x) = -x^3 + 3x + 2$ .

## Aufgabe 9

Bestimmen Sie alle ganzrationalen Funktionen 3ten Grades, deren Graph

9a)

punktsymmetrisch zum Ursprung ist und für  $x = 2$  einen Extrempunkt hat

Es gilt durch die Punktsymmetrie zum Ursprung:

- $f(x) = ax^3 + bx$
  - $f'(x) = 3ax^2 + b$
- Generell gilt:
- $f'(2) = 0$

$0 = f'(2)$

$0 = 3a \cdot 2^2 + b \quad | -12a$

$b = -12a$

Somit lautet die Funktion  $f(x) = ax^3 - 12ax$ ;  $a \neq 0$ .

9b)

im Ursprung einen Wendepunkt mit der Wendetangente  $y = x$  hat.

Es gilt für  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ :

- $f(0) = 0$
- $f'(0) = 1$
- $f''(0) = 0$

Es liegen nicht genug Bedingungen (3 von 4) vor:  
Scharfunktion von  $f$  mit einem Parameter

I:  $\left| \begin{array}{rcl} a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d & = & 0 \end{array} \right|$

II:  $\left| \begin{array}{rcl} 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c & = & 1 \end{array} \right|$

III:  $\left| \begin{array}{rcl} 6a \cdot 0 + 2b & = & 0 \end{array} \right|$

I:  $\left| \begin{array}{rcl} d & = & 0 \end{array} \right|$

II:  $\left| \begin{array}{rcl} c & = & 1 \end{array} \right|$

III:  $\left| \begin{array}{rcl} 2b & = & 0 \end{array} \right|$

I:  $d = 0$

II:  $c = 1$

III:  $2b = 0 \Rightarrow b = 0$

Somit lautet die Lösung:

- $a = a$
  - $b = 0$
  - $c = 1$
  - $d = 0$
- Die Funktion  $f$  lautet  $f(x) = ax^3 + x$ ;  $a \neq 0$

Aufgabe 10

Bestimmen Sie die ganzrationale Funktion 4ten Grades, deren Graph

10a)

den Wendepunkt  $O(0 \mid 0)$  mit der  $x$ -Achse als Wendetangente und den Tiefpunkt  $A(-1 \mid -2)$  hat.

Die Bedingungen folgen für die Funktion  $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$  mit  $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$  und  $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

- $f(0) = 0$
- $f(-1) = -2$
- $f'(-1) = 0$
- $f'(0) = 0$
- $f''(0) = 0$

Es liegen genug Bedingungen vor (5 von 5)

I:

II:

III:

IV:

V:

$a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e$

$a \cdot (-1)^4 + b \cdot (-1)^3 + c \cdot (-1)^2 + d \cdot (-1) + e$

$4a \cdot (-1)^3 + 3b \cdot (-1)^2 + 2c \cdot (-1) + d$

$4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d$

$12a \cdot 0^2 + 6b \cdot 0 + 2c$

$=$

$=$

$=$

$=$

$=$

0

-2

0

0

0

I:

II:

III:

IV:

V:

$e$

$a - b + c - d + e$

$-4a + 3b - 2c + d$

$d$

$2c$

$=$

$=$

$=$

$=$

$=$

0

-2

0

0

0

I:  $e = 0$

IV:  $d = 0$

V:  $2c = 0 \Rightarrow c = 0$

II:

III:

$a - b$

$-4a + 3b$

$=$

$=$

$-2$

0

$\mid \cdot 3$

$\mid \text{III} + \text{II}$

II:

III:

$a - b$

$-a$

$=$

$=$

$-2$

$-6$

III:  $-a = -6 \Rightarrow a = 6$

II:  $a - b = -2 \Rightarrow b = 8$

Somit lautet die Lösung:

- $a = 6$
  - $b = 8$
  - $c = 0$
  - $d = 0$
  - $e = 0$
- Die Funktion  $f$  lautet  $f(x) = 6x^4 + 8x^3$ .

10b)

in  $O(0 \mid 0)$  und im Wendepunkt  $W(-2 \mid 2)$  Tangenten parallel zur  $x$ -Achse hat.

Die Bedingungen folgen für die Funktion  $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$  mit  $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$  und  $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

- $f(0) = 0$
- $f(-2) = 2$
- $f'(0) = 0$
- $f'(-2) = 0$
- $f''(-2) = 0$

Es liegen genug Bedingungen vor (5 von 5)

I:

II:

III:

IV:

V:

$a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e$

$a \cdot (-2)^4 + b \cdot (-2)^3 + c \cdot (-2)^2 + d \cdot (-2) + e$

$4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d$

$4a \cdot (-2)^3 + 3b \cdot (-2)^2 + 2c \cdot (-2) + d$

$12a \cdot (-2)^2 + 6b \cdot (-2) + 2c$

$= 0$

$= 2$

$= 0$

$= 0$

$= 0$

I:

II:

III:

IV:

V:

$e$

$16a - 8b + 4c - 2d + e$

$d$

$-32a + 12b - 4c + d$

$48a - 12b + 2c$

$= 0$

$= 2$

$= 0$

$= 0$

$= 0$

I:

$e = 0$

III:

$d = 0$

II:

IV:

V:

$16a - 8b + 4c$

$-32a + 12b - 4c$

$48a - 12b + 2c$

$= 2$

$= 0$

$= 0$

$| \cdot (2)$

$| \text{IV} + \text{II}$

II:

IV:

V:

$16a - 8b + 4c$

$-4b + 4c$

$48a - 12b + 2c$

$= 2$

$= 4$

$= 0$

$| \cdot (-3)$

$| \text{V} + \text{II}$

II:

IV:

V:

$16a - 8b + 4c$

$-4b + 4c$

$12b - 10c$

$= 2$

$= 4$

$= -6$

$| \cdot (3)$

$| \text{V} + \text{IV}$

II:

IV:

V:

$16a - 8b + 4c$

$-4b + 4c$

$2c$

$= 2$

$= 4$

$= 6$

$| \cdot (3)$

$| \text{V} + \text{IV}$

V:

$2c = 6 \Rightarrow c = 3$

IV:

$-4b + 4c = 4 \Rightarrow b = 2$

II:

$16a - 8b + 4c = 2 \Rightarrow a = \frac{3}{8}$

Somit lautet die Lösung:

- $a = \frac{3}{8}$
  - $b = 2$
  - $c = 3$
  - $d = 0$
  - $e = 0$
- Die Funktion  $f$  lautet  $f(x) = 6x^4 + 8x^3$ .

## Aufgabe 11

Bestimmen Sie die ganzrationale Funktion 4ten Grades, deren Graph

11a)

symmetrisch zur  $y$ -Achse ist, durch  $A(0|2)$  geht und den Tiefpunkt  $B(1|0)$  hat.

Die Bedingungen folgen für die Funktion  $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$  mit  $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$ :

- $f(0) = 2$
- $f(1) = 0$
- $f'(1) = 0$

Es liegen genug Bedingungen vor (3 von 3)

I:

II:

III:

$a \cdot 0^4 + b \cdot 0^2 + c$

$a \cdot 1^4 + b \cdot 1^2 + c$

$4a \cdot 1^3 + 2b \cdot 1$

$= 2$

$= 0$

$= 0$

I:

II:

III:

$c$

$a + b + c$

$4a + 2b$

$= 2$

$= 0$

$= 0$

I:

$c = 2$

II:

III:

$a + b$

$4a + 2b$

$= -2$

$= 0$

$| \cdot (-2)$

$| \text{III} + \text{II}$

II:

III:

$a + b$

$2a$

$= -2$

$= 4$

III:

$2a = 4 \Rightarrow a = 2$

II:

$a + b = -2 \Rightarrow b = -4$

Somit lautet die Lösung:

- $a = 2$
  - $b = -4$
  - $c = 2$
- Die Funktion  $f$  lautet  $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 2$ .

Überprüfung des Extremum bei  $x = 1$

Es muss gelten:  $f''(1) > 0$

$f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 2$

$f'(x) = 8x^3 - 8x$

$f''(x) = 24x^2 - 8$

$f''(1) = 16 > 0$

Da  $f''(1)$  die Bedingung erfüllt, so stellt  $f$  die gesuchte Funktion dar.

11b)

symmetrisch zur  $y$ -Achse ist und in  $P(2 \mid 0)$  eine Wendetangente mit der Steigung  $-\frac{4}{3}$  hat.

Die Bedingungen folgen für die Funktion  $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$  mit  $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$  und  $f''(x) = 12ax^2 + 2b$ :

- $f(2) = 0$
- $f'(2) = -\frac{4}{3}$
- $f''(2) = 0$

Es liegen genug Bedingungen vor (3 von 3)

I:

II:

III:

$a \cdot 2^4 + b \cdot 2^2 + c$

$4a \cdot 2^3 + 2b \cdot 2$

$12a \cdot 2^2 + 2b$

$=$

$=$

$=$

$0$

$-\frac{4}{3}$

$0$

I:

II:

III:

$16a + 4b + c$

$32a + 4b$

$48a + 2b$

$=$

$=$

$=$

$0$

$-\frac{4}{3}$

$0$

$\mid \cdot (-2)$

$\mid \text{II} + \text{I}$

I:

II:

III:

$16a + 4b + c$

$-4b - 2c$

$48a + 2b$

$=$

$=$

$=$

$0$

$-\frac{4}{3}$

$0$

$\mid \cdot (-3)$

$\mid \text{III} + \text{I}$

I:

II:

III:

$16a + 4b + c$

$-4b - 2c$

$-10b - 3c$

$=$

$=$

$=$

$0$

$-\frac{4}{3}$

$0$

$\mid \cdot (-2, 5)$

$\mid \text{III} + \text{II}$

I:

II:

III:

$16a + 4b + c$

$-4b - 2c$

$2c$

$=$

$=$

$=$

$0$

$-\frac{4}{3}$

$\frac{10}{3}$

III:

$2c = \frac{10}{3}$

$\Rightarrow$

$c = \frac{5}{3}$

II:

$-4b - 2c = -\frac{4}{3}$

$\Rightarrow$

$b = -\frac{1}{2}$

I:

$16a + 4b + c = 0$

$\Rightarrow$

$a = \frac{1}{48}$

Somit lautet die Lösung:

- $a = \frac{1}{48}$
  - $b = -\frac{1}{2}$
  - $c = \frac{5}{3}$
- Die Funktion  $f$  lautet  $f(x) = \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}$ .

Aufgabe 12

Bestimmen Sie alle ganzrationalen Funktionen

12a)

vom Grad 2, deren Graph durch  $A(0 \mid 2)$  und  $B(6 \mid 8)$  geht und die  $x$ -Achse berührt.

Die Bedingungen folgen für die Funktion  $f(x) = ax^2 + bx + c$  mit  $f'(x) = 2ax + b$ :

- $f(0) = 2$
- $f(6) = 8$
- $f'(k) = 0$

