Seite 198 Nr. 10)

> Bestimmen Sie die Tangentialebenen an die Kugel K, die parallel zur Ebene E sind. Bestimmen Sie auch die Koordinaten der Berührpunkte.

ParalleleTangentialebenenaufgenerellenKugeln

> Eine Ebene $E: \vec{n} \circ \overrightarrow{OX} = \vec{n} \circ \overrightarrow{OP}$, und eine Kugel $K: \left(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OM}\right)^2 = r^2$ seien gegeben.
> Zwei zu E parallele Ebenen $F_{1;2}$ sollen unterschiedlich sein, und Tangentialebene der Kugel K heißen.

Zunächst einmal definiere ich folgendermaßen:

- $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Die Ebenen $F_{1;2}$ besitzen den gleichen Abstand zu dem Mittelpunkt, da diese tangential auf der Kugel K mit Radius r liegen. Folglich $d(M;F_1) = d(M;F_2) = r$.

> Da die Ebene E_M den Punkt M enthält und parallel zu E ist, so kann E_M zur Bildung von $F_{1;2}$ verwendet werden.
> Es gilt:
>
> - $M \in E_M$
> - $E_M \parallel E$
>   - $E_M \parallel F_{1;2}$
> - $d(E_M;F_1) = d(E_M;F_2)$

Definiert lautet E_M folgendermaßen:

$$E_M : \vec{n} \circ \overrightarrow{OX} = \vec{n} \circ \overrightarrow{OM}$$

Wie beschrieben wird E_M verwendet, um $F_{1;2}$ zu bestimmen. Hierzu wird d als Variable verwendet, die die Ebene zur Tangentialebene von K macht.

$$E_M : \vec{n} \circ \overrightarrow{OX} = \vec{n} \circ \overrightarrow{OM} + d$$

Folgend werde ich einen generell beschriebenen Schnittpunkt darstellen:

> GeradeInKugel
>
> Gegeben seien
>
> - $K_1 : \left[\vec{x} - \overrightarrow{OM_1}\right]^2 = r^2$
> - $g : \vec{x} = \overrightarrow{OM_1} + \lambda \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$
>
> Um die Schnittmenge der Kugel K und g zu bestimmen, muss g in K eingesetzt werden:
>
> $$\begin{aligned} K_1 : \left[\vec{x} - \overrightarrow{OM_1}\right]^2 &= r^2 \\ \left[\overrightarrow{OM_1} + \lambda \cdot \overrightarrow{M_1M_2} - \overrightarrow{OM_1}\right]^2 &= r^2 \\ \left[\lambda \cdot \overrightarrow{M_1M_2}\right]^2 &= r^2 \\ \lambda^2 \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \circ \overrightarrow{M_1M_2} &= r^2 \\ \lambda^2 &= \frac{r^2}{\overrightarrow{M_1M_2} \circ \overrightarrow{M_1M_2}} \\ \lambda^2 &= \frac{r^2}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|^2} \\ \lambda &= \pm \frac{r}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|} \end{aligned}$$
>
> Die Schnittmenge lautet daher:
>
> $$\overrightarrow{OS_{1;2}} = \overrightarrow{OM_1} \pm \frac{r}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$$
>
> ---
>
> ---

Bedenken wir hier, dass $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{n}$ ist, und $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM}$ ist, so erhalten wir für die Schnittmenge, die unsere gesuchten Berührungspunkte beschreibt:

$$\overrightarrow{OS_{1;2}} = \overrightarrow{OM_1} \pm \frac{r}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$$

$$\overrightarrow{OS_{1;2}} = \overrightarrow{OM} \pm \frac{r}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}$$

Setzen wir diese Schnittpunkte in E_M ein, und lösen anschließend nach d auf, erhalten wir folgendes für die Werte d:

$$
\begin{aligned}
E_M : \vec{n} \circ \overrightarrow{OX} &= \vec{n} \circ \overrightarrow{OM} + d \\
\vec{n} \circ \left[\overrightarrow{OM} \pm \frac{r}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}\right] &= \vec{n} \circ \overrightarrow{OM} + d \\
\vec{n} \circ \overrightarrow{OM} \pm \frac{r}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \circ \vec{n} &= \vec{n} \circ \overrightarrow{OM} + d \\
\pm \frac{r}{|\vec{n}|} \cdot |\vec{n}|^2 &= d \\
d &= \pm r \cdot |\vec{n}|
\end{aligned}
$$

Daraus folgt für die Ebenen $F_{1;2}$:

$$
\begin{aligned}
E_M : \vec{n} \circ \overrightarrow{OX} &= \vec{n} \circ \overrightarrow{OM} + d \\
F_{1;2} : \vec{n} \circ \overrightarrow{OX} &= \vec{n} \circ \overrightarrow{OM} \pm r \cdot |\vec{n}|
\end{aligned}
$$

GeradeInKugel

Gegeben seien

- $K_1 : \left[\vec{x} - \overrightarrow{OM_1}\right]^2 = r^2$
- $g : \vec{x} = \overrightarrow{OM_1} + \lambda \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$

Um die Schnittmenge der Kugel K und g zu bestimmen, muss g in K eingesetzt werden:

$$
\begin{aligned}
K_1 : \left[\vec{x} - \overrightarrow{OM_1}\right]^2 &= r^2 \\
\left[\overrightarrow{OM_1} + \lambda \cdot \overrightarrow{M_1M_2} - \overrightarrow{OM_1}\right]^2 &= r^2 \\
\left[\lambda \cdot \overrightarrow{M_1M_2}\right]^2 &= r^2 \\
\lambda^2 \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \circ \overrightarrow{M_1M_2} &= r^2 \\
\lambda^2 &= \frac{r^2}{\overrightarrow{M_1M_2} \circ \overrightarrow{M_1M_2}} \\
\lambda^2 &= \frac{r^2}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|^2} \\
\lambda &= \pm \frac{r}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}
\end{aligned}
$$

Die Schnittmenge lautet daher:

$$
\overrightarrow{OS_{1;2}} = \overrightarrow{OM_1} \pm \frac{r}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}
$$

---

a)

- $E : 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0$
- $K : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 196$
  Daraus resultiert:
- $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $r = 14$
- $M(0 \mid 0 \mid 0) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Von oben:
Die Tangentialebenen lauten:

$$
\begin{aligned}
F_{1;2} : \vec{n} \circ \overrightarrow{OX} &= \vec{n} \circ \overrightarrow{OM} \pm r \cdot |\vec{n}| \\
\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \overrightarrow{OX} &= \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \pm 14 \cdot \underbrace{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}_{=98} \\
3x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= \pm 98
\end{aligned}
$$

Die Tangentialebenen lauten $3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = \pm 98$.

Die Berührpunkte der Tangentialebenen werden mittels einer zu F senkrechten normierten Lotgerade bestimmt:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OS_{1;2}} &= \overrightarrow{OM} \pm \frac{r}{\left|\overrightarrow{n}\right|} \cdot \overrightarrow{n} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \pm \frac{14}{\underbrace{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}_{=2}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \pm \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Daraus resultieren die Berührpunkte

- $S_1(6 \mid -12 \mid 4)$
- $S_2(-6 \mid 12 \mid -4)$

---

b)

- $E: \vec{x} \circ \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$
- $K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \right]^2 = 81$

  Daraus resultiert:
- $\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$
- $r = 9$
- $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

Von oben:
Die Tangentialebenen lauten:

$$\begin{aligned} F_{1;2}: \vec{n} \circ \overrightarrow{OX} &= \vec{n} \circ \overrightarrow{OM} \pm r \cdot |\vec{n}| \\ \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \overrightarrow{OX} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}}_{-50} \pm 9 \cdot \underbrace{\left| \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \right|}_{=81} \\ 7x_1 - 4x_2 - 4x_3 &= -50 \pm 81 \end{aligned}$$

Die Tangentialebenen lauten $7x_1 - 4x_2 - 4x_3 = -50 \pm 81$.

Die Berührpunkte der Tangentialebenen werden mittels einer zu F senkrechten normierten Lotgerade bestimmt:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS_{1;2}} &= \overrightarrow{OM} \pm \frac{r}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \pm \frac{9}{\underbrace{\left| \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \right|}_{=9}} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus resultieren die Berührpunkte

- $S_1(9 \mid 3 \mid 45)$
- $S_2(-5 \mid 11 \mid 13)$

---

c)

- $E: 7x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 0$
- $K: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_1 + 12x_3 - 279 = 0$

$$\begin{aligned} K: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_1 + 12x_3 - 279 &= 0 \\ \underbrace{x_1^2 + 6x_1} + \underbrace{x_2^2} + \underbrace{x_3^2 + 12x_3} &= 279 \\ \underbrace{x_1^2 + 6x_1 + 9} + \underbrace{x_2^2} + \underbrace{x_3^2 + 12x_3 + 36} &= 279 + 9 + 36 \\ (x_1+3)^2 + x_2^2 + (x_3+6)^2 &= 324 \end{aligned}$$

Daraus resultiert:

- $\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$
- $r = 18$
- $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$

Von oben:
Die Tangentialebenen lauten:

$$\begin{aligned} F_{1;2}: \vec{n} \circ \overrightarrow{OX} &= \vec{n} \circ \overrightarrow{OM} \pm r \cdot |\vec{n}| \\ \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \overrightarrow{OX} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}}_{=3} \pm 18 \cdot \underbrace{\left| \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \right|}_{=162} \\ 7x_1 - 4x_2 - 4x_3 &= 3 \pm 162 \end{aligned}$$

Die Tangentialebenen lauten $7x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 3 \pm 162$.

Die Berührpunkte der Tangentialebenen werden mittels einer zu F senkrechten normierten Lotgerade bestimmt:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS_{1;2}} &= \overrightarrow{OM} \pm \frac{r}{\left|\overrightarrow{n}\right|} \cdot \overrightarrow{n} \\ &= \begin{pmatrix}-3\\0\\-6\end{pmatrix} \pm \frac{18}{\underbrace{\left|\begin{pmatrix}7\\-4\\-4\end{pmatrix}\right|}_{=2}} \cdot \begin{pmatrix}7\\-4\\-4\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-3\\0\\-6\end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix}14\\-8\\-8\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Daraus resultieren die Berührpunkte

- $S_1(11 \mid -8 \mid -14)$
- $S_2(-17 \mid 8 \mid 2)$