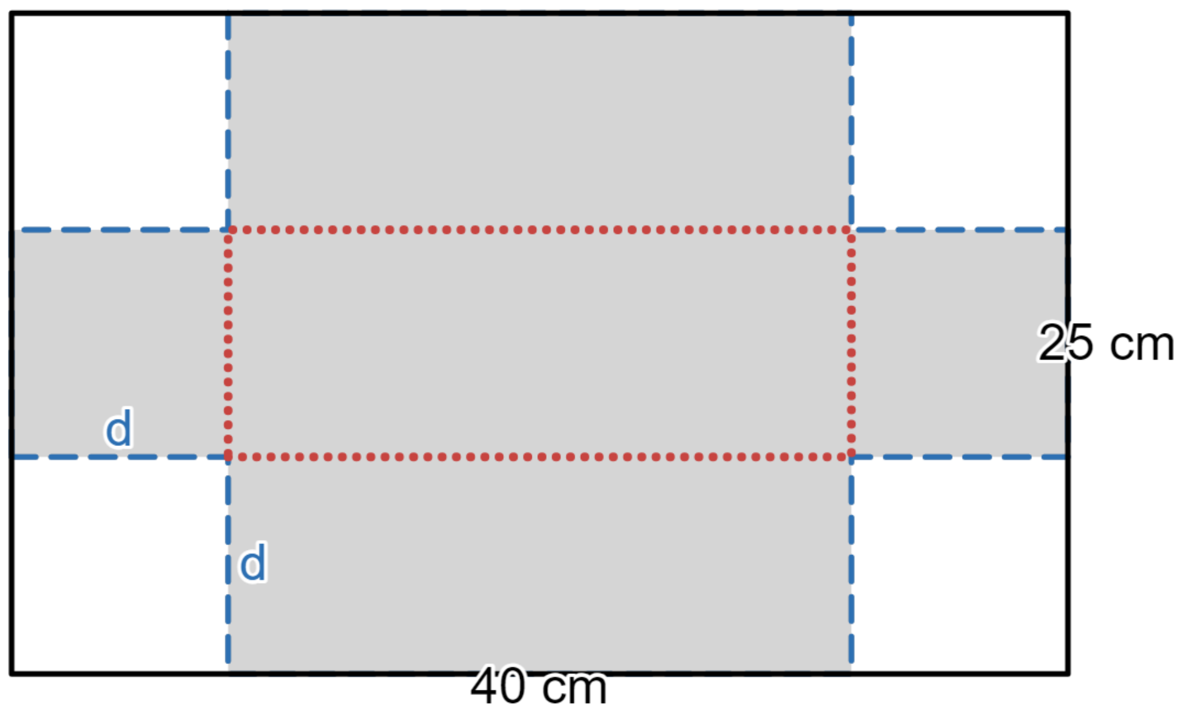
Extremwertaufgabe

> Gegeben ist eine Oberfläche mit den Maßen $40\,cm$ und $25\,cm$. Eine nach oben offene Schachtel mit maximalem Volumen soll gefaltet werden. Das Schneiden der Oberfläche ist möglich.

Wir erkennen zunächst die Darstellung der Oberfläche:



Die Oberfläche wird entlang der roten Linie gefaltet. Die blauen Linien stellen Schnitte in der Oberfläche dar. Das graue bildet am Ende die Schachtel.

---

1. Hauptbedingung

Das Volumen soll maximiert werden, daher lautet unsere Hauptbedingung:

$$V(d) = d \cdot (40 - 2d) \cdot (25 - 2d), \quad d \in [0; 12,5]$$

> Da es hier eine Hauptfunktion mit einer Abhängigkeit ist, so ist diese Funktion zugleich die Zielfunktion.

$$\begin{aligned} V(d) &= d \cdot (40 - 2d) \cdot (25 - 2d) \\ &= d \cdot \left(1000 - 80d - 50d + 4d^2\right) \\ &= d \cdot \left(1000 - 130d + 4d^2\right) \\ &= 4d^3 - 130d^2 + 1000d \end{aligned}$$

Extremstellen der Zielfunktion $V(d)$

$$\text{Notwendiges Kriterium für lokale Extrema:} \quad V'(d) = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= V'(d) \\ 0 &= 12d^2 - 260d + 1000 & \mid \div 12 \\ 0 &= d^2 - \frac{65}{3}d + \frac{250}{3} \\ d_{1;2} &= -\frac{-\frac{65}{3}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-\frac{65}{3}}{2}\right)^2 - \frac{250}{3}} \\ &= \frac{65}{6} \pm \sqrt{\left(-\frac{65}{6}\right)^2 - \frac{250}{3}} \\ &= \frac{65}{6} \pm \sqrt{\frac{1225}{36}} \\ d_{1;2} &= \frac{65}{6} \pm \frac{35}{6} \\ \\ d_1 &= \frac{65}{6} - \frac{35}{6} = 5 \\ d_2 &= \frac{65}{6} + \frac{35}{6} = \frac{50}{3} > 12,5 \end{aligned}$$

Da hier $d_2 = \frac{50}{3}$ größer als $12,5$ ist, so wird diese Stelle nicht weiter untersucht. (Siehe Definitionsbereich)

$$\text{Erstes hinreichendes Kriterium für lokale Extrema:} \quad V''(d) \neq 0$$

$$\begin{aligned} V''(d) &= 24d - 260 \\ V''(5) &= 24 \cdot 5 - 260 \\ &= -140 < 0 \end{aligned}$$

> Durch $V''(5) < 0$ ist $d_1 = 5$ eine Lösung. An dieser Stelle hat die Zielfunktion $V(d)$ ein lokales Maximum mit dem Wert $V(5) = 2250\,cm^3$
