

## 1. 多元配置分散分析

---

ここまでの章で、我々は多くの統計解析について学んできました。1つの名義的な予測変数を用いて、2つのグループの差 (e.g.  $t$  検定, Chapter ??) や、3つ以上のグループの差 (e.g. 一元配置分散分析, Chapter ??) について統計的検定を行う方法について見てきました。回帰分析の章 (Chapter ??) では、複数の量的な予測変数を用いて単一の結果変数を説明するモデルを建てるという、強力で新しいアイデアが紹介されました。回帰モデルを用いることで、例えば、ある生徒のテスト勉強の時間やIQテストの得点に基づいて、その生徒の読解テストの誤答数を予測することができます。

本章の目的は、複数の予測変数を使用するというアイデアを、分散分析の枠組みへと拡張することです。例えば、我々が、読解テストを用いて3つの異なる学校における生徒の成績を測定しようとしていると考えてみましょう。加えて、我々は、女子と男子が異なる速度で発達している（したがって、成績も平均的に異なることが予想される）と想定しています。各生徒は、彼／彼女らの性別と、所属する学校という2つの異なる変数によって分類されます。我々の目的は、これらのグループ化変数の両方に基づいて、読解テストの成績を分析することです。これを実現するための手法が、いわゆる**多元配置分散分析**です。ここでは2つのグループ化変数があるため、この手法は Chapter ?? で登場した一元配置分散分析に対して、二元配置分散分析と呼ばれることもあります。

### 1.1

---

#### 多元配置分散分析 1: 釣合型デザイン, 交互作用なし

分散分析について述べた Chapter ?? では、かなり単純な実験計画が想定されていました。各個人は特定のグループに属しており、我々の目的は、いくつかの結果変数について、これらのグループ間で平均値が異なるかどうかを明らかにすることでした。この節では、**多元配置デザイン**と呼ばれる、2つ以上のグループ化変数を持つより広範な実験デザインについて見ていきます。先ほど、こうしたデザインが必要となるような例を1つ挙げました。Chapter ?? で登場した別の例では、各個人の経験した**気分の向上**に対する異なる薬の影響に注目しました。この例では薬の有意な効果が見出されま

したが、章の終盤では、それに加えてセラピーの効果を確認するための分析を行いました。セラピーの効果は見出されませんでした。同じ結果変数を予測する 2 つの分析を別個に行ったことに対する若干の懸念があります。おそらく、実際にはセラピーによる気分の向上効果はあるのですが、その効果は薬の効果によって”隠されて”いたために見つけられなかったのではないのでしょうか？言い換えれば、我々は薬とセラピーの両方の予測変数を含む、単一の分析を行う必要があります。この分析では、各個人は、投与された薬 (3 水準の要因) および受けたセラピーの種類 (2 水準の要因) という 2 つの要因によって分類されます。こうした分析は 3 × 2 要因デザインと呼ばれます。

JASP の ‘頻度’ → ‘分割表’ の分析を用いて薬とセラピーのクロス集計表を作成すると、Figure ?? のような表が得られます。

Contingency Tables			
drug	therapy		Total
	CBT	no.therapy	
anxifree	3	3	6
joyzepam	3	3	6
placebo	3	3	6
Total	9	9	18

Figure1.1 薬とセラピーによる分割表

集計表から、2 つの要因のあらゆる組み合わせに参加者が属している、すなわちこの分析が**完全交差**デザインであるだけでなく、各グループに同数の参加者が属していることが分かります。言い換えれば、この分析は**釣合型**デザインだということです。これは最も単純なケースであるため、この節では、釣合型デザインのデータをどのように分析するかを見ていきます。非釣合型デザインに関する説明はかなり冗長なので、ここでは一旦置いておくことにします。

### 1.1.1 検定したい仮説はどんなものか？

多元配置分散分析は、一元配置分散分析と同様に、母集団の平均値に関する仮説を検定するための手法です。したがって、この分析の仮説が実際にはどのようなものであるかを明確にすることから始めるのが賢明でしょう。しかし、このことについて議論するにあたって、母集団の平均の簡潔な表記法があると非常に便利です。観測値は 2 つの異なる要因に応じて分類されているため、分析者が関心を持ちうる、非常に多くの平均値があります。これを確かめるために、今回のデザインにおいて計

算可能なあらゆるサンプル平均について考えてみましょう。まず、我々は明らかに、以下のようなグループごとの平均値に関心があります：

```

%drug      therapy      mood.gain
薬の種類   セラピーの種類   気分の向上
%placebo   no.therapy    0.300000
プラセボ   セラピーなし    0.300000
%anxifree  no.therapy    0.400000
アンザイフリー セラピーなし  0.400000
%joyzepam  no.therapy    1.466667
ジョイゼパム セラピーなし  1.466667
%placebo    CBT          0.600000
プラセボ    CBT          0.600000
%anxifree   CBT          1.033333
アンザイフリー CBT          1.033333
%joyzepam   CBT          1.500000
ジョイゼパム CBT          1.500000

```

この出力は、2つの要因のあらゆる組み合わせ (e.g., プラセボ群でセラピーなし, プラセボ群で CBT を実施, など) におけるグループごとの平均値のリストになっています。これらの数値に加えて、行と列の平均および全体の平均を、以下のように1つの表で示しておくくと便利です：

	セラピーなし	CBT	合計
プラセボ	0.30	0.60	0.45
アンザイフリー	0.40	1.03	0.72
ジョイゼパム	1.47	1.50	1.48
合計	0.72	1.04	0.88

これらの平均値のそれぞれは、当然ながらサンプル統計量です。これらの値は、我々の研究において行われた特定の観察に依存しています。我々が推定したいのは、これらの値と対応する母集団のパラメータです。すなわち、より広範な母集団の中に存在する真の平均です。これらの母平均も同様に表として整理することができますが、そのためには少々、数学的な表記が必要です。ここでは一般的な表記にしたがって、 $\mu$  を母平均の記号として用います。ただし、表中には様々な平均値があるため、添字を使ってこれらを区別する必要があります。

表記法は次の通りです。この表は2つの要因によって構成されています。各行は要因 A(ここでは薬) のそれぞれの水準に対応し、各列は要因 B(ここではセラピー) のそれぞれの水準に対応します。 $R$  が表中の行数を、 $C$  が列数を表すとき、この分析は  $R \times C$  要因の分散分析と表現することができます。ここでは  $R = 3$ ,  $C = 2$  となります。小文字を使って特定の行と列を表します。したがって、

$\mu_{rc}$  は要因 A の第  $r$  水準 (i.e.  $r$  行目), 要因 B の第  $c$  水準 ( $c$  行目) の母平均を表します。<sup>\*1</sup>母平均は以下のように表すことができます:

	セラピーなし	CBT	合計
プラセボ	$\mu_{11}$	$\mu_{12}$	
アンザイフリー	$\mu_{21}$	$\mu_{22}$	
ジョイゼパム	$\mu_{31}$	$\mu_{32}$	
合計			

さて、残りの組み合わせについてはどうでしょうか？例えば、CBT を受けるかどうかに関わらず、今回のような実験においてジョイゼパムを投与される可能性のある (仮想的な) 母集団全体の平均的な気分の向上について、どのように記述すれば良いのでしょうか。これは”ドット”記法によって表すことができます。先ほどのジョイゼパムの例に関しては、表の第3行目の値を平均すれば求められることが分かります。すなわち、2つのセルの平均値 (i.e.,  $\mu_{31}$  および  $\mu_{32}$ ) を平均化するということです。この平均化の結果は**周辺平均**と呼ばれ、この場合には  $\mu_{3.}$  と表記されます。CBT の周辺平均は、表の第2列目についての母平均と対応するため、 $\mu_{.2}$  と表記されます。総平均は、行と列の両方を平均化 (周辺化<sup>\*2</sup>) することによって得られる平均値であるため、 $\mu_{..}$  と表記されます。母平均についての完全な表は、以下のように書くことができます:

	セラピーなし	CBT	合計
プラセボ	$\mu_{11}$	$\mu_{12}$	$\mu_{1.}$
アンザイフリー	$\mu_{21}$	$\mu_{22}$	$\mu_{2.}$
ジョイゼパム	$\mu_{31}$	$\mu_{32}$	$\mu_{3.}$
合計	$\mu_{.1}$	$\mu_{.2}$	$\mu_{..}$

この表記法によって、仮説を定式化して表現することが容易になります。以下の2点を明らかにすることを目指すと考えてみましょう。まず、薬の選択が気分は何らかの影響を及ぼすか？次に、CBT は気分は何らかの影響を及ぼすか？もちろん、定式化することができる仮説はこれらだけではありません。Section ??において、これらとは別の、非常に重要な仮説の例が示されます。しかし、これらは検定における最も単純な2つの仮説であるため、まずはこの2つから始めましょう。まず、最初の検定について考えます。もし薬が何の効果も持たないとすると、すべての行平均は同じになる

<sup>\*1</sup>添字を使った表記法の良いところは、その一般化可能性です。もし、この実験に3つ目の要因が加わったとしても、単に3つ目の添字を追加するだけで済みます。原理的には、添字は実験に加えたい要因の数に応じていくつでも拡張することができますが、本書では2つ以上の要因を含む分析を扱うことはほとんどないため、添字が3つを超えることはありません

<sup>\*2</sup>技術的には、周辺化は一般的な平均と全く同一ではありません。周辺化は、平均化しようとする様々なイベントの頻度を加味した加重平均です。しかし、釣合型デザインにおいては、すべてのセルの頻度が定義上等しいため、これらは同じ値になります。後に非釣合型デザインについて説明する際に、この計算が非常に頭痛の種になるものだということが分かるでしょう。ですが、今の所は忘れて構いません。

はずですね？ したがって、これが帰無仮説になります。一方で、薬が何らかの効果を持つとすると、行平均は異なるものになることが予想されます。正式には、これらの帰無仮説および対立仮説は、周辺平均の等価性の考え方に沿って書き表されます：

帰無仮説,  $H_0$ : 行平均が等しい, i.e.,  $\mu_{1.} = \mu_{2.} = \mu_{3.}$

対立仮説,  $H_1$ : 少なくとも 1 つの行平均が異なる

これらの統計的仮説が、Chapter ??でこれらのデータに対して一元配置分散分析を行った際の仮説と全く同じであることは注目に値します。その際には、プラセボ群の平均的な気分の向上を表す表記として  $\mu_P$  を、2 つの薬のグループ平均を表す表記として  $\mu_A$  と  $\mu_J$  を用い、帰無仮説は  $\mu_P = \mu_A = \mu_J$  で表されました。ここでも同じ仮説について説明しているのですが、複数のグループ化変数を持つより複雑な分散分析においては、より丁寧な表記が必要なため、ここでは帰無仮説は  $\mu_{1.} = \mu_{2.} = \mu_{3.}$  と表されます。しかしながら、後述のように、仮説は同じであるものの、2 つ目のグループ化変数が存在することによって、仮説の検定の仕方は微妙に異なります。

もう一方のグループ化変数に話を移して、2 つ目の仮説検定も同様の方法で定式化できることに気付いたとしても、もはや驚かないでしょう。ただし、今度は薬の効果ではなく心理療法に注目するため、帰無仮説は列平均の等価性に対するものになります：

帰無仮説,  $H_0$ : 列平均は等しい, i.e.,  $\mu_{.1} = \mu_{.2}$

対立仮説,  $H_1$ : 列平均は異なる, i.e.,  $\mu_{.1} \neq \mu_{.2}$

### 1.1.2 JASP による分析の実行

先ほどの節で説明した帰無仮説と対立仮説には、随分と見覚えがあるように思えます。これらは基本的に、Chapter ??の一元配置分散分析において検定した仮説と同じです。そのため、多元配置分散分析で用いられる仮説の検定も、Chapter ??で登場した  $F$  検定と本質的には同じであると期待しているのではないのでしょうか。平方和 (SS), 平均平方 (MS), 自由度 (df), そして最終的には  $p$  値に変換することのできる  $F$  統計量を参照する方法が、ここでも使えると思っているのではないですか？まさにその通りです。そういうわけなので、ここでは前章までとは異なるアプローチを取りたいと思います。本書を通じて、まずは特定の分析の基礎となるロジック (およびある程度の数学的な記述) を説明し、その後に JASP による分析方法の解説を行うアプローチを取ってきました。今回は、これとは逆に、まず JASP でどのように分析を行うかを示します。その理由は、Chapter ??で説明した単純な一元配置分散分析と、この章で使用するより複雑な分散分析との類似点を強調したいからです。

分析しようとしているデータが釣合型の要因計画に対応している場合、分散分析の実施は容易になります。どれほど容易であるかを確認するため、Chapter ??で行った分析を再現することから始め

ましょう。忘れてしまった読者のために、この分析では1つの要因 (i.e., 薬) によって結果変数 (i.e., 気分の向上) を予測しようとし、Figure ??のような結果を得ている。

ANOVA - mood.gain

Cases	Sum of Squares	df	Mean Square	F	p
drug	3.453	2.000	1.727	18.611	< .001
Residual	1.392	15.000	0.093		

Note. Type III Sum of Squares

Figure1.2 JASP による気分の向上を結果変数、薬を予測変数とする一元配置分散分析

加えて、ここではセラピーが気分の向上と関係しているかどうか知りたいと考えます。Chapter ??で行われた重回帰分析に関する議論を踏まえると、セラピーの変数を2番目の'固定効果'として加えるだけでこの分析ができると知っても驚かないでしょう。Figure ??を見てください。

ANOVA - mood.gain

Cases	Sum of Squares	df	Mean Square	F	p
drug	3.453	2.000	1.727	26.149	< .001
therapy	0.467	1.000	0.467	7.076	0.019
Residual	0.924	14.000	0.066		

Note. Type III Sum of Squares

Figure1.3 JASP two way ANOVA of mood.gain by drug and therapy

Figure1.4 JASP による気分の向上を結果変数、薬およびセラピーを予測変数とする二要因分散分析

先ほどと同様に、この出力も非常に分かりやすくなっています。表の最初の行は、薬の要因に関する群間平方和 (SS) と、対応する群間の df を表しています。平均平方 (MS) と F 統計量および p 値も示されています。同様に、セラピーの要因に対応する行と、残差 (i.e., 群内変動) に対応する行があります。

これらの数値はそれぞれ見覚えのあるものでしょうし、これらの数値の関係もまた、一元配置分散分析を行ったときと変わっていません。平均平方は、SS を対応する df で割ることによって計算されていることに注意してください。したがって、まだ薬やセラピー、残差については言及していません

んが,

$$MS = \frac{SS}{df}$$

という関係がここでも成り立ちます。これを確認するために、平方和がどのように計算されるかを気にかける必要はありません。代わりに、JASP が SS を正しく計算してくれたことを信じて、その他の数値の意味についても考えてみましょう。まず、**薬**の要因に関して、3.453 を 2 で割ると、平均平方は 1.727 という値になります。**セラピー**の要因に関しては、自由度が 1 しかなく、計算も容易になります：0.467(SS) を 1 で割ると、0.467(MS) が得られます。

$F$  統計量と  $p$  値を見ると、それぞれ 2 つずつあることに気づきます；1 つは**薬**の要因に対応し、もう 1 つは**セラピー**の要因に対応しています。どちらの場合も、 $F$  統計量は要因に対応する平均平方の値を残差に対応する平均平方の値で割ることで計算されます。最初の要因 (要因 A；今回の場合は**薬**) を表す省略表記として “A” を、残差を表す省略表記として “R” を用いる場合、要因 A に対応する  $F$  統計量は  $F_A$  で表され、以下のように計算されます：

$$F_A = \frac{MS_A}{MS_R}$$

また、要因 B(i.e., **セラピー**) についても同様の計算ができます。先ほど表中の行数を表す文字としても R を使用しているので、残差の表記として “R” を用いるのは少し紛らわしいですが、 $SS_R$  や  $MS_R$  といった文脈でのみ、“R” を残差を表すものとして使用するので、混乱しないよう願います。ともかく、この式を**薬**の要因に適用すると、要因の平均平方 1.727 を残差の平均平方の値 0.066 で割ることになり、26.149 という  $F$  統計量が得られます。**セラピー**の変数については、0.467 を 0.066 で割ることで、7.076 という  $F$  統計量が計算されます。当然ですが、これらは先ほど JASP が分散分析表で報告した値と同じです。

分散分析表には  $p$  値も含まれています。これもまた、特に目新しいことはありません。2 つの要因のそれぞれについて、要因と結果変数の間に関係は無いという帰無仮説を検定します (これについては後ほど詳しく説明します)。そのため、分散分析を行ったときと (明らかに) 同様の方法で、これらの仮説に関する  $F$  統計量を計算しました。これらを  $p$  値に変換するには、帰無仮説 (検討している要因の影響はない) のもとでの  $F$  統計量の度数分布である  $F$  分布が必要です。2 つの自由度の値は要因と残差にそれぞれ対応していることにも注目してください。**薬**の要因については、自由度 2 と 14 の  $F$  分布を参照することになります (自由度については後ほど詳しく説明します)。一方、**セラピー**の要因については、自由度 1 と 14 の  $F$  分布を参照することになります。

ここで、このより複雑な要因計画のもとでの分散分析表は、単純な一元配置の分散分析の分散分析表と、ほぼ同様の方法で読み取れることに気づくでしょう。要するに、 $3 \times 2$  要因の多元配置分散分析の結果、**薬**の有意な効果 ( $F_{2,14} = 26.15, p < .001$ ) および**セラピー**の有意な効果 ( $F_{1,14} = 7.08, p = .02$ ) が見出されたことが分かります。あるいは、より専門的で正確な用語を用いると、**薬**と**セラピー**の効果という 2 つの**主効果**があるといえます。現時点では、これらを “主” 効果



と呼ぶことはやや冗長に思えますが、これには意味があります。この後、2つの要因の間に“交互作用”があるという可能性を検討するため、通常は主効果と交互作用効果を区別するのです。

### 1.1.3 平方和はどのように計算されるか？

ここまでの説明には2つの目的がありました。まず、多元配置分散分析をJASPで実行する方法は、一元配置分散分析とほとんど同じであることを示すことです。唯一の違いは、2つ目の要因の追加です。次に、多元配置分散分析の分散分析表を参照することで、多元配置分散分析の背後にある基本的なロジックと構造が、一元配置分散分析の背後にあるものと同じであることを示すことです。その感覚を大切にしてください。まさしく、多元配置分散分析は、一元配置分散分析とほとんど同じ方法で構成されているのです。分析の詳細について掘り下げ始めると、この感覚は揺らいでいきます。得てして、この心地よい感覚は、次第に統計学の教科書の著者に対する恨み辛みへと変わっていきます。

それでは、詳細について見ていくことにしましょう。先ほどの節では、主効果(ここでは薬およびセラピーの)に関する仮説検定がF検定であることは説明しましたが、平方和(SS)がどのように計算されるかは示されていませんでした。同様に、自由度(df)の計算方法も説明されていませんが、こちらは比較的単純です。要因Aと要因Bの2つの予測変数があると仮定しましょう。結果変数をYで表すとき、グループ $rc$ (i.e.,  $r$ は要因Aに対応する行の水準、 $c$ は要因Bに対応する列の水準)に属する $i$ 番目の参加者の反応は $Y_{rci}$ で表すことができます。したがって、 $\bar{Y}$ を用いてサンプル平均を表す場合、同様の表記法でグループ平均、周辺平均、総平均を表すことができます。すなわち、 $\bar{Y}_{rc}$ は要因Aの第 $r$ 水準、要因Bの第 $c$ 水準に対応するサンプル平均を表し、 $\bar{Y}_{r.}$ は要因Aの第 $r$ 水準に関する周辺平均を、 $\bar{Y}_{.c}$ は要因Bの第 $c$ 水準に関する周辺平均を、そして $\bar{Y}_{..}$ は総平均を表します。言い換えれば、サンプル平均は母平均と同様の表で整理することができます。今回のデータでは、以下ようになります：

	セラピーなし	CBT	合計
プラセボ	$\bar{Y}_{11}$	$\bar{Y}_{12}$	$\bar{Y}_{1.}$
アンザイフリー	$\bar{Y}_{21}$	$\bar{Y}_{22}$	$\bar{Y}_{2.}$
ジョイゼパム	$\bar{Y}_{31}$	$\bar{Y}_{32}$	$\bar{Y}_{3.}$
合計	$\bar{Y}_{.1}$	$\bar{Y}_{.2}$	$\bar{Y}_{..}$

先ほど示したサンプル平均は、 $\bar{Y}_{11} = 0.30$ ,  $\bar{Y}_{12} = 0.60$  などです。今回の例では、薬の要因には3つの水準が、セラピーの要因には2つの水準があるため、 $3 \times 2$  要因の多元配置分散分析を実行しようとしていました。より一般的な書き方では、要因A(行方向の要因)が $R$ 水準、要因B(列方向の要

因) が  $C$  水準を持ち、 $R \times C$  要因の多元配置分散分析を行うと表現できます。

表記が定まったことで、2つの要因それぞれの平方和の値を比較的馴染みのある方法で計算することができます。要因 A についての群間の平方和は、(行の) 周辺平均  $\bar{Y}_{1.}$ ,  $\bar{Y}_{2.}$  などが総平均  $\bar{Y}_{..}$  とどの程度異なるかを評価することで計算されます。これには一元配置分散分析と同様の方法が用いられます： $\bar{Y}_{i.}$  と  $\bar{Y}_{..}$  の平方和の差を計算するのです。具体的には、各グループに  $N$  人の参加者が属する場合、以下のように計算されます

$$SS_A = (N \times C) \sum_{r=1}^R (\bar{Y}_{r.} - \bar{Y}_{..})^2$$

一元配置分散分析と同様に、この数式の中で最も興味深い<sup>a</sup>部分は  $(\bar{Y}_{r.} - \bar{Y}_{..})^2$  という部分であり、水準  $r$  についての偏差の 2 乗に関連しています。この式が行なっているのは、要因の  $R$  水準すべての偏差の二乗を計算し、足し合わせ、その結果を  $N \times C$  に掛けるという計算です。最後の計算を行う理由は、このデザインでは要因 A において  $r$  水準を持つセルが複数あるためです。実際に、要因 B のそれぞれの水準に対応する  $C$  通りのセルがあります。例えば、この例では、薬の**アンザイフリー**という水準に対応する 2つの異なるセルがあります：1つは**セラピーなし**のグループ、もう1つは**CBT**のグループです。それだけでなく、これらのセルのそれぞれについて、 $N$  個の観測値があります。したがって、SS の値を「観測値ごと」の群間の平方和を表す量に変換するためには、 $N \times C$  を掛ける必要があるのです。要因 B についての式は、もちろん、いくつかの添え字が異なる点を除いて同じものになります

これらの式が得られたことで、先ほどの節の JASP の出力と照らし合わせることができます。繰り返しになりますが、こういった計算には専用のスプレッドシートプログラムが役立ちます。

まずは、**薬**の主効果について平方和を計算しましょう。各グループについて、合計  $N = 3$  の参加者がおり、 $C = 2$  の異なる種類のセラピーがあります。見かたを変えると、特定の薬を投与された  $3 \times 2 = 6$  の参加者がいることになります。スプレッドシートプログラムでこれらの計算を行うと、**薬**の主効果に関する平方和の値は 3.45 となります。驚くべきことではありませんが、これは先ほど Figure ??で示した分散分析表における薬の要因の SS と同じ値です。

治療の効果についても、同様の計算を行うことができます。先ほどと同じく、各グループには  $N = 3$  の参加者がいますが、今度は  $R = 3$  の異なる種類の薬があるため、CBT を受けた  $3 \times 3 = 9$  の参加者と、セラピーを受けなかった 9 名の参加者がいます。**セラピー**の主効果に関する平方和は、0.47 と計算されます。繰り返しになりますが、計算結果が Figure ??の分散分析表と同じになることは驚くべきことではありません。

以上が、2つの主効果の SS の値を計算する方法です。これらの SS の値は、Chapter ??で一元配置分散分析を行ったときに計算した群間平方和の値と類似しています。ただし、今回は2つの異

なるグループ化変数があることで混乱しやすくなるため、それらを群間の SS 値として捉えることはお勧めできません。F 検定を行うためには、群内平方和も計算する必要があります。回帰分析の章 (Chapter ??) で使用した用語と、そして JASP が分散分析表で出力する用語と合わせるため、群内 SS 値は残差平方和  $SS_R$  で表すことにしましょう。

この文脈において、残差 SS 値について考える最も簡単な方法は、それを結果変数における周辺平均の違いを取り除いた (i.e.,  $SS_A$  および  $SS_B$  を取り除いた) 後の、残りの変動として捉えることです。すなわち、 $SS_T$  というラベルの付いた、平方和の合計の計算から始めることになります。この計算式は、一元配置分散分析の場合とほぼ同じになります。各観測値  $Y_{rci}$  と総平均  $\bar{Y}_{..}$  の差をとり、差の二乗を合計します

$$SS_T = \sum_{r=1}^R \sum_{c=1}^C \sum_{i=1}^N (Y_{rci} - \bar{Y}_{..})^2$$

ここでの「三重総和」は実際以上に複雑に見えます。最初の 2 つの総和は、要因 A のすべての水準 (i.e., 表中の  $r$  のすべての行) および要因 B の全ての水準 (i.e., 表中の  $c$  のすべての列) を合計しています。各  $rc$  の組み合わせは 1 つのグループに対応し、各グループには  $N$  人の参加者が含まれているため、これらの参加者 (i.e., すべての  $i$  の値) を合計する必要があります。つまり、ここで行っているのは、データセット内の全ての観測値 ((i.e.,  $rci$  の全ての組み合わせ) を合計することです。

ここで、結果変数の総合的な変動である  $SS_T$  が明らかになり、その変動のうちどれだけが、要因 A ( $SS_A$ ) および要因 B ( $SS_B$ ) に起因するかを知ることができます。したがって、残差平方和は 2 つの要因のいずれにも起因しない  $Y$  の変動であると定義されます。言い換えれば、

$$SS_R = SS_T - (SS_A + SS_B)$$

もちろん、残差 SS を直接計算するための公式もありますが、上記のように考えることには、より概念的な意味があります。残差という言葉は、それが変動の残りの部分であることを示しており、上記の式はそれを明確にします。「分散分析モデル」に起因する変動である  $SS_A + SS_B$  を、(回帰分析の章で用いられていたように)  $SS_M$  と表記することも一般的であり、このことから、平方和の総和はモデルの平方和に残差の平方和を加えたものに等しい、という表現がよく使われます。この章の後半において、これは単なる表面的な類似性ではないことが分かります：分散分析と回帰分析が内部で行っていることは、実際に、同じなのです。

いずれにせよ、この式を用いて  $SS_R$  を計算し、JASP の出力した分差分析表と同じ答えが得られることを確認することには、時間を割くだけの価値があるでしょう。繰り返しますが、スプレッドシートを利用すると計算は非常に簡単です。上述の式を用いて SS の総和を算出し (SS の総和 = 4.85 となります)、次に、残差の SS (= 0.92) を求めます。JASP の出力と同じ答えになるはず

です。

<sup>a</sup>訳：「最も退屈な」

#### 1.1.4 自由度はどのように求めるか？

自由度は、一元配置分散分析とほぼ同じ方法で計算されます。ある要因について、自由度は水準数から 1 を引いたものに等しくなります (i.e., 行方向の要因 A については  $R - 1$ , 列方向の要因 B については  $C - 1$ )。したがって、**薬**の要因については  $df = 2$ , **セラピー**の要因については  $df = 1$  となります。後ほど、回帰モデルとしての分散分析モデルの解釈について説明する際に (Section ?? を参照), この数値の算出方法について詳しく説明します。当面の間は、自由度の単純な定義, すなわち、自由度は観測値の数から制約の数を引いたものに等しいという定義を利用できます。このことから、**薬**の要因については、3 つの個別のグループ平均値が観測されていますが、これらは 1 つの総平均によって制約されるため、自由度は 2 となります。残差の自由度の計算方法は、ロジックは似ていますが、全く同じではありません。今回の実験における観測値の総数は 18 です。制約は、総平均に関するものが 1 つ、**薬**の要因の追加のグループ平均に関するものが 2 つ、**セラピー**の要因の追加のグループ平均に関するものが 1 つあるため、この場合の自由度は 14 となります。式で表すと  $N - 1 - (R - 1) - (C - 1)$  となり、 $N - R - C + 1$  のように簡略化されます。

#### 1.1.5 多元配置分散分析と一元配置分散分析

ここまで、多元配置分散分析がどのように行われるかについて見てきました。ここまでの経過を、一元配置分散分析の結果と比較することには、時間を割くだけの価値があります。そうすることで、なぜ多元配置分散分析を行わなければならないかが明らかになります。Chapter ??では、まず使用した薬による差異を検討するための一元配置分散分析を実行し、次いでセラピーの違いによる差異を検討するための一元配置分散分析を実行しました。Section ??で述べたように、一元配置分散分析で検定される帰無仮説および対立仮説は、多元配置分散分析で検定される仮説と全く同じです。分散分析表をさらに注意深く見ると、それぞれの分析において、要因に関する平方和の値 (**薬**の要因については 3.45, **セラピー**の要因については 0.92) および自由度の値 (**薬**の要因については 2, **セラピー**の要因については 1) が同じであることが分かります。しかしながら、結果は同じではありません！最も注目すべき点は、Section ??において**セラピー**の要因について一元配置分散分析を行った際には、有意な効果は得られなかったことです ( $p$  値は .21 でした)。

一方で、2 要因分散分析における**セラピー**の主効果に着目すると、有意な効果 ( $p = .019$ ) が得られています。これら 2 つの分析は、明らかに同じではありません。

なぜこのようなことが起こるのでしょうか？ その答えは、残差の計算方法を理解することで明らかになります。F 検定の背後にある考え方は、特定の要因に起因する変動と、それらで説明できない

変動 (残差) の比較であったことを思い出してください。**セラピー**についての一要因分散分析を実行することは、すなわち、**薬**の効果を無視することになり、薬の要因に由来する変動を残差へと放り込んでしまうことになります！ これによって、データは実際以上に煩雑になり、2 要因分散分析においては正しく有意な効果が見出されている**セラピー**の要因が、有意ではなくなってしまう。

何かの影響を評価しようとするとき、他の重要な何か (e.g., **薬**の要因) を無視してしまうと、分析が歪んでしまいます。もちろん、関心のある現象とはまったく関係のない変数は、無視してしまっても問題ありません。実験室の壁の色を記録しておいて、3 要因分散分析の結果、その要因が重要でないことが判明した場合には、その無関係な要因を除外した、より単純な 2 要因分散分析の結果を報告するだけで十分です。重要なのは、実際には差を生じさせる要因を、分析から除外しないことです！

#### 1.1.6 この分析からどのような結果が得られるか？

ここまで説明してきた分散分析モデルは、我々がデータから発見する可能性のあるさまざまなパターンをカバーしています。例えば、2 要因分散分析デザインでは、4 通りの可能性があります：(a) 要因 A の効果のみがある場合、(b) 要因 B の効果のみがある場合、(c) 要因 A と要因 B の両方の効果がある場合、(d) どちらの要因の効果もない場合です。これら 4 つの可能性のそれぞれの例が、Figure ?? に示されています。

## 1.2

---

### 多元配置分散分析 2: 釣合型デザイン, 交互作用あり

Figure ?? に示されている 4 つのパターンは、いずれも現実的なものです。これらのパターンを生じさせるようなデータセットも非常にたくさん存在します。しかしながら、生じる結果のパターンはこれで全てではなく、また、ここまで説明してきた分散分析モデルは、あらゆるグループ平均のパターンを網羅しているわけではありません。何故でしょうか？ それは、これまでの説明では、薬が気分に影響を与える、セラピーが気分に影響を与える、ということについては議論できますが、両者の**交互作用**を扱うことができないからです。要因 A と要因 B の交互作用は、要因 A の効果が要因 B の水準に応じて異なる場合には、いつでも生じうると言われています。2×2 要因の分散分析における、いくつかの交互作用効果の例を Figure ?? に示します。より具体的な例を挙げると、アンザイフリーとジョイゼパムの作用機序が、全く異なる生理学的メカニズムに依存していると仮定します。ここから、ジョイゼパムがセラピーの有無に関わらず気分に対してほぼ同じ影響をもたらす一方で、アンザイフリーは CBT と組み合わせて投与された場合にはるかに効果的であると考えます。前の章で説明した分散分析では、このアイデアを検討できません。交互作用が生じているかどうかを確かめるには、グループ平均を図示することが有効です。JASP では、分散分析の「Descriptives Plots」オプションを用いて行うことができます-単に、**薬**を「Horizontal axis」のボックスに、**セラ**



(a)



(b)



(c)



(d)

Figure1.5 交互作用のない  $2 \times 2$  要因の分散分析における 4 つの出力。パネル (a) は要因 A の主効果があり，要因 B の主効果がない場合。パネル (b) は要因 A の主効果がなく，要因 B の主効果がある場合。パネル (c) は要因 A，要因 B のどちらの主効果もある場合。パネル (d) はどちらの要因の主効果もない場合。



ピーを「Separate Lines」のボックスに移動するだけです。Figure ??と同様の図になるはずです。特に注目すべき点は、2本の線が並行ではないということです。ジョイゼパムが投与された場合(中央)の CBT の効果(黒丸の線と白丸の線の差)はゼロに近く、プラセボが用いられた場合の CBT の効果(右側)よりもさらに小さいようです。しかしながら、アンザイフリーが投与されると、CBT の効果はプラセボよりも大きくなります(左側)。この効果は真実でしょうか、それともランダムな変動による単なる偶然なののでしょうか？前章までの分散分析では、この問いに答えることができません。なぜなら、交互作用が存在するというアイデアが含まれていないからです！本章では、この問題点を修正していきます。

### 1.2.1 相互作用とは正確にはどのようなものか？

この節では、交互作用効果という重要なアイデアを紹介します。ここまで見てきた分散分析モデルでは、モデルに含まれる2つの要因(i.e., 薬およびセラピー)にしか着目していませんでした。交互作用を投入することで、モデルに新たな要素が追加されることになります：薬とセラピーの組み合わせです。直観的には、交互作用効果の背後にある考え方は非常に単純です。交互作用は単に、要因Aの影響が、要因Bの水準に応じて変化することを意味しています。しかし、このことは我々のデータに対してどのような意味を持っているのでしょうか？Figure ??に示したいいくつかの図は、それぞれ全く見た目が異なりますが、すべて交互作用効果として扱われます。したがって、この定性的なアイデアを、統計学者が扱うような数学的な記述に変換することは非常に困難です。

結論として、交互作用効果の概念を、対立仮説と帰無仮説の観点から定式化することは困難であり、ましてやこの本の読者の多くは、それほど興味がないと思います。それでも、基本的なアイデアを示しておこうと思います。

まずは、主効果についてもう少し明示的にする必要があります。要因A(今回の分析例では薬)の主効果について考えます。そもそも主効果は、2つの周辺平均  $\mu_{r.}$  が全て等しいという帰無仮説の観点に基づいて定式化されていました。これらの周辺平均の全てが等しいとすると、それらは総平均  $\mu_{..}$  とも等しくなければなりませんね？したがって、ここでは水準  $r$  における要因Aの効果(を、周辺平均  $\mu_{r.}$  と総平均  $\mu_{..}$  との差に等しいものとして定義します。

この効果を  $\alpha_r$  で表し、以下のように表記します

$$\alpha_r = \mu_{r.} - \mu_{..}$$

ここで、周辺平均  $\mu_{r.}$  の平均値が総平均  $\mu_{..}$  になることと同様の理由で、定義上、すべての  $\alpha_r$  の値は合計がゼロになる必要があります。同じように、水準  $i$  における要因Bの効果(を、列方向の周

辺平均  $\mu_{.c}$  と総平均  $\mu_{..}$  の差として定義することができます。

$$\beta_c = \mu_{.c} - \mu_{..}$$

繰り返しになりますが，これらの  $\beta_c$  の合計はゼロにならなければなりません。統計学者が  $\alpha_r$  や  $\beta_c$  の値を用いて主効果について説明することを好む理由は，交互作用効果がないということの意味を正確に伝えることができるからです。交互作用がまったくない場合， $\alpha_r$  および  $\beta_c$  の値を用いて，グループ平均  $\mu_{rc}$  を完全に記述することができます。具体的には以下ようになります

$$\mu_{rc} = \mu_{..} + \alpha_r + \beta_c$$

これは，グループ平均に関して特別なことは何もない，すなわち，すべての周辺平均が明らかになっても，完全な予測ができないということを意味します。これはまさに，帰無仮説を表しています。対立仮説は，表中の少なくとも一つのグループ  $rc$  において

$$\mu_{rc} \neq \mu_{..} + \alpha_r + \beta_c$$

が成り立つこと，と表現できます。統計学者はしばしば，上記の式をやや異なる形式で表現します。彼らは通常，グループ  $rc$  に関連づけられた交互作用をいくつかの番号によって定義し，厄介なことに  $(\alpha\beta)_{rc}$  と表現し，そして対立仮説を次のように表ます

$$\mu_{rc} = \mu_{..} + \alpha_r + \beta_c + (\alpha\beta)_{rc}$$

ここで，少なくとも 1 つのグループの  $(\alpha\beta)_{rc}$  は非ゼロです。この表記法はやや見苦しいですが，次の節で説明するように，二乗和の計算方法を説明する際には便利です。

### 1.2.2 交互作用の二乗和の計算

交互作用項  $SS_{A:B}$  の二乗和はどのように計算すれば良いのでしょうか？ まず，先ほどの節において，実際のグループ平均が周辺平均から予測された値とどの程度異なるかという観点から，交互作用効果をどのように定義したかについて確認すると良いと思います。もちろん，これらの式はすべて，サンプル統計量ではなく母集団のパラメータに関するものであるため，実際にそれらがどのようなものであるかは分かりません。しかしながら，母平均の代わりにサンプル平均を用いることで，それらを推定することができます。要因 A に関して，水準  $r$  における主効果を推定するための良い方法は，サンプルの周辺平均  $\bar{Y}_{rc}$  とサンプルの総平均  $\bar{Y}_{..}$  の差に着目することです。そこで，これを効果の推定値として用います

$$\hat{\alpha}_r = \bar{Y}_{r.} - \bar{Y}_{..}$$



同様に、水準  $c$  における要因 B の主効果の推定値は、以下のように定義できます

$$\hat{\beta}_c = \bar{Y}_{.c} - \bar{Y}_{..}$$

ここで、2つの主効果の SS の値について説明した式を改めて見てみると、それらの効果に関する項は二乗され足し合わされているということに気づくでしょう！ それでは、交互作用項ではどうなっているのでしょうか？ その答えは、以下のように、対立仮説のもとでグループ平均  $\mu_{rc}$  に関する式を再変形することで明らかになります

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)_{rc} &= \mu_{rc} - \mu_{..} - \alpha_r - \beta_c \\&= \mu_{rc} - \mu_{..} - (\mu_{r.} - \mu_{..}) - (\mu_{.c} - \mu_{..}) \\&= \mu_{rc} - \mu_{r.} - \mu_{.c} + \mu_{..}\end{aligned}$$

そして、母平均の代わりにサンプル統計量を代入すると、グループ  $rc$  における交互作用効果の推定は以下のようになります

$$(\hat{\alpha}\hat{\beta})_{rc} = \bar{Y}_{rc} - \bar{Y}_{r.} - \bar{Y}_{.c} + \bar{Y}_{..}$$

ここで、これらの要因 A における  $R$  水準、および要因 B における  $C$  水準のすべての推定値を足し合わせることで、全体的な相互作用に関する二乗和の式が得られます

$$SS_{A:B} = N \sum_{r=1}^R \sum_{c=1}^C (\bar{Y}_{rc} - \bar{Y}_{r.} - \bar{Y}_{.c} + \bar{Y}_{..})^2$$

各グループについて  $N$  個の観測値があるため、 $N$  が掛けられています。SS の値には、グループ間の変動ではなく、交互作用によって説明される観測値間の変動が反映されていると期待されます。

$SS_{A:B}$  の計算式が準備できたので、交互作用項がモデルの一部であることを認識する必要があります（当然のことですが）。モデルにおける全体の平方和である  $SS_M$  は、関連する 3つの SS 値の合計  $SS_A + SS_B + SS_{A:B}$  に等しくなります。残差平方和  $SS_T - SS_M$  は、残りの変動、すなわち  $SS_T - SS_M$  として定義されますが、交互作用項があることから、以下のようになります

$$SS_R = SS_T - (SS_A + SS_B + SS_{A:B})$$

結果として、残差平方和  $SS_R$  は、交互作用を含まない分散分析よりも小さくなります。

### 1.2.3 交互作用における自由度

交互作用における自由度の計算は、主効果における計算よりも少しだけ複雑です。まずは、分散分析モデルの全体について考えてみましょう。モデルに交互作用効果が含まれる場合、すべてのグルー

プに、独自の平均  $\mu_{rc}$  を持つことが許されます。 $R \times C$  要因の分散分析の場合には、これはモデル中に  $R \times C$  通りの統計量と、総平均はすべてのグループ平均の平均値であるという、たった 1 つの制約があることを意味します。そのため、モデル全体としては  $(R \times C) - 1$  の自由度が必要です。しかし、要因 A の主効果には  $R - 1$  の自由度が、要因 B の主効果には  $C - 1$  の自由度があります。このことは、交互作用に関する自由度が、

$$\begin{aligned} df_{A:B} &= (R \times C - 1) - (R - 1) - (C - 1) \\ &= RC - R - C + 1 \\ &= (R - 1)(C - 1) \end{aligned}$$

という式で表されるように、行の要因と列の要因の自由度の積にすぎないということを意味します。残差の自由度についてはどうでしょうか？ 交互作用項によってある程度の自由度が吸収されるため、残りの自由度は少なくなります。具体的には、交互作用を含むモデルが全部で  $(R \times C) - 1$  の自由度を持ち、1 つの総平均を満たすよう制約されているデータセット内に  $N$  個の観測値があるとき、残差の自由度は  $N - (R \times C) - 1 + 1$ 、あるいは単に  $N - (R \times C)$  となる。

#### 1.2.4 JASP による分散分析の実行

JASP の分散分析モデルに交互作用項を加えることは難しくありません。というよりも、交互作用項は分散分析のデフォルトのオプションであるため、何もする必要はありません。すなわち、例えば **薬**と**セラピー**という 2 要因の分散分析を実行すると、これらの交互作用項- **drug\*therapy** -が自動的にモデルに追加されるということです。<sup>\*3</sup>交互作用項を含めた分散分析を実行すると、**??**のような結果が得られます。

結局、今回の分析では、有意な薬の主効果 ( $F_{2,12} = 31.7, p < .001$ ) とセラピーの主効果 ( $F_{1,12} = 8.6, p = .013$ ) が見出されますが、交互作用は有意ではありません ( $F_{2,12} = 2.5, p = 0.125$ )。

#### 1.2.5 結果の解釈

多元配置分散分析の結果の解釈の際には、いくつかの非常に重要なポイントがあります。まずは、仮に (例えば) **薬**の有意な主効果が得られたとしても、どの薬が他と異なるかについては何も分からないという、一元配置分散分析と同様の問題です。これを明らかにするためには、追加の分析を行う必要があります。Sections **??**および**??**において、この追加の分析のいくつかを紹介します。交互作用効果についても、同様のことがいえます。有意な交互作用がみられたとしても、どのようなパターンの交互作用が存在しているかについては何も分かりません。ここでも、追加の分析を行う必要が

---

<sup>\*3</sup>先ほどの節で説明した、主効果に関する分析を実際に JASP で再現してみた読者は、すでにこの出力を目にしているかもしれません。説明を単純にするため、先述のモデルからは交互作用項を除外しています

あります。

次に、有意な交互作用効果が得られているが、主効果が有意ではないという場合に、解釈が非常にややこしくなるという問題があります。このような結果はときどき生じます。例えば、Figure ??で示されている交差したパターンの交互作用が、実際の結果でも生じる可能性があります。このケースでは、主効果はいずれも有意ではありませんが、交互作用効果が存在します。これは解釈が難しい状況であり、多くの分析者を混乱させます。こうした状況に対して、統計学者が行いがちな一般的なアドバイスは、交互作用が存在する場合、主効果にはあまり注目すべきでないということです。彼らがこのように述べる理由は、主効果の検定は数学的観点から全く正しいものですが、有意な交互作用がみられる場合には、主効果が重要な仮説を検定していることは稀だからです。Section ??を思い出し、主効果の帰無仮説は周辺平均が相互に等しいというものであり、周辺平均はいくつかの異なるグループ間の値を平均することで計算されていました。交互作用が有意であるということは、周辺平均を構成するグループが同種ではないということが自明になるため、これらの周辺平均について気にする必要は無くなります。

つまり、こういうことです。改めて、臨床的な例を用いて説明しましょう。2×2 要因デザインで、2 種類の恐怖症の治療法 (e.g., 系統的脱感作法と暴露療法)、および 2 種類の不安軽減薬 (e.g., アンザイフリーとジョイゼパム) の比較を行うと考えてみましょう。そして、治療として脱感作法を行った場合、アンザイフリーには効果がなく、治療として暴露療法を行った場合、ジョイゼパムには効果がないという結果が見出されたと仮定します。いずれの薬も、もう一方の治療においては効果的であるとします。これは古典的な交差パターンの交互作用であり、分散分析を実行すると、薬の主効果はありませんが、有意な交互作用が見出されます。さて、主効果がないということは、一体何を意味するのでしょうか？ もちろん、2 つの異なる治療法を平均すると、アンザイフリーとジョイゼパムの平均的な効果は同じであるということです。しかし、なぜ誰もがこのことを気にかけるのでしょうか？ 恐怖症の治療において、暴露療法と脱感作法を「平均的に」使用することなどできません。これはあまり意味のない考え方です。暴露療法か脱感作法のどちらかを選ぶことになります。一方の治療法では一方の薬が効果的であり、もう一方の治療法ではもう一方の薬が効果的なのです。ここで重要なのは交互作用であり、主効果はある意味で無関係です。

このような事態はしばしば生じます。主効果は周辺平均の検定であり、交互作用が存在する場合には、周辺平均には注目する必要がなくなることがよくあります。なぜなら、周辺平均が、本来平均すべきではないものを平均化してしまっていることが、交互作用によって示されるからです！ もちろん、交互作用が存在するからといって、主効果が無意味であるとは限りません。多くの場合、大きな主効果と、非常に小さな交互作用が得られます。このとき、「薬 A は一般に薬 B よりも効果的である」(大きな薬の主効果があるため) と主張することができますが、次のような表現を加えて主張を微修正する必要があります。「A と B の薬の効果の差は、治療法によって異なった」。いずれにせよ、ここでの主要なポイントは、有意な交互作用が得られたときには、常に一度立ち止まって、その分析の文脈において、主効果が実際には何を意味しているのかを考えることです。主効果が重要であると

自動的に思い込んではいけません。

### 1.3

## 効果量

多元配置分散分析の効果量の計算は、一元配置分散分析で用いられるものとかかなり似ています (Section ??を参照)。具体的には、特定の項に対する全体的な効果がどれほど大きいかを測る簡単な方法として、 $\eta^2$  を利用できます。前回同様、 $\eta^2$  はその項に関連づけられた平方和を、総平方和で割ることで定義されます。例えば、要因 A の主効果の効果量を求めるには、以下の式が用いられます：

$$\eta_A^2 = \frac{SS_A}{SS_T}$$

この値が、回帰分析における  $R^2$  とほぼ同様に解釈できるという点も、前回と同じです。<sup>\*4</sup> この値は、要因 A の主効果によって説明することができる結果変数の分散の割合を表しています。したがって、この値は 0(影響なし) から 1(結果変数の変動の全て) の範囲を取ります。さらに、モデル内の全ての項から得られる全ての  $\eta^2$  値の合計は、分散分析モデルの合計の  $R^2$  と等しくなります。例えば、分散分析モデルが完全に適合している場合 (i.e., グループ内の変動が全くない場合!),  $\eta^2$  値は 1 になります。もちろん、このような事態が実生活で生じることは滅多にありません。

ただし、多元配置分散分析を行う際には、偏  $\eta^2$  という 2 つ目の効果量の指標が好んで報告されます。偏  $\eta^2$  ( $\rho\eta^2$  もしくは  $\eta_p^2$  と表記される場合もあります) の背後にある考え方は、特定の項についての効果量 (例えば、要因 A の主効果) を求める場合に、モデル内の他の効果 (e.g., 要因 B の主効果) を意図的に無視するというものです。すなわち、これらの他の全ての項の効果がゼロであると仮定して、 $\eta^2$  値がどうなるかを計算するということです。これは実際には非常に計算が簡単です。分母から他の項に関する平方和を削除すればよいのです。つまり、要因 A の主効果についての偏  $\eta^2$  を求める際には、分母は要因 A の SS 値と残差の合計になります。

$$\text{partial } \eta_A^2 = \frac{SS_A}{SS_A + SS_R}$$

この結果は常に  $\eta^2$  よりも大きな数値となります。私は皮肉屋なので、これが偏  $\eta^2$  の人気の理由だと考えています。偏  $\eta^2$  値もまた 0 から 1 の範囲となり、0 は効果がないことを表します。ただし、偏  $\eta^2$  値の大きさについての解釈は少々ややこしくなります。特に、各項の偏  $\eta^2$  値を直接比較することができない点には注意が必要です！ たとえば、グループ内の変動性が全くないとすると、 $SS_R = 0$  となります。このことが意味するのは、すべての項の偏  $\eta^2$  値が 1 になるということです。しかしな

---

<sup>\*4</sup>この章は、文字 R で様々なものを表現することに関して、新記録を打ち立てているかもしれません。これまでのところ、ソフトウェアパッケージ、平均値の表における行の数、モデルの残差、そして回帰における相関係数を指して、R という文字を使っています。大変申し訳ないと思っています。アルファベットの文字数が十分ではないことは明らかです。我々も、R がそれぞれの文脈において指示しているものを明確にするために、かなりの努力を要しているということを申し添えます

がら、これはモデル内のすべての項が等しく重要である、あるいは、それらの大きさが等しいということではありません。これは、モデル内のすべての項のが、残差の変動と比べて大きな効果量を持つことを意味します。各項について比較することはできません。

このことは、具体例を見てみると分かりやすいでしょう。まず、Figure ??において、交互作用項を含まない分散分析の効果量について見てみましょう：

	eta.sq	partial.eta.sq
%drug	0.71	0.79
薬	0.71	0.79
%therapy	0.10	0.34
セラピー	0.10	0.34

$\eta^2$  の値に着目すると、**薬**の要因が**気分の向上**の分散の 71%(i.e.  $\eta^2 = 0.71$ ) を占めているのに対し、**セラピー**は 10% です。これにより、合計で 19% の変動が考慮されないままとなります (つまり、結果の変動の 19% が残差で構成されます)。全体的に見て、この結果は**薬**には非常に大きな効果<sup>\*5</sup>があり、**セラピー**にはわずかな効果があったことを意味します。次に、Figure ??に示されている偏  $\eta^2$  値を見てみましょう。

**セラピー**の効果はそれほど大きくないため、それを調整しても大きな違いはありません。したがって、**薬**の偏  $\eta^2$  は、 $\rho\eta^2 = 0.79$  とそれほど増加しません。対照的に、**薬**の効果は非常に大きかったため、調整することで大きな違いが生じます。**セラピー**の偏  $\eta^2$  を計算すると、 $\rho\eta^2 = 0.34$  まで上昇していることが分かります。自問しなければならないのは、これらの偏  $\eta^2$  の値が実際に何を意味するのか？ということです。要因 A の主効果に対する偏  $\eta^2$  を解釈する一般的な方法は、それを要因 A のみを变化させた仮想実験の記述として解釈することです。実際の実験では要因 A と B の両方を変化させましたが、要因 A のみを变化させた実験についても簡単に想像することができます。偏  $\eta^2$  統計量は、そのような実験で得られることが予想される、結果変数の分散の量を表します。ただし、このような解釈は、その他の主効果に関する多くの事項と同様に、有意な交互作用効果が存在する場合には、あまり意味がないということに注意が必要です。

交互作用効果といえば、Figure ??のように、交互作用項を含むモデルの効果量を計算したときに得られるものです。JASP では、単に 'Additional Options' - 'Estimates of effect size' を選択し、必要な変数を選ぶことで計算されます。見ての通り、主効果の  $\eta^2$  値は変化しませんが、偏  $\eta^2$  値は変化します：

	eta.sq	partial.eta.sq
%drug	0.71	0.84
薬	0.71	0.84

<sup>\*5</sup>信じられないほどの大きさです。このデータの不自然さが見えてきましたね！

%therapy	0.10	0.42
セラピー	0.10	0.42
%drug*therapy	0.06	0.29
薬*セラピー		

### 1.3.1 推定グループ平均

多くの場合、分散分析の結果と、それに関連する信頼区間に基づいて、すべてのグループ平均の推定値を報告する必要があります。JASP では、Figure ??にあるように、分散分析の 'Additional Options' - 'Marginal Means' の機能を用いてこれを行うことができます。交互作用項薬\*セラピーを、アクションボックスに移動するだけです。実行した分散分析が飽和モデル (i.e., 考えられるすべての主効果と交互作用効果を含むモデル) である場合、グループ平均の推定値はサンプル平均とまったく同じになります。重要なのは、信頼区間は、グループごとの個別の標準誤差を使用するのではなく、プールされた標準誤差の推定値を用いるということです。

結果を見ると、セラピーを行わなかったプラセボ群における気分向上の推定平均は 0.300 であり、95% 信頼区間は 0.006 から 0.594 でした。各グループについて信頼区間を計算しても、同じ値にはならないということに注意してください。これは、分散分析モデルが分散の均一性を仮定しているので、プールされた標準偏差の推定値を使用するためです。

## 1.4

### 仮定の確認

一元配置分散分析と同様に、多元配置分散分析においても、分散の等質性 (すべての群の標準偏差が等しい)、残差の正規性、観測の独立性の 3 つが主要な仮定となります。前の 2 つの仮定については、確認することができます。3 つ目の仮定については、測定値間に何らかの特別な関係性が存在するかどうか、自分自身で評価しなければなりません。例えば、時間を独立変数とする反復測定では、時点 1 と時点 2 の観測変数は同じ人物から測定されているため、関係があります。加えて、飽和モデルを使用していない場合 (例えば、交互作用項を省略している場合) には、省略されている項は重要ではないという仮定を置いていることになります。この最後の仮定については、省略された項を含めた分散分析を実行し、それらが有意であるかどうかを確認できるため、チェックすることは比較的容易です。分散の等質性と残差の正規性についてはどうでしょうか？ 結論からいうと、これらをチェックするのはとても簡単です。一元配置分散分析で行ったチェックの方法となんら変わりません。



#### 1.4.1 分散の等質性

Section ?? で述べたように、異なる群やカテゴリ間で標準偏差のプロットを視覚的に比較し、Levene の検定の結果と一致するかどうかを確認するのは良いアイデアです。Levene の検定の理論については、Section ?? で説明したのでここでは触れません。この検定では、モデルが飽和モデル (i.e., すべての項を含む) であることが期待されています。なぜなら、この検定は主に群内の分散に関係しており、飽和モデル以外について適用しても、実際のところあまり意味がないからです。Levene の検定は、JASP の 'Assumption Checks' - 'Homogeneity tests' オプションで指定でき、その結果は Figure ?? のようになります。Levene の検定が有意でないということは、標準偏差のプロットの目視による確認との矛盾がなければ、分散の等質性の仮定には違反していないと考えて良いことになります。

#### 1.4.2 残差の正規性

一元配置分散分析と同様に、残差の正規性を簡単な方法で検定できます (Section ?? を参照)。しかし、一般的には、QQ プロットを用いて残差を視覚的に調べるのが良いと思います。Figure ?? を見てください。

### 1.5 --- Analysis of Covariance (ANCOVA)

A variation in ANOVA is when you have an additional continuous variable that you think might be related to the dependent variable. This additional variable can be added to the analysis as a covariate, in the aptly named analysis of covariance (ANCOVA).

In ANCOVA the values of the dependent variable are “adjusted” for the influence of the covariate, and then the “adjusted” score means are tested between groups in the usual way. This technique can increase the precision of an experiment, and therefore provide a more “powerful” test of the equality of group means in the dependent variable. How does ANCOVA do this? Well, although the covariate itself is typically not of any experimental interest, adjustment for the covariate can decrease the estimate of experimental error and thus, by reducing error variance, precision is increased. This means that an inappropriate failure to reject the null hypothesis (false negative or type II error) is less likely.

Despite this advantage, ANCOVA runs the risk of undoing real differences between groups,

and this should be avoided. Look at Figure ??, for example, which shows a plot of Statistics anxiety against age and shows two distinct groups – students who have either an Arts or Science background or preference. ANCOVA with age as a covariate might lead to the conclusion that statistics anxiety does not differ in the two groups. Would this conclusion be reasonable – probably not because the ages of the two groups do not overlap and analysis of variance has essentially “extrapolated into a region with no data” (Everitt1996).

Clearly, careful thought needs to be given to an analysis of covariance with distinct groups. This applies to both one-way and factorial designs, as ANCOVA can be used with both.

### 1.5.1 Running ANCOVA in JASP

A health psychologist was interested in the effect of routine cycling and stress on happiness levels, with age as a covariate. You can find the dataset in the file `ancova.csv`. Open this file in JASP and then, to undertake an ANCOVA, select ‘ANOVA’ - ‘ANCOVA’ to open the ANCOVA analysis window (Figure ??). Highlight the dependent variable ‘happiness’ and transfer it into the ‘Dependent Variable’ text box. Highlight the independent variables ‘stress’ and ‘commute’ and transfer them into the ‘Fixed Factors’ text box. Highlight the covariate ‘age’ and transfer it into the ‘Covariates’ text box. Then click on ‘Additional Options’ - ‘Marginal Means’ and transfer the interaction term `stress*commute` into the action box.

An ANCOVA table is produced in the JASP results window (Figure ??). The F value for the covariate ‘age’ is significant at  $p = .023$ , suggesting that age is an important predictor of the dependent variable `happiness`. When we look at the estimated marginal mean scores, adjustments have been made (compared to an analysis without the covariate) because of the inclusion of the covariate ‘age’ in this ANCOVA. A plot (Figure ??) is a good way of visualising and interpreting the significant effects.

The F value for the main effect ‘stress’ (52.61) has an associated probability of  $p < .001$ . The F value for the main effect ‘commute’ (42.33) has an associated probability of  $p < .001$ . Since both of these are less than the probability that is typically used to decide if a statistical result is significant ( $p < .05$ ) we can conclude that there was a significant main effect of stress ( $F(1, 15) = 52.61, p < .001$ ) and a significant main effect of commuting method ( $F(1, 15) = 42.33, p < .001$ ). A significant interaction between stress and commuting method was also found ( $F(1, 15) = 14.15, p = .002$ ).

In Figure ?? we can see the adjusted, marginal, mean happiness scores when age is a covariate in an ANCOVA. In this analysis there is a significant interaction effect, whereby people with low



stress who cycle to work are happier than people with low stress who drive and people with high stress whether they cycle or drive to work. There is also a significant main effect of stress – people with low stress are happier than those with high stress. And there is also a significant main effect of commuting behaviour – people who cycle are happier, on average, than those who drive to work.

## 1.6

---

### ANOVA as a linear model

One of the most important things to understand about ANOVA and regression is that they're basically the same thing. On the surface of it, you maybe wouldn't think this is true. After all, the way that I've described them so far suggests that ANOVA is primarily concerned with testing for group differences, and regression is primarily concerned with understanding the correlations between variables. And, as far as it goes that's perfectly true. But when you look under the hood, so to speak, the underlying mechanics of ANOVA and regression are awfully similar. In fact, if you think about it, you've already seen evidence of this. ANOVA and regression both rely heavily on sums of squares (SS), both make use of  $F$  tests, and so on. Looking back, it's hard to escape the feeling that Chapters ?? and ?? were a bit repetitive.

The reason for this is that ANOVA and regression are both kinds of **linear models**. In the case of regression, this is kind of obvious. The regression equation that we use to define the relationship between predictors and outcomes *is* the equation for a straight line, so it's quite obviously a linear model, with the equation

$$Y_p = b_0 + b_1X_{1p} + b_2X_{2p} + \varepsilon_p$$

where  $Y_p$  is the outcome value for the  $p$ -th observation (e.g.,  $p$ -th person),  $X_{1p}$  is the value of the first predictor for the  $p$ -th observation,  $X_{2p}$  is the value of the second predictor for the  $p$ -th observation, the  $b_0$ ,  $b_1$ , and  $b_2$  terms are our regression coefficients, and  $\varepsilon_p$  is the  $p$ -th residual. If we ignore the residuals  $\varepsilon_p$  and just focus on the regression line itself, we get the following formula:

$$\hat{Y}_p = b_0 + b_1X_{1p} + b_2X_{2p}$$

where  $\hat{Y}_p$  is the value of  $Y$  that the regression line predicts for person  $p$ , as opposed to the actually-observed value  $Y_p$ . The thing that isn't immediately obvious is that we can write ANOVA as a linear model as well. However, it's actually pretty straightforward to do this. Let's start with a really simple example, rewriting a  $2 \times 2$  factorial ANOVA as a linear model.

### 1.6.1 Some data

To make things concrete, let's suppose that our outcome variable is the `grade` that a student receives in my class, a ratio-scale variable corresponding to a mark from 0% to 100%. There are two predictor variables of interest: whether or not the student turned up to lectures (the `attend` variable) and whether or not the student actually read the textbook (the `reading` variable). We'll say that `attend = 1` if the student attended class, and `attend = 0` if they did not. Similarly, we'll say that `reading = 1` if the student read the textbook, and `reading = 0` if they did not.

Okay, so far that's simple enough. The next thing we need to do is to wrap some maths around this (sorry!). For the purposes of this example, let  $Y_p$  denote the `grade` of the  $p$ -th student in the class. This is not quite the same notation that we used earlier in this chapter. Previously, we've used the notation  $Y_{rci}$  to refer to the  $i$ -th person in the  $r$ -th group for predictor 1 (the row factor) and the  $c$ -th group for predictor 2 (the column factor). This extended notation was really handy for describing how the SS values are calculated, but it's a pain in the current context, so I'll switch notation here. Now, the  $Y_p$  notation is visually simpler than  $Y_{rci}$ , but it has the shortcoming that it doesn't actually keep track of the group memberships! That is, if I told you that  $Y_{0,0,3} = 35$ , you'd immediately know that we're talking about a student (the 3rd such student, in fact) who didn't attend the lectures (i.e., `attend = 0`) and didn't read the textbook (i.e. `reading = 0`), and who ended up failing the class (`grade = 35`). But if I tell you that  $Y_p = 35$ , all you know is that the  $p$ -th student didn't get a good grade. We've lost some key information here. Of course, it doesn't take a lot of thought to figure out how to fix this. What we'll do instead is introduce two new variables  $X_{1p}$  and  $X_{2p}$  that keep track of this information. In the case of our hypothetical student, we know that  $X_{1p} = 0$  (i.e., `attend = 0`) and  $X_{2p} = 0$  (i.e., `reading = 0`). So the data might look like this:

person, $p$	grade, $Y_p$	attendance, $X_{1p}$	reading, $X_{2p}$
1	90	1	1
2	87	1	1
3	75	0	1
4	60	1	0
5	35	0	0
6	50	0	0
7	65	1	0
8	70	0	1

This isn't anything particularly special, of course. It's exactly the format in which we expect to

see our data! See the data file `rtfm.csv`.

### 1.6.2 ANOVA with binary factors as a regression model

Okay, let's get back to talking about the mathematics. We now have our data expressed in terms of three numeric variables: the continuous variable  $Y$  and the two binary variables  $X_1$  and  $X_2$ . What I want you to recognise is that our  $2 \times 2$  factorial ANOVA is *exactly* equivalent to the regression model

$$Y_p = b_0 + b_1X_{1p} + b_2X_{2p} + \varepsilon_p$$

This is, of course, the exact same equation that I used earlier to describe a two-predictor regression model! The only difference is that  $X_1$  and  $X_2$  are now *binary* variables (i.e., values can only be 0 or 1), whereas in a regression analysis we expect that  $X_1$  and  $X_2$  will be continuous. There's a couple of ways I could try to convince you of this. One possibility would be to do a lengthy mathematical exercise proving that the two are identical. However, I'm going to go out on a limb and guess that most of the readership of this book will find that annoying rather than helpful. Instead, I'll explain the basic ideas and then rely on JASP to show that ANOVA analyses and regression analyses aren't just similar, they're identical for all intents and purposes. Let's start by running this as an ANOVA. To do this, we'll use the `rtfm` data set, and Figure ?? shows what we get when we run the analysis in JASP.

So, by reading the key numbers off the ANOVA table and the mean scores that we presented earlier, we can see that the students obtained a higher grade if they attended class ( $F_{1,5} = 21.6, p = .006$ ) and if they read the textbook ( $F_{1,5} = 52.3, p < 0.001$ ). Let's make a note of those  $p$ -values and those  $F$  statistics.

Now let's think about the same analysis from a linear regression perspective. In the `rtfm` data set, we have encoded `attend` and `reading` as if they were numeric predictors. In this case, this is perfectly acceptable. There really is a sense in which a student who turns up to class (i.e. `attend = 1`) has in fact done "more attendance" than a student who does not (i.e. `attend = 0`). So it's not at all unreasonable to include it as a predictor in a regression model. It's a little unusual, because the predictor only takes on two possible values, but it doesn't violate any of the assumptions of linear regression. And it's easy to interpret. If the regression coefficient for `attend` is greater than 0 it means that students that attend lectures get higher grades. If it's less than zero then students attending lectures get lower grades. The same is true for our `reading` variable.

Wait a second though. *Why* is this true? It's something that is intuitively obvious to everyone who has taken a few stats classes and is comfortable with the maths, but it *isn't* clear to everyone

else at first pass. To see why this is true, it helps to look closely at a few specific students. Let's start by considering the 6th and 7th students in our data set (i.e.  $p = 6$  and  $p = 7$ ). Neither one has read the textbook, so in both cases we can set `reading = 0`. Or, to say the same thing in our mathematical notation, we observe  $X_{2,6} = 0$  and  $X_{2,7} = 0$ . However, student number 7 did turn up to lectures (i.e., `attend = 1`,  $X_{1,7} = 1$ ) whereas student number 6 did not (i.e., `attend = 0`,  $X_{1,6} = 0$ ). Now let's look at what happens when we insert these numbers into the general formula for our regression line. For student number 6, the regression predicts that

$$\begin{aligned}\hat{Y}_6 &= b_0 + b_1X_{1,6} + b_2X_{2,6} \\ &= b_0 + (b_1 \times 0) + (b_2 \times 0) \\ &= b_0\end{aligned}$$

So we're expecting that this student will obtain a grade corresponding to the value of the intercept term  $b_0$ . What about student 7? This time when we insert the numbers into the formula for the regression line, we obtain the following

$$\begin{aligned}\hat{Y}_7 &= b_0 + b_1X_{1,7} + b_2X_{2,7} \\ &= b_0 + (b_1 \times 1) + (b_2 \times 0) \\ &= b_0 + b_1\end{aligned}$$

Because this student attended class, the predicted grade is equal to the intercept term  $b_0$  *plus* the coefficient associated with the `attend` variable,  $b_1$ . So, if  $b_1$  is greater than zero, we're expecting that the students who turn up to lectures will get higher grades than those students who don't. If this coefficient is negative we're expecting the opposite: students who turn up at class end up performing much worse. In fact, we can push this a little bit further. What about student number 1, who turned up to class ( $X_{1,1} = 1$ ) *and* read the textbook ( $X_{2,1} = 1$ )? If we plug these numbers into the regression we get

$$\begin{aligned}\hat{Y}_1 &= b_0 + b_1X_{1,1} + b_2X_{2,1} \\ &= b_0 + (b_1 \times 1) + (b_2 \times 1) \\ &= b_0 + b_1 + b_2\end{aligned}$$

So if we assume that attending class helps you get a good grade (i.e.,  $b_1 > 0$ ) and if we assume that reading the textbook also helps you get a good grade (i.e.,  $b_2 > 0$ ), then our expectation is that student 1 will get a grade that is higher than student 6 and student 7.

And at this point you won't be at all surprised to learn that the regression model predicts that student 3, who read the book but didn't attend lectures, will obtain a grade of  $b_2 + b_0$ . I won't bore you with yet another regression formula. Instead, what I'll do is show you the following table of *expected grades*:

		read textbook?	
		no	yes
attended?	no	$b_0$	$b_0 + b_2$
	yes	$b_0 + b_1$	$b_0 + b_1 + b_2$

As you can see, the intercept term  $b_0$  acts like a kind of “baseline” grade that you would expect from those students who don’t take the time to attend class or read the textbook. Similarly,  $b_1$  represents the boost that you’re expected to get if you come to class, and  $b_2$  represents the boost that comes from reading the textbook. In fact, if this were an ANOVA you might very well want to characterise  $b_1$  as the main effect of attendance, and  $b_2$  as the main effect of reading! In fact, for a simple  $2 \times 2$  ANOVA that’s *exactly* how it plays out.

Okay, now that we’re really starting to see why ANOVA and regression are basically the same thing, let’s actually run our regression using the `rtfm` data and the JASP regression analysis to convince ourselves that this is really true. Running the regression in the usual way gives the results shown in Figure ??.

There’s a few interesting things to note here. First, notice that the intercept term is 43.5 which is close to the “group” mean of 42.5 observed for those two students who didn’t read the text or attend class. Second, notice that we have the regression coefficient of  $b_1 = 18.0$  for the attendance variable, suggesting that those students that attended class scored 18 points higher than those who didn’t. So our expectation would be that those students who turned up to class but didn’t read the textbook would obtain a grade of  $b_0 + b_1$ , which is equal to  $43.5 + 18.0 = 61.5$ . You can verify for yourself that the same thing happens when we look at the students that read the textbook.

Actually, we can push a little further in establishing the equivalence of our ANOVA and our regression. Look at the  $p$ -values associated with the `attend` variable and the `reading` variable in the regression output. They’re identical to the ones we encountered earlier when running the ANOVA. This might seem a little surprising, since the test used when running our regression model calculates a  $t$ -statistic and the ANOVA calculates an  $F$ -statistic. However, if you can remember all the way back to Chapter ??, I mentioned that there’s a relationship between the  $t$ -distribution and the  $F$ -distribution. If you have some quantity that is distributed according to a  $t$ -distribution with  $k$  degrees of freedom and you square it, then this new squared quantity follows an  $F$ -distribution whose degrees of freedom are 1 and  $k$ . We can check this with respect to the  $t$  statistics in our regression model. For the `attend` variable we get a  $t$  value of 4.65. If we square this number we end up with 21.6, which matches the corresponding  $F$  statistic in our ANOVA.

### 1.6.3 Using contrasts to encode non binary factors

At this point, I've shown you how we can view a  $2 \times 2$  ANOVA into a linear model. And it's pretty easy to see how this generalises to a  $2 \times 2 \times 2$  ANOVA or a  $2 \times 2 \times 2 \times 2$  ANOVA. It's the same thing, really. You just add a new binary variable for each of your factors. Where it begins to get trickier is when we consider factors that have more than two levels. Consider, for instance, the  $3 \times 2$  ANOVA that we ran earlier in this chapter using the `clinicaltrial.csv` data. How can we convert the three-level `drug` factor into a numerical form that is appropriate for a regression?

The answer to this question is pretty simple, actually. All we have to do is realise that a three-level factor can be redescribed as *two* binary variables. Suppose, for instance, I were to create a new binary variable called `druganxifree`. Whenever the `drug` variable is equal to "anxifree" we set `druganxifree = 1`. Otherwise, we set `druganxifree = 0`. This variable sets up a **contrast**, in this case between anxifree and the other two drugs. By itself, of course, the `druganxifree` contrast isn't enough to fully capture all of the information in our `drug` variable. We need a second contrast, one that allows us to distinguish between joyzepam and the placebo. To do this, we can create a second binary contrast, called `drugjoyzepam`, which equals 1 if the drug is joyzepam and 0 if it is not. Taken together, these two contrasts allows us to perfectly discriminate between all three possible drugs. The table below illustrates this:

drug	druganxifree	drugjoyzepam
"placebo"	0	0
"anxifree"	1	0
"joyzepam"	0	1

If the drug administered to a patient is a placebo then both of the two contrast variables will equal 0. If the drug is Anxifree then the `druganxifree` variable will equal 1, and `drugjoyzepam` will be 0. The reverse is true for Joyzepam: `drugjoyzepam` is 1 and `druganxifree` is 0.

Creating contrast variables is not too difficult to do using JASP's 'Computed Column' functionality. For example, to create the `druganxifree` variable, you can use some simple R code to create the binary variable in the formula box: `ifelse(drug == 'anxifree', 1, 0)`. Similarly, to create the new variable `drugjoyzepam` use this code: `ifelse(drug == 'joyzepam', 1, 0)`. Likewise for `therapyCBT`: `ifelse(therapy == 'CBT', 1, 0)`. You can see these new variables in the JASP data file `clinicaltrial2.jasp`. As before, if you click on the " $f_x$ " symbol, you will also be able to see the associated R code.

We have now recoded our three-level factor in terms of two binary variables, and we've already seen that ANOVA and regression behave the same way for binary variables. However, there are

some additional complexities that arise in this case, which we'll discuss in the next section.

#### 1.6.4 The equivalence between ANOVA and regression for non-binary factors

Now we have two different versions of the same data set. Our original data in which the `drug` variable from the `clinicaltrial.csv` file is expressed as a single three-level factor, and the expanded data `clinicaltrial2.csv` in which it is expanded into two binary contrasts. Once again, the thing that we want to demonstrate is that our original  $3 \times 2$  factorial ANOVA is equivalent to a regression model applied to the contrast variables. Let's start by re-running the ANOVA, with results shown in Figure ???. Let's remove the interaction component; remember to go to 'Model' and move the `drug*therapy` term out of the 'Model Terms' box.

Obviously, there are no surprises here. That's the exact same ANOVA that we ran earlier. Next, let's run a regression using `druganxifree`, `drugjoyzepam` and `CBTtherapy` as the predictors. The results are shown in Figure ???.

Hmm. This will look quite different than what we got last time. Not surprisingly, the regression output prints out the results for each of the three predictors separately, just like it did every other time we conducted a regression analysis. On the one hand we can see that the  $p$ -value for the `CBTtherapy` variable is exactly the same as the one for the `therapy` factor in our original ANOVA, so we can be reassured that the regression model is doing the same thing as the ANOVA did. On the other hand, this regression model is testing the `druganxifree` contrast and the `drugjoyzepam` contrast *separately*, as if they were two completely unrelated variables. It's not surprising of course, because the poor regression analysis has no way of knowing that `drugjoyzepam` and `druganxifree` are actually the two different contrasts that we used to encode our three-level `drug` factor. As far as it knows, `drugjoyzepam` and `druganxifree` are no more related to one another than `drugjoyzepam` and `therapyCBT`. However, you and I know better. At this stage we're not at all interested in determining whether these two contrasts are individually significant. We just want to know if there's an "overall" effect of drug. That is, what we want JASP to do is to run some kind of "model comparison" test, one in which the two "drug-related" contrasts are lumped together for the purpose of the test. Sound familiar? All we need to do is specify a "null model", which in this case would include the `CBTtherapy` predictor, and omit both of the drug-related variables, as in Figure ???. To do this, click the 'Model' button and check 'Add to null model' for both of the drug terms. You can then assess whether to include `drug` as a predictor in the model by computing AIC

for both models (see Section ??). Remember, smaller is better!

## 1.7

---

### Different ways to specify contrasts

In the previous section, I showed you a method for converting a factor into a collection of contrasts. In the method I showed you we specify a set of binary variables in which we defined a table like this one:

drug	druganxifree	drugjoyzepam
"placebo"	0	0
"anxifree"	1	0
"joyzepam"	0	1

Each row in the table corresponds to one of the factor levels, and each column corresponds to one of the contrasts. This table, which always has one more row than columns, has a special name. It is called a **contrast matrix**. However, there are lots of different ways to specify a contrast matrix. In this section I discuss a few of the standard contrast matrices that statisticians use and how you can use them in JASP. If you're planning to read the section on unbalanced ANOVA later on (Section ??), it's worth reading this section carefully. If not, you can get away with skimming it, because the choice of contrasts doesn't matter much for balanced designs.

#### 1.7.1 Treatment contrasts

In the particular kind of contrasts that I've described above, one level of the factor is special, and acts as a kind of "baseline" category (i.e., **placebo** in our example), against which the other two are defined. The name for these kinds of contrasts is **treatment contrasts**, also known as "dummy coding". In this contrast each level of the factor is compared to a base reference level, and the base reference level is the value of the intercept.

The name reflects the fact that these contrasts are quite natural and sensible when one of the categories in your factor really is special because it actually does represent a baseline. That makes sense in our clinical trial example. The **placebo** condition corresponds to the situation where you don't give people any real drugs, and so it's special. The other two conditions are defined in relation to the placebo. In one case you replace the placebo with Anxifree, and in the other case you replace it with Joyzepam.



The table shown above is a matrix of treatment contrasts for a factor that has 3 levels. But suppose I want a matrix of treatment contrasts for a factor with 5 levels? You would set this out like this:

Level	2	3	4	5
1	0	0	0	0
2	1	0	0	0
3	0	1	0	0
4	0	0	1	0
5	0	0	0	1

In this example, the first contrast is level 2 compared with level 1, the second contrast is level 3 compared with level 1, and so on. Notice that, by default, the *first* level of the factor is always treated as the baseline category (i.e., it's the one that has all zeros and doesn't have an explicit contrast associated with it). In JASP you can change which category is the first level of the factor by manipulating the order of the levels of the variable shown in the 'Data Variable' window (double click on the name of the variable in the spreadsheet column to bring up the 'Data Variable' view).

### 1.7.2 Helmert contrasts

Treatment contrasts are useful for a lot of situations. However, they make most sense in the situation when there really is a baseline category, and you want to assess all the other groups in relation to that one. In other situations, however, no such baseline category exists, and it may make more sense to compare each group to the mean of the other groups. This is where we meet **Helmert contrasts**, generated by the 'helmert' option in the JASP 'ANOVA' - 'Contrasts' selection box. The idea behind Helmert contrasts is to compare each group to the mean of the "previous" ones. That is, the first contrast represents the difference between group 2 and group 1, the second contrast represents the difference between group 3 and the mean of groups 1 and 2, and so on. This translates to a contrast matrix that looks like this for a factor with five levels:

1	-1	-1	-1	-1
2	1	-1	-1	-1
3	0	2	-1	-1
4	0	0	3	-1
5	0	0	0	4

One useful thing about Helmert contrasts is that every contrast sums to zero (i.e., all the columns sum to zero). This has the consequence that, when we interpret the ANOVA as a regression, the intercept term corresponds to the grand mean  $\mu_{..}$  if we are using Helmert contrasts. Compare

this to treatment contrasts, in which the intercept term corresponds to the group mean for the baseline category. This property can be very useful in some situations. It doesn't matter very much if you have a balanced design, which we've been assuming so far, but it will turn out to be important later when we consider unbalanced designs in Section ???. In fact, the main reason why I've even bothered to include this section is that contrasts become important if you want to understand unbalanced ANOVA.

### 1.7.3 Sum to zero contrasts

The third option that I should briefly mention are "sum to zero" contrasts, called "Simple" contrasts in JASP, which are used to construct pairwise comparisons between groups. Specifically, each contrast encodes the difference between one of the groups and a baseline category, which in this case corresponds to the first group:

1	-1	-1	-1	-1
2	1	0	0	0
3	0	1	0	0
4	0	0	1	0
5	0	0	0	1

Much like Helmert contrasts, we see that each column sums to zero, which means that the intercept term corresponds to the grand mean when ANOVA is treated as a regression model. When interpreting these contrasts, the thing to recognise is that each of these contrasts is a pairwise comparison between group 1 and one of the other four groups. Specifically, contrast 1 corresponds to a "group 2 minus group 1" comparison, contrast 2 corresponds to a "group 3 minus group 1" comparison, and so on.<sup>\*6</sup>

### 1.7.4 Optional contrasts in JASP

JASP also comes with a variety of options that can generate different kinds of contrasts in ANOVA. These can be found in the 'Contrasts' option in the main ANOVA analysis window, where the following contrast types are listed:

---

<sup>\*6</sup>What's the difference between treatment and simple contrasts, I hear you ask? Well, as a basic example consider a gender main effect, with  $m=0$  and  $f=1$ . The coefficient corresponding to the treatment contrast will measure the difference in mean between females and males, and the intercept would be the mean of the males. However, with a simple contrast, i.e.,  $m=-1$  and  $f=1$ , the intercept is the average of the means and the main effect is the difference of each group mean from the intercept.

Contrast type	
Deviation	Compares the mean of each level (except a reference category) to the mean of all of the levels (grand mean)
Simple	Like the treatment contrasts, the simple contrast compares the mean of each level to the mean of a specified level. This type of contrast is useful when there is a control group. By default the first category is the reference. However, with a simple contrast the intercept is the grand mean of all the levels of the factors.
Difference	Compares the mean of each level (except the first) to the mean of previous levels. (Sometimes called reverse Helmert contrasts)
Helmert	Compares the mean of each level of the factor (except the last) to the mean of subsequent levels
Repeated	Compares the mean of each level (except the last) to the mean of the subsequent level
Polynomial	Compares the linear effect and quadratic effect. The first degree of freedom contains the linear effect across all categories; the second degree of freedom, the quadratic effect. These contrasts are often used to estimate polynomial trends

## 1.8

### Post hoc tests

Time to switch to a different topic. Rather than pre-planned comparisons that you have tested using contrasts, let's suppose you've done your ANOVA and it turns out that you obtained some significant effects. Because of the fact that the  $F$ -tests are "omnibus" tests that only really

test the null hypothesis that there are no differences among groups, obtaining a significant effect doesn't tell you which groups are different to which other ones. We discussed this issue back in Chapter ??, and in that chapter our solution was to run *t*-tests for all possible pairs of groups, making corrections for multiple comparisons (e.g., Bonferroni, Holm) to control the Type I error rate across all comparisons. The methods that we used back in Chapter ?? have the advantage of being relatively simple and being the kind of tools that you can use in a lot of different situations where you're testing multiple hypotheses, but they're not necessarily the best choices if you're interested in doing efficient post hoc testing in an ANOVA context. There are actually quite a lot of different methods for performing multiple comparisons in the statistics literature (**Hsu1996**), and it would be beyond the scope of an introductory text like this one to discuss all of them in any detail.

That being said, there's one tool that I do want to draw your attention to, namely Tukey's "Honestly Significant Difference", or **Tukey's HSD** for short. For once, I'll spare you the formulas and just stick to the qualitative ideas. The basic idea in Tukey's HSD is to examine all relevant pairwise comparisons between groups, and it's only really appropriate to use Tukey's HSD if it is *pairwise* differences that you're interested in.<sup>\*7</sup> For instance, earlier we conducted a factorial ANOVA using the `clinicaltrial.csv` data set, and where we specified a main effect for drug and a main effect of therapy we would be interested in the following four comparisons:

- The difference in mood gain for people given Anxifree versus people given the placebo.
- The difference in mood gain for people given Joyzepam versus people given the placebo.
- The difference in mood gain for people given Anxifree versus people given Joyzepam.
- The difference in mood gain for people treated with CBT and people given no therapy.

For any one of these comparisons, we're interested in the true difference between (population) group means. Tukey's HSD constructs **simultaneous confidence intervals** for all four of these comparisons. What we mean by 95% "simultaneous" confidence interval is that, if we were to repeat this study many times, then in 95% of the study results the confidence intervals would contain the relevant true value. Moreover, we can use these confidence intervals to calculate an adjusted *p* value for any specific comparison.

The **TukeyHSD** function in JASP is pretty easy to use. You simply specify the ANOVA model term that you want to run the post hoc tests for. For example, if we were looking to run post

---

<sup>\*7</sup>If, for instance, you actually find yourself interested to know if Group A is significantly different from the mean of Group B and Group C, then you need to use a different tool (e.g., Scheffe's method, which is more conservative, and beyond the scope of this book). However, in most cases you probably are interested in pairwise group differences, so Tukey's HSD is a pretty useful thing to know about.

hoc tests for the main effects but not the interaction, we would open up the 'Post Hoc Tests' option in the ANOVA analysis screen, move the **drug** and **therapy** variables across to the box on the right, and then select the 'Tukey' checkbox in the list of possible post hoc corrections that could be applied. This, along with the corresponding results table, is shown in Figure ??

The output shown in the 'Post Hoc Tests' results table is (I hope) pretty straightforward. The first comparison, for example, is the Anxifree versus placebo difference, and the first part of the output indicates that the observed difference in group means is .27. The next number is the standard error for the difference, from which we could calculate the 95% confidence interval (you can actually display this 95% CI if you select the 'Confidence intervals' box). Then there is a column with the degrees of freedom, a column with the *t*-value, and finally a column with the *p*-value. For the first comparison the adjusted *p*-value is .21. In contrast, if you look at the next line, we see that the observed difference between joyzepam and the placebo is 1.03, and this result is significant ( $p < .001$ ).

So far, so good. What about the situation where your model includes interaction terms? For instance, the default option in JASP is to allow for the possibility that there is an interaction between drug and therapy. If that's the case, the number of pairwise comparisons that we need to consider starts to increase. As before, we need to consider the three comparisons that are relevant to the main effect of **drug** and the one comparison that is relevant to the main effect of **therapy**. But, if we want to consider the possibility of a significant interaction (and try to find the group differences that underpin that significant interaction), we need to include comparisons such as the following:

- The difference in mood gain for people given Anxifree and treated with CBT, versus people given the placebo and treated with CBT
- The difference in mood gain for people given Anxifree and given no therapy, versus people given the placebo and given no therapy.
- etc

There are quite a lot of these comparisons that you need to consider. So, when we run the Tukey post hoc analysis for this ANOVA model, we see that it has made a *lot* of pairwise comparisons (19 in total), as shown in Figure ?. You can see that it looks pretty similar to before, but with a lot more comparisons made.

## The method of planned comparisons

Following on from the previous sections on contrasts and post hoc tests in ANOVA, I think the method of planned comparisons is important enough to deserve a quick discussion. In our discussions of multiple comparisons, in the previous section and back in Chapter ??, I've been assuming that the tests you want to run are genuinely post hoc. For instance, in our drugs example above, maybe you thought that the drugs would all have different effects on mood (i.e., you hypothesised a main effect of drug), but you didn't have any specific hypothesis about how they would be different, nor did you have any real idea about *which* pairwise comparisons would be worth looking at. If that is the case, then you really have to resort to something like Tukey's HSD to do your pairwise comparisons.

The situation is rather different, however, if you genuinely did have real, specific hypotheses about which comparisons are of interest, and you *never ever* have any intention to look at any other comparisons besides the ones that you specified ahead of time. When this is true, and if you honestly and rigorously stick to your noble intentions to not run any other comparisons (even when the data look like they're showing you deliciously significant effects for stuff you didn't have a hypothesis test for), then it doesn't really make a lot of sense to run something like Tukey's HSD, because it makes corrections for a whole bunch of comparisons that you never cared about and never had any intention of looking at. Under those circumstances, you can safely run a (limited) number of hypothesis tests without making an adjustment for multiple testing. This situation is known as the **method of planned comparisons**, and it is sometimes used in clinical trials. However, further consideration is out of scope for this introductory book, but at least you know that this method exists!

### 1.10

---

## Factorial ANOVA 3: unbalanced designs

Factorial ANOVA is a very handy thing to know about. It's been one of the standard tools used to analyse experimental data for many decades, and you'll find that you can't read more than two or three papers in psychology without running into an ANOVA in there somewhere. However, there's one huge difference between the ANOVAs that you'll see in a lot of real scientific articles and the ANOVAs that I've described so far. In real life we're rarely lucky enough to have perfectly balanced designs. For one reason or another, it's typical to end up with more observations in some cells than in others. Or, to put it another way, we have an **unbalanced design**.

Unbalanced designs need to be treated with a lot more care than balanced designs, and the statistical theory that underpins them is a lot messier. It might be a consequence of this messiness, or it might be a shortage of time, but my experience has been that undergraduate research methods classes in psychology have a nasty tendency to ignore this issue completely. A lot of stats textbooks tend to gloss over it too. The net result of this, I think, is that a lot of active researchers in the field don't actually know that there's several different "types" of unbalanced ANOVAs, and they produce quite different answers. In fact, reading the psychological literature, I'm kind of amazed at the fact that most people who report the results of an unbalanced factorial ANOVA don't actually give you enough details to reproduce the analysis. I secretly suspect that most people don't even realise that their statistical software package is making a whole lot of substantive data analysis decisions on their behalf. It's actually a little terrifying when you think about it. So, if you want to avoid handing control of your data analysis to stupid software, read on.

#### 1.10.1 The coffee data

As usual, it will help us to work with some data. The `coffee.csv` file contains a hypothetical data set that produces an unbalanced  $3 \times 2$  ANOVA. Suppose we were interested in finding out whether or not the tendency of people to babble when they have too much coffee is purely an effect of the coffee itself, or whether there's some effect of the milk and sugar that people add to the coffee. Suppose we took 18 people and gave them some coffee to drink. The amount of coffee / caffeine was held constant, and we varied whether or not milk was added, so milk is a binary factor with two levels, "yes" and "no". We also varied the kind of sugar involved. The coffee might contain "real" sugar or it might contain "fake" sugar (i.e., artificial sweetener) or it might contain "none" at all, so the sugar variable is a three level factor. Our outcome variable is a continuous variable that presumably refers to some psychologically sensible measure of the extent to which someone is "babbling". The details don't really matter for our purpose. Take a look at the data in the JASP spreadsheet view, as in Figure ??.

Looking at the table of means in Figure ?? we get a strong impression that there are differences between the groups. This is especially true when we look at the standard deviations. Across groups, this standard deviation varies quite a lot.<sup>\*8</sup> Whilst this at first may seem like a straightforward factorial ANOVA, a problem arises when we look at how many observations we have in each

---

<sup>\*8</sup>This discrepancy in standard deviations might (and should) make you wonder if we have a violation of the homogeneity of variance assumption. I'll leave it as an exercise for the reader to double check this using the Levene test option.

group. See the different  $N$ s for different groups shown in Figure ???. This violates one of our original assumptions, namely that the number of people in each group is the same. We haven't really discussed how to handle this situation.

#### 1.10.2 “Standard ANOVA” does not exist for unbalanced designs

Unbalanced designs lead us to the somewhat unsettling discovery that there isn't really any one thing that we might refer to as a standard ANOVA. In fact, it turns out that there are *three* fundamentally different ways<sup>\*9</sup> in which you might want to run an ANOVA in an unbalanced design. If you have a balanced design all three versions produce identical results, with the sums of squares,  $F$ -values, etc., all conforming to the formulas that I gave at the start of the chapter. However, when your design is unbalanced they don't give the same answers. Furthermore, they are not all equally appropriate to every situation. Some methods will be more appropriate to your situation than others. Given all this, it's important to understand what the different types of ANOVA are and how they differ from one another.

The first kind of ANOVA is conventionally referred to as **Type I sum of squares**. I'm sure you can guess what the other two are called. The “sum of squares” part of the name was introduced by the SAS statistical software package and has become standard nomenclature, but it's a bit misleading in some ways. I think the logic for referring to them as different types of sum of squares is that, when you look at the ANOVA tables that they produce, the key difference in the numbers is the SS values. The degrees of freedom don't change, the MS values are still defined as SS divided by df, etc. However, what the terminology gets wrong is that it hides the reason *why* the SS values are different from one another. To that end, it's a lot more helpful to think of the three different kinds of ANOVA as three different *hypothesis testing strategies*. These different strategies lead to different SS values, to be sure, but it's the strategy that is the important thing here, not the SS values themselves. Recall from Section ??? that any particular  $F$ -test is best thought of as a comparison between two linear models. So, when you're looking at an ANOVA table, it helps to remember that each of those  $F$ -tests corresponds to a *pair* of models that are being compared. Of course, this leads naturally to the question of *which* pair of models is being compared. This is

---

<sup>\*9</sup>Actually, this is a bit of a lie. ANOVAs can vary in other ways besides the ones I've discussed in this book. For instance, I've completely ignored the difference between fixed-effect models in which the levels of a factor are “fixed” by the experimenter or the world, and random-effect models in which the levels are random samples from a larger population of possible levels (this book only covers fixed-effect models). Don't make the mistake of thinking that this book, or any other one, will tell you “everything you need to know” about statistics, any more than a single book could possibly tell you everything you need to know about psychology, physics or philosophy. Life is too complicated for that to ever be true. This isn't a cause for despair, though. Most researchers get by with a basic working knowledge of ANOVA that doesn't go any further than this book does. I just want you to keep in mind that this book is only the beginning of a very long story, not the whole story.



the fundamental difference between ANOVA Types I, II and III: each one corresponds to a different way of choosing the model pairs for the tests.

### 1.10.3 Type I sum of squares

The Type I method is sometimes referred to as the “sequential” sum of squares, because it involves a process of adding terms to the model one at a time. Consider the coffee data, for instance. Suppose we want to run the full  $3 \times 2$  factorial ANOVA, including interaction terms. The full model contains the outcome variable `babble`, the predictor variables `sugar` and `milk`, and the interaction term `sugar*milk`. This can be written as `babble ~ sugar + milk + sugar*milk`. The Type I strategy builds this model up sequentially, starting from the simplest possible model and gradually adding terms.

The simplest possible model for the data would be one in which neither milk nor sugar is assumed to have any effect on babbling. The only term that would be included in such a model is the intercept, written as `babble ~ 1`. This is our initial null hypothesis. The next simplest model for the data would be one in which only one of the two main effects is included. In the coffee data, there are two different possible choices here, because we could choose to add milk first or to add sugar first. The order actually turns out to matter, as we’ll see later, but for now let’s just make a choice arbitrarily and pick sugar. So, the second model in our sequence of models is `babble ~ sugar`, and it forms the alternative hypothesis for our first test. We now have our first hypothesis test:

Null model: `babble ~ 1`  
Alternative model: `babble ~ sugar`

This comparison forms our hypothesis test of the main effect of `sugar`. The next step in our model building exercise is to add the other main effect term, so the next model in our sequence is `babble ~ sugar + milk`. The second hypothesis test is then formed by comparing the following pair of models:

Null model: `babble ~ sugar`  
Alternative model: `babble ~ sugar + milk`

This comparison forms our hypothesis test of the main effect of `milk`. In one sense, this approach is very elegant: the alternative hypothesis from the first test forms the null hypothesis for the second one. It is in this sense that the Type I method is strictly sequential. Every test builds directly on the results of the last one. However, in another sense it’s very inelegant, because there’s a strong asymmetry between the two tests. The test of the main effect of `sugar` (the first test) completely ignores `milk`, whereas the test of the main effect of `milk` (the second test) does

take `sugar` into account. In any case, the fourth model in our sequence is now the full model, `babble ~ sugar + milk + sugar*milk`, and the corresponding hypothesis test is:

Null model: `babble ~ sugar + milk`

Alternative model: `babble ~ sugar + milk + sugar*milk`

Type III sum of squares is the default hypothesis testing method used by JASP ANOVA, so to run a Type I sum of squares analysis we have to select ‘Type 1’ in the ‘Sum of squares’ selection box in the JASP ‘ANOVA’ - ‘Model’ options. This gives us the ANOVA table shown in Figure ??.

The big problem with using Type I sum of squares is the fact that it really does depend on the order in which you enter the variables. Yet, in many situations the researcher has no reason to prefer one ordering over another. This is presumably the case for our milk and sugar problem. Should we add milk first or sugar first? It feels exactly as arbitrary as a data analysis question as it does as a coffee-making question. There may in fact be some people with firm opinions about ordering, but it’s hard to imagine a principled answer to the question. Yet, look what happens when we change the ordering, as in Figure ??.

The  $p$ -values for both main effect terms have changed, and fairly dramatically. Among other things, the effect of `milk` has become significant (though one should avoid drawing any strong conclusions about this, as I’ve mentioned previously). Which of these two ANOVAs should one report? It’s not immediately obvious.

When you look at the hypothesis tests that are used to define the “first” main effect and the “second” one, it’s clear that they’re qualitatively different from one another. In our initial example, we saw that the test for the main effect of `sugar` completely ignores `milk`, whereas the test of the main effect of `milk` does take `sugar` into account. As such, the Type I testing strategy really does treat the first main effect as if it had a kind of theoretical primacy over the second one. In my experience there is very rarely if ever any theoretical primacy of this kind that would justify treating any two main effects asymmetrically.

The consequence of all this is that Type I tests are very rarely of much interest, and so we should move on to discuss Type II tests and Type III tests.

#### 1.10.4 Type III sum of squares

Having just finished talking about Type I tests, you might think that the natural thing to do next would be to talk about Type II tests. However, I think it’s actually a bit more natural to discuss Type III tests (which are simple and the default in JASP) before talking about Type II tests (which are trickier). The basic idea behind Type III tests is extremely simple. Regardless of which term you’re trying to evaluate, run the  $F$ -test in which the alternative hypothesis corresponds to the full ANOVA

model as specified by the user, and the null model just deletes that one term that you're testing. For instance, in the coffee example, in which our full model was `babble ~ sugar + milk + sugar*milk`, the test for a main effect of `sugar` would correspond to a comparison between the following two models:

Null model: `babble ~ milk + sugar*milk`

Alternative model: `babble ~ sugar + milk + sugar*milk`

Similarly the main effect of `milk` is evaluated by testing the full model against a null model that removes the `milk` term, like so:

Null model: `babble ~ sugar + sugar*milk`

Alternative model: `babble ~ sugar + milk + sugar*milk`

Finally, the interaction term `sugar*milk` is evaluated in exactly the same way. Once again, we test the full model against a null model that removes the `sugar*milk` interaction term, like so:

Null model: `babble ~ sugar + milk`

Alternative model: `babble ~ sugar + milk + sugar*milk`

The basic idea generalises to higher order ANOVAs. For instance, suppose that we were trying to run an ANOVA with three factors, `A`, `B` and `C`, and we wanted to consider all possible main effects and all possible interactions, including the three way interaction `A*B*C`. The table below shows you what the Type III tests look like for this situation:

Term being tested is	Null model is <code>outcome ~ ...</code>	Alternative model is <code>outcome ~ ...</code>
<code>A</code>	<code>B + C + A*B + A*C + B*C + A*B*C</code>	<code>A + B + C + A*B + A*C + B*C + A*B*C</code>
<code>B</code>	<code>A + C + A*B + A*C + B*C + A*B*C</code>	<code>A + B + C + A*B + A*C + B*C + A*B*C</code>
<code>C</code>	<code>A + B + A*B + A*C + B*C + A*B*C</code>	<code>A + B + C + A*B + A*C + B*C + A*B*C</code>
<code>A*B</code>	<code>A + B + C + A*C + B*C + A*B*C</code>	<code>A + B + C + A*B + A*C + B*C + A*B*C</code>
<code>A*C</code>	<code>A + B + C + A*B + B*C + A*B*C</code>	<code>A + B + C + A*B + A*C + B*C + A*B*C</code>
<code>B*C</code>	<code>A + B + C + A*B + A*C + A*B*C</code>	<code>A + B + C + A*B + A*C + B*C + A*B*C</code>
<code>A*B*C</code>	<code>A + B + C + A*B + A*C + B*C</code>	<code>A + B + C + A*B + A*C + B*C + A*B*C</code>

As ugly as that table looks, it's pretty simple. In all cases, the alternative hypothesis corresponds to the full model which contains three main effect terms (e.g. `A`), three two-way interactions (e.g. `A*B`) and one three-way interaction (i.e., `A*B*C`). The null model always contains 6 of these 7 terms, and the missing one is the one whose significance we're trying to test.

At first pass, Type III tests seem like a nice idea. Firstly, we've removed the asymmetry that caused us to have problems when running Type I tests. And because we're now treating all terms

the same way, the results of the hypothesis tests do not depend on the order in which we specify them. This is definitely a good thing. However, there is a big problem when interpreting the results of the tests, especially for main effect terms. Consider the coffee data. Suppose it turns out that the main effect of `milk` is not significant according to the Type III tests. What this is telling us is that `babble ~ sugar + sugar*milk` is a better model for the data than the full model. But what does that even *mean*? If the interaction term `sugar*milk` was also non-significant, we'd be tempted to conclude that the data are telling us that the only thing that matters is `sugar`. But suppose we have a significant interaction term, but a non-significant main effect of `milk`. In this case, are we to assume that there really is an "effect of sugar", an "interaction between milk and sugar", but no "effect of milk"? That seems crazy. The right answer simply *must* be that it's meaningless<sup>\*10</sup> to talk about the main effect if the interaction is significant. In general, this seems to be what most statisticians advise us to do, and I think that's the right advice. But if it really is meaningless to talk about non-significant main effects in the presence of a significant interaction, then it's not at all obvious why Type III tests should allow the null hypothesis to rely on a model that includes the interaction but omits one of the main effects that make it up. When characterised in this fashion, the null hypotheses really don't make much sense at all.

Later on, we'll see that Type III tests can be redeemed in some contexts, but first let's take a look at the ANOVA results table using Type III sum of squares, see Figure ??.

But be aware, one of the perverse features of the Type III testing strategy is that typically the results turn out to depend on the *contrasts* that you use to encode your factors (see Section ?? if you've forgotten what the different types of contrasts are).<sup>\*11</sup>

Okay, so if the *p*-values that typically come out of Type III analyses are so sensitive to the choice of contrasts, does that mean that Type III tests are essentially arbitrary and not to be trusted? To some extent that's true, and when we turn to a discussion of Type II tests we'll see that Type II analyses avoid this arbitrariness entirely, but I think that's too strong a conclusion. Firstly, it's important to recognise that some choices of contrasts will always produce the same answers (ah, so this is what is happening in JASP). Of particular importance is the fact that if the columns of our contrast matrix are all constrained to sum to zero, then the Type III analysis will always give the same answers.

---

<sup>\*10</sup>Or, at the very least, rarely of interest.

<sup>\*11</sup>However, in JASP the results for Type III sum of squares ANOVA are the same regardless of the contrast selected, so JASP is obviously doing something different!

### 1.10.5 Type II sum of squares

Okay, so we've seen Type I and III tests now, and both are pretty straightforward. Type I tests are performed by gradually adding terms one at a time, whereas Type III tests are performed by taking the full model and looking to see what happens when you remove each term. However, both can have some limitations. Type I tests are dependent on the order in which you enter the terms, and Type III tests are dependent on how you code up your contrasts. Type II tests are a little harder to describe, but they avoid both of these problems, and as a result they are a little easier to interpret.

Type II tests are broadly similar to Type III tests. Start with a "full" model, and test a particular term by deleting it from that model. However, Type II tests are based on the **marginality principle** which states that you should not omit a lower order term from your model if there are any higher order ones that depend on it. So, for instance, if your model contains the two-way interaction  $A*B$  (a 2nd order term), then it really ought to contain the main effects  $A$  and  $B$  (1st order terms). Similarly, if it contains a three-way interaction term  $A*B*C$ , then the model must also include the main effects  $A$ ,  $B$  and  $C$  as well as the simpler interactions  $A*B$ ,  $A*C$  and  $B*C$ . Type III tests routinely violate the marginality principle. For instance, consider the test of the main effect of  $A$  in the context of a three-way ANOVA that includes all possible interaction terms. According to Type III tests, our null and alternative models are:

Null model:  $outcome \sim B + C + A*B + A*C + B*C + A*B*C$

Alternative model:  $outcome \sim A + B + C + A*B + A*C + B*C + A*B*C$

Notice that the null hypothesis omits  $A$ , but includes  $A*B$ ,  $A*C$  and  $A*B*C$  as part of the model. This, according to the Type II tests, is not a good choice of null hypothesis. What we should do instead, if we want to test the null hypothesis that  $A$  is not relevant to our  $outcome$ , is to specify the null hypothesis that is the most complicated model that does not rely on  $A$  in any form, even as an interaction. The alternative hypothesis corresponds to this null model plus a main effect term of  $A$ . This is a lot closer to what most people would intuitively think of as a "main effect of  $A$ ", and it yields the following as our Type II test of the main effect of  $A$ :<sup>\*12</sup>

Null model:  $outcome \sim B + C + B*C$

Alternative model:  $outcome \sim A + B + C + B*C$

Anyway, just to give you a sense of how the Type II tests play out, here's the full table of tests

---

<sup>\*12</sup>Note, of course, that this does depend on the model that the user specified. If the original ANOVA model doesn't contain an interaction term for  $B*C$ , then obviously it won't appear in either the null or the alternative. But that's true for Types I, II and III. They never include any terms that you *didn't* include, but they make different choices about how to construct tests for the ones that you did include.

that would be applied in a three-way factorial ANOVA:

Term being tested is	Null model is <code>outcome ~ ...</code>	Alternative model is <code>outcome ~ ...</code>
A	<code>B + C + B*C</code>	<code>A + B + C + B*C</code>
B	<code>A + C + A*C</code>	<code>A + B + C + A*C</code>
C	<code>A + B + A*B</code>	<code>A + B + C + A*B</code>
A*B	<code>A + B + C + A*C + B*C</code>	<code>A + B + C + A*B + A*C + B*C</code>
A*C	<code>A + B + C + A*B + B*C</code>	<code>A + B + C + A*B + A*C + B*C</code>
B*C	<code>A + B + C + A*B + A*C</code>	<code>A + B + C + A*B + A*C + B*C</code>
A*B*C	<code>A + B + C + A*B + A*C + B*C</code>	<code>A + B + C + A*B + A*C + B*C + A*B*C</code>

In the context of the two way ANOVA that we've been using in the coffee data, the hypothesis tests are even simpler. The main effect of `sugar` corresponds to an *F*-test comparing these two models:

Null model: `babble ~ milk`

Alternative model: `babble ~ sugar + milk`

The test for the main effect of `milk` is

Null model: `babble ~ sugar`

Alternative model: `babble ~ sugar + milk`

Finally, the test for the interaction `sugar*milk` is:

Null model: `babble ~ sugar + milk`

Alternative model: `babble ~ sugar + milk + sugar*milk`

Running the tests are again straightforward. Just select 'Type 2' in the 'Sum of squares' selection box in the JASP 'ANOVA' - 'Model' options, This gives us the ANOVA table shown in Figure ??.

Type II tests have some clear advantages over Type I and Type III tests. They don't depend on the order in which you specify factors (unlike Type I), and they don't depend on the contrasts that you use to specify your factors (unlike Type III). And although opinions may differ on this last point, and it will definitely depend on what you're trying to do with your data, I do think that the hypothesis tests that they specify are more likely to correspond to something that you actually care about. As a consequence, I find that it's usually easier to interpret the results of a Type II test than the results of a Type I or Type III test. For this reason my tentative advice is that, if you can't think of any obvious model comparisons that directly map onto your research questions but you still want to run an ANOVA in an unbalanced design, Type II tests are probably a better

choice than Type I or Type III.\*<sup>13</sup>

#### 1.10.6 Effect sizes (and non-additive sums of squares)

JASP also provides the effect sizes  $\eta^2$  and partial  $\eta^2$  when you select these options. However, when you've got an unbalanced design there's a bit of extra complexity involved.

If you remember back to our very early discussions of ANOVA, one of the key ideas behind the sums of squares calculations is that if we add up all the SS terms associated with the effects in the model, and add that to the residual SS, they're supposed to add up to the total sum of squares. And, on top of that, the whole idea behind  $\eta^2$  is that, because you're dividing one of the SS terms by the total SS value, an  $\eta^2$  value can be interpreted as the proportion of variance accounted for by a particular term. But this is not so straightforward in unbalanced designs because some of the variance goes "missing".

This seems a bit odd at first, but here's why. When you have unbalanced designs your factors become correlated with one another, and it becomes difficult to tell the difference between the effect of Factor A and the effect of Factor B. In the extreme case, suppose that we'd run a  $2 \times 2$  design in which the number of participants in each group had been as follows:

	sugar	no sugar
milk	100	0
no milk	0	100

Here we have a spectacularly unbalanced design: 100 people have milk and sugar, 100 people have no milk and no sugar, and that's all. There are 0 people with milk and no sugar, and 0 people with sugar but no milk. Now suppose that, when we collected the data, it turned out there is a large (and statistically significant) difference between the "milk and sugar" group and the "no-milk and no-sugar" group. Is this a main effect of sugar? A main effect of milk? Or an interaction? It's impossible to tell, because the presence of sugar has a perfect association with the presence

---

\*<sup>13</sup>I find it amusing to note that the default in R is Type I and the default in SPSS, JASP, and jamovi is Type III. Neither of these appeals to me all that much. Relatedly, I find it depressing that almost nobody in the psychological literature ever bothers to report which Type of tests they ran, much less the order of variables (for Type I) or the contrasts used (for Type III). Often they don't report what software they used either. The only way I can ever make any sense of what people typically report is to try to guess from auxiliary cues which software they were using, and to assume that they never changed the default settings. Please don't do this! Now that you know about these issues make sure you indicate what software you used, and if you're reporting ANOVA results for unbalanced data, then specify what Type of tests you ran, specify order information if you've done Type I tests and specify contrasts if you've done Type III tests. Or, even better, do hypotheses tests that correspond to things you really care about and then report those!



of milk. Now suppose the design had been a little more balanced:

	sugar	no sugar
milk	100	5
no milk	5	100

This time around, it's technically possible to distinguish between the effect of milk and the effect of sugar, because we have a few people that have one but not the other. However, it will still be pretty difficult to do so, because the association between sugar and milk is still extremely strong, and there are so few observations in two of the groups. Again, we're very likely to be in the situation where we *know* that the predictor variables (milk and sugar) are related to the outcome (babbling), but we don't know if the *nature* of that relationship is a main effect of one or the other predictor, or the interaction.

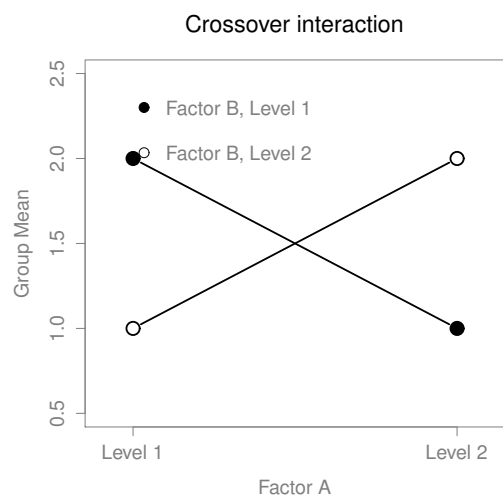
This uncertainty is the reason for the missing variance. The "missing" variance corresponds to variation in the outcome variable that is clearly attributable to the predictors, but we don't know which of the effects in the model is responsible. When you calculate Type I sum of squares, no variance ever goes missing. The sequential nature of Type I sum of squares means that the ANOVA automatically attributes this variance to whichever effects are entered first. However, the Type II and Type III tests are more conservative. Variance that cannot be clearly attributed to a specific effect doesn't get attributed to any of them, and it goes missing.

## 1.11

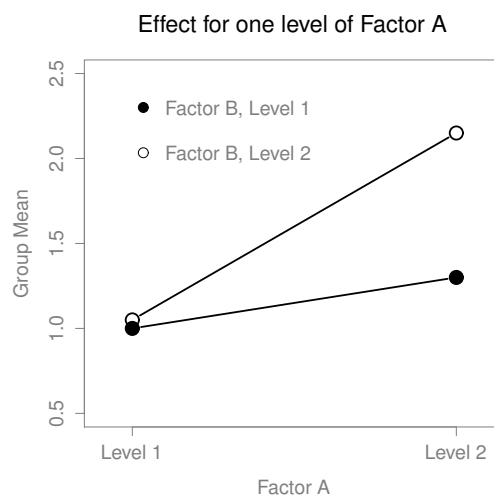
---

### Summary

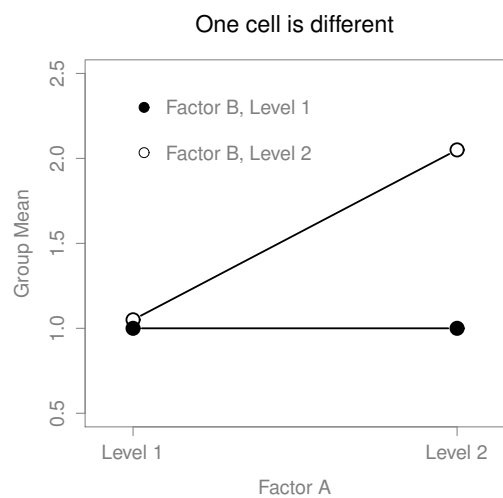
- Factorial ANOVA with balanced designs, without interactions (Section ??) and with interactions included (Section ??)
- Effect size, estimated means, and confidence intervals in a factorial ANOVA (Section ??)
- Checking assumptions in ANOVA (Section ??)
- Analysis of Covariance (ANCOVA) (Section ??)
- Understanding the linear model underlying ANOVA, including different contrasts (Section ?? and ??)
- Post hoc testing using Tukey's HSD (Section ??) and a brief commentary on planned comparisons (Section ??)
- Factorial ANOVA with unbalanced designs (Section ??)



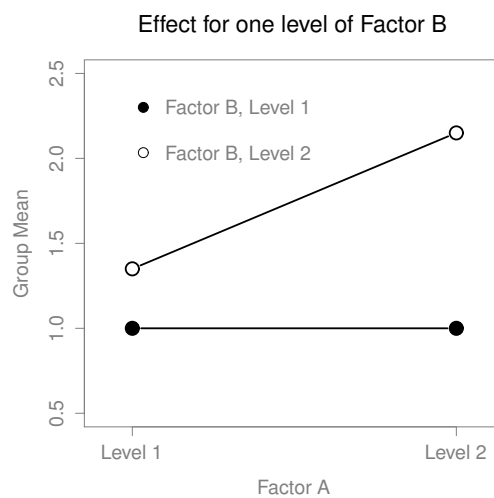
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure1.6  $2 \times 2$  要因の分散分析における様々な交互作用



Figure1.7 臨床試験データに対して分散分析の「Descriptives Plot」オプションを使用した際の JASP の出力

ANOVA – mood.gain

Cases	Sum of Squares	df	Mean Square	F	p
drug	3.453	2.000	1.727	31.714	< .001
therapy	0.467	1.000	0.467	8.582	0.013
drug * therapy	0.271	2.000	0.136	2.490	0.125
Residual	0.653	12.000	0.054		

Note. Type III Sum of Squares

Figure1.8 交互作用項 drug\*therapy を含む、完全な多元配置モデルの出力

## Marginal Means

Marginal Means – drug \* therapy

drug	therapy	Marginal Mean	SE	95% CI	
				Lower	Upper
anxifree	CBT	1.033	0.135	0.740	1.327
	no.therapy	0.400	0.135	0.106	0.694
joyzepam	CBT	1.500	0.135	1.206	1.794
	no.therapy	1.467	0.135	1.173	1.760
placebo	CBT	0.600	0.135	0.306	0.894
	no.therapy	0.300	0.135	0.006	0.594

Figure1.9 飽和モデルの周辺平均を示す JASP のスクリーンショット, i.e. clinicaltrial データセットの交互作用コンポーネントを含む

### Assumption Checks ▼

Test for Equality of Variances (Levene's)

F	df1	df2	p
0.206	5.000	12.000	0.954

### Q-Q Plot ▼

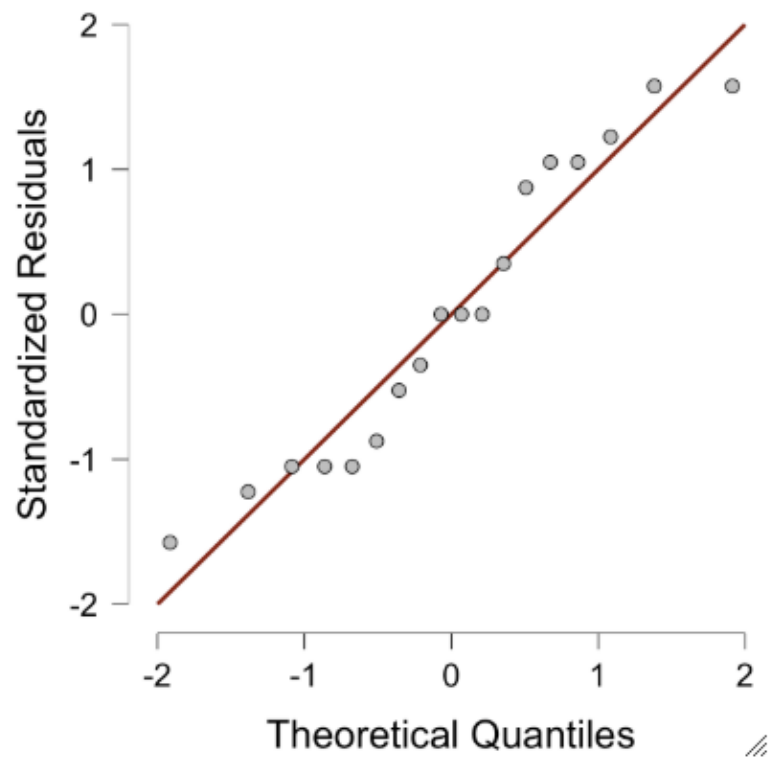


Figure1.10 分散分析モデルの仮定の確認

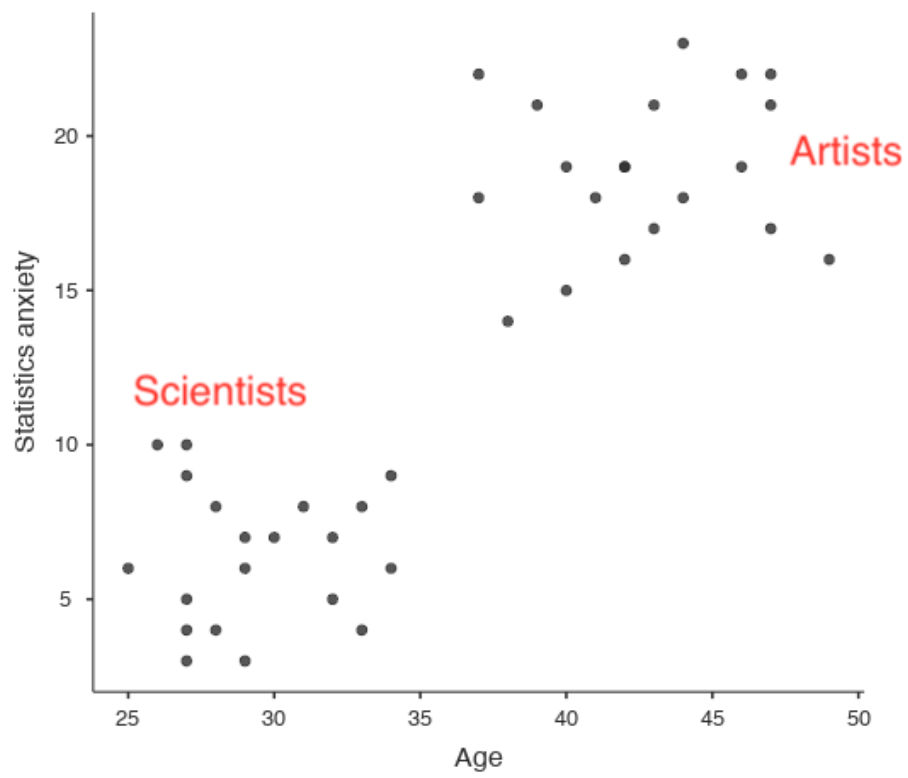


Figure1.11 Plot of Statistics anxiety against age for two distinct groups



Figure1.12 The JASP ANCOVA analysis window

## Descriptives

### Descriptives Plot

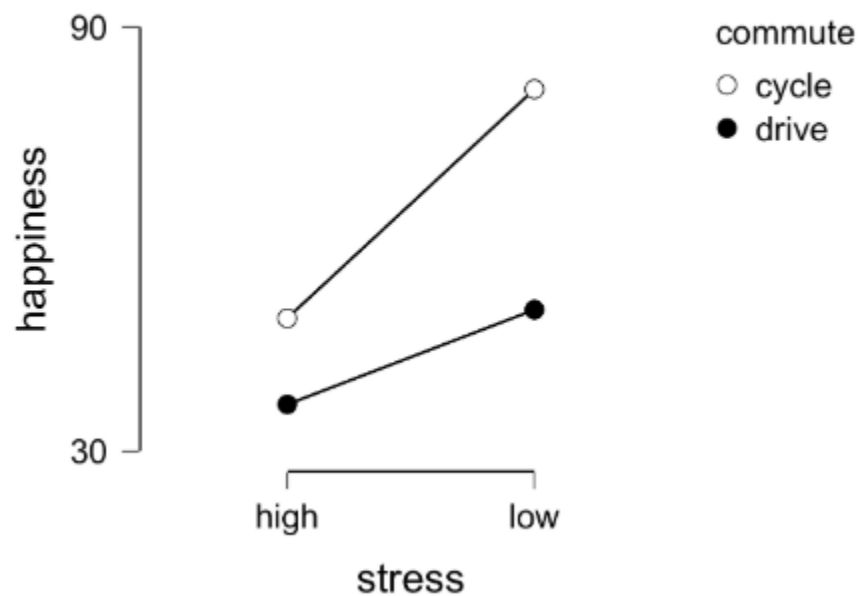


Figure1.13 Plot of mean happiness level as a function of stress and commuting method



ANOVA – grade

Cases	Sum of Squares	df	Mean Square	F	p
attend	648.000	1.000	648.000	21.600	0.006
reading	1568.000	1.000	1568.000	52.267	< .001
Residual	150.000	5.000	30.000		

Note. Type III Sum of Squares

Figure1.14 ANOVA of the `rtfm.csv` data set in JASP, without the interaction term

Coefficients

Model		Unstandardized	Standard Error	Standardized	t	p
1	(Intercept)	43.500	3.354		12.969	< .001
	attend	18.000	3.873	0.523	4.648	0.006
	reading	28.000	3.873	0.814	7.230	< .001

Figure1.15 Regression analysis of the `rtfm.csv` data set in JASP, without the interaction term

ANOVA – mood.gain

Cases	Sum of Squares	df	Mean Square	F	p
drug	3.453	2.000	1.727	26.149	< .001
therapy	0.467	1.000	0.467	7.076	0.019
Residual	0.924	14.000	0.066		

Note. Type III Sum of Squares

Figure1.16 JASP ANOVA results, without interaction component

Coefficients						
Model		Unstandardized	Standard Error	Standardized	t	p
1	(Intercept)	0.289	0.121		2.385	0.032
	druganxifree	0.267	0.148	0.242	1.797	0.094
	drugjoyzepam	1.033	0.148	0.939	6.965	< .001
	therapyCBT	0.322	0.121	0.311	2.660	0.019

Figure1.17 JASP regression results, with contrast variables druganxifree and drugjoyzepam

## Linear Regression ▼

### Model Summary ▼

Model	R	R <sup>2</sup>	Adjusted R <sup>2</sup>	RMSE
0	0.844	0.713	0.674	0.305
1	0.900	0.809	0.768	0.257

Note. Null model includes druganxifree, drugjoyzepam

### ANOVA

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	p
0	Regression	3.453	2	1.727	18.611	< .001
	Residual	1.392	15	0.093		
	Total	4.845	17			
1	Regression	3.921	3	1.307	19.791	< .001
	Residual	0.924	14	0.066		
	Total	4.845	17			

Note. Null model includes druganxifree, drugjoyzepam

### Coefficients

Model		Unstandardized	Standard Error	Standardized	t	p
0	(Intercept)	0.450	0.124		3.619	0.003
	druganxifree	0.267	0.176	0.242	1.516	0.150
	drugjoyzepam	1.033	0.176	0.939	5.876	< .001
1	(Intercept)	0.289	0.121		2.385	0.032
	druganxifree	0.267	0.148	0.242	1.797	0.094
	drugjoyzepam	1.033	0.148	0.939	6.965	< .001
	therapyCBT	0.322	0.121	0.311	2.660	0.019

Figure1.18 Model comparison in JASP regression, null model 0 vs. contrasts model 1

## Post Hoc Tests ▼

### Post Hoc Comparisons – drug ▼

		Mean Difference	SE	t	P <sub>Tukey</sub>
placebo	joyzepam	–1.033	0.148	–6.965	< .001
	anxifree	–0.267	0.148	–1.797	0.206
joyzepam	anxifree	0.767	0.148	5.168	< .001

### Post Hoc Comparisons – therapy

		Mean Difference	SE	t	P <sub>Tukey</sub>
CBT	no.therapy	0.322	0.121	2.660	0.019

Figure1.19 Tukey HSD post hoc test in JASP

## Post Hoc Tests ▼

### Post Hoc Comparisons – drug \* therapy ▼

		Mean Difference	SE	t	P <sub>Tukey</sub>
placebo,CBT	joyzepam,CBT	–0.900	0.191	–4.724	0.005
	anxifree,CBT	–0.433	0.191	–2.275	0.275
	placebo,no.therapy	0.300	0.191	1.575	0.628
	joyzepam,no.therapy	–0.867	0.191	–4.549	0.007
	anxifree,no.therapy	0.200	0.191	1.050	0.892
joyzepam,CBT	anxifree,CBT	0.467	0.191	2.449	0.214
	placebo,no.therapy	1.200	0.191	6.299	< .001
	joyzepam,no.therapy	0.033	0.191	0.175	1.000
	anxifree,no.therapy	1.100	0.191	5.774	< .001
anxifree,CBT	placebo,no.therapy	0.733	0.191	3.849	0.022
	joyzepam,no.therapy	–0.433	0.191	–2.275	0.275
	anxifree,no.therapy	0.633	0.191	3.324	0.053
placebo,no.therapy	joyzepam,no.therapy	–1.167	0.191	–6.124	< .001
	anxifree,no.therapy	–0.100	0.191	–0.525	0.994
joyzepam,no.therapy	anxifree,no.therapy	1.067	0.191	5.599	0.001

Figure1.20 Tukey HSD post hoc test in JASP factorial ANOVA with an interaction term

## Results

### Descriptive Statistics

Descriptive Statistics		
	babble	
	no	yes
Valid	10	8
Missing	0	0
Mean	5.320	4.750
Std. Deviation	0.796	0.962
Minimum	3.900	3.500
Maximum	6.600	5.900

### Descriptive Statistics

Descriptive Statistics			
	babble		
	fake	none	real
Valid	6	5	7
Missing	0	0	0
Mean	5.033	4.440	5.543
Std. Deviation	0.814	1.038	0.637
Minimum	3.900	3.500	4.600
Maximum	5.900	5.800	6.600

Figure1.21 Descriptives for the coffee.csv data set, separately split by milk and sugar, respectively.

## ANOVA

ANOVA – babble

Cases	Sum of Squares	df	Mean Square	F	p
sugar	3.558	2.000	1.779	6.749	0.011
milk	0.956	1.000	0.956	3.628	0.081
sugar * milk	5.944	2.000	2.972	11.277	0.002
Residual	3.162	12.000	0.264		

Note. Type I Sum of Squares

Figure1.22 ANOVA results table using Type I sum of squares in JASP

## ANOVA ▼

ANOVA – babble

Cases	Sum of Squares	df	Mean Square	F	p
milk	1.444	1.000	1.444	5.479	0.037
sugar	3.070	2.000	1.535	5.824	0.017
milk * sugar	5.944	2.000	2.972	11.277	0.002
Residual	3.163	12.000	0.264		

Note. Type I Sum of Squares

Figure1.23 ANOVA results table using Type I sum of squares in JASP, but with factors entered in a different order (milk first)

## ANOVA

ANOVA – babble

Cases	Sum of Squares	df	Mean Square	F	p
milk	1.004	1.000	1.004	3.810	0.075
sugar	2.132	2.000	1.066	4.045	0.045
milk * sugar	5.944	2.000	2.972	11.277	0.002
Residual	3.163	12.000	0.264		

Note. Type III Sum of Squares

Figure1.24 ANOVA results table using Type III sum of squares in JASP

## ANOVA

ANOVA – babble

Cases	Sum of Squares	df	Mean Square	F	p
milk	0.956	1.000	0.956	3.628	0.081
sugar	3.070	2.000	1.535	5.824	0.017
milk * sugar	5.944	2.000	2.972	11.277	0.002
Residual	3.163	12.000	0.264		

Note. Type II Sum of Squares

Figure1.25 ANOVA results table using Type II sum of squares in JASP