1. 確率への招待

[神] は私たちに黄昏だけを与えたもうた . . . 確率の。
– John Locke

本書のここまでは，実験デザインにおける鍵となる概念のいくつかを紹介し，またデータセットをどのように要約することができるかについてお話ししてきました。多くの人にとっては，それが統計の全てです。すなわち，全ての数字を集め，平均値を計算し，図を書いて，それら全てをレポートのあちこちに配置することが。切手の収集のようなかんじでしょうか。ただし使うのは数字ですが。しかし，統計学はそれ以上の範囲をカバーするものです。実際，記述統計は統計学の最も小さい領域の一つで，最も影響力のないところでしかありません。統計におけるもっと広大で有用な領域とは，データについての推論ができるような情報を提供してくれるものです。

あなたが統計的に考えることを始めたら，統計はデータから推論を導き出す助けになるし，至る所で使われている例を目にすることになるでしょう。例えば，新聞 Sydney Morning Herald 誌の 2010 年 10 月 30 日に，次のような記事が掲載されていました。

> 選挙結果に対して，“私は大変な仕事を抱えている” と首相はコメントしました。彼女の政府が今やこれまでにない支持率の低い労働党であり，予備選挙での支持率が 23 パーセントしかなかったのです。

この種の発言は新聞や日々の生活にあっても特に目立つものではないですが，それが何を言わんとしているのかを考えてみましょう。調査会社が調査を実施するときは，彼らには余裕があるので非常に大きな調査を企画するのが普通です。私は面倒くさがりやなので元の調査を調べなかったのですが，調査会社がニューサウスウェールズ (NSW) の有権者からランダムに 1000 人集め，そのうち 230 人 (23%) がオーストラリア労働党 (ALP) に投票するつもりだと答えたとします。2010 年の選挙では，オーストラリア選挙委員会は NSW で 4,610,795 人が投票した，と公表していますから，残る 4,609,795 人 (有権者の約 99.98%) の意見がどうだったか，私たちにはわかりません。調査会社に対して誰も嘘をついていないと仮定しても，我々が 100% の自信を持って言えることは，真の ALP 予備選挙有権者は 230/4610795 (約 0.005%) から 4610025/4610795 (約 99.83%) の間のど

こかにいる，ということだけです。それでは調査会社，新聞，その読者が，ALP の予備選挙の支持率が 23% に過ぎないと正当化する根拠は一体どこにあるのでしょう?

答えはかなりはっきりしています。もし私が 1000 人の人を無作為に呼んできて，そのうち 230 人が ALP に投票するつもりだと答えたとすると，実際に ALP に投票するつもりの人たち全体のうちの，この 230 人だけということはあり得そうにありません。言い方を変えると，調査会社が集めてきたデータはもっと大きい母集団の代表であることを，我々は想定するのです。さて，どの程度代表しているでしょう? 本当に ALP 予備投票が 24% であれば私たちは驚くのでしょうか。29% なら? それとも 37% のとき? ここまでくると，日々の直感は少し崩れてきます。

もし 24% であっても誰も驚かないでしょうが，37% であればみんな驚くでしょう。しかし，29% になりそうだと言うのは少し厳しい気がします。数字を見て推測するだけでなく，もう少し強力なツールが必要です。

推測統計学がこの種の問題に応えるために私たちに必要なツールであり，この種の問いが科学的営みの中心にあるので，統計学や科学的手法についてのあらゆる入門コースの大半を占めているのです。しかし，統計的推論の理論は**確率理論**の頂点の上に作られています。ということで，今から確率理論を学ぶことにしましょう。確率理論についての議論は，基本的にバックグラウンドを細かく見ていくようなものです。この章にはそれほど統計の話は出てきませんし，この本の他の章ほど数学的な詳細を深く理解する必要もありません。ですが，確率理論は統計を深いところから支える支柱ですから，その基礎をカバーしておくことに価値があるのです。

1.1 確率と統計はどうちがうの?

確率理論の話を始める前に，確率と統計学の関係についてちょっと触れておきましょう。この二つの学問は密接な関係にありますが，全く同じものではありません。確率理論は “偶然の原理” です。それは数学の分野の一つで，異なる種類の出来事がどの程度の頻度で生じるのかを教えてくれるものです。例えば，次のような問いは確率理論を使って答えることができるものです。

- 公平なコインが 10 回連続で表になる確率はどれぐらいですか?
- 6 面サイコロを二回振った時，二つとも 6 が出るのはどれぐらいありえることですか?
- 完全にシャッフルされたデッキからカードを 5 枚引いた時，全てハートのカードになることはどれぐらいありえることですか? くじを引いて当たりが出る確率はどれぐらいでしょう?

これらの質問は，いずれも一般的にありふれたものであることに注意してください。どの場合でも，“世界の真理’’ が分かっている時に，“ どんな種類の出来事が” 生じるのだろうか，という形に

なっています。最初の質問では，私はコインが公平である，つまり毎回のコイントスで表が出るのは 50% の確率であると知っているのです。第二の質問では，私はサイコロで 6 が出る確率は 1/6 であることを知っているのです。第 3 の質問では，私はデッキがうまくシャッフルされていることを知っているのです。第 4 の質問では，私はくじが特定のルールに従うことを知っているのです。気づきましたね。決定的な点は，確率的な問いは世界について既知の**モデル**から始まり，私たちはそのモデルを使ってなんらかの計算をするのです。そのモデルはかなりシンプルにできます。例えば，コイントスの例では私たちはモデルを次のように書くことができます。

$$P(\text{heads}) = 0.5$$

これは「表が出る確率は 0.5」と読むことができます。後で見るように，0% から 100% の範囲にある比率の数字と同様に，確率は 0 から 1 の数字になります。この確率モデルを使って最初の問いに答えるのですが，私はこれから起こることを実際には知りません。この質問がいうように，10 回表が出るかもしれません。でも，3 回しか出ないかもしれません。これが大事なところなのです。確率理論では，モデルはわかっていますが，データはわからないのです。

それが確率なのです。では統計学とは何でしょう?統計学の問いは，その周りにあって別の働きをするものです。

統計学では，私たちは世界の真理について知りません。私たちが持っているのはデータだけであり，世界の真理について学びたいことはデータから得られるのです。統計的な問いは次のようになることが多いようです。

- もし友達がコイントスを 10 回やって表が 10 回出たとしたら，彼は私をからかっているんじゃないだろうか?
- もしデッキの上から 5 枚カードを取り出して，それが全部ハートだったら，そのデッキがシャッフルされていた可能性はどれぐらい?
- もし宝くじ主催者の配偶者がくじに当選したら，その宝くじがイカサマだった可能性はどれぐらい?

この時，私たちが知っているのはデータだけですね。私が知っていることは，友達が 10 回コイントスをして，全部表であったことだけです。そして私が**推論**したいことは，実際に公平なコインが連続して 10 回表になったのだと結論づけて良いかどうか，あるいは私の友達が私をからかっていると疑って良いかどうかです。ここでのデータは次のようになります。

表 表 表 表 表 表 表 表 表 表 表

そして，私がやろうとしていることは，どの “世界についてのモデル” を信用するべきか，ということです。もしコインが公平なものであれば，私が受け入れるべきモデルのひとつは表が出る確率が 0.5，つまり $P(\text{heads}) = 0.5$ であるというものです。もしコインが公平なものでなければ，表が出

る確率は 0.5 ではないことになるので，それを我々は $P(\text{heads}) \neq 0.5$ と書くでしょう。言い換えると，統計的な推論の問題は，どっちの確率モデルが正しいかということです。これで明らかなように，統計的な問いは確率の問いと同じではないのですが，お互い深く関係し合っているのです。だから統計理論のよい入門書は，確率についての議論とそれがどのように機能するか，というところから始めるのです。

1.2

確率が意味するものは?

いくつかの質問から始めましょう。“確率” とはなんでしょう? あなたは少し驚くかもしれませんが，これについて統計学者や数学者が (ほとんど) 同意してくれるのは確率のルールであって，それが本当は何を意味するのかについては，ほとんど同意が得られません。私たちは “偶然 (chance)” とか，“ありそう (likely)” とか，“ありえる (possible)” とか，“たぶん (probable)” という言葉を大変便利に使うので，この問題に答えるのが難しそうだと言われても奇妙に感じます。しかし実生活の中でも，会話がうまくいってないように感じてそれから距離を置いていたけど，(多くの日常的な概念について) あなたがそれが何なのか本当は分かっていなかったことがあとでわかる，という経験をしたことがあるでしょう。

さて始めましょうか。私が二台のロボットチーム，アーセナルとミランが戦うサッカーゲームに賭けたいとします。いろいろ考えて，アーセナルが 80% の確率で勝つだろう，と判断したとします。さてこれは何を意味しているのでしょう?　これには三つの可能性があります。

- これはロボットチームなので，私は何度も試合を試すことができ，実際そうすると 10 ゲーム中 8 回アーセナルが勝つだろう，ということ。
- どんなゲームであっても，このゲームに賭けるときは，\$1 をミランに賭けたら\$5 戻ってくる (つまり，私の\$1 は賭けに勝つと\$4 儲けさせてくれる) し，アーセナルには\$4 を賭けないと\$5 戻ってこない (つまり，私の\$4 プラス\$1 の儲け)，という時に初めて “公平な” 賭けが成立する，ということ。
- アーセナルの勝利について，私の主観的な “信念” とか “自信” は，ミランの勝利についての信念より 4 倍強い，ということ。

どれも微妙ですねえ。しかし，いずれも同じ，ではないし，全ての統計学者がこれら全てを認めているわけでもないのです。その理由は，そこには統計学的イデオロギーの違いがあるからで (本当です！)，どれを認めるかによって，この表現のいくつかは無意味だとか不適切だと言いたくなるでしょう。このセクションでは，ここにある二つの大きなアプローチについて簡単な導入を行います。

アプローチは一つだけということは決してありませんが，その二つは大きな流れなのです。

1.2.1 頻度主義者の観点から

確率への 2 大アプローチのうち最初のものは，統計学においてより支配的な考え方であり，**頻度主義者の観点**と言われます。それは**長期的な頻度**として確率を定義するからです。私たちが何度も何度もコインフリップをし続けるとしましょう。定義から，このコインは $P(H) = 0.5$ です。私たちは何を観測するでしょう？ 一つの可能性として，最初の 20 回は次のようになったとします。

```
T,H,H,H,H,T,T,H,H,H,H,T,H,H,T,T,T,T,T,H
```

この例では 20 回中 11 回 (55%) が面を向いています。今度は，私がずっとコインフリップをしながら表が出る回数 (ここでは N_H としておきましょう) を数え，その最初から N 回目までで確率を N_H/N として毎回計算していくとしましょう。そうすると，次のようになります (これを書くために，私は文字通りコインフリップをしたんですよ!):

コインフリップの回数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
表が出た回数	0	1	2	3	4	4	4	5	6	7
割合	.00	.50	.67	.75	.80	.67	.57	.63	.67	.70

コインフリップの回数	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
表が出た回数	8	8	9	10	10	10	10	10	10	11
割合	.73	.67	.69	.71	.67	.63	.59	.56	.53	.55

この流れの最初のうちは，表が出る割合は広く変動し，最初は.00 ですが.80 まで上昇します。続けていくと，“正しい” 答えである.50 に徐々に近づいていくような印象を持つ人もいるかもしれません。これがごく簡単にいうところの，頻度主義者の確率の定義です。公平なコインを何度もフリップしつづけ，N が大きくなれば (無限に近づけば，というのを $N \rightarrow \infty$) と書きますが)，表が上になる割合は 50% に収束して行きます。ここには数学的に注意が必要なちょっとしたテクニックがありますが，内容的にはこれが頻度主義者が確率を定義する方法です。残念ながら，私はコインを無限回フリップしたことはないですし，無限回コインをフリップするのに耐えうる無限の精神力も持ち合わせていません。でも私はコンピュータを持っているし，コンピュータはこの辛い作業を厭わないのです。ですから，私はコンピュータに，1000 回コインフリップのシミュレーションをやるようにお願いし，N_H/N が N の増加とともにどうなるかの図を描いてもらいました。実際には，私はそれがまぐれではないことを確認するために 4 回繰り返しました。その結果が Figure **??**です。ご覧いただいたように，表が観測される割合は最終的に変動するのをやめ，落ち着いて行きます。そうなると，最

終的に落ち着いた数字が表の出る確率，ということになります。

頻度主義者の確率の定義は，いくつかの望ましい性質を持っています。まず，それは客観的です。出来事の確率は世界に根ざしたものである必要があります。確率の言葉が意味を持つのは，それが物理的な宇宙の中で生じる (一連の) 出来事について言及しているからです[*1]第二に，曖昧さがありません。同じ一連の出来事を観測した人は誰でも，その出来事の確率を計算しようとすれば，確実に同じ答えに到達します。

しかし，望ましくない特徴もあります。まず，無限の連続というのは物理的な世界にはありません。あなたがポケットからコインを取り出して，コインフリップをし始めたと思ってください。コインが着地するたびに，それは地面に衝撃を与えます。毎回の衝撃で，コインは少しずつ欠けていきます。最終的に，コインは破壊されてしまうかもしれません。だから，“ 無限の” コインフリップの連続，というのが意味のある概念で客観的なものであるとして，意味のあるフリをするべきかどうか，疑問に思うかもしれません。私たちは出来事の “無限の連続’ ’ が物理的な宇宙において現実的なものであるということはできません。なぜなら，物理的な宇宙は無限の何かを許容しないからです。もっと厳密にいうと，頻度主義者の定義は対象が狭いのです。日々の生活の中で人が確率に割り当てて満足していることはたくさんあるのですが，(理論の中でも) 仮想的な出来事の連続に割り当てられないものがたくさんあります。例えば，気象学者がテレビで「2048 年，12 月 2 日のアデレードで雨が降る確率は 60% です」といったとしても，私たちはこれを喜んで受け入れます。ですが，これを頻度主義者の用語でどうやって定義するのかはっきりしません。アデレードは一つしかない街ですし，2048 年 12 月 2 日も一回しかありません。またこれは無限の出来事の連続はありません，一度きりのことです。頻度主義者の確率は，一度しか起きない出来事について確率でものをいうことを本気で禁じます。頻度主義者の物の見方からすると，明日は雨が降るか降らないかのどちらかです。一度きりの繰り返しのない出来事に “確率” は付随させられないのです。では，頻度主義者がこれを回避するために使う，非常に巧妙なトリックがあることを指摘しなければなりません。一つの可能性として，気象学者が言わんとしているのは，“私が 60% の偶然で雨が降る日々，というカテゴリーがあって，もしそうした日だけみてこの予測をしたとすると，その日のうちの 60% が実際に雨が降るのです”，とまぁこういうようなことにするのです。これは非常に奇妙で，直観に反したものですが，頻度主義者がこのような言い方をするのを実際に目にするでしょう。そしてこの本の後でもこのことがきっと出てくるでしょう (Section **??**をみてください).

1.2.2　ベイジアンの観点から

確率についての**ベイジアンの観点**は，時に主観的な観点だと言われ，統計学者の中ではマイノリ

[*1] これはもちろん，頻度主義者が仮説的な発言ができないことを意味するものではありません。単に，もしあなたが確率について表明したいことがあれば，それは潜在的に観測しうる一連の出来事についての言葉を，違う結果の相対的な頻度と共に，表現しなおせるものでなければならないということです。

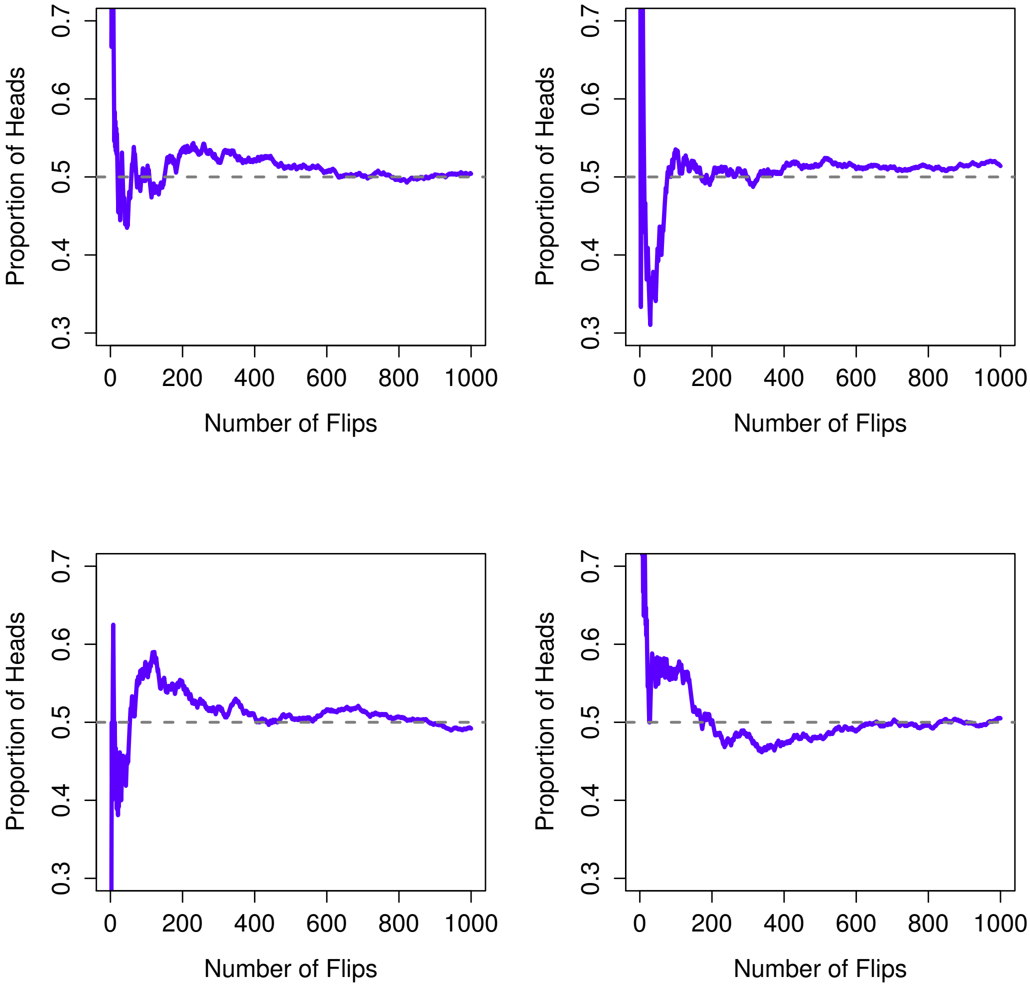


Figure1.1　頻度主義者の確率がどのように働くかの図。コインフリップを何度も何度も繰り返すと，表が出る割合は徐々に落ち着いていき，真の確率である 0.5 に収束していきます。各パネルが示すのは，四つの異なるシミュレーション実験の結果です。それぞれのケースについて，コインを 1000 回フリップして表が出る割合を追跡し続けたものです。どのケースも最終的にちょうど 0.5 になりはしませんが，もしこれを無限回実験し続けるようにすれば，最終的にはそうなるはずです。

ティでしたが，この数十年の間にかなり牽引力を持ってきました。ベイズ主義的精神は多くの楽しみ方があるので，“これぞ” ベイジアンの観点，と正確に言い切るのは難しいものがあります。主観的確率について考えるもっとも一般的な方法は，出来事についての確率を，出来事の真実に対して知的かつ合理的なエージェントが割り振る**信念の程度**として定義することです。この観点からいくと，確率は現実世界に存在していないことになり，むしろ人やその他の知的存在の思考や仮定の中に存在することになります。

しかし，このアプローチにしたがって仕事をすると，私たちはなんらかの方法で “信念の程度” を操作可能なものにする必要があります。いろいろな方法がありますが，一つのやり方としは，“合理的なギャンブル” の用語で定式化することです。明日雨が降る確率が 60% だ，と私が信じているとします。ここで誰かが，もし明日雨が降ったら私に 5$あげるけど，雨が降らなかったら 5$よこせ，という賭けを申し出てきたとします。もちろん，私の立場からすれば，これはちょっといい話です。しかし一方で，もし私が明日雨が降る確率は 40% だと考えていたのなら，この賭けをするのは悪い手ということになります。つまり，私たちは “主観的確率” の本質を，私がこの賭けを受け入れるかどうかという用語で操作したことになります。

ベイジアンアプローチの利点と欠点はなんでしょう？ 主な利点は確率を割り当てたいどんな出来事にも適用できるということです。繰り返しのある出来事に限定する必要はありません。(多くの人にとっての) 主な欠点は，私たちは完全に客観的にはなれないということです。確率を割り当てるということは，関連する信念の程度についての実態を特定する必要があります。その実態は人間，エイリアン，ロボット，統計学者，誰のものでもいいのです。しかし物事を信じる知的なエージェントがそこにいなければなりません。多くの人にとってはこれが不満のタネになります。幾分曖昧になりますからね。ベイジアンアプローチは，そのエージェントが合理的であること (すなわち確率のルールに従うこと) を要求しますが，誰もが自分自身の信念を持つことを許します。私はコインが公平なものであると信じられるし，あなたは必ずしもそうでなくていいのです。私もあなたも合理的なままで。頻度主義者の観点は，二人の観察者が同じイベントに異なる確率を割り当てることを許しません。もしそういう事態が生じたら，二人のうちどちらかが間違っているのです。ベイジアンの観点ではこの問題が生じることを止めません。異なる背景知識を持つ二人の観測者が，同じ出来事に対して合法的に異なる信念を持ちうるのです。簡単にいうと，頻度主義者の観点が時折見識が狭すぎるように見える (確率を割り当てたい出来事の多くを許してくれない) のに対し，ベイジアンの観点は時折懐が広すぎる (観察者間であまりにも多くの異なる状態を許す) のです。

1.2.3 違いは何？ 誰が正しいの？

さて，異なる二つの観点をそれぞれ見てきたわけですが，この二つを比較してみることにしましょう。このセクションの最初に提示した，ロボットサッカーゲームの例に戻りましょうか。この三つの表現について，頻度主義者やベイジアンがどう考えると思いますか？ 頻度主義者がいう正しい確率の定義に当てはまるのは，どの表現でしょう？ ベイジアンが選ぶのはどの表現でしょう？ 頻度主義者

やベイジアンにとって，意味を持たない表現はどれでしょう? もしあなたが二つの観点を理解できたなら，これらの問いにどう答えたらいいかわかるはずです。

オーケイ，あなたは両者の違いを理解していて，その上でどちらが正しいのか，迷っているんですね? 正直にいうと，どちらが正しい答えなのか私も知りません。言えることは，頻度主義者のように一連の出来事を考えることは数学的に間違えているわけではないし，ベイジアンの合理的エージェントの信念で定義するのも数学的に間違えているわけではない，ということです。実際，深く掘り下げていくと，ベイジアンと頻度主義者は多くの点で合意できることがあります。多くの頻度主義者の方法は，ベイジアンの合理的なエージェントがするであろう意思決定と同じことを言います。多くのベイジアンの方法は，頻度主義者の良い特徴をも持っています。

ほとんどの部分において，私は現実主義的ですから，私は信頼できるあらゆる統計的な手法を使います。結局，この本での説明は，ベイズ的手法の方が好ましいようになっているかもしれません。しかし私は頻度主義的な方法について，基本的に反対の立場にないのです。誰しもそこまで満足しているわけではありません。例えば，R. フィッシャー卿のことを考えてみます。彼は 20 世紀の統計学者の巨人で，ベイジアンのあらゆることに対する猛烈な敵の一人であり，ベイジアンの確率について，その統計の数学的基礎に関する論文を “より精緻な統計的概念への発展を阻むジャングル”(**Fisher1922b**) といったぐらいです。一方，心理学者の P. ミールは，頻度主義的方法に傾倒すると，あなたを “夢見る乙女の楽しい長旅だが科学的な成果を残すことのない，納得はするけど不毛な知的探索”(**Meehl1967**) に連れていくのだ，と言ったりしています。聞いたことがあるかもしれませんが，統計の歴史はエンターテインメント性を欠きません。

どちらにせよ，私はベイジアンの観点が好きですが，統計分析の多数派は頻度主義的アプローチを基盤にしています。私の理由はプラグマティックなものです。この本のゴールは心理学における典型的な学部統計教育の領域をざっとカバーしていますので，ほとんどの心理学者が使っているような統計的ツールを理解したいと思うのなら，頻度主義者の方法を掴み取る必要があるでしょう。その努力は無駄にならないと約束します。あなたがもしベイジアンの観点に切り替えたいと思うのなら，“オーソドックスな” 頻度主義者の観点で書かれた本を一冊は読み通すべきです。とはいえ，私はベイジアンの観点を全く無視するわけではありません。今までもそしてこれからも，私はベイジアンの観点からコメントを追加するでしょうし，Chapter **??**. ではより深い内容を掘り下げていきたいと思います。

1.3 確率の理論の基礎

ベイジアンと頻度主義者の思想的な議論はさておき，確率が従うべきルールについてはほとんど同意がとれています。これらのルールに到達するには様々な異なる道があります。もっとも一般的に使

われるアプローチは，20 世紀の最も優れたロシアの数学者，アンドレイ・コルモゴロフによって基礎が作られたものです。詳細に立ち入ることはしませんが，それがどのようなものか，ちょっとした感覚をお伝えしようと思います。そのためには，私は私のズボンについて話さなければなりません。

1.3.1 確率分布入門

私の人生における困った真実の一つは，私がズボンを 5 本しか持っていないということです。ジーンズのものが 3 つ，スーツの下が一つ，トレーニングウェアのズボンが一つ，です。さらに悲しいことに，私はそれに名前をつけています。わたしはそれを，X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 と呼んでいます。本当にそうなんです。だから私はミスター想像力，と呼ばれています。さてある日，私がそのズボンの一つを取り出して履きました。ズボンを二つ同時に身につけようとするほど愚かではないですし，トレーニングのおかげでズボンを履かずに外に出ることはもうなくなりました。この状況を確率理論の言葉を使って表現するなら，それぞれのズボン (つまり各 X) のことは，**根元事象**といいます。根源事象のキーポイントは，私たちが観測するとき (例えば，私がズボンを身につけようとするとき) はいつでも，結果は一つ，そしてその出来事のどれか一つでしかない，ということです。言ったように，私はいつもズボンを 1 着しか身につけませんから，私はこの制約を満たしていることになります。同様に，あらゆる確率事象のセットのことを，**標本空間**といいます。確かに，これを “衣装部屋” と呼ぶ人もいるかもしれませんが，それは確率の用語で私のズボンについて語ることを拒否しているからです。残念。

オーケイ，私たちは今や標本空間 (衣装部屋) を手にしたわけで，それは可能な根元事象 (ズボン) から出来上がっているので，この各要素である事象に**確率**を割り振っていきたいと思います。事象 X に対して，事象の確率 $P(X)$ は 0 から 1 の間の数字です。より大きな $P(X)$ の値は，その事象がより生じやすいことを意味します。そう例えば，もし $P(X) = 0$ なら，事象 X は生じ得ない (つまり，私は決してそのズボンを履かない) ことを意味します。あるいは，もし $P(X) = 1$ なら，事象 X は確実に生じる (つまり，私はいつもそのズボンを履く) ことを意味します。その間にある確率の数字が意味するのは，私は時々それらのズボンを履くということです。たとえば，もし $P(X) = 0.5$ なら，私は二回に一回そのズボンを履く，ということを意味します。

ここまできたら，ほとんど終わったようなものです。最後にやらなければならないことは，“いつも生じるなにか” を認識する必要があるということです。私がズボンを履く時はいつも，本当にズボンをちゃんと履いているのです (おかしなことを言ってるようですが，正しいですよね?)。確率の言葉で幾分古臭い表現になりますが，根元事象の確率を足し合わせると 1 になる，ということです。これは**確率の総和の法則**として知られているもので，誰もが本当に気にしているわけではありません。

より大事なことは，これらの必然性が満たされたなら，私たちが手にしたのは**確率分布**である，ということです。例えば，ここに確率分布の例があります。

どのズボン?	ラベル	確率
hline 青いジーンズ	X_1	$P(X_1) = .5$
灰色ジーンズ	X_2	$P(X_2) = .3$
黒いジーンズ	X_3	$P(X_3) = .1$
黒いスーツ	X_4	$P(X_4) = 0$
黒いトレーニングウェア	X_5	$P(X_5) = .1$

各事象は 0 から 1 の間の確率についての数字を持っていて，全ての確率を足し合わせると 1 になります。驚きました。この分布を可視化するために，棒グラフを書くこともできます。図 **??**を見てください。さて，ここにきて，私たちはすべて成し遂げたようです。すでにあなたは確率分布の何たるかを学びましたし，私はズボン全体に注目したグラフの作り方を見つけ出したのです。私たちの勝利です！

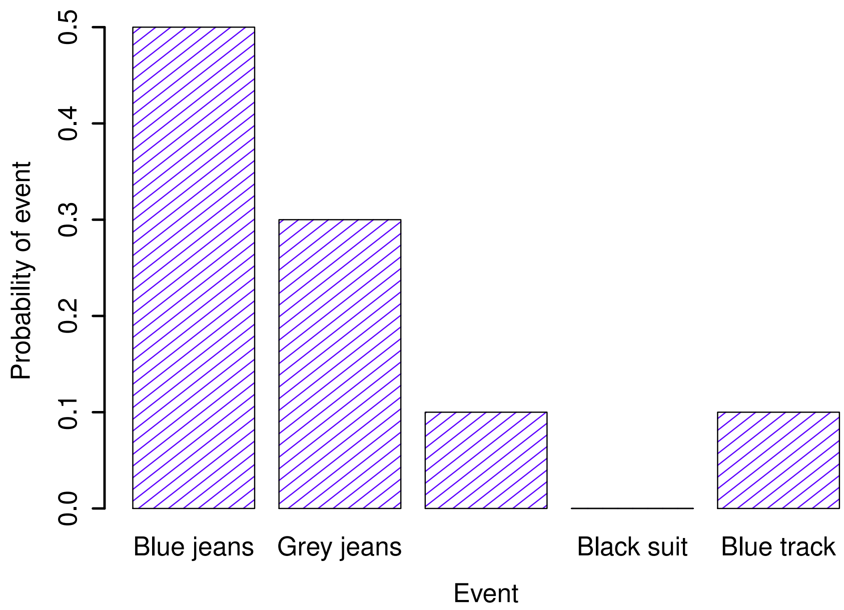


Figure1.2 “ズボン” 確率分布の視覚的記述．ここには 5 つの “根元事象” があって，それは私の持っている 5 本のズボンに対応しています。各事象はなんらかの生起確率を持っています。この数字は 0 から 1 の間の値です。これらの確率すべてを足すと 1 になります。

. . . .

もう一つ指摘しておかなければならないことがあります。それは，確率理論は**非根元的事象**についても，根元事象と同じように語ることを許してくれるということです。この考え方を表現する最も簡単な方法として，例をあげましょう。ズボンの例では，私がジーンズを履く確率を完全に適切な方法

Table1.1　確率が満たすべきいくつかの基礎的ルール。この本でこの後お話しする分析を理解するために，これらのルールを知っておく必要は必ずしもありませんが，もう少し深く確立理論を理解しておきたいのなら，重要なことです。

英語で	表記		数式
not A	$P(\neg A)$	$=$	$1 - P(A)$
A or B	$P(A \cup B)$	$=$	$P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
A and B	$P(A \cap B)$	$=$	$P(A\|B)P(B)$

で参照できるのでした。このシナリオの中ですと，適当な出来事の一つとして実際に生じうる根元事象である限り，“ダンがジーンズを履く” という事象が生じたということができます。この場合，“ 青いジーンズ”，“黒いジーンズ”，“灰色ジーンズ” が該当します。数学用語で私たちが “ジーンズ” 事象を E と定義する時，それは根元事象 (X_1, X_2, X_3) のセットに対応します。これらの根源事象のどれが生じても，E が生じたと言っても良いでしょう。E の定義をこのように書き下したとして，確率 $P(E)$ について言及するなら，ちょっと直接的すぎますが，単にこれらを数え上げればいいですね。この場合ですと，

$$P(E) = P(X_1) + P(X_2) + P(X_3)$$

とすることであり，青，灰色，黒のジーンズの確率がそれぞれ.5,.3,.1 なので，私がジーンズを履く確率は.9 だ，ということができます。

この時点で，あなはたこれが非常に明白でシンプルだと思うかもしれません。それは正しいです。私たちがここでやったのは，いくつかの常識的な考え方にある基本的な数学のラップをかけただけ，なのです。とはいえ，これらの単純な始まりから，とてつもなく強力な数学的道具を作り上げることができるのです。この本では決してその詳細にまで立ち入りませんが，そのほかの確率が守るべきルールについてはリストにして，表 **??**に示してあります。これらのルールは私がすでに上で述べたシンプルな仮定から導出できますが，この本のどこにもこのルールを適用するところがありませんので，やらないでおきます。

1.4 二項分布

あなたの想像通り，確率分布は非常に様々に変化しますし，分布の範囲は広大な範囲に及びます。ですが，それら全てが同程度に重要だということではありません。実際，この本の内容の大部分は，5 つの分布のどれかに依存しています。その 5 つとは，二項分布，正規分布，t 分布，χ^2(“カイ二乗”) 分布，F 分布です。次のいくつかのセクションで私がやろうとしているのは，これら 5 つ全てにい

ての簡単な導入です。特に二項分布と正規分布に注目していきます。私は二項分布から始めようと思います。これが 5 つの中では最もシンプルですから。

1.4.1 二項分布の導入

確率の理論は偶然のゲームがどのようになっているのかを記述しようとする試みから始まりました。ですから，私たちの**二項分布**についての議論は，サイコロをふったりコインをフリップするお話にするのがよいでしょう。単純な "実験" を想像してみてください。私の小さなあったかい手には，6 面サイコロが 20 個握り締められています。各サイコロの一つの面にはドクロの絵が書いてあって，残りの 5 つの面には何も書いていないものとします。20 個のサイコロ全てを転がした時，ちょうど 4 つのドクロが出る確率はどれぐらいでしょう? サイコロにいかさまがないとすると，サイコロのドクロのある面が上を向く確率が 1/6 であることがわかります。これを言い換えると，一つのサイコロについてドクロの出る確率は約 .167 であるということです。これで私たちの問いに答えるには十分な情報ですね。ではどうなるかみてみましょう。

Table1.2 二項分布と正規分布の式．私たちはこの本で他にこの式を使うことは本当にないのですが，より発展的な話に進むためにはちょっと重要なので，ここで文章の邪魔にならない表の形で示しておくのが良いと考えました。二項分布の式の中で，$X!$ とあるのは階乗関数 (つまり，1 から X までの全ての数字を掛け合わせたもの) であり，正規分布の 'exp'は指数関数を表します。もしこれらの式があなたにとってあまりわかりやすいものでなかったとしても，そんなに恐れることはありません。

Binomial	Normal
$P(X \mid \theta, N) = \dfrac{N!}{X!(N-X)!}\theta^X(1-\theta)^{N-X}$	$p(X \mid \mu, \sigma) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\dfrac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

普通，名前とか表記法について少し説明するものですよね。ここでは N を、実験におけるサイコロを振った回数としますが，これは**サイズ・パラメータ**といわれ，二項分布ではよく参照されるものになります。私たちは θ を，一つのサイコロについてドクロの目が出る確率を表すために使います。この量は，二項分布では普通**成功確率**と呼ばれます。[*2] 最後に，X はその名の通り，私たちのやる実験においてサイコロをふった時に得たドクロの数を意味します。X の実際の数字は偶然によるものなので，これを**確率変数**といいます。どの場合でも，これら全ての用語と表記を手に入れたのですから，この問題をもう少し正確に記述することができるようになったわけです。私たちが計算したい数

[*2] "成功" という言葉がちょっと曖昧なことに注意してください。アウトカムが実際は望ましくないものであったとしても，このようにいいます。もし θ が，バスの事故における怪我をした乗員の数を表す確率であったとしても，私はこれを成功確率と言い続けますが，私はバスの乗員が怪我をすることを望んでいるわけではありません!

字は $X = 4$ の確率ですから，$\theta = .167$ で $N = 20$ ですね。計算したいと思っていることの一般的な “数式” は次のように書くことができます。

$$P(X \mid \theta, N)$$

そしてここでは $X = 4$,$\theta = .167$,$N = 20$ という特別なケースに興味があるわけです。

この問題を解決する議論にうつる前に，表記について一つだけ言及しておきたいことがあります。私が X がパラメータ θ と N による二項分布からランダムに生成されるという時，私は次のような表記をします。

$$X \sim \text{Binomial}(\theta, N)$$

はいはい，あなたが何を言いたいかはわかりますよ。表記法，表記法，表記法。誰がそんなものを気にするんだ，ってことですよね。表記法の話のためにここにいる読者はほとんどいないでしょうから，私は二項分布をどうやって使うのかという話に進んだ方がいいのかもしれませんね。二項分布の式は表 **??**に書いておきましたから，それを楽しんでくれた読者もいるかもしれませんが，ほとんどの人はそんなに注意深く見なかったでしょう。この本に数式は必要ないですし，それ以上詳細について語るつもりもありませんから。その代わり，二項分布がどんなものかをあなたにお見せしたいと思います。

つまり，図 **??**は私たちのサイコロ実験で有り得る全ての X の値についてのに二項分布の確率をプロットしたものであり，$X = 0$(ドクロが出ない) から $X = 20$(全部ドクロ) までの全てについてプロットしたことになります。これは基本的な棒グラフで, 私が図 **??**に示した “ズボンの確率” と違うところはありません。横軸は起こりうる全ての事象であり，縦軸はそれらの各事象の確率だと読むことができます。ですから，20 回のうち 4 回ドクロが出るのは大体 0.20(すぐにわかることですが, 正確な答えは 0.2022036) です。言い換えると，あなたがこの実験を繰り返すと，そのうち 20% の偶然性でそうなると期待できます。

二項分布がどのように変化するかの感覚を掴んでもらうために m，θ と N の値を変えてから，サイコロを転がす代わりにコインフリップをやったらどうなるか想像してみましょう。今度は，私の実験は公平なコインを繰り返しフリップするこにし，私が興味を持っているアウトカムはコインが表を向いた回数だと考えます。このシナリオだと，成功確率は $\theta = 1/2$ になります。コインを $N = 20$ 回フリップするつもりだとしましょう。この実験では，成功確率を変えましたが，実験の回数は同じなわけです。こうすると私たちの二項分布はどうなるのでしょう？ そう，図 **??**が示すように，こうすることの主な効果は分布全体を動かすことになる，と思いますよね。オッケー，じゃあコインを $N = 100$ 回フリップしたらどうなりますか？ そう，この場合は図 **??**b のようになりますね。この分布が示すのは，大まかな中心傾向ですが，確率的な結果におけるちょっとした散らばりもあるのです。

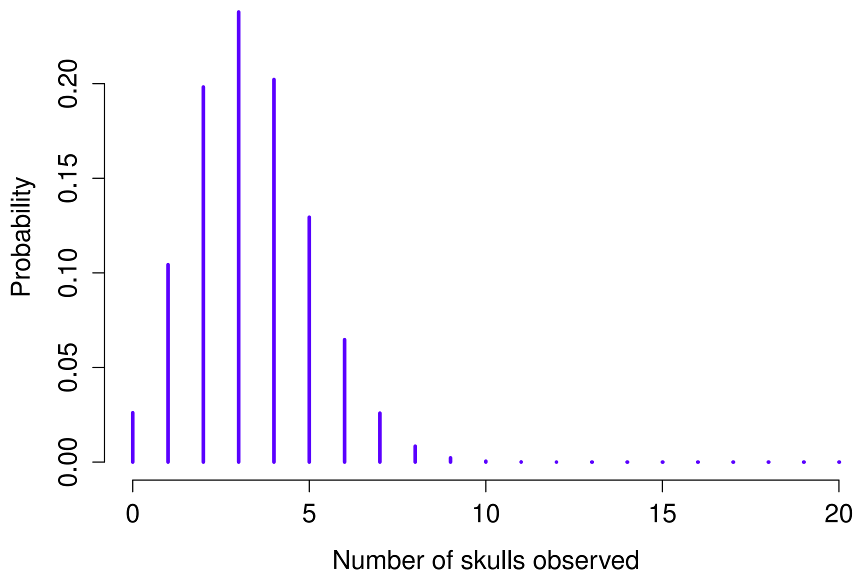


Figure1.3　サイズパラメータが $N = 20$ で成功確率 $\theta = 1/6$ の二項分布。縦のバーそれぞれがそのアウトカムの確率を表しています (すなわち，値 X の確率)．これは確率分布なので，それぞれの確率は 0 から 1 の間に入る数字であり，バーの高さを足し合わせると 1 にならなければなりません。

1.5 正規分布

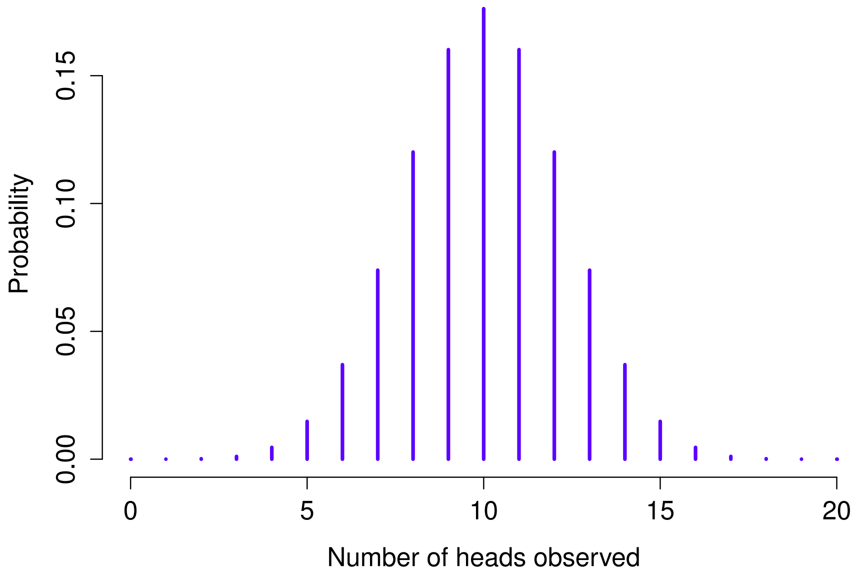
二項分布は概念的に最も簡単な分布でしたから理解しやすかったと思いますが，それが最も重要な分布だったかと言われるとそうではありません。その名誉ある称号は**正規分布**に贈られます。正規分布は "ベルカーブ" や "ガウス分布" とも言われます。正規分布は二つのパラメータをつかって表されます。すなわち，分布の平均を表す μ と，分布の標準偏差を表す σ です。

私たちがよく使う表記法で，変数 X が正規分布に従うというときは，次のように表します。

$$X \sim \mathrm{Normal}(\mu, \sigma)$$

もちろん，これは単なる表記法に過ぎません。これは正規分布そのものについて，なんら面白いことを教えてくれるものではありません。二項分布の時のように，私はこの本に正規分布の数式を含めてはいます。というのも，統計学を学ぶどんな人にとっても，少なくともそれを目にしておくこ

(a)



(b)

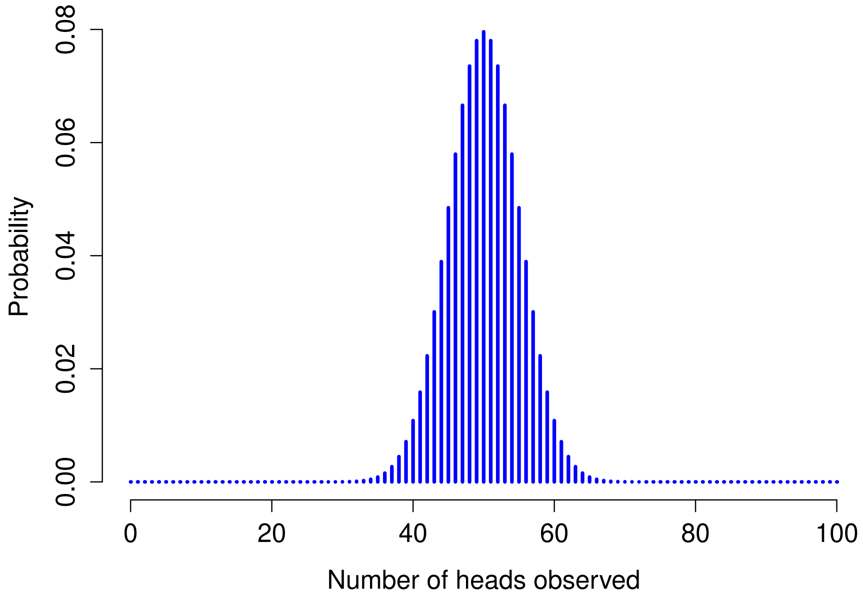


Figure1.4　私が公平なコインをフリップするシナリオについての二項分布で，想定される確率は $\theta = 1/2$ とします。パネル a では，コインを $N = 20$ 回，パネル b では $N = 100$ 回フリップしたものです。

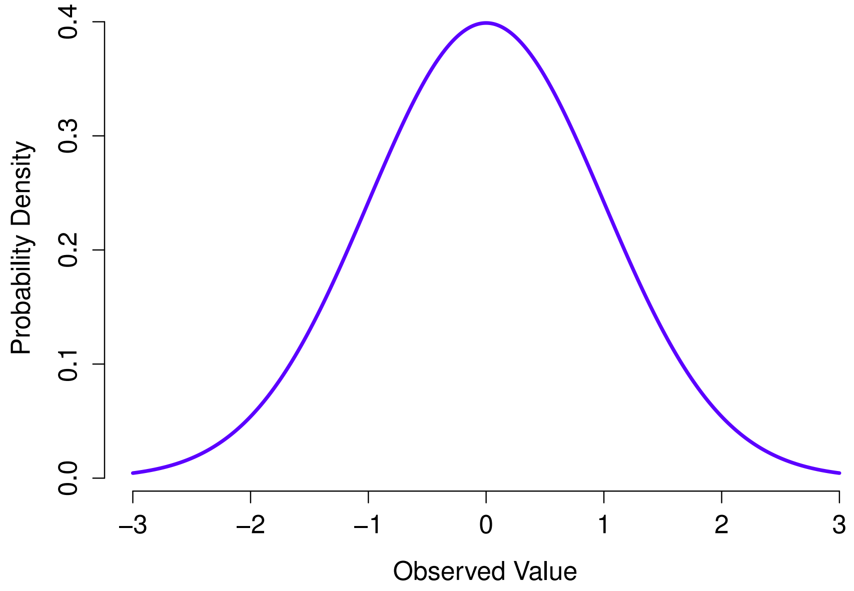


Figure1.5　平均 $\mu = 0$ で標準偏差が $\sigma = 1$ の正規分布。x-軸はある変数の値に対応しており，y-軸はその値を我々がどの程度観測しやすいかを教えてくれます。ですが，y 軸にあるのは“確率密度”であって“確率”ではないことに注意してください。ここには連続的分布ならではの，微妙でちょっと腹立たしい特徴があって，y 軸の振る舞いはちょっと奇妙なのです。すなわち，このカーブの高さは，実際には x の値を観測する確率を表しているわけではないのです。一方で，このカーブの高さは，どの x の値がより生じやすいか (より高いほうがそうなのですが) をあなたに教えてくれるものです。(この面倒な詳細については，Section **??**をみてください)

とは重要だと考えるからなのですが，これは入門書でもあるのでそこにフォーカスすることはせず，表 **??**の中に入れておくに止めておきます。

数学的側面に注目する代わりに，正規分布に従う変数が意味することの感覚を掴んでみましょう。そのために，図 **??**にある，平均 $\mu = 0$ と標準偏差 $\sigma = 1$ の正規分布プロットをみてみましょう。“ベルカーブ”という名前の由来がわかると思います。そう，ベルみたいに見えますよね。二項分布を描いたときのプロットとは違って，図 **??**にある正規分布の図では“ヒストグラムのような”バーの代わりにスムーズなカーブが描かれていることに注意してください。これは曖昧な選択を表しているのではなく，二項分布が離散的だったのに対し，正規分布は連続的なのです。例えば，前のセクションでやったサイコロを転がす例では，ドクロが 3 つ，4 つの確率を得ることはできましたが，3.9 個のドクロを考える，というのは不可能です。前のセクションで私が描いた図は，このことを反映していたのです。図 **??**では，例えば，バーは $X = 3$ や，$X = 4$ に位置することはありましたが，その間に

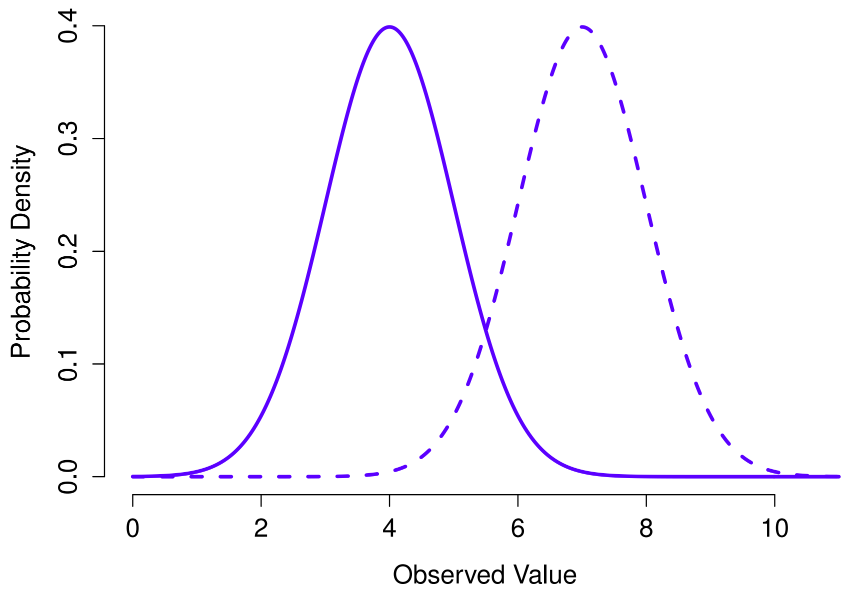


Figure1.6　正規分布の平均を変えたら何が起こるかを描いたもの。実線は平均 $\mu = 4$ の正規分布。点線は平均 $\mu = 7$ の正規分布を表しています。どちらも，標準偏差は $\sigma = 1$ です。はたして，二つの分布は同じ形をしており，点線が右側にずれています。

....

は何もありません。連続的な量というのは，この制限に当てはまらないのです。例えば，天気のことについて考えてみましょう。ある快適な春の日の温度は，23 度でも，24 度でも，23.9 度でも，そのほかどんな間の数字でもあり得ます。というのも，気温というのが連続変数だからです。ですから，正規分布で春の気温を記述するのがまあ適当だろう，ということになります[*3]

これを念頭において，正規分布がどのような動きをするのか直観的につかめるかどうか，見てみましょう。まず，分布のパラメータ周りで遊んでみた時に，何が起こるかをみてみたいと思います。そのために，図 **??**に標準偏差が同じで平均が異なる正規分布をプロットしました。あなたが想像した通り，全ての分布は同じ "幅" をもっています。違いはそれらが右，あるいは左にシフトすることだけです。そのほかの特性については全て同じです。それに対して，平均を一定にしたまま標準偏差を大きくしていくと，分布の頂点は同じ場所のままですが，分布がどんどん幅広くなることが図 **??**にみてとれますね。しかし注意して欲しいのは，分布の幅を広くした時に，頂上のの高さが縮小してい

[*3]実際には，正規分布はとても便利なので，変数が現実的に連続的でない場合であっても，それを使う傾向があります。十分なカテゴリー数があれば (例えば，質問紙におけるリッカートスケールなどです)，正規分布をその近似として適用するというのが標準的な実践例になっています。あなたが思っているよりも，実戦ではそれでうまくいくのです。

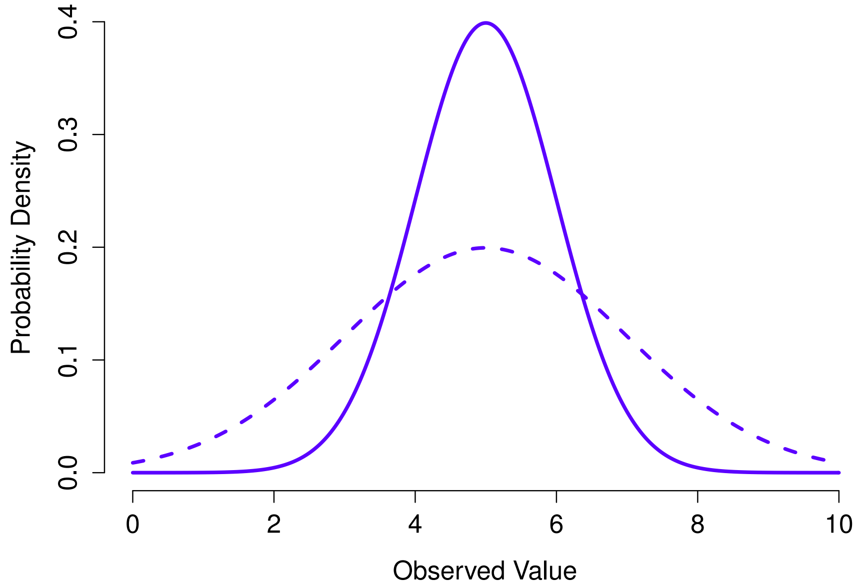


Figure1.7　正規分布の標準偏差を変えた時に何が起こるかを描いたもの。どちらの分布も平均が $\mu = 5$ ですが，標準偏差が異なります。実線は標準偏差 $\sigma = 1$ の分布で，点線は標準偏差 $\sigma = 2$ の分布です。結果として，分布は同じスポットに "中心化" していますが，点線が実線にくらべて幅が広くなっています。

....

くことです。これは起こるべくして起こることです。というのも離散的な二項分布のを描いた時に，バーの高さの合計が 1 になったと同じように，正規分布のカーブの下の領域を合計したものも 1 にならなければならないのです。次に進む前に，正規分布の重要な特徴をもう一つ，指摘しておきたいと思います。具体的な平均と標準偏差がどんな値であるかにかかわらず，平均周りの 1 標準偏差の間に全体の 68.3% が含まれるということです。同様に，平均周りの 2 標準偏差の間に全体の 95.4% が，平均周りの 3 標準偏差の間に全体の 99.7% が含まれます。このことは図 **??**に描かれています。

1.5.1　Probability density

正規分布に関する議論について，私が触れていないことがあります。一部の入門書では，それは完全に省略されています。多分そうした方がいいのです。その "触れていないこと" というのは，統計

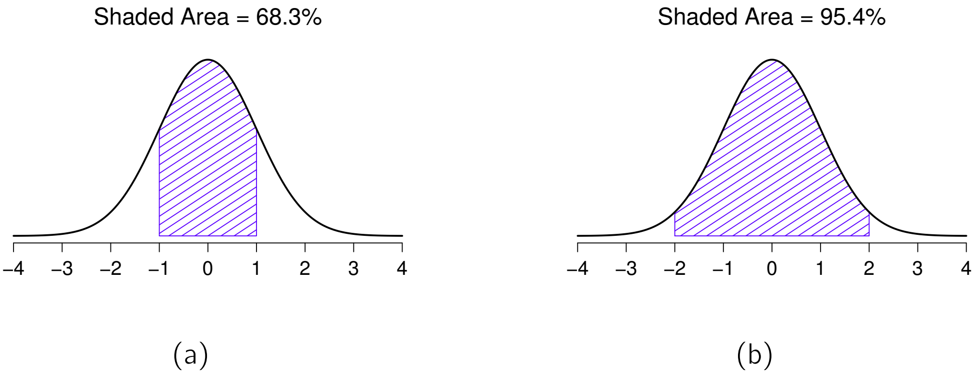


Figure1.8　カーブの下の面積は観測値が特定の範囲で得られる確率を教えてくれます。点線の正規分布は，平均 $\mu = 0$ で標準偏差 $\sigma = 1$ です。影のついた領域は，二つの重要なケースにおける“カーブの下の面積” です。パネル a では，平均周りの 1 標準偏差の中に観測値が得られる確率が 68.3% であることを見てとることができます。パネル b では，平均周り 2 標準偏差の中に観測値が得られる 確率が 95.4% であることを見てとることができます。

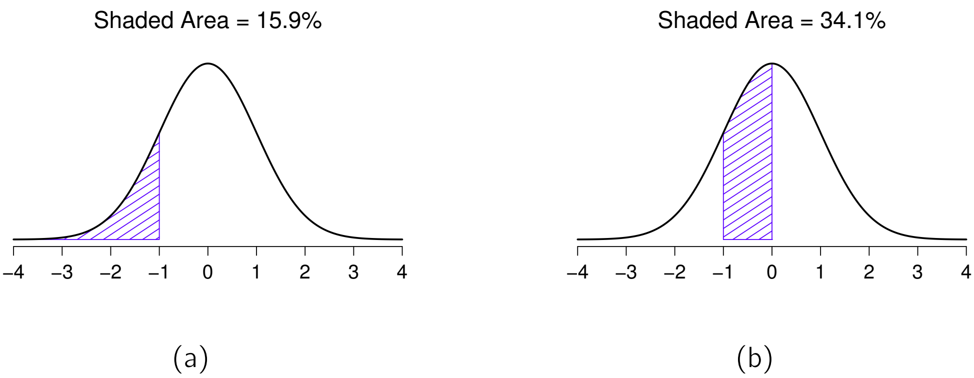


Figure1.9　“カーブの下の領域” についてのさらに二つの例です。平均より 1 標準偏差下より小さい観測値が得られる確率は 15.9% で (パネル a)，平均と平均より 1 標準偏差下の区間に観測値が得られる確率は 34.1% です (パネル b)。この二つの数字を足し合わせると，15.9% + 34.1% = 50% になることがわかりますね。正規分布するデータでは，平均より下の観測値が得られる確率は，50% になります。そしてもちろん，このことは平均以上の観測値が得られる確率が 50% になることも意味します。

学において応用される確かに歪んだ基準に照らしてみても，奇妙で直感に反するように思えるからです。幸いにも，基本的な統計学を実行する上では，そこまで深いレベルの理解は必要になるようなことではありません。というより，基本的な領域を越えようとしたときになって初めて，そのことが重要になってくるのです。ですから，もし意味が分からなくてもそれほど恐れることはないですが，その要点を遵守することだけは心がけてください。

正規分布についての議論を通じて，一つか二つ，ちょっと意味が分からないことがありますね。おそらく気付いたと思うのですが，図の y 軸には "確率密度" というラベルがあります。密度，ではなく。また，私が正規分布の式を書いたときに，$P(X)$ の代わりに $p(x)$ を使っていることに気づいた人もいるかもしれません。

後々わかるのですが，ここで示されているのは実際には確率ではなく，それ以外の何かなのです。その何かを理解するためには，X が連続変数であるということが本当は何を意味しているのかについて，少し考える時間を取る必要があります。外の気温について話をしているとしましょう。温度計はそれが 23 度であることを教えてくれますが，私は本当はそうではない，と知っています。ぴったり 23 度ではないのです。23.1 度なのかもしれません。もちろんそれが本当かどうかもわかりません。というのも実際には 23.09 度かもしれないのですから。しかし私が思うに... というわけです。わかりますね。本当に連続的な量に伴うトリッキーな考え方は，あなたは正確にそれがどれぐらいであるかを決して知ることができない，ということです。

では，これが確率について考えるときに何をもたらすか，を考えてみましょう。明日の最大気温が平均 23，標準偏差 1 の正規分布からサンプルとして得られるとしましょう。気温が正確に 23 度になる確率はどれぐらいでしょう？ その答えは "ゼロ"，あるいは "ほとんどゼロになるゼロに近い数字" になるでしょう。何故そうなるのかですって？ それは無限に小さいダーツの的に，ダーツの矢を投げようとしているようなものだからです。あなたがどれほど優れた腕前の持ち主でも，決して当たることはないでしょう。実生活においては，あなたが決して 23 度ちょうどの値を得ることがないのです。それはいつだって，23.1 度とか，22.99998 度とか，そんな感じになっているはずです。言い換えると，気温がちょうど 23 度になる確率について語るということは，全く無意味だということです。日常用語で，私はあなたに外の気温は 23 度だと言ったりします。でもそのあとで実は 22.9998 度だったということが分かっても，あなたは私を嘘つき呼ばわりしたりしないでしょう。日常用語での "23 度" というのは普通，"22.5 度から 23.5 度の間のどこか" ぐらいの意味しかないのです。ですから，ちょうど 23 度である確率について尋ねることがそれほど意味のあることではないとしても，気温が 22.5 度から 23.5 度の間，あるいは 20 度と 30 度の間，もしくはそれ以外の範囲について，確率を問うことは意味があるのです。

この議論のポイントは，私たちが連続変数について議論しているとき，特定の値についての確率について言及するのは意味がない，ということを明らかにしておくことです。私たちが話すことができることは，ある値についての確率は常に特定の範囲を持った値についてなのです。あなたが必要とする特定の範囲についての確率を見つけるためには，"カーブの下の領域" を計算しなければなりませ

ん。このことは既にみてきた通りで，図 **??**の影がついた領域が表しているのは本当の確率です (例えば図 **??**a は平均周りの 1 標準偏差の観測値が得られる確率を表しています)。

オーケー，これでストーリーの一部が説明されます。私は連続的な確率分布をどのように理解すれば良いかについて (例えば，カーブの下の領域というのが鍵です)，少しばかり説明してきました。しかし $p(x)$ についての数式で実際に表していたのは何でしょう？ $p(x)$ が確率を表していないことは明らかですが，ではそれは何でしょう？ $p(x)$ で表される量の名前は，**確率密度**で，先ほどの図で書いてあったカーブの高さに対応するものです。密度そのものは，それだけでは意味がありませんが，カーブの下の領域が本当の確率として常に理解できるように “工夫された仕掛け” なのです。正直にいうと，今あなたが知っておくべきことがそれです[*4]。

1.6 そのほかの便利な分布

正規分布は統計学で最もよく使われる分布ですが (その理由については少し触れましたが), 二項分布もいろいろな目的のために使える便利なものです。しかし統計学の世界は確率分布で埋め尽くされていて，中にはふと通りがかりに出会うものがあります。特にこの本では 3 つの分布が出てきます。t 分布，χ^2 分布，そして F 分布です。それぞれの数式を提示しようとは思いませんし，そこまで詳細に語るつもりもないのですが，ちょっとした図をお見せしましょう。

[*4]ちょっとした計算を知っている人のために，もう少し正確な説明をしておきます。確率は非負で総和が 1 になるのと同じで，確率密度も非負で積分すると 1 にならなければなりません (積分は全てのとりうる値 X に対して行われます)。X が a と b の間に落ちる確率を計算するためには，該当する範囲の密度関数に対しての積分，$\int_a^b p(x)\ dx$ を定義します。この計算を覚えていない，あるいは習ったことがないと言うのでも心配しなくて結構です。この本ではそれは必要ないんですから。

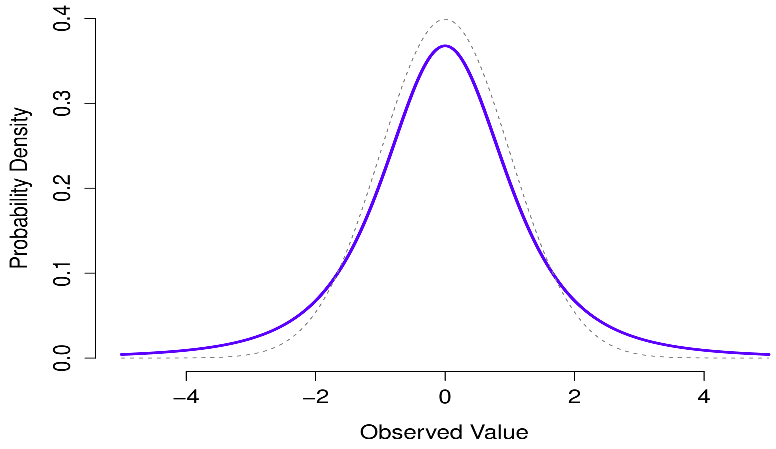


Figure1.10　自由度 3 の t 分布 (実線)。正規分布に似ているようですが，全く同じというわけではありません。比較のために，標準正規分布を点線でプロットしました。

. . . .

- ***t* 分布**は連続分布で正規分布によく似ています。図 **??**を参照してください。t 分布の“ 尻尾”は正規分布よりも “重い”(つまり，より外れた値まで広がっている) ことに注意してください両者の間には重要な違いがあります。この分布は，データが実際は正規分布に従っていても，その平均と標準偏差がわからないという時に現れるものです。この分布については，第 **??**章でまた触れることになります。
- **χ^2 分布**は様々な場面で出てくるもう一つの分布です。私たちがこの分布に出会う状況は，カテゴリカルなデータ分析 (第 **??**章参照) ですが，実際に至るところで見ることができるものの一つです。数学的な意味を掘り下げていきますが (嫌いな人なんていませんよね?)，なぜ χ^2 分布が至る所で見られるのかについての主たる理由は，正規分布する変数がたくさんあれば，その変数を二乗して足し合わせる (この手続きは “平方和 (sum of squares)” といいますが) と，その合計が χ^2 分布に従うからです。このことが便利であると気づくことが多いことに驚くでしょう。ともかく，ここでは χ^2 分布がどんな形なのかを見ておくことにしておきましょう。: 図 **??**.
- ***F* 分布**は χ^2 分布に少し似ていて，二つの χ^2 分布を比較する必要があるときに出てきます。確かに，正気の人間で誰がそんなことをしたがるのかと思えますが，実際のデータ分析においてはとても重要であることがわかります。χ^2 の話をした時に，“平方和” を使う際の大事な分布だと言ったことを覚えていますか? そうです，もしあなたが二つの異なる “平方和” を比較したいと思ったら，おそらく F 分布について話をしなければならなくなるでしょう。もちろん私は平方和について，まだ何の例も挙げていませんが，第 **??**章で触れることになります。

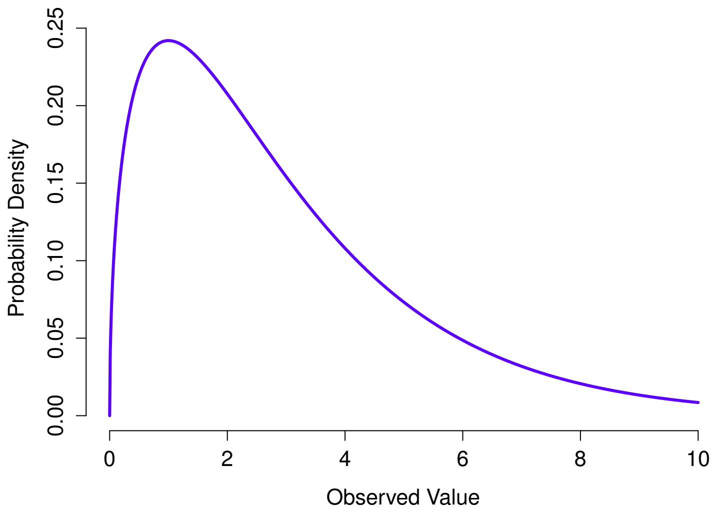


Figure1.11　自由度 3 の χ^2 分布。観測値は 0 より大きくなければなりませんし，この分布は少し歪んでいることに注意が必要です。そこにカイ二乗分布の特徴があります。

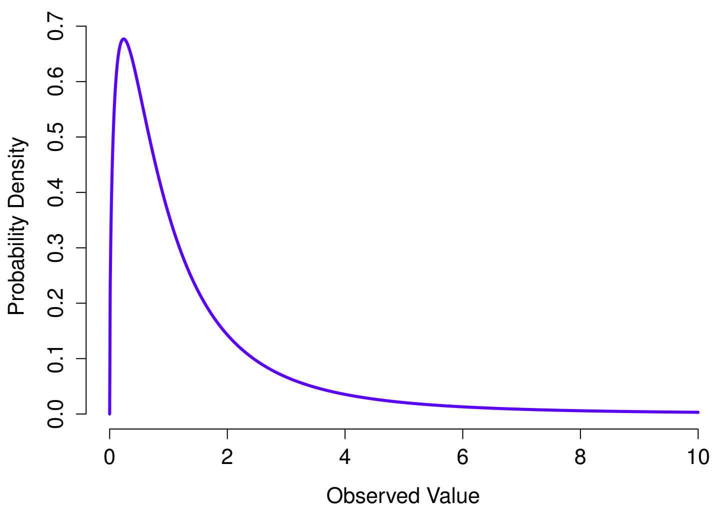


Figure1.12　自由度 3 と 5 の F 分布。定性的にいうなら，カイ二乗分布に少し似ているように見えますが，一般的には全く似ていません。

その時 F 分布について説明していくことになるでしょう。そうそう，図 **??**も見ておいてください ね。

さて，このセクションを切り上げる時間がきたようです。ここでは三つの新しい分布を見ました。すなわち χ^2 分布，t 分布，そして F 分布です。これらは全て連続分布で，何も正規分布に密接に関係しています。ここでの主な目的は，これらの分布が全て互いに，また正規分布と深いレベルで関係していることを理解することです。この本の後の方で，正規分布しているデータ，あるいは少なくとも正規分布していると仮定できるデータを扱っていきます。ここで知っておいて欲しいことはそれだけです。もしあなたのデータが正規分布していると仮定するなら，データ分析を始める時にあちこちで χ^2 分布や t 分布，F 分布が顔を出してきても，驚くことはありません。

1.7 要約

この章では確率について考えてきました。確率が何を意味するのか，なぜ統計学者はそれが意味することに同意できないのかについて論じました。確率が従わなければならないルールについても話しました。そして確率分布の概念を導入し，統計学者がよく使うより重要な確率分布をいくつか導入するのに，この章のかなりの部分を費やしました。セクションごとに分解すると，次のようになっています。

- 確率理論と統計 (セクション **??**)
- 頻度主義者とベイズ主義者それぞれの確率の見方 (セクション **??**)
- 確率理論の基礎 (セクション **??**)
- 二項分布 (セクション **??**)，正規分布 (セクション **??**)，そのほかの分布 (セクション **??**)

あなたの想像通り，私の取材した範囲は網羅的ではありません。確率理論は数学の中でも大きな分野であり，統計学やデータ分析への応用からは全体的に別れたものになっています。ですから，このテーマで書かれた本は何千とあるし，大学では一般に確率論を専門に扱う複数のクラスを提供しています。標準的な確率分布についての解説作業という “単純な” ことでさえも，大きなトピックになってしまうのです。この章で私は 5 つの確率分布を紹介しましたが，私の本棚には 45 章からなる “統計的分布”(**Evans2000**) という本があって，そこにはもっとたくさんの確率分布が含まれています。あなたにとっては幸運なことかもしれませんが，必要なのはこのごく一部です。表に出て実世界でデータ分析をするときに，このたくさんの確率分布を知っておく必要はありませんし，この本にあるような分布を必要とすることもないと思いますが，他にも多くの確率分布があることを知っておいて損はありません。

この最後の点から考えると，この章全体がちょっとした余談みたいになりますね。学部生用の心理学のクラスで統計をやる場合はほとんど，この内容については素早く通り過ぎるものですが (私がそうしていることも自覚しています)，より専門的なクラスではこの領域の基本的な基礎をおさらいすることを“忘れて”しまわれることがよくあります。大学心理学者のほとんどは確率と確率密度の違いを知りませんし，ベイジアンと頻度主義者の確率の間の違いに気付いた人も最近までほとんどいませんでした。しかし，私はこれらを応用の前に知っておくことが重要だと考えています。例えば，私たちが推測的推論をするときに“許される”言い方についてのルールがたくさんあり，それらの多くは恣意的で奇妙なものに見えます。ところが，ベイジアンと頻度主義者の違いがあることを理解すれば，すぐにそれらが意味をなすのです。同様に，**??** 章では t 検定について説明しますが，もしあなたが t 検定の数理を理解したいと思うのなら，t 分布がどういう見え方をするものなのかを知っていると役立つことでしょう。そういう気付きを得てくれるよう，願っています。