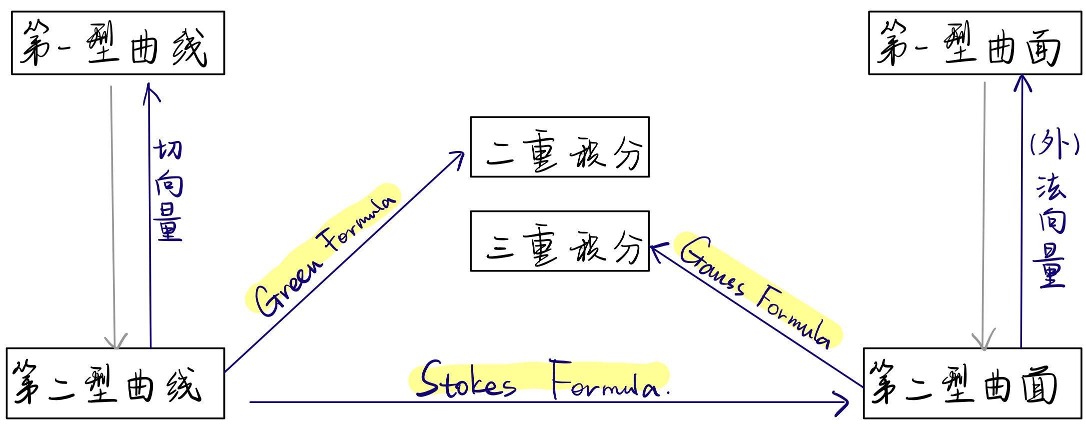
积分部分：

一、知识回顾：

分类：
- 二重积分 ⇒ 几何意义：以 $f(x,y)$ 为顶的柱体的体积.（参数化[极坐标]）
- 三重积分 ⇒ [$\int \sim \iint$ 或 $\iint \sim \int$]（参数化[柱坐标、球坐标、一般坐标]）
- 曲线积分
  - 第一型（→曲线密度求质量、重心…）
  - 第二型（→F沿路径做功）
- 曲面积分
  - 第一型（→曲面质量、重心、转动惯量…）
  - 第二型（→流量测定）

☆勿忘[J]

关系：



Green：

定理 1（格林公式） 设函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有连续的一阶偏导数，D 的边界 L 是逐段光滑的，则有格林公式：

$$\oint_{L^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad (8.3)$$

其中 L^+ 为区域 D 的正向边界.

闭曲线飞向边界

⇒☆第二型曲线积分与路径无关
- ① 任意简单光滑闭曲线 ⇒ 0
- ⇕
- ② $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
- ⇕
- ③ $\exists u$, s.t. $du = Pdx + Qdy$.

Gauss：

定理 1（高斯公式） 设空间区域 Ω 的边界是分片光滑的封闭曲面 S，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 $\Omega \cup S$ 上有一阶连续偏导数，则有高斯公式

$$\oiint_{S^+} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V, \quad (8.15)$$

其中 S^+ 为边界曲面 S 的外侧.

Stokes：

定理 2（斯托克斯公式） 设 S 为分片光滑的双侧曲面，其边界 L 是一条或几条分段光滑的闭曲线. 假定在 S 上取定一侧的单位法向量为 $\boldsymbol{n}$，再规定 L 的定向，使得 L 的定向与 $\boldsymbol{n}$ 的指向构成右手系（即将右手握拳，当拇指指向 $\boldsymbol{n}$ 时，其他四个手指的指向与 L 的定向一致）. 记 S^+ 及 L^+ 分别为给定上述定向后的 S 及 L. 若 $P(x,y,z),Q(x,y,z)$ 及 $R(x,y,z)$ 是 $S+L$ 上的有一阶连续偏导数的函数，则有斯托克斯公式：

$$\oint_{L^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$
$$= \iint_{S^+} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (8.20)$$

$$= \iint_{S^+} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

☆挖去奇点[无连续偏导]

考点：☆计算 ☆证明：多考虑奇偶性/对称性、积分中值定理、最值放缩.

二、例题：

1.(二重积分) 设 $D=\{(x,y)\,|\,|x|\le 1,\ 0\le |y|\le 2\}$，$0\le k\le 2$，试求 k，使得 $f(x)=\iint\limits_D |y-kx^2|\,d\sigma$ 取到最小值。

(一般积分)

※被积函数带绝对值时注意以零点分段。

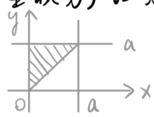
解：$f(x)=2\int_0^1 dx\int_{kx^2}^{2} y-kx^2\,dy+2\int_0^1 dx\int_{-2}^{kx^2} kx^2-y\,dy$

$=2\int_0^1 (k^2x^4+4)\,dx$

$=\frac{2}{5}k^2+8$

$\therefore f(x)_{min}=f(x)\big|_{k=0}=8.$

2.(二重积分) 求累次积分 $\int_0^a dx\int_x^a e^{y^2}dy$.

解：

$I=\int_0^a dy\int_0^y e^{y^2}dx=\int_0^a y\cdot e^{y^2}dy=\frac{e^{y^2}}{2}\Big|_0^a=\frac{e^{a^2}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(e^{a^2}-1)$

(累次积分)

※直接积分行不通时，考虑变换次序再积分

3.(二重积分) 设 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x-y\le 1,\ 0\le x+y\le 1\}$，求二重积分 $I=\iint\limits_D (x+y)^2 e^{x^2-y^2}d\sigma$.

(一般变量替换)

解：定义 $\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}(u+v)\\ y=\frac{1}{2}(u-v)\end{cases}\Rightarrow |J|=\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$

$\therefore I=\int_0^1 du\int_0^1\frac{1}{2}u^2\cdot e^{uv}dv=\int_0^1(\frac{1}{2}ue^u-\frac{1}{2}u)\,du=\frac{1}{2}\int_0^1(ue^u-u)\,du$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 ue^u du-\frac{1}{2}\int_0^1 u\,du$

$=\frac{1}{2}e^u(u-1)\Big|_0^1-\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{4}.$

4.(二重积分) 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某个邻域内连续，求 $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le\rho^2} f(x,y)\,d\sigma$

(积分中值定理)

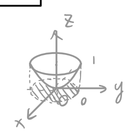
解：由题意：$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=f(\xi,\eta)\cdot S_D=f(\xi,\eta)\cdot\pi\rho^2$. $(\xi,\eta)\in U_r(x_0,y_0)$

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{\rho\to 0} f(\xi,\eta)$ 其中：$\begin{cases}x_0<\xi<x_0+\rho\\ y_0<\eta<y_0+\rho.\end{cases}$

“邻域”、“连续”等出现多考虑积分中值定理

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{\rho\to 0} f(\xi,\eta)=f(x_0,y_0).$

5.(三重积分) 计算三重积分：$\iiint\limits_\Omega (y^2+z^2)\,dV$，$\Omega: 0\le z\le x^2+y^2\le 1$.



解：柱坐标化 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}$ $|J|=r$. $\therefore I=\iiint\limits_\Omega (r^2\sin^2\theta+z^2)\cdot r\,dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_0^{r^2} r^3\sin^2\theta+z^2 r\,dz$

$=\frac{\pi}{4}$

根据积分区域来进行参数化

6.(三重积分) 计算积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{xyz}{x^2+y^2}dV$，其中 Ω 由曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2xy$ 与平面 $z=0$ 围成，曲面在上方，平面在下方.

解：进行球坐标化：$\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\theta\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z=\rho\cos\varphi\end{cases}$ $(\rho\geq 0,\ 0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0\leq\varphi\leq\pi)$ 最朴素的范围.

(Note：看次方：$(x^2+y^2+z^2)^2$ 比 a^2xy 次数高，而积分区域需有限，确定不等号为"$\leq$".)

$\rho^4\leq a^2\rho^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta$

$\rho^2\leq a^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta \Rightarrow \sin\theta\cos\theta\geq 0 \Rightarrow \sin 2\theta\geq 0 \Rightarrow \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\cup[\pi,\frac{3}{2}\pi]$

$\because$ 曲面在平面 $z=0$ 上方，$\therefore \varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$\therefore \frac{xyz}{x^2+y^2}=\frac{\rho^3\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta}{\rho^2\sin^2\varphi}=\rho\cos\varphi\sin\theta\cos\theta \qquad |J|=\rho^2\sin\varphi$

$\therefore I=\iiint\limits_{\Omega}\rho^3\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{|a|\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}\rho^3\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta$ [由 θ 的对称性]

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^4\sin^5\varphi\cos\varphi\sin^3\theta\cos^3\theta}{4}d\theta=\frac{a^4}{144}$

$\boxed{\text{抽象积分区域用不等式进行化简}}$

7.(三重积分) 设 $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq t^2}f(x^2+y^2+z^2)dV$，且 $f(1)=1$，f 为连续函数. 证明：$F'(1)=4\pi$.

解：$\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\theta\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z=\rho\cos\theta\end{cases} \Rightarrow |J|=\rho^2\sin\varphi$

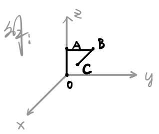
则 $F(t)=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^t f(\rho^2)\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho=8\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^t f(\rho^2)\rho^2d\rho=4\pi\cdot\int_0^t f(\rho^2)\rho^2d\rho.$

$\therefore F'(t)=4\pi\cdot f(t^2)\cdot t^2.$

令 $t=1$，则 $F'(1)=4\pi.$

8.(第一型曲线积分) 求 $\int_L(xy+yz+zx)ds$，其中 L 为过四点 $O(0,0,0)$ $A(0,0,1)$ $B(0,1,1)$ $C(1,1,1)$ 的折线.

解：



① $\overline{OA}$：$x=y=0$，$z=z$. $\int_{L_1}0\,ds=0$.

② $\overline{AB}$：$x=0$ $y=y$，$z=1$. $\int_{L_2}y\,ds=\int_0^1 y\,dy=\frac{1}{2}$

③ $\overline{BC}$：$x=x$，$y=1$，$z=1$ $\int_{L_3}(x+x+1)ds=\int_0^1(2x+1)dx=x^2+x\Big|_0^1=2.$

$\therefore \int_L(xy+yz+zx)ds=0+\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}.$

9.(第一型曲线积分) 求曲线 Γ：$\begin{cases}(x-y)^2=a(x+y)\\ x^2-y^2=\frac{9}{8}z^2\end{cases}$ 从 $(0,0,0)$ 到 (x_0,y_0,z_0) 的弧长；其中 $a>0$，$x_0>0$

解：①相乘化简：$(x-y)^3=\frac{9}{8}az^2 \Rightarrow x-y=\frac{\sqrt[3]{9a}}{2}z^{\frac{2}{3}}$ $(*)$

同时：$x+y=\frac{(x-y)^2}{a}=\frac{(9a)^{\frac{2}{3}}\cdot z^{\frac{4}{3}}}{4a}$ $(**)$

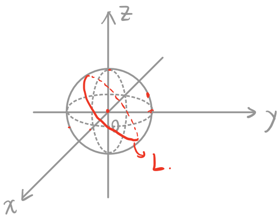
联立 $(*)$ 与 $(**)$ 得：

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\left(\frac{(9a)^{\frac{2}{3}}\cdot z^{\frac{4}{3}}}{4a}+\frac{\sqrt[3]{9a}\ z^{\frac{2}{3}}}{2}\right)\\ y=\frac{1}{2}\left(\frac{(9a)^{\frac{2}{3}}\cdot z^{\frac{4}{3}}}{4a}-\frac{\sqrt[3]{9a}\ z^{\frac{2}{3}}}{2}\right)\\ z=z.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_z'=\frac{(9a)^{\frac{2}{3}}}{6a}\cdot z^{\frac{1}{3}}+\frac{\sqrt[3]{9a}}{3}z^{-\frac{1}{3}}\\ y_z'=\frac{(9a)^{\frac{2}{3}}}{6a}z^{\frac{1}{3}}-\frac{\sqrt[3]{9a}}{3}z^{-\frac{1}{3}}\\ z_z'=1\end{cases}$$

$\sqrt{2}$

$$\therefore ds=\sqrt{2\times\left(\frac{(9a)^{\frac{4}{3}}}{36a^2}z^{\frac{2}{3}}+\frac{(9a)^{\frac{2}{3}}}{9}z^{-\frac{2}{3}}\right)+1}\ dz=\sqrt{2}\,dx \Rightarrow \int_L ds=\int_0^{x_0}\sqrt{2}\,dx=\sqrt{2}x_0$$

10.(第一型曲线积分) 求 $I=\oint_L x^2 ds$，其中 L 为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$



解：由积分曲线对称性可知：$\oint_L x^2 ds=\oint_L y^2 ds=\oint_L z^2 ds$

$\therefore I=\frac{1}{3}\oint_L x^2+y^2+z^2 ds=\frac{1}{3}R^2\cdot\oint ds=\frac{R^2}{3}\cdot 2\pi R=\frac{2\pi}{3}R^3$

利用对称性来简化计算

ps：常规做法：消参 ⇒ 反解出被消的参 ⇒ 到最后只有一个变量.

⇓

本质：投影

消去 z 得：$x^2+y^2+xy=\frac{a^2}{2}$

$$x^2+xy+\frac{y^2}{4}-\frac{y^2}{4}+y^2=\frac{a^2}{2} \Rightarrow (x+\frac{y}{2})^2+\frac{3}{4}y^2=\frac{a^2}{2} \Rightarrow \frac{(x+\frac{y}{2})^2}{(\frac{a}{\sqrt{2}})^2}+\frac{y^2}{(\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}})^2}=1$$

$$\text{令}\begin{cases} x+\frac{1}{2}y=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ y=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a\sin\theta \end{cases} \quad \theta\in[0,2\pi] \quad \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{6}}a\sin\theta \\ y=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a\sin\theta \\ z=-\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{6}}a\sin\theta \end{cases} \quad (0\le\theta\le 2\pi)$$

$$\therefore ds=\sqrt{(-\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{6}}a\cos\theta)^2+\frac{2}{3}a^2\cos^2\theta+(\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{6}}a\cos\theta)^2}\,d\theta=a\,d\theta$$

$$\therefore \oint_L x^2 ds=\int_0^{2\pi}(\frac{1}{2}a^3\cos^2\theta+\frac{1}{6}a^3\sin^2\theta-\frac{1}{\sqrt{3}}a^3\sin\theta\cos\theta)\,d\theta$$
$$=\frac{a^3}{2}\pi+\frac{a^3}{6}\pi=\frac{2}{3}\pi a^3$$

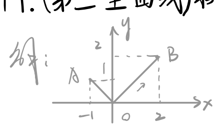
总结：参数化同一

$$\int_L f(x,y,z)\,ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\cdot\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$$

第一型曲线积分

11.(第二型曲线)求 $\int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y)dy$，其中 L 为 $y=|x|$ 上 从 $(-1,1)$ 至 $(2,2)$ 的一段.

解：



①对于 $\overline{AO}$：$y=-x$，$x=x$.

$I_1=\int_{-1}^0 2x^2-x^2-x\,dx$
$=\int_{-1}^0 x^2-x\,dx$
$=\frac{5}{6}$

②对于 $\overline{OB}$：$y=x$，$x=x$.

$I_2=\int_0^2 2x^2+x^2-x\,dx$
$=x^3-\frac{x^2}{2}\Big|_0^2$
$=6$

$\therefore I=\frac{5}{6}+6=\frac{41}{6}$.

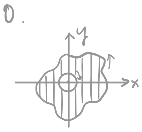
12.(第二型曲线+格林公式) 求 $\oint_{C^+}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}ds$，C为逐段光滑的简单闭曲线，$\vec{r}=(x,y)$，$r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2}$. 且 $(0,0)\notin C$.

解：$\cos(\vec{r},\vec{n})=\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r} \Rightarrow I=\oint_{C^+}\frac{\vec{r}}{r^2}\cdot\vec{n}\,ds=\oint_{C^+}\frac{x}{x^2+y^2}dx+\frac{y}{x^2+y^2}dy$

记曲线 C 围成的闭区域为 D.

则 (i) 当 $(0,0)\notin D$ 时：$I=\iint_D \frac{\partial(\frac{y}{x^2+y^2})}{\partial x}-\frac{\partial(\frac{x}{x^2+y^2})}{\partial y}\,d\sigma=0$.

(ii) 当 $(0,0)\in D$ 时：考虑 $(0,0)$ 附近某个邻域 U_r



$I=I+I_{\varepsilon^+}-I_{\varepsilon^+}$

而 $I-I_{\varepsilon^+}=0$.(格林公式)

积分路径长度

$\therefore I=I_{\varepsilon^+}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{C^+}x\,dx+y\,dy=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_C(x,y)\cdot\vec{n}\,dS=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dS=\frac{1}{\varepsilon}\oint dS=\frac{1}{\varepsilon}\times 2\pi\varepsilon=2\pi$.

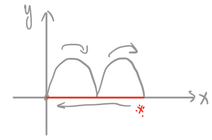
☆不存在一阶连续偏导的"奇点"需在使用格林公式时进行"挖去"

综上：当 $(0,0)\notin D$ 时：$I=0$

当 $(0,0)\in D$ 时：$I=2\pi$.

13.(格林公式) $L_n:\{(x,|\sin x|) \mid, x\in[0,n\pi]\}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} e^{y^2-x^2}\cos(2xy)\,dx + e^{y^2-x^2}\sin(2xy)\,dy$.

解：$\frac{\partial P}{\partial y}=2ye^{y^2-x^2}\cos(2xy)-2xe^{y^2-x^2}\sin(2xy)$　　$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2xe^{y^2-x^2}\sin(2xy)+2ye^{y^2-x^2}\cos(2xy)$



$\therefore \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$　$\therefore$ 原积分 $I+\int_K e^{y^2-x^2}\cos(2xy)dx+e^{y^2-x^2}\sin(2xy)dy=0$. 其中 K：从 $n\pi$ 到 0 的直线段.

$\therefore I=-\int_K \sim dx+\sim dy=-\int_{n\pi}^{0}e^{-x^2}dx=\int_0^{n\pi}e^{-x^2}dx$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}e^{-x^2}dx=\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.　①无穷积分　②化为二重.

标准正态. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=1$

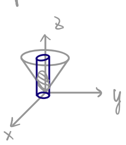
总结：$\int_C \varphi(x,y)dx+\psi(x,y)dy \xrightarrow[\psi=\psi(x(t),y(t))]{\varphi=\varphi(x(t),y(t))} \int_\alpha^\beta[\varphi(x(t),y(t))\cdot x'(t)+\psi(x(t),y(t))\cdot y'(t)]dt$

格林公式：1. 一阶连续偏导 → 挖去奇点.
2. $(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})$ 不一定恒为零.

（第二型曲线积分）

14.（第一型曲面积分）计算曲面积分：$\iint_S (x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\,dS$，其中 S 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $x^2+y^2=2x$ 所截剩下的部分.

解：1. 柱坐标化：$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=r\end{cases}$ $(0\le r\le 2\cos\theta)$ $(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2})$；　$E=2$　$F=\cos\theta\cdot(-r\sin\theta)+\sin\theta(r\cos\theta)+1\times 0=0$　$G=r^2$.



$\therefore I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}(r^4\sin^2\theta\cos^2\theta+r^4)\cdot\sqrt{EG-F^2}\,dr=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{2}r(r^4\sin^2\cos^2\theta+r^4)dr$

$=\frac{32\sqrt{2}}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^8\theta-\cos^{10}\theta+\cos^6\theta)d\theta=\frac{64\sqrt{2}}{3}\times(I_6+I_8-I_{10})=\frac{87\sqrt{2}\pi}{24}=\frac{29\sqrt{2}\pi}{8}$

使用积分公式：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\,d\theta=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为奇数}\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{为偶数}\end{cases}$
$\Downarrow$
$nI_n=(n-1)I_{n-1}$（向中间项凑）

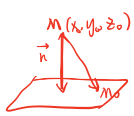
15.（第一型曲面）设 $f(x,y,z)$ 表示原点到椭球面 $\Sigma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的距离，求 $\iint_\Sigma \frac{dS}{f(x,y,z)}$.

解：外法向量：$(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2})\Rightarrow$ 切平面：对 $(x_0,y_0,z_0)\Rightarrow \frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z-1=0$.

$\therefore f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}\Rightarrow I=\iint_\Sigma\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\,dS=\iint_{\Sigma^+}\frac{x}{a^2}dydz+\frac{y}{b^2}dzdx+\frac{z}{c^2}dxdy$

$\Downarrow$

原点到平面 $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cy_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$



$d=\frac{\overrightarrow{MM_0}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}$

$=\iiint_\Sigma \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\,dV$

$=\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2c^2}\cdot\frac{4}{3}\pi abc$

$=\frac{4\pi}{3abc}(a^2+b^2+c^2)$

总结：1. 根据积分区域参数化为 $\boxed{\text{2个参数}}$
若用原本的参数：乘 $\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}$.
若用新参数：乘 $\sqrt{EG-F^2}$
2. 进行重积分

（第一型曲面积分）

16.(第二型曲面积分) 求 $I=\iint\limits_{S^+}\frac{x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy}{(ax^2+by^2+cz^2)^{3/2}}$，其中 S 为球面：$x^2+y^2+z^2=1$，取外侧为正.

解：考虑奇点 $(0,0,0)$ 附近某邻域 $U_\varepsilon: ax^2+by^2+cz^2=\varepsilon^2 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{\varepsilon^2}{a}}+\frac{y^2}{\frac{\varepsilon^2}{b}}+\frac{z^2}{\frac{\varepsilon^2}{c}}=1$

$\because I=I+I_{\varepsilon^+}-I_{\varepsilon^+}$ 而 $I-I_{\varepsilon^+}$ 运用高斯公式可知为 0.

$\therefore I=I_{\varepsilon^+}=\iint\limits_{\varepsilon^+}\frac{x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy}{\varepsilon^3}=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{\varepsilon^+}x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy=\frac{3}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{\varepsilon^+}dV=\frac{3}{\varepsilon^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\frac{\varepsilon^3}{\sqrt{abc}}=\frac{4\pi}{\sqrt{abc}}$

$\boxed{\text{！根据被积函数特点，抠除邻域！}}$

17.(第二型曲面积分)：$\iint\limits_S xy^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+zx^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧

解：$\iiint\limits_\Omega y^2+z^2+x^2\,dV$. 令 $\begin{cases}x=a\sin\varphi\cos\theta\cdot\rho\\ y=b\sin\varphi\sin\theta\,\rho\\ z=c\cos\varphi\cdot\rho\end{cases}$ $|J|=abc\rho^2\sin\varphi$.

$\iiint\limits_\Omega z^2dV=\iiint\limits_\Omega c^2\rho^2\cos^2\varphi\cdot abc\rho^2\sin\varphi\,dV=2\pi\int_0^\pi d\varphi\int_0^1\rho^4abc^3\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\rho$

$=\frac{2\pi}{5}abc^3\int_0^\pi\cos^2\varphi\,d(-\cos\varphi)$

$=\frac{4\pi}{15}abc^3$

由对称性：$I=\frac{4\pi}{15}abc(a^2+b^2+c^2)$

$\boxed{\text{用高斯公式转化第二型曲面积分}}$

18.(第二型曲面积分) 求 $I=\iint\limits_\Sigma xyz(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)\,dS$，其中 Σ：$x^2+y^2+z^2=a^2$ 在第一卦限中的部分.

解：(第一型直接算复杂 ⇒ 转为第二型) 取 (x,y,z) 点处的外法向量：$\vec{n}=(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a})$.

$I=\iint\limits_\Sigma x\cdot y^3z^3+yz^3x^3+zx^3y^3\,dS=a\iint\limits_{\Sigma^+}y^3z^3dydz+z^3x^3dzdx+x^3y^3dxdy=3a\iint\limits_{\Sigma^+}x^3y^3dxdy=3a\iint\limits_{D_{xy}}x^3y^3dxdy$，$D_{xy}=\{(x,y)|\ x^2+y^2\le a^2,\ x,y\ge0\}$.

令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ $(r\in[0,a],\ \theta\in[0,\frac{\pi}{2}])$

$\therefore I=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a r^7\cos^3\theta\sin^3\theta\,dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3a^9}{8}\cos^3\theta\sin^3\theta\,d\theta=\frac{3a^9}{64}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 2\theta\,d\theta=\frac{3a^9}{128}\int_0^\pi\sin^3t\,dt=\frac{3a^9}{64}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3t\,dt=\frac{3a^9}{64}\times\frac{2}{3}=\frac{a^9}{32}$

$\boxed{\text{利用 }\iint\limits_{S^+}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint\limits_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS\text{ 转化，}(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\text{ 为方向余弦.}}$ 一、二型曲面积分的关系.

总结：1. 常规：①写出曲面方程(通常为 $z=f(x,y)$)

②由①⇒ 法向量 $(-f_x,-f_y,1)$ 或 $(f_x,f_y,-1)$

③向量函数与单位法向量作点积 $\xrightarrow{\text{化为}}$ 第一型曲面积分

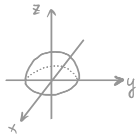
2. 其他：①参数化，并利用 Jacobi Determinant 计算出法向量.

同1计算：

"会心一击"

三、其他题目：

1. 设Σ为上半单位球面：$z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$，取内侧为曲面正方向，求$I=\iint\limits_{\Sigma} dydz+dzdx+dxdy$.



由投影方向可知，投影在yOz与xOz平面时：$\iint\limits_{\Sigma} dydz=\iint\limits_{\Sigma} dxdz=0$.

$\therefore I=\iint\limits_{\Sigma} dxdy \quad \vec{F}=(0,0,1) \quad \vec{n}=(0,0,-1)$

$\therefore I=\iint\limits_{D_{xy}} -1\, d\sigma=-1\iint\limits_{D_{xy}} d\sigma=-1\cdot\pi=-\pi$.

向"内"投影
可相互"抵销"

2. 估计积分$I_a=\oint_L \frac{ydx-xdy}{(x^2+xy+y^2)^2}$的范围。其中$L: x^2+y^2=a^2$.

☆ $x^2+xy+y^2=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}(x+y)^2$

利用上题结论：$|I_a|\le L\cdot M$.

$L: 2\pi a$.

$$P^2+Q^2=\frac{x^2+y^2}{(x^2+xy+y^2)^4}=\frac{x^2+y^2}{[\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)]^4}=\frac{16(x^2+y^2)}{[(x+y)^2+(x^2+y^2)]^4}\le\frac{16(x^2+y^2)}{16(x^2+y^2)^4}=\frac{1}{(x^2+y^2)^3}=\frac{1}{a^6}$$

$\therefore M=\left(\sqrt{P^2+Q^2}\right)_{max}=\frac{1}{a^3}$.

$\therefore |I_a|\le\frac{2\pi a}{a^3}=\frac{2\pi}{a^2}$.

"上题结论"：7. 证明下列估计式：$\left|\int_l P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right|\le L\cdot M$，其中$L$为积分路径$L$的长度，$M=\max\limits_{(x,y)\in l}\sqrt{P^2+Q^2}$.

证明：设向量函数$\vec{F}=(P,Q)$，$d\vec{r}=(dx,dy)$

$\therefore \left|\int_l P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right|=\left|\int_l \vec{F}\cdot d\vec{r}\right|\le\int_l|\vec{F}|\cdot|d\vec{r}|\le\max\limits_{(x,y)\in l}\sqrt{P^2+Q^2}\cdot\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}\le L\cdot M$.

3. 求曲线积分$I=\oint_{L^+}\sqrt{x^2+y^2}\,dx+y\left[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})\right]dy$，其中$L$为圆周：$x^2+y^2=1$

奇$\to 0$.

解：令$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$ $(0\le\theta\le2\pi)$

$\therefore I=\int_0^{2\pi}-\sin\theta+\sin\theta(\sin\theta\cos\theta+\ln(\cos\theta+1))\cdot\cos\theta\, d\theta$

$=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta-\sin^4\theta\, d\theta+\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\cdot\ln(\cos\theta+1)\,d\theta$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta-\sin^4\theta\, d\theta-\int_0^{2\pi}\cos\theta\cdot\ln(\cos\theta+1)\,d\cos\theta$

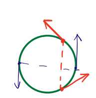
$=4\times\frac{\pi}{2}\times(\frac{1}{2}-\frac{3}{4\times2})-0$

$=\frac{\pi}{4}$

$\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1$

$\ln(2\cos^2\frac{\theta}{2})$

①观察积分区域；②观察被积函数与切线方向：③奇+同向为零；偶+反向为零



选取的点要关于积分区域所关于对称的轴线对称。

e.g. 本题 $\oint_{L^+}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\Rightarrow$ 关于y轴对称（积分区域），$\sqrt{x^2+y^2}$为x的偶，切向量x反向$\Rightarrow 0$.

$\oint_{L^+}y\cdot\ln\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow$ 关于x轴对称，$y\cdot\ln\sqrt{x^2+y^2}$为y的奇，切向量y同向$\Rightarrow 0$

4. 给定三元函数$f(x,y,z)$，拉普拉斯算子作用在f上得到一个新的三元函数$\Delta f(x,y,z)$，其定义为

$$\Delta f(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z). \tag{72}$$

设Ω是三维有界闭区域，Ω的边界S是分段光滑的曲面，$u(x,y,z)$和$v(x,y,z)$在$\Omega\cup S$上存在连续的二阶偏导数，用$\mathbf{n}$是曲面S上的外侧单位法向量，求证：

1. $\iint_S\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}dS=\iiint_D\Delta u dV$。

2. $\iiint_D(u\Delta v-v\Delta u)dV=\oiint_S\left(u\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)dS$。

3. 如果函数$f(x,y,z)$在Ω满足$\Delta f=0$，称f为调和函数。设u是调和函数，给定点$(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$，那么$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(u\frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{|\mathbf{r}|^2}+\frac{1}{|\mathbf{r}|}\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)dS$，其中$\mathbf{r}$是以$(x_0,y_0,z_0)$为起点，以$S$上的点$(x,y,z)$为终点的向量。

4. 证明平均值不等式：设u是调和函数，如果Ω是以点(x_0,y_0,z_0)为球心，以R为半径的球，那么$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_S u dS$。即球心处的函数值为球面积分平均值。

1. Proof: $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}) \cdot \vec{n}$ 方向导数的定义

$\therefore LHS = \iint_S (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}) \cdot \vec{n}\, dS$

$\therefore \vec{F} = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z})$

利用 Gauss 公式：$LHS = \iiint_\Omega (\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial z}))\, dV = \iiint_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\, dV = \iiint_\Omega \Delta u\, dV = RHS$ $\square$

2. Proof: $u \cdot \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = (u\frac{\partial v}{\partial x}, u\frac{\partial v}{\partial y}, u\frac{\partial v}{\partial z}) \cdot \vec{n}$.

$\therefore \oiint_S u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} dS = \iiint_\Omega (\frac{\partial}{\partial x}(u\frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(u\frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(u\frac{\partial v}{\partial z}))\, dV$

$= \iiint_\Omega (u\Delta v + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z})\, dV$

同理可得：$\oiint_S v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS = \iiint_\Omega (v\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z})\, dV$

$\therefore \oiint_S (u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}) dS = \iiint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\, dV$ $\square$

3. (观察 2. 中结论，希望可代入 $v = \frac{1}{|\vec{r}|}$)

令 $|\vec{r}| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$，则 $u \cdot \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = u \cdot (-\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{|\vec{r}|^3}) = -u \cdot \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{|\vec{r}|^2}$

考虑 (x_0, y_0, z_0) 附近某邻域 $U_\varepsilon = \{(x,y,z) \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 \le \varepsilon^2\}$.

在区域 Ω / U_ε 使用第二问结论

$\oiint_S (-u\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{|\vec{r}|^2} - \frac{1}{|\vec{r}|}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}) dS = \oiint_S (-u\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{|\vec{r}|^2} - \frac{1}{|\vec{r}|}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}) dS - \oiint_{S_\varepsilon^+} \sim dS + \oiint_{S_\varepsilon^+} \sim dS$

而 u 是调和函数，$\therefore \oiint_S \sim dS - \oiint_{S_\varepsilon^+} \sim dS = \iiint_\Omega (u \cdot \Delta\frac{1}{|\vec{r}|} - \frac{\Delta u}{|\vec{r}|}) dV = \iiint_\Omega u \cdot \Delta(\frac{1}{|\vec{r}|})\, dV = 0$.

$\therefore \oiint_S (-u\cdot\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{|\vec{r}|^2} - \frac{1}{|\vec{r}|}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}) dS = \oiint_{S_\varepsilon^+} (-u\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{|\vec{r}|^2} - \frac{1}{|\vec{r}|}\cdot\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})\, dS$

$= -(\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{S_\varepsilon^+} u\, dS + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}\iint_{S_\varepsilon^+} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS}_{})$

$= -\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{S_\varepsilon^+} u\, dS$

利用第一问结论为0.

$\therefore RHS = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\iint_{S_\varepsilon^+} u\, dS$. 转化为证明：$\lim_{\varepsilon\to0^+} \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\iint_{S_\varepsilon^+} u\, dS = u(x_0, y_0, z_0)$

考虑：$\left|\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\iint_{S_\varepsilon^+} u\, dS - u(x_0,y_0,z_0)\right| = \left|\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\iint_{S_\varepsilon^+} [u(x,y,z) - u(x_0,y_0,z_0)]\, dS\right| \le \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\iint_{S_\varepsilon^+} |u(x,y,z) - u(x_0,y_0,z_0)|\, dS$

同时：$\lim_{\varepsilon\to0^+} |u(x,y,z) - u(x_0,y_0,z_0)| = 0$. 即 $\lim_{\varepsilon\to0^+} |u(x,y,z)| = |u(x_0,y_0,z_0)|$

$\therefore \lim_{\varepsilon\to0^+} \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\iint_{S_\varepsilon} u(x,y,z)\, dS = u(x_0,y_0,z_0) \cdot 4\pi\varepsilon^2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} = u(x_0, y_0, z_0)$. $\square$.

4. Proof: 根据 3. 代入 Ω 为球的情形可得证. $\square$.