Lista III

Tarefa de leitura:

1. GY seções 2.2 a 2.4.
2. Texto complementar/alternativo: Sakurai seções 2.1 a 2.4.

Problemas para entregar dia 16 de abril

1. Considere a aplicação do formalismo de matriz densidade para o problema de uma partícula de spin 1/2 em um campo magnético estático $\vec{B}$. Em geral, a partícula com spin terá também um momento magnético, orientado ao longo da direção do spin. Para partículas de spin 1/2, o operador de momento magnético tem a forma:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2}\gamma \; \vec{\sigma} \, ,$$

onde $\vec{\sigma}$ são as matrizes de Pauli e γ é uma constante chamada de fator giromagnético. Lembre-se que a Hamiltoniana do sistema é $H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$

A partícula de spin 1/2 pode ter uma orientação de spin, ou "vetor de polarização", dado por

$$\vec{P} = \langle \vec{\sigma} \rangle \, .$$

Qual a evolução temporal, $d\vec{P}/dt$, do vetor de polarização? Expresse sua resposta da forma mais simples (fisicamente transparente) que puder. Note que nenhuma suposição foi feita sobre a pureza do estado.

2. **"Representação dos momentos":** trabalhando na representação de Heisenberg adote a base de autoestados do momento $|p'; t\rangle$. Para a hamiltoniana unidimensional $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$, obtenha a equação que rege a evolução temporal do overlap $\langle p'; t|\Psi\rangle$ do estado $|\Psi\rangle$. Estude a conservação de probabilidade.

Problemas para as discussões

1. Se definirmos um operador associado ao tempo ($\hat{t}$) tal que

$$[\hat{t}, H] = -i\hbar \ ,$$

onde H é a hamiltoniana do sistema, demonstre que o espectro de H deve ser contínuo. Logo, não podemos definir tal operador!

2. Os operadores S_j ($j = 1, 2, 3$) obedecem às relações de comutação

$$[S_j, S_n] = i\hbar\epsilon_{jnk}\, S_k,$$

e no instante $t = 0$ são dados em termos das matrizes de Pauli σ_k: $S_k(0) = \frac{\hbar}{2}\,\sigma_k$. A hamiltoniana de um sistema é dada por

$$H = a\ S_3,$$

onde a é real. Utilizando a representação de Heisenberg:

(a) Obtenha os operadores $S_k(t)$;

(b) Se o estado inicial do sistema é

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

obtenha o estado para $t > 0$;

(c) Avalie $\langle S_k(t)\rangle$.

3. Assuma que $|a_1\rangle$ e $|a_2\rangle$ são autokets de um operador hermitiano A cujos autovalores (não degenerados) são a_1 e a_2, respectivamente. A hamiltoniana do sistema é dada por

$$H = \delta|a_1\rangle\langle a_2| + \delta|a_2\rangle\langle a_1|,$$

onde δ é um número real.

(a) Obtenha os autovalores e respectivos autovetores de H.

(b) Se no instante inicial o sistema encontra-se no estado $|a_1\rangle$, obtenha o estado do sistema para $t > 0$ na representação de Schrödinger.

(c) Nas condições do item anterior, qual a probabilidade do sistema ser encontrado no estado $|a_2\rangle$ pata $t > 0$?

4. Considere uma partícula sob a ação do potencial harmônico unidimensional

$$V(x) = \lambda x + \frac{1}{2}\, m\omega^2\, x^2.$$

(a) Utilizando a representação de Heisenberg obtenha a evolução temporal de $p(t)$ e $x(t)$.

(b) Se em $t = 0$ o sistema está no estado

$$\exp\left(-\frac{ipa}{\hbar}\right)|0\rangle,$$

onde p é o operador momento, a um número real e $|0\rangle$ o estado fundamental do oscilador harmônico. Utilizando a representação de Heisenberg obtenha $\langle x(t)\rangle$ para $t \geq 0$.

(c) A função de correlação é definida por

$$C(t) = \langle x(t)x(0)\rangle,$$

onde $x(t)$ é o operador de posição na representação de Heisenberg. Obtenha $C(t)$ para o estado fundamental do oscilador harmônico.

5. Se A e B são dois operadores que não comutam entre si mas se ambos comutam com $[A, B]$ pode-se mostrar que

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}.$$

(a) Mostre que $[B, e^{xA}] = e^{xA}[B, A]x$;

(b) Definindo $G(x) = e^{xA}e^{xB}$, mostre que

$$\frac{\mathrm{dG}}{\mathrm{dx}} = (A + B + [A, B]x)G$$

.

(c) Integre a equação do item anterior para obter a relação desejada.

(d) Mostre ainda que para A e B arbitrários

$$\lim_{\alpha,\beta\to 0} e^{\alpha A} e^{\beta B} = e^{\alpha A+\beta B+\frac{1}{2}\alpha\beta[A,B]+X}$$

onde X depende de potências superiores de α e β.