Gabarito: Lista 4

November 22, 2018

Problema 1

Demonstre que

a) Se a matriz X 4×4 comuta com os 4 γ^μ então ela é proporcional à identidade.

b) Dados dois conjuntos de matrizes γ^μ e γ'^μ que obedecem a $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu}$, então existe uma matriz S não singular tal que

$$\gamma'^\mu = S\gamma^\mu S^{-1}. \tag{1}$$

Solução:

a) Primeiramente, vamos relembrar algumas caracterísitcas importantes das matrizes de Dirac γ_μ[1], tal que

$$\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}=2g_{\mu\nu}, \qquad g_{\mu\nu}=\mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1) \tag{2}$$

e

$$\mathrm{Tr}\gamma_\mu = 0. \tag{3}$$

Bem como foi feito no caso de matrizes 2×2, onde utilizamos a identidade I_2 mais as três matrizes de Pauli, nós podemos descompor qualquer matriz 4×4 utilizando 16 matrizes linearmente independentes. Tais matrizes podem ser construidas a partir de produtos das matrizes γ_μ mais a identidade I_4 de dimensão quatro. A Tabela abaixo lista todas as 16 matrizes em questão.

Matrizes	Exemplos
Identidade	I_4
4 matrizes de Dirac	$\gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$
6 matrizes $\sigma_{\mu\nu}$	$\sigma_{\mu\nu}=\frac{i}{2}\left[\gamma_\mu,\gamma_\nu\right]$
Matriz γ_5	$\gamma_5=i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$
4 matrizes diferentes produtos de matrizes gama	$\gamma_5\gamma_\mu$

Table 1:

Vamos denotar as matrizes mostradas acima por Γ_i onde $i=1,2,\ldots,16$. As matrizes Γ_i possuem propriedades interessantes. Por exemplo, com excessão da matriz I_4, as matrizes Γ_i possuem traço nulo. Mais ainda, dadas duas matrizes Γ_i, temos que

$$\mathrm{Tr}\left(\Gamma_i\Gamma_j\right)\sim\delta_{ij}. \tag{4}$$

[1] Para mais detalhes sobre a propriedades que serão utilizadas nesse problema, consultar o livro "Mecânica Quântica, Piza".

A propriedade (**??**) será fundamental para o que virá a seguir. Agora, suponha que exista uma matriz X tal que

$$[X, \gamma_\mu] = 0.$$

Segue diretamente da relação logo acima que

$$[X, \Gamma_i] = 0. \tag{5}$$

Nós sabemos que a matriz X pode ser decomposta como

$$X = \alpha I_4 + \sum_i C_i \Gamma_i,$$

onde a soma em i não leva em conta a matriz identidade I_4. Utilizando (4), podemos mostrar que

$$\alpha = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\,(X)\,, \qquad C_i \sim \mathrm{Tr}\,(\Gamma_i X)\,. \tag{6}$$

Vamos agora utlizar que para uma dada matrix Γ_i, existe uma outra matriz Γ_j diferente da identidade tal que

$$\{\Gamma_i, \Gamma_j\} = 0. \tag{7}$$

Por fim, utilizando (7), juntamente com

$$(\Gamma_i)^2 = \pm 1,$$

temos que

$$\mathrm{Tr}\,(\Gamma_i X) = \mathrm{Tr}\left(\Gamma_i\,(\Gamma_j)^2\,X\right) = -\mathrm{Tr}\,(\Gamma_j \Gamma_i \Gamma_j X) = -\mathrm{Tr}\,(\Gamma_i \Gamma_j X \Gamma_j) = -\mathrm{Tr}\,(\Gamma_i X)\,, \qquad (\Gamma_j)^2 = 1$$

ou que

$$\mathrm{Tr}\,(\Gamma_i X) = -\mathrm{Tr}\left(\Gamma_i\,(\Gamma_j)^2\,X\right) = \mathrm{Tr}\,(\Gamma_j \Gamma_i \Gamma_j X) = \mathrm{Tr}\,(\Gamma_i \Gamma_j X \Gamma_j) = -\mathrm{Tr}\,(\Gamma_i X)\,, \qquad (\Gamma_j)^2 = -1,$$

de modo que

$$C_i = 0.$$

Por fim

$$X = \alpha I_4, \qquad \alpha = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\,(X)\,. \tag{8}$$

b) As matrizes γ'_μ construidas a partir de (1) claramente obedecem a álgebra de Clifford:

$$\left\{\gamma'_\mu, \gamma'_\nu\right\} = \left\{S\gamma_\mu S^{-1}, S\gamma_\nu S^{-1}\right\} = S\left\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\right\}S^{-1} = 2g_{\mu\nu}.$$

Também vale notar que a equação de Dirac

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi = 0$$

possui a mesma estrutura para o caso das matrizes γ'_μ, uma vez que $\psi \to \psi' = S\psi$:

$$S\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi = \left(iS\gamma^\mu S^{-1}\partial_\mu S - mS\right)\psi = \left(i\gamma'_\mu \partial_\mu - m\right)\psi' = 0.$$

A fim de verificar de forma mais rigorosa a existência da matriz S, vamos supor que

$$S = \sum_{i=1}^{16} \Gamma_i' F \Gamma_i, \tag{9}$$

onde Γ_i' são matrizes 4×4 construidas a partir de produtos de matrizes γ_μ'. Não é difícil de se convencer que dadas duas matrizes Γ_i e Γ_j, temos que

$$\Gamma_i \Gamma_j = a_{ij} \Gamma_k, \qquad a_{ij} = \{i, -1, 1\}. \tag{10}$$

Segue então que

$$\Gamma_i \Gamma_j \Gamma_i \Gamma_j = a_{ij} \Gamma_k a_{ij} \Gamma_k = a_{ij}^2 (\Gamma_k)^2 = \pm a_{ij}^2$$

e também que

$$\Gamma_j \Gamma_i = (\Gamma_i)^2 \Gamma_j \Gamma_i (\Gamma_j)^2 = \Gamma_i \left(\pm a_{ij}^2\right) \Gamma_j = \pm a_{ij}^2 \Gamma_i \Gamma_j = \pm a_{ij}^3 \Gamma_k. \tag{11}$$

Podemos utilizar (10) e (11) para reescrever obter a seguinte relação a partir de (9):

$$\Gamma_i' S \Gamma_i = \sum_{j=1}^{16} \Gamma_i' \Gamma_j' F \Gamma_j \Gamma_i = \sum_{j=1}^{16} a_{ij} \Gamma_k' F \left(\pm a_{ij}^3\right) \Gamma_k = \pm \sum_{j=1}^{16} \Gamma_k' F \Gamma_k.$$

Na expressão acima, vale notar que dado o prudot $\Gamma_i \Gamma_j$, para j-ésimo termo na soma haverá uma matriz Γ_k correspondente, de forma que podemos trocar a soma em j por uma soma em k, tal que

$$\Gamma_i' S \Gamma_i = \pm \sum_{j=1}^{16} \Gamma_k' F \Gamma_k = \pm S. \tag{12}$$

A expressão (12) é util para mostrarmos que a matriz de transformação S possui inversa. Analogamente ao que foi feito em (9), vamos definir que

$$S^{-1} = \sum_{i=1}^{16} \Gamma_i G \Gamma_i', \tag{13}$$

de onde segue diretamente que

$$\Gamma_i S^{-1} \Gamma_i' = \pm S^{-1}. \tag{14}$$

Podemos então mostrar que

$$S S^{-1} = \Gamma_i' S \Gamma_i \Gamma_i S^{-1} \Gamma_i' = \pm \Gamma_i' S S^{-1} \Gamma_i',$$

o que é diferente da identidade. Em ordem de que $SS^{-1} = 1$, podemos assumir que

$$\left[S S^{-1}, \Gamma_i\right] = 0,$$

nos permitindo utilizar então o resultado do item a), mais precisamente

$$S S^{-1} = \alpha I_4. \tag{15}$$

A fim de fixar $\alpha = 1$, podemos utilizar a arbitrariedade na escolha das matrizes F e G que aparecem em (9) e (13). Podemos então utilizar os resultados acima a fim de reescrever (12):

$$\begin{aligned}
\Gamma_i' S \Gamma_i S^{-1} &= \pm S S^{-1} = \pm 1 \\
\left(\Gamma_i'\right)^2 S \Gamma_i S^{-1} &= \pm \Gamma_i' \\
\pm S \Gamma_i S^{-1} &= \pm \Gamma_i' \\
\Gamma_i' &= S \Gamma_i S^{-1}.
\end{aligned}$$

Por fim, escolhendo os casos onde $\Gamma_i = \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$, temos que

$$\gamma_\mu' = S \gamma_\mu S^{-1},$$

mostrando assim que a existe uma transformação não singular que conecta γ_μ' e γ_μ.

Problema 2

Obtenha a matriz S de transformação de espinores de Dirac associada a um "boost" com velocidade $\vec{v}$.

Solução:

Os espinores de Dirac $\psi(x)$ se transformam como

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\,\psi(\Lambda x),$$

onde Λ^{μ}_{ν} é transformação de Lorentz atuando nas coordenadas, enquanto

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}}, \qquad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\right]. \tag{16}$$

Os geradores de "boosts" são as componentes σ^{0i}, enquanto $\omega_{0i} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ são os parâmetros de transformação que discutiremos sobre no futuro. Sabendo que

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

é possível ver que

$$\sigma^{0i} = \frac{i}{2}\left[\gamma^0\gamma^i - \gamma^i\gamma^0\right] = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}.$$

Definindo

$$\vec{\omega} = \omega_{0i} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z), \qquad \vec{\Sigma} = (\Sigma_x, \Sigma_y, \Sigma_z),$$

onde

$$\Sigma_i = \sigma^{0i},$$

temos que

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\vec{\Sigma}\cdot\vec{\omega}}. \tag{18}$$

Sabendo que

$$\{\Sigma_i, \Sigma_j\} = \begin{pmatrix} \{\sigma^i, \sigma^j\} & 0 \\ 0 & \{\sigma^i, \sigma^j\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\delta^{ij} & 0 \\ 0 & 2\delta^{ij} \end{pmatrix} = 2\delta_{ij}$$

e

$$\Sigma_i^2 = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -\sigma^i\sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i\sigma^i \end{pmatrix} = I_4,$$

temos que

$$\begin{aligned}\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{\omega}\right)^2 &= \Sigma_i\omega_i\Sigma_j\omega_j = \Sigma_i\Sigma_j\omega_i\omega_j = \left(2\delta_{ij} - \Sigma_j\Sigma_i\right)\omega_i\omega_j \\ &= 2\omega^2 - \left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{\omega}\right)^2 \\ \left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{\omega}\right)^2 &= \omega^2.\end{aligned}$$

Como consequência, podemos escrver (18) como

$$S(\Lambda) = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) - i\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{\omega}\right)\sin\left(\frac{\omega}{2}\right), \qquad \hat{\omega} = \frac{\vec{\omega}}{\omega} = \frac{\vec{\omega}}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}}. \tag{19}$$

Vamos agora discutir o significado físico de $\vec{\omega}$. Considerando um boost na direção x, temos que

$$S\left(\Lambda\right) = I_4 - i\Sigma_x\omega_x + \mathcal{O}\left(\omega_x^2\right).$$

Temos que para a matrizes de Dirac

$$S\gamma^\mu S^{-1} = \Lambda^\mu_\nu\gamma^\nu,$$

de forma que

$$S\gamma^\mu S^{-1} \approx \left(I_4 - i\Sigma_x\omega_x\right)\gamma^\mu\left(I_4 + i\Sigma_x\omega_x\right) \approx \gamma^\mu + i\left[\gamma^\mu, \Sigma_x\right]\omega_x. \tag{20}$$

Um boost em x é dado pela matriz de Lorentz

$$\Lambda_x = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi & 0 & 0 \\ -\sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde

$$\cosh\phi = \gamma = \frac{1}{\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)}, \qquad \sinh\phi = \gamma\beta,$$

implicando que

$$\phi = \text{arctanh}\beta.$$

A forma infinitesimal de Λ_x é

$$\Lambda_x \approx \begin{pmatrix} 1 & -\phi & 0 & 0 \\ -\phi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4 + M\phi, \tag{21}$$

onde M é uma matriz que multiplica ϕ. Comparando (20) e (21), temos que ω_x é essencialmente o parâmetro ϕ que aparece na matriz de Lorentz Λ_x. Essa ideia pode ser generalizada para boosts mais gerais.

Problema 3

Como se transformam por boosts e por paridades as seguintes quantidades: $\bar{\Psi}\Psi$, $\bar{\Psi}\gamma^5\Psi$, $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$, $\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\Psi$ e $\bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}\Psi$?

Solução:

Nós sabemos que os espinores de Dirac se transformam como

$$\Psi' = S\Psi, \qquad S = e^{-\frac{i}{4}\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}}.$$

Sabendo também que o espinor de Dirac adjunto é dado por

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0, \tag{22}$$

temos como consequência direta que

$$\bar{\Psi}' = \Psi'^\dagger\gamma^{0\prime} = \Psi^\dagger S^{-1}S\gamma^0 S^{-1} = \Psi^\dagger\gamma^0 S^{-1} = \bar{\Psi}S^{-1}. \tag{23}$$

Temos também que para as matrizes

$$S\gamma^\mu S^{-1} = \Lambda^\mu_\nu\gamma^\nu, \tag{24}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} S^{-1}\gamma^5 S &= S^{-1}i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 S = \frac{i}{4!}S^{-1}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta S \\ &= \frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\Lambda^\mu_\sigma\Lambda^\nu_\rho\Lambda^\alpha_\lambda\Lambda^\beta_\delta\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\lambda\gamma^\delta \\ &= \det(\Lambda)\, i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\ &= \det(\Lambda)\,\gamma^5 \\ S^{-1}\gamma^5 S &= \gamma^5. \end{aligned} \tag{25}$$

No caso de paridade, vale a pena lembrar que a matrizes de Dirac γ^μ são tratadas como componentes de um quadrivetor, de forma que a ação de um operador de paridade satisfazer

$$P^{-1}\gamma^0 P = \gamma^0, \qquad P^{-1}\gamma^i P = -\gamma^i. \tag{26}$$

As condições logo acima são satisfeitas pela escolha

$$P = P^{-1} = \gamma^0, \tag{27}$$

de forma que

$$\begin{aligned} P^{-1}\gamma^0 P &= \gamma^0\gamma^0\gamma^0 = \gamma^0, \\ P^{-1}\gamma^i P &= \gamma^0\gamma^i\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^0\gamma^i = -\gamma^i, \\ P^{-1}\gamma^5 P &= -\gamma^5. \end{aligned}$$

Desse modo, o efeito do operador de paridade sobre o espinor Ψ é

$$P\Psi(\vec{r},t) = \gamma^0 R_P\Psi(\vec{r},t) = \gamma^0\Psi(-\vec{r},t),$$

onde $R_P = R_P^{-1}$ representa o operador que troca o sinal das componentes espaciais dos espinores e quadrivetores.

- Transformação de $\bar{\Psi}\Psi$:
  - Boosts: $\bar{\Psi}'\Psi' = \bar{\Psi}S^{-1}S\Psi = \bar{\Psi}\Psi$;
  - Paridade: $\bar{\Psi}'\Psi' = \bar{\Psi}\gamma^0\gamma^0\Psi = \bar{\Psi}\Psi$;
- Transformação de $\bar{\Psi}\gamma^5\Psi$:
  - Boosts: $\bar{\Psi}'\gamma^5\Psi' = \bar{\Psi}S^{-1}\gamma^5 S\Psi = \bar{\Psi}\gamma^5\Psi$;
  - Paridade: $\bar{\Psi}'\gamma^5\Psi' = \bar{\Psi}\gamma^0\gamma^5\gamma^0\Psi = \bar{\Psi}\left(-\gamma^5\right)\Psi = -\bar{\Psi}\gamma^5\Psi$;
- Transformação de $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$:
  - Boosts: $\bar{\Psi}'\gamma^\mu\Psi' = \bar{\Psi}S^{-1}\gamma^\mu S\Psi = \bar{\Psi}\Lambda^\mu_\nu\gamma^\nu\Psi = \Lambda^\mu_\nu\bar{\Psi}\gamma^\nu\Psi$;
  - Paridade: $\bar{\Psi}'\gamma^\mu\Psi' = \bar{\Psi}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\Psi = \begin{cases} \bar{\Psi}\gamma^0\Psi & \mu = 0 \\ -\bar{\Psi}\gamma^i\Psi & \mu = i \end{cases}$;
- Transformação de $\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\Psi$:
  - Boosts: $\bar{\Psi}'\gamma^\mu\gamma^5\Psi' = \bar{\Psi}S^{-1}\gamma^\mu\gamma^5 S\Psi = \bar{\Psi}\Lambda^\mu_\nu\gamma^\nu S^{-1}\gamma^5 S\Psi = \Lambda^\mu_\nu\bar{\Psi}\gamma^\nu\gamma^5\Psi$;
  - Paridade: $\bar{\Psi}'\gamma^\mu\gamma^5\Psi' = \bar{\Psi}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\gamma^0\Psi = -\bar{\Psi}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\gamma^5\Psi = \begin{cases} -\bar{\Psi}\gamma^0\gamma^5\Psi & \mu = 0 \\ \bar{\Psi}\gamma^i\gamma^5\Psi & \mu = i \end{cases}$;
- Transformação de $\bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}\Psi$:
  - Boosts: $\bar{\Psi}'\sigma^{\mu\nu}\Psi' = \frac{i}{2}\bar{\Psi}S^{-1}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right)S\Psi = \frac{i}{2}\bar{\Psi}\left(\Lambda^\mu_\alpha\gamma^\alpha\Lambda^\nu_\beta\gamma^\beta - \Lambda^\nu_\beta\gamma^\beta\Lambda^\mu_\alpha\gamma^\alpha\right)\Psi = \Lambda^\mu_\alpha\Lambda^\nu_\beta\bar{\Psi}\sigma^{\alpha\beta}\Psi$;
  - Paridade: $\bar{\Psi}'\sigma^{\mu\nu}\Psi' = \bar{\Psi}\gamma^0\sigma^{\mu\nu}\gamma^0\Psi = \begin{cases} -\bar{\Psi}\sigma^{0i}\Psi & \mu = 0, \quad \nu = i \\ \bar{\Psi}\sigma^{ij}\Psi & \mu = i, \quad \nu = j \end{cases}$;

Problema 4

Considere a equação de Dirac na presença de um quadri-potencial A_μ. Mostre que uma transformação de gauge induz uma mudança de fase na função de onda de Dirac.

Solução:

A equação de Dirac na presença de um quadri-potencial A_μ tem a forma

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m\right)\psi\left(x\right) = 0,$$

onde utilizamos que $p_\mu \to p_\mu - eA_\mu$. Vamos considerar agora uma transformação de gauge da forma

$$A'_\mu\left(x\right) = A_\mu\left(x\right) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha\left(x\right).$$

Temos então que

$$\begin{aligned}
\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A'_\mu - m\right)\psi\left(x\right) &= \left(i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - \gamma^\mu\partial_\mu\alpha\left(x\right) - m\right)\psi\left(x\right) \\
&= i\gamma^\mu\partial_\mu\psi\left(x\right) - \gamma^\mu\partial_\mu\alpha\left(x\right)\psi\left(x\right) - e\gamma^\mu A_\mu\psi\left(x\right) - m\psi\left(x\right) \\
&= i\gamma^\mu\partial_\mu\psi\left(x\right) + i\gamma^\mu e^{-i\alpha(x)}\partial_\mu e^{i\alpha(x)}\psi\left(x\right) - e\gamma^\mu A_\mu\psi\left(x\right) - m\psi\left(x\right) \\
&= i\gamma^\mu e^{-i\alpha(x)}\partial_\mu\left(e^{i\alpha(x)}\psi\left(x\right)\right) - e\gamma^\mu A_\mu\psi\left(x\right) - m\psi\left(x\right) \\
&= e^{-i\alpha(x)}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m\right)\left(e^{i\alpha(x)}\psi\left(x\right)\right),
\end{aligned}$$

implicando então que a equação de Dirac se torna invariante por meio da introdução de um novo espinor

$$\psi'\left(x\right) = e^{i\alpha(x)}\psi\left(x\right).$$