Gabarito: Lista 6

December 24, 2018

Problema 1

Foi demonstrado em classe que o auto-estado da hamiltoniana $H = H_0 + V$,

$$\left|\psi_i^+, t\right\rangle = \left|\psi_i^+\right\rangle e^{-iE_i t/\hbar}$$

é tal que

$$\lim_{t\to-\infty} \left|\psi_i^+; t\right\rangle = \left|\phi_i\right\rangle e^{-iE_i t/\hbar}$$

onde $\left|\phi_i\right\rangle$ é auto-estado de H_0. Além disso estes estados estão relacionados pela equação de Lippmann–Schwinger

$$\left|\psi_i^+\right\rangle = \left|\phi_i\right\rangle + \frac{1}{E_i - H_0 + i\epsilon} \left|\psi_i^+\right\rangle .$$

Obtenha os resultados análogos para o estado $\left|\psi_i^-; t\right\rangle$ o qual tende para $\left|\phi_i\right\rangle$ no limite $t \to \infty$. Mostre também que

$$\left|\psi_i^-\right\rangle = \left(1 + \frac{1}{E_i - H_0 - i\epsilon} V\right) \left|\phi_i\right\rangle .$$

Solução:

Nós estamos interessados em resolver o problema

$$\left(H_0 + V\right) \left|\psi, t\right\rangle = i \frac{\partial}{\partial t} \left|\psi, t\right\rangle , \tag{1}$$

onde V é um potencial idependente do tempo e H_0 é tal que nós sabemos resolver

$$H_0 \left|\phi, t\right\rangle = i \frac{\partial}{\partial t} \left|\phi, t\right\rangle .$$

Podemos reescrever (1) como

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - H_0\right) \left|\psi, t\right\rangle = V \left|\psi, t\right\rangle , \tag{2}$$

de forma que fica claro que podemos utilizar o formalismo de funções de Green para determinar $\left|\psi, t\right\rangle$. Nós sabemos que a função de Green $G_-\left(t, t'\right)$ é tal que

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - H_0\right) G_-\left(t, t'\right) = \delta\left(t - t'\right) ,$$

onde

$$G_-\left(t, t'\right) = 0, \qquad t' < t.$$

Por meio da utilização de $G_{-}(t,t')$, podemos escrever a solução de (2) como

$$\left|\psi^{-},t\right\rangle = \left|\phi,t\right\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} dt' G_{-}(t,t')\, V \left|\psi^{-},t'\right\rangle. \tag{3}$$

A forma explicita de $G_{-}(t,t')$ é

$$G_{-}(t,t') = i\Theta(t'-t)\, e^{-iH_0\left(t-t'\right)}, \tag{4}$$

onde

$$\Theta(t'-t) = \begin{cases} 1 & t' > t \\ 0 & t' < t \end{cases}.$$

Vale também observar que estaremos nos restringindo apenas a estados do contínuo para os quais H e H_0 possuem os mesmos autovalores, ou seja,

$$H_0 \left|\phi_i\right\rangle = E_i \left|\phi_i\right\rangle, \qquad H\left|\psi_i^{-}\right\rangle = E_i \left|\psi_i^{-}\right\rangle. \tag{5}$$

Utilizando (4) e (5), podemos reescrever (3) como

$$\left|\psi_i^{-}\right\rangle e^{-iE_it} = \left|\phi_i\right\rangle e^{-iE_it} + i\int_{-\infty}^{\infty} dt'\Theta(t'-t)\, e^{-iH_0\left(t-t'\right)} V \left|\psi_i^{-}\right\rangle e^{-iE_it'}.$$

Por meio da função $\Theta(t'-t)$, podemos integrar a expressão acima de $-\infty$ até t. O resultado é

$$\left|\psi_i^{-}\right\rangle e^{-iE_it} = \left|\phi_i\right\rangle e^{-iE_it} + ie^{-iH_0t}\int_{t}^{\infty} dt' e^{i(H_0-E_i)t'} V \left|\psi_i^{-}\right\rangle. \tag{6}$$

A solução para a integral em (6) é

$$\begin{aligned}
\int_t^{\infty} dt' e^{i(H_0-E_i)t'} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_t^{\infty} dt' e^{i(H_0-E_i+i\varepsilon)t'} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_t^{\infty} dt' \frac{d}{dt'}\left[\frac{e^{i(H_0-E_i+i\varepsilon)t'}}{i\left(H_0-E_i+i\varepsilon\right)}\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{e^{i(H_0-E_i)t'}e^{-\varepsilon t'}}{i\left(H_0-E_i+i\varepsilon\right)}\right|_t^{\infty} \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{i(H_0-E_i)t}e^{-\varepsilon t}}{i\left(H_0-E_i+i\varepsilon\right)} \\
\int_t^{\infty} dt' e^{i(H_0-E_i)t'} &= \frac{e^{i(H_0-E_i)t}e^{-\varepsilon t}}{i\left(E_i-H_0-i\varepsilon\right)}.
\end{aligned}$$

Substituindo o resultado logo acima em (6), temos que

$$\begin{aligned}
\left|\psi_i^{-}\right\rangle e^{-iE_it} &= \left|\phi_i\right\rangle e^{-iE_it} + ie^{-iH_0t}\frac{e^{i(H_0-E_i)t}e^{-\varepsilon t}}{i\left(E_i-H_0-i\varepsilon\right)} V\left|\psi_i^{-}\right\rangle \\
&= \left|\phi_i\right\rangle e^{-iE_it} + \frac{e^{-iE_it}e^{-\varepsilon t}}{E_i-H_0-i\varepsilon} V\left|\psi_i^{-}\right\rangle \\
\left|\psi_i^{-},t\right\rangle &= \left|\phi_i\right\rangle e^{-iE_it} + \frac{1}{E_i-H_0-i\varepsilon} V\left|\psi_i^{-}\right\rangle e^{-iE_it}e^{-\varepsilon t}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Note agora que tomando o limite $t\to\infty$ em (7), nós obtemos que

$$\lim_{t\to\infty}\left|\psi_i^{-},t\right\rangle = \left|\phi_i\right\rangle e^{-iE_it}. \tag{8}$$

Por outro lado, se considerarmos $t = 0$, (7) assume a seguinte forma:

$$\left|\psi_i^-\right\rangle = |\phi_i\rangle + \frac{1}{E_i - H_0 - i\varepsilon} V \left|\psi_i^-\right\rangle . \tag{9}$$

Por fim, a solução mostrada em (9) pode ser calculada recursivamente, ou seja,

$$\begin{aligned}\left|\psi_i^-\right\rangle &= |\phi_i\rangle + \frac{1}{E_i - H_0 - i\varepsilon} V \left(|\phi_i\rangle + \frac{1}{E_i - H_0 - i\varepsilon} V \left(|\phi_i\rangle + \frac{1}{E_i - H_0 - i\varepsilon} V \left(|\phi_i\rangle \cdots \right) \right) \right) \\ &= |\phi_i\rangle + \frac{1}{E_i - H_0 - i\varepsilon} \left[V |\phi_i\rangle + V \frac{1}{E_i - H_0 - i\varepsilon} V |\phi_i\rangle + \cdots \right],\end{aligned}$$

onde considerando somente termos de primeira ordem em V, obtemos por fim que

$$\left|\psi_i^-\right\rangle = \left(1 + \frac{1}{E_i - H_0 - i\epsilon} V \right) |\phi_i\rangle . \tag{10}$$

Problema 2

Mostre que $U_I(0,\infty)|\varphi_a\rangle = |\Psi_a^-;t\rangle$.

Solução:

Na representação da interação, temos que

$$U_I(t,t') = e^{iH_0t}U_S(t,t')\,e^{-iH_0t'} = e^{iH_0t}e^{-iH\left(t-t'\right)}e^{-iH_0t'}. \tag{11}$$

Podemos então escrever

$$U_I(0,t_0) = e^{iHt_0}e^{-iH_0t_0},$$

de forma que

$$U_I(0,t_0)|\varphi_a\rangle = e^{iHt_0}e^{-iH_0t_0}|\varphi_a\rangle = e^{-iE_at_0}e^{iHt_0}|\varphi_a\rangle. \tag{12}$$

O Hamiltoniano H possui tanto estados contínuos ($\{|\psi_a^-\rangle\}$ e $\{|\psi_a^+\rangle\}$) quanto estados ligados $|\psi_B\rangle$, tais que

$$|\psi_B\rangle = \frac{1}{E_B-H_0}V|\psi_B\rangle.$$

Podemos então reescrever (12) como

$$U_I(0,t_0)|\varphi_a\rangle = \int dc e^{i(E_c-E_a)t_0}\left|\psi_c^-\right\rangle\left\langle\psi_c^-\right|\varphi_a\rangle + \sum_B e^{i(E_B-E_a)t_0}|\psi_B\rangle\langle\psi_B|\varphi_a\rangle. \tag{13}$$

Calculando-se então

$$\left\langle\psi_c^-\right|\varphi_a\rangle = \langle\varphi_c|\varphi_a\rangle + \left\langle\psi_c^-\right|V\frac{1}{E_c-H_0+i\varepsilon}|\varphi_a\rangle = \delta_{ca} + \frac{1}{E_c-E_a+i\varepsilon}\left\langle\psi_c^-\right|V|\varphi_a\rangle$$

e

$$\langle\psi_B|\varphi_a\rangle = \langle\psi_B|V\frac{1}{E_B-H_0}|\varphi_a\rangle = \frac{1}{E_B-E_a}\langle\psi_B|V|\varphi_a\rangle,$$

a expressão (13) assume a forma

$$U_I(0,t_0)|\varphi_a\rangle = \left|\psi_a^-\right\rangle + \int dc\frac{e^{i(E_c-E_a)t_0}}{E_c-E_a+i\varepsilon}\left\langle\psi_c^-\right|V|\varphi_a\rangle\left|\psi_c^-\right\rangle + \sum_B\frac{e^{i(E_B-E_a)t_0}}{E_B-E_a}\langle\psi_B|V|\varphi_a\rangle|\psi_B\rangle.$$

Agora, note que

$$\frac{e^{i(E_c-E_a+i\varepsilon)t_0}}{E_c-E_a+i\varepsilon} = -i\left.\frac{e^{i(E_c-E_a+i\varepsilon)t}}{i(E_c-E_a+i\varepsilon)}\right|_{t_0}^{\infty} = -i\int_{t_0}^{\infty}dt\frac{d}{dt}\left[\frac{e^{i(E_c-E_a+i\varepsilon)t}}{i(E_c-E_a+i\varepsilon)}\right] = -i\int_{t_0}^{\infty}dte^{i(E_c-E_a+i\varepsilon)t},$$

implicando que

$$U_I(0,t_0)|\varphi_a\rangle = \left|\psi_a^-\right\rangle - i\int dc\int_{t_0}^{\infty}dte^{i(E_c-E_a+i\varepsilon)t}\left\langle\psi_c^-\right|V|\varphi_a\rangle\left|\psi_c^-\right\rangle - i\sum_B\int_{t_0}^{\infty}dte^{i(E_B-E_a+i\varepsilon)t}\langle\psi_B|V|\varphi_a\rangle|\psi_B\rangle.$$

Por fim, tomando o limite $t_0\to\infty$, as intregrais em t desaparecem, resultado então em

$$\lim_{t_0\to\infty}U_I(0,t_0)|\varphi_a\rangle = \left|\psi_a^-\right\rangle. \tag{14}$$

Problema 3

Demonstre que

a) $\left\langle\psi_a^- \middle|\psi_b^-\right\rangle = \delta_{ab}$ e que $\left\langle\psi_a^+ \middle|\psi_b^+\right\rangle = \delta_{ab}$ se $\langle\varphi_a |\varphi_b\rangle = \delta_{ab}$.

b) $T_{fi} = \langle\varphi_f| V \left|\psi_i^+\right\rangle = \left\langle\psi_f^-\middle| V |\varphi_i\right\rangle$.

c) $S^\dagger S = 1$.

Solução:

a) Podemos escrever as soluções $|\psi_a^+\rangle$ e $|\psi_a^-\rangle$ numa mesma expressão como

$$\left|\psi_a^\pm\right\rangle = |\phi_a\rangle + \frac{1}{E_a - H_0 \pm i\varepsilon} V \left|\psi_a^\pm\right\rangle \tag{15}$$

Temos então que

$$\begin{aligned}
\left\langle\psi_a^\pm \middle|\psi_b^\pm\right\rangle &= \left[\langle\phi_a| + \left\langle\psi_a^\pm\right| V \frac{1}{E_a - H_0 \mp i\varepsilon}\right]\left[|\phi_b\rangle + \frac{1}{E_b - H_0 \pm i\varepsilon} V \left|\psi_b^\pm\right\rangle\right] \\
&= \langle\phi_a |\phi_b\rangle + \langle\phi_a| \frac{1}{E_b - H_0 \pm i\varepsilon} V \left|\psi_b^\pm\right\rangle + \left\langle\psi_a^\pm\right| V \frac{1}{E_a - H_0 \mp i\varepsilon} |\phi_b\rangle \\
&\qquad + \left\langle\psi_a^\pm\right| V \left(\frac{1}{E_a - H_0 \mp i\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{E_b - H_0 \pm i\varepsilon}\right) V \left|\psi_b^\pm\right\rangle \\
&= \delta_{ab} + \frac{1}{E_b - E_a \pm i\varepsilon}\left[\langle\phi_a| V \left|\psi_b^\pm\right\rangle - \left\langle\psi_a^\pm\right| V |\phi_b\rangle\right] + \left\langle\psi_a^\pm\right| V \left(\frac{1}{E_a - H_0 \mp i\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{E_b - H_0 \pm i\varepsilon}\right) V \left|\psi_b^\pm\right\rangle .
\end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
\langle\phi_a| V \left|\psi_b^\pm\right\rangle - \left\langle\psi_a^\pm\right| V |\phi_b\rangle &= \left(\left\langle\psi_a^\pm\right| - \left\langle\psi_a^\pm\right| V \frac{1}{E_a - H_0 \mp i\varepsilon}\right) V \left|\psi_b^\pm\right\rangle - \left\langle\psi_a^\pm\right| V \left(\left|\psi_b^\pm\right\rangle - \frac{1}{E_b - H_0 \pm i\varepsilon} V \left|\psi_b^\pm\right\rangle\right) \\
&= \left\langle\psi_a^\pm\right| V \frac{1}{E_b - H_0 \pm i\varepsilon} V \left|\psi_b^\pm\right\rangle - \left\langle\psi_a^\pm\right| V \frac{1}{E_a - H_0 \mp i\varepsilon} V \left|\psi_b^\pm\right\rangle \\
&= \left\langle\psi_a^\pm\right| V \left[\frac{1}{E_b - H_0 \pm i\varepsilon} - \frac{1}{E_a - H_0 \mp i\varepsilon}\right] V \left|\psi_b^\pm\right\rangle \\
&= \left\langle\psi_a^\pm\right| V \left[\frac{E_a - E_b \mp 2i\varepsilon}{(E_b - H_0 \pm i\varepsilon)(E_a - H_0 \mp i\varepsilon)}\right] V \left|\psi_b^\pm\right\rangle \\
&= -\left\langle\psi_a^\pm\right| V \left[\frac{E_b - E_a \pm 2i\varepsilon}{(E_a - H_0 \mp i\varepsilon)(E_b - H_0 \pm i\varepsilon)}\right] V \left|\psi_b^\pm\right\rangle
\end{aligned}$$

implicando que

$$\begin{aligned}
\left\langle\psi_a^\pm \middle|\psi_b^\pm\right\rangle &= \delta_{ab} - \frac{1}{E_b - E_a \pm i\varepsilon}\left\langle\psi_a^\pm\right| V \left[\frac{E_b - E_a \pm 2i\varepsilon}{(E_a - H_0 \mp i\varepsilon)(E_b - H_0 \pm i\varepsilon)}\right] V \left|\psi_b^\pm\right\rangle \\
&\qquad + \left\langle\psi_a^\pm\right| V \left(\frac{1}{E_a - H_0 \mp i\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{E_b - H_0 \pm i\varepsilon}\right) V \left|\psi_b^\pm\right\rangle \\
&= \delta_{ab} + \left[1 - \frac{E_b - E_a \pm 2i\varepsilon}{E_b - E_a \pm i\varepsilon}\right]\left\langle\psi_a^\pm\right| V \frac{1}{(E_a - H_0 \mp i\varepsilon)(E_b - H_0 \pm i\varepsilon)} V \left|\psi_b^\pm\right\rangle \\
&= \delta_{ab} + \left[1 - 1 \mp \frac{i\varepsilon}{E_b - E_a \pm i\varepsilon}\right]\left\langle\psi_a^\pm\right| V \frac{1}{(E_a - H_0 \mp i\varepsilon)(E_b - H_0 \pm i\varepsilon)} V \left|\psi_b^\pm\right\rangle \\
\left\langle\psi_a^\pm \middle|\psi_b^\pm\right\rangle &= \delta_{ab} \mp \frac{i\varepsilon}{E_b - E_a \pm i\varepsilon}\left\langle\psi_a^\pm\right| V \frac{1}{(E_a - H_0 \mp i\varepsilon)(E_b - H_0 \pm i\varepsilon)} V \left|\psi_b^\pm\right\rangle .
\end{aligned}$$

Finalmente, tomando o limite $\varepsilon \to 0$, temos que

$$\left\langle \psi_a^{\pm} \middle| \psi_b^{\pm} \right\rangle = \delta_{ab}. \tag{16}$$

b) Utilizando (15), nós podemos escrever T_{fi} como

$$\begin{aligned}
T_{fi} = \langle \varphi_f | V \left| \psi_i^+ \right\rangle &= \left(\left\langle \psi_f^- \right| - \left\langle \psi_f^- \right| V \frac{1}{E_f - H_0 - i\varepsilon} \right) V \left(|\phi_i\rangle + \frac{1}{E_i - H_0 + i\varepsilon} V \left| \psi_i^+ \right\rangle \right) \\
&= \left\langle \psi_f^- \right| V |\phi_i\rangle + \left\langle \psi_f^- \right| V \frac{1}{E_i - H_0 + i\varepsilon} V \left| \psi_i^+ \right\rangle - \left\langle \psi_f^- \right| V \frac{1}{E_f - H_0 - i\varepsilon} V |\phi_i\rangle \\
&\qquad - \left\langle \psi_f^- \right| V \frac{1}{E_f - H_0 - i\varepsilon} V \frac{1}{E_i - H_0 + i\varepsilon} V \left| \psi_i^+ \right\rangle .
\end{aligned}$$

Utilizando novamente (15), é possível substituir$|\phi_i\rangle$ no terceiro termo da expressão acima por

$$|\phi_i\rangle = \left| \psi_i^+ \right\rangle - \frac{1}{E_i - H_0 + i\varepsilon} V \left| \psi_i^+ \right\rangle .$$

Como resultado, temos que

$$\begin{aligned}
T_{fi} &= \left\langle \psi_f^- \right| V |\phi_i\rangle + \left\langle \psi_f^- \right| V \frac{1}{E_i - H_0 + i\varepsilon} V \left| \psi_i^+ \right\rangle - \left\langle \psi_f^- \right| V \frac{1}{E_i - H_0 - i\varepsilon} V \left| \psi_i^+ \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \psi_f^- \right| V \frac{1}{E_f - H_0 - i\varepsilon} V \frac{1}{E_i - H_0 + i\varepsilon} V \left| \psi_b^+ \right\rangle - \left\langle \psi_f^- \right| V \frac{1}{E_f - H_0 - i\varepsilon} V \frac{1}{E_i - H_0 + i\varepsilon} V \left| \psi_i^+ \right\rangle \\
T_{fi} &= \left\langle \psi_f^- \right| V |\phi_i\rangle
\end{aligned} \tag{17}$$

c) Sabendo que

$$S_{fi} = \left\langle \psi_f^- \middle| \psi_i^+ \right\rangle = \langle \phi_f | U_I^\dagger (0, \infty) \, U_I (0, -\infty) \, |\phi_i\rangle ,$$

podemos mostrar que

$$\begin{aligned}
\left(S^\dagger S \right)_{fi} &= \sum_k S_{kf}^* S_{ki} = \sum_k \left\langle \psi_k^- \middle| \psi_f^+ \right\rangle^* \left\langle \psi_k^- \middle| \psi_i^+ \right\rangle \\
&= \sum_k \left\langle \psi_f^+ \middle| \psi_k^- \right\rangle \left\langle \psi_k^- \middle| \psi_i^+ \right\rangle \\
&= \left\langle \psi_f^+ \right| \left(\sum_k \left| \psi_k^- \right\rangle \left\langle \psi_k^- \right| \right) \left| \psi_i^+ \right\rangle \\
&= \left\langle \psi_f^+ \middle| \psi_i^+ \right\rangle \\
\left(S^\dagger S \right)_{fi} &= \delta_{fi},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$S^\dagger S = 1. \tag{18}$$

Problema 4

Uma partícula A, de massa m_a, encontra-se ligada por um potencial $V = \frac{1}{2}m_a\omega^2 r_a^2$, estando no estado fundamental deste sistema. Uma outra partícula B, de massa m_b, interage com a partícula A através do potencial $V = Be^{-\mu r}$ onde $r = |\vec{r}_a - \vec{r}_b|$. A velocidade inicial da partícula B é v. Obtanha a seção de choque diferencial e total, na aproximação de Born, para o espalhamento de B com A sendo excitada para o primeiro estado excitado com $l = 1$ e $m = 0$. A seção de choque total possa ser expressa em termos de uma integral paramétrica.

Solução:

A aproximação de Born de primeira ordem, a seção de choque diferencial é dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = m_a m_b \left(2\pi\right)^4 \frac{k_f}{k_i} \left|\left\langle\varphi_f\right| V \left|\varphi_i\right\rangle\right|^2. \tag{19}$$

O estados $\{\left|\varphi_i\right\rangle, \left|\varphi_f\right\rangle\}$ se referem aos estados produtos que descrevem as partículas A e B antes e após o processo de espalhamento, respectivamente. Sabemos que a partícula A está sujeita a um potencial de um oscilador harmônico radial, tal que

$$\Psi^A\left(r,\theta,\phi\right) = R_{nl}\left(r\right) Y_l^m\left(\theta,\phi\right),$$

onde $R_{El}\left(r\right)$ satisfaz

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) - \frac{l\left(l+1\right)}{r^2} + k^2 - \frac{2mV\left(r\right)}{\hbar^2}\right] R_{El}\left(r\right) = 0, \qquad V\left(r\right) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2. \tag{20}$$

Sabemos que para partícula A existem as seguintes condições assintóticas:

$$\left|\varphi_i^A\right\rangle = \left|000\right\rangle, \qquad \left|\varphi_f^A\right\rangle = \left|110\right\rangle.$$

Diferentemente de A, a partícula B se encontra livre antes de interagir antes e após a interação com A via o potencial

$$V = Be^{-\mu r}, \qquad r = \left|\vec{r}_a - \vec{r}_b\right|,$$

significando então que

$$\left\langle\vec{r}\right|\varphi_i^B\rangle = \left\langle\vec{r}\middle|\vec{k}_i\right\rangle = \frac{e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}}}{\left(2\pi\right)^{3/2}}, \qquad \left\langle\vec{r}\right|\varphi_f^B\rangle = \left\langle\vec{r}\middle|\vec{k}_f\right\rangle = \frac{e^{i\vec{k}_f\cdot\vec{r}}}{\left(2\pi\right)^{3/2}},$$

onde vale a pena lembrar que o espalhamento é inelástico, ou seja, $k_f \neq k_i$. Temos então que

$$\left|\varphi_i\right\rangle = \left|\varphi_i^A\right\rangle\left|\varphi_i^B\right\rangle = \left|000\right\rangle\left|\vec{k}_i\right\rangle, \qquad \left|\varphi_f\right\rangle = \left|\varphi_f^A\right\rangle\left|\varphi_f^B\right\rangle = \left|110\right\rangle\left|\vec{k}_f\right\rangle. \tag{21}$$

Agora nós estamos em condições de calcular $\left\langle\varphi_f\right| V \left|\varphi_i\right\rangle$:

$$\left\langle\varphi_f\right| V \left|\varphi_i\right\rangle = \frac{B}{\left(2\pi\right)^3}\int d^3\vec{r}_a \int d^3\vec{r}_b e^{-i\left(\vec{k}_f-\vec{k}_i\right)\cdot\vec{r}_b} e^{-\mu r} R_{00}\left(r_a\right) R_{11}\left(r_a\right) Y_0^0\left(\theta_a,\phi_a\right) Y_1^{0*}\left(\theta_a,\phi_a\right).$$

A integral logo acima pode ser simplificada consideravelmente por meio da troca de variáveis

$$\vec{r} = \vec{r}_a - \vec{r}_b,$$

resultando em

$$\langle\varphi_f|\,V\,|\varphi_i\rangle=\frac{B}{(2\pi)^3}\left[\int d^3\vec{r}_a e^{-i\left(\vec{k}_f-\vec{k}_i\right)\cdot\vec{r}_a}R_{00}\left(r_a\right)R_{11}\left(r_a\right)Y_0^0\left(\theta_a,\phi_a\right)Y_1^{0*}\left(\theta_a,\phi_a\right)\right]\left[\int d^3\vec{r}e^{i\left(\vec{k}_f-\vec{k}_i\right)\cdot\vec{r}}e^{-\mu r}\right].$$

Temos que o calculo da seção de choque se tornou essencialmente resolver as seguintes integrais:

$$I_r=\int d^3\vec{r}e^{i\left(\vec{k}_f-\vec{k}_i\right)\cdot\vec{r}}e^{-\mu r},\tag{22}$$

$$I_{r_a}=\int d^3\vec{r}_a e^{-i\left(\vec{k}_f-\vec{k}_i\right)\cdot\vec{r}_a}R_{00}\left(r_a\right)R_{11}\left(r_a\right)Y_0^0\left(\theta_a,\phi_a\right)Y_1^{0*}\left(\theta_a,\phi_a\right).\tag{23}$$

Vamos começar pela intergral (22). Considerando que o vetor $\vec{q}=\vec{k}_f-\vec{k}_i$ aponta na direção positiva do eixo z, podemos escrer I_r como

$$\begin{aligned}
I_r&=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\infty}drr^2\int_0^{\pi}d\theta\sin\theta e^{iqr\cos\theta}e^{-\mu r}\\
&=2\pi\int_0^{\infty}drr^2e^{-\mu r}\int_{-1}^{1}dxe^{iqrx}\\
&=\frac{4\pi}{q}\int_0^{\infty}drre^{-\mu r}\sin\left(qr\right)\\
&=\frac{4\pi}{q}\frac{2\mu q}{\left(\mu^2+q^2\right)^2}\\
I_r&=\frac{8\pi\mu}{\left(\mu^2+q^2\right)^2}.
\end{aligned}\tag{24}$$

A segunda integral I_{r_a} é um pouco mais "trabalhosa". Sabendo que

$$Y_0^0\left(\theta,\phi\right)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}},\qquad Y_1^0\left(\theta,\phi\right)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta_a,$$

temos que

$$\begin{aligned}
I_{r_a}&=\frac{\sqrt{3}}{4\pi}\int d^3\vec{r}_a e^{-i\left|\vec{k}_f-\vec{k}_i\right|r_a\cos\theta_a}R_{00}\left(r_a\right)R_{01}\left(r_a\right)\cos\theta_a\\
&=\frac{\sqrt{3}}{4\pi}2\pi\int_0^{\infty}drr_a^2R_{00}\left(r_a\right)R_{11}\left(r_a\right)\int_0^{\pi}d\theta_a\sin\theta_a e^{-iqr_a\cos\theta_a}\cos\theta_a\\
I_{r_a}&=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{\infty}drr_a^2R_{00}\left(r_a\right)R_{11}\left(r_a\right)\int_{-1}^{1}dxe^{-iqr_ax}x.
\end{aligned}$$

Monstrado que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}dxe^{-iqr_ax}x&=-\frac{e^{-iqr_ax}}{iqr_a}x\bigg|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}dx\frac{e^{-iqr_ax}}{iqr_a}\\
&=-\left(\frac{e^{-iqr_a}+e^{iqr_a}}{iqr_a}\right)+\frac{e^{-iqr_ax}}{\left(qr_a\right)^2}\bigg|_{-1}^{1}\\
\int_{-1}^{1}dxe^{-iqr_ax}x&=i\left(\frac{e^{-iqr_a}+e^{iqr_a}}{qr_a}\right)+\frac{e^{-iqr_a}-e^{iqr_a}}{\left(qr_a\right)^2},
\end{aligned}$$

podemos reescrever I_{r_a} como

$$
\begin{aligned}
I_{r_a} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^\infty dr r_a^2 R_{00}\left(r_a\right) R_{11}\left(r_a\right)\left[i\left(\frac{e^{-iqr_a}+e^{iqr_a}}{qr_a}\right)+\frac{e^{-iqr_a}-e^{iqr_a}}{\left(qr_a\right)^2}\right] \\
&= \sqrt{3}\int_0^\infty dr r_a^2 R_{00}\left(r_a\right) R_{11}\left(r_a\right)\left[i\frac{\cos\left(qr_a\right)}{qr_a}-i\frac{\sin\left(qr_a\right)}{\left(qr_a\right)^2}\right] \\
I_{r_a} &= -\sqrt{3}i\int_0^\infty dr r_a^2 R_{00}\left(r_a\right) R_{11}\left(r_a\right) j_1\left(qr_a\right).
\end{aligned}
\tag{25}
$$

A fim de continuarmos, precisamos das formas explicitas de $R_{00}\left(r_a\right)$ e $R_{11}\left(r_a\right)$. Usando então que[1]

$$
R_{00}\left(r\right)=\frac{2}{\pi^{1/4}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{3/4}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2},\qquad R_{10}\left(r\right)=\sqrt{\frac{8}{3\sqrt{\pi}}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{5/4}re^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2},
\tag{26}
$$

de forma que

$$
\begin{aligned}
I_{r_a} &= -i\sqrt{3}\frac{2}{\pi^{1/4}}\left(\frac{m_a\omega}{\hbar}\right)^{3/4}\sqrt{\frac{8}{3\sqrt{\pi}}}\left(\frac{m_a\omega}{\hbar}\right)^{5/4}\int_0^\infty dr r_a^3 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}r_a^2} j_1\left(qr_a\right) \\
&= -2i\sqrt{\frac{8}{\pi}}\left(\frac{m_a\omega}{\hbar}\right)^2\int_0^\infty dr r_a^3 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}r_a^2} j_1\left(qr_a\right) \\
&= -2i\sqrt{\frac{8}{\pi}}\left(\frac{m_a\omega}{\hbar}\right)^2\frac{1}{q^4}\int_0^\infty d\rho\rho^3 e^{-\frac{m\omega}{\hbar q^2}\rho^2} j_1\left(\rho\right).
\end{aligned}
$$

Com a ajuda do nosso bom amigo Mathematica, temos que

$$
\int_0^\infty d\rho\rho^3 e^{-a\rho^2} j_1\left(\rho\right)=\frac{e^{-\frac{1}{4a}}\sqrt{\pi}}{8a^{5/2}},\qquad a=\frac{m\omega}{\hbar q^2},
$$

implicando que

$$
\begin{aligned}
I_{r_a} &= -2i\sqrt{\frac{8}{\pi}}\left(\frac{m_a\omega}{\hbar}\right)^2\frac{1}{q^4}\left[\frac{e^{-\frac{\hbar q^2}{4m_a\omega}}\sqrt{\pi}}{8\left(\frac{m_a\omega}{\hbar q^2}\right)^{5/2}}\right] \\
I_{r_a} &= -i\sqrt{8}\left(\frac{m_a\omega}{2\hbar}\right)^2\left(\frac{\hbar}{m_a\omega}\right)^{5/2} q e^{-\frac{\hbar q^2}{4m_a\omega}}.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Temos finalmente que

$$
\begin{aligned}
\left\langle\varphi_f\right| V\left|\varphi_i\right\rangle &= \frac{B}{\left(2\pi\right)^3}\left[\frac{8\pi\mu}{\left(\mu^2+q^2\right)^2}\right]\left[-i\sqrt{8}\left(\frac{m_a\omega}{2\hbar}\right)^2\left(\frac{\hbar}{m_a\omega}\right)^{5/2} q e^{-\frac{\hbar q^2}{4m_a\omega}}\right] \\
\left\langle\varphi_f\right| V\left|\varphi_i\right\rangle &= -i\frac{\sqrt{8}B}{\left(2\pi\right)^3}\frac{8\pi\mu}{\left(\mu^2+q^2\right)^2}\left(\frac{m_a\omega}{2\hbar}\right)^2\left(\frac{\hbar}{m_a\omega}\right)^{5/2} q e^{-\frac{\hbar q^2}{4m_a\omega}},
\end{aligned}
$$

[1] http://www3.physics.umanitoba.ca/~mgericke/Teaching/Phys3380/Lectures/Lecture19.pdf

implicando que

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= m_a m_b \left(2\pi\right)^4 \frac{k_f}{k_i} \frac{8B^2}{\left(2\pi\right)^6} \frac{8^2\pi^2\mu^2}{\left(\mu^2+q^2\right)^4} \left(\frac{m_a\omega}{2\hbar}\right)^4 \left(\frac{\hbar}{m_a\omega}\right)^5 q^2 e^{-\frac{\hbar q^2}{2m_a\omega}} \\
&= m_b \frac{k_f}{k_i} \frac{B^2}{\left(2\pi\right)^2} \frac{32\pi^2\mu^2}{\left(\mu^2+q^2\right)^4} \frac{\hbar}{\omega} q^2 e^{-\frac{\hbar q^2}{2m_a\omega}} \\
&= \frac{k_f}{v} \frac{\hbar^2}{\omega} \frac{B^2}{\left(2\pi\right)^2} \frac{32\pi^2\mu^2}{\left(\mu^2+q^2\right)^4} q^2 e^{-\frac{\hbar q^2}{2m_a\omega}} \\
&= \frac{8\mu^2 B^2 k_f}{\omega v} \frac{q^2}{\left(\mu^2+q^2\right)^4} e^{-\frac{\hbar q^2}{2m_a\omega}} \\
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{8\mu^2 B^2 k_f}{\omega v} \frac{\left|\vec{k}_f - \vec{k}_i\right|^2}{\left(\mu^2 + \left|\vec{k}_f - \vec{k}_i\right|^2\right)^4} e^{-\frac{\hbar \left|\vec{k}_f - \vec{k}_i\right|^2}{2m_a\omega}}. \qquad (28)
\end{aligned}
$$

Como consequência direta, a seção de choque total é

$$
\sigma = \frac{16\pi\mu^2 B^2 k_f}{\omega v} \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \frac{\left|\vec{k}_f - \vec{k}_i\right|^2}{\left(\mu^2 + \left|\vec{k}_f - \vec{k}_i\right|^2\right)^4} e^{-\frac{\hbar \left|\vec{k}_f - \vec{k}_i\right|^2}{2m_a\omega}}, \qquad (29)
$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{k}_f$ e $\vec{k}_i$, mais precisamente

$$
\left|\vec{k}_f - \vec{k}_i\right|^2 = \left(\vec{k}_f - \vec{k}_i\right) \cdot \left(\vec{k}_f - \vec{k}_i\right) = k_f^2 + k_i^2 - 2k_i k_f \cos\theta. \qquad (30)
$$

Problema 5

Considere um problema unidimensional cujo potencial é V. Escreva a equação de Lippmann-Schwinger na representação das coordenadas.

Solução:

Sabemos que a equação de Lippmann-Schwinger é da forma

$$\left|\psi_a^{\pm}\right\rangle = \left|\phi_a\right\rangle + \frac{1}{E_a - H_0 \pm i\varepsilon} V \left|\psi_a^{\pm}\right\rangle . \tag{31}$$

Vamos então aplicar $\langle x|$ na equação acima. Como resultado, temos que

$$\begin{aligned}
\psi_a^{\pm}(x) &= \frac{e^{ip_a x}}{\sqrt{2\pi}} + \langle x| \frac{1}{E_a - H_0 \pm i\varepsilon} V \left|\psi_a^{\pm}\right\rangle \\
&= \frac{e^{ip_a x}}{\sqrt{2\pi}} + \int dx' \langle x| \frac{1}{E_a - H_0 \pm i\varepsilon} |x'\rangle \langle x'| V \left|\psi_a^{\pm}\right\rangle \\
\psi_a^{\pm}(x) &= \frac{e^{ip_a x}}{\sqrt{2\pi}} + \int dx' \langle x| \frac{1}{E_a - H_0 \pm i\varepsilon} |x'\rangle V(x') \psi_a^{\pm}(x') .
\end{aligned} \tag{32}$$

O próximo passo é calcular

$$\begin{aligned}
\langle x| \frac{1}{E_a - H_0 \pm i\varepsilon} |x'\rangle &= \int dp \langle x| \frac{1}{E_a - H_0 \pm i\varepsilon} |p\rangle \langle p | x'\rangle \\
&= \int dp \langle x | p\rangle \frac{1}{E_a - E \pm i\varepsilon} \langle p | x'\rangle \\
&= \int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{ip\left(x-x'\right)}}{E_a - E \pm i\varepsilon} \\
&= 2m \int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{ip\left(x-x'\right)}}{p_a^2 - p^2 \pm i2m\varepsilon} \\
&= 2m \int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{ip\left(x-x'\right)}}{p_a^2 - p^2 \pm i\delta} \\
\langle x| \frac{1}{E_a - H_0 \pm i\varepsilon} |x'\rangle &= -2m \int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{ip\left(x-x'\right)}}{\left[p - (p_a \pm i\delta)\right]\left[p - (-p_a \mp i\delta)\right]} .
\end{aligned} \tag{33}$$

A integral logo acima pode ser resolvida utilizando o método de residuos. Por exemplo, para o caso $+i\varepsilon$ em (33), bem como o contorno da integral no sentido horário sob o plano $\mathrm{Im}p > 0$ uma ver que estamos considerando $x - x' > 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{ip|x-x'|}}{\left[p - (p_a + i\delta)\right]\left[p - (-p_a - i\delta)\right]} &= 2\pi i \lim_{p \to p_a + i\delta} \left[p - (p_a + i\delta)\right] \frac{e^{ip|x-x'|}}{2\pi \left[p - (p_a + i\delta)\right]\left[p - (-p_a - i\delta)\right]} \\
&= i \frac{e^{i(p_a + i\delta)|x-x'|}}{2\left[p_a + i\delta\right]} \\
&= i \frac{e^{ip_a|x-x'|}}{2p_a} .
\end{aligned}$$

Analogamente para o caso $-i\varepsilon$, temos

$$\int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{ip|x-x'|}}{\left[p-(p_a-i\delta)\right]\left[p-(-p_a+i\delta)\right]} = i\frac{e^{-ip_a|x-x'|}}{2p_a}.$$

Por fim, o resultado final para $\psi_a^{\pm}(x)$ é

$$\psi_a^{\pm}(x) = \frac{e^{ip_a x}}{\sqrt{2\pi}} - i\frac{m}{p_a}\int dx' e^{\pm ip_a|x-x'|} V(x')\,\psi_a^{\pm}(x')\,. \tag{34}$$