Lista VIII

Tarefa de leitura:

1. Sakurai seções 6.1 e 6.2

Problemas para entregar dia 25 de junho

1. Obtenha a energia do estado fundamental do átomo de hélio utilizando o método variacional utilizando as seguintes funções tentativa:

   (a) $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = e^{-\alpha(r_1+r_2)}$;

   (b) $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = f(r_1 + r_2)$.

   Compare seus resultados com a previsão de primeira ordem de teoria de perturbação.

2. Um átomo de um único elétron cujo estado fundamental é não degenerado é colocado em um campo elétrico uniforme na direção z. Obtenha uma expressão aproximada para o momento de dipolo elétrico induzido do estado fundamental considerando o valor esperado de ez com relação ao vetor de estado perturbado calculado em primeira ordem. Mostre que a mesma expressão pode ser também obtida usando a mudança de energia $\Delta = -\alpha|\vec{E}|^2/2$ do estado fundamental calculada em segunda ordem (α é a polarizabilidade). Ignore o spin.

3. Calcule o efeito Zeeman quadrático para o estado fundamental do átomo de hidrogênio devido ao termo usualmente ignorado no Hamiltoniano de interação: $e^2\vec{A}^2/2m_ec^2$. Escreva o desvio da energia como

   $$\Delta = -\frac{1}{2}\chi\vec{B}^2$$

   e obtenha uma expressão para a suscetibilidade magnética χ.

Problemas para as discussões

1. Este problema lida com pequenas mudanças no autovalor da energia em um campo Coulombiano devido ao tamanho finito da distribuição de carga nuclear. Esse é um efeito muito pequeno para átomos de Z moderado, mas não quando a partícula satélite é um múon.

   (a) Assuma que o estado ligado tem um raio a que é muito maior que o raio nuclear R. Mostre que apenas estados s têm uma mudança de nível de energia significativa e que o efeito decresce com a energia de ligação. Mostre que a mudança para uma partícula satélite de massa m é aproximadamente

   $$\Delta E \sim \left(\frac{R}{a}\right)^3 \frac{Ze^2}{4\pi R} \sim \left(\frac{R}{a_0}\right)^2 \left(\frac{m}{m_e}\right)^3 Z^4 \,\mathrm{Ry}\,.$$

   (b) Mostre que a fómula seguinte é exata no limite $a >> R$:

   $$\Delta E_n = |\Psi_{ns}(0)|^2 \int \delta V(\vec{r})\, d\vec{r}\,,$$

   onde δV é a mudança na enegia eletrostática devido a densidade de carga distribuida $e\rho_N$:

   $$\delta V(\vec{r}) = \frac{Ze^2}{4\pi r} - e^2 \int d\vec{r}'\, \frac{\rho_N(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\,.$$

   Note que ρ_N é efetivamente esfericamente simétrica independentemente da forma ou momento angular que o núcleo possa ter. Use isso para mostrar que

   $$\Delta E_n = \frac{1}{6} Ze^2 \langle r^2\rangle_N |\Psi_{ns}(0)|^2 = \frac{4}{3} Z^4 \frac{m^3}{m_e^3} \frac{\langle r^2\rangle_N}{a_0^2} \frac{1}{n^3}\,\mathrm{Ry}\,,$$

   onde $\langle r^2\rangle_N$ é o raio quadrático médio da distribuição de carga nuclear.

   (c) Avalie o desvio do nível 1s explicitamente para elétrons e múons em H, Fe e Pb, compare com a estrutura hiperfina do estado fundamental que é da ordem $\lambda_c^2(m_e^2/mm_N)|\Psi_{1s}(0)|^2$.Essa fórmula é válida para o desvio de todos esses núcleos para o caso de um elétron? E para o caso de um múon?

2. Calcule o efeito stark para os níveis $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$ do hidrogênio para um campo E suficientemente fraco de forma que eEa_0 seja pequeno comparado à estrutura fina, mas leve em conta o desvio de Lamb δ ($\delta=$ 1057 MHz), isto é, ignore $2P_{3/2}$ no cálculo. Mostre que para $eEa_0 <<$ δ, as mudanças na energia são quadráticas em E, enquanto que para $eEa_0 >> \delta$ são lineares em E.

3. Usando o fato que os elementos de matriz de um operador vetorial $\vec{V}$ em um sub-espaço de momento angular total definido são proporcionais aos elementos de matriz de $\vec{J}$, mostre que

$$j(j+1)\langle jm|\vec{V}|jm'\rangle = \langle jm|(\vec{V}\cdot\vec{J})\vec{J}|jm'\rangle\,.$$

4. Considere um átomo de hidrogênio na presença de um campo externo que introduz a perturbação

$$H_1 = \alpha z\,.$$

   Utilizando a função de onda tentativa

$$\Psi(\vec{r}) = C\,[1 + A\alpha z]\,u_0(\vec{r})$$

   onde A e C são constantes e u_0 é a funçao de onda do estado fundamental, estime a energia do primeiro estado excitado. No processo de minimização faça uma expansão em potências de α conservando termos até a ordem α^2.

5. Consideraremos aqui a estrutura fina (*ef*) e hiperfina (*ehf*) do positronio (Ps). Como esse átomo consiste de duas partículas de mesma massa, não há distinção de fato entre *ef* e *ehf*, mas é costume chamar a quebra do estado fundamental de efeito de *ehf*.

   (a) Em Ps os spins entram de forma equivalente, em contraste com outros átomos onde o spin da partícula satélite e do núcleo têm papeis dinâmicos diferentes. Assim os estados Ps são chamados $n\,{}^1L_J$ e $n\,{}^3L_J$ para o singleto e tripleto de spin, onde n é o número quântico principal, J o momento angular total e L o momento angular orbital em torno do centro de massa (com L=0,1,2,... designandos por S,P,D, etc.). Liste os estados nessa notação para $n \leq 3$.

(b) A correção principal para o estado fundamental, chamada de correção hiperfina embora seja muito maior que a do átomo de hidrogênio, é dada pelo hamiltoniano

$$H_{\text{ehf}} = 4\mu_B^2[\frac{3}{8} + \frac{7}{6}\vec{\sigma}^+ \cdot \vec{\sigma}^-]\delta^3(\vec{r})\,,$$

onde $\vec{\sigma}^{\mp}$ são os spins de $e^{\mp}$. Mostre que o desvio do nível fundamental é $\Delta_{\text{ehf}} = \frac{7}{6}\alpha^2\,\text{Ry}$.

(c) Considere o efeito Zeeman para o multipleto $n = 1$ de Ps. Use a simetria da interação Zeeman para mostrar que apenas dois dos quatro estados participam do efeito. Mostre que as suas energias na presença do campo magnético são

$$E_{\pm} = \frac{1}{2}\Delta_{\text{ehf}}\left(1 \pm \sqrt{1 + (4\mu_B B/\Delta_{\text{ehf}})^2}\right)$$