Gabarito: Lista 1

October 7, 2018

Problema 1

Mostre que

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, i^l j_l\,(kr)\, P_l\,(\cos\theta)\,.$$

Considere a seguinte decomposição em termos dos Polinômios de Legendre

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l'} F_{l'}\,(kr)\, P_{l'}\,(\cos\theta)\,, \qquad z = r\cos\theta.$$

Lançando mão da relação de ortogonalidade

$$\int_{-1}^{1} P_l\,(x)\, P_{l'}\,(x)\, dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'},$$

é possível determinar a função como

$$F_l\,(kr) = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} e^{ikrx} P_l\,(x)\, dx, \qquad x = \cos\theta.$$

Agora, iremos utilizar que[1]

$$j_l\,(kr) = \frac{1}{2i^l}\int_{-1}^{1} e^{ikrx} P_l\,(x)\, dx,$$

de forma que

$$F_l\,(kr) = (2l+1)\, i^l j_l\,(kr)\,.$$

Finalmente

$$e^{ikz} = \sum_{l} (2l+1)\, i^l j_l\,(kr)\, P_{l'}\,(\cos\theta)\,.$$

[1] Capítulo 6, Pag. 406 - Mecânica Quântica Moderna, 2ª Ed. J. J. Sakurai, J. Napolitano.

Problema 2

Considere o espalhamento de uma partícula de massa μ pelo potencial esfericamente simétrico

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & \text{se } r < a \\ 0 & \text{se } r > a \end{cases}$$

onde V_0 é positivo. Obtenha a seção de choque total no limite de baixas energias.

Dado que o potencial $V(r)$ é esfericamente simétrico e possui alcance finito até $r = a$, o método de ondas parciais se torna perfeito para analisar o processo de espalhamento em questão. Nós sabemos que a seção de choque total é dada por

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l, \tag{1}$$

onde δ_l é o desvio de fase que pode ser calculado a partir de

$$\tan \delta_l = \frac{kRj_l'(kR) - \beta_l j_l(kR)}{kRn_l'(kR) - \beta n_l(kR)}, \tag{2}$$

onde $'$ denota derivação com relação ao argumento e R é o alcance do potencial $V(r)$. A quantidade β_l é a derivada logarítmica de R_l, dada por

$$\beta_l = \frac{r}{R_l} \frac{dR_l}{dr}\bigg|_{r=R}.$$

Considere a equação radial para potenciais esfericamente simétricos

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) u_l = 0, \qquad u_l = rR_l(r). \tag{3}$$

Nós estamos interessados em encontrar R_l na região $r < a$, onde o potencial é diferente de zero. Dessa forma, a equação (3) pode ser reescrita como

$$\begin{gathered} \frac{d^2 u_l(\rho)}{d\rho^2} + \left(1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right) u_l(\rho) = 0 \\ \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + 2\frac{dR(\rho)}{d\rho} + \left(1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right) u_l = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

onde

$$q^2 = k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V_0, \qquad \rho = qr.$$

A equação (4) tem como soluções as funções de Bessel esféricas $j_l(\rho)$ e $n_l(\rho)$. Como a solução deve ser regular na origem $\rho = 0$, nós podemos descartas as soluções $n_l(\rho)$. O próximo passo é calcular β_l:

$$\beta_l = \frac{r}{R_l} \frac{dR_l}{dr}\bigg|_{r=R} = \frac{qa}{j_l(qa)} j_l'(qa).$$

Sabendo que

$$j_l(\rho) = (-\rho)^l \left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right]^l \left(\frac{\sin\rho}{\rho}\right), \qquad n_l(\rho) = -(-\rho)^l \left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right]^l \left(\frac{\cos\rho}{\rho}\right),$$

é possível mostrar que

$$j_l'(\rho) = \frac{l j_l(\rho)}{\rho} - j_{l+1}(\rho), \qquad n_l'(\rho) = \frac{l n_l(\rho)}{\rho} - n_{l+1}(\rho). \tag{5}$$

Utilizando as relações de recurrência (5), β_l pode ser escrita como

$$\beta_l = l - \frac{qa}{j_l\left(qa\right)} j_{l+1}\left(qa\right).$$

Nós estamos interessados no limite de baixas energias, implicando que $ka \ll 1$. Como consequência

$$qa = \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}}.$$

Se $V_0 \ll E$, nós temos que $qa \ll 1$. Tais fatos nos permitem utilizar as seguintes expressões para j_l e n_l no limite onde $\rho \to 0$:

$$j_l\left(\rho\right) = \frac{\rho^l}{(2l+1)!!}, \qquad n_l\left(\rho\right) = -\frac{(2l-1)!!}{\rho^{l+1}}. \tag{6}$$

Temos então que

$$\beta_l = l - \frac{\left(qa\right)^2}{\left(2l+3\right)}$$

Substituindo o resultado logo acima e (5) em (2), nós temos que

$$\begin{aligned}
\tan\delta_l &= \frac{l j_l\left(ka\right) - ka j_{l+1}\left(ka\right) - \left(l - \left(qa\right)^2 / \left(2l+3\right)\right) j_l\left(ka\right)}{l n_l\left(ka\right) - ka n_{l+1}\left(ka\right) - \left(l - \left(qa\right)^2 / \left(2l+3\right)\right) n_l\left(ka\right)} \\
&= \frac{j_l\left(ka\right)\left(qa\right)^2 / \left(2l+3\right) - ka j_{l+1}\left(ka\right)}{n_l\left(ka\right)\left(qa\right)^2 / \left(2l+3\right) - ka n_{l+1}\left(ka\right)} \\
\tan\delta_l &= \frac{j_l\left(ka\right)\left(qa\right)^2 - \left(2l+3\right)\left(ka\right) j_{l+1}\left(ka\right)}{n_l\left(ka\right)\left(qa\right)^2 - \left(2l+3\right)\left(ka\right) n_{l+1}\left(ka\right)}.
\end{aligned}$$

Em ordem de simplificar a expressão acima, nós podemos utilizar (6). O resultado é dado por

$$\begin{aligned}
\tan\delta_l &= \frac{\left(qa\right)^2\left(ka\right)^l / \left(2l+1\right)!! - \left(2l+3\right)\left(ka\right)\left(ka\right)^{l+1} / \left(2l+3\right)!!}{-\left(qa\right)^2\left(2l-1\right)!! / \left(ka\right)^{l+1} + \left(2l+3\right)\left(ka\right)\left(2l+1\right)!! / \left(ka\right)^{l+2}} \\
\tan\delta_l &= \left(ka\right)^l \left[\frac{\left(qa\right)^2 - \left(ka\right)^2}{\left(2l+1\right)!!}\right] \frac{\left(ka\right)^{l+1}}{\left(2l+3\right)!! - \left(qa\right)^2\left(2l-1\right)!!}.
\end{aligned} \tag{7}$$

No limite de baixas energias, a contribuição principal para o espalhamento vem da s-wave. Com isso, podemos considerar somente (7) para $l = 0$, de forma que

$$\begin{aligned}
\tan\delta_0 &= \left[\left(qa\right)^2 - \left(ka\right)^2\right] \frac{\left(ka\right)}{3 - \left(qa\right)^2} \\
&\approx \frac{\left(ka\right)}{3}\left[\left(qa\right)^2 - \left(ka\right)^2\right]\left(1 + \frac{\left(qa\right)^2}{3}\right) \\
&= \frac{\left(ka\right)}{3}\left[\left(ka\right)^2 - \frac{2mV_0}{\hbar^2}a^2 - \left(ka\right)^2\right]\left(1 + \frac{\left(qa\right)^2}{3}\right) \\
&= -\frac{2mV_0}{\hbar^2}a^2\frac{\left(ka\right)}{3}\left(1 + \frac{\left(qa\right)^2}{3}\right) \\
\delta_0 &\approx -\frac{2mV_0}{\hbar^2}a^2\frac{\left(ka\right)}{3},
\end{aligned} \tag{8}$$

onde utilizamos que $\tan\delta_0 \approx \delta_0$. Finalmente, colocando (8) em (1) no limite onde somente $l = 0$ contribui, nós temos que

$$\begin{aligned}
\sigma_{tot} &= \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0 \approx \frac{4\pi}{k^2}\delta_0^2 = \frac{4\pi}{k^2}\left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}a^2\frac{(ka)}{3}\right)^2 \\
\sigma_{tot} &= \frac{16\pi}{9}\frac{m^2V_0^2a^6}{\hbar^4}. \qquad (9)
\end{aligned}$$

Problema 3

Uma partícula de massa μ é espalhada pelo potencial

$$V(r) = \begin{cases} \infty & \text{se } r < a \\ 0 & \text{se } r > a \end{cases}.$$

Calcule a seção de choque total no limite de altas energias. Explique o resultado.

Nós sabemos que na região $r > a$, onde a é o alcance característico do potencial, a função de onda radial é dada por

$$R_l(r) = e^{i\delta_l}\left[\cos\delta_l j_l(kr) - \sin\delta_l n_l(kr)\right]. \tag{10}$$

O potencial $V(r)$ pode ser entendido como uma "esfera impenetrável", ou seja, a função de onda na região $r < a$ é nula, implicando assim que a solução dada por (10) deve obedecer a seguinte condição de contorno

$$R_l(a) = 0,$$

implicando então que

$$\tan\delta_l = \frac{j_l(ka)}{n_l(ka)}. \tag{11}$$

Nós estamos interessados no limite de altas energias $ka \gg 1$. Para tal situação, diferentes ondas parciais contribuem para o processo de espalhamento. Além disso, altas energias significa ondas com pequeno comprimento de onda ($\lambda \ll ka$). As justificativas logo acima nos permite utilizar a Aproximação de Eikonal em ordem de calcular a seção de choque total. Como já foi dito, valores mais altos de l contribuem para o espalhamento. Dado isso, é razoável supor que exista um valor máximo para $l_{max} = ka$, implicando que a seção de choque é dada por

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{ka}(2l+1)\sin^2\delta_l.$$

É possível mostrar que

$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x},$$

nos possibilitando a rescrever a expressão logo acima para σ_{tot} como

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{ka}(2l+1)\frac{\tan^2\delta_l}{1+\tan^2\delta_l}.$$

Analogamente ao caso de baixar energias ($ka \ll 1$), existem expressões para j_l e n_l no limite de altar energias $ka \gg 1$:

$$j_l(\rho) = \frac{1}{\rho}\sin\left(\rho - \frac{l\pi}{2}\right), \qquad n_l(\rho) = -\frac{1}{\rho}\cos\left(\rho - \frac{l\pi}{2}\right), \qquad \rho \gg 1.$$

Como consequência

$$\tan\delta_l = -\tan\left(ka - \frac{l\pi}{2}\right),$$

resultando na seguinte expressão para a seção de choque total

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{ka}(2l+1)\sin^2\left(ka - \frac{l\pi}{2}\right).$$

Agora, note que

$$\sin^2\left(ka - \frac{l\pi}{2}\right) = \sin^2 ka \cos^2\frac{l\pi}{2} + \cos^2 ka \sin^2\frac{l\pi}{2} - 2\sin\frac{l\pi}{2}\cos\frac{l\pi}{2}\cos ka \sin ka.$$

Note também que o termo cruzado na expressão logo acima desaparece para qualquer valor de l, de forma que

$$\begin{aligned}
\sigma_{tot} &= \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{ka}(2l+1)\left[\sin^2 ka \cos^2\frac{l\pi}{2} + \cos^2 ka \sin^2\frac{l\pi}{2}\right] \\
&= \frac{4\pi}{k^2}\left[\sin^2 ka \sum_{l}^{ka}(2l+1)\cos^2\frac{l\pi}{2} + \cos^2 ka \sum_{l}^{ka}(2l+1)\sin^2\frac{l\pi}{2}\right] \\
\sigma_{tot} &= \frac{4\pi}{k^2}\left[\sin^2 ka \sum_{l=\text{par}}^{ka}(2l+1) + \cos^2 ka \sum_{l=\text{ímpar}}^{ka}(2l+1)\right].
\end{aligned}$$

Sem perder generalidade alguma, vamos considerar que ka é um número inteiro par, lembrando também que $ka \gg 1$. Tal consideração nos permite resolver as somas logo acima:

$$\sum_{l=\text{par}}^{ka}(2l+1) = \frac{(ka)^2}{2} + \frac{3}{2}ka + 1 \approx \frac{(ka)^2}{2}$$

e

$$\sum_{l=\text{ímpar}}^{ka}(2l+1) = \frac{1}{2}(ka)^2 + \frac{3}{2}ka - \frac{1}{2} \approx \frac{(ka)^2}{2}.$$

Por fim, temos que

$$\begin{aligned}
\sigma_{tot} &= \frac{4\pi}{k^2}\frac{(ka)^2}{2}\left[\sin^2 ka + \cos^2 ka\right] \\
\sigma_{tot} &= 2\pi a^2. \qquad (12)
\end{aligned}$$

Problema 4

Encontre os "phase shifts" para o potencial

$$V(r) = \frac{\alpha}{r^2}.$$

Observe que os "phase shifts" não dependem da energia. Explique qual a simetria responsável por este resultado.

Para o potencial α/r^2, a equação radial tem a forma

$$r^2 \frac{d^2 R_l(r)}{dr^2} + 2r \frac{dR_l(r)}{dr} + \left[k^2 r^2 - \left(\frac{2m\alpha}{\hbar^2} + l(l+1)\right)\right] R_l(r) = 0. \tag{13}$$

Introduzindo as variáveis $\rho = kr$ e

$$n(n+1) = 2m\alpha/\hbar^2 + l(l+1), \tag{14}$$

a equação acima adquire a forma

$$\rho^2 \frac{d^2 R_l(\rho)}{d\rho^2} + 2\rho \frac{dR_l(\rho)}{d\rho} + \left[\rho^2 - n(n+1)\right] R_l(\rho) = 0,$$

cuja as soluções são as funções são as funções esféricas de Bessel $j_n(\rho)$, onde já estamos desconsiderando $n_n(\rho)$ por conta de exigirmos regularidade em $r = 0$. Encontrando as raízes de (14), nós podemos escrever n como

$$n = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{2m\alpha}{\hbar^2} + \left(l + \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Nós sabemos que as funções $j_n(\rho)$ possuem a seguinte forma para $\rho \to \infty$:

$$\begin{aligned}
j_n(\rho) &\approx \frac{1}{\rho} \sin\left(\rho - \frac{n\pi}{2}\right) = \frac{1}{\rho} \sin\left(\rho - \left[-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{2m\alpha}{\hbar^2} + \left(l + \frac{1}{2}\right)^2}\right] \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\rho} \sin\left(\rho - \left[l - l - \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{2m\alpha}{\hbar^2} + \left(l + \frac{1}{2}\right)^2}\right] \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\rho} \sin\left(\rho - \frac{l\pi}{2} + \left[l + \frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{2m\alpha}{\hbar^2} + \left(l + \frac{1}{2}\right)^2}\right] \frac{\pi}{2}\right) \\
j_n(\rho) &= \cos\left[\left(l + \frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{2m\alpha}{\hbar^2} + \left(l + \frac{1}{2}\right)^2}\right) \frac{\pi}{2}\right] j_l(\rho) - \sin\left[\left(l + \frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{2m\alpha}{\hbar^2} + \left(l + \frac{1}{2}\right)^2}\right) \frac{\pi}{2}\right] n_l(\rho).
\end{aligned} \tag{15}$$

Se compararmos a expressão (15) para $j_n(\rho)$ com a função de onda que descreve o sistema após o espalhamento

$$R_l(\rho) \approx \cos\delta_l j_l(\rho) - \sin\delta_l n_l(\rho),$$

podemos ver que

$$\delta_l = \left(l + \frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{2m\alpha}{\hbar^2} + \left(l + \frac{1}{2}\right)^2}\right) \frac{\pi}{2}. \tag{16}$$

A equação radial (13) é invariante sob as transformações de escala $r \to r/\mu$ e $k \to \mu k$. O fato de δ_l não depender da energia é consequência da invariância de escala do sistema.

Problema 5

Obtenha a função de Green do operador $\nabla^2 + k^2$, isto é,

$$\left(\nabla^2 + k^2\right) G\left(\vec{x}, \vec{x}'\right) = \delta(\vec{x} - \vec{x}'),$$

onde k é uma constante, impondo que

$$G\left(\vec{x}, \vec{x}'\right) \to \frac{e^{-ik|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}$$

no limite $|\vec{x}| \to \infty$.

Vamos começar relembrando que as funções $G\left(\vec{x}, \vec{x}'\right)$ e $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ podem ser escrita no espaço de momentos como

$$G\left(\vec{x}, \vec{x}'\right) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \tilde{G}\left(\vec{p}\right) e^{i\vec{p}\cdot\left(\vec{x}-\vec{x}'\right)}, \qquad \delta(\vec{x} - \vec{x}') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\left(\vec{x}-\vec{x}'\right)}.$$

Feito isso, a equação diferencial par o operador $\nabla^2 + k^2$ se torna uma equação algébrica cuja solução é dada por

$$\tilde{G}\left(\vec{p}\right) = \frac{1}{-p^2 + k^2}.$$

Como consequência

$$G\left(\vec{x}, \vec{x}'\right) = -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p}\cdot\left(\vec{x}-\vec{x}'\right)}}{p^2 - k^2}.$$

Introduzindo coordenadas esférica no espaço de momentos, nós temos que

$$G\left(\vec{x}, \vec{x}'\right) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi_p \int_0^{\pi} d\theta_p \sin\theta_p \int_0^{\infty} p^2 \frac{e^{ip\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|\cos\theta_p}}{p^2 - k^2} dp.$$

Definindo

$$\mu = \cos\theta_p, \qquad r = \left|\vec{x} - \vec{x}'\right|,$$

a integral logo acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
G\left(\vec{x}, \vec{x}'\right) &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^{1} d\mu \int_0^{\infty} p^2 \frac{e^{ipr\mu}}{p^2 - k^2} dp \\
&= -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{p^2}{ipr} \left[\frac{e^{ipr} - e^{-ipr}}{p^2 - k^2}\right] dp \\
G\left(\vec{x}, \vec{x}'\right) &= -\frac{1}{8\pi^2 ir} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{ipr} - e^{-ipr}}{(p+k)(p-k)}\right] pdp,
\end{aligned}$$

onde foi utilizado o fato de que o integrando é uma função par. Note que a integrando possui duas singularidades em $p = \pm k$. Em ordem de contornar esse problema, consideraremos p no plano complexo, introduzindo um fator de $+i\varepsilon$ a fim de retirar os polos do eixo real. A questão aqui é que devemos ser cuidadoso com contorno que sera feito. Para o primeiro termo, devemos contornar pelo plano superior, enquanto para o segundo termo, o contorno deve ser feito sobre o plano inferior. No final deste processo, podemos calcular a seguinte integral por meio do teorema dos resíduos:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm ipr}}{(p-(-k-i\varepsilon))\,(p-(k+i\varepsilon))} p dp &= \pm 2\pi i \lim_{p\to i\varepsilon} (p-(\pm k \pm i\varepsilon)) \frac{e^{\pm ipr}}{(p-(-k-i\varepsilon))\,(p-(k+i\varepsilon))} p \\
&= \pm 2\pi i \frac{e^{\pm i(\pm k \pm i\varepsilon)r}}{2\,(\pm k \pm i\varepsilon)} (\pm k \pm i\varepsilon) \\
&= \pm \pi i e^{ikr}.
\end{aligned}
$$

Como consequência

$$
\begin{aligned}
G(\vec{x}, \vec{x}') &= -\frac{1}{8\pi^2 ir}\left(\pi i e^{ikr} + \pi i e^{ikr}\right) \\
&= -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}.
\end{aligned}
$$

Também poderíamos ter considerado $-i\varepsilon$. O resultado teria sido

$$
G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}.
$$

Finalmente

$$
G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{e^{\pm ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{4\pi\,|\vec{x}-\vec{x}'|}.
$$