GABARITO – LISTA III

1.) Particula de spin $\frac{1}{2}$ em um campo magnético estático $\vec{B}$. O momento magnético é dado por

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2}\gamma\vec{\sigma}.$$

A Hamiltoniana é

$$H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}.$$

O vetor de Polarização é

$$\vec{P} = \langle\vec{\sigma}\rangle$$

$\vec{\sigma} \to$ as matrices de Pauli

Determinar a evolução temporal do vetor de Polarização.

A equação de evolução é

$$i\hbar\frac{dP_i}{dt} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{Tr}(\rho\sigma_i)$$

$$= \mathrm{Tr}\left[i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t}\sigma_i\right],$$

usando a equação de Liouville (Válida na imagen de Schrödinger)

$$i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t} = [H,\rho],$$

temos que

$$i\hbar\frac{dP_i}{dt} = \mathrm{Tr}\left\{[H,\rho]\sigma_i\right\}$$

$$= \mathrm{Tr}\left\{H\rho\sigma_i - \rho H\sigma_i\right\}$$

usando a ciclicidade do traço,

$$i\hbar \frac{dP_i}{dt} = \mathrm{Tr}\left[\sigma_i H\rho - H\sigma_i\rho\right]$$

$$= \mathrm{Tr}\left\{[\sigma_i, H]\rho\right\},$$

O comutador é dado por,

$$[\sigma_i, H] = -\frac{1}{2}\gamma B_j [\sigma_i, \sigma_j] \qquad [\sigma_i, \sigma_j] = 2\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

$$= -\frac{1}{\cancel{2}}\gamma B_j \cancel{2} i\, \varepsilon_{ijk}\sigma_k,$$

onde consideramos soma implícita sob j e k. Portanto,

$$i\hbar \frac{dP_i}{dt} = -i\gamma\varepsilon_{ijk}B_j\,\mathrm{Tr}\left\{\sigma_k\rho\right\}.$$

Em geral, podemos escrever a matriz densidade como,

$$\rho = a\left(1 + \vec{b}\cdot\vec{\sigma}\right)$$

Para determinar a e $\vec{b}$ usamos a definição de uma matriz densidade,

•) $$\mathrm{Tr}\,\rho = a\,\mathrm{Tr}\left(1 + \vec{b}\cdot\vec{\sigma}\right) = 2a \Rightarrow a = \frac{1}{2},$$

•) $$P_i = \mathrm{Tr}[\rho\sigma_i]$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[(1 + b_j\sigma_j)\sigma_i\right]$$

$$P_i = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[b_j\,\sigma_j\,\sigma_i\right]$$

$$= \frac{1}{2}\, b_j\, \mathrm{Tr}\underbrace{\left[\sigma_j\,\sigma_i\right]}_{2\delta_{ij}}$$

$$P_i = b_i.$$

Assim,

$$\rho = \frac{1}{2}\left(1 + \vec{P}\cdot\vec{\sigma}\right).$$

Portanto,

$$i\hbar\,\frac{dP_i}{dt} = -\frac{1}{2}\, i\gamma\, \varepsilon_{ijk}\, B_j\, \mathrm{Tr}\left\{\sigma_k\left(1 + P_\ell\,\sigma_\ell\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\, i\gamma\, \varepsilon_{ijk}\, B_j\, P_\ell\, \underbrace{\mathrm{Tr}\left[\sigma_k\,\sigma_\ell\right]}_{2\delta_{k\ell}}$$

$$= -\frac{1}{\cancel{2}}\, i\gamma\, \varepsilon_{ijk}\, B_j\, P_k\, \cancel{2}$$

$$= -i\gamma\left(\vec{B}\times\vec{P}\right)_i$$

$$i\hbar\,\frac{d\vec{P}}{dt} = i\gamma\left(\vec{P}\times\vec{B}\right)$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{\gamma}{\hbar}\,\vec{P}\times\vec{B}.$$

2.) Representação dos Momentos. Obter a equação que rege a evolução temporal do overlap $\langle p';t|\Psi\rangle$ do estado $|\Psi\rangle$ na representação de Heisenberg. Estude a conservação de probabilidade.

Na representação de Heisenberg, os autoestados evoluem de acordo com a equação,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|p;t\rangle = -H|p;t\rangle,$$

portanto, o bra evolui segundo

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\langle p;t| = \langle p;t|H$$

Projetando a anterior equação para o estado $|\Psi\rangle$,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\langle p;t|\Psi\rangle = \langle p;t|H|\Psi\rangle.$$

Consideramos a partícula sujeita a um potencial tipo oscilador harmônico, pelo que temos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\langle p;t|\Psi\rangle = \langle p;t|\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2|\Psi\rangle$$

$$= \frac{p^2}{2m}\langle p;t|\Psi\rangle - \frac{1}{2}m\omega^2\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial p^2}\langle p;t|\Psi\rangle$$

Definindo $\Psi(p) = \langle p;t|\Psi\rangle$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(p,t) = \frac{p^2}{2m} \Psi(p,t) - \frac{\hbar^2}{2} m\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} \Psi(p,t).$$

Usamos aqui que o operador posição atua no espaço de momentos como

$$\langle p;t|x^n|\Psi\rangle = -\left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \frac{\partial^n}{\partial p^n} \langle p;t|\Psi\rangle.$$

Agora, tomando o conjugado e multiplicando por Ψ, a nossa equação fica,

$$-i\hbar\, \Psi \frac{\partial}{\partial t} \Psi^* = \frac{p^2}{2m} \Psi \Psi^* - \frac{\hbar^2}{2} m\omega^2\, \Psi \frac{\partial^2}{\partial p^2} \Psi^*, \qquad (1)$$

por outro lado, multiplicando a equação geral por Ψ^*,

$$i\hbar\, \Psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \frac{p^2}{2m} \Psi^* \Psi - \frac{\hbar^2}{2} m\omega^2\, \Psi^* \frac{\partial^2}{\partial p^2} \Psi \qquad (2)$$

substraindo (2) $-$ (1) temos que

$$i\hbar \left\{ \Psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi + \Psi \frac{\partial}{\partial t} \Psi^* \right\} = -\frac{\hbar^2}{2} m\omega^2 \left\{ \Psi^* \frac{\partial^2}{\partial p^2} \Psi - \Psi \frac{\partial^2}{\partial p^2} \Psi^* \right\}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \{\Psi^* \Psi\} = -\frac{\hbar^2}{2} m\omega^2 \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \Psi^* \frac{\partial}{\partial p} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial p} \Psi^* \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 = -\frac{\partial}{\partial p} \left\{ \frac{\hbar m\omega^2}{2i} \left(\Psi^* \frac{\partial}{\partial p} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial p} \Psi^* \right) \right\}$$

Definindo

$$\rho = |\Psi|^2$$

$$J = \frac{\hbar}{2i} m\omega^2 \left(\Psi^* \frac{\partial}{\partial p} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial p} \Psi^* \right)$$

obtemos a equação de continuidade local

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla}_p \cdot \vec{J}$$

3.) Operador associado ao tempo.

Consideremos um operador associado ao tempo, de modo que o comutador com a Hamiltoniana é dado por

$$[\hat{t}, H] = -i\hbar .$$

Definamos o operador

$$U(\varepsilon) = e^{-\frac{i\varepsilon\hat{t}}{\hbar}}$$

onde ε é um parâmetro com unidade de energia. Notemos que $U(\varepsilon)$ é unitário dado que $\hat{t}$ é hermiteano por definição. Calculamos o comutador de $U(\varepsilon)$ com a Hamitoniana,

$$[H, U(\varepsilon)] = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(\varepsilon),$$

dado que $U(\varepsilon)$ pode ser escrito como uma série de potencias. Assim

$$[H, U(\varepsilon)] = \varepsilon U(\varepsilon),$$

isto é

$$HU - UH = \varepsilon U$$
$$HU = UH + \varepsilon U = U(H + \varepsilon)$$

Considerando os autoestados da Hamiltoniana

$$H|h\rangle = h|h\rangle,$$

podemos estudar a ação do operador $U(\varepsilon)$ no autoestado $|h\rangle$,

$$U(\varepsilon)|h\rangle,$$

para isso, calculemos

$$\begin{aligned} H\,U(\varepsilon)|h\rangle &= U(\varepsilon)\big(H+\varepsilon\big)|h\rangle \\ &= U(\varepsilon)(h+\varepsilon)|h\rangle \\ &= (h+\varepsilon)\,U(\varepsilon)|h\rangle. \end{aligned}$$

portanto, $U(\varepsilon)$ é um operador que muda o valor da energia por um valor de ε. Isto tem uma importante consequência: Dado que $\varepsilon \in \mathbb{R}$, por definição, o espectro da energia é contínuo! Isto não é consistente com distintas evidencias experimentais, que mostram que existem sistemas, tais como o âtomo de Hidrogênio, que possuem espectros discretos. Portanto, não é possível definir um operador associado ao tempo.