GABARITO - LISTA II

1) Seja um sistema com momento angular total 1. Escolhendo a base correspondente aos autoestados com autovalores +1, 0, -1, temos a seguinte matriz,

$$\rho = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Para verificar se ρ é uma matriz densidade admisível, devemos checar,

*) $\rho^{\dagger} = \rho$,

ρ é real e simétrica, pelo que é hermitiana.

*) $$\mathrm{Tr}(\rho) = \frac{1}{4}(2+1+2) = 1,$$

o traço é igual a 1

*) $\langle \psi | \rho | \psi \rangle$

Seja um estado $|\psi\rangle$, cuja representação na base de J_z é

$$\psi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix},$$

temos que

$$\langle \psi | \rho | \psi \rangle = \frac{1}{4}(\alpha^* \; \beta^* \; \gamma^*)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}(\alpha^* \; \beta^* \; \gamma^*)\begin{pmatrix} 2\alpha+\beta+\gamma \\ \alpha+\beta \\ \ldots \end{pmatrix}$$

$$\langle \psi | \rho | \psi \rangle = \frac{1}{2}\left(\alpha^*(2\alpha+\beta+\gamma) + \beta^*(\alpha+\beta) + \gamma^*(\alpha+\gamma)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\alpha\alpha^* + \alpha^*\beta + \alpha^*\gamma + \beta^*\alpha + \beta\beta^* + \gamma^*\alpha + \gamma^*\gamma\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left((\alpha\alpha^* + \alpha\gamma^* + \gamma\alpha^* + \gamma\gamma^*) + (\alpha\alpha^* + \alpha\beta^* + \beta\alpha^* + \beta\beta^*)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left((\alpha+\gamma)(\alpha^*+\gamma^*) + (\alpha+\beta)(\alpha^*+\beta^*)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(|\alpha+\gamma|^2 + |\alpha+\beta|^2\right)$$

Dado que o módulo de um número complexo ao quadrado sempre é maior o igual a zero, $|z|^2 \geq 0$, temos que,

$$\langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0.$$

Assim, verificamos que ρ é uma matriz admissível.

Agora

$$\rho^2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}\,\rho^2 = \frac{1}{16}(6+2+2) = \frac{5}{8} < 1,$$

Portanto ρ representa um estado de mistura.

b) O operador J_z na base dos seus autovetores é

$$J_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

O valor médio de J_z é

$$\langle J_z \rangle = \mathrm{Tr}(\rho J_z)$$

$$= \frac{\hbar}{4} \mathrm{Tr}\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \frac{\hbar}{4} \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\langle J_z \rangle = \frac{\hbar}{4}.$$

c) O desvio padrão é obtido apartir de

$$\Delta J_z = \sqrt{\langle J_z^2 \rangle - \langle J_z \rangle^2}.$$

Calculamos o valor médio de J_z^2, $\langle J_z^2 \rangle = \mathrm{Tr}(\rho J_z^2)$

$$\langle J_z^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \mathrm{Tr}\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \frac{\hbar^2}{4} \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle J_z^2 \rangle = \frac{3\hbar^2}{4},$$

portanto,

$$\Delta J_z = \sqrt{\frac{3\hbar^2}{4} - \frac{\hbar^2}{16}} = \frac{\sqrt{11}}{4}\hbar.$$

$$\Delta J_z = \frac{\sqrt{11}}{4}\hbar.$$

2) Seja um sistema composto por duas partes $S \in R$, com matriz densidade ρ.

A matriz densidade mais geral é dada por,

$$\rho = \sum_k p_k |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| \qquad \text{com} \qquad \sum_k p_k = 1.$$

O estado $|\varphi_k\rangle$ pode ser escrito em termos das bases $\{|u_n\rangle\} \in S$ e $\{|v_m\rangle\} \in R$, como

$$|\varphi_k\rangle = \sum_{n,m} C_{nm}^k |u_n\rangle \otimes |v_m\rangle .$$

A matriz densidade fica,

$$\rho = \sum_k p_k \sum_{n,m}\sum_{n',m'} C_{nm}^k C_{n'm'}^{k*} |u_n\rangle|v_m\rangle\langle u_{n'}|\langle v_{m'}| .$$

Tomando o traço sobre R,

$$\rho_S = \mathrm{Tr}_R\, \rho$$

$$= \sum_{m''} \langle v_{m''}| \sum_k \sum_{n,m}\sum_{n',m'} p_k C_{nm}^k C_{n'm'}^{k*} |u_n\rangle|v_m\rangle\langle u_{n'}|\langle v_{m'}|v_{m''}\rangle$$

$$= \sum_k \sum_{n,n'} \sum_{m,m',m''} p_k C_{nm}^k C_{n'm'}^{k*} \underbrace{\langle v_{m''}|v_m\rangle}_{\delta_{mm''}} |u_n\rangle\langle u_{n'}| \underbrace{\langle v_{m'}|v_{m''}\rangle}_{\delta_{m'm''}}$$

$$= \sum_k \sum_{n,n'} \sum_m p_k C_{nm}^k C_{n'm}^{k*} |u_n\rangle\langle u_{n'}|$$

Por hipotese, tomaremos que o subsistema s esta em um estado puro,

$$\rho_s = |u_s\rangle\langle u_s| \qquad \text{com} \quad s \text{ fixo},$$

Portanto, devemos ter que

$$|u_s\rangle\langle u_s| = \sum_k \sum_{n,n'} \sum_m P_k C_{nm}^{k} C_{n'm}^{k*} |u_n\rangle\langle u_{n'}|,$$

o que é verdadeiro para o caso em que

$$C_{nm}^{k} = \delta_{ns} A_m^k, \qquad \text{com} \quad \sum_{k,m} P_k |A_m^k|^2 = 1$$

dado que

$$\sum_k \sum_{n,n'} \sum_m P_k C_{nm}^{k} C_{n'm}^{k*} |u_n\rangle\langle u_{n'}| = \sum_k \sum_{n,n'} \sum_m P_k \delta_{ns} A_m^k \delta_{n's} A_m^{k*} |u_n\rangle\langle u_{n'}|$$

$$= \underbrace{\sum_{k,m} P_k |A_m^k|^2}_{1} \cdot |u_s\rangle\langle u_s|$$

$$= |u_s\rangle\langle u_s|.$$

Assim, a matriz densidade fica,

$$\rho = \sum_k \sum_{n,m} \sum_{n',m'} P_k \cdot \delta_{ns} A_m^k \delta_{n's} A_{m'}^{k*} |u_n\rangle|v_m\rangle\langle u_{n'}|\langle v_{m'}|$$

$$= |u_s\rangle\langle u_s| \cdot \underbrace{\sum_k \sum_{m,m'} P_k A_m^k A_{m'}^{k*} |v_m\rangle\langle v_{m'}|}_{\rho_R}$$

$$= \rho \otimes \rho$$

Dada a condição imposta sob a soma das constantes A_m^k, ρ_R será uma matriz densidade admissível.