Lista V

Tarefa de leitura:

1. GY seção 2.5, 3.1, 3.2, 3.3.

Problemas para entregar dia 21 de maio

1. Seja $T_y(a)$ um operador de translação de a paralela ao eixo Oy:

$$T_y(a)\,\vec{r} = \vec{r} + a\hat{y}\,.$$

   Se $R_x(\theta)$ é uma rotação de ângulo θ em torno de Ox, mostre que

$$R_x(\theta)\,T_y(a)\,R_x(-\theta)$$

   é uma translação ao longo de um eixo de deverá ser determinado. Use isso para deduzir a relação de comutação

$$[J_x, P_y] = i\,P_z$$

2. Considere a seqüência de rotações de Euler representadas por

$$\mathcal{D}^{1/2}(\alpha\beta\gamma) = e^{-iS_3\alpha}\,e^{-iS_2\beta}\,e^{-iS_3\gamma},$$

   onde $S_{2,3} = \frac{1}{2}\,\sigma_{2,3}$. Mostre que devido a propriedades do grupo de rotações essa seqüência de operações é equivalente a uma rotação de ângulo θ em torno de um único eixo. Encontre θ.

3. Considere o estado de momento angular orbital $|l = 2\ m = 0\rangle$. Imagine que esse estado é rodado de um ângulo θ em torno do eixo-y. Encontre a probabilidade do novo estado ser encontrado com $m = 0 \pm 1, \pm 2$.

Problemas para as discussões

1. Demonstre para o momento angular orbital que

$$\langle\theta\varphi|L_z|\ell m\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\langle\theta\varphi|\ell m\rangle\ .$$

2. Considere uma rotação de um ângulo θ em torno do eixo $\vec{n}$ (versor de módulo 1) que pode ser descrita pela matriz:

$$R_n(\theta) = \exp\left(-i\theta\,\vec{T}\cdot\vec{n}\right),$$

   (a) Mostre que $\mathrm{Tr}R_n(\theta) = 1 + 2\cos\theta$

   (b) Use o fato que as componentes de um vetor $\vec{V}$ sobre essa rotação se transformam como $V_i' = [R_n(\theta)]_{ij}V_j = V_i + \theta\epsilon_{ijk}n_jV_k + O(\theta^2)$ para determinar uma representação para os operadores hermitianos T_i.

   (c) Mostre que $(\vec{T}\cdot\vec{n})^3 = \vec{T}\cdot\vec{n}$.

   (d) Use o resultado do item (c) para mostrar que

$$e^{-i\theta(\vec{T}\cdot\vec{n})} = I - i\,\sin\theta\,(\vec{T}\cdot\vec{n}) - (1-\cos\theta)\,(\vec{T}\cdot\vec{n})^2$$

3. Considere um grupo G cujos elementos g são parametrizados por N coordenadas θ_a, $a = 1, ..., N$, $g(\theta = 0)$ é o elemento neutro do grupo. As variáveis θ_a são denotadas coletivamente por $\theta = \{\theta_a\}$. A lei de composição é dada por uma função f infinitamente diferenciável

$$g(\bar{\theta})g(\theta) = g(f(\bar{\theta},\theta)).$$

Novamente aqui f é uma notação coletiva para o conjunto de N funções f: $f(\bar{\theta},\theta) = \{f_a(\bar{\theta}_b,\theta_c)\}$. Seja um conjunto de matrizes unitárias $U(\theta_a)$ cuja lei de multiplicação é

$$U(\bar{\theta})U(\theta) = U(f(\bar{\theta},\theta)).$$

As matrizes U formam uma representação do grupo G.

   (a) Mostre que $f_a(\bar{\theta},\theta = 0) = \bar{\theta}_a$ e que $f_a(\bar{\theta} = 0,\theta) = \theta_a$. Mostre que para $\bar{\theta},\theta \to 0$ $f_a(\bar{\theta},\theta)$ tem a forma

$$f_a(\bar{\theta},\theta) = \theta_a + \bar{\theta}_a + f_{abc}\bar{\theta}_b\theta_c + O(\theta^3,\theta^2\bar{\theta},\theta\bar{\theta}^2,\bar{\theta}^3).$$

   (b) Mostre que nas vizinhanças de $U(\theta) = I$, para $\theta \to 0$ podemos escrever

$$U(\theta) = I - i\theta_aT_a - \frac{1}{2}\theta_b\theta_cT_{bc} + O(\theta^3).$$

(c) Calcule o produto $U(\bar{\theta})U(\theta)$ até ordem $(\bar{\theta}^2, \theta^2)$ e mostre que a igualdade

$$U(\bar{\theta})U(\theta) = U(f(\bar{\theta}, \theta)),$$

para os termos $\bar{\theta}_a\theta_b$ implica que

$$T_{bc} = T_b T_c - i f_{abc} T_a$$

(d) Utilize a simetria de T_{ab} para deduzir

$$[T_b, T_c] = i C_{abc} T_a$$

com $C_{abc} = -C_{acb}$. Exprima C_{abc} em função de f_{abc}. Essas relações constituem a álgebra de Lie do grupo definido pela lei de composição $f(\bar{\theta}, \theta)$

4. Considere um sistema com $j = 1$.

   (a) Escreva explicitamente a representação de J_y na base $|1m\rangle$ dos auto-vetores do momento angular desse sistema.

   (b) Mostre que apenas para $j = 1$, é possível substituir $e^{-iJ_y\beta}$ por $1 - iJ_y \sin\beta - J_y^2(1 - \cos\beta)$.

5. Mostre que a matriz densidade ρ para um sistema físico de spin 1

$$\rho = \frac{1}{3}\left(1 + \vec{P}\cdot\vec{J} + W_{ij}T_{ij}\right),$$

onde

$$T_{ij} = \frac{1}{2}\left(J_i J_j + J_j J_i\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}$$

e $\vec{J}$ os operadores de momento angular do sistema, cujos traços são nulos. Os W_{ij} são um conjunto de 5 números reais Encontre expressões explícitas para $\vec{P}$ e W_{ij} (análogas a $\vec{P} = \langle\vec{\sigma}\rangle$ para j=1/2).

6. Considere um operador vectorial $\vec{V}$ na base esférica V_μ ($\mu = \pm 1, 0$) definida por

$$V_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(V_1 + iV_2) \qquad V_{-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(V_1 - iV_2) \qquad V_0 = V_3$$

Mostre que:

(a) $[J_z, V_\mu] = \mu\, V_\mu$

(b) $[J_\pm, V_\mu] = a_\pm(1\mu)\, V_{\mu\pm 1}$

(c)

$$a_\pm(1\mu)\,\langle j'\,m'|V_{\mu\pm1}|j\,m\rangle =$$
$$a_\mp(j'm')\,\langle j'\,m'\mp 1|V_\mu|j\,m\rangle - a_\pm(jm)\,\langle j'\,m'|V_\mu|j\,m\pm 1\rangle$$