Lista I

Tarefa de leitura:

1. Para uma revisão de álgebra linear veja Merzbacher, "Quantum Mechanics" capítulo 14 seções 1-6.

2. *Para interessados:* o prof. João Barata tem boas notas de Física Matemática. Em particular sugiro os capítulos 2, 3, 9,10 e 39. Elas podem ser encontradas em

    `http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/capitulos.html`

Problemas para entregar dia 2 de abril

1. Demonstre que dois operadores A e B comutam se e somente se podemos escolher um conjunto de vetores que são autovetores simultâneos de A e B.

2. Demonstre

    (a) a desigualdade de Schwarz;

    (b) que qualquer operador unitário U pode ser escrito na forma $U = e^{iA}$, onde A é um operador hermitiano.

3. Considere os espaços vetoriais V_1 e V_2 de dimensões d_1 e d_2 respectivamente. O operador A_1 (A_2) atua no espaço V_1 (V_2). Supondo conhecidos os autovalores de A_1 e A_2 em V_1 e V_2, respectivamente, resolva o problema de autovalores de A_1 e $A_1 + A_2$ no espaço $V = V_1 \otimes V_2$.

Problemas para as discussões

4. Considere o espaço vetorial de funções reais contínuas com primeiras derivadas contínuas no intervalo fechado $[0, 1]$. Qual das seguintes definições pode ser um produto escalar?

    (a) $\langle f|g\rangle = \int_0^1 f'(x)g'(x)\,dx + f(0)g(0)$

(b) $\langle f|g\rangle = \int_0^1 f'(x)g'(x)\,dx$

5. Seja A um operador hermitiano positivo definido. Mostre que para todo $|u\rangle$ e $|v\rangle$,
$$|\langle u|A|v\rangle|^2 \leq \langle u|A|u\rangle\,\langle v|A|v\rangle$$
Em que condições vale a igualdade?

6. Seja $A(x)$ um operador que depende de uma variável contínua x. Defina sua derivada por
$$\frac{dA}{dx} \equiv A'(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{A(x+\epsilon) - A(x)}{\epsilon} \,.$$
Se A tiver inverso, mostre que
$$\frac{dA^{-1}}{dx} = -A^{-1}A'A^{-1}\,;$$
mostre também que se A e B ambos dependerem de x, então
$$\frac{d(AB)}{dx} = A'B + AB'$$

7. O operador hamiltoniana de um sistema de dois estados é dado por
$$H = a\left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right)\,,$$
onde a é um número com dimensão de energia. Mostre que H é hermitiano. Encontre a representação matricial de H na base $\{|1\rangle,\ |2\rangle\}$, bem como seus autovalores e respectivos autovetores.