GABARITO LISTA VI

1. Demonstre que

$$\langle \theta\varphi | L_z | \ell m\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\langle \theta\varphi|\ell m\rangle .$$

Uma rotação infinitesimal em torno do eixo z, em um ângulo $\delta\varphi$ é dada por

$$\mathcal{D}(\hat{z},\delta\varphi) = 1 - i\frac{\delta\varphi}{\hbar}L_z ,$$

$$= 1 - i\frac{\delta\varphi}{\hbar}(x p_y - y p_x) .$$

Atuando em um autoestado arbitrário de posição $|x', y', z'\rangle$ temos que

$$\mathcal{D}(\hat{z},\delta\varphi)|x', y', z'\rangle = \left\{1 - i\frac{\delta\varphi}{\hbar}(x p_y - y p_x)\right\}|x', y', z'\rangle$$

$$1 - i\frac{\delta\varphi}{\hbar}L_z|x', y', z'\rangle = |x' - y'\delta\varphi, y' + x'\delta\varphi, z'\rangle ,$$

onde aplicamos ação dos operadores momentum em cada eixo. Podemos considerar agora a ação da rotação em um estado com momento angular definido $|\ell m\rangle$, como

$$\mathcal{D}(\hat{z}, \delta\varphi)\,|\ell m\rangle,$$

projetando no autoestado de posição, temos que

$$\langle x', y', z'|\mathcal{D}(\hat{z}, \delta\varphi)|\ell m\rangle = \langle x', y', z'|\left\{1 - i\frac{\delta\varphi}{\hbar}L_z\right\}|\ell m\rangle$$

$$= \langle x' + y'\delta\varphi, y' - x'\delta\varphi, z'|\ell m\rangle,$$

mudando de base

$$\langle x', y', z'|\ell m\rangle \to \langle r, \theta, \phi|\ell m\rangle,$$

obtemos

$$\langle r, \theta, \phi|\, 1 - \frac{i\,\delta\varphi}{\hbar}L_z|\ell m\rangle = \langle r, \theta, \phi - \delta\varphi|\ell m\rangle$$

$$\langle r, \theta, \phi|\ell m\rangle - \frac{i\,\delta\varphi}{\hbar}\langle r, \theta, \phi|L_z|\ell m\rangle = \langle r, \theta, \phi|\ell m\rangle - \delta\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\langle r, \theta, \phi|\ell m\rangle$$

onde fizemos uma expansão de Taylor até a primeira ordem no lado direito. Portanto,

$$+\frac{i\,\cancel{\delta\varphi}}{\hbar}\langle r, \theta, \phi|L_z|\ell m\rangle = +\cancel{\delta\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\langle r, \theta, \phi|\ell m\rangle$$

$$\langle r,\theta,\phi | L_z | \ell m\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\langle r,\theta,\phi|\ell m\rangle .$$

2) Considere a sequência de rotações

$$\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}(\alpha\beta\gamma) = e^{-iS_3\alpha}\, e^{-iS_2\beta}\, e^{-iS_3\gamma}$$

onde $S_i = \frac{1}{2}\sigma_i$. Mostre que essa sequencia equivale a uma rotação de um ângulo θ emtorno de um único eixo. Determine θ.

Usando em geral que

$$\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}(\hat{n},\theta) = \mathbb{1}\cos\frac{\theta}{2} - i\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\sin\frac{\theta}{2},$$

$\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ as matrizes de Pauli, podemos escrever $\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}(\alpha\beta\gamma)$ como

$$\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}(\alpha\beta\gamma) = \left\{\mathbb{1}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} - i\sigma_3\sin\frac{\alpha}{2}\right\}\left\{\cos\frac{\beta}{2} - i\sigma_2\sin\frac{\beta}{2}\right\}$$

$$\left\{\cos\frac{\gamma}{2} - i\sigma_3\sin\frac{\gamma}{2}\right\}$$

$$= \left\{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - i\sigma_2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - i\sigma_3\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right.$$

$$\left. - \sigma_3\sigma_2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right\}\left\{\cos\frac{\gamma}{2} - i\sigma_3\sin\frac{\gamma}{2}\right\}$$

$$D^{\frac{1}{2}}(\alpha\beta\gamma) = \Big\{ \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - i\sigma_2 \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$- i\sigma_3 \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \underbrace{\sigma_3\sigma_2}_{i\varepsilon_{321}\sigma_1} \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$- i\sigma_3 \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - \underbrace{\sigma_2\sigma_3}_{i\varepsilon_{231}\sigma_1} \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$- \underbrace{\sigma_3^{\,2}}_{1} \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + i\,\sigma_3\underbrace{\sigma_2\sigma_3}_{i\varepsilon_{231}\sigma_1} \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\Big\},$$

usando as propriedades das matrizes de Pauli,

$$D^{\frac{1}{2}}(\alpha\beta\gamma) = \Big\{ \cos\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$- i\sigma_2 \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - i\sigma_3 \cos\frac{\beta}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$+ i\sigma_1 \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - i\sigma_1 \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$- \underbrace{\sigma_3\sigma_1}_{i\underbrace{\varepsilon_{312}}_{-1}\sigma_2} \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\Big\}$$

$$= \Big\{ \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$$

$$- i\sigma_1 \sin\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$- i\sigma_2 \sin\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$- i\sigma_3 \cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\Big\}$$

$$D^{\frac{1}{2}}(\alpha\beta\gamma) = \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$$

$$-i\sigma_1 \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha) - i\sigma_2 \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$$

$$-i\sigma_3 \cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma).$$

Comparando com a forma geral de $D^{\frac{1}{2}}(\hat{n},\theta)$, temos que

$$\cos\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma),$$

$$\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\sin\frac{\theta}{2} = \sigma_1 \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha) + \sigma_2 \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma) + \sigma_3 \cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma).$$

Da primeira expressão podemos obter o ângulo θ,

$$\theta = 2\arccos\left\{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\right\},$$

Enquanto que da segunda podemos obter o eixo em torno o qual é feita a rotação.

3) Considere o estado

$$|\psi\rangle = |\ell=2, m=0\rangle .$$

Imagine uma rotação em torno do eixo y de um ângulo θ. Encontre a probabilidade do novo estado ser encontrado em $m = 0, \pm 1, \pm 2$.

De acordo com o livro do Sakurai, seção 3.6, a projeção em um estado geral $|\ell\, m\rangle$ de um estado $|\hat{n}\rangle = \mathcal{D}\,|\psi\rangle$ que sofreu uma rotação é dada por

$$\langle \ell m | \hat{n}\rangle = \sum_{m'} \mathcal{D}^{(\ell)}_{mm'}(\phi,\theta,0)\, \langle \ell\, m' | \psi\rangle ,$$

sendo $|\psi\rangle$ o estado original, $\mathcal{D}^{(\ell)}_{mm'}(\phi,\theta,0)$ é a matriz de rotação. Agora, lembrando que $|\psi\rangle$ possui uma direção definida, em que $\theta=0$, temos que, em geral,

$$\langle \ell m' | \psi\rangle = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\, \delta_{m'0} ,$$

temos que,

$$\mathcal{D}^{(\ell)}_{mm'}(\phi,\theta,0) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y_\ell^{m\,*}(\theta,\phi)\, \delta_{m'0} ,$$

Portanto

$$\langle \ell m | \hat{n} \rangle = \mathcal{D}^{\ell}_{mm'}(\phi, \theta, 0),$$

onde θ, ϕ são os ângulos nos quais o estado original é girado; por tanto, as probabilidades são

$$|\langle \ell m | \hat{n} \rangle|^2 = |\mathcal{D}^{\ell}_{mm'}(\phi, \theta, 0)|^2.$$

Para o caso específico que estamos considerando $\ell = 2$, temos que

$$|\langle 2\, m | 2\, 0 \rangle_\theta|^2 = |\mathcal{D}^{2}_{m0}(0, \theta, 0)|^2,$$

dado que o estado foi girado em torno do eixo y. Usando os harmônicos esféricos para ℓ, m geral, temos que

$$\mathcal{D}^{\ell}_{m0}(0, \theta, 0) = \sqrt{\frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}}\; P^{m}_{\ell}(\cos\theta),$$

onde $P^m_\ell(x)$ são os polinômios associados de Legendre. Portanto

$$|\langle 2\, m | 2\, 0 \rangle_\theta|^2 = \frac{(2-m)!}{(2+m)!}\; P^{m}_{2}(\cos\theta)^2.$$

Explícitamente,

$$|\langle 2\ 0|2\ 0\rangle_\theta|^2 = \frac{1}{4}(3\cos^2\theta - 1)^2$$

$$|\langle 2\ \pm1|2\ 0\rangle_\theta|^2 = \frac{3}{2}\cos^2\theta\,\sin^2\theta$$

$$|\langle 2\ \pm2|2\ 0\rangle_\theta|^2 = \frac{3}{8}\sin^4\theta$$