Gabarito: Lista 3

November 22, 2018

Problema 1

Considere uma colisão na qual o spin do estado inicial é completamente aleatório e que no experimento o spin final não é medido. Demonstre que a seção de choque diferencial não depende do ângulo azimutal mas apenas do ângulo entre $\vec{k}_i$ e $\vec{k}_f$.

Solução:

No caso onde o spin das partículas são levados em consideração, os estados iniciais e finais agora são dados por $\left|\vec{k}_i, \nu_i\right\rangle$ e $\left|\vec{k}_f, \nu_f\right\rangle$, respectivamente. O ket $|\nu\rangle$ leva em consideração o spin das duas partículas envolvidas no processo de espalhamento. Temos então que a seção de choque diferencial é dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| f\left(\vec{k}_f \nu_f \middle| \vec{k}_i \nu_i\right)\right|^2,$$

onde

$$f\left(\vec{k}_f \nu_f \middle| \vec{k}_i \nu_i\right) = -4\pi^2 m \left\langle \vec{k}_f \nu_f \middle| T \middle| \vec{k}_i \nu_i \right\rangle, \qquad T = V + V\frac{1}{E - H + i\varepsilon}V.$$

Podemos então definir o operador de espalhamento M tal que

$$\langle \nu_f | M\left(\vec{k}_f, \vec{k}_i\right) |\nu_i\rangle = -4\pi^2 m \left\langle \vec{k}_f \nu_f \middle| T \middle| \vec{k}_i \nu_i \right\rangle. \tag{1}$$

No caso onde o estado inicial é completamente aleatório, temos que

$$|\nu_i\rangle = \sum_n P_{i,n} |\nu_n\rangle,$$

onde $\{|\nu_n\rangle\}$ é uma base ortonormal em um espaço de Hilbert de duas partículas com spin. Vamos considerar também que o estado final de spin não será medido, de forma que temos que considerar na seção de choque todos os estados finais de spin. Dessa forma, temos que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{m,n} \left| \langle \nu_m | M\left(\vec{k}_f, \vec{k}_i\right) |\nu_n\rangle \right|^2 P_{i,n},$$

ou em termos da matriz densidade do estado inicial ρ_i,

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \sum_{m,n}\left|\langle\nu_m|\, M\left(\vec{k}_f,\vec{k}_i\right)|\nu_n\rangle\right|^2 P_{i,n} = \sum_m \langle\nu_m|\, M\left(\vec{k}_f,\vec{k}_i\right)\left[\sum_n |\nu_n\rangle\, P_{i,n}\,\langle\nu_n|\right] M^\dagger\left(\vec{k}_f,\vec{k}_i\right)|\nu_m\rangle \\ &= \sum_m \langle\nu_m|\, M\left(\vec{k}_f,\vec{k}_i\right)\rho_i M^\dagger\left(\vec{k}_f,\vec{k}_i\right)|\nu_m\rangle \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \mathrm{tr}\left(M\rho_i M^\dagger\right).\end{aligned} \tag{2}$$

Vamos focar agora no caso onde o spin do estado inicial $|\nu_i\rangle$ é completamente aleatório, o que implica que

$$\rho_i = \frac{1}{d} I_d,$$

onde $d = (2s_1+1)(2s_2+1)$ corresponde a dimensão da parte espinorial do espaço de Hilbert. Nessas condições é possível mostrar que a seção de choque (2) é invariante sob rotações da forma

$$M' = R^\dagger M R,$$

mais explicitamente falando

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)' &= \mathrm{tr}\left(M'\rho_i M'^\dagger\right) = \mathrm{tr}\left(R^\dagger M \underbrace{R\rho_i R^\dagger}_{=\rho_i} M^\dagger R\right) \\ &= \mathrm{tr}\left(M\rho_i M^\dagger R R^\dagger\right) = \mathrm{tr}\left(M\rho_i M^\dagger\right) \\ \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)' &= \frac{d\sigma}{d\Omega}.\end{aligned} \tag{3}$$

Isso mostra que a seção de choque dependerá apenas do ângulo entre o momento inicial e final.

Podemos contruir esse resultado mais explicitamente para o caso de um espalhamento de uma partícula de spin 1/2 por uma partícula alvo de spin 0. Para esse exemplo, a dimensão da matriz M é $d = \left(2\frac{1}{2}+1\right)(2.0+1) = 2$. Note também que a matriz M carrega toda a informação sobre os momentos $\vec{k}_i$ e $\vec{k}_f$. Num primeiro momento, a matriz M mais geral possível é dada em tormos das matrizes de Pauli σ_i e combinações escalares ou pseudo-escalares de $\vec{k}_i$ e $\vec{k}_f$, mais precisamente

$$M(k,\theta) = g_1(k,\theta) + \vec{\sigma}\cdot\left(\vec{k}_i\times\vec{k}_f\right) g_2(k,\theta) + \vec{\sigma}\cdot\left(\vec{k}_i+\vec{k}_f\right) g_3(k,\theta) + \vec{\sigma}\cdot\left(\vec{k}_i-\vec{k}_f\right) g_4(k,\theta). \tag{4}$$

O próximo passo é utilizar as simetrias da matriz M:

- Invariância por reflexão: $M\left(\vec{k}_i,\vec{k}_f,s_1,s_2\right) = M\left(-\vec{k}_i,-\vec{k}_f,s_1,s_2\right)$;
- Invariância por reversão temporal: $M\left(\vec{k}_i,\vec{k}_f,s_1,s_2\right) = M\left(-\vec{k}_i,-\vec{k}_f,-s_1,-s_2\right)$;

A invariância por reflexão fixa $g_3 = g_4 = 0$, simplificando então a forma de M:

$$M(k,\theta) = g_1(k,\theta) + \vec{\sigma}\cdot\left(\vec{k}_i\times\vec{k}_f\right) g_2(k,\theta), \qquad \hat{n} = \frac{\vec{k}_i\times\vec{k}_f}{\left|\vec{k}_i\times\vec{k}_f\right|}.$$

Definindo

$$g_1(k,\theta) = g(k,\theta), \qquad h(k,\theta) = \left|\vec{k}_i\times\vec{k}_f\right| g_2(k,\theta),$$

temos que

$$M\left(k,\theta\right)=g\left(k,\theta\right)+\vec{\sigma}\cdot\hat{n}h\left(k,\theta\right),\qquad \hat{n}=\frac{\vec{k}_i\times\vec{k}_f}{\left|\vec{k}_i\times\vec{k}_f\right|}. \tag{5}$$

Por fim, podemos calcular seção de choque diferencial:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \mathrm{tr}\left(M\rho_i M^{\dagger}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\left(g\left(k,\theta\right)+\vec{\sigma}\cdot\hat{n}h\left(k,\theta\right)\right)\left(g\left(k,\theta\right)^{*}+\vec{\sigma}\cdot\hat{n}h\left(k,\theta\right)^{*}\right)\right]\\
&=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\left|g\left(k,\theta\right)\right|^2+\left(\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\right)^2\left|h\left(k,\theta\right)\right|^2+\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\left(g\left(k,\theta\right)h\left(k,\theta\right)^{*}+h\left(k,\theta\right)g\left(k,\theta\right)^{*}\right)\right]\\
&=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\left|g\left(k,\theta\right)\right|^2+\left|h\left(k,\theta\right)\right|^2\right]\\
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left|g\left(k,\theta\right)\right|^2+\left|h\left(k,\theta\right)\right|^2, \qquad (6)
\end{aligned}$$

onde utilizamos que $\left(\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\right)^2=1$, $\mathrm{tr}\left(\sigma_i\right)=0$ e $\mathrm{tr}\left(I_2\right)=2$.

Problema 2

Esse problema tem como objetivo desenvolver o método de ondas parciais para processos de espalhamento devido a inteção de spin-orbita

$$V = V_0(r) + V_1(r)$$

a) Mostre que a solução da equação de Schrodinger pode ser escrita como

$$\Psi = \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)} i^l \left[C_l^+ R_l^+(r) \Lambda_l^+ + C_l^- R_l^-(r) \Lambda_l^- \right] Y_l^0(\theta) |\nu_i\rangle,$$

onde $\Lambda_l^\pm$ são os $j = l \pm \frac{1}{2}$ operadores de projeção

$$\Lambda_l^+ = \frac{l+1+\sigma \cdot L}{2l+1}, \qquad \Lambda_l^- = \frac{l - \sigma \cdot L}{2l+1},$$

$C_l^\pm$ are constants to be fixed by the boundary conditions, the radial funcitons are the solutions of

$$\left\{ \frac{1}{r^2}\left(\frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 - 2mV_l^\pm(r) \right\} R_l^\pm = 0,$$

and

$$V_l^+(r) = V_0(r) + lV_1(r), \qquad l = 0, 1, \ldots,$$
$$V_l^-(r) = V_0(r) - (l+1)V_1(r), \qquad l = 1, 2, \ldots.$$

b) Seja $\delta_l^\pm$ os desvios de fase nos estados com momento angular total $j = l \pm \frac{1}{2}$, isto é,

$$R_l^\pm \sim \frac{\text{const.}}{kr} \sin\left(kr - \frac{1}{2}\pi l + \delta_l^\pm\right), \qquad (r \longrightarrow \infty).$$

Show that the functions g e h que aparecem na matrix de espalhamento M são

$$g(k,\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2} \left[(l+1) a_l^+ + l a_l^-\right] Y_l^0(\theta),$$
$$h(k,\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2} \left[a_l^+ - a_l^-\right] i \sin\theta \frac{d}{d(\cos\theta)} Y_l^0(\theta),$$

onde $a_l^\pm = e^{i\delta_l^\pm} \sin\delta_l^\pm$.

c) Mostre que a seção de choque total é

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l \left[(l+1)\sin^2\delta_l^+ + l \sin^2\delta_l^-\right].$$

Solução:

a) Vamos começar lembrando que a Hamiltoniano do sistema, levando em conta o acoplamento spin-orbita, é dado por

$$H = \frac{p^2}{2m} + V_0(r) + V_1(r) \vec{\sigma} \cdot \vec{L}, \tag{7}$$

onde $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ são as matrizes de Pauli. A base mais conviente para se tratar esse problema é $|E, l, j, m\rangle$, tal que

$$\begin{aligned}
H\,|E,l,j,m\rangle &= E\,|E,l,j,m\rangle\,,\\
L^2\,|E,l,j,m\rangle &= l\,(l+1)\,|E,l,j,m\rangle\,,\\
J^2\,|E,l,j,m\rangle &= j\,(j+1)\,|E,l,j,m\rangle\,,\\
J_z\,|E,l,j,m\rangle &= m\,|E,l,j,m\rangle\,.
\end{aligned}$$

O Hamiltoniano (7) pode também ser escrito como

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + V_0\,(r) + V_1\,(r)\left(J^2 - S^2 - L^2\right),$$

onde usamos que

$$J^2 = (S+L)^2 = S^2 + L^2 + \vec{\sigma}\cdot\vec{L}, \qquad \vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}.$$

Sabendo que

$$\left(J^2 - S^2 - L^2\right)|j,m\rangle = \left(j\,(j+1) - l\,(l+1) - \frac{3}{4}\right)|j,m\rangle \tag{8}$$

e também que os valores possíveis de momento ângular total são $j = l \pm \frac{1}{2}$, nós podemos considerar separamente os casos $j = l + \frac{1}{2}$ e $j = l - \frac{1}{2}$. Temos então que (8) adquire a forma

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{L}\,|j,m\rangle = \left(J^2 - S^2 - L^2\right)|j,m\rangle = \begin{cases} l\,|j,m\rangle\,, & j = l + \frac{1}{2} \\ -\,(l+1)\,|j,m\rangle\,, & j = l - \frac{1}{2} \end{cases}. \tag{9}$$

Por meio da introdução dos operadores de projeção Λ_l^+e Λ_l^-, tal que

$$\begin{aligned}
\Lambda_l^+\,|j,m\rangle &= 0, \qquad j = l - \frac{1}{2},\\
\Lambda_l^-\,|j,m\rangle &= 0, \qquad j = l + \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

podemos escrever a função de onda Ψ como

$$\Psi = \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi\,(2l+1)}\,i^l\left[C_l^+ R_l^+\,(r)\,\Lambda_l^+ + C_l^- R_l^-\,(r)\,\Lambda_l^-\right] Y_l^0\,(\theta)\,|\nu_i\rangle\,, \tag{10}$$

onde chamamos $|j,m\rangle = |\nu_i\rangle$, que se refere ao estado de spin inicial do sistema, e $Y_l^0\,(\theta)$ são os harmônicos esféricos com $m = 0$ (simetria azimutal). Analogamente ao que temos no caso sem spin, as funções $R_l^{\pm}$ são soluções da equação radial, mais precisamente

$$\left\{\frac{1}{r^2}\left(\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr}\right) - \frac{l\,(l+1)}{r^2} + k^2 - 2mV_l^{\pm}\,(r)\right\} R_l^{\pm} = 0, \tag{11}$$

onde

$$\begin{aligned}
V_l^+\,(r) &= V_0\,(r) + lV_1\,(r)\,, \qquad l = 0, 1, \ldots,\\
V_l^-\,(r) &= V_0\,(r) - (l+1)\,V_1\,(r)\,, \qquad l = 1, 2, \ldots.
\end{aligned} \tag{12}$$

O resultado logo acima é bastante interessante. Se a partícula espalhada estiver inicialmente com spin dado pelo estado $|+\rangle$, ela sentira o efetio do potencial $V_l^+(r)$. Por outro lado, se inicialmente a partícula estiver no estado $|-\rangle$, o efeito de espalhamento será totalmente dado pela interação da partícula com o potencial $V_l^-(r)$.

b) Vamos começar relembrando algumas expressões recorrentes em problemas de espalhamento. A função de onda espalhada, na presença de spin, é da forma

$$\Psi \sim \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left[e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}}|\nu_i\rangle + \frac{e^{ikr}}{r}\sum_{\nu_f}|\nu_f\rangle f\left(\vec{k}_f\nu_f\middle|\vec{k}_i\nu_i\right)\right], \tag{13}$$

onde a amplitude de espalhamento tem a forma

$$f\left(\vec{k}_f\nu_f\middle|\vec{k}_i\nu_i\right) = -4\pi^2 m\left\langle\vec{k}_f\nu_f\middle|T\middle|\vec{k}_i\nu_i\right\rangle, \qquad T = V + V\frac{1}{E-H+i\varepsilon}V. \tag{14}$$

Nós podemos introduzir o operador de espalhamento M que age apenas no espaço de spins, de forma que

$$\langle\nu_f|\,M\left(\vec{k}_f,\vec{k}_i\right)|\nu_i\rangle = -4\pi^2 m\left\langle\vec{k}_f\nu_f\middle|T\middle|\vec{k}_i\nu_i\right\rangle.$$

Temos então que (13) pode ser reescrita como

$$\Psi \sim \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left[e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}} + \frac{e^{ikr}}{r}M\left(\vec{k}_f,\vec{k}_i\right)\right]|\nu_i\rangle. \tag{15}$$

A ideia agora é escrever (10) de forma semelhante a (15) de forma a determinar as funções g e h que aparecem na matriz de espalhamento

$$M = g(k,\theta) + h(k,\theta)\,\vec{\sigma}\cdot\frac{\vec{k}_f\times\vec{k}_i}{\left|\vec{k}_f\times\vec{k}_i\right|}. \tag{16}$$

Sabendo que no limite $r \longrightarrow \infty$ a função radial espalhada é da forma

$$R_l^\pm \sim \frac{1}{kr}\sin\left(kr - \frac{1}{2}\pi l + \delta_l^\pm\right) = \frac{e^{i\left(kr-\frac{1}{2}\pi l+\delta_l^\pm\right)} - e^{-i\left(kr-\frac{1}{2}\pi l+\delta_l^\pm\right)}}{2ikr},$$

temos que (10) é da forma

$$\begin{aligned}\Psi = \sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{4\pi(2l+1)}\frac{i^l}{2ikr}&\left[\left(C_l^+e^{i\delta_l^+}\Lambda_l^+ + C_l^-e^{i\delta_l^-}\Lambda_l^-\right)e^{i\left(kr-\frac{1}{2}\pi l\right)}\right.\\ &\left.-\left(C_l^+e^{-i\delta_l^+}\Lambda_l^+ + C_l^-e^{-i\delta_l^-}\Lambda_l^-\right)e^{-i\left(kr-\frac{1}{2}\pi l\right)}\right]Y_l^0(\theta)\,|\nu_i\rangle.\end{aligned} \tag{17}$$

A fim de obtermos uma expressão analoga a (15), nós temos que extrair a contribuição da onda plana em (17). Dessa forma, vamos então somar e subtrair

$$e^{ikz} = \sum_l\sqrt{4\pi(2l+1)}i^l j_l(kr)\,Y_l^0(\cos\theta) \approx \sum_l(2l+1)\,i^l\left(\frac{e^{i\left(kr-\frac{1}{2}\pi l\right)} - e^{-i\left(kr-\frac{1}{2}\pi l\right)}}{2ikr}\right)Y_l^0(\cos\theta)$$

à expressão de Ψ. Como resultado, temos que

$$\Psi = e^{ikz}\left|\nu_i\right\rangle + \sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{4\pi\left(2l+1\right)}\frac{i^l}{2ikr}\left[\left(C_l^+ e^{i\delta_l^+}\Lambda_l^+ + C_l^- e^{i\delta_l^-}\Lambda_l^- - 1\right)e^{i\left(kr-\frac{1}{2}\pi l\right)}\right.$$
$$\left. - \left(C_l^+ e^{-i\delta_l^+}\Lambda_l^+ + C_l^- e^{-i\delta_l^-}\Lambda_l^- - 1\right)e^{-i\left(kr-\frac{1}{2}\pi l\right)}\right] Y_l^0\left(\theta\right)\left|\nu_i\right\rangle . \tag{18}$$

A expressão logo acima pode ser interpretada como a soma de uma onda plana se propagando na direção z com duas condas esféricas se propagando na direção r. Como estamos interessados na "outgoing wave", o terceiro termo em (18) deve se anular, nós levando então a segunte condição:

$$C_l^+ e^{-i\delta_l^+}\Lambda_l^+ + C_l^- e^{-i\delta_l^-}\Lambda_l^- - 1 = 0. \tag{19}$$

A expressão logo acima é satisfeita assumindo que

$$C_l^{\pm} = e^{i\delta_l^{\pm}}$$

e também notando que

$$\Lambda_l^+ + \Lambda_l^- = \frac{l+1+\sigma\cdot L}{2l+1} + \frac{l-\sigma\cdot L}{2l+1} = 1.$$

Como consequência

$$\begin{aligned}
\Psi &= e^{ikz}\left|\nu_i\right\rangle + \sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{4\pi\left(2l+1\right)}\frac{i^l}{2ikr}\left(e^{2i\delta_l^+}\Lambda_l^+ + e^{2i\delta_l^-}\Lambda_l^- - 1\right)e^{i\left(kr-\frac{1}{2}\pi l\right)}Y_l^0\left(\theta\right)\left|\nu_i\right\rangle \\
&= e^{ikz}\left|\nu_i\right\rangle + \frac{e^{ikr}}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{4\pi\left(2l+1\right)}\frac{e^{i\frac{1}{2}\pi l}}{2ik}\left[e^{2i\delta_l^+}\Lambda_l^+ + e^{2i\delta_l^-}\Lambda_l^- - 1\right]e^{-i\frac{1}{2}\pi l}Y_l^0\left(\theta\right)\left|\nu_i\right\rangle \\
&= e^{ikz}\left|\nu_i\right\rangle + \frac{e^{ikr}}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{4\pi\left(2l+1\right)}\frac{1}{2ik}\left[\left(e^{2i\delta_l^+}-1\right)\Lambda_l^+ + \left(e^{2i\delta_l^-}-1\right)\Lambda_l^-\right]Y_l^0\left(\theta\right)\left|\nu_i\right\rangle \\
&= e^{ikz}\left|\nu_i\right\rangle + \frac{e^{ikr}}{r}\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{4\pi\left(2l+1\right)}\left[e^{i\delta_l^+}\left(\frac{e^{i\delta_l^+}-e^{-i\delta_l^+}}{2i}\right)\Lambda_l^+ + e^{i\delta_l^-}\left(\frac{e^{i\delta_l^-}-e^{-i\delta_l^-}}{2i}\right)\Lambda_l^-\right]Y_l^0\left(\theta\right)\left|\nu_i\right\rangle \\
\Psi &= e^{ikz}\left|\nu_i\right\rangle + \frac{e^{ikr}}{r}\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\left[e^{i\delta_l^+}\sin\delta_l^+\left(l+1+\sigma\cdot L\right) + e^{i\delta_l^-}\sin\delta_l^-\left(l-\sigma\cdot L\right)\right]Y_l^0\left(\theta\right)\left|\nu_i\right\rangle .
\end{aligned}$$

Definindo

$$a_l^{\pm} = e^{i\delta_l^{\pm}}\sin\delta_l^{\pm}, \tag{20}$$

temos por fim que

$$\Psi = e^{ikz}\left|\nu_i\right\rangle + \frac{e^{ikr}}{r}\left\{\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\left[a_l^+\left(l+1+\sigma\cdot L\right) + a_l^-\left(l-\sigma\cdot L\right)\right]Y_l^0\left(\theta\right)\right\}\left|\nu_i\right\rangle ,$$

implicando então que

$$M\left(\vec{k}_f,\vec{k}_i\right) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\left[a_l^+\left(l+1\right) + a_l^- l + \left(a_l^+ - a_l^-\right)\sigma\cdot L\right]Y_l^0\left(\theta\right). \tag{21}$$

Olhando para e expressão logo acima, podemos imediatamente reconhecer que

$$g\left(k,\theta\right)=\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2}\left[\left(l+1\right)a_l^{+}+la_l^{-}\right]Y_l^0\left(\theta\right). \tag{22}$$

No caso da função $h\left(k,\theta\right)$, temos que notar que $\vec{L}$ é um vetor normal ao plano definido por $\vec{k}_f$ e $\vec{k}_i$, acordando com (16). Dessa forma, podemos reconhecer que

$$\sigma\cdot\vec{L}h\left(k,\theta\right)=\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2}\left(a_l^{+}-a_l^{-}\right)\sigma\cdot\vec{L}Y_l^0\left(\theta\right).$$

Utilizando que

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=-i\vec{r}\times\nabla=-i\left(\hat{\phi}\frac{\partial}{\partial\theta}-\hat{\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right),$$

temos que

$$\sigma\cdot\vec{L}Y_l^0\left(\theta\right)=-i\sigma\cdot\hat{\phi}\frac{d}{d\theta}Y_l^0\left(\theta\right),$$

onde $\hat{\phi}$ é um vetor normal ao plano definido por $\vec{k}_f$ e $\vec{k}_i$. Temos então que

$$h\left(k,\theta\right)=\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2}\left(a_l^{+}-a_l^{-}\right)\left(-i\frac{d}{d\theta}\right)Y_l^0\left(\theta\right).$$

Se definirmos $x=\cos\theta$, podomos reescrever

$$-i\frac{d}{d\theta}Y_l^0\left(\theta\right)=-i\frac{dx}{d\theta}\frac{d}{dx}Y_l^0\left(\theta\right)=-i\left(-\sin\theta\right)\frac{d}{d\left(\cos\theta\right)}Y_l^0\left(\theta\right)=i\sin\theta\frac{d}{d\left(\cos\theta\right)}Y_l^0\left(\theta\right),$$

nos possibilitando finalmente reconhecer

$$h\left(k,\theta\right)=\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2}\left(a_l^{+}-a_l^{-}\right)i\sin\theta\frac{d}{d\left(\cos\theta\right)}Y_l^0\left(\theta\right). \tag{23}$$

c) A seção de choque diferencial é dada a partir das funções g e h da matrix de espalhamento M tal que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left|g\left(k,\theta\right)\right|^2+\left|h\left(k,\theta\right)\right|^2, \tag{24}$$

de forma que

$$\sigma=\int d\Omega\left(\left|g\left(k,\theta\right)\right|^2+\left|h\left(k,\theta\right)\right|^2\right)=\sigma_g+\sigma_h.$$

Por meio de (22), temos que

$$\left|g\left(k,\theta\right)\right|^2=\frac{1}{k^2}\sum_{l,l'=0}^{\infty}\left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2}\left(\frac{4\pi}{2l'+1}\right)^{1/2}\left[\left(l+1\right)a_l^{+}+la_l^{-}\right]\left[\left(l'+1\right)a_{l'}^{+}+l'a_{l'}^{-}\right]^{*}Y_l^0\left(\theta\right)Y_{l'}^{0*}\left(\theta\right).$$

Lançando mão da relação de ortogonalidade dos harmônicos esféricos

$$\int d\Omega Y_l^m\left(\theta,\phi\right)Y_{l'}^{m'*}\left(\theta,\phi\right)=\delta_{ll'}\delta_{mm'}, \tag{25}$$

implicando que

$$\sigma_g = \int d\Omega \left|g(k,\theta)\right|^2 = \frac{1}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)\left[(l+1)\,a_l^+ + l a_l^-\right]\left[(l+1)\,a_l^+ + l a_l^-\right]^*$$
$$= \frac{1}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)\left[(l+1)^2 a_l^+ a_l^{+*} + l\,(l+1)\left(a_l^+ a_l^{-*} + a_l^- a_l^{+*} + l^2 a_l^- a_l^{-*}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)\left[(l+1)^2 \sin^2\delta_l^+ + l\,(l+1)\sin\delta_l^+ \sin\delta_l^- \left(e^{i\left(\delta_l^+ - \delta_l^-\right)} + e^{-i\left(\delta_l^+ - \delta_l^-\right)}\right) + l^2 \sin^2\delta_l^-\right]$$
$$\sigma_g = \frac{1}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)\left[(l+1)^2 \sin^2\delta_l^+ + 2l\,(l+1)\sin\delta_l^+ \sin\delta_l^- \cos\left(\delta_l^+ - \delta_l^-\right) + l^2 \sin^2\delta_l^-\right]. \qquad (26)$$

Para o termo $\left|h(k,\theta)\right|^2$ em (24), o calculo não é tão direto:

$$\left|h(k,\theta)\right|^2 = \frac{1}{k^2}\sum_{l,l'=0}^{\infty}\left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2}\left(\frac{4\pi}{2l'+1}\right)^{1/2}\left(a_l^+ - a_l^-\right)\left(a_{l'}^+ - a_{l'}^-\right)^* \sin^2\theta\left(\frac{d}{d(\cos\theta)}Y_l^0(\theta)\right)\left(\frac{d}{d(\cos\theta)}Y_{l'}^0(\theta)\right)^*.$$

Os harmônicos esféricos $Y_l^0(\theta)$ estão relacionados com os os polinômios de Legendre por meio da relação

$$Y_l^0(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\theta), \qquad (27)$$

onde[1]

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l, \qquad (28)$$

satisfazendo

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dP_l(x)}{dx}\right] + l\,(l+1)\,P_l(x) = 0. \qquad (29)$$

Podemos então reescrever a expressão para $\left|h(k,\theta)\right|^2$ como

$$\left|h(k,\theta)\right|^2 = \frac{1}{k^2}\sum_{l,l'=0}^{\infty}\left(a_l^+ - a_l^-\right)\left(a_{l'}^+ - a_{l'}^-\right)^*\left(1-x^2\right)\left(\frac{d}{dx}P_l(x)\right)\left(\frac{d}{dx}P_{l'}(x)\right)$$
$$= \frac{1}{k^2}\sum_{l,l'=0}^{\infty}\left(a_l^+ - a_l^-\right)\left(a_{l'}^+ - a_{l'}^-\right)^*\left\{\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_l(x)\frac{dP_{l'}(x)}{dx}\right] - P_l(x)\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dP_{l'}(x)}{dx}\right]\right\}$$
$$\left|h(k,\theta)\right|^2 = \frac{1}{k^2}\sum_{l,l'=0}^{\infty}\left(a_l^+ - a_l^-\right)\left(a_{l'}^+ - a_{l'}^-\right)^*\left\{\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_l(x)\frac{dP_{l'}(x)}{dx}\right] + P_l(x)\,l'\,(l'+1)\,P_{l'}(x)\right\},$$

[1] Aqui temos que $x = \cos\theta$, implicando que $1 - x^2 = \sin^2\theta$.

onde utilizamos (29). A minupulação logo acima nos permitirá calcular σ_h, mais explicitamente

$$\begin{aligned}
\sigma_h &= \frac{1}{k^2}\sum_{l,l'=0}^{\infty}\left(a_l^+ - a_l^-\right)\left(a_{l'}^+ - a_{l'}^-\right)^* \int d\Omega \left\{\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_l\left(x\right)\frac{dP_{l'}\left(x\right)}{dx}\right] + P_l\left(x\right) l'\left(l'+1\right)P_{l'}\left(x\right)\right\} \\
&= \frac{2\pi}{k^2}\sum_{l,l'=0}^{\infty}\left(a_l^+ - a_l^-\right)\left(a_{l'}^+ - a_{l'}^-\right)^* \left\{\cancelto{=0}{\left(1-x^2\right)P_l\left(x\right)\frac{dP_{l'}\left(x\right)}{dx}\Bigg|_{-1}^{1}} + l'\left(l'+1\right)\int_{-1}^{1} dx P_l\left(x\right)P_{l'}\left(x\right)\right\} \\
&= \frac{2\pi}{k^2}\sum_{l,l'=0}^{\infty}\left(a_l^+ - a_l^-\right)\left(a_{l'}^+ - a_{l'}^-\right)^* l'\left(l'+1\right)\frac{2}{\left(2l'+1\right)}\delta_{ll'} \\
&= \frac{1}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2l+1} l\left(l+1\right)\left(a_l^+ - a_l^-\right)\left(a_l^+ - a_l^-\right)^* \\
\sigma_h &= \frac{1}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2l+1} l\left(l+1\right)\left[\sin^2\delta_l^+ + \sin^2\delta_l^- - 2\sin\delta_l^+\sin\delta_l^-\cos\left(\delta_l^+ - \delta_l^-\right)\right]. \qquad (30)
\end{aligned}$$

Por fim, temos que a seção de choque total é dada por

$$\begin{aligned}
\sigma = \sigma_g + \sigma_h &= \frac{1}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)\left[\left(l+1\right)^2\sin^2\delta_l^+ + l^2\sin^2\delta_l^- + l\left(l+1\right)\left(\sin^2\delta_l^+ + \sin^2\delta_l^-\right)\right] \\
&= \frac{1}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)\left[\left(\left(l+1\right)^2 + l\left(l+1\right)\right)\sin^2\delta_l^+ + \left(l^2 + l\left(l+1\right)\right)\sin^2\delta_l^-\right] \\
&= \frac{1}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)\left[\left(2l^2+3l+1\right)\sin^2\delta_l^+ + \left(2l^2+l\right)\sin^2\delta_l^-\right] \\
&= \frac{1}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)\left[\left(2l+1\right)\left(l+1\right)\sin^2\delta_l^+ + \left(2l+1\right)l\sin^2\delta_l^-\right] \\
\sigma &= \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left[\left(l+1\right)\sin^2\delta_l^+ + l\sin^2\delta_l^-\right]. \qquad (31)
\end{aligned}$$