Gabarito: Lista 3

December 14, 2018

Problema 1

Calcule a energia de ponto zero do campo eletromagnético por unidade de área no sistema do problema anterior. Para regularizar as expressões empregue que

$$E = \frac{1}{2}\sum_k \hbar\omega_k e^{-\alpha\omega_k}$$

onde α é o regulador. E diverge para $\alpha \to 0$. Avalie a força entre as placas por unidade de área utilizando a expressão obtida para E. Esta força é finita no limite $\alpha \to 0$ e igual a

$$-\frac{1}{240}\frac{\pi^2\hbar c}{a^4}.$$

Solução:

A energia de ponto zero do campo eletromagnético (ou energia de vácuo) é dada por

$$E_0 = \frac{1}{2}\sum_k \hbar\omega_k, \qquad \omega_k = ck = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}.$$

Vamos considerar agora que duas placas condutoras são separadas por uma distância a. Essas duas placas são dispostas de tal forma que o plano (x, y) do nosso sistema de coordenadas seja paralelo a superficie das placas. Dessa forma, o eixo z é perpendicular as placas. Vamos então introduzir então

$$U(a) = E_0(a) - E_0(\infty), \tag{1}$$

que é essencialmente a diferença de energia de vácuo para o caso onde as placas estão separadas por uma distância finita a e o caso onde a separação $a \to \infty$, implicando que

$$E_0(\infty) = \lim_{a\to\infty} E_0(a).$$

A presença das placas condutoras leva a uma discrização de k_z (condições de contorno), de forma que

$$\omega_k = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}.$$

Temos então que

$$E_0(a) = \frac{\hbar c}{2}\sum_{k_x}\sum_{k_y}\sum_n \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}.$$

No processo de quantização do campo eletromagnético, considera-se que o espaço possui volume finito $V = L^3$ com condições periódicas de contorno[1], ou seja,

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L}\left(n_x, n_y, n_z\right).$$

Uma vez que podemos condirerar $L \gg a$, podemos substituir as somas em k_x e k_y por integrais, de forma que

$$E_0\left(a\right) = \frac{\hbar c}{2}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \sum_n \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}.$$

Introduzindo coordenadas polares, temos que

$$E_0\left(a\right) = \frac{\hbar c}{2}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 2\pi \int_0^{\infty} kdk \sum_n \sqrt{k^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \tag{2}$$

$$E_0\left(a\right) = \frac{\hbar c L^2}{4\pi} \int_0^{\infty} kdk \left[k + 2\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\right], \tag{3}$$

onde o fator de 2 multiplicando a soma surge por conta de estamos somando sob n^2. Para a energia $E_0\left(\infty\right)$, nós temos que considerar o limite $a \to \infty$ em (2), de forma que também podemos também substituir a soma n por uma integral, ou seja,

$$E_0\left(\infty\right) = \frac{\hbar c L^2}{4\pi} \int_0^{\infty} kdk 2 \int_0^{\infty} dn \sqrt{k^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}. \tag{4}$$

Como consequência de (3) e (4), a energia potencial $U\left(a\right)$ assume a forma

$$U\left(a\right) = \frac{\hbar c L^2}{2\pi} \int_0^{\infty} kdk \left[\frac{k}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} - \int_0^{\infty} dn \sqrt{k^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\right]. \tag{5}$$

A integral em (5) é altamente divergente! A estratégia então é introduzir um regulador na integrais. Mais precisamente

$$\int_0^{\infty} \frac{k^2}{2} dk \to \lim_{\delta \to 0} \int_0^{\infty} \frac{k^2}{2} e^{-\delta k} dk \tag{6}$$

e

$$\int_0^{\infty} k\sqrt{k^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} dk \to \lim_{\delta \to 0} \int_0^{\infty} k\sqrt{k^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} e^{-\delta\sqrt{k^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}} dk. \tag{7}$$

Feito isso, a integral (6) resulta em

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{k^2}{2} e^{-\delta k} dk &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \delta^2} \int_0^{\infty} e^{-\delta k} dk \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \delta^2} \left(-\frac{e^{-\delta k}}{\delta}\right)\Bigg|_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \delta^2} \frac{1}{\delta} \\
\int_0^{\infty} \frac{k^2}{2} e^{-\delta k} dk &= \frac{1}{\delta^3}.
\end{aligned} \tag{8}$$

A integração em (7) não é tão direta. Primeiro, vamos fazer a seguinte troca de variáveis:

$$u^2 = k^2 + \gamma^2, \qquad udu = kdk,$$

[1] Perceba que essas são as condições de contorno para o caso onde as placas condutoras não estão presentes.

onde $\gamma = n\pi/a$. Como consequência

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty k\sqrt{k^2+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}e^{-\delta\sqrt{k^2+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}}dk &= \int_\gamma^\infty u^2 e^{-\delta u}du \\
&= \frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\int_\gamma^\infty e^{-\delta u}du \\
&= \frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\left(-\frac{e^{-\delta k}}{\delta}\right)\Bigg|_\gamma^\infty \\
\int_0^\infty k\sqrt{k^2+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}e^{-\delta\sqrt{k^2+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}}dk &= \frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\left(\frac{e^{-\delta\gamma}}{\delta}\right).
\end{aligned} \tag{9}$$

Substituindo os resultados obtidos em (8) e (9) na expressão (5), temos que

$$U(a) = \frac{\hbar c L^2}{2\pi}\left[\frac{1}{\delta^3} + \frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\frac{1}{\delta}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\delta\gamma} - \frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\frac{1}{\delta}\int_0^\infty dn e^{-\delta\gamma}\right]. \tag{10}$$

O próximo passo é resolver a soma e a integral na variável n. Vamos começar pela integral:

$$\int_0^\infty dn e^{-\delta\gamma} = \frac{a}{\pi}\int_0^\infty d\gamma e^{-\delta\gamma} = \frac{a}{\pi}\left(-\frac{e^{-\delta\gamma}}{\delta}\right)\Bigg|_0^\infty = \frac{a}{\pi}\frac{1}{\delta}. \tag{11}$$

Agora temos que lidar com a soma. Para tal fim, vamos reescalar o regulador $\delta \to \alpha = \pi\delta/a$, tal que

$$\frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\frac{1}{\delta}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\delta\gamma} \to \left(\frac{\pi}{a}\right)^3\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\frac{1}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha n} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^3\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{e^\alpha - 1}\right). \tag{12}$$

Substituindo (11) e (12) em (10), obtemos como resultado a segunte expressão:

$$U(a) = \frac{\hbar c L^2}{2\pi}\left(\frac{\pi}{a}\right)^3\left[\frac{1}{\alpha^3} + \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{e^\alpha - 1}\right) - \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\frac{1}{\alpha^2}\right].$$

Fazendo aa derivada mais simples

$$U(a) = \frac{\hbar c L^2}{2\pi}\left(\frac{\pi}{a}\right)^3\left[\frac{1}{\alpha^3} + \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha}{e^\alpha - 1}\right) - \frac{6}{\alpha^4}\right]. \tag{13}$$

Agora, note que

$$\frac{\alpha}{e^\alpha - 1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n\alpha^n}{n!}, \tag{14}$$

onde os coeficientes B_n são os números de Bernoulli, por exemplo,

$$B_0 = 1, \qquad B_1 = -1/2, \qquad B_2 = 1/6, \qquad B_4 = -1/30, \qquad B_6 = 1/42, \ldots.$$

Lembrando que para $n = 1, 2, \ldots$, temos que $B_{2n+1} = 0$. Como consequência de (14):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha}{e^\alpha - 1}\right) &= \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\frac{1}{\alpha^2}\left(B_0 + B_1\alpha + B_2\frac{\alpha^2}{2!} + \frac{B_4\alpha^4}{4!} + \cdots\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(\frac{B_0}{\alpha^2} + \frac{B_1}{\alpha} + \frac{B_2}{2} + \frac{B_4\alpha^2}{4!}\cdots\right) \\
\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha}{e^\alpha - 1}\right) &= 6\frac{B_0}{\alpha^4} + 2\frac{B_1}{\alpha^3} + \frac{B_4}{12} + \mathcal{O}(\alpha),
\end{aligned} \tag{15}$$

onde os termos $\mathcal{O}(\alpha)$ irão desaparecer quando tomarmos o limite $\alpha \to \infty$. Substituindo (15) em (13) resulta em

$$\begin{aligned}
U(a) &= \frac{\hbar c L^2}{2\pi}\left(\frac{\pi}{a}\right)^3\left[\frac{1}{\alpha^3} + 6\frac{B_0}{\alpha^4} + 2\frac{B_1}{\alpha^3} + \frac{B_4}{12} - \frac{6}{\alpha^4}\right] \\
&= \frac{\hbar c L^2}{2\pi}\left(\frac{\pi}{a}\right)^3\left[\frac{1}{\alpha^3} + 6\frac{1}{\alpha^4} + 2\frac{(-1/2)}{\alpha^3} + \frac{(-1/30)}{12} - \frac{6}{\alpha^4}\right] \\
&= \frac{\hbar c L^2}{2\pi}\left(\frac{\pi}{a}\right)^3\left[\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{360} + \frac{6}{\alpha^4} - \frac{6}{\alpha^4}\right] \\
U(a) &= -\frac{\hbar c \pi^2 L^2}{720 a^3}. \qquad (16)
\end{aligned}$$

A expressão obtida para $U(a)$ é finita e independente de δ! Por fim, a força $F(a)$ entre as placas por unidade de área é

$$\frac{F(a)}{L^2} = -\frac{dU}{da} = -\frac{\hbar c \pi^2}{240 a^4}. \qquad (17)$$

Problema 2

Mostre que os operadores de uma partícula podem ser escritos usando os operadores de criação e aniquilação como

$$F = \sum_{\vec{k},m,\vec{k}',m'} a^{\dagger}_{\vec{k},m} \left\langle \vec{k}, m \right| f \left| \vec{k}', m' \right\rangle a_{\vec{k}',m'}.$$

Solução:

A representação do operador F no espaço de Fock é dada por

$$F = \sum_{m,m'} \int d^3x \int d^3x' \psi^{\dagger}_{m} (\vec{x}) \left\langle \vec{x}, m \right| f \left| \vec{x}', m' \right\rangle \psi_{m'} (\vec{x}') , \tag{18}$$

onde os operadores

$$\psi_m (\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} a_{\vec{k},m}, \qquad \psi^{\dagger}_{m} (\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} a^{\dagger}_{\vec{k},m}, \tag{19}$$

são operadores de aniquilação e criação, respectivamente. O operador $\psi^{\dagger}_{m} (\vec{x})$ cria uma partícula na posição $\vec{x}$ com spin m:

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{x} \right| \psi^{\dagger}_{m} (\vec{x}') \left| 0 \right\rangle &= \left\langle \vec{x} \right| \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}'} a^{\dagger}_{\vec{k},m} \left| 0 \right\rangle = \left\langle \vec{x} \right| \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}'} \left| \vec{k} \right\rangle \chi_m \\
&= \chi_m \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}'} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \chi_m \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\left(\vec{x}-\vec{x}'\right)} \\
\left\langle \vec{x} \right| \psi^{\dagger}_{m} (\vec{x}') \left| 0 \right\rangle &= \chi_m \delta^{(3)} (\vec{x} - \vec{x}') ,
\end{aligned}$$

onde χ_m carrega a informação sobre o spin da partícula crida. Também foi utilizado que

$$\delta^{(3)} (\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\left(\vec{x}-\vec{x}'\right)}.$$

Voltando a problema original, sabendo que

$$\sum_{\vec{k},s} \left| \vec{k}, s \right\rangle \left\langle \vec{k}, s \right| = I,$$

onde s é um indice de spin como m, podemos reescrever (18) como

$$\begin{aligned}
F &= \sum_{m,m'} \sum_{\vec{k},s} \sum_{\vec{k}',s'} \int d^3x \int d^3x' \psi^{\dagger}_{m} (\vec{x}) \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \delta_{m,s} \left\langle \vec{k}, s \right| f \left| \vec{k}', s' \right\rangle \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}'} \delta_{m',s'} \psi_{m'} (\vec{x}') \\
F &= \frac{1}{V} \sum_{m,m'} \sum_{\vec{k},\vec{k}'} \int d^3x \int d^3x' \psi^{\dagger}_{m} (\vec{x}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left\langle \vec{k}, m \right| f \left| \vec{k}', m' \right\rangle e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}'} \psi_{m'} (\vec{x}') . \qquad (20)
\end{aligned}$$

O próximo passo é a substituição de (19) em (20), que resulta em

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{1}{V^2}\sum_{m,m'}\sum_{\vec{k},\vec{k}'}\sum_{\vec{q},\vec{q}'}\int d^3x \int d^3x' e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} a^{\dagger}_{\vec{q},m} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left\langle \vec{k}, m \right| f \left| \vec{k}', m' \right\rangle e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}'} e^{i\vec{q}'\cdot\vec{x}'} a_{\vec{q}',m'} \\
&= \frac{1}{V^2}\sum_{m,m'}\sum_{\vec{k},\vec{k}'}\sum_{\vec{q},\vec{q}'}\int d^3x \int d^3x' e^{i\left(\vec{k}-\vec{q}\right)\cdot\vec{x}} a^{\dagger}_{\vec{q},m} \left\langle \vec{k}, m \right| f \left| \vec{k}', m' \right\rangle a_{\vec{q}',m'} e^{i\left(\vec{q}'-\vec{k}'\right)\cdot\vec{x}'} \\
&= \sum_{m,m'}\sum_{\vec{k},\vec{k}'}\sum_{\vec{q},\vec{q}'} \delta_{\vec{k},\vec{q}} a^{\dagger}_{\vec{q},m} \left\langle \vec{k}, m \right| f \left| \vec{k}', m' \right\rangle a_{\vec{q}',m'} \delta_{\vec{q}',\vec{k}'} \\
F &= \sum_{m,m'}\sum_{\vec{k},\vec{k}'} a^{\dagger}_{\vec{k},m} \left\langle \vec{k}, m \right| f \left| \vec{k}', m' \right\rangle a_{\vec{k}',m'}.
\end{aligned}
$$

Por fim, o operador F pode ser escrito em termos de $a_{\vec{k},m}$ e $a^{\dagger}_{\vec{k},m}$ como

$$
F = \sum_{m,m'}\sum_{\vec{k},\vec{k}'} a^{\dagger}_{\vec{k},m} \left\langle \vec{k}, m \right| f \left| \vec{k}', m' \right\rangle a_{\vec{k}',m'}. \tag{21}
$$