GABARITO - LISTA I

1) Demonstrar que dois operadores comutam se e somente se é possível escolher um conjunto de vetores que são autovetores simultâneos dos operadores.

*) Provaremos primeiro que: (Os operadores A e B são hermitianos)

Se $[A,B]=0 \Rightarrow$ Existe um conjunto simultâneo de autovetores

Supunhamos que o operador A possui um conjunto de autovetores conhecido,

$$A|a_n^i\rangle = a_n |a_n^i\rangle,$$

onde $n=1,2,\ldots$ e $i=1,2,\ldots,g_n$, sendo g_n a degenerescência do autovalor a_n. É claro que,

$$\langle a_n^i | a_m^j\rangle = \delta_{ij}\delta_{mn}.$$

Consideremos a representação do operador B na base de A, $\{|a_n^i\rangle\}$

$$B_{mn}^{ij} = \langle a_m^j | B | a_n^i\rangle,$$

assim, para determinar tal representação, usaremos o seguinte fato

$$\langle a_m^j | [A,B] | a_n^i\rangle = 0,$$

dado que os dois operadores comutam. Temos que:

$$\langle a_m^j | [A,B] | a_n^i \rangle = 0$$

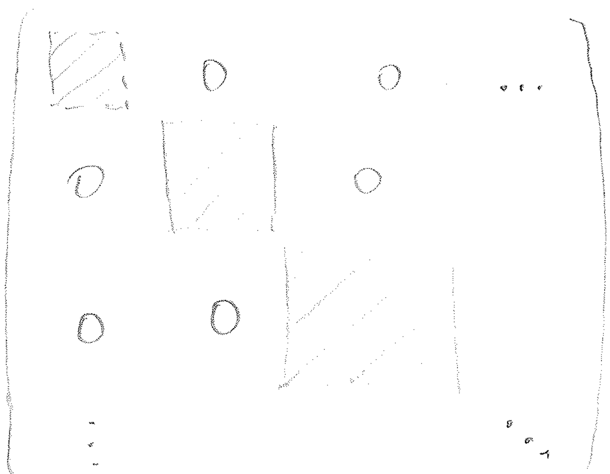
$$\langle a_m^j | AB - BA | a_n^i \rangle = 0$$

$$\langle a_m^j | AB | a_n^i \rangle - \langle a_m^j | BA | a_n^i \rangle = 0$$

$$a_m \langle a_m^j | B | a_n^i \rangle - a_n \langle a_m^j | B | a_n^i \rangle = 0$$

$$(a_m - a_n) \langle a_m^j | B | a_n^i \rangle = 0.$$

Para o caso em que $m \neq n$, vemos que a representação de B na base de A é uma matriz diagonal em blocos,

$B =$ 

Neste ponto devemos considerar dois casos,

a) a_n não é degenerado: Neste caso a matriz que representa B na base de A é diagonal. Podemos escrever o operador B como

$$B = \sum_n{}' b_n |a_n\rangle \langle a_n|,$$

onde b_n é o autovalor B,

$$B|a_n\rangle = b_n |a_n\rangle.$$

Para evitar confusões, escrevemos a base como

$$\{|u_{np}\rangle\},$$

onde

$$A|u_{n,p}\rangle = a_n|u_{np}\rangle,$$

$$B|u_{m,p}\rangle = b_p|u_{m,p}\rangle.$$

b) Quando há degenerescência ($g_n > 1$): Neste caso, o bloco não é geral em diagonal. Porém, a ação de A em qualquer $|a_n^i\rangle$ é igual à multiplicação pela constante a_n. Assim, a matriz que representa A no subespaço formado pelos autovetores com o mesmo autovalor é $a_n I_{g_n \times g_n}$, sendo $I_{g_n \times g_n}$ a matriz identidade de dimensão g_n. Além disso, notemos que a ação de A numa combinação linear dos autovetores será

$$A\sum_i c_i|a_n^i\rangle = \sum_i c_i a_n |a_n^i\rangle$$

$$= a_n \sum_i c_i |a_n^i\rangle.$$

Portanto, qualquer combinação também é autovetor de A. Por outro lado, a matriz que representa B no subespaço é

$$\beta_{ij}^{(n)} = \langle a_n^i|B|a_n^j\rangle. \qquad \left[\beta_{ij}^{(n)*} = \beta_{ji}^{(n)}\right]$$

Esta matriz é hermitiana e pode ser diagonalizada. Existirão então um conjunto de autovetores do operador B, tal que

$$B|v_n^i\rangle = \beta_i^{(n)}|v_n^i\rangle$$

Do processo de diagonalização, sabemos que

$$|v_n^i\rangle = \sum_j c_j^i \, |a_n^j\rangle,$$

isto é, $|v_n^i\rangle$ pode ser escrito como combinação linear dos autovetores de A. Assim, $|v_n^i\rangle$ será também um autovetor de A,

$$A|v_n^i\rangle = a_n|v_n^i\rangle.$$

Portanto, podemos encontrar um conjunto de autovetores simultâneos de B e A, tanto para o caso não degenerado quanto para o caso com degenerescência.

*) Provaremos agora que:

Se existe um conjunto simultâneo de autovetores de A e B $\Rightarrow$ $[A,B]=0$.

Suponhamos que A e B têm uma base comum de autovetores,

$$A|u_{n,p}^i\rangle = a_n|u_{n,p}^i\rangle,$$

$$B|u_{n,p}^i\rangle = b_p|u_{n,p}^i\rangle.$$

Calculamos

$$\begin{aligned}
[A,B]|u_{n,p}^i\rangle &= AB|u_{n,p}^i\rangle - BA|u_{n,p}^i\rangle \\
&= b_p\, A|u_{n,p}^i\rangle - a_n B|u_{n,p}^i\rangle \\
&= a_n b_p\, |u_{n,p}^i\rangle - a_n b_p |u_{n,p}^i\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dado que escolhemos um autovetor qualquer $|u_{n,p}^{i}\rangle$, temos que

$$[A,B]=0.$$

2)

a) Desigualdade de Schwarz.

Queremos provar que,

$$\langle \chi|\chi\rangle \cdot \langle \phi|\phi\rangle \geq |\langle \chi|\phi\rangle|^2.$$

Para o caso em que $\langle \chi|\phi\rangle=0$, a desigualdade é trivialmente obedecida, dado que

$$\langle \chi|\chi\rangle \geq 0,$$

$$\langle \phi|\phi\rangle \geq 0.$$

Consideremos a situação em que $\langle \chi|\phi\rangle \neq 0$. Para um estado qualquer, $|\xi\rangle$, é válido que

$$\langle \xi|\xi\rangle \geq 0$$

Escolhemos

$$|\xi\rangle = |\phi\rangle - \lambda|\chi\rangle,$$

Portanto

$$[\langle\phi| - \lambda^* \langle\chi|][|\phi\rangle - \lambda|\chi\rangle] \geq 0$$

$$\langle\phi|\phi\rangle - \lambda\langle\phi|\chi\rangle - \lambda^*\langle\chi|\phi\rangle + |\lambda|^2\langle\chi|\chi\rangle \geq 0$$

λ é um número complexo qualquer. Podemos escolher,

$$\lambda = \frac{\langle \phi | \phi \rangle}{\langle \phi | \chi \rangle} \Rightarrow \lambda^* = \frac{\langle \phi | \phi \rangle}{\langle \chi | \phi \rangle},$$

assim,

$$\langle \phi | \phi \rangle - \cancel{\frac{\langle \phi | \phi \rangle}{\langle \phi | \chi \rangle} \langle \phi | \chi \rangle} + \cancel{\frac{\langle \phi | \phi \rangle}{\langle \chi | \phi \rangle} \langle \chi | \phi \rangle} + \frac{\langle \phi | \phi \rangle^2}{|\langle \phi | \chi \rangle|^2} \langle \chi | \chi \rangle \geq 0$$

$$\frac{\langle \phi | \phi \rangle^2}{|\langle \phi | \chi \rangle|^2} \langle \chi | \chi \rangle \geq \langle \phi | \phi \rangle,$$

dado que $\langle \phi | \phi \rangle \geq 0$, podemos eliminar o $\langle \phi | \phi \rangle$ nos dois lados sem alterar a desigualdade,

$$\frac{\langle \phi | \phi \rangle \langle \chi | \chi \rangle}{|\langle \phi | \chi \rangle|^2} \geq 1 \qquad |\langle \phi | \chi \rangle|^2 > 0$$

$$\langle \phi | \phi \rangle \langle \chi | \chi \rangle \geq |\langle \phi | \chi \rangle|^2 \quad //$$

Q.E.D.

b) Demonstrar que um operador unitário pode ser escrito na forma

$$U = e^{iA},$$

com A um operador hermitiano.

Seja U um operador unitário. Pelo teorema espectral, existe um conjunto de autovetores $\{|u_i\rangle\}$ de U, tal que

$$U |u_i\rangle = u_i |u_i\rangle$$

Pela propriedade do operador U, $U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1}$, sendo $\mathbb{1}$ o operador identidade, temos que

$$\begin{aligned}
\langle u_i | u_j \rangle &= \langle u_i | \mathbb{1} | u_j \rangle \\
&= \langle u_i | U^\dagger U | u_j \rangle \\
&= \langle u_i | u_i^* u_j | u_j \rangle \\
&= u_i^* u_j \langle u_i | u_j \rangle,
\end{aligned}$$

dado que $\{|u_i\rangle\}$ é uma base,

$$\langle u_i | u_j \rangle = \delta_{ij},$$

portanto

$$|u_i|^2 = 1.$$

Podemos escrever em geral o autovalor u_i como,

$$u_i = e^{i\alpha_i}, \qquad \text{com } \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

O operador U na base $\{|u_i\rangle\}$ é dado por

$$\begin{aligned}
U &= \sum_i u_i |u_i\rangle\langle u_i| \\
&= \sum_i e^{i\alpha_i} |u_i\rangle\langle u_i|.
\end{aligned}$$

Podemos definir um operador A, tal que

$$A = \sum_i \alpha_i |u_i\rangle\langle u_i| .$$

Dado que $\alpha_i \in \mathbb{R}$, o operador A será hermitiano por definição. Alem disso, temos que o conjunto $\{|u_i\rangle\}$ é um conjunto de autovetores de A,

$$A|u_i\rangle = \alpha_i |u_i\rangle .$$

Agora, usando que se um operador B possui uma base $\{|b_i\rangle\}$, então,

$$f(B) = \sum_i f(b_i)\, |b_i\rangle\langle b_i| ,$$

temos que

$$U = \sum_i e^{i\alpha_i} |u_i\rangle\langle u_i|$$

$$U = e^{iA} . \qquad \text{Q.E.D.}$$

3.) Considerando dois espaços vetoriais V_1 e V_2, com dimensões d_1 e d_2, respectivamente, resolver o problema de autovalores de A_1 e $A_1 + A_2$ no espaço produto $V = V_1 \otimes V_2$.

Supondo que os operadores A_1 e A_2 possuem um conjunto de autovetores conhecido,

$$A_1 |\chi_n^i\rangle = a_n |\chi_n^i\rangle \qquad \{|\chi_n^i\rangle\} \in V_1$$

$$A_2 |\phi_m^j\rangle = \alpha_m |\phi_m^j\rangle \qquad \{|\phi_m^j\rangle\} \in V_2$$

Para resolver o problema de autovalores de $\tilde{A}_1$ e $\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2$, notemos que

a) Para $\tilde{A}_1$, qualquer vetor da forma

$$|\psi\rangle = |\chi_n^i\rangle \otimes |\phi\rangle$$

é um autovetor de $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_1 = A_1 \otimes \mathbb{1}_2$

$$\tilde{A}_1 |\psi\rangle = (A_1 \otimes \mathbb{1}_2)(|\chi_n^i\rangle \otimes |\phi\rangle)$$

$$= (A_1 |\chi_n^i\rangle) \otimes (\mathbb{1}_2 |\phi\rangle)$$

$$= a_n |\chi_n^i\rangle \otimes |\phi\rangle.$$

$$\tilde{A}_1 |\psi\rangle = a_n |\psi\rangle,$$

assim, podemos escolher $|\phi\rangle \in \{|v_\ell\rangle\}$, sendo $\{|v_\ell\rangle\}$ uma base qualquer de V_2.

b) Para $\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 = A_1 \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_1 \otimes A_2$, um vetor da forma

$$|\psi\rangle = |\chi_n^i\rangle \otimes |\phi_m^j\rangle$$

será um autovetor,

$$(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2)|\psi\rangle = (A_1 \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_1 \otimes A_2) |\chi_n^i\rangle \otimes |\phi_m^j\rangle$$

$$= (A_1 |\chi_n^i\rangle) \otimes |\phi_m^j\rangle + |\chi_n^i\rangle \otimes (A_2 |\phi_m^j\rangle)$$

$$= a_n |\chi_n^i\rangle \otimes |\phi_m^j\rangle + \alpha_m |\chi_n^i\rangle \otimes |\phi_m^j\rangle$$

$$= (a_n + \alpha_m) |\chi_n^i\rangle \otimes |\phi_m^j\rangle$$

$$(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2)|\psi\rangle = (a_n + \alpha_m)|\psi\rangle.$$