Math93.com

Cours - NSI
Les Graphes

1 Exemple

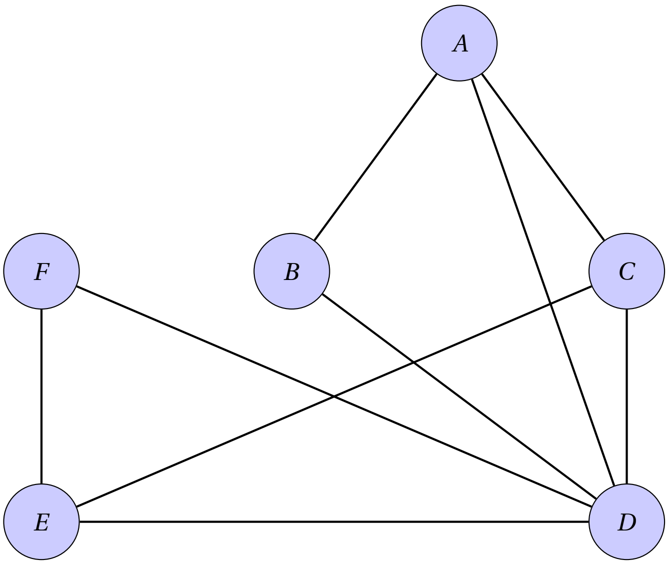
Imaginez un réseau social ayant 6 abonnés (A, B, C, D, E et F) où :

- A est ami avec B, C et D
- B est ami avec A et D
- C est ami avec A, E et D
- D est ami avec tous les autres abonnés
- E est ami avec C, D et F
- F est ami avec E et D

On peut représenter ce réseau social par un schéma où :

- Chaque abonné est représenté par un cercle avec son nom.
- Chaque relation "X est ami avec Y" par un segment de droite reliant X et Y ("X est ami avec Y" et "Y est ami avec X" étant représenté par le même segment de droite).

Voici ce que cela donne avec le réseau social décrit ci-dessus :



Ce genre de figure s'appelle un graphe.

FIGURE 1 – Un exemple de graphe

2 Définitions

Définition 1 (Graphe)

- Soit V un ensemble de **sommets** (aussi appelés nœuds, points ou vertex) ;
- Soit E un ensemble d'**arêtes** (ou arcs) qui relient des sommets de V : $E \subseteq \{(x,y) \in V^2 \,|\, x \neq y\}$
- Le nombre de sommets d'un graphe est appelé **ordre** du graphe.

Le couple (V,E) est un graphe

Dans l'exemple précédent (Fig. 1) :

$$V = \{A, B, C, D, E, F\}$$

et

$$E = \{(A,B),(A,C),(A,D),(B,D),(C,D),(C,E),(D,E),(D,F),(E,F)\}$$

et son ordre est 6.

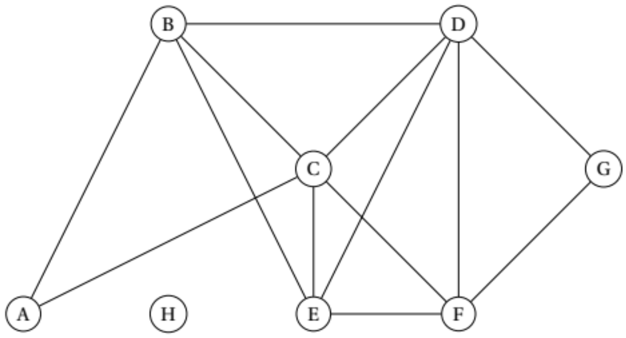


FIGURE 2 – Un autre exemple.

Remarques

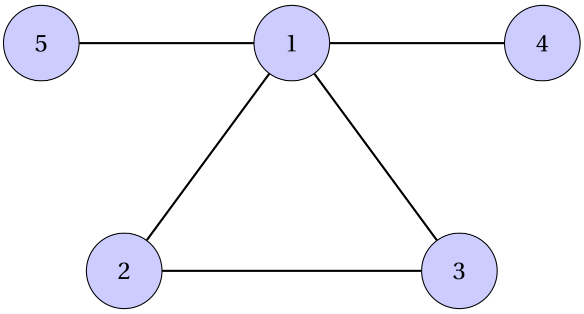
Une arête (ou arc) est un couple de sommets.
Deux sommets reliés par une arête sont dit **adjacents**.
Dans l'exemple précédent (Fig. 2), H est un sommet **isolé**.

Définition 2 (Etiquette)

L'**étiquette** (ou nom du sommet) représente la "valeur" du noeud. Un graphe dont tous les noeuds sont nommés est dit **étiqueté**.

Définition 3 (Degré d'un noeud et degré d'un graphe)

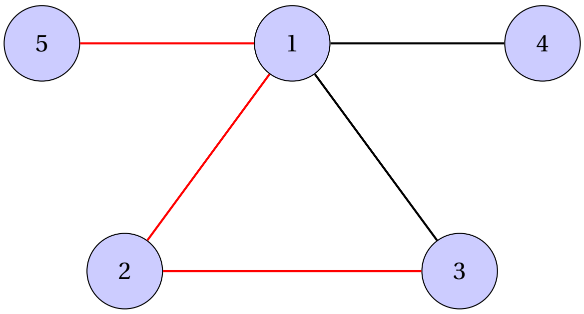
Le **degré** d'un noeud est égal au nombre d'arréte qui partent de ce noeud.
Le **degré** d'un graphe est égal au plus grand des degrés de ses noeud.
Le **degré** d'un graphe vide est égal à 0.



Noeud	1	2	3	4	5	Degré du graphe
Degré	4	2	2	1	1	4

Définition 4 (Chaîne ou Chemin)

Un **chemin (chaîne)** d'origine x et d'extrémité y , noté $\mu[x, y]$ est défini par une suite finie d'arcs consécutifs, reliant x à y.
Une **chaîne simple** est une **chaîne** ne passant pas deux fois par une même arête, c'est-à-dire dont toutes les arêtes sont distinctes.



$(5,1)-(1,2)-(2,3)$ est une chaine simple

Définition 5 (Cycle)

Un **cycle** est une chaîne simple dont l'origine est égale à l'extrémité.

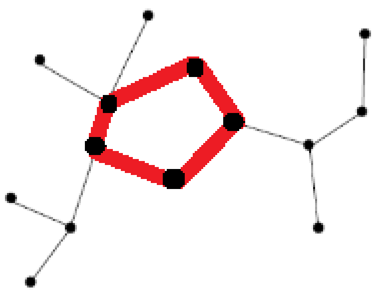
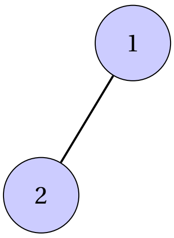


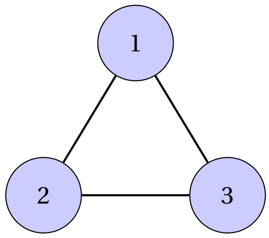
FIGURE 3 – Le chemin rouge est un cycle

Définition 6 (Graphe Complet)

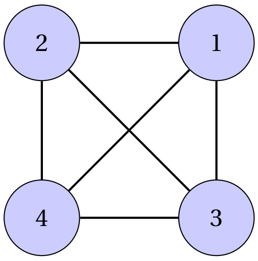
Un graphe **complet** est un graphe dont tous les sommets sont reliés entre eux.



Graphe complet d'ordre 2



Graphe complet d'ordre 3



Graphe complet d'ordre 4

Définition 7 (Graphe connexe)

Un graphe connexe est un graphe dont tous les sommets peuvent être relié par un chemin.

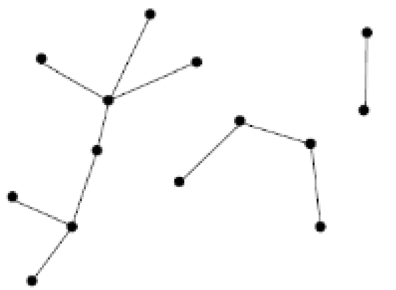


FIGURE 4 – graphe non connexe

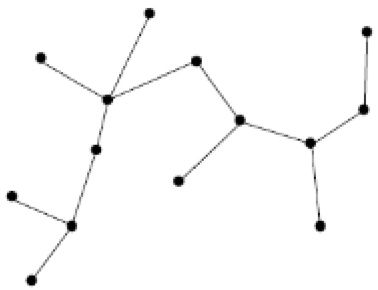
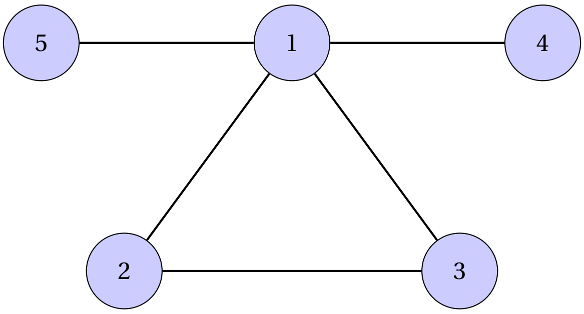


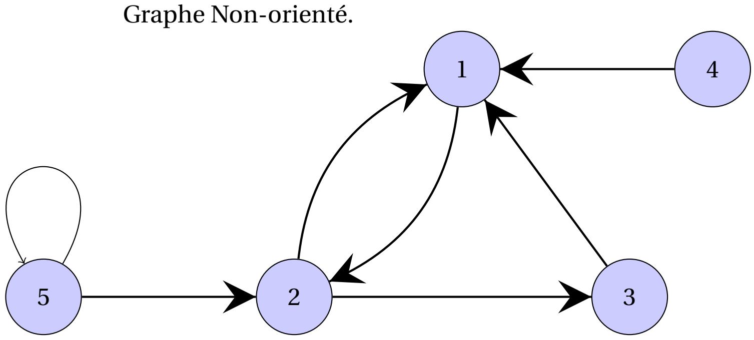
FIGURE 5 – graphe connexe

Définition 8 (Graphe Orienté ou non-orienté)

- Dans un **graphe non-orienté**, chaque arête peut-être parcourue dans les deux sens
- Dans un **graphe orienté**, chaque arête ne peut-être parcourue que dans un seul sens indiqué par une flèche.



Graphe Non-orienté.



Graphe Orienté.

Un graphe (orienté ou non-orienté) peut contenir des **boucles** c'est-à-dire une arête dont l'origine et l'extrémité correspondent au même sommet (on a par exemple une boucle au noeud 5 sur la représentation précédente).

Proposition 1

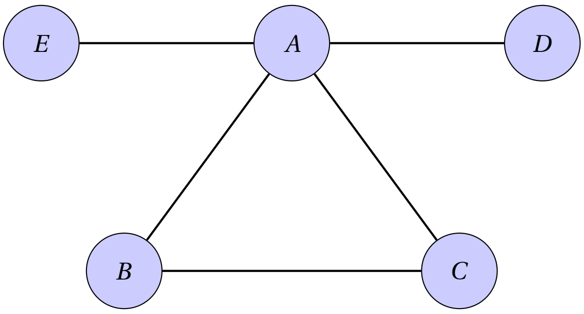
Dans un graphe non orienté, la somme des degrés des sommets est égal au double du nombre d'arêtes.

Ce résultat s'explique assez facilement : en ajoutant les degrés de chaque sommet (c'est à dire le nombre d'arêtes issues de ce sommet), on comptabilise deux fois chaque arête (une fois avec le sommet d'une extrémité et une seconde fois avec le sommet de l'autre extrémité de l'arête). D'où le résultat.

Il découle de cette propriété que la somme des degrés des sommets est nécessairement paire et donc que le nombre de sommets de degré impair est pair.

Définition 9 (Matrice d'adjacence)

Représenter un graphe par une matrice
Considérons un graphe d'ordre $n \in \mathbf{N}^*$. On numérote ces sommets de 1 à n.
On appelle matrice d'adjacence associée à ce graphe la matrice A dont le terme a_{ij} vaut 1 si les sommets sont reliés par une arête et 0 sinon.



En numérotant les sommets de ce graphe par ordre alphabétique, sa matrice d'adjacence s'écrit :

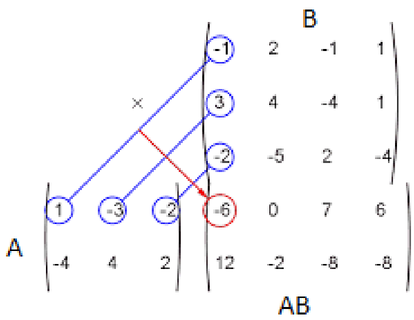
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

FIGURE 6 – Graphe et matrice d'adjacence

Exercice 1

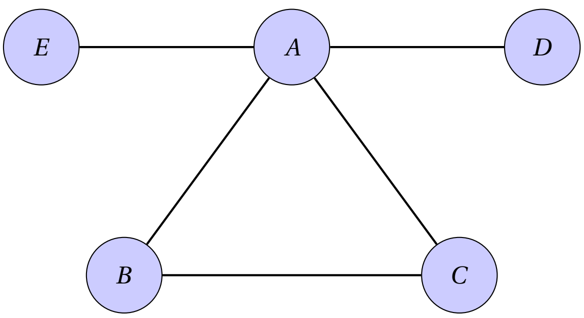
Ecrire les matrices d'adjacence des figures 1 et 2.

Définition 10 (Produit de matrice, exemple)



Proposition 2 (Dénombrer le nombre de chaînes de longueur k)

Considérons un graphe d'ordre $n \in \mathbf{N}^*$. On numérote ces sommets de 1 à n. A est sa matrice d'adjacence.
Le terme a_{ij} de la matrice A^k avec $k \in \mathbf{N}^*$ est égal au nombre de chaînes de longueur k reliant les sommets i et j dans ce graphe.



$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & 4 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il existe donc 5 chaînes de longueur 3 reliant le sommet A au sommet C puisque $a_{13} = a_{31} = 5$: ACAC, ABAC, AEAC, ADAC et ACBC.

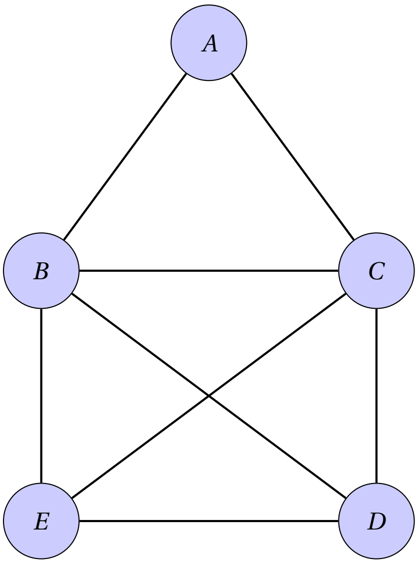
FIGURE 7 – Graphe et Nombre de chemins

Exercice 2

À l'aide de ce site Calcul Matriciel ou de votre calculatrice, déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 reliant A et F pour le graphe de la figures 1. Déterminer tous les chemins.

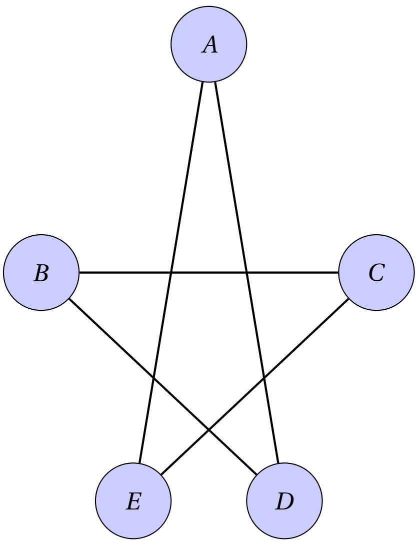
Définition 11 (Chaine et cycle Eulérien)

On appelle **chaîne eulérienne** d'un graphe toute chaîne qui contient une fois et une seule toutes les arêtes du graphe.
On appelle **cycle eulérien** une chaîne eulérienne fermée.



E-D-C-A-B-C-E-B-D est une chaine eulérienne.

FIGURE 8 – Graphe et chaîne Eulérienne



A-D-B-C-E-A est un cycle eulérien.

FIGURE 9 – Graphe et cycle Eulérien

Exercice 3

Pour le graphe de la figure 1 de l'introduction, donner une chaîne eulérienne si possible, un cycle eulérien si possible.

Proposition 3 (Théorème d'Euler)

Soit G un graphe connexe.
G admet un cycle eulérien si et seulement si tous les sommets de G sont de degré pair.
G admet une chaîne eulérienne (non fermée) si et seulement si le nombre de sommets de degré impair dans G est 2.
Si tel est le cas, les extrémités de la chaîne eulérienne sont les deux sommets de degré impair.

Exercice 4

Le graphe ci-dessous possede-t-il une chaine eulérienne, un cycle eulérien ? Si c'est le cas, donnez una chaine ou un cycle eulérien de ce graphe.