

# Φίλτρα Kalman

Νικόλαος Ασημάκης



ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΑΣΗΜΑΚΗΣ

Καθηγητής

*Φίλτρα Kalman*



# Φίλτρα Kalman

Συγγραφή

Νικόλαος Ασημάκης

## Συντελεστές έκδοσης

Γλωσσική Επιμέλεια: Ελένη Μανιάτη, Νικόλαος Ασημάκης

Γραφιστική Επιμέλεια: Ιωάννης Κατσάνος

Copyright © 2022, ΚΑΛΛΙΠΟΣ, ΑΝΟΙΚΤΕΣ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ



Το παρόν έργο αδειοδοτείται υπό τους όρους της άδειας Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0. Για να δείτε ένα αντίγραφο της άδειας αυτής επισκεφτείτε τον ιστότοπο

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.el>

Αν τυχόν κάποιο τμήμα του έργου διατίθεται με διαφορετικό καθεστώς αδειοδότησης, αυτό αναφέρεται ρητά και ειδικώς στην οικεία θέση.

ΚΑΛΛΙΠΟΣ  
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου

[www.kallipos.gr](http://www.kallipos.gr)

ISBN: 978-618-85850-7-2

**Βιβλιογραφική Αναφορά:** Ασημάκης, Ν. (2022). *Φίλτρα Kalman* [Μονογραφία]. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. <http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-39>

*Στη Φραντζέσκα*

# Πίνακας Περιεχομένων

Πίνακας Περιεχομένων .....	6
Λίστα πινάκων.....	11
Λίστα σχημάτων.....	12
Λίστα νηογραφήσεων.....	13
Λίστα διαδραστικών προγραμμάτων.....	14
Πρόλογος.....	15
Εισαγωγή .....	16
Κεφάλαιο 1 Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου .....	18
1.1 Το πρόβλημα της θεωρίας εκτίμησης.....	18
1.2 Γραμμικό μοντέλο .....	19
1.3 Βέλτιστη εκτίμηση .....	20
1.4 Αλγόριθμοι εκτίμησης.....	21
1.5 Η εξέλιξη του φίλτρου Kalman.....	22
1.6 Παρατηρησιμότητα (Observability) .....	23
1.7 Ελεγξιμότητα (Controllability).....	24
1.8 Γραμμικό μοντέλο σε προγραμματιστικό περιβάλλον .....	25
1.9 Ασκήσεις .....	29
1.10 Περίληψη.....	30
1.11 Κριτήριο Αξιολόγησης.....	31
Βιβλιογραφία/Αναφορές .....	32
Κεφάλαιο 2 Γραμμικό Φίλτρο Kalman.....	34
2.1 Χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman .....	34
2.2 Χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman .....	36
2.3 Μόνιμη κατάσταση .....	37
2.4 Φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης .....	39
2.5 Παραδείγματα φίλτρων Kalman.....	41
2.6 Φίλτρα Kalman σε προγραμματιστικό περιβάλλον .....	50
2.7 Ασκήσεις .....	54
2.8 Περίληψη.....	55
2.9 Κριτήριο Αξιολόγησης.....	56
2.10 Εφαρμογή: Χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman για βαθμωτό γραμμικό μοντέλο.....	57
Βιβλιογραφία/Αναφορές .....	59
Κεφάλαιο 3 Αλγόριθμοι επίλυσης της εξίσωσης Riccati.....	60
3.1 Τύποι αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati.....	60

3.2 Επαναληπτικοί αλγόριθμοι.....	60
3.2.1 Ανά βήμα αλγόριθμος .....	60
3.2.2 Αλγόριθμος διπλασιασμού .....	61
3.3 Αλγεβρικός αλγόριθμος .....	63
3.4 Επίλυση της εξίσωσης Riccati σε προγραμματιστικό περιβάλλον .....	65
3.5 Παραδείγματα.....	68
3.6 Ασκήσεις .....	70
3.7 Περίληψη.....	71
3.8 Κριτήριο Αξιολόγησης.....	72
Βιβλιογραφία/Αναφορές .....	73
Κεφάλαιο 4 Αλγόριθμοι επίλυσης της εξίσωσης Lyapunov .....	74
4.1 Τύποι αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov .....	74
4.2 Επαναληπτικοί αλγόριθμοι.....	74
4.2.1 Ανά βήμα αλγόριθμος .....	74
4.2.2 Αλγόριθμος διπλασιασμού .....	75
4.3 Αλγεβρικός αλγόριθμος .....	77
4.4 Επίλυση της εξίσωσης Lyapunov σε προγραμματιστικό περιβάλλον .....	80
4.5 Παραδείγματα.....	82
4.6 Ασκήσεις .....	84
4.7 Περίληψη.....	85
4.8 Κριτήριο Αξιολόγησης.....	86
Βιβλιογραφία/Αναφορές .....	87
Κεφάλαιο 5 Φίλτρο Kalman πληροφορίας.....	88
5.1 Φίλτρο Kalman Πληροφορίας (Information Filter) .....	88
5.2 Φίλτρο Kalman Πληροφορίας σε προγραμματιστικό περιβάλλον.....	91
5.3 Ασκήσεις .....	94
5.4 Περίληψη.....	95
5.1 Κριτήριο Αξιολόγησης.....	96
Βιβλιογραφία/Αναφορές .....	97
Κεφάλαιο 6 Η ειδική εξίσωση Riccati .....	98
6.1 Η ειδική εξίσωση Riccati από το φίλτρο Kalman πληροφορίας .....	98
6.2 Ειδικός ανά βήμα αλγόριθμος .....	99
6.3 Ειδικός αλγόριθμος διπλασιασμού .....	99
6.4 Αλγόριθμος κυκλικής αναγωγής .....	101
6.5 Η δυϊκή εξίσωση Riccati .....	102
6.6 Επίλυση της ειδικής εξίσωσης Riccati σε προγραμματιστικό περιβάλλον .....	104
6.7 Παραδείγματα.....	108
6.8 Ασκήσεις .....	110
6.9 Περίληψη.....	111

6.10 Κριτήριο Αξιολόγησης.....	112
Βιβλιογραφία/Αναφορές .....	113
Κεφάλαιο 7 Απαλοιφή κέρδους από το φίλτρο Kalman .....	114
7.1 Υπολογιστικός φόρτος επαναληπτικών φίλτρων Kalman .....	114
7.2 Φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους σε προγραμματιστικό περιβάλλον .....	119
7.3 Ασκήσεις .....	122
7.4 Περίληψη.....	123
7.5 Κριτήριο Αξιολόγησης.....	124
Βιβλιογραφία/Αναφορές .....	125
Κεφάλαιο 8 Υπολογιστικός φόρτος φίλτρων Kalman .....	126
8.1 Υπολογιστικός φόρτος επαναληπτικών φίλτρων Kalman .....	126
8.2 Υπολογιστικός φόρτος πράξεων πινάκων .....	126
8.3 Υπολογιστικός φόρτος γραμμικού φίλτρου Kalman.....	127
8.4 Υπολογιστικός φόρτος φίλτρου Kalman πληροφορίας.....	130
8.5 Υπολογιστικός φόρτος φίλτρου Kalman με απαλοιφή κέρδους .....	132
8.6 Επιλογή του ταχύτερου φίλτρου Kalman.....	134
8.7 Υπολογιστικός φόρτος φίλτρων Kalman σε προγραμματιστικό περιβάλλον .....	139
8.8 Ασκήσεις .....	141
8.9 Περίληψη.....	142
8.10 Κριτήριο Αξιολόγησης.....	143
8.11 Εφαρμογή: Επιλογή του ταχύτερου φίλτρου Kalman.....	144
Βιβλιογραφία/Αναφορές .....	147
Κεφάλαιο 9 Υπολογιστικός φόρτος αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati .....	148
9.1 Υπολογιστικός φόρτος επαναληπτικών αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati .....	148
9.2 Υπολογιστικός φόρτος ανά βήμα αλγορίθμου .....	149
9.3 Υπολογιστικός φόρτος αλγορίθμου διπλασιασμού .....	150
9.4 Υπολογιστικός φόρτος αλγορίθμου κυκλικής αναγωγής .....	151
9.5 Επιλογή του ταχύτερου αλγορίθμου για την επίλυση της εξίσωσης Riccati .....	152
9.6 Υπολογιστικός φόρτος αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati σε προγραμματιστικό περιβάλλον.....	155
9.7 Ασκήσεις .....	157
9.8 Περίληψη.....	158
9.9 Κριτήριο Αξιολόγησης.....	159
Βιβλιογραφία/Αναφορές .....	160
Κεφάλαιο 10 Υπολογιστικός φόρτος αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov .....	161
10.1 Υπολογιστικός φόρτος επαναληπτικών αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov .....	161
10.2 Υπολογιστικός φόρτος ανά βήμα αλγορίθμου .....	161
10.3 Υπολογιστικός φόρτος αλγορίθμου διπλασιασμού .....	162
10.4 Επιλογή του ταχύτερου αλγορίθμου για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov .....	162
10.5 Υπολογιστικός φόρτος αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov	

σε προγραμματιστικό περιβάλλον .....	163
10.6 Ασκήσεις .....	164
10.7 Περίληψη.....	165
10.8 Κριτήριο Αξιολόγησης.....	166
Βιβλιογραφία/Αναφορές .....	167
Κεφάλαιο 11 Παραδείγματα εφαρμογής των φίλτρων Kalman.....	168
11.1 Εκτίμηση τυχαίας σταθεράς.....	168
11.2 Εκτίμηση κίνησης με σταθερή ταχύτητα .....	170
11.3 Εκτίμηση κίνησης αντικειμένου σε ελεύθερη πτώση .....	173
11.4 Εκτίμηση θέσης αντικειμένου από βολή .....	176
11.5 Εκτίμηση ημερήσιας διακύμανσης του ηλεκτρικού φορτίου.....	178
11.6 Αυτοπαλινδρομούμενο φίλτρο (autoregressive filter – AR filter) .....	180
11.7 Κίνηση οφθαλμού (eye movement) .....	183
11.8 Τυχαίος περίπατος (random walk) .....	185
11.9 Ασκήσεις .....	188
11.10 Περίληψη.....	190
11.11 Κριτήριο Αξιολόγησης.....	191
Βιβλιογραφία/Αναφορές .....	193
Κεφάλαιο 12 Παράλληλη υλοποίηση του φίλτρου Kalman .....	194
12.1 Κατανεμημένο γραμμικό μοντέλο.....	194
12.2 Μη κατανεμημένο φίλτρο Kalman.....	195
12.3 Κατανεμημένο φίλτρο Kalman (distributed Kalman filter) .....	197
12.4 Υπολογιστικός φόρτος μη κατανεμημένου και κατανεμημένου φίλτρου Kalman .....	200
12.5 Προσδιορισμός του βέλτιστου κατανεμημένου φίλτρου Kalman.....	206
12.6 Ασκήσεις .....	214
12.7 Περίληψη.....	215
12.8 Κριτήριο Αξιολόγησης.....	217
12.9 Εφαρμογή: Επιλογή του βέλτιστου κατανεμημένου φίλτρου Kalman με ομοιόμορφη κατανομή των μετρήσεων στους παράλληλους επεξεργαστές .....	219
Βιβλιογραφία/Αναφορές .....	222
Κεφάλαιο 13 Επέκταση γραμμικού μοντέλου .....	223
13.1 Μη μηδενικές μέσες τιμές θορύβων.....	223
13.2 Εγχρωμοι θόρυβοι.....	227
13.3 Ασκήσεις .....	231
13.4 Περίληψη.....	232
13.5 Κριτήριο Αξιολόγησης.....	233
Βιβλιογραφία/Αναφορές .....	235
Κεφάλαιο 14 Επεκταμένο Φίλτρο Kalman (Extended Kalman Filter) .....	236
14.1 Μη γραμμικό μοντέλο .....	236
14.2 Μη γραμμική εκτίμηση .....	236

14.3 Επεκταμένο φίλτρο Kalman (Extended Kalman Filter – EKF) .....	237
14.4 Ασκήσεις .....	242
14.5 Περύληψη.....	243
14.6 Κριτήριο Αξιολόγησης.....	244
Βιβλιογραφία/Αναφορές .....	245
Παράρτημα Α΄. Απαντήσεις Κριτηρίων Αξιολόγησης .....	246
Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.....	246
Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.....	247
Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.....	248
Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.....	249
Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5.....	250
Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6.....	251
Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7.....	252
Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8.....	253
Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9.....	254
Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10.....	255
Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11.....	256
Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12.....	257
Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13.....	258
Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14.....	259
Παράρτημα Β΄. Απόδειξη των εξισώσεων του φίλτρου Kalman.....	260
Βιβλιογραφία/Αναφορές .....	267
Παράρτημα Γ΄. Απόδειξη των εξισώσεων των αλγορίθμων διπλασιασμού (doubling algorithms) για την επίλυση των εξισώσεων Riccati και Lyapunov .....	268
Παράρτημα Δ΄. Απόδειξη των εξισώσεων του φίλτρου Kalman πληροφορίας.....	272
Βιβλιογραφία/Αναφορές .....	275
Ευρετήριο .....	276
Α. ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ .....	276
1. Ευρετήριο αγγλικών όρων.....	276
2. Ευρετήριο ελληνικών όρων.....	278
Β. ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΝΟΜΑΤΩΝ .....	280
Γ. ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ .....	281
Δ. ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ .....	282

## Λίστα πινάκων

<b>Πίνακας 1.1</b> Τύποι εκτίμησης.....	18
<b>Πίνακας 3.1</b> Εξίσωση Riccati. Ανά βήμα αλγόριθμος. ....	68
<b>Πίνακας 3.2</b> Εξίσωση Riccati. Αλγόριθμος διπλασιασμού .....	68
<b>Πίνακας 4.1</b> Εξίσωση Lyapunov. Ανά βήμα αλγόριθμος. ....	82
<b>Πίνακας 4.2</b> Εξίσωση Lyapunov. Αλγόριθμος Διπλασιασμού. ....	82
<b>Πίνακας 6.1</b> Εξίσωση Riccati. Ανά βήμα αλγόριθμος και ειδικός ανά βήμα αλγόριθμος.....	108
<b>Πίνακας 8.1</b> Υπολογιστικός φόρτος των πράξεων με πίνακες.....	126
<b>Πίνακας 8.2</b> Χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman. Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος .....	127
<b>Πίνακας 8.3</b> Χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman. Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος .....	128
<b>Πίνακας 8.4</b> Φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης. Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος. ....	129
<b>Πίνακας 8.5</b> Χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman πληροφορίας. Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος. ....	130
<b>Πίνακας 8.6</b> Χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman πληροφορίας. Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος.....	131
<b>Πίνακας 8.7</b> Φίλτρο Kalman πληροφορίας μόνιμης κατάστασης. Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος. ....	131
<b>Πίνακας 8.8</b> Χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους.	
Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος. ....	132
<b>Πίνακας 8.9</b> Χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους.	
Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος. ....	133
<b>Πίνακας 8.10</b> Φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης με απαλοιφή κέρδους.	
Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος. ....	133
<b>Πίνακας 8.11</b> Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος φίλτρων Kalman.....	134
<b>Πίνακας 9.1</b> Ανά βήμα αλγόριθμος. Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος. ....	149
<b>Πίνακας 9.2</b> Ειδικός ανά βήμα αλγόριθμος. Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος. ....	150
<b>Πίνακας 9.3</b> Αλγόριθμος διπλασιασμού. Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος. ....	150
<b>Πίνακας 9.4</b> Ειδικός αλγόριθμος διπλασιασμού. Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος .....	151
<b>Πίνακας 9.5</b> Αλγόριθμος κυκλικής αναγωγής. Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος. ....	151
<b>Πίνακας 9.6</b> Αλγόριθμοι για την επίλυση της εξίσωσης Riccati. Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος..	152
<b>Πίνακας 10.2</b> Αλγόριθμος διπλασιασμού. Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος. ....	161
<b>Πίνακας 10.2</b> Αλγόριθμος διπλασιασμού. Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος. ....	162
<b>Πίνακας 10.3</b> Αλγόριθμοι για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov. Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος..	162
<b>Πίνακας 12.1</b> Μη κατανεμημένο χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman.	
Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος. ....	201
<b>Πίνακας 12.2</b> Μη κατανεμημένο χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman.	
Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος. ....	202
<b>Πίνακας 12.3</b> Μη κατανεμημένο φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης.	
Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος. ....	202
<b>Πίνακας 12.4</b> Κατανεμημένο χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman.	
Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος. ....	203
<b>Πίνακας 12.5</b> Κατανεμημένο χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman. Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος...	204
<b>Πίνακας 12.6</b> Κατανεμημένο φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης. Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος... <td>205</td>	205
<b>Πίνακας 12.7</b> Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος μη κατανεμημένων και κατανεμημένων φίλτρων Kalman. Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος. ....	205
<b>Πίνακας 12.8</b> Ομοιόμορφες κατανομές και επιτάχυνση παραλληλισμού.....	212

## Λίστα σχημάτων

<b>Σχήμα 1.1</b> Λάθος εκτίμησης.....	20
<b>Σχήμα 2.1</b> Επαναληπτικοί υπολογισμοί του φίλτρου Kalman .....	35
<b>Σχήμα 2.2</b> Χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman. Κατάσταση και εκτίμηση. ....	43
<b>Σχήμα 2.3</b> Χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman. Κατάσταση, πρόβλεψη και εκτίμηση.....	44
<b>Σχήμα 2.4</b> Χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman. Διασπορά λάθους πρόβλεψης και διασπορά λάθους εκτίμησης.45	
<b>Σχήμα 2.5</b> Εξίσωση Riccati. Διασπορά λάθους πρόβλεψης για μικρή και μεγάλη αρχική αβεβαιότητα .....	46
<b>Σχήμα 2.6</b> Εξίσωση Lyapunov. Διασπορά λάθους πρόβλεψης για μικρή και μεγάλη αρχική αβεβαιότητα. ..47	
<b>Σχήμα 2.7</b> Φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης. Κατάσταση και εκτίμηση. ....	48
<b>Σχήμα 2.8</b> Ενασθησία φίλτρου Kalman. Διασπορά λάθους εκτίμησης για μεταβολή του πίνακα εξόδου....49	
<b>Σχήμα 2.9</b> Φίλτρο Kalman με ακριβείς μετρήσεις. Κατάσταση και εκτίμηση. ....	50
<b>Σχήμα 5.1</b> Χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman πληροφορίας. Κατάσταση και εκτίμηση. ....	90
<b>Σχήμα 7.1</b> Χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους. Κατάσταση και εκτίμηση.....	118
<b>Σχήμα 7.2</b> Φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης με απαλοιφή κέρδους. Κατάσταση και εκτίμηση.....	119
<b>Σχήμα 8.1</b> Σύγκριση χρονικά μεταβαλλόμενου φίλτρου Kalman και φίλτρου Kalman με απαλοιφή κέρδους...135	
<b>Σχήμα 8.2</b> Σύγκριση χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman και φίλτρου Kalman πληροφορίας .....	136
<b>Σχήμα 8.3</b> Σύγκριση χρονικά μεταβαλλόμενου φίλτρου Kalman και φίλτρου Kalman με απαλοιφή κέρδους...137	
<b>Σχήμα 8.4</b> Σύγκριση χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman και φίλτρου Kalman με απαλοιφή κέρδους ..138	
<b>Σχήμα 9.1</b> Σύγκριση ανά βήμα αλγορίθμων.....	153
<b>Σχήμα 11.2</b> Διασπορά λάθους εκτίμησης τυχαίας σταθεράς .....	169
<b>Σχήμα 11.1</b> Εκτίμηση τυχαίας σταθεράς.....	169
<b>Σχήμα 11.4</b> Εκτίμηση ταχύτητας κινητού με σταθερή ταχύτητα.....	172
<b>Σχήμα 11.3</b> Εκτίμηση θέσης κινητού με σταθερή ταχύτητα.....	172
<b>Σχήμα 11.5</b> Εκτίμηση ύψους σε ελεύθερη πτώση.....	175
<b>Σχήμα 11.6</b> Εκτίμηση ύψους σε ελεύθερη πτώση.....	175
<b>Σχήμα 11.7</b> Εκτίμηση θέσης αντικειμένου από βολή.....	178
<b>Σχήμα 11.8</b> Εκτίμηση ηλεκτρικού φορτίου.....	179
<b>Σχήμα 11.9</b> Εκτίμηση της εξόδου AR φίλτρου.....	183
<b>Σχήμα 11.10</b> Εκτίμηση κίνησης οφθαλμού. ....	185
<b>Σχήμα 11.11</b> Εκτίμηση απόστασης σε τυχαίο περίπατο. ....	186
<b>Σχήμα 13.1</b> Μη μηδενική μέση τιμή θορύβου μετρήσεων. Κατάσταση και εκτίμηση του χρονικά μεταβαλλόμενου φίλτρου Kalman. ....	226
<b>Σχήμα 13.2</b> Μη μηδενική μέση τιμή θορύβου. Κατάσταση και εκτίμηση του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman. ....	227
<b>Σχήμα 13.3</b> Έγχρωμοι θόρυβοι. Κατάσταση και εκτίμηση του φίλτρου Kalman.....	230
<b>Σχήμα 14.1</b> Επεκταμένο φίλτρο Kalman. Κατάσταση και εκτίμηση.....	239
<b>Σχήμα 14.2</b> Επεκταμένο φίλτρο Kalman. Παράμετρος και εκτίμηση.....	241

## Λίστα ηχογραφήσεων

<b>ΤΗΧΟΣ 1.1</b>	Περίληψη – Κεφάλαιο 1.	30
<b>ΤΗΧΟΣ 2.1</b>	Περίληψη – Κεφάλαιο 2.	55
<b>ΤΗΧΟΣ 3.1</b>	Περίληψη – Κεφάλαιο 3.	71
<b>ΤΗΧΟΣ 4.1</b>	Περίληψη – Κεφάλαιο 4.	85
<b>ΤΗΧΟΣ 5.1</b>	Περίληψη – Κεφάλαιο 5.	95
<b>ΤΗΧΟΣ 6.1</b>	Περίληψη – Κεφάλαιο 6.	111
<b>ΤΗΧΟΣ 7.1</b>	Περίληψη – Κεφάλαιο 7.	123
<b>ΤΗΧΟΣ 8.1</b>	Περίληψη – Κεφάλαιο 8.	142
<b>ΤΗΧΟΣ 9.1</b>	Περίληψη – Κεφάλαιο 9.	158
<b>ΤΗΧΟΣ 10.1</b>	Περίληψη – Κεφάλαιο 10.	165
<b>ΤΗΧΟΣ 11.1</b>	Περίληψη – Κεφάλαιο 11.	190
<b>ΤΗΧΟΣ 12.1</b>	Περίληψη – Κεφάλαιο 12.	216
<b>ΤΗΧΟΣ 13.1</b>	Περίληψη – Κεφάλαιο 13.	232
<b>ΤΗΧΟΣ 14.1</b>	Περίληψη – Κεφάλαιο 14.	243

## Λίστα διαδραστικών προγραμμάτων

<b>Διαδραστικό Πρόγραμμα 1.1</b>	Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 1.....	31
<b>Διαδραστικό Πρόγραμμα 2.1</b>	Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 2.....	56
<b>Διαδραστικό Πρόγραμμα 2.2</b>	Χρονικά αμετάβλητο φύλτρο Kalman για βαθμωτό γραμμικό μοντέλο. ....	58
<b>Διαδραστικό Πρόγραμμα 3.1</b>	Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 3.....	72
<b>Διαδραστικό Πρόγραμμα 4.1</b>	Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 4.....	86
<b>Διαδραστικό Πρόγραμμα 5.1</b>	Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 5.....	96
<b>Διαδραστικό Πρόγραμμα 6.1</b>	Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 6.....	112
<b>Διαδραστικό Πρόγραμμα 7.1</b>	Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 7.....	124
<b>Διαδραστικό Πρόγραμμα 8.1</b>	Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 8.....	143
<b>Διαδραστικό Πρόγραμμα 8.2</b>	Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 8.....	146
<b>Διαδραστικό Πρόγραμμα 9.1</b>	Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 9.....	159
<b>Διαδραστικό Πρόγραμμα 10.1</b>	Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 10.....	166
<b>Διαδραστικό Πρόγραμμα 11.1</b>	Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 13.....	192
<b>Διαδραστικό Πρόγραμμα 12.1</b>	Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 12.....	218
<b>Διαδραστικό Πρόγραμμα 12.2</b>	Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 12.....	221
<b>Διαδραστικό Πρόγραμμα 13.1</b>	Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 13.....	234
<b>Διαδραστικό Πρόγραμμα 14.1</b>	Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 14.....	244

## Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται σε φοιτήτριες και φοιτητές προπτυχιακού και μεταπτυχιακού επιπέδου και ο βασικός στόχος του είναι η εξοικείωση με τα φίλτρα Kalman.

Για τον σκοπό αυτό, ο συγγραφέας έχει φροντίσει να αναπτύξει και να παραθέσει το απαραίτητο υλικό με τη μορφή θεωρίας, ασκήσεων, βιβλιογραφίας και κριτηρίων αξιολόγησης. Επιπλέον, για την απόκτηση της ικανότητας προγραμματισμού των φίλτρων Kalman στο περιβάλλον του εμπορικού λογισμικού Matlab και του λογισμικού Octave, που είναι ελεύθερος κλώνος ανοικτού κώδικα του λογισμικού Matlab, συμπεριλαμβάνονται πολλοί κώδικες (scripts), οι οποίοι έχουν επιλεγεί με τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίζεται από τους φοιτητές και τις φοιτήτριες η πρακτική εφαρμογή των θεωρητικών γνώσεων.

Η περιήγηση αρχίζει από τη διατύπωση του προβλήματος της θεωρίας εκτίμησης και την παρουσίαση του γραμμικού μοντέλου χώρου κατάστασης (state space). Ακολουθεί, η παρουσίαση του φίλτρου Kalman (χρονικά μεταβαλλόμενο, χρονικά αμετάβλητο και μόνιμης κατάστασης), του φίλτρου Kalman πληροφορίας και του φίλτρου Kalman με απαλοιφή κέρδους. Παρουσιάζονται αλγόριθμοι για την επίλυση των εξισώσεων Riccati και Lyapunov. Ακολουθεί η ανάλυση του υπολογιστικού φόρτου των φίλτρων Kalman και η ανάλυση του υπολογιστικού φόρτου των αλγορίθμων για την επίλυση των εξισώσεων Riccati και Lyapunov. Δίνονται αρκετά παραδείγματα εφαρμογής των φίλτρων Kalman και παρουσιάζεται η παράλληλη υλοποίηση του φίλτρου Kalman. Αναλύεται η επέκταση του γραμμικού μοντέλου (μη μηδενική μέση τιμή θορύβου και έγχρωμος θόρυβος). Το Επεκταμένο Φίλτρο Kalman (Extended Kalman Filter – EKF) κλείνει την περιήγηση.

Ιδιαίτερο βάρος και προσοχή έχει δοθεί από τον συγγραφέα στην πολυμετικότητα και διαδραστικότητα του βιβλίου καθώς και στις ηχογραφημένες περιλήψεις κάθε κεφαλαίου, οι οποίες δίνουν στον φοιτητή τη δυνατότητα να μπορεί να ακούει συγκεντρωτικά τις βασικές έννοιες και τις βασικές γνώσεις που θα αποκομίσει από τη μελέτη του. Τα Κριτήρια Αξιολόγησης που υπάρχουν στο τέλος κάθε κεφαλαίου, δίνουν με άμεσο τρόπο στον φοιτητή τη δυνατότητα αυτοαξιολόγησης και ελέγχου του επιπέδου των γνώσεων και των δεξιοτήτων που απόκτησε από τη μελέτη της συγκεκριμένης ύλης. Τέλος, στο βιβλίο συμπεριλαμβάνονται εφαρμογές που υλοποιούνται με Διαδραστικά Προγράμματα τα οποία έχουν επιλεγεί με προσεκτικό τρόπο ώστε η αλληλεπίδραση να εξασφαλίζει τη σωστή και άρτια εκπαίδευση του φοιτητή.

Θεωρώ ότι το παρόν βιβλίο είναι εξαιρετικά ενδιαφέρον, θα φανεί πολύ χρήσιμο στους φοιτητές των ελληνικών πανεπιστημίων και θα αποτελέσει ένα από τα βασικά εργαλεία στην προσπάθειά τους για την απόκτηση της γνώσης στα αντικείμενα που θεραπεύονται μέσα στις “σελίδες” του.

Μιχάλης Παρασκευάς  
Αναπληρωτής Καθηγητής  
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών  
Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου

## Εισαγωγή

Τα φίλτρα Kalman έχουν χρησιμοποιηθεί και χρησιμοποιούνται με επιτυχία σε ένα ευρύτατο φάσμα εφαρμογών, όπως στην αεροναυπηγική, στη σχεδίαση τηλεπικοινωνιακών συστημάτων, στα ενεργειακά συστήματα στην επεξεργασία εικόνας.

Τα φίλτρα Kalman αποτελούν ένα ειδικό αντικείμενο που περιλαμβάνεται στο περιεχόμενο πολλών προπτυχιακών και μεταπτυχιακών μαθημάτων σε πολλά Πανεπιστήμια της Ελλάδας.

Το βιβλίο πραγματεύεται τα φίλτρα Kalman και περιλαμβάνει το απαραίτητο υλικό για την κατανόηση και τον προγραμματισμό των φίλτρων Kalman. Απευθύνεται σε προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς φοιτητές και αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο στη μελέτη προβλημάτων που σχετίζονται με τα φίλτρα Kalman. Επίσης, μπορεί να αξιοποιηθεί και από ερευνητές, από διά βίου μαθαίνοντες και από εργαζόμενους απόφοιτους που επικαιροποιούν και εφαρμόζουν τις γνώσεις τους.

Η δομή του βιβλίου περιλαμβάνει τα εξής Κεφάλαια:

- |              |   |
|--------------|---|
| Κεφάλαιο 1.  | Θεωρία βέλτιστου ελέγχου  |
| Κεφάλαιο 2.  | Γραμμικό φίλτρο Kalman  |
| Κεφάλαιο 3.  | Αλγόριθμοι επίλυσης της εξίσωσης Riccati                              |
| Κεφάλαιο 4.  | Αλγόριθμοι επίλυσης της εξίσωσης Lyapunov                             |
| Κεφάλαιο 5.  | Φίλτρο Kalman Πληροφορίας   |
| Κεφάλαιο 6.  | Η ειδική εξίσωση Riccati  |
| Κεφάλαιο 7.  | Απαλοιφή κέρδους από το φίλτρο Kalman                                 |
| Κεφάλαιο 8.  | Υπολογιστικός φόρτος φίλτρων Kalman                                   |
| Κεφάλαιο 9.  | Υπολογιστικός φόρτος αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati  |
| Κεφάλαιο 10. | Υπολογιστικός φόρτος αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov |
| Κεφάλαιο 11. | Παραδείγματα εφαρμογής των φίλτρων Kalman                             |
| Κεφάλαιο 12. | Παράλληλη υλοποίηση του φίλτρου Kalman                                |
| Κεφάλαιο 13. | Επέκταση γραμμικού μοντέλου   |
| Κεφάλαιο 14. | Επεκταμένο φίλτρο Kalman (extended Kalman filter)                     |

Κάθε κεφάλαιο περιλαμβάνει θεωρία, ασκήσεις, περίληψη, βιβλιογραφία, Κριτήρια Αξιολόγησης.

Στο βιβλίο δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στον προγραμματισμό των φίλτρων Kalman σε προγραμματιστικό περιβάλλον με χρήση λογισμικών, τα οποία έχουν καθιερωθεί στην επιστημονική κοινότητα: του εμπορικού λογισμικού Matlab και του λογισμικού Octave, ο οποίος είναι ελεύθερος κλώνος ανοικτού κώδικα του λογισμικού Matlab.

Λόγω του γεγονότος ότι πρόκειται για ηλεκτρονικό βιβλίο, ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στα στοιχεία πολυμεσικότητας και διαδραστικότητας.

Στα στοιχεία πολυμεσικότητας περιλαμβάνονται οι ηχογραφημένες περιλήψεις στο τέλος κάθε κεφαλαίου, οι οποίες βοηθούν τον φοιτητή να ακούει συγκεντρωτικά τα βασικά σημεία του κεφαλαίου.

Στα στοιχεία διαδραστικότητας περιλαμβάνονται τα Κριτήρια Αξιολόγησης στο τέλος κάθε κεφαλαίου, τα οποία δίνουν στον φοιτητή τη δυνατότητα ελέγχου των γνώσεων που αποκτήθηκαν. Έτσι, σε κάθε Κριτήριο Αξιολόγησης ο αναγνώστης (χρήστης) μπορεί:

- να απαντά στις ερωτήσεις,
- να ελέγχει τις απαντήσεις του,
- να επανεκτελεί το κριτήριο αξιολόγησης,
- να έχει στη διάθεσή του τις σωστές λύσεις.

Τέλος, σχεδιάστηκε ειδικό διαδραστικό λογισμικό για τρεις εφαρμογές:

- Φίλτρο Kalman
- Το ταχύτερο φίλτρου Kalman
- Το βέλτιστο κατανεμημένο φίλτρου Kalman.

Ευχαριστώ τη φίλη Δρ. Έλενα Μανιάτη, φιλόλογο, για τη λεπτομερή γλωσσική επιμέλεια.

Ευχαριστώ την κα Εύη Παπαδοπούλου, καθηγήτρια Πληροφορικής, για τη συμβολή της στην ανάπτυξη διαδραστικού υλικού.

Ευχαριστώ τον υποψήφιο διδάκτορα Ιωάννη Κατσάνο για τη γραφιστική επιμέλεια.

Ευχαριστώ την κόρη μου Αθηνά Ασημάκη, πτυχιούχο Αγγλικής Γλώσσας και Φιλολογίας και φοιτήτρια Σχολής Δραματικής Τέχνης, για τη συμβολή της στην ανάπτυξη πολυμεσικού υλικού (ηχογραφήσεις περιλήψεων).

Ευχαριστώ τον πολύτιμο φίλο μου Περικλή Αντωνίου για το εξώφυλλο.

Ο συγγραφέας  
Νικόλαος Ασημάκης  
Καθηγητής  
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κάνετε λήψη του συνολικού διαδραστικού εκπαιδευτικού υλικού που συνοδεύει το σύγγραμμα, και λειτουργεί επικουρικά στα σημεία όπου θα συναντήσετε τα ακόλουθα εικονίδια.



# Κεφάλαιο 1 Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου

## Σύνοψη

Στο κεφάλαιο παρουσιάζεται το πρόβλημα της θεωρίας εκτίμησης και εξηγείται τι σημαίνει πρόβλεψη, φιλτράρισμα και λείανση. Παρουσιάζεται αναλυτικά το γραμμικό μοντέλο διακριτού χρόνου που αποτελείται από το δυναμικό και το στατιστικό μοντέλο. Εξηγείται τι σημαίνει βέλτιστη εκτίμηση και δίνεται το κριτήριο βέλτιστης εκτίμησης. Παρουσιάζονται οι αλγόριθμοι εκτίμησης (πρόβλεψης, φιλτραρίσματος, λείανσης). Παρουσιάζονται ιστορικά στοιχεία για το φίλτρο Kalman και η εξέλιξη του φίλτρου Kalman. Παρουσιάζονται ενδεικτικές εφαρμογές στις οποίες έχει χρησιμοποιηθεί με επιτυχία το φίλτρο Kalman.

## Προαπαιτούμενη γνώση

Κανονική κατανομή, πίνακες.

### 1.1 Το πρόβλημα της θεωρίας εκτίμησης

Η **θεωρία εκτίμησης** (estimation theory) έχει ως αντικείμενο τον υπολογισμό της βέλτιστης εκτίμησης μίας κατάστασης δεδομένου ενός συνόλου μετρήσεων. Η **κατάσταση** (state) είναι η τιμή  $x(k)$  της στοχαστικής διαδικασίας  $\{x(k)\}$  τη χρονική στιγμή  $k$  (ο χρόνος θεωρείται διακριτός). Η **μέτρηση** (measurement) είναι η τιμή  $z(k)$  της στοχαστικής διαδικασίας  $\{z(k)\}$  τη χρονική στιγμή  $k$ . Το πρόβλημα της θεωρίας εκτίμησης είναι να υπολογιστεί η **εκτίμηση** (estimation)  $x(\ell/k)$  της κατάστασης τη χρονική στιγμή  $\ell$  δεδομένου του συνόλου των μετρήσεων  $Z_k = \{z(0), z(1), z(2), \dots, z(k)\}$  μέχρι και τη χρονική στιγμή  $k$ , χρησιμοποιώντας ένα προκαθορισμένο βέλτιστο κριτήριο.

Οι τύποι της εκτίμησης, οι οποίοι παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.1, προσδιορίζονται από τη σχέση των χρονικών στιγμών  $\ell$  και  $k$ :

- **πρόβλεψη** (prediction), όταν η εκτίμηση της κατάστασης αφορά κάποια χρονική στιγμή μετά από αυτήν της τελευταίας μέτρησης.
- **φιλτράρισμα** (filtering), όταν η εκτίμηση της κατάστασης αφορά κάποια χρονική στιγμή που ταυτίζεται με αυτήν της τελευταίας μέτρησης,
- **λείανση** (smoothing), όταν η εκτίμηση της κατάστασης αφορά κάποια χρονική στιγμή πριν από αυτήν της τελευταίας μέτρησης

Εκτίμηση $x(\ell/k)$		
Πρόβλεψη	$\ell > k$	μέλλον
Φιλτράρισμα	$\ell = k$	παρόν
Λείανση	$\ell < k$	παρελθόν

Πίνακας 1.1 Τύποι εκτίμησης.

Για την επίλυση του προβλήματος της θεωρίας εκτίμησης είναι αναγκαίο να προσδιοριστεί ένα μαθηματικό μοντέλο, το οποίο αποτελείται από:

- το **δυναμικό μοντέλο**, που εκφράζει τη σχέση κατάστασης και μέτρησης
- το **στατιστικό μοντέλο**, που εκφράζει τη φύση της κατάστασης και των μετρήσεων.

Επίσης, πρέπει να προσδιοριστεί ένα κριτήριο βέλτιστης εκτίμησης. Η διαφορά της εκτίμησης από την πραγματική κατάσταση είναι το **λάθος εκτίμησης** (estimation error). Όσο μικρότερο είναι το λάθος εκτίμησης, τόσο καλύτερη είναι η εκτίμηση της πραγματικής κατάστασης. Επομένως, το κριτήριο βέλτιστης εκτίμησης είναι η ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής κάποιας συνάρτησης του λάθους εκτίμησης, που πρέπει να προσδιοριστεί. Η επιλογή του τετραγώνου του λάθους εκτίμησης ως συνάρτησης λάθους εκτίμησης, έχει φυσική σημασία, γιατί η μέση τιμή του τετραγώνου του λάθους εκτίμησης είναι η **συνδιασπορά λάθους εκτίμησης** (estimation error covariance).

## 1.2 Γραμμικό μοντέλο

Το **γραμμικό μοντέλο (linear model)** διακριτού χρόνου αποτελείται από το δυναμικό και το στατιστικό μοντέλο.

### Δυναμικό μοντέλο

Το δυναμικό μοντέλο εκφράζει τη σχέση κατάστασης και μέτρησης και περιγράφεται από τις εξισώσεις χώρου κατάστασης (state space equations) οι οποίες είναι:

$$x(k+1) = F(k+1, k)x(k) + B(k)u(k) + w(k) \quad (1.1)$$

$$z(k) = H(k)x(k) + v(k) \quad (1.2)$$

για  $k \geq 0$ , όπου

- $x(k)$  είναι το **διάνυσμα κατάστασης** διαστάσεων  $n \times 1$  τη χρονική στιγμή  $k$ ,
- $F(k+1, k)$  είναι ο **πίνακας μεταφοράς** διαστάσεων  $n \times n$ , που εξαρτάται από δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές  $k$  και  $k+1$ ,
- $B(k)$  είναι ο **πίνακας εισόδου** διαστάσεων  $n \times m$  τη χρονική στιγμή  $k$ ,
- $u(k)$  είναι η **είσοδος** του συστήματος τη χρονική στιγμή  $k$ ,
- $z(k)$  είναι το **διάνυσμα μετρήσεων** διαστάσεων  $m \times 1$  τη χρονική στιγμή  $k$ ,
- $H(k)$  είναι ο **πίνακας εξόδου** διαστάσεων  $m \times n$  τη χρονική στιγμή  $k$ ,
- $y(k) = H(k)x(k)$  είναι η **έξοδος** του συστήματος τη χρονική στιγμή  $k$ ,
- $w(k)$  είναι ο **θόρυβος στην κατάσταση** τη χρονική στιγμή  $k$  και είναι η είσοδος του συστήματος,
- $v(k)$  είναι ο **θόρυβος στη μέτρηση** τη χρονική στιγμή  $k$ .

### Στατιστικό μοντέλο

Το στατιστικό μοντέλο εκφράζει τη φύση της κατάστασης και των μετρήσεων. Βασική προϋπόθεση είναι ο θόρυβος στην κατάσταση και ο θόρυβος στις μετρήσεις να είναι **λευκός θόρυβος (white noise)**. Λευκός θόρυβος σημαίνει μία λευκή διαδικασία (white process), δηλαδή μία στοχαστική διαδικασία με τιμές ασυνχέτιστες από χρονική στιγμή σε χρονική στιγμή. Η στοχαστική διαδικασία λευκού θορύβου έχει σταθερή μέση τιμή (συνήθως μηδενική μέση τιμή).

Ισχύουν οι **υποθέσεις (assumptions)**:

1. Η στοχαστική διαδικασία  $\{w(k)\}$  ακολουθεί την **κανονική κατανομή (Gaussian distribution)**, έχει μηδενική μέση τιμή και είναι λευκή διαδικασία (white process) με συνδιασπορά  $Q(k)$  διαστάσεων  $n \times n$ , οπότε:

$$E[w(k)w^T(\ell)] = \begin{cases} 0, & k \neq \ell \\ Q(k), & k = \ell \end{cases}$$

όπου

$$Q(k) = E[w(k)w^T(k)] \quad (1.3)$$

Με  $A^T$  συμβολίζεται ο ανάστροφος πίνακας του πίνακα  $A$ .

2. Η στοχαστική διαδικασία  $\{v(k)\}$  ακολουθεί την **κανονική κατανομή (Gaussian distribution)**, έχει μηδενική μέση τιμή και είναι λευκή (white process) με συνδιασπορά  $R(k)$  διαστάσεων  $m \times m$ , οπότε:

$$E[v(k)v^T(\ell)] = \begin{cases} 0, & k \neq \ell \\ R(k), & k = \ell \end{cases}$$

όπου

$$R(k) = E[v(k)v^T(\ell)] \quad (1.4)$$

3. Η αρχική τιμή της κατάστασης  $x(0)$  είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την **κανονική κατανομή (Gaussian distribution)**, έχει μέση τιμή  $x_0$  και συνδιασπορά  $P_0$

όπου

$$x_0 = E[x(0)] \quad (1.5)$$

$$P_0 = E[(x(0) - x_0)(x(0) - x_0)^T] \quad (1.6)$$

4. Οι στοχαστικές διαδικασίες  $\{w(k)\}$ ,  $\{v(k)\}$  και η τυχαία μεταβλητή  $x(0)$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

### 1.3 Βέλτιστη εκτίμηση

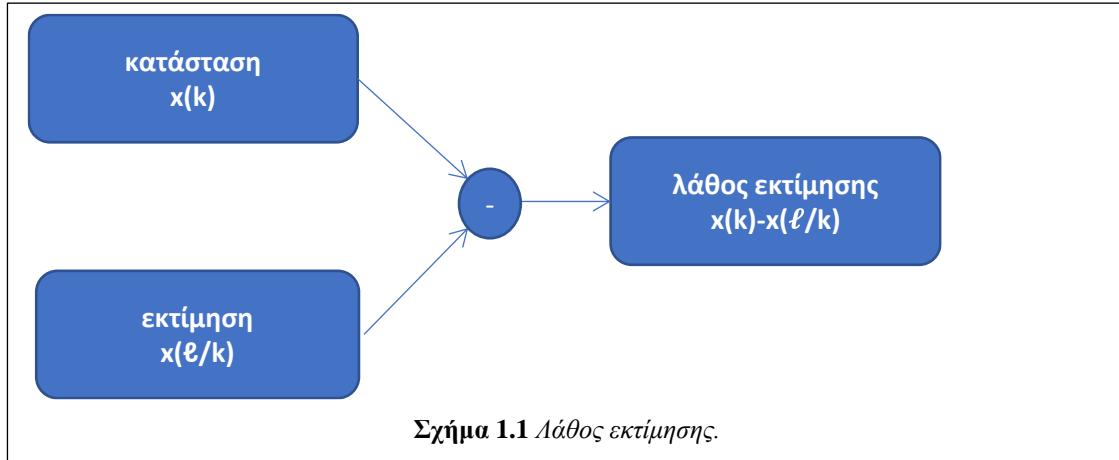
Το πρόβλημα της εκτίμησης είναι να υπολογιστεί η εκτίμηση  $x(\ell/k)$  της κατάστασης τη χρονική στιγμή  $\ell$  δεδομένου του συνόλου των μετρήσεων  $Z_k = \{z(1), z(2), \dots, z(k)\}$  μέχρι και τη χρονική στιγμή  $k$ , δηλαδή η δεσμευμένη μέση τιμή του διανύσματος κατάστασης:

$$x(\ell/k) = E[x(\ell) / Z_k] \quad (1.7)$$

Το **λάθος εκτίμησης (estimation error)** ορίζεται ως η διαφορά της εκτίμησης από την πραγματική κατάσταση:

$$x_e(\ell/k) = x(k) - x(\ell/k) \quad (1.8)$$

όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1.



Είναι προφανές ότι όσο μικρότερο είναι το λάθος εκτίμησης, τόσο καλύτερη είναι η εκτίμηση της πραγματικής κατάστασης. Επομένως, το **κριτήριο βέλτιστης εκτίμησης** αφορά το λάθος εκτίμησης και είναι η **ελαχιστοποίηση του τετραγώνου του λάθους εκτίμησης**, δηλαδή της συνδιασποράς λάθους εκτίμησης:

$$E[(x_e(\ell/k))(x_e(\ell/k))^T / Z_k] \quad (1.9)$$

## 1.4 Αλγόριθμοι εκτίμησης

Ανάλογα με τον τύπο της εκτίμησης υπάρχουν διάφοροι αλγόριθμοι εκτίμησης: αλγόριθμοι για εκτίμηση (φίλτρα), αλγόριθμοι για πρόβλεψη και αλγόριθμοι για λείανση.

### Αλγόριθμοι για εκτίμηση (φίλτρα)

Το πρόβλημα του φιλτραρίσματος είναι να υπολογιστεί η βέλτιστη εκτίμηση (φιλτράρισμα)  $x(k/k)$  της κατάστασης τη χρονική στιγμή  $\ell$  δεδομένου του συνόλου των μετρήσεων  $Z_k = \{z(1), z(2), \dots, z(k)\}$  μέχρι και τη χρονική στιγμή  $k$ .

Ο πρώτος ολοκληρωμένος αλγόριθμος εκτίμησης (φίλτρο) προτάθηκε από τον Rudolf E. Kalman στις αρχές της δεκαετίας του '60 και είναι γνωστός ως **φίλτρο Kalman (Kalman filter)** [Kalman (1960)]. Στα μέσα της δεκαετίας του '70 ο Δημήτριος Γ. Λαϊνιώτης πρότεινε τον αλγόριθμο διαμερισμού (partitioning algorithm), που είναι γνωστός ως **φίλτρο Λαϊνιώτη (Lainiotis filter)** [Lainiotis (1975)]. Τα φίλτρα Kalman και Λαϊνιώτη υπολογίζουν επαναληπτικά την εκτίμηση  $x(k/k)$  διαστάσεων  $n \times 1$  και τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης  $P(k/k)$  διαστάσεων  $n \times n$ .

### Αλγόριθμοι για πρόβλεψη

Το πρόβλημα της πρόβλεψης είναι να υπολογιστεί η βέλτιστη πρόβλεψη  $x(\ell/k)$  της κατάστασης τη χρονική στιγμή  $\ell$  δεδομένου του συνόλου των μετρήσεων  $Z_k = \{z(1), z(2), \dots, z(k)\}$  μέχρι και τη χρονική στιγμή  $k$ , όπου  $\ell > k$ .

Η βέλτιστη πρόβλεψη διαστάσεων  $n \times 1$  είναι:

$$x(\ell/k) = F(\ell, k)x(k/k) \quad (1.10)$$

και η αντίστοιχη **συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης (prediction error covariance)** διαστάσεων  $n \times n$  είναι:

$$P(\ell/k) = Q(\ell-1) + F(\ell, \ell-1)P(\ell-1, k)F^T(\ell, \ell-1) \quad (1.11)$$

όπου

$$F(\ell, k) = F(\ell, \ell-1)F(\ell-1, \ell-2) \cdots F(k+1, k) \quad (1.12)$$

Όταν  $\ell = k+1$ , προκύπτει ο αλγόριθμος πρόβλεψης κατά ένα βήμα:

$$x(k+1/k) = F(k+1, k)x(k/k) \quad (1.13)$$

$$P(k+1/k) = Q(k) + F(k+1, k)P(k/k)F^T(k+1, k) \quad (1.14)$$

για  $k = 0, 1, \dots$

με αρχικές συνθήκες

$$x(0/0) = x_0$$

$$P(0/0) = P_0$$

Για τον υπολογισμό της πρόβλεψης και της συνδιασποράς λάθους πρόβλεψης απαιτείται ο υπολογισμός της εκτίμησης  $x(k/k)$  και της συνδιασποράς λάθους εκτίμησης  $P(k/k)$ . Είναι προφανές ότι η πρόβλεψη απαιτεί φιλτράρισμα, το οποίο μπορεί να γίνει με το φίλτρο Kalman ή με το φίλτρο Λαϊνιώτη.

### Αλγόριθμοι για λείανση

Το πρόβλημα της λείανσης είναι να υπολογιστεί η βέλτιστη εκτίμηση  $x(\ell/k)$  της κατάστασης τη χρονική στιγμή  $\ell$  δεδομένου του συνόλου των μετρήσεων  $Z_k = \{z(1), z(2), \dots, z(k)\}$  μέχρι και τη χρονική στιγμή  $k$ , όπου  $\ell < k$ .

Ο πλέον γνωστός αλγόριθμος λείανσης είναι ο **αλγόριθμος λείανσης Meditch** που υπολογίζει επαναληπτικά τη βέλτιστη λείανση διαστάσεων  $n \times 1$ :

$$x(\ell/k) = x(\ell/k-1) + B(k)[x(k/k) - x(k/k-1)] \quad (1.15)$$

και την αντίστοιχη συνδιασπορά λάθους λείανσης διαστάσεων  $n \times n$ :

$$P(\ell/k) = P(\ell/k-1) + B(k)[P(k/k) - P(k/k-1)]B^T(k) \quad (1.16)$$

όπου

$$B(k) = B(k-1)A(k-1) \quad (1.17)$$

$$A(\ell-1) = P(\ell-1/\ell-1)F^T(\ell/\ell-1)P^{-1}(\ell/\ell-1) \quad (1.18)$$

με αρχική τιμή

$$B(\ell+1) = A(\ell)$$

για  $k = \ell+1, \ell+2, \dots$

Για τον υπολογισμό της λείανσης και της συνδιασποράς λάθους λείανσης απαιτείται ο υπολογισμός της εκτίμησης  $x(k/k)$  και της συνδιασποράς λάθους εκτίμησης  $P(k/k)$ , καθώς και ο υπολογισμός της πρόβλεψης  $x(k/k-1)$  και της συνδιασποράς λάθους πρόβλεψης  $P(k/k-1)$ . Είναι προφανές ότι η λείανση απαιτεί φιλτράρισμα, το οποίο μπορεί να γίνει με το φίλτρο Kalman ή με το φίλτρο Λαϊνιώτη.

Είναι σαφές ότι όλοι οι αλγόριθμοι εκτίμησης (πρόβλεψης, φιλτραρίσματος, λείανσης) απαιτούν φιλτράρισμα, το οποίο μπορεί να γίνει με το φίλτρο Kalman ή με το φίλτρο Λαϊνιώτη.

## 1.5 Η εξέλιξη του φίλτρου Kalman

Οι ρίζες του φίλτρου Kalman [Sorenson (1970)] βρίσκονται στη χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων κατά τη μελέτη των πλανητικών τροχιών από τον Gauss τον 19ο αιώνα [Gauss (1963)]. Η στάσιμη θεωρία εκτίμησης Wiener-Kolmogorov (stationary filtering theory) οφείλεται στον Kolmogorov [Kolmogorov (1941)] και στον Wiener [Wiener (1949)] και σχετίζεται με στάσιμες διαδικασίες (δηλαδή διαδικασίες των οποίων οι στατιστικές ιδιότητες είναι χρονικά αμετάβλητες). Η ιδέα της χρήσης μεταβλητής κατάστασης στην περιγραφή γραμμικών συστημάτων προτάθηκε από τον Swerling [Swerling (1959)] και τον Kalman [Kalman (1960)]. Η μη στάσιμη θεωρία εκτίμησης (nonstationary filtering theory), η οποία αντιμετωπίζει προβλήματα και με μη στάσιμες διαδικασίες, οφείλεται στον Kalman και στον Bucy [Kalman (1960), Kalman & Bucy (1961), Kalman (1963)].

Το 1960 ο Kalman πρότεινε το φίλτρο Kalman, έναν επαναληπτικό αλγόριθμο επίλυσης του γραμμικού προβλήματος φιλτραρίσματος διακριτού χρόνου. Το Παραδοσιακό Φίλτρο Kalman (Conventional Kalman Filter ή Traditional Kalman Filter) [Kalman (1960)] υπολογίζει την εκτίμηση  $x(k/k)$  και τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης  $P(k/k)$ , καθώς και την πρόβλεψη  $x(k/k-1)$  και τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης  $P(k/k-1)$  χρησιμοποιώντας το κέρδος του φίλτρου Kalman  $K(k)$  διαστάσεων  $n \times m$ . Από τότε μέχρι σήμερα, το φίλτρο Kalman έχει γίνει αντικείμενο επιστημονικής έρευνας [Assimakis (2020)].

Το Square Root Kalman Filter [Potter (1963)] χρησιμοποιεί την τετραγωνική ρίζα  $S(k/k)$  της συνδιασποράς λάθους εκτίμησης  $P(k/k)$ , δηλαδή η συνδιασπορά εκτίμησης αντικαθίσταται από  $P(k/k) = S(k/k)S^T(k/k)$ , όπου  $S(k/k)$  είναι τριγωνικός πίνακας. Στο UDU Kalman Filter [Thornton (1976)] η συνδιασπορά εκτίμησης  $P(k/k)$  αντικαθίσταται από έναν διαγώνιο πίνακα  $D(k/k)$  και έναν άνω τριγωνικό πίνακα  $U(k/k)$  με «1» στην κύρια διαγώνιο, ώστε  $P(k/k) = U(k/k)D(k/k)U^T(k/k)$ . Το Information Kalman Filter [Assimakis, Adam, Douladiris (2012)] χρησιμοποιεί τον αντίστροφο πίνακα  $P^{-1}(k/k)$  του πίνακα  $P(k/k)$  και το διάνυσμα (information state vector)  $y(k/k) = P^{-1}(k/k)x(k/k)$ . Στο UDU Information Kalman Filter [D'souza, Zanetti (2019)] ο αντίστροφος πίνακας  $P^{-1}(k/k)$  του πίνακα  $P(k/k)$  αντικαθίσταται από δύο παράγοντες: έναν διαγώνιο πίνακα  $D(k/k)$  και έναν κάτω τριγωνικό πίνακα  $U(k/k)$  με «1» στην κύρια διαγώνιο, ώστε  $P^{-1}(k/k) = U(k/k)D(k/k)U^T(k/k)$ . Το φίλτρο Kalman, το οποίο βασίζεται στον General Chandrasekhar Algorithm [Assimakis, Kechriniotis, Voliotis, Tassis, M. Kousteri

(2008)], χρησιμοποιεί τη διαφορά ανάμεσα σε δύο διαδοχικές συνδιασπορές λάθους πρόβλεψης. Το Information Kalman Filter, το οποίο βασίζεται στον General Chandrasekhar Algorithm [Morf, Sidhu, Kailath (1974)], χρησιμοποιεί τον αντίστροφο πίνακα της συνδιασποράς λάθους πρόβλεψης και τη διαφορά ανάμεσα σε δύο διαδοχικές συνδιασπορές λάθους πρόβλεψης. Το Sigma-Rho Kalman Filter [Grewal, Kain (2010)] υπολογίζει επαναληπτικά την τυπική απόκλιση (standard deviation)  $\sigma$  και τους συντελεστές συσχέτισης (correlation coefficients)  $\rho$ , αντί για τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης. Στο Schmidt-Kalman Filter ή Consider Kalman Filter [Woodbury, Junkins (2010)], η κατάσταση διαχωρίζεται σε κατάσταση προς εκτίμηση (to be estimated) και κατάσταση προς θεώρηση (to be considered). Το Φίλτρο Kalman Μόνιμης Κατάστασης (Steady State Kalman Filter) [Assimakis (2006)] υπολογίζει επαναληπτικά την εκτίμηση, αφού έχει υπολογιστεί off-line η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση επιλύοντας την εξίσωση Riccati. Στη Finite Impulse Response (FIR) μορφή του Φίλτρου Kalman Μόνιμης Κατάστασης (FIR Steady State Kalman Filter) [Assimakis, Adam (2008)], οι συντελεστές του φίλτρου υπολογίζονται off-line και η εκτίμηση εξαρτάται από ένα πεπερασμένο σύνολο προηγούμενων μετρήσεων. Το Περιοδικό Φίλτρο Kalman Μόνιμης Κατάστασης (Periodic Steady State Kalman Filter) [Adam, Assimakis (2008)] ασχολείται με περιοδικά μοντέλα. Το φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους χρησιμοποιεί άλλον πίνακα αντί του κέρδους του φίλτρου Kalman [Assimakis (2020)]. Το Implicit Kalman Filter [Skliar, Ramirez (1995)] μπορεί να εφαρμοστεί σε προβληματικά (ill-conditioned) μοντέλα. Το Interval Kalman Filter [Chen, Wang, Shieh (1997)] ασχολείται με μοντέλα που περιέχουν αβεβαιότητα. Το ασαφές φίλτρο Kalman (Fuzzy Kalman Filter) [Chen, Xie, Shieh (1998)] χρησιμοποιεί ασαφή αριθμητική. Το Monte Carlo Kalman Filter [Song (2000)] χρησιμοποιεί δυαδικά μοντέλα.

Το φίλτρο Kalman έχει χρησιμοποιηθεί με επιτυχία σε ένα ευρύτατο φάσμα εφαρμογών [Anderson & Moore (2005), Ασημάκης (2009)]:

- στην αεροναυπηγική,
- στον έλεγχο χημικών διεργασιών,
- στη σχεδίαση τηλεπικοινωνιακών συστημάτων,
- στην πρόβλεψη ρύπανσης,
- σε ενεργειακά συστήματα,
- στην παρακολούθηση στόχου,
- στην επεξεργασία εικόνας,
- στην επεξεργασία ήχου,
- σε GPS,
- στην οικονομετρία,
- στην παρακολούθηση δορυφόρων,
- στην πλοϊγηση πλοίων.

## 1.6 Παρατηρησιμότητα (Observability)

**Παρατηρησιμότητα (observability)** είναι η δυνατότητα να έχουμε γνώση της κατάστασης από τις μετρήσεις, δηλαδή η δυνατότητα να οριστεί η αρχική κατάσταση  $x(0)$  από τις μετρήσεις με μοναδικό τρόπο.

Στην περίπτωση του γραμμικού μοντέλου με χρονικά αμετάβλητους πίνακες, ο πίνακας παρατηρησιμότητας (observability matrix) διαστάσεων  $n \cdot m \times n$  δημιουργείται από τους πίνακες  $F$  και  $H$  :

$$O = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \dots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Το μοντέλο είναι παρατηρήσιμο, αν ικανοποιείται το **κριτήριο παρατηρησιμότητας**:

$$\text{rank}(O) = n \quad (1.20)$$

Η **τάξη (rank)** ενός πίνακα είναι το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών/στηλών του.

### Παράδειγμα παρατηρησιμότητας.

Το μοντέλο διαστάσεων  $n=2, m=1$  με παραμέτρους

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

είναι παρατηρήσιμο, γιατί ο πίνακας παρατηρησιμότητας είναι:

$$O = \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$$

και ικανοποιείται το κριτήριο παρατηρησιμότητας:

$$\text{rank}(O) = 2$$

### Παράδειγμα μη παρατηρησιμότητας.

Το μοντέλο διαστάσεων  $n=2, m=1$  με παραμέτρους

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

είναι παρατηρήσιμο, γιατί ο πίνακας παρατηρησιμότητας είναι:

$$O = \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}$$

και δεν ικανοποιείται το κριτήριο παρατηρησιμότητας:

$$\text{rank}(O) = 1$$

## 1.7 Ελεγξιμότητα (Controllability)

**Ελεγξιμότητα (controllability)** είναι η δυνατότητα να μεταφερθούμε από κάθε αρχική κατάσταση σε επιθυμητή τελική κατάσταση, δηλαδή η δυνατότητα επιλογής εισόδων ώστε να μεταφερθούμε στην τελική κατάσταση.

Στην περίπτωση του γραμμικού μοντέλου με χρονικά αμετάβλητους πίνακες, ο πίνακας ελεγξιμότητας (controllability matrix) διαστάσεων  $n \times n \cdot m$  δημιουργείται από τους πίνακες  $F$  και  $B$ :

$$C = \begin{bmatrix} B & FB & \dots & F^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Το μοντέλο είναι παρατηρήσιμο, αν ικανοποιείται το **κριτήριο ελεγξιμότητας**:

$$\text{rank}(C) = n \quad (1.22)$$

### Παράδειγμα ελεγξιμότητας.

Το μοντέλο διαστάσεων  $n=2, m=1$  με παραμέτρους

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

είναι ελέγξιμο, γιατί ο πίνακας ελεγξιμότητας είναι:

$$C = \begin{bmatrix} B & FB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και ικανοποιείται το κριτήριο ελεγξιμότητας:

$$\text{rank}(C) = 2$$

### Παράδειγμα μη ελεγξιμότητας.

Το μοντέλο διαστάσεων  $n=2, m=1$  με παραμέτρους

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

είναι ελέγξιμο, γιατί ο πίνακας ελεγξιμότητας είναι:

$$C = \begin{bmatrix} B & FB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και δεν ικανοποιείται το κριτήριο ελεγξιμότητας:

$$\text{rank}(C) = 1$$

## 1.8 Γραμμικό μοντέλο σε προγραμματιστικό περιβάλλον

Η συνάρτηση `tvmodel` παράγει την κατάσταση και τη μέτρηση για μία επανάληψη για το χρονικά μεταβαλλόμενο γραμμικό μοντέλο, με διαγώνιο πίνακα συνδιασποράς κατάστασης και διαγώνιο πίνακα συνδιασποράς μετρήσεων.

Η συνάρτηση `tvmodel` έχει εισόδους τις παραμέτρους του μοντέλου  $F(k+1/k), H(k), Q(k), R(k), B(k)$ , την είσοδο  $u(k)$  και την προηγούμενη κατάσταση  $x(k)$ . Η συνάρτηση έχει εξόδους την επόμενη κατάσταση  $x(k+1)$  και τη μέτρηση  $z(k)$ .

Έτσι, για παράδειγμα, για την παραγωγή της κατάστασης και της μέτρησης για το βαθμωτό μοντέλο με παραμέτρους  $F(k+1/k) = H(k) = Q(k) = R(k) = B(k) = 1$  με είσοδο  $u(k) = 10$  και προηγούμενη κατάσταση  $x(k) = 2$  απαιτείται η κλήση:

```
F=1;
H=1;
Q=1;
R=1;
B=1;
u=10;
x=2;
[x, z]=tvmodel(F, H, Q, R, B, u, x)
```

### Παρατήρηση.

Η συνάρτηση `tvmodel` χρησιμοποιεί την built-in συνάρτηση `randn` που παράγει μία τιμή μίας τυχαίας μεταβλητής η οποία ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή (Gaussian distribution) με μέση τιμή 0 και διασπορά 1.

```

function [x,z]=tvmodel(F,H,Q,R,B,u,x)
% LINEAR TIME VARYING MODEL
[n,m]=size(H');
for i=1:n
    w=sqrt(Q(i,i))*randn;
end;
for i=1:m
    v=sqrt(R(i,i))*randn;
end;
help=x;
x=F*help+B*u+w;
z=H*help+v;

```

Η συνάρτηση `timodel` παράγει την κατάσταση και τη μέτρηση για **μία επανάληψη** για το γραμμικό μοντέλο με παραμέτρους χρονικά αμετάβλητες και συνδιασπορές κατάστασης και μετρήσεων διαγώνιους πίνακες.

Η συνάρτηση `timodel` έχει εισόδους τις παραμέτρους του μοντέλου  $F, H, Q, R, B$ , την είσοδο  $u(k)$  και την προηγούμενη κατάσταση  $x(k)$ . Η συνάρτηση έχει εξόδους την επόμενη κατάσταση  $x(k+1)$  και τη μέτρηση  $z(k)$ .

Έτσι, για παράδειγμα, για την παραγωγή της κατάστασης και της μέτρησης για το βαθμωτό μοντέλο με παραμέτρους  $F = Q = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.7 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$ ,  $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $R = 1$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  με είσοδο  $u(k) = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$  και προηγούμενη κατάσταση  $x(k) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  απαιτείται η κλήση:

```

F=[-0.9 0.7
   -0.3 0.1];
H=[1 1];
Q=[1 0
   0 3];
R=1;
B=[1 0
   0 1];
u=[10
   20];
x=[1
   2];
[x,z]=timodel(F,H,Q,R,B,u,x)

```

```

function [x,z]=timodel(F,H,Q,R,B,u,x)
% LINEAR TIME INVARIANT MODEL
[n,m]=size(H');
for i=1:n
    w=sqrt(Q(i,i))*randn;
end;
for i=1:m
    v=sqrt(R(i,i))*randn;
end;
help=x;
x=F*help+B*u+w;
z=H*help+v;

```

Η συνάρτηση `linearmodel` παράγει τις καταστάσεις και τις μετρήσεις για ένα χρονικό διάστημα για το γραμμικό μοντέλο με παραμέτρους χρονικά αμετάβλητες και συνδιασπορές κατάστασης και μετρήσεων διαγώνιους πίνακες.

Η συνάρτηση `linearmodel` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $F, H, Q, R, B$ , τις εισόδους  $[u(0), u(1), \dots, u(k \max)]$  στο διάστημα  $[0:k \max]$ , την αρχική κατάσταση  $x_0$  και τη μέγιστη χρονική στιγμή  $k\max$ . Η συνάρτηση έχει εξόδους τις καταστάσεις  $[x(0), x(1), \dots, x(k \max)]$  στο διάστημα  $[0:k \max]$ , τις μετρήσεις  $[z(0), z(1), \dots, z(k \max-1)]$  στο διάστημα  $[0:k \max-1]$  και το διάστημα χρόνου  $tk = [0:k \max]$ .

Έτσι, για παράδειγμα, για την παραγωγή 100 μετρήσεων στο χρονικό διάστημα  $[0:99]$  για το βαθμωτό μοντέλο με παραμέτρους  $F=H=Q=R=1, B=1$  με εισόδους  $u(k)=\sin(k), k=0, \dots, k \max$  και με αρχική συνθήκη  $x_0=1$  απαιτείται η κλήση:

```
F=1;
H=1;
Q=1;
R=1;
B=1;
kmax=99;
U=sin([0:kmax]);
x0=1;
[X,Z,tk]=linearmodel(F,H,Q,R,B,U,x0,kmax)
```

```
function [X,Z,tk]=linearmodel(F,H,Q,R,B,U,x0,kmax)
% LINEAR TIME INVARIANT MODEL
[n,m]=size(H');
W=[];
V=[];
for i=1:n
    w=sqrt(Q(i,i))*randn(1,kmax);
    W=[W w];
end;
for i=1:m
    v=sqrt(R(i,i))*randn(1,kmax);
    V=[V v];
end;
x=x0;
X=[x];
Z=[];
for k=1:kmax
    help=x;
    x=F*help+B*U(:,k:k)+W(:,k:k);
    z=H*help+V(:,k:k);
    X=[X x];
    Z=[Z z];
end;
tk=[0:kmax];
```

Η built-in συνάρτηση οbserv δημιουργεί τον πίνακα παρατηρησιμότητας. Η συνάρτηση οbserv έχει εισόδους τις παραμέτρους  $F, H$  και παράγει στην έξοδο τον πίνακα παρατηρησιμότητας.

Έτσι, για παράδειγμα, για τη δημιουργία του πίνακα παρατηρησιμότητας με παραμέτρους  $F=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, H=\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$  απαιτείται η κλήση:

```
F=[1 2
   3 4];
```

```
H=[1 2];
om = obsv (F,H);
```

H built-in συνάρτηση `ctrb` δημιουργεί τον πίνακα ελεγξιμότητας. Η συνάρτηση `ctrb` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $F, B$  και παράγει στην έξοδο τον πίνακα ελεγξιμότητας.

Έτσι, για παράδειγμα, για τη δημιουργία του πίνακα ελεγξιμότητας με παραμέτρους  $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  απαιτείται η κλήση:

```
F=[1 1
   1 0];
B=[1; 0];
cm = ctrb (F,B);
```

H built-in συνάρτηση `rank` υπολογίζει την τάξη ενός πίνακα. Η συνάρτηση `rank` έχει είσοδο έναν πίνακα και παράγει στην έξοδο την τάξη του πίνακα.

Έτσι, για παράδειγμα, για τον υπολογισμό της τάξης του πίνακα  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  απαιτείται η κλήση

```
A=[1 0 2 1
   0 2 4 2
   0 0 2 1];
r = rank (A);
```

## 1.9 Ασκήσεις

1. Να περιγράψετε το πρόβλημα της θεωρίας εκτίμησης.
2. Ποιοι είναι οι τύποι της εκτίμησης;
3. Ποιο είναι το κριτήριο βέλτιστης εκτίμησης;
4. Ποιες είναι οι υποθέσεις του στατιστικού μοντέλου;
5. Τι σημαίνουν  $x(2/1), x(2/2), x(1/2)$ ;
6. Τι σημαίνουν  $P(2/1), P(2/2), P(1/2)$ ;
7. Να γράψετε πρόγραμμα που παράγει  $N=100$  τιμές της τυχαίας μεταβλητής  $x(0)$  που ακολουθεί την κανονική κατανομή (Gaussian distribution) με μέση τιμή  $x_0 = 1$  και διασπορά  $P_0 = 2$ .
8. Να γράψετε συνάρτηση η οποία παράγει τις καταστάσεις και τις μετρήσεις για ένα χρονικό διάστημα για το βαθμωτό γραμμικό μοντέλο με  $n = 1$  και  $m = 1$ , χωρίς είσοδο και με παραμέτρους χρονικά αμετάβλητες

```
function [X,Z,tk]=linearmodel11(f,h,q,r,x0,kmax)
```

## 1.10 Περίληψη

Η θεωρία εκτίμησης (estimation theory) έχει ως αντικείμενο τον υπολογισμό της βέλτιστης εκτίμησης μιας κατάστασης δεδομένου ενός συνόλου μετρήσεων. Η κατάσταση (state) είναι η τιμή μιας στοχαστικής διαδικασίας τη χρονική στιγμή, όπου ο χρόνος θεωρείται διακριτός. Η μέτρηση (measurement) είναι η τιμή μιας άλλης στοχαστικής διαδικασίας τη χρονική στιγμή. Το πρόβλημα της θεωρίας εκτίμησης είναι να υπολογιστεί η εκτίμηση (estimation) της κατάστασης τη χρονική στιγμή δεδομένου του συνόλου των μετρήσεων μέχρι και τη χρονική στιγμή, χρησιμοποιώντας ένα προκαθορισμένο βέλτιστο κριτήριο.

Οι τύποι της εκτίμησης προσδιορίζονται από τη σχέση των χρονικών στιγμών και: πρόβλεψη (prediction), όταν η εκτίμηση της κατάστασης αφορά κάποια χρονική στιγμή μετά από αυτήν της τελευταίας μέτρησης, φίλτραρισμα (filtering), όταν η εκτίμηση της κατάστασης αφορά κάποια χρονική στιγμή που ταυτίζεται με αυτήν της τελευταίας μέτρησης, λείανση (smoothing), όταν η εκτίμηση της κατάστασης αφορά κάποια χρονική στιγμή, πριν από αυτήν της τελευταίας μέτρησης.

Το λάθος εκτίμησης (estimation error) ορίζεται ως η διαφορά της εκτίμησης από την πραγματική κατάσταση. Όσο μικρότερο είναι το λάθος εκτίμησης, τόσο καλύτερη είναι η εκτίμηση της πραγματικής κατάστασης. Το κριτήριο βέλτιστης εκτίμησης αφορά το λάθος εκτίμησης και είναι η ελαχιστοποίηση του τετραγώνου του λάθους εκτίμησης, δηλαδή της συνδιασποράς λάθους εκτίμησης.

Ανάλογα με τον τύπο της εκτίμησης υπάρχουν διάφοροι αλγόριθμοι εκτίμησης: αλγόριθμοι για εκτίμηση (φίλτρα), αλγόριθμοι για πρόβλεψη και αλγόριθμοι για λείανση.

Οι ρίζες του φίλτρου Kalman βρίσκονται στη χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων κατά τη μελέτη των πλανητικών τροχιών από τον Gauss τον 19ο αιώνα. Το 1960 ο Kalman πρότεινε το φίλτρο Kalman, έναν επαναληπτικό αλγόριθμο επίλυσης του γραμμικού προβλήματος φίλτραρίσματος διακριτού χρόνου. Από τότε μέχρι σήμερα, το φίλτρο Kalman έχει γίνει αντικείμενο επιστημονικής έρευνας και έχει χρησιμοποιηθεί με επιτυχία σε ένα ευρύτατο φάσμα εφαρμογών.

Μπορείτε να ακούσετε την περίληψη με τον Ήχο 1.1.



**Ήχος 1.1 Περίληψη – Κεφάλαιο 1.**

## 1.11 Κριτήριο Αξιολόγησης

Απαντήστε με Σωστό ή Λάθος.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

$x(\ell/k)$  είναι η εκτίμηση της κατάστασης τη χρονική στιγμή  $\ell$  δεδομένης της μέτρησης τη χρονική στιγμή  $k$ , χρησιμοποιώντας ένα προκαθορισμένο βέλτιστο κριτήριο.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Οι τύποι εκτίμησης είναι η πρόβλεψη και η λείανση.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Πρόβλεψη μπορεί να γίνει κατά πολλά βήματα.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

$x(101/100)$  σημαίνει πρόβλεψη τη χρονική στιγμή 101 δεδομένων των μετρήσεων μέχρι και τη χρονική στιγμή 100.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Το κριτήριο βέλτιστης εκτίμησης είναι η ελαχιστοποίηση του τετραγώνου του λάθους εκτίμησης.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Δεν επιτρέπεται το διάνυσμα κατάστασης και το διάνυσμα μετρήσεων να έχουν ίσες διαστάσεις.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

Ο πίνακας μεταφοράς είναι διαστάσεων  $n \times n$ .

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

Η αρχική τιμή της κατάστασης είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

Οι συνδιασπορές  $Q(k)$  και  $R(k)$  μπορούν να είναι χρονικά αμετάβλητες:  $Q(k) = Q$  και  $R(k) = R$ .

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Δεν επιτρέπεται  $Q = R$ .

Θα βρείτε την Απάντηση στο Κριτήριο Αξιολόγησης στο Παράρτημα A'.

Μπορείτε να κάνετε το Κριτήριο Αξιολόγησης με το Διαδραστικό Πρόγραμμα 1.1.



**Διαδραστικό Πρόγραμμα 1.1** Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 1.

## Βιβλιογραφία/Αναφορές

- Adam, M., Assimakis, N. (2008). Periodic Kalman filter: Steady state from the beginning. *Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications*, vol. 1, no. 3, pp. 505-520.
- Anderson, B. D. O., Moore, J. B. (2005). *Optimal Filtering*. Dover Publications, New York.
- Assimakis, N. (2006). A new algorithm for the steady state Kalman filter. *Neural, Parallel and Scientific Computations*, vol. 14, no. 1, pp. 69-74.
- Assimakis, N. (2020). Kalman Filter Gain Elimination in Linear Estimation. *International Journal of Computer and Information Engineering*, vol. 14, no. 7, pp. 236-241, 2020.
- Assimakis, N., Adam, M. (2008). FIR implementation of the steady state Kalman filter. *International Journal of Signal and Imaging Systems Engineering (IJSISE)*, vol.1, no 3/4, pp. 279-286.
- Assimakis, N., Adam, M. & Douladiris A. (2012). Information Filter and Kalman Filter Comparison: Selection of the Faster Filter. *International Journal of Information Engineering*, vol. 2, no. 1, pp. 1-5.
- Assimakis, N., Kechriniotis, A., Voliotis, S., Tassis, F. & Kousteri, M. (2008). Analysis of the time invariant Kalman filter implementation via general Chandrasekhar algorithm. *International Journal of Signal and Imaging Systems Engineering (IJSISE)*, vol. 1, no. 1, pp. 51-57.
- Chen, G., Wang, J. & Shieh, L. S. (1997). Interval Kalman filtering. *IEEE Trans. Aerospace Electron. Systems*, vol. 33, pp. 250-259.
- Chen, G., Xie, Q. & Shieh, L. S. (1998). Fuzzy Kalman filtering. *Journal of Information Sciences*, vol. 109, pp. 197-209.
- D'souza, C., Zanetti, R. (2019). Information Formulation of the UDU Kalman Filter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 55, no. 1, pp. 493–498.
- Gauss, K. F. (1963). *Theory of the Motion of the Heavenly Bodies Moving About the Sun in Conic Sections*, Dover Publications, New York.
- Grewal, M., Kain, J. (2010). Kalman Filter Implementation With Improved Numerical Properties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55, issue. 9, pp. 2058-2068.
- Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *J. Bas. Eng., Trans. ASME* ser. D, vol. 8, no. 1, pp. 34-45.
- Kalman, R. E. (1963). New Methods in Wiener Filtering Theory, *Proc. 1st Symp. of Engineering Applications of Random Function Theory and Probability*, John Wiley & Sons Inc., New York.
- Kalman, R. E., Bucy, R. S. (1961). New results in linear filtering and prediction theory, *J. Bas. Eng., Trans. ASME*, ser. D, vol. 83, no. 3, pp. 95-108.
- Kolmogorov, A. N. (1941). Interpolation and extrapolation of stationary random sequences, *Bull. de l'Académie des sciences de U.S.S.R.*, ser. Math., vol. 5, pp. 3-14.
- Lainiotis, D. G. (1975). Partitioned linear estimation algorithms: Discrete case, *IEEE Transactions on AC*, vol. 20, pp. 255-257.
- Morf, M., Sidhu, G. S. & Kailath, T. (1974). Some New Algorithms for Recursive Estimation in Constant, Linear, Discrete-time Systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 19, issue. 4, pp. 315–323.,
- Potter, J. E. (1963). New statistical formulas. Instrumentation Laboratory. MIT, Cambridge, Massachusetts, Space Guidance Memo 40.
- Skliar, M., Ramirez, W.F. (1995). Implicit Kalman filtering. *Int. J. Control*, nol. 66, no. 3, pp. 393-412.
- Song, P. (2000). Monte Carlo Kalman filter and smoothing for multivariate discrete state space models. *The Canadian Journal of Statistics*, vol. 28, no. 4, pp. 641-652.

- Sorenson, H. W. (1970). Least-squares Estimation: from Gauss to Kalman, *IEEE Spectrum* vol. 7, pp. 63-68.
- Swerling, P. (1959). A proposed stagewise differential correction procedure for satellite tracking and prediction, *J. Astronaut. Sci.*, vol. 6, pp. 46-59.
- Thornton, C. (1976). Triangular Covariance Factorizations for Kalman Filtering. Ph.D. dissertation, University of California at Los Angeles.
- Wiener, N. (1949). *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*, John Wiley & Sons Inc., New York.
- Woodbury, D., Junkins, J. (2010). On the Consider Kalman Filter. In: Proceedings of the AIAA Guidance. *Navigation and Control Conference*.
- Ασημάκης, Ν. (2009). *Φίλτρα Kalman και Λαϊνιώτη*. Εκδόσεις ΑΠΑΚΥΝΘΟΣ.

## Κεφάλαιο 2 Γραμμικό Φίλτρο Kalman

### Σύνοψη

Στο κεφάλαιο παρουσιάζεται το γραμμικό φίλτρο Kalman. Αναλύεται το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman και το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman. Εξηγείται τι σημαίνει μόνιμη κατάσταση (steady state) και παρουσιάζεται το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης. Δίνονται παραδείγματα των φίλτρων Kalman.

### Προαπαιτούμενη γνώση

Βέλτιστος έλεγχος, επαναληπτικοί αλγόριθμοι, πίνακες.

### 2.1 Χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman

Το πρόβλημα του φιλτραρίσματος είναι να υπολογιστεί η βέλτιστη εκτίμηση (φιλτράρισμα)  $x(k/k)$  της κατάστασης τη χρονική στιγμή  $\ell$  δεδομένου του συνόλου των μετρήσεων  $Z_k = \{z(1), z(2), \dots, z(k)\}$  μέχρι και τη χρονική στιγμή  $k$ . Η εκτίμηση είναι:

$$x(k/k) = E[x(k) / Z_k] \quad (2.1)$$

και η αντίστοιχη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης είναι:

$$P(k/k) = E\left[\left[x(k) - x(k/k)\right]\left[x(k) - x(k/k)\right]^T / Z_k\right] \quad (2.2)$$

Επίσης, η πρόβλεψη (κατά ένα βήμα) διαστάσεων  $n \times 1$  είναι:

$$x(k+1/k) = E[x(k+1) / Z_k] \quad (2.3)$$

και η αντίστοιχη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης διαστάσεων  $n \times n$  είναι:

$$P(k+1/k) = E\left[\left[x(k+1) - x(k+1/k)\right]\left[x(k+1) - x(k+1/k)\right]^T / Z_k\right] \quad (2.4)$$

Όταν οι πίνακες  $F(k+1,k)$ ,  $H(k)$ ,  $Q(k)$ ,  $R(k)$  και  $B(k)$  είναι χρονικά μεταβαλλόμενοι, προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις [Anderson & Moore (2005), Ασημάκης (2009)]:

- για την εκτίμηση και τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης

$$x(k/k) = [I - K(k)H(k)]x(k/k-1) + K(k)z(k) \quad (2.5)$$

$$P(k/k) = [I - K(k)H(k)]P(k/k-1) \quad (2.6)$$

- για το **κέρδος** (gain) του φίλτρου Kalman

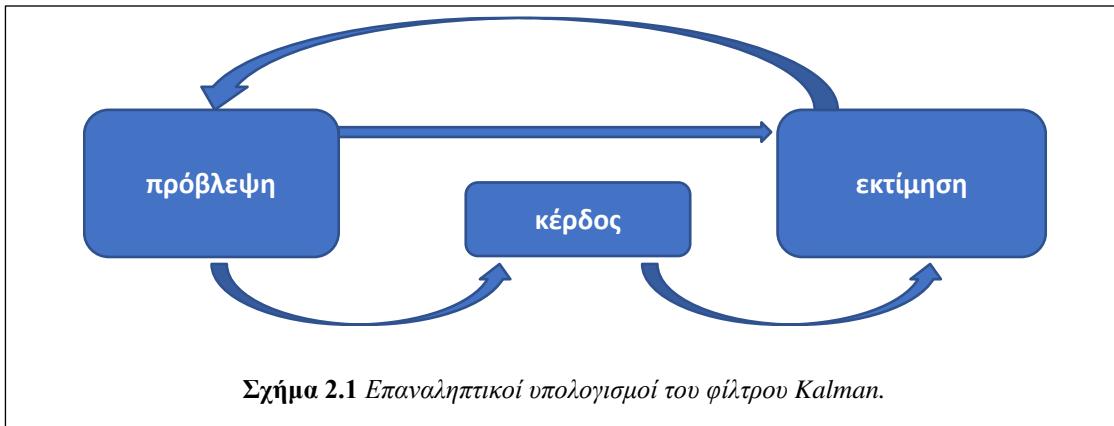
$$K(k) = P(k/k-1)H^T(k) \left[ H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k) \right]^{-1} \quad (2.7)$$

- για την πρόβλεψη και τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης

$$x(k+1/k) = F(k+1,k)x(k/k) + B(k)u(k) \quad (2.8)$$

$$P(k+1/k) = Q(k) + F(k+1,k)P(k/k)F^T(k+1,k) \quad (2.9)$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι  $x(0/-1) = x_0$  και  $P(0/-1) = P_0$ .



Το φίλτρο Kalman υπολογίζει επαναληπτικά την εκτίμηση  $x(k/k)$  και τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης  $P(k/k)$ , καθώς και την πρόβλεψη  $x(k/k-1)$  και τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης  $P(k/k-1)$  χρησιμοποιώντας το κέρδος  $K(k)$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1

Για το χρονικά μεταβαλλόμενο μοντέλο, όπου οι πίνακες  $F(k+1,k)$ ,  $H(k)$ ,  $Q(k)$ ,  $R(k)$  και  $B(k)$  είναι χρονικά μεταβαλλόμενοι, προκύπτει το Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο Kalman (Time Varying Kalman Filter):

Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο Kalman Time Varying Kalman Filter (TVKF)
$K(k) = P(k/k-1)H^T(k) \left[ H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k) \right]^{-1}$
$x(k/k) = [I - K(k)H(k)]x(k/k-1) + K(k)z(k)$
$P(k/k) = [I - K(k)H(k)]P(k/k-1)$
$x(k+1/k) = F(k+1,k)x(k/k) + B(k)u(k)$
$P(k+1/k) = Q(k) + F(k+1,k)P(k/k)F^T(k+1,k)$
$k = 0, 1, \dots$
$x(0/-1) = x_0$
$P(0/-1) = P_0$

Η απόδειξη των εξισώσεων του φίλτρου Kalman βρίσκεται στο Παράρτημα B'.

Στο χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman, τουλάχιστον ένας από τους πίνακες  $F(k+1,k)$ ,  $H(k)$ ,  $Q(k)$ ,  $R(k)$  και  $B(k)$  είναι χρονικά μεταβαλλόμενος.

Οι πίνακες  $Q(k)$ ,  $R(k)$ ,  $P(k+1/k)$  και  $P(k/k)$  είναι συμμετρικοί (symmetric) και θετικά ημιορισμένοι (nonnegative definite), ως πίνακες συνδιασπορών. Η ύπαρξη των αντίστροφων πινάκων που εμφανίζονται στην εξίσωση (2.7) εξασφαλίζεται στην περίπτωση που οι πίνακες  $R(k)$  είναι θετικά ορισμένοι (positive definite), γεγονός, το οποίο συμβαίνει, όταν καμία μέτρηση δεν είναι ακριβής. Σε διαφορετική περίπτωση μπορεί να γίνει χρήση του ψευδοαντίστροφου πίνακα (pseudo-inverse).

Από τη θεωρία πινάκων είναι γνωστοί οι παρακάτω ορισμοί:

- Ένας πίνακας  $A$  διαστάσεων  $n \times n$  ορίζεται ως συμμετρικός (symmetric), αν ισχύει η σχέση  $A = A^T$ . Ένας συμμετρικός πίνακας έχει πραγματικές ιδιοτιμές.
- Ένας συμμετρικός πίνακας  $A$  διαστάσεων  $n \times n$  ορίζεται ως θετικά ορισμένος (positive definite), αν ισχύει η σχέση  $x^T Ax > 0$  για κάθε διάνυσμα  $x \neq 0$ . Ένας θετικά ορισμένος πίνακας έχει όλες τις ιδιοτιμές του θετικές.
- Ένας συμμετρικός πίνακας  $A$  διαστάσεων  $n \times n$  ορίζεται ως θετικά ημιορισμένος (nonnegative definite), αν ισχύει η σχέση  $x^T Ax \geq 0$  για κάθε διάνυσμα  $x \neq 0$ . Ένας θετικά ημιορισμένος πίνακας έχει μη αρνητικές ιδιοτιμές.

Ο πίνακας  $K(k)$  διαστάσεων  $n \times m$  καλείται **κέρδος** (gain) του φίλτρου Kalman. Η συνδιασπορά λάθους εκτίμησης, η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης και το κέρδος δεν εξαρτώνται από τις μετρήσεις. Επομένως, μπορούν είτε να υπολογιστούν σε πραγματικό χρόνο (real time) είτε να υπολογιστούν εκ των προτέρων (off-line) χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.6), (2.7) και (2.9).

Όσο ο θόρυβος των μετρήσεων τείνει στο μηδέν, τόσο η εκτίμηση βασίζεται περισσότερο στη μέτρηση και λιγότερο στην πρόβλεψη.

Όσο η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης τείνει στο μηδέν, τόσο η εκτίμηση βασίζεται λιγότερο στη μέτρηση και περισσότερο στην πρόβλεψη.

Όταν η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης είναι μηδέν  $P(k / k-1) = 0$ ,

τότε το κέρδος είναι μηδέν:  $K(k) = 0$ ,

οπότε η εκτίμηση είναι ίση με την πρόβλεψη:  $x(k / k) = x(k / k-1)$ .

## 2.2 Χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman

Όταν οι πίνακες  $F(k+1, k) = F$ ,  $H(k) = H$ ,  $Q(k) = Q$ ,  $R(k) = R$  και  $B(k) = B$  είναι χρονικά αμετάβλητοι, προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:

- για την εκτίμηση και τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης

$$x(k / k) = [I - K(k)H]x(k / k-1) + K(k)z(k) \quad (2.10)$$

$$P(k / k) = [I - K(k)H]P(k / k-1) \quad (2.11)$$

- για το κέρδος

$$K(k) = P(k / k-1)H^T [HP(k / k-1)H^T + R]^{-1} \quad (2.12)$$

- για την πρόβλεψη και τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης

$$x(k+1 / k) = Fx(k / k) + Bu(k) \quad (2.13)$$

$$P(k+1 / k) = Q + FP(k / k)F^T \quad (2.14)$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι  $x(0 / -1) = x_0$  και  $P(0 / -1) = P_0$ .

Για το χρονικά αμετάβλητο μοντέλο, όπου οι πίνακες  $F(k+1, k) = F$ ,  $H(k) = H$ ,  $Q(k) = Q$ ,  $R(k) = R$  και  $B(k) = B$  είναι χρονικά αμετάβλητοι, προκύπτει το Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman (Time Invariant Kalman Filter):

Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman Time Invariant Kalman Filter (TIKF)
$K(k) = P(k / k-1)H^T [HP(k / k-1)H^T + R]^{-1}$
$x(k / k) = [I - K(k)H]x(k / k-1) + K(k)z(k)$
$P(k / k) = [I - K(k)H]P(k / k-1)$
$x(k+1 / k) = Fx(k / k) + Bu(k)$
$P(k+1 / k) = Q + FP(k / k)F^T$
$k = 0, 1, \dots$
$x(0 / -1) = x_0$
$P(0 / -1) = P_0$

Στο χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman, όλοι οι πίνακες  $F(k+1, k) = F$ ,  $H(k) = H$ ,  $Q(k) = Q$ ,  $R(k) = R$  και  $B(k) = B$  είναι χρονικά αμετάβλητοι. Οι πίνακες  $Q$ ,  $R$ ,  $P(k+1 / k)$  και  $P(k / k)$  είναι συμμετρικοί (symmetric)

και θετικά ημιορισμένοι (nonnegative definite), ως πίνακες συνδιασπορών. Η ύπαρξη των αντίστροφων πινάκων που εμφανίζονται στην εξίσωση (2.12), εξασφαλίζεται στην περίπτωση που ο πίνακας  $R$  είναι θετικά ορισμένος (positive definite), γεγονός, το οποίο συμβαίνει, όταν καμία μέτρηση δεν είναι ακριβής. Σε διαφορετική περίπτωση μπορεί να γίνει χρήση του ψευδοαντίστροφου πίνακα (pseudo-inverse). Το φίλτρο Kalman είναι ένα επαναληπτικό φίλτρο, ακόμη και στην περίπτωση του χρονικά αμετάβλητου μοντέλου, γιατί το κέρδος είναι χρονικά μεταβαλλόμενο.

### Παρατήρηση. Η περίπτωση του άπειρου θορύβου μετρήσεων.

Εξετάζοντας την περίπτωση του άπειρου θορύβου μετρήσεων, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η συνδιασπορά θορύβου μετρήσεων είναι άπειρη, δηλαδή  $R = \infty$ . Τότε προκύπτουν τα ακόλουθα:

- από την εξίσωση (2.12) το κέρδος είναι μηδέν:  $K(k) = 0$ ,
- από την εξίσωση (2.10) η εκτίμηση είναι ίση με την πρόβλεψη:  $x(k / k) = x(k / k - 1)$ ,
- από την εξίσωση (2.11) η συνδιασπορά λάθους εκτίμησης είναι ίση με τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης:  $P(k / k) = P(k / k - 1)$ .

Οπότε η εκτίμηση είναι:

$$x(k + 1 / k + 1) = Fx(k / k) + Bu(k) \quad (2.15)$$

και η αντίστοιχη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης είναι:

$$P(k + 1 / k + 1) = Q + FP(k / k)F^T \quad (2.16)$$

### 2.3 Μόνιμη κατάσταση

Για το χρονικά αμετάβλητο μοντέλο, όπου οι πίνακες  $F(k + 1, k) = F$ ,  $H(k) = H$ ,  $Q(k) = Q$  και  $R(k) = R$  είναι σταθεροί (χρονικά αμετάβλητοι), είναι γνωστό [Anderson & Moore (2005)] ότι:

- αν για κάθε  $G$  με  $GG^T = Q$  το ζεύγος  $[F, G]$  είναι πλήρως σταθεροποιήσιμο (completely stabilizable) και
- αν το ζεύγος  $[F, H^T]$  είναι πλήρως ανιχνεύσιμο (completely detectable),

τότε το φίλτρο τείνει σε **μόνιμη κατάσταση (steady state)**, δηλαδή η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης τείνει σε μία σταθερή τιμή  $P_p$ , η οποία είναι μοναδική (unique) και καλείται συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση.

Σημειώνεται ότι:

- το ζεύγος  $[F, G]$  είναι πλήρως σταθεροποιήσιμο (completely stabilizable), αν ισχύει η πρόταση: αν  $w^T G = 0$  και  $w^T F = \lambda w^T$  για κάποια σταθερά  $\lambda$ , τότε  $|\lambda| < 1$  ή  $w = 0$
- το ζεύγος  $[F, H^T]$  είναι πλήρως ανιχνεύσιμο (completely detectable), αν το ζεύγος  $[F^T, H^T]$  είναι πλήρως σταθεροποιήσιμο (completely stabilizable).

Επίσης, αν το μοντέλο είναι **ασυμπτωτικά ευσταθές (asymptotically stable)**, που σημαίνει ότι οι ιδιοτιμές (eigenvalues) του πίνακα  $F$  βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, τότε οπωσδήποτε το μοντέλο είναι πλήρως ανιχνεύσιμο και πλήρως σταθεροποιήσιμο. Επομένως, αν το μοντέλο είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, τότε το φίλτρο τείνει σε μόνιμη κατάσταση. Το φίλτρο μπορεί να τείνει σε μόνιμη κατάσταση, ακόμη και όταν το μοντέλο δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Από τις εξισώσεις (2.11), (2.12) και (2.14) προκύπτει η **εξίσωση Riccati** για το φίλτρο Kalman:

$$P(k + 1 / k) = Q + FP(k / k - 1)F^T - FP(k / k - 1)H^T \left[ HP(k / k - 1)H^T + R \right]^{-1} HP(k / k - 1)F^T \quad (2.17)$$

Η εξίσωση Riccati είναι μία μη γραμμική επαναληπτική εξίσωση. Η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης τείνει στη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση όταν:

$$\|P(k_{ss} + 1/k_{ss}) - P(k_{ss}/k_{ss} - 1)\| < \varepsilon \quad (2.18)$$

όπου  $\varepsilon$  είναι ένας μικρός θετικός αριθμός και  $k_{ss}$  είναι ο χρόνος μόνιμης κατάστασης (steady state time).

Με  $\|A\|$  συμβολίζεται η φασματική νόρμα (norm) του πίνακα  $A$ , δηλαδή η τετραγωνική ρίζα της μέγιστης ιδιοτιμής του πίνακα  $A^T A$ .

Η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση ικανοποιεί την **αλγεβρική εξίσωση Riccati**:

$$P_p = Q + F P_p F^T - F P_p H^T [H P_p H^T + R]^{-1} H P_p F^T \quad (2.19)$$

Αλγόριθμοι επίλυσης της εξίσωσης Riccati παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 3.

Από τις εξισώσεις (2.11), (2.12) και (2.14) είναι φανερό ότι το κέρδος τείνει σε μία σταθερή τιμή  $K$  που καλείται κέρδος στη μόνιμη κατάσταση και υπολογίζεται ως συνάρτηση της συνδιασποράς λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση:

$$K = P_p H^T [H P_p H^T + R]^{-1} \quad (2.20)$$

Επίσης, είναι φανερό ότι η συνδιασπορά λάθους εκτίμησης τείνει σε μία σταθερή τιμή  $P_e$ , η οποία καλείται συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση και υπολογίζεται ως συνάρτηση της συνδιασποράς λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση:

$$P_e = P_p - P_p H^T [H P_p H^T + R]^{-1} H P_p \quad (2.21)$$

### Η περίπτωση του άπειρου θορύβου μετρήσεων.

Εξετάζοντας την περίπτωση του άπειρου θορύβου μετρήσεων, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η συνδιασπορά θορύβου μετρήσεων είναι άπειρη, δηλαδή  $R = \infty$ . Τότε, για το χρονικά αμετάβλητο μοντέλο, είναι γνωστό [Anderson & Moore (2005)] ότι: αν για κάθε  $G$  με  $GG^T = Q$  το ζεύγος  $[F, G]$  είναι πλήρως προσβάσιμο (completely reachable) και, αν οι ιδιοτιμές (eigenvalues) του πίνακα  $F$  βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, τότε το φίλτρο τείνει σε μόνιμη κατάσταση (steady state), δηλαδή η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης τείνει σε μία σταθερή τιμή  $P_p$ , η οποία είναι μοναδική (unique) και καλείται συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση.

Σημειώνεται ότι:

- το ζεύγος  $[F, G]$  είναι **πλήρως προσβάσιμο** (completely reachable), αν ισχύει η πρόταση: αν  $w^T G = 0$  και  $w^T F = \lambda w^T$  για κάποια σταθερά  $\lambda$ , τότε  $w = 0$ .

Στην περίπτωση του άπειρου θορύβου μετρήσεων, το κέρδος στη μόνιμη κατάσταση είναι μηδέν:

$$K = 0 \quad (2.22)$$

Οπότε, η συνδιασπορά λάθους εκτίμησης στη μόνιμη κατάσταση είναι ίση με τη συνδιασποράς λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση:

$$P_e = P_p \quad (2.23)$$

Στην περίπτωση αυτή από τις εξισώσεις του φίλτρου Kalman προκύπτει η **εξίσωση Lyapunov** ως ειδική μορφή της εξίσωσης Riccati (για  $R = \infty$ ):

$$P(k+1/k) = Q + F P(k/k-1) F^T \quad (2.24)$$

Η εξίσωση Lyapunov είναι μια μη γραμμική επαναληπτική εξίσωση. Η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης τείνει στη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση όταν:

$$\|P(k_{ss}+1/k_{ss}) - P(k_{ss}/k_{ss}-1)\| < \varepsilon, \quad (2.25)$$

όπου  $\varepsilon$  είναι ένας μικρός θετικός αριθμός και  $k_{ss}$  είναι ο χρόνος μόνιμης κατάστασης (steady state time).

Η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση ικανοποιεί την **αλγεβρική εξίσωση Lyapunov**:

$$P_p = Q + FP_p F^T \quad (2.26)$$

Αλγόριθμοι επίλυσης της εξίσωσης Lyapunov παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 4

## 2.4 Φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης

Στη μόνιμη κατάσταση, προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:

- για την εκτίμηση

$$x(k/k) = [I - KH]x(k/k-1) + Kz(k) \quad (2.27)$$

- για την πρόβλεψη

$$x(k+1/k) = Fx(k/k) + Bu(k) \quad (2.28)$$

Συνδυάζοντας τις (2.27) και (2.28) προκύπτει η παρακάτω επαναληπτική εξίσωση για την εκτίμηση:

$$x(k+1/k+1) = Ax(k/k) + Cu(k) + Kz(k+1) \quad (2.29)$$

όπου

$$A = [I - KH]F \quad (2.30)$$

$$C = [I - KH]B \quad (2.31)$$

Η αρχική συνθήκη είναι:

$$x(0/0) = [I - KH]x(0/-1) + Kz(0) = [I - KH]x_0 + Kz(0)$$

Στη μόνιμη κατάσταση, προκύπτει το Φίλτρο Kalman Μόνιμης Κατάστασης (Steady State Kalman Filter):

<b>Φίλτρο Kalman Μόνιμης Κατάστασης Steady State Kalman Filter (SSKF)</b>
$x(k+1/k+1) = Ax(k/k) + Cu(k) + Kz(k+1)$
$k = 0, 1, \dots$
$A = [I - KH]F$
$C = [I - KH]B$
$x(0/0) = [I - KH]x_0 + Kz(0)$

Το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης είναι ένα επαναληπτικό φίλτρο. Η υλοποίηση του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης απαιτεί τη γνώση της συνδιασποράς λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση για τον υπολογισμό των συντελεστών του φίλτρου, δηλαδή των πινάκων  $A, C$  και  $K$ , οι οποίοι μπορούν να υπολογιστούν εκ των προτέρων (off-line), επιλύοντας την εξίσωση Riccati (2.19) και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.20), (2.30) και (2.31). Αλγόριθμοι επίλυσης της εξίσωσης Riccati παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 3.

Είναι προφανές ότι οι εξισώσεις του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης προκύπτουν από τις εξισώσεις του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman στη μόνιμη κατάσταση. Πριν τον χρόνο μόνιμης κατάστασης (steady state time) οι εξισώσεις διαφέρουν, γιατί ακριβώς το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman δεν έχει τείνει ακόμα στη μόνιμη κατάσταση (steady state). Επομένως, κατά τη διάρκεια του χρόνου μετάβασης στη μόνιμη κατάσταση, το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman και το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης δεν υπολογίζουν την ίδια εκτίμηση, και μάλιστα η εκτίμηση που υπολογίζει το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman,

είναι η βέλτιστη εκτίμηση, ενώ η εκτίμηση που υπολογίζει το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης δεν είναι η βέλτιστη εκτίμηση.

Στην περίπτωση που υπάρχει μόνιμη κατάσταση (steady state), μια παραλλαγή του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman είναι η χρήση του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman μέχρι τον χρόνο μόνιμης κατάστασης (steady state time) και η χρήση του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης από τον χρόνο μόνιμης κατάστασης (steady state time) και μετά. Οι αρχική συνθήκη για το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης είναι η εκτίμηση του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman στον χρόνο μόνιμης κατάστασης. Τότε η εκτίμηση είναι βέλτιστη, επειδή οι εξισώσεις του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman και του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης είναι ισοδύναμες από τον χρόνο μόνιμης κατάστασης (steady state time) και μετά.

### Finite Impulse Response (FIR) μορφή του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης

Από την επαναληπτική εξίσωση (2.29) του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης προκύπτει:

$$x(1 / 1) = Ax(0 / 0) + Cu(0) + Kz(1)$$

$$x(2 / 2) = Ax(1 / 1) + Cu(1) + Kz(2) = A^2 x(0 / 0) + AKz(1) + Kz(2) + ACu(0) + Cu(1)$$

$$x(3 / 3) = Ax(2 / 2) + Cu(2) + Kz(3) = A^3 x(0 / 0) + A^2 Kz(1) + AKz(2) + Kz(3) + A^2 Cu(0) + ACu(1) + Cu(2)$$

...

$$x(k / k) = A^k x(0 / 0) + A^{k-1} Kz(1) + \dots + AKz(k-1) + Kz(k) + A^{k-1} Cu(0) + \dots + ACu(k-2) + Cu(k-1)$$

Είναι γνωστό [Higham & (1995)] ότι, «αν η φασματική ακτίνα ενός πίνακα  $A$  είναι μικρότερη από τη μονάδα, τότε οι δυνάμεις του πίνακα  $A$  συγκλίνουν στο μηδέν», δηλαδή υπάρχει κάποιος θετικός ακέραιος  $\ell$ , τέτοιος ώστε  $\|A^\ell\| < \varepsilon$  όπου το κριτήριο σύγκλισης  $\varepsilon$  είναι ένας πολύ μικρός θετικός αριθμός. Επομένως, λόγω της υπολογιστικής ακρίβειας, υπάρχει κάποιος θετικός ακέραιος  $\ell$ , τέτοιος ώστε:

$$A^{\ell-1} \neq 0, A^{\ell+j} = 0, j=1,2,\dots \quad (2.32)$$

Ο πίνακας  $A = [I - KH]F$  έχει αυτή την ιδιότητα γιατί είναι γνωστό [Anderson & Moore (2005)] ότι αν το μοντέλο είναι **ασυμπτωτικά ευσταθές** (asymptotically stable), που σημαίνει ότι οι ιδιοτιμές (eigenvalues) του πίνακα  $F$  βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, τότε οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A = [I - KH]F$  βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, όποτε η φασματική ακτίνα του πίνακα  $A = [I - KH]F$  είναι μικρότερη από τη μονάδα.

Τότε

$$x(\ell / \ell) = A^{\ell-1} Kz(1) + \dots + AKz(\ell-1) + Kz(\ell) + A^{\ell-1} Cu(0) + \dots + ACu(\ell-2) + Cu(\ell-1)$$

και

$$\begin{aligned} x(\ell+1 / \ell+1) &= Ax(\ell / \ell) + Cu(\ell) + Kz(\ell+1) \\ &= A^{\ell-1} Kz(2) + \dots + A^2 Kz(\ell-1) + AKz(\ell) + Kz(\ell+1) \\ &\quad + A^{\ell-1} Cu(1) + \dots + A^2 Cu(\ell-2) + ACu(\ell-1) + Cu(\ell) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(\ell+2 / \ell+2) &= A^{\ell-1} Kz(3) + \dots + A^2 Kz(\ell) + AKz(\ell+1) + Kz(\ell+2) \\ &\quad + A^{\ell-1} Cu(2) + \dots + A^2 Cu(\ell-1) + Cu(\ell) + Cu(\ell+1) \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned} x(\ell+k / \ell+k) &= A^{\ell-1} Kz(k+1) + \dots + A^2 Kz(\ell+k-2) + AKz(\ell+k-1) + Kz(\ell+k) \\ &\quad + A^{\ell-1} Cu(k) + \dots + A^2 Cu(\ell+k-3) + ACu(\ell+k-2) + Cu(\ell+k-1) \end{aligned}$$

Θεωρώντας ότι  $z(k) = 0, k < 0$  και  $u(k) = 0, k < 0$ , προκύπτει η παρακάτω εξίσωση:

$$x(k/k) = A^{\ell-1}Kz(k-(\ell-1)) + \dots + AKz(k-1) + Kz(k) + A^{\ell-1}Cu(k-\ell) + \dots + ACu(k-2) + Cu(k-1)$$

που γράφεται:

$$x(k/k) = \sum_{i=0}^{\ell-1} A^i K z(k-i) + \sum_{i=0}^{\ell-1} A^i C u(k-i-1) \quad (2.33)$$

Έτσι, προκύπτει η FIR μορφή του φίλτρου Kalman Μόνιμης Κατάστασης (FIR Steady State Kalman Filter):

FIR μορφή Φίλτρου Kalman Μόνιμης Κατάστασης
FIR Steady State Kalman Filter (FIRSSKF)
$x(k/k) = \sum_{i=0}^{\ell-1} A^i K z(k-i) + \sum_{i=0}^{\ell-1} A^i C u(k-i-1)$
$k = 1, 2, \dots$
$A = [I - KH]F$
$C = [I - KH]B$
$\ell : A^{\ell-1} \neq 0, A^{\ell+j} = 0, j = 1, 2, \dots$

Ο υπολογισμός της εκτίμησης δεν γίνεται επαναληπτικά, αφού δεν απαιτείται η γνώση της προηγούμενης εκτίμησης. Στην FIR μορφή του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης απαιτείται:

- η γνώση των συντελεστών του φίλτρου  $A^i K, i = 0, \dots, \ell-1$  και  $A^i C, i = 0, \dots, \ell-1$ , που υπολογίζονται εκ των προτέρων (off-line) επιλύοντας την εξίσωση Riccati (2.19) και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.20), (2.30), (2.31) και
- η γνώση ενός υποσυνόλου μετρήσεων, το πλήθος  $\ell$  του οποίου είναι η **τάξη (order)** του φίλτρου και υπολογίζεται εκ των προτέρων (off-line) από τη σχέση (2.32)

## 2.5 Παραδείγματα φίλτρων Kalman

### Παράδειγμα 1. Μη επαναληπτική μορφή φίλτρου Kalman.

Στο παράδειγμα αυτό θεωρείται ένα βαθμωτό ( $n = 1$  και  $m = 1$ ) χρονικά αμετάβλητο μοντέλο, όπου ισχύουν όλες οι υποθέσεις, χωρίς είσοδο, με παραμέτρους:

$$F = 1$$

$$H = 1$$

$$Q = 0$$

$$R = 1$$

Οι εξισώσεις του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman γράφονται:

$$x(k/k) = [1 - K(k)]x(k/k-1) + K(k)z(k)$$

$$P(k/k) = [1 - K(k)]P(k/k-1)$$

$$K(k) = \frac{P(k/k-1)}{P(k/k-1) + 1}$$

$$x(k+1/k) = x(k/k)$$

$$P(k+1/k) = P(k/k)$$

Η εκτίμηση και η διασπορά λάθους εκτίμησης γράφονται:

$$\begin{aligned}x(k/k) &= \left[ 1 - \frac{P(k/k-1)}{P(k/k-1)+1} \right] x(k/k-1) + \frac{P(k/k-1)}{P(k/k-1)+1} z(k) \\&= \left[ \frac{1}{P(k/k-1)+1} \right] x(k/k-1) + \frac{P(k/k-1)}{P(k/k-1)+1} z(k) \\&= \frac{1}{P(k-1/k-1)+1} x(k-1/k-1) + \frac{P(k-1/k-1)}{P(k-1/k-1)+1} z(k) \\P(k/k) &= \left[ 1 - \frac{P(k/k-1)}{P(k/k-1)+1} \right] P(k/k-1) = \frac{P(k/k-1)}{P(k/k-1)+1} = \frac{P(k-1/k-1)}{P(k-1/k-1)+1}\end{aligned}$$

Επομένως, η εκτίμηση και η διασπορά λάθους εκτίμησης υπολογίζονται επαναληπτικά:

$$\begin{aligned}x(k+1/k+1) &= \frac{1}{P(k/k)+1} x(k/k) + \frac{P(k/k)}{P(k/k)+1} z(k+1) \\P(k+1/k+1) &= \frac{P(k/k)}{P(k/k)+1}\end{aligned}$$

Με χρήση των επαναληπτικών εξισώσεων του φίλτρου Kalman, η εκτίμηση και η διασπορά λάθους εκτίμησης υπολογίζονται ως συναρτήσεις των αρχικών συνθηκών  $x_0$  και  $P_0$  (μη επαναληπτική μορφή του φίλτρου Kalman):

$$\begin{aligned}x(k+1/k+1) &= \frac{1}{(k+1)P(0/0)+1} x(0/0) + \frac{P(0/0)}{(k+1)P(0/0)+1} \sum_{i=1}^{k+1} z(i) \\P(k+1/k+1) &= \frac{P(0/0)}{(k+1)P(0/0)+1}\end{aligned}$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι:

$$\begin{aligned}x(0/0) &= [1 - K(0)] x(0/-1) + K(0) z(0) \\&= \left[ 1 - \frac{P(0/-1)}{P(0/-1)+1} \right] x(0/-1) + \frac{P(0/-1)}{P(0/-1)+1} z(0) \\&= \left[ \frac{1}{P(0/-1)+1} \right] x(0/-1) + \frac{P(0/-1)}{P(0/-1)+1} z(0) \\&= \left[ \frac{1}{P_0+1} \right] x_0 + \frac{P_0}{P_0+1} z(0)\end{aligned}$$

$$P(0/0) = [1 - K(0)] P(0/-1) = \left[ 1 - \frac{P(0/-1)}{P(0/-1)+1} \right] P(0/-1) = \frac{P(0/-1)}{P(0/-1)+1} = \frac{P_0}{P_0+1}$$

### Παρατήρηση 1.

Όταν η αρχική αβεβαιότητα είναι πολύ μικρή  $P(0/0) = 0$

$$\text{τότε } x(k/k) = x(0/0)$$

δηλαδή, το φίλτρο βασίζεται στην αρχική συνθήκη  $x(0/0)$  (λόγω της μικρής αρχικής αβεβαιότητας) και αγνοούνται οι μετρήσεις.

## Παρατήρηση 2.

Όταν η αρχική αβεβαιότητα είναι πολύ μεγάλη  $P(0/0) = \infty$

$$\text{τότε } x(k/k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k z(i)$$

δηλαδή, το φίλτρο αγνοεί την αρχική συνθήκη  $x(0/0)$  (λόγω της μεγάλης αρχικής αβεβαιότητας) και η εκτίμηση είναι η μέση τιμή των μετρήσεων.

## Παράδειγμα 2. Χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman. Κατάσταση και εκτίμηση.

Στο παράδειγμα αυτό θεωρείται ένα βαθμωτό ( $n = 1$  και  $m = 1$ ) χρονικά μεταβαλλόμενο μοντέλο με παραμέτρους:

$$F(k+1, k) = 0.8^{k/100}$$

$$H(k+1) = 1$$

$$Q(k) = 1$$

$$R(k+1) = 1$$

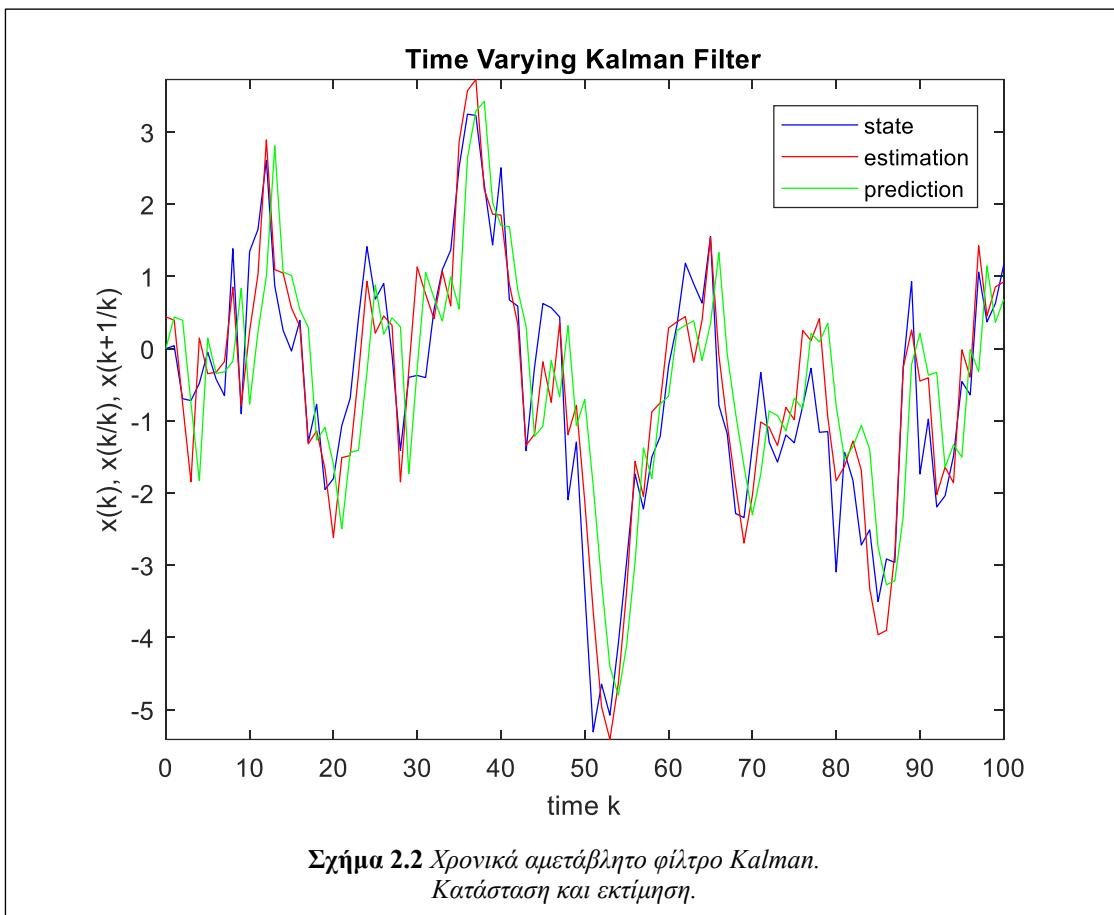
χωρίς είσοδο

και με αρχικές συνθήκες

$$x_0 = 0$$

$$P_0 = 1$$

Στο Σχήμα 2.2 παρουσιάζονται η κατάσταση και η εκτίμηση



**Παράδειγμα 3. Χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman. Κατάσταση, πρόβλεψη και εκτίμηση.**

Στο παράδειγμα αυτό θεωρείται ένα βαθμωτό ( $n = 1$  και  $m = 1$ ) χρονικά αμετάβλητο μοντέλο, όπου ισχύουν όλες οι υποθέσεις, χωρίς είσοδο, με παραμέτρους:

$$F = 0.8$$

$$H = 1$$

$$Q = 1$$

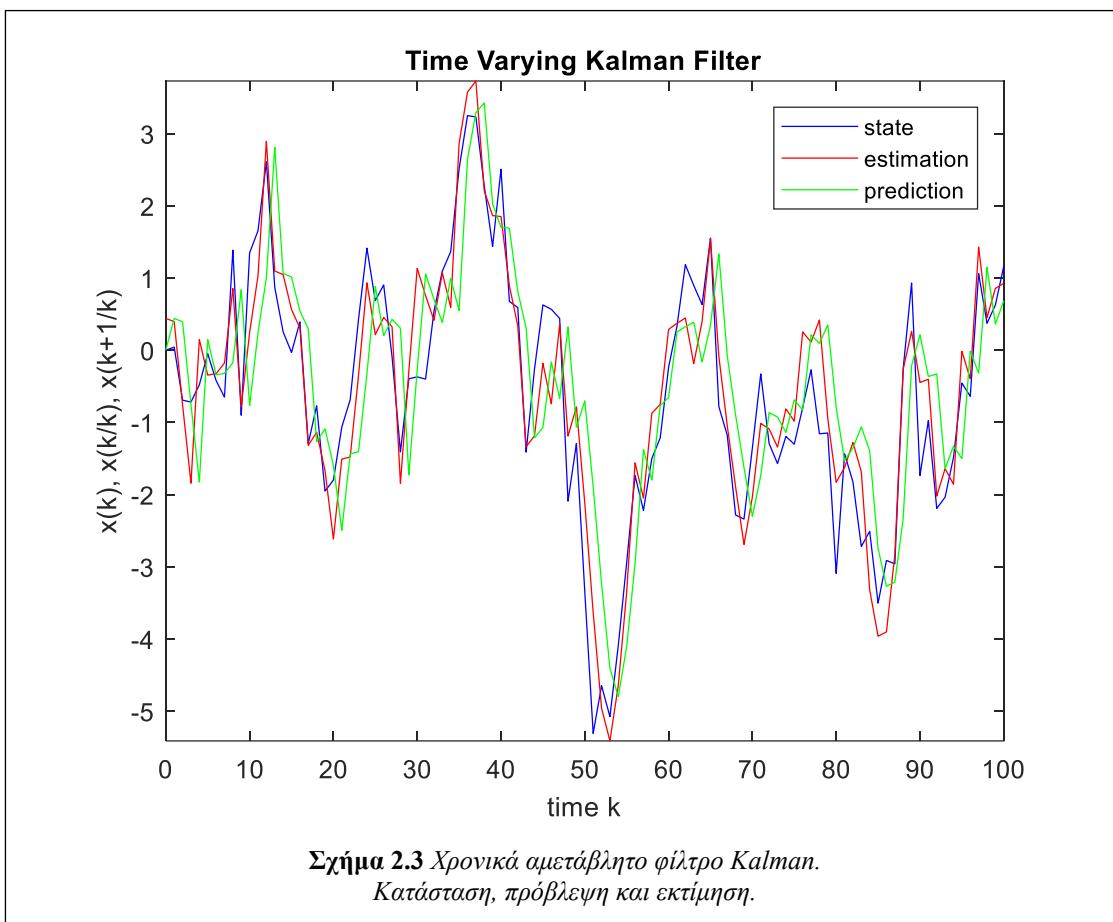
$$R = 1$$

και αρχικές συνθήκες

$$x_0 = 0$$

$$P_0 = 1$$

Στο Σχήμα 2.3 παρουσιάζονται η κατάσταση, η πρόβλεψη και η εκτίμηση.



**Παράδειγμα 4. Χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman. Διασπορά λάθους πρόβλεψης και διασπορά λάθους εκτίμησης.**

Στο παράδειγμα αυτό θεωρείται ένα βαθμωτό χρονικά αμετάβλητο μοντέλο, χωρίς είσοδο, με παραμέτρους:

$$F = 0.8$$

$$H = 1$$

$$Q = 1$$

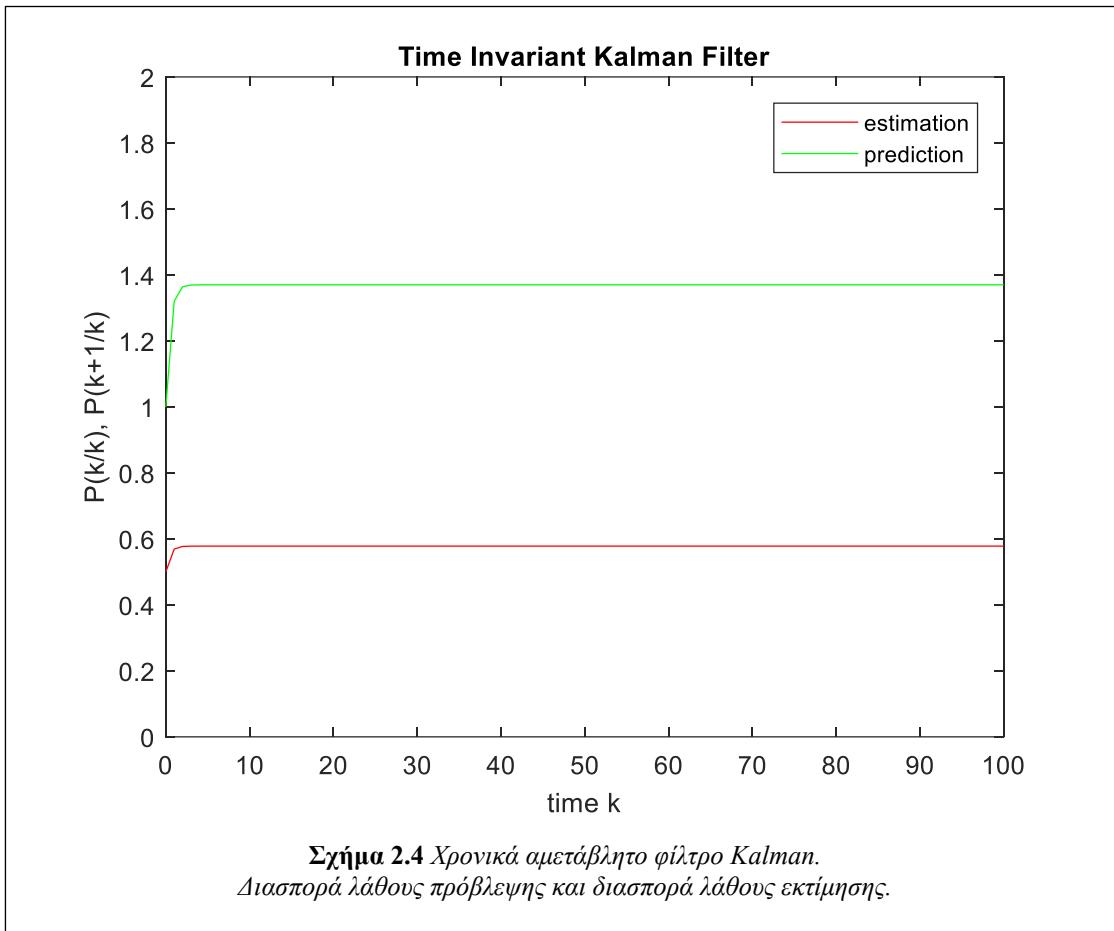
$$R = 1$$

και αρχικές συνθήκες:

$$x_0 = 0$$

$$P_0 = 1$$

Στο Σχήμα 2.4 παρουσιάζονται η διασπορά λάθους πρόβλεψης και η διασπορά λάθους εκτίμησης. Η διασπορά λάθους εκτίμησης είναι μικρότερη από τη διασπορά λάθους πρόβλεψης. Αυτό σημαίνει ότι η εκτίμηση είναι πιο κοντά στην πραγματική κατάσταση από ότι είναι η πρόβλεψη.



##### Παράδειγμα 5. Εξίσωση Riccati.

Στο παράδειγμα αυτό θεωρείται ένα βαθμωτό χρονικά αμετάβλητο μοντέλο, χωρίς είσοδο, με παραμέτρους:

$$F = 0.9$$

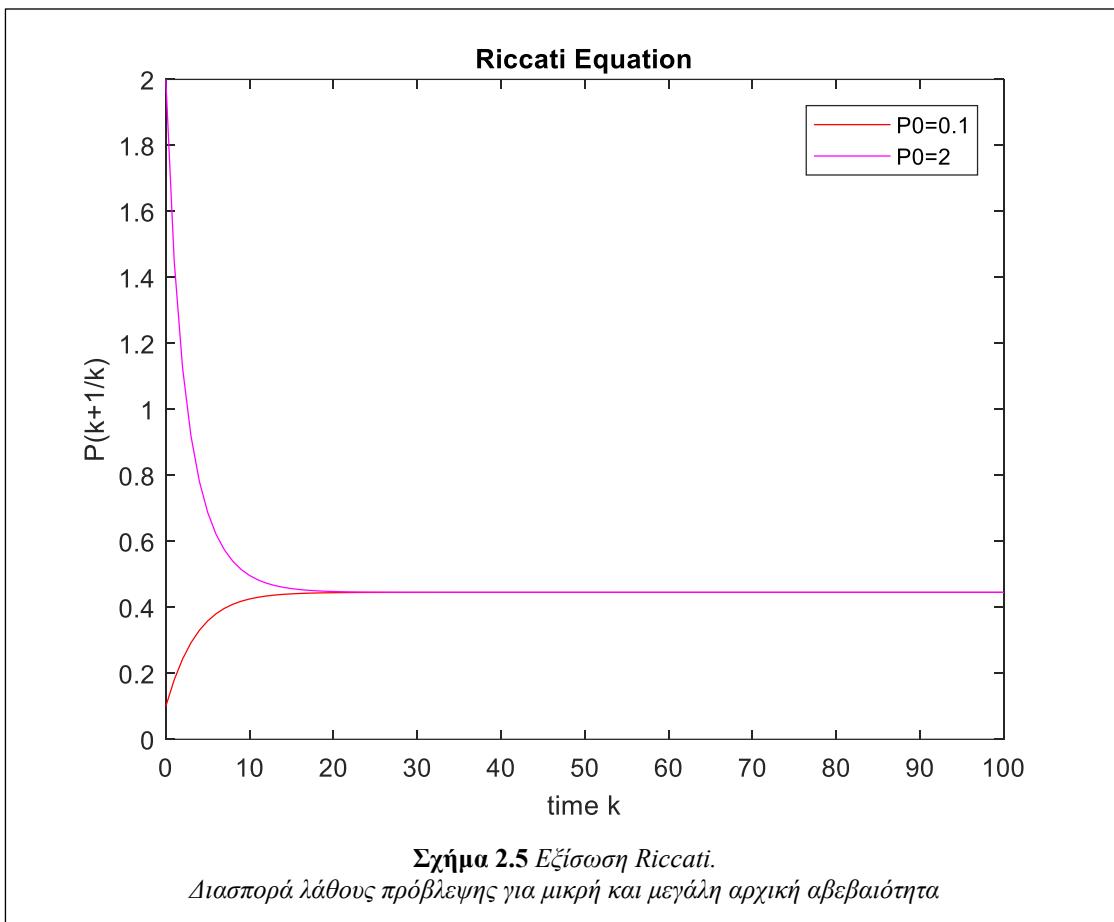
$$H = 1$$

$$Q = 0.1$$

$$R = 10$$

Η λύση της εξίσωσης Riccati είναι  $P_p = 0.4454$

Στο Σχήμα 2.5 παρουσιάζεται η διασπορά λάθους πρόβλεψης για μικρή αρχική αβεβαιότητα ( $P_0 = 0.1$ ) και για μεγάλη αρχική αβεβαιότητα ( $P_0 = 2$ ).



### Παρατήρηση 1.

Η διασπορά λάθους πρόβλεψης τείνει στη διασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση ανεξάρτητα από την αρχική αβεβαιότητα.

### Παρατήρηση 2.

Όταν η αρχική αβεβαιότητα είναι μικρή ( $P_0 = 0.1$ ), τότε η πρόβλεψη της κατάστασης γίνεται χειρότερη, όσο περνάει ο χρόνος και μέχρι τον χρόνο μόνιμης κατάστασης.

Όταν η αρχική αβεβαιότητα είναι μεγάλη ( $P_0 = 2$ ), τότε η πρόβλεψη της κατάστασης γίνεται καλύτερη, όσο περνάει ο χρόνος και μέχρι τον χρόνο μόνιμης κατάστασης.

### Παράδειγμα 6. Εξίσωση Lyapunov.

Στο παράδειγμα αυτό θεωρείται ένα βαθμωτό χρονικά αμετάβλητο μοντέλο, χωρίς είσοδο, με παραμέτρους:

$$F = 0.9$$

$$H = 1$$

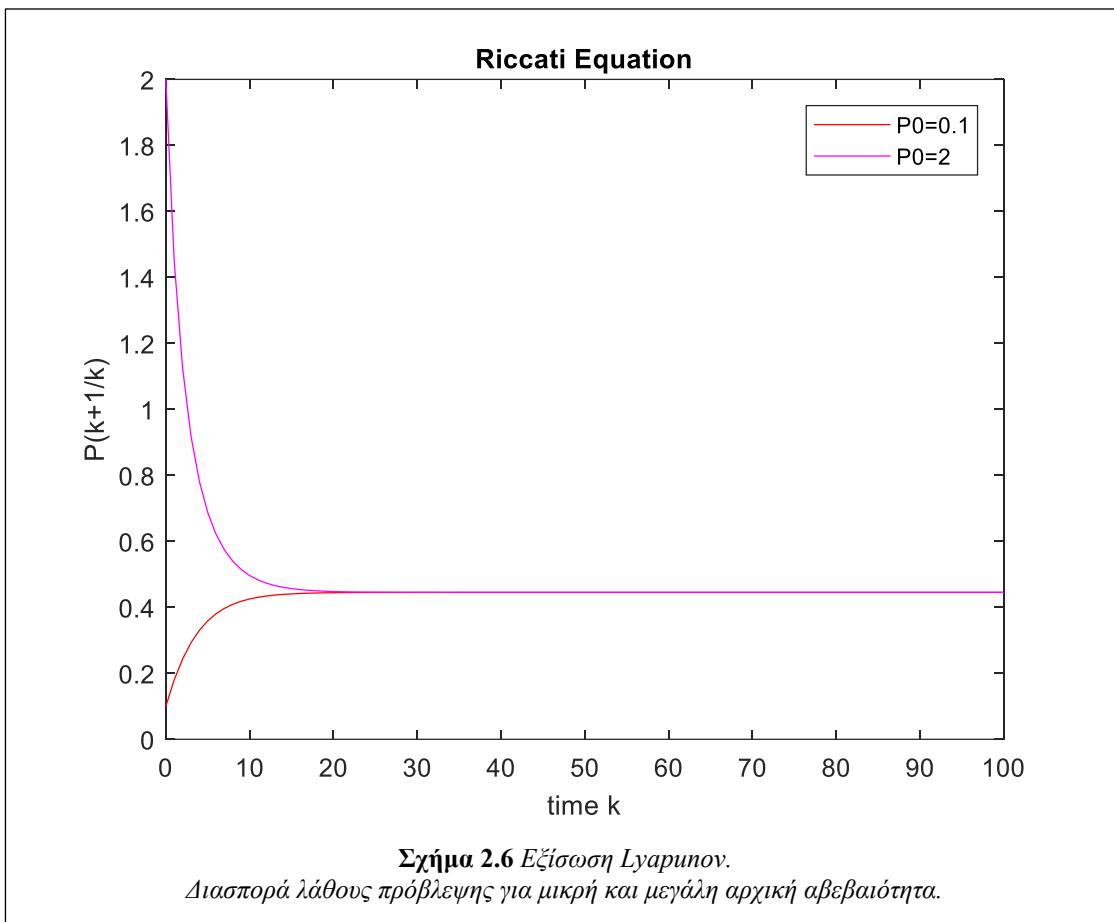
$$Q = 0.1$$

$$R = \infty \text{ (άπειρος θόρυβος μετρήσεων)}$$

Η λύση της εξίσωσης Lyapunov είναι:

$$P_p = 0.5263$$

Στο Σχήμα 2.6 παρουσιάζεται η διασπορά λάθους πρόβλεψης για μικρή αρχική αβεβαιότητα ( $P_0 = 0.1$ ) και για μεγάλη αρχική αβεβαιότητα ( $P_0 = 2$ ).



### Παρατήρηση 1.

Η διασπορά λάθους πρόβλεψης τείνει στη διασπορά λάθους εκτίμησης στη μόνιμη κατάσταση ανεξάρτητα από την αρχική αβεβαιότητα.

### Παρατήρηση 2.

Όταν η αρχική αβεβαιότητα είναι μικρή ( $P_0 = 0$ ), τότε η πρόβλεψη της κατάστασης γίνεται χειρότερη, όσο περνάει ο χρόνος και μέχρι τον χρόνο μόνιμης κατάστασης.

Όταν η αρχική αβεβαιότητα είναι μεγάλη ( $P_0 = 100$ ), τότε η πρόβλεψη της κατάστασης γίνεται καλύτερη, όσο περνάει ο χρόνος και μέχρι τον χρόνο μόνιμης κατάστασης.

### Παράδειγμα 7. Φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης.

Στο παράδειγμα αυτό θεωρείται ένα βαθμωτό χρονικά αμετάβλητο μοντέλο, χωρίς είσοδο, με παραμέτρους:

$$F = 0.8$$

$$H = 1$$

$$Q = 0.2$$

$$R = 0.1$$

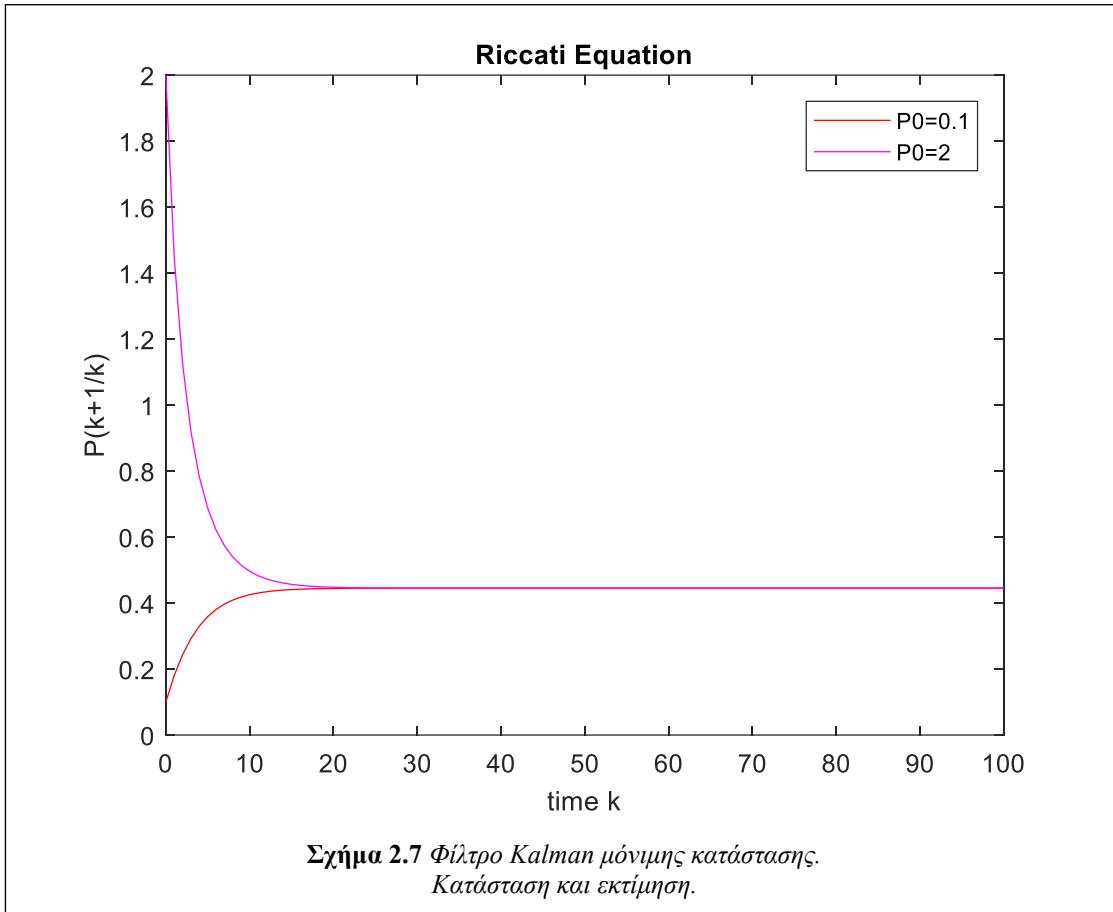
και αρχική συνθήκη

$$x_0 = 1$$

Η διασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση είναι  $P_p = 0.2455$

Οι συντελεστές του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης:  $A = 0.2316$  και  $K = 0.7105$ .

Στο Σχήμα 2.7 παρουσιάζονται η κατάσταση και η εκτίμηση.



#### Παράδειγμα 8. Εναισθησία φίλτρου Kalman.

Στο παράδειγμα αυτό θεωρείται ένα βαθμωτό χρονικά αμετάβλητο μοντέλο, χωρίς είσοδο, με παραμέτρους:

$$F = 0.75$$

$$H = 1$$

$$Q = 2$$

$$R = 1$$

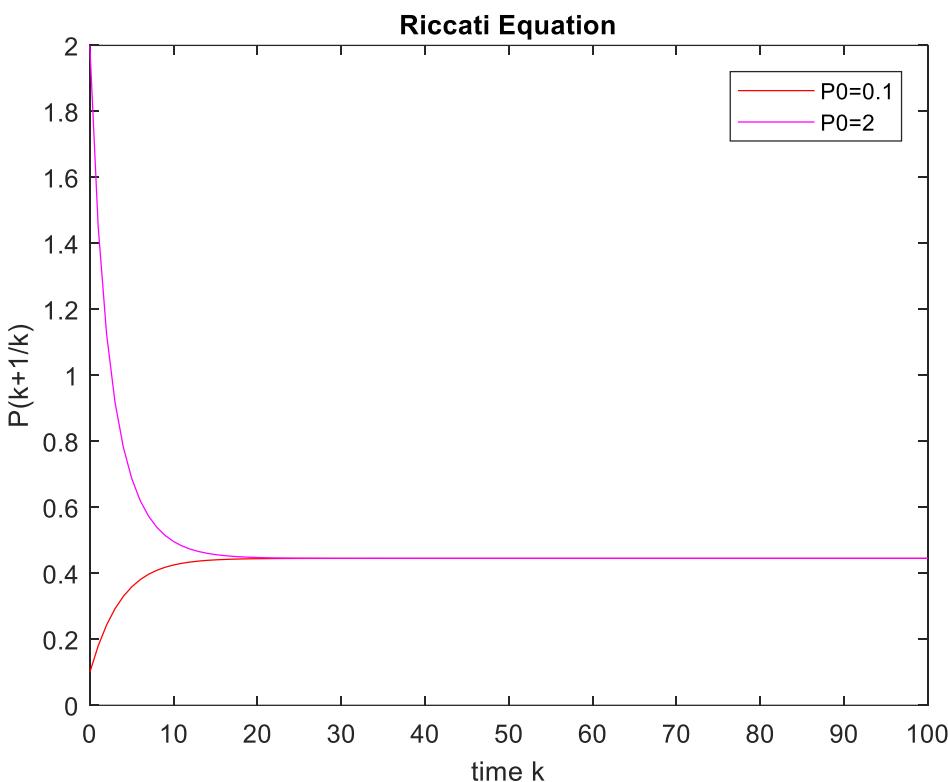
και αρχικές συνθήκες

$$x_0 = 0$$

$$P_0 = 1$$

Θεωρείται, επίσης, μια μεταβολή της τάξης του 10% στον πίνακα εξόδου  $H$ , δηλαδή  $H = 1.1$ . Θα διερευνηθεί η εναισθησία του φίλτρου Kalman στη μεταβολή αυτή.

Η διασπορά λάθους εκτίμησης εκφράζει την απόδοση του φίλτρου. Επομένως, η διαφορά των διασπορών λάθους εκτίμησης, η οποία οφείλεται σε μεταβολή παραμέτρων, εκφράζει την εναισθησία του φίλτρου στις μεταβολές αυτές.



**Σχήμα 2.8** Εναισθησία φίλτρου Kalman.  
Διασπορά λάθους εκτίμησης για μεταβολή του πίνακα εξόδου.

Στο Σχήμα 2.8 παρουσιάζεται η διασπορά λάθους εκτίμησης για  $H = 1$  και  $H = 1.1$ . Η διαφορά των διασπορών λάθους εκτίμησης διατηρείται σταθερή και σε σημαντικά επίπεδα, όσο περνάει ο χρόνος. Το φίλτρο Kalman είναι αρκετά εναίσθητο στη μεταβολή του πίνακα εξόδου.

#### Παράδειγμα 9. Φίλτρο Kalman με ακριβείς μετρήσεις.

Στο παράδειγμα αυτό θεωρείται ένα βαθμωτό χρονικά αμετάβλητο μοντέλο, χωρίς είσοδο, με παραμέτρους:

$$F = 0.9$$

$$H = 1$$

$$Q = 1$$

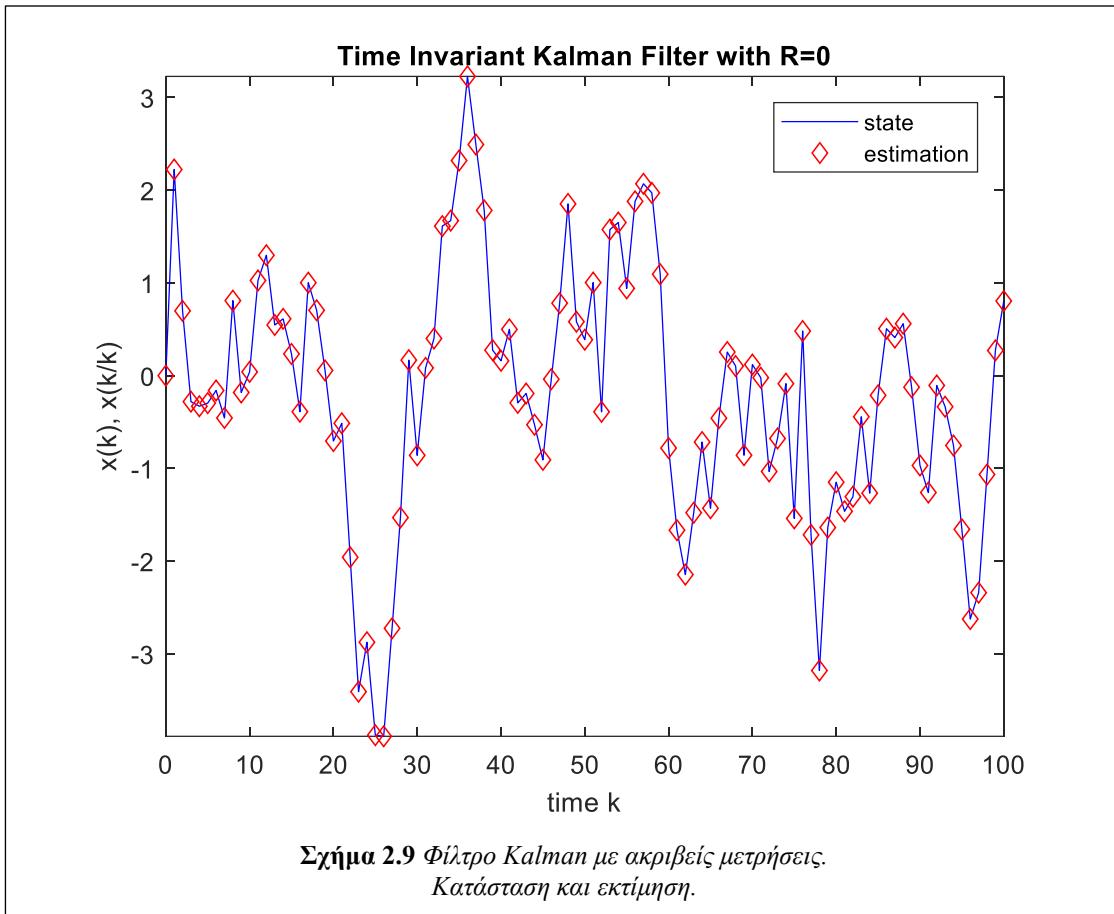
$$R = 0$$

και αρχικές συνθήκες:

$$x_0 = 0$$

$$P_0 = 1$$

Στην περίπτωση αυτή ο θόρυβος μετρήσεων είναι μηδέν ( $R = 0$ ), γεγονός που σημαίνει ότι όλες οι μετρήσεις είναι ακριβείς. Από τις εξισώσεις του φίλτρου Kalman προκύπτει ότι η διασπορά λάθους εκτίμησης είναι  $P(k/k) = 0$ . Στο Σχήμα 2.9 παρουσιάζονται η κατάσταση και η εκτίμηση, οι οποίες είναι ίσες μεταξύ τους.



## 2.6 Φίλτρα Kalman σε προγραμματιστικό περιβάλλον

Η συνάρτηση `tvkfiteration` παράγει την εκτίμηση και τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης, την πρόβλεψη και τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης, καθώς και το κέρδος για μία επανάληψη για το χρονικά μεταβαλόμενο φίλτρο Kalman.

Η συνάρτηση `tvkfiteration` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $F(k+1, k), H(k), Q(k), R(k), B(k)$ , την είσοδο  $u(k)$ , την προηγούμενη πρόβλεψη  $x(k/k-1)$ , την προηγούμενη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης  $P(k/k-1)$  και την παρούσα μέτρηση  $z(k)$ . Η συνάρτηση έχει εξόδους την εκτίμηση  $x(k/k)$ , τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης  $P(k/k)$ , την πρόβλεψη  $x(k+1/k)$ , τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης  $P(k+1/k)$  και το κέρδος  $K(k)$ .

Έτσι, για παράδειγμα, για την παραγωγή της εκτίμησης και της πρόβλεψης για το βαθμωτό μοντέλο με παραμέτρους  $F(k+1, k) = H(k) = Q(k) = R(k) = B(k) = 1$ , με είσοδο  $u(k) = 10$ , με προηγούμενη πρόβλεψη  $x(k/k-1) = 1$ , προηγούμενη διασπορά λάθους πρόβλεψης  $P(k/k-1) = 1$  και με την παρούσα μέτρηση  $z(k) = 2$  απαιτείται η κλήση:

```
F=1;
H=1;
Q=1;
R=1;
B=1;
u=10;
xp=1;
pp=1;
z=2;
```

```
[xe,pe,xp,pp,g]=tvkfiteration(F,H,Q,R,B,u,xp,pp,z)
```

```
function [xe,pe,xp,pp,g]=tvkfiteration(F,H,Q,R,B,u,xp,pp,z)
% TIME VARYING KALMAN FILTER
% ONE ITERATION
[n,m]=size(H');
g=pp*H'*inv(H*pp*H'+R);
xe=(eye(n)-g*H)*xp+g*z;
pe=(eye(n)-g*H)*pp;
xp=F*xp+B*u;
pp=Q+F*pe*F';
```

Η συνάρτηση `tvkfiteration` παράγει την εκτίμηση και τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης, την πρόβλεψη και τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης, καθώς και το κέρδος για μία επανάληψη για το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman.

Η συνάρτηση `tvkfiteration` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $F, H, Q, R, B$ , την είσοδο  $u(k)$ , την προηγούμενη πρόβλεψη  $x(k/k-1)$ , την προηγούμενη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης  $P(k/k-1)$  και την παρούσα μέτρηση  $z(k)$ . Η συνάρτηση έχει εξόδους την εκτίμηση  $x(k/k)$ , τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης  $P(k/k)$ , την πρόβλεψη  $x(k+1/k)$ , τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης  $P(k+1/k)$  και το κέρδος  $K(k)$ .

Έτσι, για παράδειγμα, για την παραγωγή της εκτίμησης και της πρόβλεψης για το βαθμωτό μοντέλο με παραμέτρους  $F = H = Q = R = B = 1$ , με είσοδο  $u(k) = 10$ , με προηγούμενη πρόβλεψη  $x(k/k-1) = 1$ , προηγούμενη διασπορά λάθους πρόβλεψης  $P(k/k-1) = 1$  και με την παρούσα μέτρηση  $z(k) = 2$  απαιτείται η κλήση:

```
F=1;
H=1;
Q=1;
R=1;
B=1;
u=10;
xp=1;
pp=1;
z=2;
[xe,pe,xp,pp,g]=tvkfiteration(F,H,Q,R,B,u,xp,pp,z)
```

```
function [xe,pe,xp,pp,g]=tikfiteration(F,H,Q,R,B,u,xp,pp,z)
% TIME INVARIANT KALMAN FILTER
% ONE ITERATION
[n,m]=size(H');
g=pp*H'*inv(H*pp*H'+R);
xe=(eye(n)-g*H)*xp+g*z;
pe=(eye(n)-g*H)*pp;
xp=F*xp+B*u;
pp=Q+F*pe*F';
```

Η συνάρτηση `sskfiteration` παράγει την εκτίμηση για μία επανάληψη για το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης.

Η συνάρτηση `sskfiteration` έχει εισόδους τους συντελεστές του φίλτρου  $A = [I - KH]F$ ,  $C = [I - KH]B$  και  $K$ , την είσοδο  $u(k)$ , την προηγούμενη εκτίμηση  $x(k/k)$  και την παρούσα μέτρηση  $z(k)$ . Η συνάρτηση έχει έξοδο την εκτίμηση  $x(k+1/k+1)$ .

Έτσι, για παράδειγμα, για την παραγωγή της εκτίμησης για το βαθμωτό μοντέλο με παραμέτρους  $A = 0.38197, C = 0.38197, K = 0.61803$ , με είσοδο  $u(k) = 10$  με προηγούμενη εκτίμηση  $x(k/k) = 1$  και με την

παρούσα μέτρηση  $z(k)=2$  απαιτείται η κλήση:

```
a=0.38197;
c=0.38197;
g=0.61803;
u=10;
xe=1;
z=2;
[xe]=sskfiteration(a,c,g,u,xe,z)
```

```
function [xe]=sskfiteration(a,c,g,u,xe,z)
% STEADY STATE KALMAN FILTER
% ONE ITERATION
xe=a*xe+c*u+g*z;
```

Η συνάρτηση firsskf1 παράγει την εκτίμηση για μία χρονική στιγμή για την FIR μορφή του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης χωρίς είσοδο.

Η συνάρτηση firsskf1 έχει εισόδους τους συντελεστές του φίλτρου  $A = [I - KH]F$  και  $K$ , το πλήθος  $\ell$  των απαιτούμενων μετρήσεων και το σύνολο των απαιτούμενων μετρήσεων  $Z = [z(k-(\ell-1)), \dots, z(k-1), z(k)]$ . Η συνάρτηση έχει έξοδο την εκτίμηση  $x(k/k)$ .

Έτσι, για παράδειγμα, για την παραγωγή της εκτίμησης για το βαθμωτό μοντέλο με παραμέτρους  $A = 0.38197, K = 0.61803$ , με  $\ell = 4$  και με μετρήσεις  $Z = [10, 11, 12, 13]$  απαιτείται η κλήση:

```
a=0.38197;
g=0.61803;
l=4;
Z=[10,11,12,13];
[xe]=firsskf1(a,g,l,Z)
```

```
function [xe]=firsskf1(a,g,l,Z)
% FIR STEADY STATE KALMAN FILTER
% ONE MOMENT
xe=0;
for i=1:l
    xe=xe+a^(l-i)*g*Z(i);
end;
```

Η συνάρτηση tikf παράγει την εκτίμηση και τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης, την πρόβλεψη και τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης, καθώς και το κέρδος για ένα χρονικό διάστημα για το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman.

Η συνάρτηση tikf έχει εισόδους τις παραμέτρους  $F, H, Q, R, S$ , τις εισόδους  $[u(0), u(1), \dots, u(k \text{ max})]$  στο διάστημα  $[0 : k \text{ max}]$ , τις αρχικές καταστάσεις  $x_0$  και  $P_0$ , τη μέγιστη χρονική στιγμή  $k \text{ max}$  και τις μετρήσεις  $[z(0), z(1), \dots, z(k \text{ max}-1)]$  στο διάστημα  $[0 : k \text{ max}-1]$ . Η συνάρτηση έχει εξόδους την εκτίμηση  $[x(0/0), x(1/1), \dots, x(k \text{ max}-1/k \text{ max}-1)]$  και τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης  $[P(0/0), P(1/1), \dots, P(k \text{ max}-1/k \text{ max}-1)]$  στο διάστημα  $[0 : k \text{ max}-1]$ , την πρόβλεψη  $[x(0/-1), x(1/0), x(2/1), \dots, x(k \text{ max}/k \text{ max}-1)]$  και τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης  $[P(0/-1), P(1/0), P(2/1), \dots, P(k \text{ max}/k \text{ max}-1)]$  στο διάστημα  $[0 : k \text{ max}-1]$  και το κέρδος  $[K(0), K(1), \dots, K(k \text{ max}-1)]$  στο διάστημα  $[0 : k \text{ max}-1]$ .

Έτσι, για παράδειγμα, για την παραγωγή της εκτίμησης και της πρόβλεψης για το βαθμωτό μοντέλο με παραμέτρους  $F, H, Q, R = B = 1$ , με εισόδους  $u(k) = \sin(k), k = 0, \dots, k \text{ max}$  και με αρχικές συνθήκες  $x_0 = 1$  και  $P_0 = 1$  απαιτείται η κλήση:

```
F=1;
```

```

H=1;
Q=1;
R=1;
B=1;
kmax=99;
U=sin([0:kmax]);
x0=1;
p0=1;
[X,Z,tk]=linearmodel(F,H,Q,R,B,U,x0,kmax);
[XE,PE,XP,PP,G]=tikf(F,H,Q,R,B,U,x0,p0,kmax,Z)

```

```

function [XE,PE,XP,PP,G]=tikf(F,H,Q,R,B,U,x0,p0,kmax,Z)
% TIME INVARIANT KALMAN FILTER
[n,m]=size(H');
xp=x0;
pp=p0;
XE=[];
PE=[];
G=[];
XP=[xp];
PP=[pp];
for k=1:kmax
    g=pp*H'*inv(H*pp*H'+R);
    xe=(eye(n)-g*H)*xp+g*Z(:,k:k);
    pe=(eye(n)-g*H)*pp;
    xp=F*xe+B*U(:,k:k);
    pp=Q+F*pe*F';
    G=[G g];
    XE=[XE xe];
    PE=[PE pe];
    XP=[XP xp];
    PP=[PP pp];
end;

```

## 2.7 Ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το κέρδος του φίλτρου Kalman στην περίπτωση του άπειρου θορύβου μετρήσεων  $R = \infty$ .
2. Να αποδείξετε τις εξισώσεις του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης Steady State Kalman Filter (SSKF).
3. Να υπολογίσετε τις επαναληπτικές εξισώσεις του φίλτρου Kalman για το βαθμωτό ( $n = 1$  και  $m = 1$ ) χρονικά αμετάβλητο μοντέλο, όπου ισχύουν όλες οι υποθέσεις, με παραμέτρους:  $F = 1, H = 1, Q = 0, R = 1$ .
4. Να εξηγήσετε τι συμβαίνει στο φίλτρο Kalman, όταν η αρχική αβεβαιότητα είναι πολύ μικρή ( $P_0 = 0$ ).
5. Να υπολογίσετε  $x(2/1)$  και  $P(2/1)$  για το φίλτρο Kalman με παραμέτρους:  $F = 0.9, H = 1, Q = 2, R = 1$  και αρχικές συνθήκες  $x_0 = 0, P_0 = 1$ .
6. Να υπολογίσετε  $x(2/1)$  και  $P(2/1)$  για το φίλτρο Kalman με παραμέτρους:  $F = 0.9, H = 1, Q = 2, R = 0$  και αρχικές συνθήκες  $x_0 = 0, P_0 = 1$ .
7. Να γράψετε συνάρτηση για το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman για το βαθμωτό μοντέλο, όπου  $n = 1$  και  $m = 1$ , με παραμέτρους χρονικά αμετάβλητες.

**function** [XE, PE]=tikf11 (f, h, q, r, B, u, x0, p0, kmax, Z)

- Να γράψετε πρόγραμμα για να υλοποιήσετε το φίλτρο Kalman με παραμέτρους:  $F = 0.9, H = 1, Q = 2, R = 1, B = 1$  και αρχικές συνθήκες  $x_0 = 0, P_0 = 0$ .
- Να υπολογίσετε την εκτίμηση  $x(k/k)$  της κατάστασης  $x(k)$  και τη διασπορά λάθους εκτίμησης  $P(k/k)$  τις χρονικές στιγμές  $k = 0, 1, \dots, 99$ .
- Να σχεδιάσετε την κατάσταση  $x(k)$  και την εκτίμηση  $x(k/k)$  τις χρονικές στιγμές  $k = 0, 1, \dots, 99$ .
- Να σχεδιάσετε τη διασπορά λάθους εκτίμησης  $P(k/k)$  τις χρονικές στιγμές  $k = 0, 1, \dots, 99$ .

8. Να γράψετε συνάρτηση για την επίλυση της εξίσωσης Riccati για το βαθμωτό μοντέλο, όπου  $n = 1$  και  $m = 1$

**function** [pp]=re11 (f, h, q, r)

- Να γράψετε πρόγραμμα για να υπολογίσετε τη λύση της εξίσωσης Riccati που προκύπτει από το φίλτρο Kalman με παραμέτρους  $F = 0.9, H = 1, Q = 2, R = 1$ .

9. Να γράψετε συνάρτηση για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov για το βαθμωτό μοντέλο, όπου  $n = 1$ .

**function** [pp]=le11 (f, q)

- Να γράψετε πρόγραμμα για να υπολογίσετε τη λύση της εξίσωσης Lyapunov που προκύπτει από το φίλτρο Kalman με παραμέτρους  $F = 0.9, Q = 2$ .

10. Να γράψετε συνάρτηση για το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης για το βαθμωτό μοντέλο, όπου  $n = 1$  και  $m = 1$  χωρίς είσοδο.

**function** [XE]=sskf11 (a, g, x0, kmax, Z)

- Να γράψετε πρόγραμμα για να υπολογίσετε τους συντελεστές του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης με παραμέτρους  $F = 0.9, H = 1, Q = 2, R = 1$  και να υλοποιήσετε το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης με παραμέτρους με αρχική συνθήκη  $x_0 = 1$ .
- Να υπολογίσετε την εκτίμηση  $x(k/k)$  της κατάστασης  $x(k)$  τις χρονικές στιγμές  $k = 0, 1, \dots, 99$ .
- Να σχεδιάσετε την κατάσταση  $x(k)$  και την εκτίμηση  $x(k/k)$  τις χρονικές στιγμές  $k = 0, 1, \dots, 99$ .

## 2.8 Περίληψη

Στο χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman, του λάχιστον ένας από τους πίνακες του μοντέλου είναι χρονικά μεταβαλλόμενος.

Στο χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman, όλοι οι πίνακες του μοντέλου είναι χρονικά αμετάβλητοι.

Στη μόνιμη κατάσταση (steady state):

- η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης τείνει σε μία σταθερή τιμή που είναι μοναδική (unique) και καλείται συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση,
- η συνδιασπορά λάθους εκτίμησης τείνει σε μία σταθερή τιμή που είναι μοναδική (unique) και καλείται συνδιασπορά λάθους εκτίμησης στη μόνιμη κατάσταση,
- το κέρδος τείνει σε μία σταθερή τιμή που καλείται κέρδος στη μόνιμη κατάσταση.

Η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση υπολογίζεται από την επίλυση της εξίσωσης Riccati.

Στην περίπτωση του άπειρου θορύβου μετρήσεων, προκύπτει η εξίσωση Lyapunov, ως ειδική μορφή της εξίσωσης Riccati.

Αν το μοντέλο είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, τότε το φίλτρο τείνει σε μόνιμη κατάσταση.

Στη μόνιμη κατάσταση, προκύπτει το φίλτρο Kalman Μόνιμης Κατάστασης (Steady State Kalman Filter), η υλοποίηση του οποίου απαιτεί τη γνώση της συνδιασποράς λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση για τον υπολογισμό των συντελεστών του φίλτρου, οι οποίοι μπορούν να υπολογιστούν εκ των προτέρων (off-line) επιλύοντας την εξίσωση Riccati.

Στην FIR μορφή του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης απαιτείται η γνώση των συντελεστών του φίλτρου, οι οποίοι υπολογίζονται εκ των προτέρων (off-line) με την επίλυση της εξίσωσης Riccati και τη γνώση ενός υποσυνόλου μετρήσεων, το πλήθος του οποίου είναι η τάξη (order) του φίλτρου και υπολογίζεται εκ των προτέρων (off-line).

Μπορείτε να ακούσετε την περίληψη με τον Ήχο 2.1.



Ήχος 2.1 Περίληψη – Κεφάλαιο 2.

## **2.9 Κριτήριο Αξιολόγησης**

Απαντήστε με Σωστό ή Λάθος.

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 1**

Το φίλτρο Kalman είναι επαναληπτικός αλγόριθμος.

---

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 2**

(2/1) σημαίνει εκτίμηση τη χρονική στιγμή 1.

---

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 3**

(3/2) σημαίνει πρόβλεψη τη χρονική στιγμή 3, δεδομένων των μετρήσεων μέχρι και τη χρονική στιγμή 2.

---

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 4**

Το κέρδος  $K(k)$  του φίλτρου Kalman είναι πίνακας διαστάσεων  $n \times n$ .

---

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 5**

Όλες οι παράμετροι του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman είναι σταθερές.

---

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 6**

Όταν ο θόρυβος των μετρήσεων είναι άπειρος, τότε το κέρδος του φίλτρου Kalman είναι άπειρο

---

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 7**

Η εκτίμηση είναι ίση με την πρόβλεψη, όταν ο πίνακας μεταφοράς είναι ο μοναδιαίος πίνακας και η είσοδος είναι μηδενική

---

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 8**

Για κάθε γραμμικό μοντέλο υπάρχει φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης.

---

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 9**

Στη μόνιμη κατάσταση το κέρδος του φίλτρου Kalman παραμένει σταθερό.

---

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 10**

Οι συντελεστές του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης εξαρτώνται από όλες τις παραμέτρους του μοντέλου.

Θα βρείτε την Απάντηση στο Κριτήριο Αξιολόγησης στο Παράρτημα A'.

Μπορείτε να κάνετε το Κριτήριο Αξιολόγησης με το Διαδραστικό Πρόγραμμα 2.1.



**Διαδραστικό Πρόγραμμα 2.1 Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 2.**

## 2.10 Εφαρμογή: Χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman για βαθμωτό γραμμικό μοντέλο

Η εφαρμογή παράγει την εκτίμηση και τη διασπορά λάθους εκτίμησης για το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman, για βαθμωτό μοντέλο χωρίς είσοδο.

Οι εξισώσεις του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman (Time Invariant Kalman Filter) είναι:

$$K(k) = \frac{HP(k/k-1)}{H^2P(k/k-1) + R}$$

$$x(k/k) = [1 - K(k)H]x(k/k-1) + K(k)z(k)$$

$$P(k/k) = [1 - K(k)H]P(k/k-1)$$

$$x(k+1/k) = Fx(k/k)$$

$$P(k+1/k) = Q + F^2P(k/k)$$

$$k = 0, 1, \dots$$

$$x(0/-1) = x_0$$

$$P(0/-1) = P_0$$

Η εφαρμογή έχει εισόδους:

- τις παραμέτρους του μοντέλου  $F, H, Q > 0, R > 0$ ,
- τις αρχικές συνθήκες  $x_0 = x(0/-1)$  και  $P_0 = P(0/-1)$ ,
- τις μετρήσεις  $Z = [z(0), z(1), \dots, z(L)]$ .

Η εφαρμογή έχει εξόδους:

- τις εκτιμήσεις  $XEST = [x(0/0), x(1/1), \dots, x(L/L)]$ ,
- τις διασπορές λάθους εκτίμησης  $PEST = [P(0/0), P(1/1), \dots, P(L/L)]$ .

Η εφαρμογή υλοποιείται με τη συνάρτηση tikfsm:

```
function [XEST, PEST]=tikfsm(F,H,Q,R,xpred0,ppred0,Z)

% Time Invariant Kalman Filter for Scalar Model

% scalar linear model (n=1, m=1) without input

% input
% model parameters F, H, Q>0, R>0
% initial conditions xpred0 = x(0/-1), ppred0 = p(0/-1)
% measurements Z = [z(0) z(1) ... z(L) ]

% output
% estimation XEST = [x(0/0) x(1/1) ... x(L/L) ]
% estimation error variance PEST = [P(0/0) P(1/1) ... P(L/L) ]

% noi: number of iterations (= number of measurements)
noi=length(Z);

% initial conditions
xpred=xpred0;
ppred=ppred0;
```

```
% Time Invariant Kalman Filter
% Time Invariant Kalman Filter iterations
XEST=[];
PEST=[];
for k=1:n
    z=Z(:,k:k);
    gain=(ppred*H)/((H^2)*ppred+R);
    xest=(1-gain*H)*xpred+gain*z;
    XEST=[XEST xest];
    pest=(1-gain*H)*ppred;
    PEST=[PEST pest];
    xpred=F*xest;
    ppred=Q+(F^2)*pest;
end;
```

Μπορείτε να εκτελέσετε την εφαρμογή με το Διαδραστικό Πρόγραμμα 2.2



**Διαδραστικό Πρόγραμμα 2.2** Χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman για βαθμωτό γραμμικό μοντέλο.

## **Βιβλιογραφία/Αναφορές**

- Anderson, B. D. O., Moore, J. B. (2005). *Optimal Filtering*. Dover Publications, New York.
- Higham, N.J., Knight, P.A. (1995). Matrix powers in finite precision arithmetic, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 16, no. 2, pp. 343–358.
- Ασημάκης, Ν. (2009). *Φίλτρα Kalman και Λαϊνιώτη*. Εκδόσεις ΑΠΑΚΥΝΘΟΣ.

## Κεφάλαιο 3 Αλγόριθμοι επίλυσης της εξίσωσης Riccati

### Σύνοψη

Στο κεφάλαιο παρουσιάζονται αλγόριθμοι για την επίλυση της εξίσωσης Riccati η οποία προκύπτει από το φίλτρο Kalman. Οι τύποι αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati είναι οι επαναληπτικοί αλγόριθμοι και οι αλγεβρικοί αλγόριθμοι. Παρουσιάζονται οι κλασικοί επαναληπτικοί αλγόριθμοι: ο επαναληπτικός ανά βήμα αλγόριθμος και ο επαναληπτικός αλγόριθμος διπλασιασμού (doubling algorithm). Παρουσιάζεται ο κλασικός αλγεβρικός αλγόριθμος. Δίνονται παραδείγματα επίλυσης της εξίσωσης Riccati.

### Προαπαιτούμενη γνώση

Φίλτρο Kalman, μόνιμη κατάσταση, εξίσωση Riccati, πίνακες.

### 3.1 Τύποι αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati

Για το χρονικά αμετάβλητο μοντέλο, όπου οι πίνακες  $F$ ,  $H$ ,  $Q$  και  $R$  είναι σταθεροί (χρονικά αμετάβλητοι), από τις εξισώσεις του φίλτρου Kalman προκύπτει η **εξίσωση Riccati (Riccati equation)**:

$$P(k+1/k) = Q + FP(k/k-1)F^T - FP(k/k-1)H^T \left[ HP(k/k-1)H^T + R \right]^{-1} HP(k/k-1)F^T \quad (3.1)$$

όπου  $Q \geq 0$ ,  $R \geq 0$  και  $P(k/k-1) \geq 0$ .

Για λόγους απλούστευσης, θεωρούμε ότι  $Q > 0$ ,  $R > 0$ ,  $P(k/k-1) > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$  και  $P(0/-1) = P_0 \geq 0$ .

Αν το μοντέλο είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (asymptotically stable), δηλαδή οι ιδιοτιμές (eigenvalues) του πίνακα  $F$  βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, τότε η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης συγκλίνει σε μία σταθερή τιμή  $P_p$ , η οποία είναι μοναδική (unique) και καλείται συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση. Το φίλτρο μπορεί να τείνει σε μόνιμη κατάσταση, ακόμη και όταν το μοντέλο δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση ικανοποιεί την **αλγεβρική εξίσωση Riccati**:

$$P_p = Q + FP_p F^T - FP_p H^T \left[ HP_p H^T + R \right]^{-1} HP_p F^T \quad (3.2)$$

όπου  $Q \geq 0$ ,  $R \geq 0$  και  $P_p \geq 0$ .

Για λόγους απλούστευσης, θεωρούμε ότι  $Q > 0$ ,  $R > 0$ ,  $P_p > 0$ .

Ο υπολογισμός της συνδιασποράς λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση μπορεί να επιτευχθεί με την επίλυση της εξίσωσης Riccati εκ των προτέρων (a priori), δηλαδή πριν την υλοποίηση του φίλτρου Kalman. Στη βιβλιογραφία [Anderson & Moore (2005), Assimakis, Lainiotis, Katsikas & Sanida (1997), Assimakis, Roulis & Lainiotis (2003), Lainiotis, Assimakis & Katsikas (1994), Lainiotis, Assimakis & Katsikas (1995), Ασημάκης (2009), Ασημάκης (2013)] υπάρχουν:

- επαναληπτικοί αλγόριθμοι
- αλγεβρικοί αλγόριθμοι

για την επίλυση της εξίσωσης Riccati.

### 3.2 Επαναληπτικοί αλγόριθμοι

#### 3.2.1 Ανά βήμα αλγόριθμος

Είναι γνωστό [Anderson & Moore (2005)] ότι η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης τείνει στη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση ανεξάρτητα από την αρχική αβεβαιότητα, δηλαδή ανεξάρτητα από την τιμή της αρχικής συνθήκης  $P(0/-1) = P_0$ . Στους επαναληπτικούς αλγορίθμους που παρουσιάζονται παρακάτω, θεωρείται μηδενική αρχική συνθήκη  $P(0/-1) = P_0 = 0$ .

Η εξίσωση Riccati για το φίλτρο Kalman είναι μία μη γραμμική επαναληπτική εξίσωση ως προς τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης:

$$P(k+1/k) = Q + FP(k/k-1)F^T - FP(k/k-1)H^T \left[ HP(k/k-1)H^T + R \right]^{-1} HP(k/k-1)F^T \quad (3.3)$$

για  $k=0,1,\dots$

με αρχική συνθήκη

$$P(0/-1) = P_0$$

έως ότου

$$\|P(k+1/k) - P(k/k-1)\| < \varepsilon \quad (3.4)$$

όπου το κριτήριο σύγκλισης  $\varepsilon$  είναι ένας πολύ μικρός θετικός αριθμός.

Τότε:

$$P_p = \lim_{k \rightarrow \infty} P(k+1/k) \quad (3.5)$$

Έτσι, προκύπτει ο κλασικός επαναληπτικός Ανά Βήμα Αλγόριθμος (Per Step Algorithm) για την επίλυση της εξίσωσης Riccati.

#### Ανά Βήμα Αλγόριθμος Per Step Algorithm

$$P(k+1/k) = Q + FP(k/k-1)F^T - FP(k/k-1)H^T \left[ HP(k/k-1)H^T + R \right]^{-1} HP(k/k-1)F^T$$

$k=0,1,\dots$

$$P(0/-1) = P_0$$

$$P_p = \lim_{k \rightarrow \infty} P(k+1/k)$$

### 3.2.2 Αλγόριθμος διπλασιασμού

Ο κλασικός επαναληπτικός **αλγόριθμος διπλασιασμού (doubling algorithm)** είναι ένας επαναληπτικός αλγόριθμος με χαρακτηριστικό ότι η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης υπολογίζεται σε κάθε επανάληψη σε χρονική στιγμή διπλάσια (doubling) της προηγούμενης.

Χρησιμοποιώντας τους πίνακες  $X(k)$  και  $Y(k)$  διαστάσεων  $n \times n$ , ορίζουμε:

$$P(k/k-1) = Y(k)X^{-1}(k) \quad (3.6)$$

με αρχικές συνθήκες

$$Y(0) = 0$$

και

$$X(0) = I,$$

αφού  $P(0/-1) = Y(0)X^{-1}(0) = 0$

Θέτοντας την (3.6) στην εξίσωση Riccati (3.1) προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$X(k+1) = (F^{-T})X(k) + (F^{-T}H^T R^{-1}H)Y(k)$$

$$Y(k+1) = (QF^{-T})X(k) + (F + QF^{-T}H^T R^{-1}H)Y(k)$$

οι οποίες γράφονται με τη χρήση πινάκων:

$$\begin{bmatrix} X(k+1) \\ Y(k+1) \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} X(k) \\ Y(k) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

με

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

χρησιμοποιώντας του πίνακα  $\Phi$  διαστάσεων  $2n \times 2n$ :

$$\Phi = \begin{bmatrix} a^{-1} & a^{-1}b \\ ca^{-1} & a^T + ca^{-1}b \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

όπου

$$a = F^T \quad (3.10)$$

$$b = H^T R^{-1} H \quad (3.11)$$

$$c = Q \quad (3.12)$$

Η ύπαρξη του αντίστροφου πίνακα που εμφανίζεται στον πίνακα  $\Phi$  εξασφαλίζεται στην περίπτωση που ο πίνακας  $R$  είναι θετικά ορισμένος ( $R > 0$ ), οπότε είναι αντιστρέψιμος και ο πίνακας μεταφοράς  $F$  είναι αντιστρέψιμος.

Ο πίνακας  $\Phi$  είναι συμπλεκτικός πίνακας (symplectic matrix).

Σημειώνεται ότι ο πίνακας  $A$  διαστάσεων  $2n \times 2n$  είναι συμπλεκτικός (symplectic) αν:

$$A^T JA = J,$$

όπου

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

και  $I$  ο μοναδιαίος πίνακας διαστάσεων  $n \times n$ .

Ένας συμπλεκτικός πίνακας της μορφής  $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$  έχει την ιδιότητα  $A_{22} = A_{11}^{-T} + A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ .

Κάθε δύναμη ενός συμπλεκτικού πίνακα είναι και αυτός συμπλεκτικός πίνακας.

Από την (3.7) είναι προφανές ότι ισχύει:

$$\begin{bmatrix} X(k) \\ Y(k) \end{bmatrix} = \Phi^k \begin{bmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

οπότε:

$$\begin{bmatrix} X(2^k) \\ Y(2^k) \end{bmatrix} = \Phi^{2^k} \begin{bmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Στη συνέχεια ορίζουμε:

$$\Phi^{2^k} = \begin{bmatrix} a^{-1}(k) & a^{-1}(k)b(k) \\ c(k)a^{-1}(k) & a^T(k) + c(k)a^{-1}(k)b(k) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

χρησιμοποιώντας τους πίνακες  $a(k)$ ,  $b(k)$  και  $c(k)$  διαστάσεων  $n \times n$ , με αρχικές συνθήκες:

$$a(0) = a = F^T \quad (3.16)$$

$$b(0) = b = H^T R^{-1} H \quad (3.17)$$

$$c(0) = c = Q \quad (3.18)$$

Από τη σχέση:

$$\Phi^{2^{k+1}} = \Phi^{2^k} \Phi^{2^k} \quad (3.19)$$

προκύπτουν οι επαναληπτικές σχέσεις:

$$a(k+1) = a(k) [I + b(k)c(k)]^{-1} a(k) \quad (3.20)$$

$$b(k+1) = b(k) + a(k) [I + b(k)c(k)]^{-1} b(k) a^T(k) \quad (3.21)$$

$$c(k+1) = c(k) + a^T(k)c(k) [I + b(k)c(k)]^{-1} a(k), \quad (3.22)$$

όπου οι πίνακες  $b(k)$  και  $c(k)$  είναι συμμετρικοί.

Από τις σχέσεις (3.8), (3.14) και (3.15) έχουμε:

$$Y(2^k)X^{-1}(2^k) = c(k), \quad (3.23)$$

οπότε από τη σχέση (3.6) έχουμε:

$$c(k) = P(2^k / 2^k - 1) \quad (3.24)$$

Έτσι, προκύπτει ο κλασικός επαναληπτικός Αλγόριθμος Διπλασιασμού (Doubling Algorithm) για την επίλυση της εξίσωσης Riccati.

<b>Αλγόριθμος Διπλασιασμού</b> <b>Doubling Algorithm</b>
$a(k+1) = a(k) [I + b(k)c(k)]^{-1} a(k)$
$b(k+1) = b(k) + a(k) [I + b(k)c(k)]^{-1} b(k) a^T(k)$
$c(k+1) = c(k) + a^T(k)c(k) [I + b(k)c(k)]^{-1} a(k)$
$k = 1, 2, \dots$
$a(1) = F^T$
$b(1) = H^T R^{-1} H$
$c(1) = Q$
$P_p = \lim_{k \rightarrow \infty} c(k)$

Η απόδειξη των εξισώσεων του Αλγορίθμου Διπλασιασμού (Doubling Algorithm) για την επίλυση της εξίσωσης Riccati βρίσκεται στο Παράρτημα Γ'.

### 3.3 Αλγεβρικός αλγόριθμος

Στη βαθμωτή περίπτωση όπου  $n=1$ , θέτοντας  $F=f$ ,  $H=h$ ,  $Q=q$ ,  $R=r$ ,  $P_p=p$ , η αλγεβρική εξίσωση Riccati γράφεται:

$$p = q + f^2 p - \frac{h^2 f^2 p^2}{h^2 p + r}$$

όπου  $q \geq 0$ ,  $r \geq 0$  και  $p \geq 0$  ως διασπορές και  $h^2 p + r > 0$ .

Για λόγους απλούστευσης, θεωρούμε ότι  $q > 0$ ,  $r > 0$ ,  $p > 0$  και  $h \neq 0$ .

Τότε προκύπτει η βαθμωτή εξίσωση Riccati:

$$h^2 p^2 + ((1-f^2)r - qh^2)p - qr = 0 \quad (3.25)$$

Η εξίσωση είναι δευτεροβάθμια.

$$\text{Η διακρίνουσα είναι } \Delta = ((1-f^2)r - qh^2)^2 + 4h^2qr > 0$$

και η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις με αρνητικό γινόμενο  $-\frac{qr}{h^2} < 0$ .

Οπότε η μοναδική θετική λύση της εξίσωσης είναι:

$$p = \frac{-((1-f^2)r - qh^2) + \sqrt{((1-f^2)r - qh^2)^2 + 4h^2qr}}{2h^2} \quad (3.26)$$

**Παράδειγμα 1. Εξίσωση Riccati για βαθμού μοντέλο.**

$$f = \frac{1}{2}$$

$$h = 1$$

$$q = 1$$

$$r = 2$$

Από την αλγεβρική εξίσωση Riccati

$$p = 1 + \frac{1}{4}p - \frac{\frac{1}{4}p^2}{p+2}$$

προκύπτει:

$$p^2 + \frac{1}{2}p - 2 = 0$$

Η λύση της εξίσωσης Riccati είναι:

$$p = \frac{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{33}{4}}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4} = 1.1861$$

Στην περίπτωση των πινάκων, η εξίσωση Riccati αντιστοιχεί σε ένα σύστημα  $\frac{n^2+n}{2}$  αλγεβρικών μη γραμμικών εξισώσεων με  $\frac{n^2+n}{2}$  αγνώστους, γιατί ο πίνακας  $P_p$  είναι συμμετρικός.

Από τις παραμέτρους του μοντέλου, ορίζεται ο συμπλεκτικός (symplectic) πίνακας  $\Phi$  διαστάσεων  $2n \times 2n$ :

$$\Phi = \begin{bmatrix} a^{-1} & a^{-1}b \\ ca^{-1} & a^T + ca^{-1}b \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

όπου

$$a = F^T \quad (3.28)$$

$$b = H^T R^{-1} H \quad (3.29)$$

$$c = Q \quad (3.30)$$

Η ύπαρξη του αντίστροφου πίνακα που εμφανίζονται στον πίνακα  $\Phi$  εξασφαλίζεται στην περίπτωση που ο πίνακας  $R$  είναι αντιστρέψιμος και ο πίνακας μεταφοράς  $F$  είναι αντιστρέψιμος.

Ο πίνακας  $\Phi$  είναι συμπλεκτικός πίνακας (symplectic matrix). Κάθε συμπλεκτικός πίνακας έχει ιδιοτιμές που εμφανίζονται σε ζεύγη αντιστρόφων ιδιοτιμών. Επομένως, ο πίνακας  $\Phi$  έχει ιδιοτιμές που εμφανίζονται σε ζεύγη αντιστρόφων ιδιοτιμών και μπορεί να γραφτεί ως:

$$\Phi = WLW^{-1} \quad (3.31)$$

όπου

-  $L$  είναι διαγώνιος πίνακας που περιέχει τις ιδιοτιμές του  $\Phi$ , δηλαδή έχει τη μορφή:

$$L = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

με  $\Lambda$  διαγώνιος πίνακας με όλες τις ιδιοτιμές του  $\Phi$  που βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου

-  $W$  είναι ο πίνακας που περιέχει τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του  $\Phi$

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Τότε η λύση της εξίσωσης Riccati, δηλαδή η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση, είναι:

$$P_p = W_{21}W_{11}^{-1} \quad (3.34)$$

Έτσι, προκύπτει ο κλασικός Αλγεβρικός Αλγόριθμος (Algebraic Algorithm) για την επίλυση της εξίσωσης Riccati.

<b>Αλγεβρικός Αλγόριθμος Algebraic Algorithm</b>
$\Phi = \begin{bmatrix} a^{-1} & a^{-1}b \\ ca^{-1} & a^T + ca^{-1}b \end{bmatrix}$
$a = F^T$
$b = H^T R^{-1} H$
$c = Q$
$\Phi = WLW^{-1} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}^{-1}$
$P_p = W_{21}W_{11}^{-1}$

### 3.4 Επίλυση της εξίσωσης Riccati σε προγραμματιστικό περιβάλλον

Η συνάρτηση `repса` υπολογίζει τη λύση της εξίσωσης Riccati χρησιμοποιώντας τον ανά βήμα αλγόριθμο. Η συνάρτηση `repса` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $F, H, Q, R$  και το κριτήριο σύγκλισης και εξόδους τη λύση της εξίσωσης Riccati και το πλήθος των επαναλήψεων.  
Προσοχή: η συνάρτηση χρησιμοποιεί μηδενική αρχική συνθήκη.

Για παράδειγμα, για την επίλυση της εξίσωσης Riccati με παραμέτρους  $F = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.7 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$ ,  $H = [1 \ 1]$ ,

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $R = 1$  και κριτήριο σύγκλισης  $\varepsilon = 10^{-3}$  απαιτείται η κλήση:

```

F=[-0.9 0.7
   -0.3 0.1];
H=[1 1];
Q=[1 0
   0 3];
R=1;
[P,iterations]=repса(F,H,Q,R,0.001)

```

```

function [P,iterations]=repsa(F,H,Q,R,epsilon)
% RICCATI EQUATION
% Per Step Algorithm
k=0;
p=0;
k=k+1;
p1=Q+F*p*F'-F*p*H'*inv(H*p*H'+R)*H*p*F';
d=p1-p;
p=p1;
while norm(d)>epsilon
    k=k+1;
    p1=Q+F*p*F'-F*p*H'*inv(H*p*H'+R)*H*p*F';
    d=p1-p;
    p=p1;
end
P=p;
iterations=k;

```

Η συνάρτηση `reda` υπολογίζει τη λύση της εξίσωσης Riccati χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο διπλασιασμού.

Η συνάρτηση `reda` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $F, H, Q, R$  και το κριτήριο σύγκλισης και εξόδους τη λύση της εξίσωσης Riccati και το πλήθος των επαναλήψεων.

Για παράδειγμα, για την επίλυση της εξίσωσης Riccati με παραμέτρους  $F = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.7 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$ ,  $H = [1 \ 1]$ ,

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $R = 1$  και κριτήριο σύγκλισης  $\varepsilon = 10^{-3}$  απαιτείται η κλήση:

```

F=[-0.9 0.7
   -0.3 0.1];
H=[1 1];
Q=[1 0
   0 3];
R=1;
[P,iterations]=reda(F,H,Q,R,0.001)

```

```

function [P,iterations]=reda(F,H,Q,R,epsilon)
% RICCATI EQUATION
% Doubling Algorithm
n=size(F,1);
mon=eye(n);
k=1;
a=F';
b=H'*inv(R)*H;
c=Q;
k=k+1;
a1=a*inv(mon+b*c)*a;
b1=b+a*inv(mon+b*c)*b*a';
c1=c+a'*c*inv(mon+b*c)*a;
d=c1-c;
a=a1;
b=b1;
c=c1;
while norm(d)>epsilon
    k=k+1;
    a1=a*inv(mon+b*c)*a;
    b1=b+a*inv(mon+b*c)*b*a';

```

```

c1=c+a'*c*inv (mon+b*c)*a;
d=c1-c;
a=a1;
b=b1;
c=c1;
end
P=c;
iterations=k;

```

Η συνάρτηση `realg` υπολογίζει τη λύση της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati χρησιμοποιώντας τον αλγεβρικό αλγόριθμο.

Η συνάρτηση `realg` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $F, H, Q, R$  και έξοδο τη λύση της εξίσωσης Riccati.

Επίσης, για παράδειγμα, για την επίλυση της εξίσωσης Riccati με παραμέτρους  $F = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.7 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$ ,  $H = [1 \ 1]$

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $R = 1$  απαιτείται η κλήση:

```

F=[-0.9 0.7
   -0.3 0.1];
H=[1 1];
Q=[1 0
   0 3];
R=1;
[P]=realg(F,H,Q,R)

```

```

function [P]=realg(F,H,Q,R)
% RICCATI EQUATION
% Algebraic Algorithm
[n,m]=size(H');
a=F';
b=H'*inv(R)*H;
c=Q;
fi=[inv(a) inv(a)*b
     c*inv(a) a'+c*inv(a)*b];
[eigenvectors,eigenvalues]=eigs(fi,2*n,'SM');
    help1=eigenvectors(:,1:n);
    t11=help1(1:n,:);
    t21=help1(n+1:2*n,:);
P=t21*inv(t11);

```

Η built-in συνάρτηση `dare` υπολογίζει τη λύση της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati.

[P]=dare(F',H',Q,R)

Η συνάρτηση `dare` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $F, H, Q, R$  και έξοδο τη λύση της εξίσωσης Riccati.

Προσοχή: η συνάρτηση χρησιμοποιεί τους ανάστροφους πίνακες των πινάκων  $F, H$ .

Έτσι, για παράδειγμα, για την επίλυση της εξίσωσης Riccati με παραμέτρους  $F = H = Q = R = 1$  απαιτείται η κλήση

[P]=dare(1,1,1,1)

Επίσης, για παράδειγμα, για την επίλυση της εξίσωσης Riccati με παραμέτρους  $F = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.7 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$ ,  $H = [1 \ 1]$

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $R = 1$  απαιτείται η κλήση:

```

F=[-0.9 0.7
   -0.3 0.1];
H=[1 1];
Q=[1 0
   0 3];
R=1;
[P]=dare(F', H', Q, R)

```

### 3.5 Παραδείγματα

**Παράδειγμα 1. Εξίσωση Riccati για βαθμοτό μοντέλο.**

Θεωρείται το βαθμοτό μοντέλο διαστάσεων  $n=1$  και  $m=1$  με παραμέτρους:

$$F = 0.8$$

$$H = 1$$

$$Q = 1$$

$$R = 10$$

Η διασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση που υπολογίζεται από τον αλγεβρικό αλγόριθμο είναι:

$$P_p = 2.119064199455751$$

Η διασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση, που υπολογίζεται από τον ανά βήμα αλγόριθμο για διάφορες τιμές του κριτηρίου σύγκλισης, παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.1.

Ανά βήμα αλγόριθμος		
κριτήριο σύγκλισης	διασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση	πλήθος επαναλήψεων
$10^{-3}$	2.118306328328473	11
$10^{-4}$	2.119001485395359	14
$10^{-5}$	2.119059010332590	17
$10^{-6}$	2.119063770097626	20

**Πίνακας 3.1** Εξίσωση Riccati. Ανά βήμα αλγόριθμος.

Η διασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση, που υπολογίζεται από τον αλγόριθμο διπλασιασμού για διάφορες τιμές του κριτηρίου σύγκλισης, παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.2.

Αλγόριθμος διπλασιασμού		
κριτήριο σύγκλισης	διασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση	πλήθος επαναλήψεων
$10^{-3}$	2.119064199446983	6
$10^{-4}$	2.119064199446983	6
$10^{-5}$	2.119064199446983	6
$10^{-6}$	2.119064199455753	7

**Πίνακας 3.2** Εξίσωση Riccati. Αλγόριθμος διπλασιασμού

**Παρατήρηση 1.**

Όσο μειώνεται η τιμή του κριτηρίου σύγκλισης  $\varepsilon$ , τόσο αυξάνεται η ακρίβεια του υπολογισμού.

**Παρατήρηση 2.**

Ο αλγόριθμος διπλασιασμού συγκλίνει γρήγορα μετά από μικρό πλήθος επαναλήψεων.

**Παράδειγμα 2. Εξίσωση Riccati για πίνακες.**

Θεωρείται ένα μοντέλο διαστάσεων  $n = 2$  και  $m = 1$  με παραμέτρους:

$$F = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.7 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R = 1$$

Η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση, η οποία υπολογίζεται από τον αλγεβρικό αλγόριθμο, είναι:

$$P_p = \begin{bmatrix} 4.810592973151671 & 0.967975418695878 \\ 0.967975418695878 & 3.250939167852523 \end{bmatrix}$$

Ο ανά βήμα αλγόριθμος με κριτήριο σύγκλισης  $\varepsilon = 10^{-6}$  συγκλίνει μετά από 14 επαναλήψεις και υπολογίζει τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση:

$$P_p = \begin{bmatrix} 4.810592901320407 & 0.967975399363313 \\ 0.967975399363313 & 3.250939162649375 \end{bmatrix}$$

Ο αλγόριθμος διπλασιασμού με κριτήριο σύγκλισης  $\varepsilon = 10^{-6}$  συγκλίνει μετά από 6 επαναλήψεις και υπολογίζει τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση:

$$P_p = \begin{bmatrix} 4.810592973151730 & 0.967975418695892 \\ 0.967975418695892 & 3.250939167852517 \end{bmatrix}$$

### 3.6 Ασκήσεις

1. Να επιλύσετε θεωρητικά την εξίσωση Riccati με παραμέτρους:

$$F=1, H=1, Q=1, R=1$$

2. Να υπολογίσετε την παράμετρο  $R$ , αν γνωρίζετε τις παραμέτρους:  $F=1, H=1, Q=1$  και τη διασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση  $P_p=1.2$ .

3. Να διερευνήσετε, αν ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.7 \\ 0.3 & -1.1 \end{bmatrix}$  είναι συμπλεκτικός.

4. Να γράψετε συνάρτηση για την επίλυση της βαθμωτής εξίσωσης Riccati, όπου  $n=1$  και  $m=1$  χρησιμοποιώντας τον ανά βήμα επαναληπτικό αλγόριθμο

`function [P,iterations]=repsa1(f,h,q,r,epsilon)`

- Να επιλύσετε την εξίσωση Riccati με παραμέτρους:

$$F=1, H=1, Q=1, R=1$$

για τις τιμές του κριτηρίου σύγκλισης  $\epsilon=10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$ .

- Να σχεδιάσετε το πλήθος των επαναλήψεων ως προς το κριτήριο σύγκλισης.

5. Να γράψετε συνάρτηση για την επίλυση της βαθμωτής εξίσωσης Riccati, όπου  $n=1$  και  $m=1$  χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο διπλασιασμού

`function [P]=reda1(f,h,q,r,iterations)`

- Να επιλύσετε την εξίσωση Riccati με παραμέτρους:

$$F=1, H=1, Q=1, R=1$$

για τις τιμές του κριτηρίου σύγκλισης  $\epsilon=10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$ .

- Να σχεδιάσετε το πλήθος των επαναλήψεων ως προς το κριτήριο σύγκλισης.

6. Να γράψετε πρόγραμμα για την επίλυση της εξίσωσης Riccati με παραμέτρους:

$$F=\begin{bmatrix} -0.9 & 0.7 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}, H=\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, R=1$$

χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις `repsa` και `reda` και να συγκρίνετε τα αποτελέσματα.

7. Να γράψετε την εξίσωση Riccati με παραμέτρους:

$$F=1, H=1, Q=1, R=1.$$

Να υπολογίσετε τη διασπορά λάθους εκτίμησης στη μόνιμη κατάσταση συναρτήσει της παραμέτρου  $Q$ .

8. Να γράψετε την εξίσωση Riccati με παραμέτρους:

$$F=1, H=1, Q=1, R.$$

Να υπολογίσετε τη διασπορά λάθους εκτίμησης στη μόνιμη κατάσταση συναρτήσει της παραμέτρου  $R$ .

### 3.7 Περίληψη

Ο υπολογισμός της συνδιασποράς λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση μπορεί να επιτευχθεί με την επίλυση της εξίσωσης Riccati εκ των προτέρων (*a priori*), δηλαδή πριν την υλοποίηση του φίλτρου Kalman. Αν το μοντέλο είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (asymptotically stable), δηλαδή οι ιδιοτιμές (eigenvalues) του πίνακα μεταφοράς βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, τότε η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης συγκλίνει σε μία σταθερή τιμή, η οποία είναι μοναδική (unique) και καλείται συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση. Το φίλτρο μπορεί να τείνει σε μόνιμη κατάσταση, ακόμη και όταν το μοντέλο δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν αλγεβρικές και επαναληπτικές μέθοδοι για την επίλυση της εξίσωσης Riccati.

Η εξίσωση Riccati για το φίλτρο Kalman είναι μία μη γραμμική επαναληπτική εξίσωση ως προς τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης. Η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης τείνει στη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση ανεξάρτητα από την αρχική αβεβαιότητα, δηλαδή ανεξάρτητα από την τιμή της αρχικής συνθήκης.

Ο κλασικός επαναληπτικός ανά βήμα αλγόριθμος βασίζεται στην εξίσωση Riccati, η οποία προκύπτει από το φίλτρο Kalman.

Ο κλασικός επαναληπτικός αλγόριθμος διπλασιασμού (doubling algorithm) είναι ένας επαναληπτικός αλγόριθμος με χαρακτηριστικό ότι η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης υπολογίζεται σε χρονική στιγμή διπλάσια (doubling) της προηγούμενης, ανά επανάληψη.

Ο κλασικός αλγεβρικός αλγόριθμος για την επίλυση της εξίσωσης Riccati βασίζεται στην κατασκευή ενός συμπλεκτικού πίνακα τα στοιχεία του οποίου εξαρτώνται από τις παραμέτρους του μοντέλου.

Μπορείτε να ακούσετε την περίληψη με τον Ήχο 3.1



Ήχος 3.1 Περίληψη – Κεφάλαιο 3.

### **3.8 Κριτήριο Αξιολόγησης**

Απαντήστε με Σωστό ή Λάθος.

#### **ΕΡΩΤΗΣΗ 1**

Η λύση της εξίσωσης Riccati μπορεί να υπολογιστεί πριν την υλοποίηση του φίλτρου Kalman.

---

#### **ΕΡΩΤΗΣΗ 2**

Αν το μοντέλο είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, τότε η εξίσωση Riccati έχει λύση.

---

#### **ΕΡΩΤΗΣΗ 3**

Η εξίσωση Riccati έχει μία μοναδική λύση που είναι θετικά ημιορισμένος πίνακας.

---

#### **ΕΡΩΤΗΣΗ 4**

Η λύση της εξίσωσης Riccati είναι πάντα συμμετρικός πίνακας.

---

#### **ΕΡΩΤΗΣΗ 5**

Το κριτήριο σύγκλισης των επαναληπτικών αλγορίθμων δεν επηρεάζει το πλήθος των επαναλήψεων.

---

#### **ΕΡΩΤΗΣΗ 6**

Ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$  είναι συμπλεκτικός.

---

#### **ΕΡΩΤΗΣΗ 7**

Οι πίνακες στον αλγόριθμο διπλασιασμού είναι συμμετρικοί.

---

#### **ΕΡΩΤΗΣΗ 8**

Ο αλγόριθμος διπλασιασμού δεν μπορεί να εφαρμοστεί, όταν ο πίνακας μεταφοράς είναι ο μοναδιαίος πίνακας

---

#### **ΕΡΩΤΗΣΗ 9**

Ο συμπλεκτικός πίνακας  $\Phi$  του αλγορίθμου διπλασιασμού είναι διαστάσεων  $2n \times 2n$ .

---

#### **ΕΡΩΤΗΣΗ 10**

Αν η εξίσωση Riccati έχει λύση, τότε ο επαναληπτικός ανά βήμα αλγόριθμος συγκλίνει στη λύση για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη

Θα βρείτε την Απάντηση στο Κριτήριο Αξιολόγησης στο Παράρτημα A'.

Μπορείτε να κάνετε το Κριτήριο Αξιολόγησης με το Διαδραστικό Πρόγραμμα 3.1.



**Διαδραστικό Πρόγραμμα 3.1 Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 3.**

## Βιβλιογραφία/Αναφορές

- Anderson, B. D. O., Moore, J. B. (2005). *Optimal Filtering*. Dover Publications, New York.
- Assimakis, N. D., Lainiotis, D. G., Katsikas, S.K. & Sanida, F. L. (1997). A survey of recursive algorithms for the solution of the discrete time Riccati equation, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, vol. 30, no. 4, pp. 2409-2420.
- Assimakis, N., Roulis, S. & Lainiotis, D. (2003). Recursive solutions of the discrete time Riccati equation, *Neural, Parallel and Scientific Computations*, vol. 11, pp. 343-350.
- Lainiotis, D. G., Assimakis, N. D. & Katsikas, S.K. (1994). A new computationally effective algorithm for solving the discrete Riccati equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 186, no. 3, pp. 868-895.
- Lainiotis, D. G., Assimakis, N. D. & Katsikas, S.K. (1995), Fast and numerically robust recursive algorithms for solving the discrete time Riccati equation: the case of nonsingular plant noise covariance matrix, *Neural, Parallel and Scientific Computation*, vol. 3, no. 4, pp. 565-584.
- Ασημάκης, Ν. (2009). *Φίλτρα Kalman και Λαϊνιώτη*. Εκδόσεις ΑΠΑΚΥΝΘΟΣ.
- Ασημάκης, Ν. (2013). *Εξίσωση Riccati Αλγόριθμοι και Εφαρμογές*, Εκδόσεις ΑΠΑΚΥΝΘΟΣ.

## Κεφάλαιο 4 Αλγόριθμοι επίλυσης της εξίσωσης Lyapunov

### Σύνοψη

Στο κεφάλαιο παρουσιάζονται αλγόριθμοι για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov που προκύπτει από το φίλτρο Kalman. Οι τύποι αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov είναι οι επαναληπτικοί αλγόριθμοι και οι αλγεβρικοί αλγόριθμοι. Παρουσιάζονται οι κλασικοί επαναληπτικοί αλγόριθμοι: ο επαναληπτικός ανά βήμα αλγόριθμος και ο επαναληπτικός αλγόριθμος διπλασιασμού (*doubling algorithm*). Παρουσιάζεται ο κλασικός αλγεβρικός αλγόριθμος. Δίνονται παραδείγματα επίλυσης της εξίσωσης Lyapunov.

### Προαπαιτούμενη γνώση

Φίλτρο Kalman, μόνιμη κατάσταση, εξίσωση Lyapunov, πίνακες.

### 4.1 Τύποι αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov

Για το χρονικά αμετάβλητο μοντέλο, όπου οι πίνακες  $F$ ,  $Q$ , είναι σταθεροί (χρονικά αμετάβλητοι) και  $R = \infty$ , από τις εξισώσεις του φίλτρου Kalman προκύπτει η **εξίσωση Lyapunov (Lyapunov equation)**:

$$P(k+1/k) = Q + FP(k/k-1)F^T, \quad (4.1)$$

όπου  $Q \geq 0$  και  $P(k/k-1) \geq 0$ .

Για λόγους απλούστευσης, θεωρούμε ότι  $Q > 0$ ,  $P(k/k-1) > 0, k = 1, 2, \dots$  και  $P(0/-1) = P_0 \geq 0$ .

Η εξίσωση Lyapunov είναι ειδική μορφή της εξίσωσης Riccati, για  $R = \infty$ .

Αν το μοντέλο είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (asymptotically stable), δηλαδή οι ιδιοτιμές (eigenvalues) του πίνακα  $F$  βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, τότε η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης συγκλίνει σε μία σταθερή τιμή  $P_p$ , η οποία είναι μοναδική (unique) και καλείται συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση.

Η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση ικανοποιεί την **αλγεβρική εξίσωση Lyapunov**:

$$P_p = Q + FP_p F^T, \quad (4.2)$$

όπου  $Q \geq 0$  και  $P_p \geq 0$ .

Για λόγους απλούστευσης, θεωρούμε ότι  $Q > 0$ ,  $P_p > 0$ .

Ο υπολογισμός της συνδιασποράς λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση μπορεί να επιτευχθεί με την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov εκ των προτέρων (a priori), δηλαδή πριν την υλοποίηση του φίλτρου Kalman. Στη βιβλιογραφία [Anderson & Moore (2005), Assimakis, Lainiotis, Katsikas & Sanida (1997), Assimakis, Roulis & Lainiotis (2003), Lainiotis, Assimakis & Katsikas (1994), Lainiotis, Assimakis & Katsikas (1995), Ασημάκης (2009), Ασημάκης (2013)] υπάρχουν:

- επαναληπτικοί αλγόριθμοι
- αλγεβρικοί αλγόριθμοι

για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov.

### 4.2 Επαναληπτικοί αλγόριθμοι

#### 4.2.1 Ανά βήμα αλγόριθμος

Είναι γνωστό [Anderson & Moore (2005)] ότι η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης τείνει στη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση ανεξάρτητα από την αρχική αβεβαιότητα, δηλαδή ανεξάρτητα από την τιμή της αρχικής συνθήκης  $P(0/-1) = P_0$ . Στους επαναληπτικούς αλγορίθμους που παρουσιάζονται παρακάτω, θεωρείται μηδενική αρχική συνθήκη  $P(0/-1) = P_0 = 0$ .

Η εξίσωση Lyapunov για το φίλτρο Kalman είναι μια μη γραμμική επαναληπτική εξίσωση, ως προς τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης:

$$P(k+1/k) = Q + FP(k/k-1)F^T \quad (4.3)$$

για  $k = 0, 1, \dots$

με αρχική συνθήκη

$$P(0/-1) = P_0$$

έως ότου

$$\|P(k+1/k) - P(k/k-1)\| < \varepsilon, \quad (4.4)$$

όπου το κριτήριο σύγκλισης  $\varepsilon$  είναι ένας πολύ μικρός θετικός αριθμός.

Τότε:

$$P_p = \lim_{k \rightarrow \infty} P(k+1/k) \quad (4.5)$$

Έτσι προκύπτει ο κλασικός επαναληπτικός Ανά Βήμα Αλγόριθμος (Per Step Algorithm) για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov.

<b>Ανά Βήμα Αλγόριθμος Per Step Algorithm</b>
$P(k+1/k) = Q + FP(k/k-1)F^T$
$k = 0, 1, \dots$
$P(0/-1) = P_0$
$P_p = \lim_{k \rightarrow \infty} P(k+1/k)$

#### 4.2.2 Αλγόριθμος διπλασιασμού

Ο κλασικός επαναληπτικός **αλγόριθμος διπλασιασμού (doubling algorithm)** είναι ένας επαναληπτικός αλγόριθμος με χαρακτηριστικό ότι η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης υπολογίζεται σε χρονική στιγμή διπλάσια (doubling) της προηγούμενης, ανά επανάληψη.

Χρησιμοποιώντας τους πίνακες  $X(k)$  και  $Y(k)$  διαστάσεων  $n \times n$ , ορίζουμε:

$$P(k/k-1) = Y(k)X^{-1}(k) \quad (4.6)$$

με αρχικές συνθήκες

$$Y(0) = 0$$

και

$$X(0) = I$$

αφού  $P(0/-1) = Y(0)X^{-1}(0) = 0$

Θέτοντας την (4.6) στην εξίσωση Lyapunov (4.1) προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$X(k+1) = (F^{-T})X(k)$$

$$Y(k+1) = (QF^{-T})X(k) + (F)Y(k)$$

οι οποίοι γράφονται με τη χρήση πινάκων:

$$\begin{bmatrix} X(k+1) \\ Y(k+1) \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} X(k) \\ Y(k) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

με

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

χρησιμοποιώντας τους πίνακα  $\Phi$  διαστάσεων  $2n \times 2n$ :

$$\Phi = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ ca^{-1} & a^T \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

όπου

$$a = F^T \quad (4.10)$$

$$c = Q \quad (4.11)$$

Η ύπαρξη του αντίστροφου πίνακα που εμφανίζεται στον πίνακα  $\Phi$  εξασφαλίζεται στην περίπτωση που ο πίνακας μεταφοράς  $F$  είναι αντιστρέψιμος.

Ο πίνακας  $\Phi$  είναι συμπλεκτικός πίνακας (symplectic matrix). Κάθε δύναμη ενός συμπλεκτικού πίνακα είναι και αυτός συμπλεκτικός πίνακας.

Από την (4.16) είναι προφανές ότι ισχύει:

$$\begin{bmatrix} X(k) \\ Y(k) \end{bmatrix} = \Phi^k \begin{bmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

οπότε:

$$\begin{bmatrix} X(2^k) \\ Y(2^k) \end{bmatrix} = \Phi^{2^k} \begin{bmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Στη συνέχεια ορίζουμε:

$$\Phi^{2^k} = \begin{bmatrix} a^{-1}(k) & 0 \\ c(k)a^{-1}(k) & a^T(k) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

χρησιμοποιώντας τους πίνακες  $a(k)$  και  $c(k)$  διαστάσεων  $n \times n$ , με αρχικές συνθήκες:

$$a(0) = a = F^T \quad (4.15)$$

$$c(0) = c = Q \quad (4.16)$$

Από τη σχέση:

$$\Phi^{2^{k+1}} = \Phi^{2^k} \Phi^{2^k} \quad (4.17)$$

προκύπτουν οι επαναληπτικές σχέσεις:

$$a(k+1) = a(k)a(k) \quad (4.18)$$

$$c(k+1) = c(k) + a^T(k)c(k)a(k), \quad (4.19)$$

όπου οι πίνακες  $c(k)$  είναι συμμετρικοί.

Από τις σχέσεις (4.8), (4.12) και (4.13) έχουμε:

$$Y(2^k)X^{-1}(2^k) = c(k), \quad (4.20)$$

οπότε από τη σχέση (4.6) έχουμε:

$$c(k) = P(2^k / 2^k - 1) \quad (4.21)$$

Έτσι προκύπτει ο κλασικός επαναληπτικός Αλγόριθμος Διπλασιασμού (Doubling Algorithm) για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov.

<b>Αλγόριθμος Διπλασιασμού Doubling Algorithm</b>
$a(k+1) = a(k)a(k)$
$c(k+1) = c(k) + a^T(k)c(k)a(k)$
$k = 1, 2, \dots$
$a(1) = F^T$
$c(1) = Q$
$P_p = \lim_{k \rightarrow \infty} c(k)$

Η απόδειξη των εξισώσεων του Αλγορίθμου Διπλασιασμού (Doubling Algorithm) για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov βρίσκεται στο Παράρτημα Γ'.

### 4.3 Αλγεβρικός αλγόριθμος

Στη βαθμωτή περίπτωση όπου  $n=1$ , θέτοντας  $F=f$ ,  $Q=q$ ,  $P_p=p$ , η αλγεβρική εξίσωση Lyapunov γράφεται:

$$p = q + f^2 p,$$

όπου  $q \geq 0$  και  $p \geq 0$ , επειδή πρόκειται για διασπορές.

Για λόγους απλούστευσης, θεωρούμε ότι  $q > 0$  και  $p > 0$ .

Τότε προκύπτει η βαθμωτή εξίσωση Lyapunov:

$$(1 - f^2)p - q = 0 \quad (4.22)$$

Η εξίσωση πρώτου βαθμού.

Αν  $|f| < 1$ , τότε η εξίσωση έχει μία θετική λύση

$$p = \frac{q}{1 - f^2} \quad (4.23)$$

Αν  $|f| > 1$ , τότε η εξίσωση είναι αδύνατη, γιατί δεν υπάρχει θετική λύση.

Αν  $|f| = 1$ , τότε η εξίσωση είναι αδύνατη, γιατί  $q > 0$ .

#### Παράδειγμα 1. Εξίσωση Lyapunov για βαθμωτό μοντέλο.

Δίνονται οι παράμετροι:

$$f = \frac{1}{2}$$

$$q = \frac{1}{10}$$

Από την αλγεβρική εξίσωση Lyapunov

$$p = \frac{1}{10} + \frac{1}{4}p$$

προκύπτει:

$$\frac{3}{4}p - \frac{1}{10} = 0$$

Η λύση της εξίσωσης Lyapunov είναι:

$$p = \frac{4}{30} = 0.13333$$

Στην περίπτωση των πινάκων, η εξίσωση Lyapunov αντιστοιχεί σε ένα σύστημα  $\frac{n^2+n}{2}$  αλγεβρικών εξισώσεων με  $\frac{n^2+n}{2}$  αγνώστους, γιατί ο πίνακας  $P_p$  είναι συμμετρικός.

Στην περίπτωση των πινάκων, η επίλυση της εξίσωσης Lyapunov δεν είναι εύκολη.

## Παράδειγμα 2. Εξίσωση Lyapunov για πίνακες.

Δίνονται οι πίνακες:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ -0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας  $F$  έχει ιδιοτιμές εντός του μοναδιαίου κύκλου:

$$\lambda_1 = 0.9791$$

$$\lambda_2 = 0.5209$$

Η αλγεβρική εξίσωση Lyapunov

$$P_p = Q + FP_p F^T$$

έχει λύση της μορφής:

$$P_p = \begin{bmatrix} X & Y \\ Y & Z \end{bmatrix}$$

γιατί ο πίνακας  $P_p$  είναι συμμετρικός.

Τότε:

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ -0.1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Y & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.1 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Έτσι προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$X = 1 + X + 0.2Y - 0.01Z$$

$$Y = 0 - 0.1X + 0.49Y + 0.05Z$$

$$Z = 4 + 0.01X - 0.1Y + 0.25Z$$

Οπότε προκύπτει ένα σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους:

$$\begin{bmatrix} 0 & -0.2 & -0.01 \\ 0.1 & 0.51 & -0.05 \\ -0.01 & 0.1 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Η λύση του συστήματος οδηγεί στη λύση της εξίσωσης Lyapunov:

$$P_p = \begin{bmatrix} 30.3682 & -5.3224 \\ -5.3224 & 6.4479 \end{bmatrix}$$

Η δυσκολία επίλυσης της εξίσωσης Lyapunov για πίνακες, οδήγησε στην ανάπτυξη Αλγεβρικού Αλγορίθμου (Algebraic Algorithm) για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov.

Από τις παραμέτρους του μοντέλου, ορίζεται ο συμπλεκτικός (symplectic) πίνακας  $\Phi$  διαστάσεων  $2n \times 2n$ :

$$\Phi = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ ca^{-1} & a^T \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

όπου

$$a = F^T \quad (4.25)$$

$$c = Q \quad (4.26)$$

Η ύπαρξη του αντίστροφου πίνακα που εμφανίζεται στον πίνακα  $\Phi$  εξασφαλίζεται στην περίπτωση που ο πίνακας μεταφοράς  $F$  είναι αντιστρέψιμος.

Ο πίνακας  $\Phi$  είναι συμπλεκτικός πίνακας, οπότε έχει ιδιοτιμές που εμφανίζονται σε ζεύγη αντιστρόφων ιδιοτιμών και μπορεί να γραφτεί ως:

$$\Phi = W L W^{-1}, \quad (4.27)$$

όπου

- $L$  είναι διαγώνιος πίνακας που περιέχει τις ιδιοτιμές του  $\Phi$ , δηλαδή έχει τη μορφή:

$$L = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

με  $\Lambda$  διαγώνιος πίνακας με όλες τις ιδιοτιμές του  $\Phi$  που βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου

- $W$  είναι ο πίνακας που περιέχει τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του  $\Phi$

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Τότε η λύση της εξίσωσης Lyapunov, δηλαδή η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση είναι:

$$P_p = W_{21} W_{11}^{-1} \quad (4.30)$$

Έτσι προκύπτει ο κλασικός Αλγεβρικός Αλγόριθμος (Algebraic Algorithm) για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov.

Αλγεβρικός Αλγόριθμος Algebraic Algorithm
$\Phi = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ ca^{-1} & a^T \end{bmatrix}$
$a = F^T$
$c = Q$
$\Phi = W L W^{-1} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}^{-1}$
$P_p = W_{21} W_{11}^{-1}$

#### 4.4 Επίλυση της εξίσωσης Lyapunov σε προγραμματιστικό περιβάλλον

Η συνάρτηση `lepsa` υπολογίζει τη λύση της εξίσωσης Lyapunov χρησιμοποιώντας τον ανά βήμα αλγόριθμο.

Η συνάρτηση `lepsa` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $F, Q$  και το κριτήριο σύγκλισης και εξόδους τη λύση της εξίσωσης Lyapunov και το πλήθος των επαναλήψεων.

Προσοχή: η συνάρτηση χρησιμοποιεί μηδενική αρχική συνθήκη.

Για παράδειγμα, για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov με παραμέτρους  $F = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.7 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$ ,  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  και κριτήριο σύγκλισης  $\varepsilon = 10^{-3}$  απαιτείται η κλήση:

```
F=[-0.9 0.7
   -0.3 0.1];
Q=[1 0
   0 3];
[P,iterations]=lepsa(F,H,Q,R,0.001)
```

```
function [P,iterations]=lepsa(F,Q,epsilon)
% LYAPUNOV EQUATION
% Per Step Algorithm
k=0;
p=0;
k=k+1;
p1=Q+F*p*F';
d=norm(p1-p);
p=p1;
while norm(d)>epsilon
    k=k+1;
    p1=Q+F*p*F';
    d=norm(p1-p);
    p=p1;
end;
P=p;
iterations=k;
```

Η συνάρτηση `leda` υπολογίζει τη λύση της εξίσωσης Lyapunov χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο διπλασιασμού.

Η συνάρτηση `leda` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $F, Q$  και το κριτήριο σύγκλισης και εξόδους τη λύση της εξίσωσης Lyapunov και το πλήθος των επαναλήψεων.

Για παράδειγμα, για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov με παραμέτρους  $F = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.7 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$ ,  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  και κριτήριο σύγκλισης  $\varepsilon = 10^{-3}$  απαιτείται η κλήση:

```
F=[-0.9 0.7
   -0.3 0.1];
Q=[1 0
   0 3];
[P,iterations]=leda(F,H,Q,R,0.001)
```

```
function [P,iterations]=leda(F,Q,epsilon)
% LYAPUNOV EQUATION
% Doubling Algorithm
k=1;
a=F';
```

```

c=Q;
k=k+1;
a1=a*a;
c1=c+a'*c*a;
d=norm(c1-c);
a=a1;
c=c1;
while norm(d)>epsilon
    k=k+1;
    a1=a*a;
    c1=c+a'*c*a;
    d=norm(c1-c);
    a=a1;
    c=c1;
end
P=c;
iterations=k;

```

Η συνάρτηση `lealg` υπολογίζει τη λύση της αλγεβρικής εξίσωσης Lyapunov χρησιμοποιώντας τον αλγεβρικό αλγόριθμο.

Η συνάρτηση `lealg` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $F, Q$  και έξοδο τη λύση της εξίσωσης Lyapunov.

Επίσης, για παράδειγμα, για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov με παραμέτρους  $F = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.7 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$ ,

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  απαιτείται η κλήση:

```

F=[-0.9 0.7
   -0.3 0.1];
Q=[1 0
   0 3];
[P]=lealg(F,H,Q,R)

```

```

function [P]=lealg(F,Q)
% LYAPUNOV EQUATION
% Algebraic Algorithm
n=size(F,1);
a=F';
c=Q;
fi=[inv(a) zeros(n)
     c*inv(a) a'];
[evectors,evaluates]=eigs(fi,2*n,'SM');
help=eveectors(:,1:n);
t11=help(1:n,:);
t21=help(n+1:2*n,:);
help2=eveectors(:,n+1:2*n);
t12=help2(1:n,:);
t22=help2(n+1:2*n,:);
P=t21*inv(t11);

```

Η built-in συνάρτηση `dlyap` υπολογίζει τη λύση της αλγεβρικής εξίσωσης Lyapunov.

`[P]=dlyap(F,Q)`

Η συνάρτηση `dlyap` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $F, Q$  και έξοδο τη λύση της εξίσωσης Lyapunov.

Έτσι, για παράδειγμα, για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov με παραμέτρους  $F = 0.5, Q = 1$  απαιτείται η κλήση

$$[P] = \text{dlyap}(0.5, 1)$$

Επίσης, για παράδειγμα, για την επίλυση της εξίσωσης dlyap με παραμέτρους  $F = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.7 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  απαιτείται η κλήση:

$$F = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.7 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix};$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix};$$

$$[P] = \text{dlyap}(F, Q)$$

## 4.5 Παραδείγματα

### Παράδειγμα 1. Εξίσωση Lyapunov για βαθμού μοντέλο.

Θεωρείται ένα μοντέλο διαστάσεων  $n = 1$  και  $m = 1$ , με άπειρο θόρυβο, δηλαδή η διασπορά θορύβου είναι άπειρη  $R = \infty$  και με παραμέτρους:

$$F = 0.8$$

$$H = 1$$

$$Q = 1$$

Η διασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση, η οποία υπολογίζεται από την αλγεβρική λύση, είναι:

$$P_p = 2.777777777777778$$

Η διασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση, η οποία υπολογίζεται από τον ανά βήμα αλγόριθμο για διάφορες τιμές του κριτηρίου σύγκλισης, παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.1.

Ανά βήμα αλγόριθμος		
κριτήριο σύγκλισης	διασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση	πλήθος επαναλήψεων
$10^{-3}$	2. 776369277110858	17
$10^{-4}$	2. 777626541170258	22
$10^{-5}$	2. 777761538870697	27
$10^{-6}$	2. 777776034138408	32

Πίνακας 4.1 Εξίσωση Lyapunov. Ανά βήμα αλγόριθμος.

Η διασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση, η οποία υπολογίζεται από τον αλγόριθμο διπλασιασμού για διάφορες τιμές του κριτηρίου σύγκλισης, παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.2.

Αλγόριθμος διπλασιασμού		
κριτήριο σύγκλισης	διασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση	πλήθος επαναλήψεων
$10^{-3}$	2. 777777777776684	7
$10^{-4}$	2. 777777777776684	7
$10^{-5}$	2. 777777777776684	7
$10^{-6}$	2. 777777777777779	8

Πίνακας 4.2 Εξίσωση Lyapunov. Αλγόριθμος Διπλασιασμού.

### Παρατήρηση 1.

Όσο μειώνεται η τιμή του κριτηρίου σύγκλισης  $\varepsilon$ , τόσο αυξάνεται ακρίβεια του υπολογισμού.

## Παρατήρηση 2.

Ο αλγόριθμος διπλασιασμού συγκλίνει γρήγορα, μετά από μικρό πλήθος επαναλήψεων.

### Παράδειγμα 2. Εξίσωση Lyapunov για για πίνακες.

Θεωρείται ένα μοντέλο διαστάσεων  $n = 2$  και  $m = 1$ , με άπειρο θόρυβο, δηλαδή η συνδιασπορά θορύβου είναι άπειρη  $R = \infty$  και με παραμέτρους:

$$F = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.7 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση, που υπολογίζεται από τον αλγεβρικό αλγόριθμο, είναι:

$$P_p = \begin{bmatrix} 4.810592973151671 & 0.967975418695878 \\ 0.967975418695878 & 3.250939167852523 \end{bmatrix}$$

Ο ανά βήμα αλγόριθμος με κριτήριο σύγκλισης  $\varepsilon = 10^{-6}$  συγκλίνει μετά από 14 επαναλήψεις και υπολογίζει τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση:

$$P_p = \begin{bmatrix} 4.810592901320407 & 0.967975399363313 \\ 0.967975399363313 & 3.250939162649375 \end{bmatrix}$$

Ο αλγόριθμος διπλασιασμού με κριτήριο σύγκλισης  $\varepsilon = 10^{-6}$  συγκλίνει μετά από 6 επαναλήψεις και υπολογίζει τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση:

$$P_p = \begin{bmatrix} 4.810592973151730 & 0.967975418695892 \\ 0.967975418695892 & 3.250939167852517 \end{bmatrix}$$

## 4.6 Ασκήσεις

1. Να επιλύσετε θεωρητικά την εξίσωση Lyapunov με παραμέτρους:

$$F = 0.8, Q = 0.5$$

2. Να υπολογίσετε την παράμετρο  $Q$ , αν γνωρίζετε την παράμετρο  $F = 0.5$  και τη διασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση  $P_p = 1.2$ .

3. Να γράψετε συνάρτηση για την επίλυση της βαθμωτής εξίσωσης Lyapunov, όπου  $n = 1$  χρησιμοποιώντας τον ανά βήμα επαναληπτικό αλγόριθμο

`function [P,iterations]=lepsa1(f,q,epsilon)`

- Να επιλύσετε την εξίσωση Lyapunov με παραμέτρους:

$$F = 0.75, Q = 1.25$$

για τις τιμές του κριτηρίου σύγκλισης  $\epsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$ .

- Να σχεδιάσετε το πλήθος των επαναλήψεων ως προς το κριτήριο σύγκλισης.

4. Να γράψετε συνάρτηση για την επίλυση της βαθμωτής εξίσωσης Lyapunov, όπου  $n = 1$ , χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο διπλασιασμού

`function [P,iterations]=leda1(f,q,epsilon)`

- Να επιλύσετε την εξίσωση Lyapunov με παραμέτρους:

$$F = 0.75, Q = 1.25$$

για τις τιμές του κριτηρίου σύγκλισης  $\epsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$ .

- Να σχεδιάσετε το πλήθος των επαναλήψεων ως προς το κριτήριο σύγκλισης.

5. Να γράψετε πρόγραμμα για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov με παραμέτρους:

$$F = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.7 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις `lepsa` και `leda` και να συγκρίνετε τα αποτελέσματα.

6. Να γράψετε πρόγραμμα

για την επίλυση της εξίσωσης Riccati με παραμέτρους:

$$F = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.7 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, R = 1$$

και για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov με παραμέτρους:

$$F = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.7 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις `repsa`, `reda` και `lepsa`, `leda` και να συγκρίνετε τα αποτελέσματα.

## 4.7 Περίληψη

Η εξίσωση Lyapunov είναι ειδική μορφή της εξίσωσης Riccati για άπειρο θόρυβο μετρήσεων.

Στην περίπτωση του άπειρου θορύβου μετρήσεων, ο υπολογισμός της συνδιασποράς λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση μπορεί να επιτευχθεί με την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov εκ των προτέρων (a priori), δηλαδή πριν την υλοποίηση του φίλτρου Kalman.

Αν το μοντέλο είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (asymptotically stable), δηλαδή οι ιδιοτιμές (eigenvalues) του πίνακα μεταφοράς βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, τότε η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης συγκλίνει σε μία σταθερή τιμή, η οποία είναι μοναδική (unique) και καλείται συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση.

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν τόσο αλγεβρικές, όσο και επαναληπτικές μέθοδοι για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov.

Η εξίσωση Lyapunov για το φίλτρο Kalman είναι μία μη γραμμική επαναληπτική εξίσωση ως προς τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης. Η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης τείνει στη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση, ανεξάρτητα από την αρχική αβεβαιότητα, δηλαδή, ανεξάρτητα από την τιμή της αρχικής συνθήκης.

Ο κλασικός επαναληπτικός ανά βήμα αλγόριθμος βασίζεται στην εξίσωση Lyapunov, η οποία προκύπτει από το φίλτρο Kalman.

Ο κλασικός επαναληπτικός αλγόριθμος διπλασιασμού (doubling algorithm) είναι ένας επαναληπτικός αλγόριθμος με χαρακτηριστικό ότι η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης υπολογίζεται σε κάθε επανάληψη σε χρονική στιγμή διπλάσια (doubling) της προηγούμενης.

Ο κλασικός αλγεβρικός αλγόριθμος για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov βασίζεται στην κατασκευή ενός συμπλεκτικού πίνακα τα στοιχεία του οποίου εξαρτώνται από τις παραμέτρους του μοντέλου.

Μπορείτε να ακούσετε την περίληψη με τον Ήχο 4.1.



Ήχος 4.1 Περίληψη – Κεφάλαιο 4.

## 4.8 Κριτήριο Αξιολόγησης

Απαντήστε με Σωστό ή Λάθος.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Η εξίσωση Lyapunov είναι ειδική περίπτωση της εξίσωσης Riccati για μηδενικό θόρυβο μετρήσεων.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Η εξίσωση Lyapunov έχει πάντα λύση.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Η εξίσωση Lyapunov αντιστοιχεί σε ένα σύστημα  $\frac{n^2 + n}{2}$  αλγεβρικών εξισώσεων.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Η λύση της εξίσωσης Lyapunov είναι πάντα συμμετρικός πίνακας.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Όσο μειώνεται η τιμή του κριτηρίου σύγκλισης, τόσο αυξάνεται η ακρίβεια του υπολογισμού.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$  είναι συμπλεκτικός.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

Οι πίνακες  $a(k), c(k)$  στον αλγόριθμο διπλασιασμού είναι συμμετρικοί.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

Ο συμπλεκτικός πίνακας  $\Phi$  του αλγορίθμου διπλασιασμού είναι διαστάσεων  $2n \times 2n$ .

### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

Στον αλγόριθμο διπλασιασμού, όσο μειώνεται η τιμή του κριτηρίου σύγκλισης  $\varepsilon$ , τόσο αυξάνεται η ακρίβεια του υπολογισμού.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Οι αρχικές συνθήκες του αλγορίθμου διπλασιασμού είναι  $a(1) = F^T$  και  $c(1) = Q$ .

Θα βρείτε την Απάντηση στο Κριτήριο Αξιολόγησης στο Παράρτημα A'.

Μπορείτε να κάνετε το Κριτήριο Αξιολόγησης με το Διαδραστικό Πρόγραμμα 4.1.



Διαδραστικό Πρόγραμμα 4.1 Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 4.

## **Βιβλιογραφία/Αναφορές**

- Anderson, B. D. O., Moore, J. B. (2005). *Optimal Filtering*. Dover Publications, New York.
- Assimakis, N. D., Lainiotis, D. G., Katsikas, S.K. & Sanida, F. L. (1997). A survey of recursive algorithms for the solution of the discrete time Riccati equation, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, vol. 30, no. 4, pp. 2409-2420.
- Assimakis, N., Roulis, S. & Lainiotis, D. (2003). Recursive solutions of the discrete time Riccati equation, *Neural, Parallel and Scientific Computations*, vol. 11, pp. 343-350.
- Lainiotis, D. G., Assimakis, N. D. & Katsikas, S.K. (1994). A new computationally effective algorithm for solving the discrete Riccati equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 186, no. 3, pp. 868-895.
- Lainiotis, D. G., Assimakis, N. D. & Katsikas, S.K. (1995), Fast and numerically robust recursive algorithms for solving the discrete time Riccati equation: the case of nonsingular plant noise covariance matrix, *Neural, Parallel and Scientific Computation*, vol. 3, no. 4, pp. 565-584.
- Ασημάκης, Ν. (2009). *Φίλτρα Kalman και Λαϊνιώτη*. Εκδόσεις ΑΠΑΚΥΝΘΟΣ.
- Ασημάκης, Ν. (2013). *Εξίσωση Riccati Αλγόριθμοι και Εφαρμογές*, Εκδόσεις ΑΠΑΚΥΝΘΟΣ.

## Κεφάλαιο 5 Φίλτρο Kalman πληροφορίας

### Σύνοψη

Στο κεφάλαιο παρουσιάζεται το Φίλτρο Kalman Πληροφορίας (*Information Kalman Filter*). Αναλύεται το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman πληροφορίας, το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman πληροφορίας και το φίλτρο Kalman πληροφορίας μόνιμης κατάστασης. Δίνονται παραδείγματα των φίλτρων Kalman πληροφορίας.

### Προαπαιτούμενη γνώση

Φίλτρα Kalman, πίνακες.

### 5.1 Φίλτρο Kalman Πληροφορίας (Information Filter)

Το **Φίλτρο Kalman Πληροφορίας (Information Kalman Filter)** [Anderson & Moore (2005), Assimakis, Adam, Douladiris (2012)] χρησιμοποιεί τους **πίνακες πληροφορίας (information matrices)**, οι οποίοι ορίζονται ως οι αντίστροφοι πίνακες των συνδιασπορών λάθους πρόβλεψης και εκτίμησης:

$$S(k/k) = P^{-1}(k/k) \quad (5.1)$$

$$S(k+1/k) = P^{-1}(k+1/k) \quad (5.2)$$

καθώς και τα αντίστοιχα διανύσματα εκτίμησης πληροφορίας και πρόβλεψης πληροφορίας:

$$y(k/k) = P^{-1}(k/k)x(k/k) \quad (5.3)$$

$$y(k+1/k) = P^{-1}(k+1/k)x(k+1/k) \quad (5.4)$$

με την προϋπόθεση βέβαια ότι υπάρχουν οι αντίστροφοι πίνακες.

Το Φίλτρο Kalman Πληροφορίας (Information Kalman Filter) προκύπτει από τις εξισώσεις του φίλτρου Kalman χρησιμοποιώντας τους ορισμούς (5.1)-(5.4).

Για το χρονικά μεταβαλλόμενο μοντέλο, όπου οι πίνακες  $F(k+1,k)$ ,  $H(k)$ ,  $Q(k)$ ,  $R(k)$  και  $B(k)$  είναι χρονικά μεταβαλλόμενοι, προκύπτει το Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο Kalman Πληροφορίας (Time Varying Information Kalman Filter):

Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο Kalman Πληροφορίας Time Varying Information Kalman Filter (TVIKF)
$y(k/k) = y(k/k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)z(k)$
$S(k/k) = S(k/k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)H(k)$
$P(k/k) = S^{-1}(k/k)$
$x(k/k) = S^{-1}(k/k)y(k/k)$
$K(k) = S^{-1}(k/k)H^T(k)R^{-1}(k)$
$P(k+1/k) = Q(k) + F(k+1,k)S^{-1}(k/k)F^T(k+1,k)$
$S(k+1/k) = P^{-1}(k+1/k)$
$y(k+1/k) = S(k+1/k)F(k+1,k)S^{-1}(k/k)y(k/k) + S(k+1/k)B(k)u(k)$
$x(k+1/k) = P(k+1/k)y(k+1/k)$
$k = 0, 1, \dots$
$y(0/-1) = P^{-1}(0/-1)x(0/-1) = P_0^{-1}x_0$
$S(0/-1) = P^{-1}(0/-1) = P_0^{-1}$

Η ύπαρξη των αντίστροφων πινάκων που εμφανίζονται στις εξισώσεις του φίλτρου εξασφαλίζεται στην περίπτωση που οι πίνακες  $R(k)$  και  $P_0$  είναι θετικά ορισμένοι (positive definite).

Η απόδειξη των εξισώσεων του Φίλτρου Kalman Πληροφορίας βρίσκεται στο Παράρτημα Δ'.

Για το χρονικά αμετάβλητο μοντέλο, όπου οι πίνακες  $F(k+1, k) = F$ ,  $H(k) = H$ ,  $Q(k) = Q$ ,  $R(k) = R$  και  $B(k) = B$  είναι χρονικά αμετάβλητοι, προκύπτει το Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman Πληροφορίας (Time Invariant Information Kalman Filter):

Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman Πληροφορίας Time Invariant Information Kalman Filter (TIKF)
$y(k/k) = y(k/k-1) + H^T R^{-1} z(k)$
$S(k/k) = S(k/k-1) + H^T R^{-1} H$
$P(k/k) = S^{-1}(k/k)$
$x(k/k) = S^{-1}(k/k) y(k/k)$
$K(k) = S^{-1}(k/k) H^T R^{-1}$
$P(k+1/k) = Q + F S^{-1}(k/k) F^T$
$S(k+1/k) = P^{-1}(k+1/k)$
$y(k+1/k) = S(k+1/k) F S^{-1}(k/k) y(k/k) + S(k+1/k) B u(k)$
$x(k+1/k) = P(k+1/k) y(k+1/k)$
$k = 0, 1, \dots$
$y(0/-1) = P^{-1}(0/-1) x(0/-1) = P_0^{-1} x_0$
$S(0/-1) = P^{-1}(0/-1) = P_0^{-1}$

Η ύπαρξη των αντίστροφων πινάκων, οι οποίοι εμφανίζονται στις εξισώσεις του φίλτρου, εξασφαλίζεται στην περίπτωση κατά την οποία οι πίνακες  $R$  και  $P_0$  είναι θετικά ορισμένοι (positive definite). Οι πίνακες  $R^{-1}$ ,  $H^T R^{-1}$  και  $H^T R^{-1} H$  υπολογίζονται εκ των προτέρων (off-line).

Στη μόνιμη κατάσταση, η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης και ο αντίστροφος πίνακάς της τείνουν σε σταθερές τιμές  $P_p$  και  $P_p^{-1} = S_p$ , η συνδιασπορά λάθους εκτίμησης και ο αντίστροφος πίνακάς της τείνουν σε σταθερές τιμές  $P_e$  και  $P_e^{-1} = S_e$  και το κέρδος τείνει σε μία σταθερή τιμή  $K$ . Τότε, προκύπτει η παρακάτω εξίσωση για την εκτίμηση:

$$x(k+1/k+1) = S_e^{-1} S_p F x(k/k) + S_e^{-1} S_p F u(k) + S_e^{-1} H^T R^{-1} z(k+1) \quad (5.5)$$

όπου

$$S_e^{-1} S_p F = [I - KH] F \quad (5.6)$$

$$S_e^{-1} S_p B = [I - KH] B \quad (5.7)$$

$$S_e^{-1} H^T R^{-1} = K \quad (5.8)$$

Στη μόνιμη κατάσταση, προκύπτει το Φίλτρο Kalman Πληροφορίας Μόνιμης Κατάστασης (Steady State Information Kalman Filter):

Φίλτρο Kalman Πληροφορίας Μόνιμης Κατάστασης Steady State Information Kalman Filter (SSIKF)
$x(k+1/k+1) = Ax(k/k) + Cu(k) + Kz(k+1)$
$k = 0, 1, \dots$
$A = S_e^{-1} S_p F = [I - KH] F$
$C = S_e^{-1} S_p B = [I - KH] B$
$K = S_e^{-1} H^T R^{-1}$
$x(0/0) = [I - KH] x_0 + Kz(0)$

Οι συντελεστές του φίλτρου Kalman πληροφορίας μόνιμης κατάστασης μπορούν να υπολογιστούν εκ των προτέρων (off-line) χρησιμοποιώντας τη λύση της εξίσωσης Riccati.

Οι εξισώσεις του Φίλτρου Kalman Πληροφορίας (Information Kalman Filter) προκύπτουν από τις εξισώσεις του φίλτρου Kalman. Επομένως, το φίλτρο Kalman πληροφορίας και το φίλτρο Kalman υπολογίζουν θεωρητικά την ίδια εκτίμηση και την ίδια συνδιασπορά λάθους εκτίμησης. Αυτό σημαίνει ότι τα δύο φίλτρα είναι ισοδύναμα.

### Παράδειγμα 1. Χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman πληροφορίας.

Στο παράδειγμα αυτό θεωρείται ένα βαθμωτό ( $n=1$  και  $m=1$ ) χρονικά αμετάβλητο μοντέλο, όπου ισχύουν όλες οι υποθέσεις, χωρίς είσοδο, με παραμέτρους:

$$F = 0.75$$

$$H = 1$$

$$Q = 0.5$$

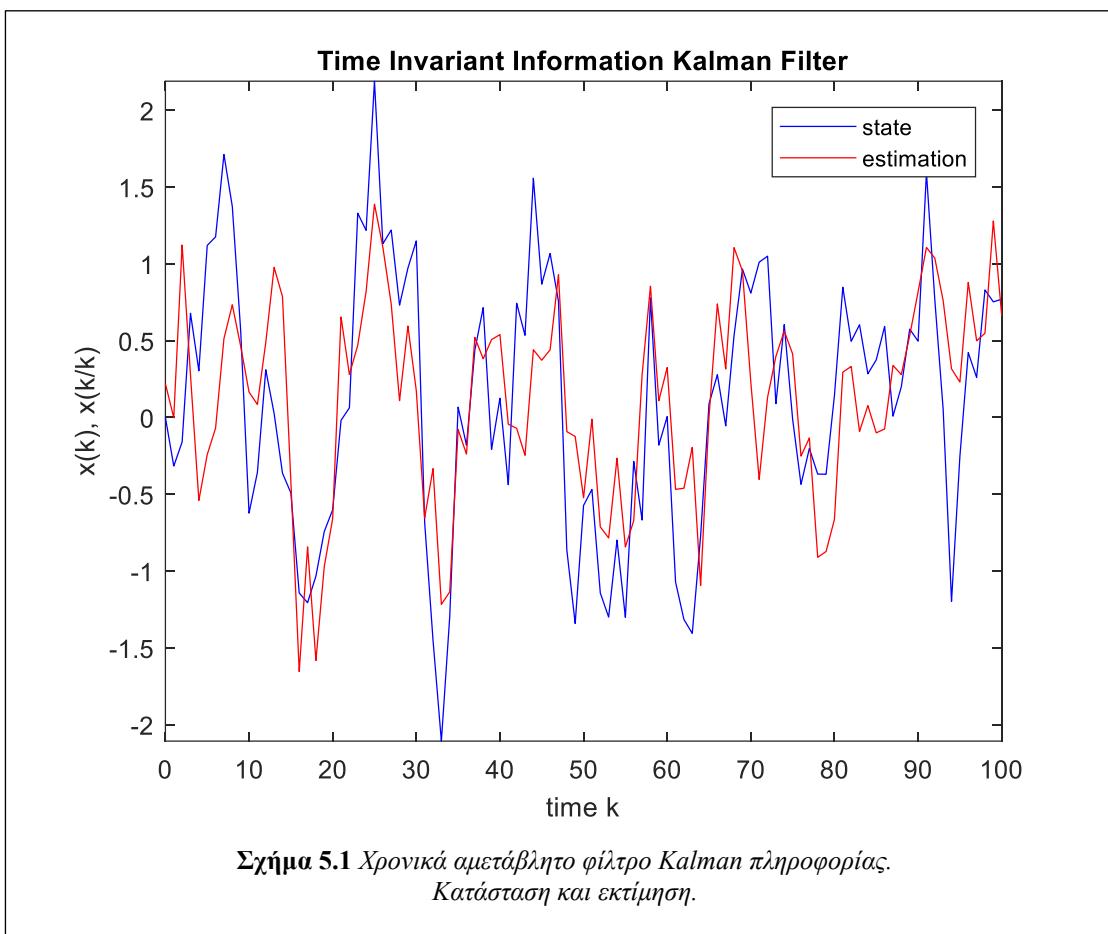
$$R = 1$$

και αρχικές συνθήκες

$$x_0 = 0$$

$$P_0 = 1$$

Στο Σχήμα 5.1 παρουσιάζονται η κατάσταση και η εκτίμηση που υπολογίζεται με τη χρήση του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman και του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman πληροφορίας. Οι εκτιμήσεις των δύο φίλτρων είναι ίδιες: τα δύο φίλτρα είναι ισοδύναμα.



## Παράδειγμα 2. Φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης

Στο παράδειγμα αντό θεωρείται ένα βαθμωτό χρονικά αμετάβλητο μοντέλο, χωρίς είσοδο, με παραμέτρους:

$$F = 0.75$$

$$H = 1$$

$$Q = 0.5$$

$$R = 1$$

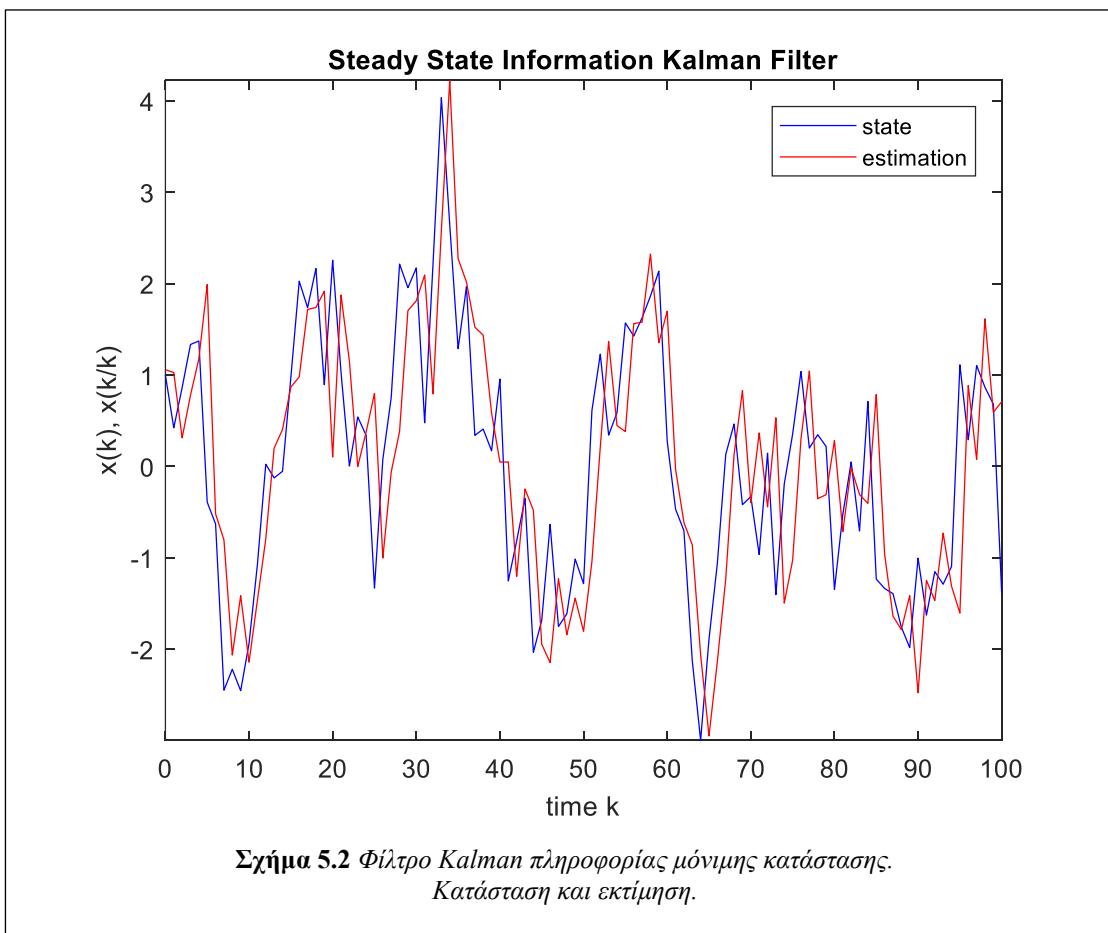
και αρχική συνθήκη

$$x_0 = 1$$

Η διασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση είναι  $P_p = 0.7390$ .

Οι συντελεστές του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης:  $A = 0.4313$ ,  $C = 0$  και  $K = 0.4250$ .

Στο Σχήμα 5.2 παρουσιάζονται η κατάσταση και η εκτίμηση που υπολογίζεται με τη χρήση του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης και του φίλτρου Kalman πληροφορίας μόνιμης κατάστασης. Οι εκτιμήσεις των δύο φίλτρων είναι ίδιες: τα δύο φίλτρα είναι ισοδύναμα.



## 5.2 Φίλτρο Kalman Πληροφορίας σε προγραμματιστικό περιβάλλον

Η συνάρτηση `tvikfilteration` παράγει την εκτίμηση και τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης, καθώς και το κέρδος για μία επανάληψη για το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman πληροφορίας.

Η συνάρτηση `tvikfiteration` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $F(k+1,k), H(k), Q(k), R(k), B(k)$ , την είσοδο  $u(k)$ , την προηγούμενη πρόβλεψη πληροφορίας  $y(k/k-1)$ , την προηγούμενη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης πληροφορίας  $S(k/k-1)$  και την παρούσα μέτρηση  $z(k)$ . Η συνάρτηση έχει εξόδους την εκτίμηση πληροφορίας  $y(k/k)$ , τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης πληροφορίας  $S(k/k)$ , την πρόβλεψη πληροφορίας  $y(k+1/k)$ , τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης πληροφορίας  $S(k+1/k)$  και το κέρδος  $K(k)$ .

Έτσι, για παράδειγμα, για την παραγωγή της εκτίμησης και της πρόβλεψης για το βαθμωτό μοντέλο με παραμέτρους  $F(k+1,k)=H(k)=Q(k)=R(k)=B(k)=1$ , με είσοδο  $u(k)=10$ , με προηγούμενη πρόβλεψη πληροφορίας  $y(k/k-1)=1$  και προηγούμενη διασπορά λάθους πρόβλεψης πληροφορίας  $S(k/k-1)=1$  και με την παρούσα μέτρηση  $z(k)=2$  απαιτείται η κλήση:

```
F=1;
H=1;
Q=1;
R=1;
B=1;
u=10;
yp=1;
sp=1;
z=2;
[ye,se,yp,sp,g]=tvikfiteration(F,H,Q,R,B,u,yp,sp,z)
```

```
function [ye,se,yp,sp,g]=tvikfiteration(F,H,Q,R,B,u,yp,sp,z)
% TIME VARYING INFORMATION KALMAN FILTER
% ONE ITERATION
    ye=yp+H'*inv(R)*z;
    se=sp+H'*inv(R)*H;
    pe=inv(se);
    xe=pe*ye;
    g=pe*H'*inv(R);
    pp=Q+F*pe*F';
    sp=inv(pp);
    yp=sp*F*pe*ye+sp*B*u;
    xp=pp*yp;
```

Η συνάρτηση `tiikfiteration` παράγει την εκτίμηση και τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης, την πρόβλεψη και τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης, καθώς και το κέρδος **για μία επανάληψη** για το χρονικά αμετάβλητο φύλτρο Kalman πληροφορίας.

Η συνάρτηση `tiikfiteration` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $F, H, Q, R, B$ , την είσοδο  $u(k)$ , την προηγούμενη πρόβλεψη πληροφορίας  $y(k/k-1)$ , την προηγούμενη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης πληροφορίας  $S(k/k-1)$  και την παρούσα μέτρηση  $z(k)$ . Η συνάρτηση έχει εξόδους την εκτίμηση πληροφορίας  $y(k/k)$ , τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης πληροφορίας  $S(k/k)$ , την πρόβλεψη πληροφορίας  $y(k+1/k)$ , τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης πληροφορίας  $S(k+1/k)$  και το κέρδος  $K(k)$ .

Έτσι, για παράδειγμα, για την παραγωγή της εκτίμησης και της πρόβλεψης για το βαθμωτό μοντέλο με παραμέτρους  $F=H=Q=R=B=1$ , με είσοδο  $u(k)=10$ , με προηγούμενη πρόβλεψη πληροφορίας  $y(k/k-1)=1$ , προηγούμενη διασπορά λάθους πρόβλεψης πληροφορίας  $S(k/k-1)=1$  και με την παρούσα μέτρηση  $z(k)=2$  απαιτείται η κλήση:

```
F=1;
H=1;
Q=1;
R=1;
B=1;
u=10;
```

```

yp=1;
sp=1;
z=2;
[ye, se, yp, sp, g]=tiikfiteration(F, H, Q, R, B, u, yp, sp, z)

```

```

function [ye, se, yp, sp, g]=tiikfiteration(F, H, Q, R, B, u, yp, sp, z)
% TIME INVARIANT INFORMATION KALMAN FILTER
% ONE ITERATION
ye=yp+H'*inv(R)*z;
se=sp+H'*inv(R)*H;
pe=inv(se);
xe=pe*ye;
g=pe*H'*inv(R);
pp=Q+F*pe*F';
sp=inv(pp);
yp=sp*F*pe*ye+sp*B*u;
xp=pp*yp;

```

Η συνάρτηση ssikfiteration παράγει την εκτίμηση **για μία επανάληψη** για το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης πληροφορίας.

Η συνάρτηση ssikfiteration έχει εισόδους τους συντελεστές του φίλτρου  $A = [I - KH]F$ ,  $C = [I - KH]B$  και  $K$ , την είσοδο  $u(k)$ , την προηγούμενη εκτίμηση  $x(k/k)$  και την παρούσα μέτρηση  $z(k)$ . Η συνάρτηση έχει έξοδο την εκτίμηση  $x(k+1/k+1)$ .

Έτσι, για παράδειγμα, για την παραγωγή της εκτίμησης για το βαθμωτό μοντέλο με παραμέτρους  $A = 0.38197$ ,  $C = 0.38197$ ,  $K = 0.61803$ , με είσοδο  $u(k) = 10$  με προηγούμενη εκτίμηση  $x(k/k) = 1$  και με την παρούσα μέτρηση  $z(k) = 2$  απαιτείται η κλήση:

```

a=0.38197;
c=0.38197;
g=0.61803;
u=10;
xe=1;
z=2;
[xe]=ssikfiteration(a,c,g,u,xe,z)

```

```

function [xe]=ssikfiteration(a,c,g,u,xe,z)
% STEADY STATE INFORMATION KALMAN FILTER
% ONE ITERATION
xe=a*xe+c*u+g*z;

```

### 5.3 Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε τις εξισώσεις του Χρονικά Αμετάβλητου Φίλτρου Kalman Πληροφορίας (Time Invariant Information Kalman Filter).
2. Να αποδείξετε τις εξισώσεις (5.6)-(5.8) του Φίλτρου Kalman Πληροφορίας Μόνιμης Κατάστασης (Steady State Information Kalman Filter).
3. Να υπολογίσετε  $x(2/1)$  και  $P(2/1)$  για το φίλτρο Kalman πληροφορίας χωρίς είσοδο, με παραμέτρους:  $F = 1, H = 1, Q = 1, R = 1$  και αρχικές συνθήκες  $x_0 = 0, P_0 = 1$ .
4. Να γράψετε συνάρτηση για το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman πληροφορίας για το βαθμωτό μοντέλο, όπου  $n = 1$  και  $m = 1$ , χωρίς είσοδο και με παραμέτρους χρονικά αμετάβλητες:

```
function [XE, PE]=tiikf11(f,h,q,r,x0,p0,kmax,Z)
```

- Να γράψετε πρόγραμμα για να υλοποιήσετε το φίλτρο Kalman με παραμέτρους:  $F = 0.9, H = 1, Q = 2, R = 1$  και αρχικές συνθήκες  $x_0 = 0, P_0 = 1$ .
- Να υπολογίσετε την εκτίμηση  $x(k/k)$  της κατάστασης  $x(k)$  και τη διασπορά λάθους εκτίμησης  $P(k/k)$  τις χρονικές στιγμές  $k = 0, 1, \dots, 99$ .
- Να σχεδιάσετε την κατάσταση  $x(k)$  και την εκτίμηση  $x(k/k)$  τις χρονικές στιγμές  $k = 0, 1, \dots, 99$ .
- Να σχεδιάσετε τη διασπορά λάθους εκτίμησης  $P(k/k)$  τις χρονικές στιγμές  $k = 0, 1, \dots, 99$ .

## 5.4 Περίληψη

Το Φίλτρο Kalman Πληροφορίας (Information Kalman Filter) χρησιμοποιεί τους πίνακες πληροφορίας (information matrices) που ορίζονται ως οι αντίστροφοι πίνακες των συνδιασπορών λάθους πρόβλεψης και εκτίμησης.

Οι εξισώσεις του Φίλτρου Kalman Πληροφορίας (Information Kalman Filter) προκύπτουν από τις εξισώσεις του φίλτρου Kalman. Επομένως, το φίλτρο Kalman πληροφορίας και το φίλτρο Kalman υπολογίζουν θεωρητικά την ίδια εκτίμηση και την ίδια συνδιασπορά λάθους εκτίμησης. Αυτό σημαίνει ότι τα δύο φίλτρα είναι ισοδύναμα.

Μπορείτε να ακούσετε την περίληψη με τον Ήχο 5.1.



**Ήχος 5.1 Περίληψη – Κεφάλαιο 5.**

## 5.1 Κριτήριο Αξιολόγησης

Απαντήστε με Σωστό ή Λάθος.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Το φίλτρο Kalman πληροφορίας είναι επαναληπτικός αλγόριθμος.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

$$S(k/k) = P^{-1}(k/k)$$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

$$y(k/k) = P(k/k)x(k/k)$$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Το κέρδος  $K(k)$  του φίλτρου Kalman πληροφορίας είναι πίνακας διαστάσεων  $m \times m$ .

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Όλες οι παράμετροι του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman πληροφορίας είναι σταθερές.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

$$S_e K = H^T R^{-1}$$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

$$P_p^{-1} = S_p$$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

$$S_p F = S_e [I - KH] F$$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

Οι συντελεστές του φίλτρου Kalman πληροφορίας μόνιμης κατάστασης μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας τη λύση της εξίσωσης Lyapunov.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Το φίλτρο Kalman Πληροφορίας και το φίλτρο Kalman υπολογίζουν θεωρητικά τις ίδιες εκτιμήσεις και τις ίδιες συνδιασπορές λάθους εκτίμησης.

---

Θα βρείτε την Απάντηση στο Κριτήριο Αξιολόγησης στο Παράρτημα A'.

Μπορείτε να κάνετε το Κριτήριο Αξιολόγησης με το Διαδραστικό Πρόγραμμα 5.1.



**Διαδραστικό Πρόγραμμα 5.1 Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 5.**

## **Βιβλιογραφία/Αναφορές**

- Anderson, B. D. O., Moore, J. B. (2005). *Optimal Filtering*. Dover Publications, New York.
- Assimakis, N., Adam, M. & Douladiris A. (2012). Information Filter and Kalman Filter Comparison: Selection of the Faster Filter. *International Journal of Information Engineering*, vol. 2, no. 1, pp. 1-5.

## Κεφάλαιο 6 Η ειδική εξίσωση Riccati

### Σύνοψη

Στο κεφάλαιο παρουσιάζεται η ειδική εξίσωση Riccati που προκύπτει από το φίλτρο Kalman πληροφορίας. Η ειδική εξίσωση Riccati χρησιμοποιεί τόσο τον πίνακα της συνδιασποράς λάθους πρόβλεψης, όσο και τον αντίστροφο πίνακα της συνδιασποράς λάθους πρόβλεψης. Παρουσιάζονται οι επαναληπτικοί αλγόριθμοι για την επίλυση της εξίσωσης ειδικής Riccati: ο ειδικός ανά βήμα αλγόριθμος (*per step algorithm*), ο ειδικός αλγόριθμος διπλασιασμού (*doubling algorithms*) και ο αλγόριθμος κυκλικής αναγωγής (*cyclic reduction algorithm*). Δίνονται παραδείγματα επίλυσης της ειδικής εξίσωσης Riccati. Παρουσιάζεται η δυϊκή εξίσωση Riccati (*dual Riccati equation*) και ο δυϊκος αλγόριθμος διπλασιασμού (*dual doubling algorithm*) για την επίλυσή της.

### Προαπαιτούμενη γνώση

Εξίσωση Riccati, επαναληπτικοί αλγόριθμοι, πίνακες.

### 6.1 Η ειδική εξίσωση Riccati από το φίλτρο Kalman πληροφορίας

Για το χρονικά αμετάβλητο μοντέλο, όπου οι πίνακες  $F$ ,  $H$ ,  $Q$  και  $R$  είναι σταθεροί (χρονικά αμετάβλητοι), από τις εξισώσεις του φίλτρου Kalman προκύπτει [Anderson & Moore (2005)] η **εξίσωση Riccati (Riccati equation)**:

$$P(k+1/k) = Q + FP(k/k-1)F^T - FP(k/k-1)H^T \left[ HP(k/k-1)H^T + R \right]^{-1} HP(k/k-1)F^T \quad (6.1)$$

όπου  $Q \geq 0$ ,  $R \geq 0$  και  $P(k/-1) \geq 0$ .

Για λόγους απλούστευσης, θεωρούμε ότι  $Q > 0$ ,  $R > 0$ ,  $P(k/k-1) > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$  και  $P(0/-1) = P_0 \geq 0$ .

Αν το μοντέλο είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (asymptotically stable), δηλαδή οι ιδιοτιμές (eigenvalues) του πίνακα  $F$  βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, τότε η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης συγκλίνει σε μία σταθερή τιμή  $P_p$ , η οποία είναι μοναδική (unique) και καλείται συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση. Το φίλτρο μπορεί να τείνει σε μόνιμη κατάσταση, ακόμη και όταν το μοντέλο δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση ικανοποιεί την **αλγεβρική εξίσωση Riccati**:

$$P_p = Q + FP_p F^T - FP_p H^T \left[ HP_p H^T + R \right]^{-1} HP_p F^T, \quad (6.2)$$

όπου  $Q \geq 0$ ,  $R \geq 0$  και  $P_p \geq 0$ .

Για λόγους απλούστευσης, θεωρούμε ότι  $Q > 0$ ,  $R > 0$ ,  $P_p > 0$ .

Το Φίλτρο Kalman Πληροφορίας (Information Kalman Filter) [Anderson & Moore (2005), Assimakis, Adam, Douladiris (2012)] χρησιμοποιεί, αντί του πίνακα της συνδιασποράς λάθους πρόβλεψης, τον αντίστροφο πίνακα της συνδιασποράς λάθους πρόβλεψης:

$$S(k+1/k) = P^{-1}(k+1/k) \quad (6.3)$$

με την προϋπόθεση ότι ο πίνακας της συνδιασποράς λάθους πρόβλεψης αντιστρέφεται.

Στο σημείο αυτό παρατίθεται το Λήμμα Αντιστροφής Πινάκων (Matrix Inversion Lemma): για τους πίνακες  $A, B, C, D$  κατάλληλων διαστάσεων, όπου οι πίνακες  $A, C$  είναι αντιστρέψιμοι, ισχύει:

$$[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B \left[ C^{-1} + DA^{-1}B \right]^{-1} DA^{-1} \quad (6.4)$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα Αντιστροφής Πινάκων στην εξίσωση Riccati (6.1), προκύπτει η **ειδική εξίσωση Riccati (special Riccati equation)**:

$$P(k+1/k) = Q + F \left[ P^{-1}(k/k-1) + H^T R^{-1} H \right]^{-1} F^T \quad (6.5)$$

Η ειδική εξίσωση Riccati χρησιμοποιεί τόσο τον πίνακα της συνδιασποράς λάθους πρόβλεψης, όσο και τον αντίστροφο πίνακα της συνδιασποράς λάθους πρόβλεψης.

Η ύπαρξη των αντίστροφων πινάκων εξασφαλίζεται στην περίπτωση που οι πίνακες  $Q$  και  $R$  είναι θετικά ορισμένοι.

Στη μόνιμη κατάσταση, ικανοποιείται η **αλγεβρική ειδική εξίσωση Riccati**:

$$P_p = Q + F \left[ P_p^{-1} + H^T R^{-1} H \right]^{-1} F^T \quad (6.6)$$

Οι αλγόριθμοι για την επίλυση της ειδικής εξίσωσης Riccati [Assimakis, Lainiotis, Katsikas & Sanida (1997), Ασημάκης (2013)], βασίζονται στους αλγορίθμους για την επίλυση της εξίσωσης Riccati.

## 6.2 Ειδικός ανά βήμα αλγόριθμος

Είναι γνωστό [Anderson & Moore (2005)] ότι η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης τείνει στη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση ανεξάρτητα από την αρχική αβεβαιότητα, δηλαδή ανεξάρτητα από την τιμή της αρχικής συνθήκης  $P(0/-1) = P_0$ . Στους επαναληπτικούς αλγορίθμους που παρουσιάζονται παρακάτω, θεωρείται μηδενική αρχική συνθήκη  $P(0/-1) = P_0 = 0$ , οπότε  $P(1/0) = Q$ .

Η ειδική εξίσωση Riccati υπολογίζει επαναληπτικά τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης:

$$P(k+1/k) = Q + F \left[ P^{-1}(k/k-1) + H^T R^{-1} H \right]^{-1} F^T \quad (6.7)$$

για  $k = 1, 2, \dots$

με αρχική συνθήκη

$$P(1/0) = Q$$

έως ότου

$$\|P(k+1/k) - P(k/k-1)\| < \varepsilon, \quad (6.8)$$

όπου το κριτήριο σύγκλισης  $\varepsilon$  είναι ένας πολύ μικρός θετικός αριθμός.

Τότε:

$$P_p = \lim_{k \rightarrow \infty} P(k+1/k) \quad (6.9)$$

Η ύπαρξη των αντίστροφων πινάκων εξασφαλίζεται στην περίπτωση που οι πίνακες  $Q$  και  $R$  είναι θετικά ορισμένοι.

Έτσι, προκύπτει ο Ειδικός Ανά Βήμα Αλγόριθμος (Special Per Step Algorithm) για την επίλυσης της εξίσωσης Riccati.

<b>Ειδικός Ανά βήμα Αλγόριθμος</b> <b>Special Per Step Algorithm</b>
$P(k+1/k) = Q + F \left[ P^{-1}(k/k-1) + H^T R^{-1} H \right]^{-1} F^T$ $k = 1, 2, \dots$ $P(1/0) = Q$ $P_p = \lim_{k \rightarrow \infty} P(k+1/k)$

## 6.3 Ειδικός αλγόριθμος διπλασιασμού

Εφαρμόζοντας το Λήμμα Αντιστροφής Πινάκων στην ειδική εξίσωση Riccati (6.5), προκύπτει:

$$P^{-1}(k+1/k) = Q^{-1} - Q^{-1} F \left[ P^{-1}(k/k-1) + H^T R^{-1} H + F^T Q^{-1} F \right]^{-1} F^T Q^{-1} \quad (6.10)$$

Τότε

$$S(k+1/k) = \gamma - \alpha [S(k/k-1) + \beta]^{-1} \alpha^T \quad (6.11)$$

όπου

$$S(k+1/k) = P^{-1}(k+1/k), \text{ όπως ορίστηκε στην (6.3)}$$

$$\alpha = Q^{-1}F \quad (6.12)$$

$$\beta = F^T Q^{-1} F + H^T R^{-1} H \quad (6.13)$$

$$\gamma = Q^{-1} \quad (6.14)$$

Η ύπαρξη των αντίστροφων πινάκων εξασφαλίζεται στην περίπτωση που οι πίνακες  $Q$  και  $R$  είναι θετικά ορισμένοι.

Χρησιμοποιώντας τον συμπλεκτικό πίνακα  $\Phi$  διαστάσεων  $2n \times 2n$ :

$$\Phi = \begin{bmatrix} a^{-1} & a^{-1}b \\ ca^{-1} & a^T + ca^{-1}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma\alpha^{-T} & \gamma\alpha^{-T}\beta - \alpha \\ \alpha^{-T} & \alpha^{-T}\beta \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

προκύπτουν οι επαναληπτικές σχέσεις:

$$\alpha(k+1) = \alpha(k) [\beta(k) + \gamma(k)]^{-1} \alpha(k) \quad (6.16)$$

$$\beta(k+1) = \beta(k) - \alpha^T(k) [\beta(k) + \gamma(k)]^{-1} \alpha(k) \quad (6.17)$$

$$\gamma(k+1) = \gamma(k) - \alpha(k) [\beta(k) + \gamma(k)]^{-1} \alpha^T(k) \quad (6.18)$$

με αρχικές συνθήκες:

$$\alpha(1) = a = Q^{-1}F^T \quad (6.19)$$

$$\beta(1) = \beta = F^T Q^{-1} F + H^T R^{-1} H \quad (6.20)$$

$$\gamma(1) = \gamma = Q^{-1} \quad (6.21)$$

και

$$\gamma(k) = P^{-1}(2^k / 2^k - 1) \quad (6.22)$$

Οι πίνακες  $\beta(k)$  και  $\gamma(k)$  είναι συμμετρικοί.

Έτσι, προκύπτει ο Ειδικός Αλγόριθμος Διπλασιασμού (Special Doubling Algorithm) για την επίλυση της εξίσωσης Riccati.

Ειδικός Αλγόριθμος Διπλασιασμού Special Doubling Algorithm
$\alpha(k+1) = \alpha(k) [\beta(k) + \gamma(k)]^{-1} \alpha(k)$
$\beta(k+1) = \beta(k) - \alpha^T(k) [\beta(k) + \gamma(k)]^{-1} \alpha(k)$
$\gamma(k+1) = \gamma(k) - \alpha(k) [\beta(k) + \gamma(k)]^{-1} \alpha^T(k)$
$\alpha(1) = Q^{-1}F$
$\beta(1) = F^T Q^{-1} F + H^T R^{-1} H$
$\gamma(1) = Q^{-1}$
$P_p = [\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(k)]^{-1}$

## 6.4 Αλγόριθμος κυκλικής αναγωγής

Εφαρμόζοντας το Λήμμα Αντιστροφής Πινάκων, η αλγεβρική ειδική εξίσωση Riccati (6.6) γράφεται:

$$P_p^{-1} = Q^{-1} - Q^{-1}F \left[ P_p^{-1} + F^T Q^{-1}F + H^T R^{-1}H \right]^{-1} F^T Q^{-1} \quad (6.23)$$

Τότε

$$P_p^{-1} + F^T Q^{-1}F + H^T R^{-1}H = Q^{-1} + F^T Q^{-1}F + H^T R^{-1}H - Q^{-1}F \left[ P_p^{-1} + F^T Q^{-1}F + H^T R^{-1}H \right]^{-1} F^T Q^{-1}$$

Οπότε

$$X + A^T X^{-1}A = L \quad (6.24)$$

όπου

$$X = P_p^{-1} + F^T Q^{-1}F + H^T R^{-1}H \quad (6.25)$$

$$L = Q^{-1} + F^T Q^{-1}F + H^T R^{-1}H \quad (6.26)$$

$$A = F^T Q^{-1} \quad (6.27)$$

Επομένως, η αλγεβρική ειδική εξίσωση Riccati (6.6) είναι ισοδύναμη με την κλασική εξίσωση πινάκων (6.24) με πίνακες που ορίζονται από (6.25)-(6.27).

Είναι γνωστό [Meini (2001), Assimakis & Adam (2020)] ότι η εξίσωση πινάκων (6.24) μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας τη **μέθοδο κυκλικής αναγωγής** (**cyclic reduction method**), που συνοψίζεται παρακάτω:

$$A(k+1) = A(k)L^{-1}(k)A(k) \quad (6.28)$$

$$L(k+1) = L(k) - A(k)L^{-1}(k)A^T(k) - A^T(k)L^{-1}(k)A(k) \quad (6.29)$$

$$X(k+1) = X(k) - A^T(k)L^{-1}(k)A(k) \quad (6.30)$$

$$Y(k+1) = Y(k) - A(k)L^{-1}(k)A^T(k) \quad (6.31)$$

για  $k = 1, 2, \dots$

με αρχικές συνθήκες

$$A(1) = -AL^{-1}A \quad (6.32)$$

$$L(1) = L - AL^{-1}A^T - A^T L^{-1}A \quad (6.33)$$

$$X(1) = L - A^T L^{-1}A \quad (6.34)$$

$$Y(1) = L - AL^{-1}A^T \quad (6.35)$$

έως ότου

$$\|X(k+1) - X(k)\| < \varepsilon \quad (6.36)$$

όπου το κριτήριο σύγκλισης  $\varepsilon$  είναι ένας πολύ μικρός θετικός αριθμός.

Τότε:

$$X = \lim_{k \rightarrow \infty} X(k) \quad (6.37)$$

Επειδή η αλγεβρική ειδική εξίσωση Riccati (6.6) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση πινάκων (6.24), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο κυκλικής αναγωγής για την επίλυση της εξίσωσης Riccati. Από την (6.25) προκύπτει ότι η λύση της εξίσωσης Riccati υπολογίζεται από τη λύση της κλασικής εξίσωσης πινάκων με τη σχέση:

$$P_p = \left[ X - \left( F^T Q^{-1}F + H^T R^{-1}H \right) \right]^{-1} \quad (6.38)$$

Έτσι, προκύπτει ο Αλγόριθμος Κυκλικής Αναγωγής (Cyclic Reduction Algorithm) για την επίλυση της εξίσωσης Riccati.

Αλγόριθμος Κυκλικής Αναγωγής Cyclic Reduction Algorithm
$A(k+1) = A(k)L^{-1}(k)A(k)$
$L(k+1) = L(k) - A(k)L^{-1}(k)A^T(k) - A^T(k)L^{-1}(k)A(k)$
$X(k+1) = X(k) - A^T(k)L^{-1}(k)A(k)$
$Y(k+1) = Y(k) - A(k)L^{-1}(k)A^T(k)$
$k = 1, 2, \dots$
$A(1) = -AL^{-1}A$
$L(1) = L - AL^{-1}A^T - A^T L^{-1}A$
$X(1) = L - A^T L^{-1}A$
$Y(1) = L - AL^{-1}A^T$
$A = F^T Q^{-1}$
$L = Q^{-1} + F^T Q^{-1}F + H^T R^{-1}H$
$X = \lim_{k \rightarrow \infty} X(k)$
$P_p = \left[ X - (F^T Q^{-1}F + H^T R^{-1}H) \right]^{-1}$

## 6.5 Η δυϊκή εξίσωση Riccati

Στη γενική περίπτωση, όπου οι πίνακες  $Q$  και  $R$  είναι θετικά ορισμένοι ( $Q > 0$  και  $R > 0$ ), οπότε είναι αντιστρέψιμοι, θεωρούμε την ειδική εξίσωση Riccati:

$$P(k+1/k) = Q + F \left[ P^{-1}(k/k-1) + H^T R^{-1} H \right]^{-1} F^T, \quad (6.39)$$

με αρχική συνθήκη  $P(1/0) = Q$

και την αντίστοιχη **δυϊκή εξίσωση Riccati (dual Riccati equation):**

$$\Pi(k+1/k) = H^T R^{-1} H + F^T \left[ \Pi^{-1}(k/k-1) + Q \right]^{-1} F, \quad (6.40)$$

με αρχική συνθήκη  $\Pi(1/0) = H^T R^{-1} H$ .

Λόγω του γεγονότος ότι οι πίνακες  $F$  και  $F^T$  έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές, αν οι ιδιοτιμές του πίνακα  $F$  βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, τότε υπάρχει μοναδική λύση  $P_p$  της ειδικής εξίσωσης Riccati και μοναδική λύση  $\Pi_p$  της δυϊκής εξίσωσης Riccati.

Για τη δυϊκή εξίσωση Riccati προκύπτει ο **δυϊκός αλγόριθμος διπλασιασμού (dual doubling algorithm)** χρησιμοποιώντας τους πίνακες  $a_d(k)$ ,  $b_d(k)$  και  $c_d(k)$  διαστάσεων  $n \times n$ , που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$a_d(k+1) = a_d(k) \left[ I + b_d(k)c_d(k) \right]^{-1} a_d(k) \quad (6.41)$$

$$b_d(k+1) = b_d(k) + a_d(k) \left[ I + b_d(k)c_d(k) \right]^{-1} b_d(k)a_d^T(k) \quad (6.42)$$

$$c_d(k+1) = c_d(k) + a_d^T(k)c_d(k) \left[ I + b_d(k)c_d(k) \right]^{-1} a_d(k) \quad (6.43)$$

με αρχικές συνθήκες:

$$a_d(1) = F \quad (6.44)$$

$$b_d(1) = Q \quad (6.45)$$

$$c_d(1) = H^T R^{-1} H \quad (6.46)$$

Οι πίνακες  $b_d(k)$  και  $c_d(k)$  είναι συμμετρικοί.

Επίσης, ισχύει η σχέση:

$$c_d(k) = \Pi(2^k / 2^k - 1) \quad (6.47)$$

Έτσι προκύπτει ο **Δυϊκός Αλγόριθμος Διπλασιασμού (Dual Doubling Algorithm)** για την επίλυση της δυϊκής εξίσωσης Riccati

<b>Δυϊκός Αλγόριθμος Διπλασιασμού</b> <b>Dual Doubling Algorithm</b>
$a_d(k+1) = a_d(k)[I + b_d(k)c_d(k)]^{-1}a_d(k)$
$b_d(k+1) = b_d(k) + a_d(k)[I + b_d(k)c_d(k)]^{-1}b_d(k)a_d^T(k)$
$c_d(k+1) = c_d(k) + a_d^T(k)c_d(k)[I + b_d(k)c_d(k)]^{-1}a_d(k)$
$a_d(1) = F$
$b_d(1) = Q$
$c_d(1) = H^T R^{-1} H$
$\Pi_p = \lim_{k \rightarrow \infty} c_d(k)$

**Σχέση του αλγορίθμου διπλασιασμού και του δυϊκού αλγορίθμου διπλασιασμού.**

Ο αλγόριθμος διπλασιασμού για την επίλυση της εξίσωσης Riccati και ο δυϊκός αλγόριθμος διπλασιασμού για την επίλυση της δυϊκής εξίσωσης Riccati συνδέονται με τις σχέσεις:

$$a_d(k) = a^T(k) \quad (6.48)$$

$$b_d(k) = c(k) \quad (6.49)$$

$$c_d(k) = b(k) \quad (6.50)$$

### Απόδειξη.

Εφαρμόζοντας την επαγωγική μέθοδο, είναι προφανές ότι οι σχέσεις ισχύουν για  $k = 1$ .

Έστω ότι οι σχέσεις ισχύουν για  $k = k$ .

Τότε, για  $k = k + 1$  έχουμε:

$$\begin{aligned} a_d(k+1) &= a_d(k)[I + b_d(k)c_d(k)]^{-1}a_d(k) \\ &= a^T(k)[I + c(k)b(k)]^{-1}a^T(k) \\ &= a^T(k)[I + b^T(k)c^T(k)]^{-T}a^T(k) \\ &= [a(k)[I + b(k)c(k)]^{-1}a(k)]^T = a^T(k+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_d(k+1) &= b_d(k) + a_d(k)[I + b_d(k)c_d(k)]^{-1}b_d(k)a_d^T(k) = \\ &= b_d(k) + a_d(k)[b_d^{-1}(k) + c_d(k)]^{-1}a_d^T(k) = \\ &= c(k) + a^T(k)[c^{-1}(k) + b(k)]^{-1}a(k) = \\ &= c(k) + a^T(k)c(k)[I + b(k)c(k)]^{-1}a(k) = c(k+1) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} c_d(k+1) &= c_d(k) + a_d^T(k)c_d(k)[I + b_d(k)c_d(k)]^{-1}a_d(k) = \\ &= c_d(k) + a_d^T(k)[c_d^{-1}(k) + b_d(k)]^{-1}a_d(k) = \\ &= b(k) + a(k)[b^{-1}(k) + c(k)]^{-1}a^T(k) = \\ &= b(k) + a(k)[I + b(k)c(k)]^{-1}b(k)a^T(k) = b(k+1) \end{aligned}$$

**Όρια των αλγορίθμου διπλασιασμού και του δυϊκού αλγορίθμου διπλασιασμού.**

Ο αλγόριθμος διπλασιασμού για την επίλυση της εξίσωσης Riccati και ο δυϊκός αλγόριθμος διπλασιασμού για την επίλυση της δυϊκής εξίσωσης Riccati έχουν όρια που συνδέονται με τις σχέσεις:

$$\lim a(k) = 0 \quad (6.51)$$

$$\lim b(k) = \Pi_p \quad (6.52)$$

$$\lim c(k) = P_p \quad (6.53)$$

$$\lim a_d(k) = 0 \quad (6.54)$$

$$\lim b_d(k) = P_p \quad (6.55)$$

$$\lim c_d(k) = \Pi_p \quad (6.56)$$

**Απόδειξη.**

Λόγω του γεγονότος ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $F$  βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου και από τις εξισώσεις του αλγορίθμου διπλασιασμού του δυϊκού αλγορίθμου διπλασιασμού προκύπτουν τα όρια:

$$\lim a(k) = 0, \lim c(k) = P_p, \lim a_d(k) = 0 \text{ και } \lim c_d(k) = \Pi_p$$

τότε, από (6.33) και (6.34) προκύπτουν τα όρια:

$$\lim b(k) = \Pi_p$$

$$\lim b_d(k) = P_p.$$

## 6.6 Επίλυση της ειδικής εξίσωσης Riccati σε προγραμματιστικό περιβάλλον

Η συνάρτηση `respsa` υπολογίζει τη λύση της εξίσωσης Riccati χρησιμοποιώντας τον ειδικό ανά βήμα αλγόριθμο.

Η συνάρτηση `respsa` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $F, H, Q, R$  και το κριτήριο σύγκλισης και εξόδους τη λύση της εξίσωσης Riccati και το πλήθος των επαναλήψεων.

Για παράδειγμα, για την επίλυση της εξίσωσης Riccati με παραμέτρους  $F = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.7 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$ ,  $H = [1 \ 1]$ ,

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, R = 1 \text{ και κριτήριο σύγκλισης } \varepsilon = 10^{-3} \text{ απαιτείται η κλήση}$$

```
F=[-0.9 0.7
   -0.3 0.1];
H=[1 1];
Q=[1 0
   0 3];
R=1;
[P,iterations]=respsa(F,H,Q,R,0.001)
```

```

function [P,iterations]=respsa(F,H,Q,R,epsilon)
% RICCATI EQUATION
% Special Per Step Algorithm
k=0;
b=H'*inv(R)*H;
p=Q;
k=k+1;
p1=Q+F*inv(inv(p)+b)*F';
d=p1-p;
while norm(d)>epsilon
    k=k+1;
    p1=Q+F*inv(inv(p)+b)*F';
    d=p1-p;
    p=p1;
end
P=p;
iterations=k;

```

Η συνάρτηση `resda` υπολογίζει τη λύση της εξίσωσης Riccati χρησιμοποιώντας τον ειδικό αλγόριθμο διπλασιασμού.

Η συνάρτηση `resda` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $F, H, Q, R$  και το κριτήριο σύγκλισης και εξόδους τη λύση της εξίσωσης Riccati και το πλήθος των επαναλήψεων.

Για παράδειγμα, για την επίλυση της εξίσωσης Riccati με παραμέτρους  $F = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.7 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$ ,  $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, R = 1 \text{ και κριτήριο σύγκλισης } \varepsilon = 10^{-3} \text{ απαιτείται η κλήση}$$

```

F=[-0.9 0.7
   -0.3 0.1];
H=[1 1];
Q=[1 0
   0 3];
R=1;
[P,iterations]= resda (F,H,Q,R,0.001)

```

```

function [P,iterations]=resda (F,H,Q,R,epsilon)
% RICCATI EQUATION
% Special Doubling Algorithm
n=size(F,1);
mon=eye(n);
k=1;
a=inv(Q)*F;
b=F'*inv(Q)*F+H'*inv(R)*H;
c=inv(Q);
k=k+1;
a1=a*inv(b+c)*a;
b1=b-a'*inv(b+c)*a;
c1=c-a*inv(b+c)*a';
d=c1-c;
a=a1;
b=b1;
c=c1;
while norm(d)>epsilon
    k=k+1;

```

```

a1=a*inv(b+c)*a;
b1=b-a'*inv(b+c)*a;
c1=c-a*inv(b+c)*a';
d=c1-c;
a=a1;
b=b1;
c=c1;
end
P=inv(c);
iterations=k;

```

Η συνάρτηση `recrm` υπολογίζει τη λύση της εξίσωσης Riccati χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο κυκλικής αναγωγής. Η συνάρτηση `recrm` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $F, H, Q, R$  και το κριτήριο σύγκλισης και εξόδους τη λύση της εξίσωσης Riccati και το πλήθος των επαναλήψεων.

Για παράδειγμα, για την επίλυση της εξίσωσης Riccati με παραμέτρους  $F = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.7 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$ ,  $H = [1 \ 1]$ ,

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $R = 1$  και κριτήριο σύγκλισης  $\varepsilon = 10^{-3}$  απαιτείται η κλήση:

```

F=[-0.9 0.7
   -0.3 0.1];
H=[1 1];
Q=[1 0
   0 3];
R=1;
[P,iterations]=recrm(F,H,Q,R,0.001)

```

```

function [P,iterations]=recrm(F,H,Q,R,epsilon)
% RICCATI EQUATION
% Cyclic Reduction Algorithm
A=F'*inv(Q);
L=inv(Q)+F'*inv(Q)*F+H'*inv(R)*H;
k=1;
a=-A*inv(L)*A;
l=L-A*inv(L)*A'-A'*inv(L)*A;
x=L-A'*inv(L)*A;
y=L-A*inv(L)*A';
k=k+1;
anext=a*inv(l)*a;
lnext=l-a*inv(l)*a'-a'*inv(l)*a;
xnext=x-a'*inv(l)*a;
ynext=y-a*inv(l)*a';
dx=xnext-x;
while norm(dx)>epsilon
k=k+1;
anext=a*inv(l)*a;
lnext=l-a*inv(l)*a'-a'*inv(l)*a;
xnext=x-a'*inv(l)*a;
ynext=y-a*inv(l)*a';
dx=xnext-x;
a=anext;
l=lnext;
x=xnext;
y=ynext;

```

```

end;
X=x;

P=inv(X-(F'*inv(Q)*F+H'*inv(R)*H));
iterations=k;

```

Η συνάρτηση dualreda υπολογίζει τη λύση της δυϊκής εξίσωσης Riccati χρησιμοποιώντας τον δυϊκό αλγόριθμο διπλασιασμού.

Η συνάρτηση dualreda έχει εισόδους τις παραμέτρους  $F, H, Q, R$  και το κριτήριο σύγκλισης και εξόδους τη λύση της δυϊκής εξίσωσης Riccati και το πλήθος των επαναλήψεων.

Για παράδειγμα, για την επίλυση της δυϊκής εξίσωσης Riccati με παραμέτρους  $F = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.7 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$ ,  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ,

$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  και κριτήριο σύγκλισης  $\varepsilon = 10^{-3}$  απαιτείται η κλήση:

```

F=[-0.9 0.7
   -0.3 0.1];
H=[1 1
   1 0];
Q=[1 0
   0 3];
R=[1 0
   0 1];
[P,iterations]= dualreda (F,H,Q,R,0.001)

```

```

function [P,iterations]=dualreda(F,H,Q,R,epsilon)
% DUAL RICCATI EQUATION
% Dual Doubling Algorithm
n=size(F,1);
mon=eye(n);
k=1;
a=F;
b=Q;
c=H'*inv(R)*H;
k=k+1;
a1=a*inv(mon+b*c)*a;
b1=b+a*inv(mon+b*c)*b*a';
c1=c+a'*c*inv(mon+b*c)*a;
d=c1-c;
a=a1;
b=b1;
c=c1;
while norm(d)>epsilon
    k=k+1;
    a1=a*inv(mon+b*c)*a;
    b1=b+a*inv(mon+b*c)*b*a';
    c1=c+a'*c*inv(mon+b*c)*a;
    d=c1-c;
    a=a1;
    b=b1;
    c=c1;
end
P=c;
iterations=k;

```

## 6.7 Παραδείγματα

### Παράδειγμα 1. Εξίσωση Riccati για βαθμωτό μοντέλο

Θεωρείται το βαθμωτό μοντέλο διαστάσεων  $n=1$  και  $m=1$  με παραμέτρους:

$$F = 0.8$$

$$H = 1$$

$$Q = 1$$

$$R = 10$$

Η διασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση, που υπολογίζεται από τον ανά βήμα αλγόριθμο και από τον ειδικό ανά βήμα αλγόριθμο για διάφορες τιμές του κριτηρίου σύγκλισης, παρουσιάζεται στον Πίνακα 6.1. Ο ανά βήμα αλγόριθμος και ο ειδικός ανά βήμα αλγόριθμος υπολογίζουν ίσα αποτελέσματα.

Ανά βήμα αλγόριθμος		
κριτήριο σύγκλισης	διασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση	πλήθος επαναλήψεων
$10^{-3}$	2.118306328328473	11
$10^{-4}$	2.119001485395359	14
$10^{-5}$	2.119059010332590	17
$10^{-6}$	2.119063770097626	20

Πίνακας 6.1 Εξίσωση Riccati. Ανά βήμα αλγόριθμος και ειδικός ανά βήμα αλγόριθμος.

### Παράδειγμα 2. Εξίσωση Riccati για πίνακες.

$$F = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.7 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R = 1$$

Ο αλγόριθμος διπλασιασμού με κριτήριο σύγκλισης  $\varepsilon = 10^{-6}$  συγκλίνει μετά από 6 επαναλήψεις και υπολογίζει τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση:

$$P_p = \begin{bmatrix} 4.810592973151730 & 0.967975418695892 \\ 0.967975418695892 & 3.250939167852517 \end{bmatrix}$$

Ο ειδικός αλγόριθμος διπλασιασμού με κριτήριο σύγκλισης  $\varepsilon = 10^{-6}$  συγκλίνει μετά από 6 επαναλήψεις και υπολογίζει τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση:

$$P_p = \begin{bmatrix} 4.810592973151734 & 0.967975418695893 \\ 0.967975418695893 & 3.250939167852518 \end{bmatrix}$$

Ο αλγόριθμος κυκλικής αναγωγής με κριτήριο σύγκλισης  $\varepsilon = 10^{-6}$  συγκλίνει μετά από 6 επαναλήψεις και υπολογίζει τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση:

$$P_p = \begin{bmatrix} 4.810592973151735 & 0.967975418695893 \\ 0.967975418695893 & 3.250939167852517 \end{bmatrix}$$

**Παράδειγμα 3. Δυϊκός αλγόριθμος διπλασιασμού για βαθμωτό μοντέλο**  
 Θεωρείται το βαθμωτό μοντέλο διαστάσεων  $n=1$  και  $m=1$  με παραμέτρους:

$$F = 0.8$$

$$H = 2$$

$$Q = 1$$

$$R = 10$$

Ο αλγόριθμος διπλασιασμού για την επίλυση της εξίσωσης Riccati και ο δυϊκός αλγόριθμος διπλασιασμού για την επίλυση της δυϊκής εξίσωσης Riccati με κριτήριο σύγκλισης  $\varepsilon = 10^{-6}$  υπολογίζουν τα όρια:

$$\lim b(k) = \lim c_d(k) = \Pi_p = 0.6528$$

$$\lim c(k) = \lim b_d(k) = P_p = 1.6319$$

**Παράδειγμα 4. Δυϊκός αλγόριθμος διπλασιασμού για πίνακες**

Θεωρείται ένα μοντέλο διαστάσεων  $n=2$  και  $m=2$  με παραμέτρους:

$$F = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.7 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο αλγόριθμος διπλασιασμού για την επίλυση της εξίσωσης Riccati και ο δυϊκός αλγόριθμος διπλασιασμού για την επίλυση της δυϊκής εξίσωσης Riccati με κριτήριο σύγκλισης  $\varepsilon = 10^{-6}$  υπολογίζουν τα όρια:

$$\lim b(k) = \lim c_d(k) = \Pi_p = \begin{bmatrix} 2.6152 & 0.5357 \\ 0.5357 & 1.3547 \end{bmatrix}$$

$$\lim c(k) = \lim b_d(k) = P_p = \begin{bmatrix} 2.5109 & 0.3555 \\ 0.3555 & 3.0878 \end{bmatrix}$$

## 6.8 Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε ότι οι πίνακες  $\beta(k)$  και  $\gamma(k)$  στον ειδικό αλγόριθμο διπλασιασμού είναι συμμετρικοί για κάθε  $k$ .
2. Να αποδείξετε ότι  $\lim \alpha(k) = 0$  στον ειδικό αλγόριθμο διπλασιασμού.
3. Να αποδείξετε τις εξισώσεις (6.16)-(6.18) του ειδικού αλγόριθμου διπλασιασμού.
4. Να αποδείξετε ότι αν  $\lim b(k) = \Pi_p$  και  $\lim c(k) = P_p$ , τότε  $\lim b_d(k) = P_p$  και  $\lim c_d(k) = \Pi_p$ .
5. Να γράψετε συνάρτηση για την επίλυση της βαθμωτής εξίσωσης Riccati όπου  $n=1$  και  $m=1$  χρησιμοποιώντας τον ειδικό ανά βήμα αλγόριθμο

```
function [P,iterations]=respsal(f,h,q,r,epsilon)
```

- Να επιλύσετε την εξίσωση Riccati με παραμέτρους:

$$F=1, H=1, Q=1, R=1$$

για τις τιμές του κριτηρίου σύγκλισης  $\epsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$ .

- Να σχεδιάσετε το πλήθος των επαναλήψεων ως προς το κριτήριο σύγκλισης.

6. Να γράψετε συνάρτηση για την επίλυση της βαθμωτής εξίσωσης Riccati, όπου  $n=1$  και  $m=1$  χρησιμοποιώντας τον ειδικό αλγόριθμο διπλασιασμού

```
function [P]=resdal(f,h,q,r,iterations)
```

- Να επιλύσετε την εξίσωση Riccati με παραμέτρους:

$$F=1, H=1, Q=1, R=1$$

για τις τιμές του κριτηρίου σύγκλισης  $\epsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$ .

- Να σχεδιάσετε το πλήθος των επαναλήψεων ως προς το κριτήριο σύγκλισης.

## 6.9 Περίληψη

Η ειδική εξίσωση Riccati προκύπτει από το φίλτρο Kalman πληροφορίας. Η ειδική εξίσωση Riccati χρησιμοποιεί τόσο τον πίνακα της συνδιασποράς λάθους πρόβλεψης, όσο και τον αντίστροφο πίνακα της συνδιασποράς λάθους πρόβλεψης.

Ο ειδικός ανά βήμα αλγόριθμος είναι ανά βήμα επαναληπτικός αλγόριθμος που βασίζεται στην ειδική εξίσωση Riccati και μπορεί να εφαρμοστεί στην περίπτωση που οι πίνακες και είναι θετικά ορισμένοι.

Ο ειδικός αλγόριθμος διπλασιασμού (doubling algorithm) είναι ένας επαναληπτικός αλγόριθμος με χαρακτηριστικό ότι ο αντίστροφος πίνακας της συνδιασποράς λάθους πρόβλεψης υπολογίζεται σε κάθε επανάληψη σε χρονική στιγμή διπλάσια (doubling) της προηγούμενης και μπορεί να εφαρμοστεί στην περίπτωση που πίνακες και είναι θετικά ορισμένοι.

Ο αλγόριθμος κυκλικής αναγωγής (cyclic reduction algorithm) είναι ένας αλγόριθμος διπλασιασμού που βασίζεται στη μέθοδο κυκλικής αναγωγής για την επίλυση κλασικής εξίσωσης πινάκων.

Η δυϊκή εξίσωση Riccati και η εξίσωση Riccati έχουν τις ίδιες παραμέτρους σε άλλες θέσεις και υπολογίζουν τα ίδια όρια.

Μπορείτε να ακούσετε την περίληψη με τον Ήχο 6.1.



**Ήχος 6.1 Περίληψη – Κεφάλαιο 6.**

## 6.10 Κριτήριο Αξιολόγησης

Απαντήστε με Σωστό ή Λάθος.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Η ύπαρξη των αντίστροφων πινάκων στην ειδική εξίσωση Riccati εξασφαλίζεται στην περίπτωση που οι πίνακες  $Q$  και  $R$  είναι θετικά ορισμένοι.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Αν η εξίσωση Riccati έχει λύση, τότε ο ειδικός ανά βήμα αλγόριθμος συγκλίνει στη λύση για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

$$P(k+1/k) = Q + F \left[ P(k/k-1) + H^T R^{-1} H \right]^{-1} F^T$$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Στον ειδικό αλγόριθμο διπλασιασμού, οι πίνακες  $\beta(k)$  και  $\gamma(k)$  είναι θετικά ορισμένοι.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

$$\text{Η δυϊκή εξίσωση Riccati είναι: } \Pi(k+1/k) = H^T R^{-1} H + F^T \left[ \Pi^{-1}(k/k-1) + Q \right]^{-1} F$$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Οι αρχικές συνθήκες του ειδικού αλγόριθμου διπλασιασμού είναι  $a_d(1) = F$ ,  $b_d(1) = H^T R^{-1} H$ ,  $c_d(1) = Q$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

$$\lim c(k) = \lim b_d(k) = P_p$$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

$$\lim b(k) = \lim b_d(k) = \Pi_p$$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

$$a^{-1} = \gamma \alpha^{-T}, a^{-1}b = \gamma \alpha^{-T} \beta - \alpha, ca^{-1} = \alpha^{-T}, a^T + ca^{-1}b = \alpha^{-T} \beta$$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Αν η εξίσωση Riccati έχει λύση, τότε η δυϊκή εξίσωση Riccati δεν έχει λύση.

Θα βρείτε την Απάντηση στο Κριτήριο Αξιολόγησης στο Παράρτημα Α'.

Μπορείτε να κάνετε το Κριτήριο Αξιολόγησης με το Διαδραστικό Πρόγραμμα 6.1.



Διαδραστικό Πρόγραμμα 6.1 Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 6.

## **Βιβλιογραφία/Αναφορές**

- Anderson, B. D. O., Moore, J. B. (2005). *Optimal Filtering*. Dover Publications, New York.
- Assimakis N., Adam M. (2020). Fast Doubling Algorithm for the Solution of the Riccati Equation Using Cyclic Reduction Method, *2020 International Conference on Mathematics and Computers in Science and Engineering (MACISE)*.
- Assimakis, N. D., Lainiotis, D. G., Katsikas, S. K. & Sanida, F. L. (1997). A survey of recursive algorithms for the solution of the discrete time Riccati equation. *Proceedings of 2nd World Congress of Nonlinear Analysts, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, vol. 30, no. 4, pp. 2409-2420.
- Assimakis, N., Adam, M. & Douladiris A. (2012). Information Filter and Kalman Filter Comparison: Selection of the Faster Filter. *International Journal of Information Engineering*, vol. 2, no. 1, pp. 1-5.
- Meini, B. (2001). Efficient computation of the extreme solutions of  $X+A^*X^{-1}A=Q$  and  $X-A^*X^{-1}A=Q$ , *Mathematics of Computation*, vol. 71, no. 239, pp. 1189-1204.
- Ασημάκης, Ν. (2013). *Εξίσωση Riccati Αλγόριθμοι και Εφαρμογές*. Εκδόσεις ΑΠΑΚΥΝΘΟΣ.

## Κεφάλαιο 7 Απαλοιφή κέρδους από το φίλτρο Kalman

### Σύνοψη

Στο κεφάλαιο παρουσιάζεται το Φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους. Δίνεται η βασική ιδέα της απαλοιφής του κέρδους (*gain elimination*) του φίλτρου Kalman από τις εξισώσεις του φίλτρου Kalman και η αντικατάστασή του από έναν λόγο (αναλογία) που περιγράφει τη σχέση των συντελεστών της πρόβλεψης και των μετρήσεων στην εκτίμηση. Αναλύεται το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman, το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman και το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης με απαλοιφή κέρδους. Δίνονται παραδείγματα των φίλτρων Kalman με απαλοιφή κέρδους.

### Προαπαιτούμενη γνώση

Φίλτρα Kalman, κέρδος φίλτρου Kalman, πίνακες.

### 7.1 Υπολογιστικός φόρτος επαναληπτικών φίλτρων Kalman

Το φίλτρο Kalman χρησιμοποιεί σε κάθε επανάληψη το κέρδος του φίλτρου Kalman προκειμένου να παράγει την εκτίμηση και τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης [Anderson & Moore (2005)]:

$$x(k/k) = [I - K(k)H(k)]x(k/k-1) + K(k)z(k) \quad (7.1)$$

$$P(k/k) = [I - K(k)H(k)]P(k/k-1), \quad (7.2)$$

όπου το κέρδος του φίλτρου Kalman είναι:

$$K(k) = P(k/k-1)H^T(k)[H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1} \quad (7.3)$$

Η **απαλοιφή** (**elimination**) του κέρδους του φίλτρου Kalman από τις εξισώσεις του φίλτρου Kalman [Assimakis (2020)] είναι εφικτή ορίζοντας τον λόγο (αναλογία)

$$\Lambda(k) = [I - K(k)H(k)]^{-1}K(k) \quad (7.4)$$

ο οποίος περιγράφει τη σχέση των συντελεστών της πρόβλεψης και των μετρήσεων στην εξίσωση της εκτίμησης.

Από την εξίσωση του κέρδους του φίλτρου Kalman έχουμε:

$$\begin{aligned} K(k) &= P(k/k-1)H^T(k)[H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1} \\ &\Rightarrow K(k)H(k)P(k/k-1)H^T(k) + K(k)R(k) = P(k/k-1)H^T(k) \\ &\Rightarrow K(k)H(k)P(k/k-1)H^T(k)R^{-1}(k) + K(k) = P(k/k-1)H^T(k)R^{-1}(k) \\ &\Rightarrow K(k) = P(k/k-1)H^T(k)R^{-1}(k) - K(k)H(k)P(k/k-1)H^T(k)R^{-1}(k) \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$K(k) = [I - K(k)H(k)]P(k/k-1)H^T(k)R^{-1}(k) \quad (7.5)$$

Τότε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του λόγου  $\Lambda(k)$  στην (7.4) και την (7.5), προκύπτει:

$$\Lambda(k) = P(k/k-1)H^T(k)R^{-1}(k) \quad (7.6)$$

Επίσης, από την εξίσωση του κέρδους του φίλτρου Kalman, χρησιμοποιώντας το Λήμμα Αντιστροφής Πινάκων (Matrix Inversion Lemma), έχουμε:

$$\begin{aligned}
K(k) &= P(k / k-1) H^T(k) \left[ H(k) P(k / k-1) H^T(k) + R(k) \right]^{-1} \\
&\Rightarrow P(k / k-1) - K(k) H(k) P(k / k-1) \\
&= P(k / k-1) - P(k / k-1) H^T(k) \left[ H(k) P(k / k-1) H^T(k) + R(k) \right]^{-1} H(k) P(k / k-1) \\
&= \left[ P^{-1}(k / k-1) + H^T(k) R^{-1}(k) H(k) \right]^{-1} \\
&\Rightarrow [I - K(k) H(k)] P(k / k-1) = \left[ P^{-1}(k / k-1) + H^T(k) R^{-1}(k) H(k) \right]^{-1} \\
&\Rightarrow [I - K(k) H(k)] = \left[ P^{-1}(k / k-1) + H^T(k) R^{-1}(k) H(k) \right]^{-1} P^{-1}(k / k-1)
\end{aligned}$$

δηλαδή,

$$[I - K(k) H(k)] = \left[ I + P(k / k-1) H^T(k) R^{-1}(k) H(k) \right]^{-1}. \quad (7.7)$$

Παρατήρηση. Ο ορισμός του λόγου  $\Lambda(k)$  στην (7.4) ισχύει υπό την προϋπόθεση της ύπαρξη του αντίστροφου πίνακα του πίνακα  $[I - K(k) H(k)]$ . Η εξίσωση (7.7) δείχνει ότι αυτή η προϋπόθεση εξασφαλίζεται στην περίπτωση που οι πίνακες  $R(k)$  είναι θετικά ορισμένοι (positive definite).

Τότε, είναι εφικτή η απαλοιφή του κέρδους του φίλτρου Kalman:

α) από την εξίσωση της εκτίμησης

$$\begin{aligned}
x(k / k) &= [I - K(k) H(k)] x(k / k-1) + K(k) z(k) \\
&= [I - K(k) H(k)] \left[ x(k / k-1) + [I - K(k) H(k)]^{-1} K(k) z(k) \right]
\end{aligned}$$

αντικαθιστώντας την με την εξίσωση:

$$x(k / k) = \left[ I + P(k / k-1) H^T(k) R^{-1}(k) H(k) \right]^{-1} \left[ x(k / k-1) + \Lambda(k) z(k) \right] \quad (7.8)$$

β) από την εξίσωση της συνδιασποράς λάθους εκτίμησης

$$P(k / k) = [I - K(k) H(k)] P(k / k-1)$$

αντικαθιστώντας την με την εξίσωση:

$$P(k / k) = \left[ I + P(k / k-1) H^T(k) R^{-1}(k) H(k) \right]^{-1} P(k / k-1) \quad (7.9)$$

Για το χρονικά μεταβαλλόμενο μοντέλο, όπου οι πίνακες  $F(k+1, k)$ ,  $H(k)$ ,  $Q(k)$ ,  $R(k)$  και  $B(k)$  είναι χρονικά μεταβαλλόμενοι, προκύπτει το Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο Kalman με Απαλοιφή Κέρδους (Time Varying Kalman Filter Gain Elimination):

<b>Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο Kalman με Απαλοιφή Κέρδους</b> <b>Time Varying Kalman Filter Gain Elimination (TVKFGE)</b>
$\Lambda(k) = P(k / k-1) H^T(k) R^{-1}(k)$
$x(k / k) = \left[ I + P(k / k-1) H^T(k) R^{-1}(k) H(k) \right]^{-1} \left[ x(k / k-1) + \Lambda(k) z(k) \right]$
$P(k / k) = \left[ I + P(k / k-1) H^T(k) R^{-1}(k) H(k) \right]^{-1} P(k / k-1)$
$x(k+1 / k) = F(k+1, k) x(k / k) + B(k) u(k)$
$P(k+1 / k) = Q(k) + F(k+1, k) P(k / k) F^T(k+1, k)$
$k = 0, 1, \dots$
$x(0 / -1) = x_0$
$P(0 / -1) = P_0$

Η ύπαρξη των αντίστροφων πινάκων που εμφανίζονται στις εξισώσεις του φίλτρου εξασφαλίζεται στην περίπτωση που οι πίνακες  $R(k)$  και  $P_0$  είναι θετικά ορισμένοι (positive definite).

Το κέρδος του φίλτρου Kalman filter μπορεί να υπολογιστεί από την (7.2) και την (7.5)

$$K(k) = P(k/k)H^T(k)R^{-1}(k) \quad (7.10)$$

Για το χρονικά αμετάβλητο μοντέλο, όπου οι πίνακες  $F(k+1, k) = F$ ,  $H(k) = H$ ,  $Q(k) = Q$ ,  $R(k) = R$  και  $B(k) = B$  είναι χρονικά αμετάβλητοι, προκύπτει το Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman με Απαλοιφή Κέρδους (Time Invariant Kalman Filter Gain Elimination):

<b>Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman με Απαλοιφή Κέρδους</b> <b>Time Invariant Kalman Filter Gain Elimination (TIKFGE)</b>
$\Lambda(k) = P(k/k-1)H^T R^{-1}$
$x(k/k) = [I + P(k/k-1)H^T R^{-1}H]^{-1} [x(k/k-1) + \Lambda(k)z(k)]$
$P(k/k) = [I + P(k/k-1)H^T R^{-1}H]^{-1} P(k/k-1)$
$x(k+1/k) = Fx(k/k) + Bu(k)$
$P(k+1/k) = Q + FP(k/k)F^T$
$k = 0, 1, \dots$
$x(0/-1) = x_0$
$P(0/-1) = P_0$

Η ύπαρξη των αντίστροφων πινάκων που εμφανίζονται στις εξισώσεις του φίλτρου εξασφαλίζεται στην περίπτωση που οι πίνακες  $R$  και  $P_0$  είναι θετικά ορισμένοι (positive definite). Οι πίνακες  $R^{-1}$ ,  $H^T R^{-1}$  και  $H^T R^{-1}H$  υπολογίζονται εκ των προτέρων (off-line).

Στη μόνιμη κατάσταση, η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης τείνει στη σταθερή τιμή  $P_p$  που είναι η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση. Τότε από την (7.6), του λόγου  $\Lambda(k)$  τείνει στη σταθερή τιμή  $\Lambda$  που είναι ο λόγος (που ορίστηκε στην (7.4)) στη μόνιμη κατάσταση:

$$\Lambda = P_p H^T R^{-1} \quad (7.11)$$

Τότε προκύπτει η παρακάτω εξίσωση για την εκτίμηση:

$$\begin{aligned} x(k+1/k+1) &= [I + P_p H^T R^{-1}H]^{-1} [x(k+1/k) + \Lambda z(k+1)] \\ &= [I + P_p H^T R^{-1}H]^{-1} [Fx(k/k) + Bu(k) + \Lambda z(k+1)] \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$x(k+1/k+1) = [I + P_p H^T R^{-1}H]^{-1} Fx(k/k) + [I + P_p H^T R^{-1}H]^{-1} Bu(k) + [I + P_p H^T R^{-1}H]^{-1} \Lambda z(k+1) \quad (7.12)$$

όπου

$$[I + P_p H^T R^{-1}H]^{-1} F = [I - KH]F \quad (7.13)$$

$$[I + P_p H^T R^{-1}H]^{-1} B = [I - KH]B \quad (7.14)$$

$$[I + P_p H^T R^{-1}H]^{-1} \Lambda = K \quad (7.15)$$

Στη μόνιμη κατάσταση προκύπτει το Φίλτρο Kalman Μόνιμης Κατάστασης με Απαλοιφή Κέρδους (Steady State Kalman Filter Gain Elimination):

<b>Φίλτρο Kalman Μόνιμης Κατάστασης με Απαλοιφή Κέρδους</b> <b>Steady State Kalman Filter Gain Elimination (SSKFGE)</b>
$x(k+1 / k+1) = Ax(k / k) + Cu(k) + Kz(k+1)$
$k = 0, 1, \dots$
$A = [I + P_p H^T R^{-1} H]^{-1} F = [I - KH] F$
$C = [I + P_p H^T R^{-1} H]^{-1} B = [I - KH] B$
$K = [I + P_p H^T R^{-1} H]^{-1} \Lambda = [I + P_p H^T R^{-1} H]^{-1} P_p H^T R^{-1}$
$x(0 / 0) = [I - KH] x_0 + Kz(0)$

Οι συντελεστές του φίλτρου Kalman πληροφορίας μόνιμης κατάστασης μπορούν να υπολογιστούν εκ των προτέρων (off-line) χρησιμοποιώντας τη λύση της εξίσωσης Riccati.

Οι εξισώσεις του Φίλτρου Kalman με απαλοιφή κέρδους προκύπτουν από τις εξισώσεις του φίλτρου Kalman. Επομένως, το φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους και το φίλτρο Kalman υπολογίζουν θεωρητικά τις ίδιες εκτιμήσεις και τις ίδιες συνδιασπορές λάθους εκτίμησης. Αυτό σημαίνει ότι τα δύο φίλτρα είναι ισοδύναμα.

### Παράδειγμα 1. Χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους

Στο παράδειγμα αυτό θεωρείται ένα βαθμωτό ( $n = 1$  και  $m = 1$ ) χρονικά αμετάβλητο μοντέλο, όπου ισχύουν όλες οι υποθέσεις, χωρίς είσοδο, με παραμέτρους:

$$F = 0.9$$

$$H = 1$$

$$Q = 0.5$$

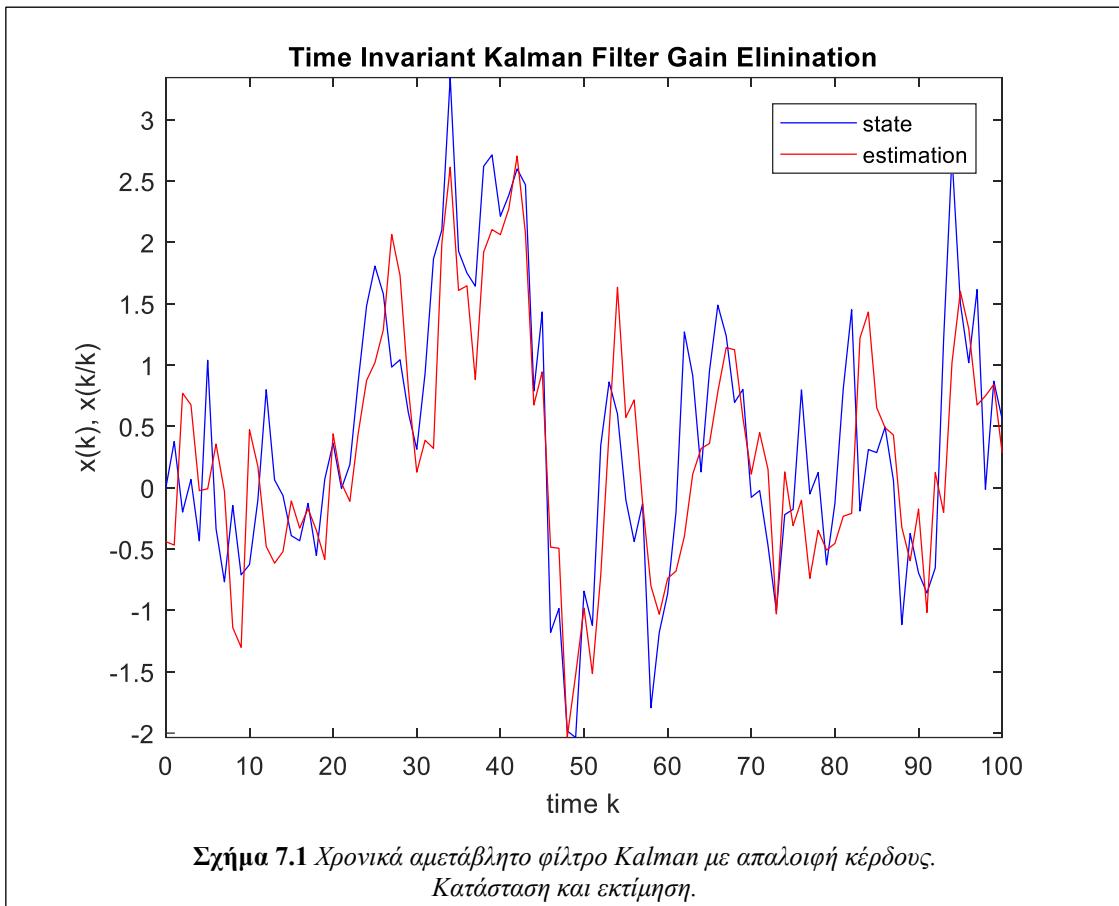
$$R = 1$$

και αρχικές συνθήκες:

$$x_0 = 0$$

$$P_0 = 1$$

Στο Σχήμα 7.1 παρουσιάζονται η κατάσταση και η εκτίμηση που υπολογίζεται με τη χρήση του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman και του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman με απαλοιφή κέρδους. Οι εκτιμήσεις των δύο φίλτρων είναι ίδιες: τα δύο φίλτρα είναι ισοδύναμα.



## Παράδειγμα 2. Φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης με απαλοιφή κέρδους

Στο παράδειγμα αυτό θεωρείται ένα βαθμωτό χρονικά αμετάβλητο μοντέλο, χωρίς είσοδο, με παραμέτρους:

$$F = 0.9$$

$$H = 1$$

$$Q = 0.5$$

$$R = 1$$

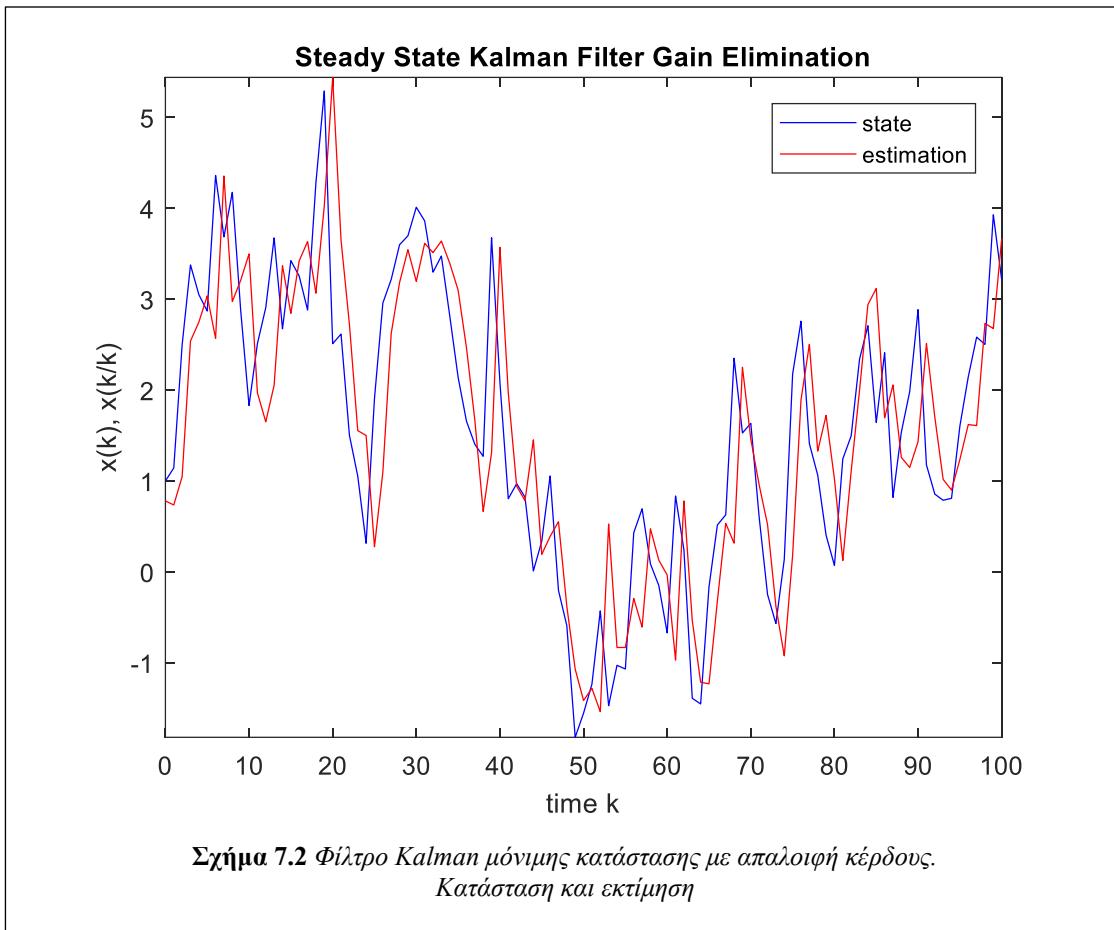
και αρχική συνθήκη:

$$x_0 = 1$$

Η διασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση είναι  $P_p = 0.8789$

Οι συντελεστές του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης είναι:  $A = 0.4790$ ,  $C = 0$  και  $K = 0.4678$ .

Στο Σχήμα 7.2 παρουσιάζονται η κατάσταση και η εκτίμηση που υπολογίζεται με τη χρήση του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης και του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης με απαλοιφή κέρδους. Οι εκτιμήσεις των δύο φίλτρων είναι ίδιες: τα δύο φίλτρα είναι ισοδύναμα.



## 7.2 Φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους σε προγραμματιστικό περιβάλλον

Η συνάρτηση `tvkfgeiteration` παράγει την εκτίμηση και τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης, την πρόβλεψη και τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης, καθώς και το κέρδος για μία επανάληψη για το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους.

Η συνάρτηση `tvkfgeiteration` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $F(k+1, k)$ ,  $H(k)$ ,  $Q(k)$ ,  $R(k)$ ,  $B(k)$ , την είσοδο  $u(k)$ , την προηγούμενη πρόβλεψη  $x(k | k-1)$  και την προηγούμενη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης  $P(k | k-1)$  και την παρούσα μέτρηση  $z(k)$ . Η συνάρτηση έχει εξόδους την εκτίμηση  $x(k | k)$ , τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης  $P(k | k)$ , την πρόβλεψη  $x(k+1 | k)$  και τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης  $P(k+1 | k)$  και το λόγο  $\Lambda(k)$ .

Έτσι, για παράδειγμα, για την παραγωγή της εκτίμησης και της πρόβλεψης για το βαθμωτό μοντέλο με παραμέτρους  $F(k+1, k) = H(k) = Q(k) = R(k) = B(k) = 1$ , με είσοδο  $u(k) = 10$ , με προηγούμενη πρόβλεψη  $x(k | k-1) = 1$ , προηγούμενη διασπορά λάθους πρόβλεψης  $P(k | k-1) = 1$  και με την παρούσα μέτρηση  $z(k) = 2$  απαιτείται η κλήση:

```
F=1;
H=1;
Q=1;
R=1;
B=1;
u=10;
xp=1;
pp=1;
```

```

z=2;
[xe,pe,xp,pp,ratiolamda]=tvkfgeiteration(F,H,Q,R,B,u,xp,pp,z)

```

```

function [xe,pe,xp,pp,ratiolamda]=tvkfgeiteration(F,H,Q,R,B,u,xp,pp,z)
% TIME VARYING KALMAN FILTER KALMAN ELIMINATION
% ONE ITERATION
n=size(F,1);
ratiolamda=pp+H'*inv(R);
xe=inv(eye(n)+pp*H'*inv(R)*H)*(xp+ratiolamda*z);
pe=inv(eye(n)+pp*H'*inv(R)*H)*pp;
xp=F*x+B*u;
pp=Q+F*pe*F';

```

Η συνάρτηση `tikfgeiteration` παράγει την εκτίμηση και τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης, την πρόβλεψη και τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης, καθώς και το κέρδος για μία επανάληψη για το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους.

Η συνάρτηση `tikfgeiteration` έχει εισόδους τις παραμέτρους  $F(k+1, k), H(k), Q(k), R(k), B(k)$ , την είσοδο  $u(k)$ , την προηγούμενη πρόβλεψη  $x(k/k-1)$ , την προηγούμενη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης  $P(k/k-1)$  και την παρούσα μέτρηση  $z(k)$ . Η συνάρτηση έχει εξόδους την εκτίμηση  $x(k/k)$ , τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης  $P(k/k)$ , την πρόβλεψη  $x(k+1/k)$  και τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης  $P(k+1/k)$  και τον λόγο  $\Lambda(k)$ .

Έτσι, για παράδειγμα, για την παραγωγή της εκτίμησης και της πρόβλεψης για το βαθμωτό μοντέλο με παραμέτρους  $F(k+1, k) = H(k) = Q(k) = R(k) = B(k) = 1$ , με είσοδο  $u(k) = 10$ , με προηγούμενη πρόβλεψη  $x(k/k-1) = 1$ , προηγούμενη διασπορά λάθους πρόβλεψης  $P(k/k-1) = 1$  και με την παρούσα μέτρηση  $z(k) = 2$  απαιτείται η κλήση:

```

F=1;
H=1;
Q=1;
R=1;
B=1;
u=10;
xp=1;
pp=1;
z=2;
[xe,pe,xp,pp,ratiolamda]=tikfgeiteration(F,H,Q,R,B,u,xp,pp,z)

```

```

function [xe,pe,xp,pp,ratiolamda]=tikfgeiteration(F,H,Q,R,B,u,xp,pp,z)
% TIME INVARIANT KALMAN FILTER KALMAN ELIMINATION
% ONE ITERATION
n=size(F,1);
ratiolamda=pp+H'*inv(R);
xe=inv(eye(n)+pp*H'*inv(R)*H)*(xp+ratiolamda*z);
pe=inv(eye(n)+pp*H'*inv(R)*H)*pp;
xp=F*x+B*u;
pp=Q+F*pe*F';

```

Η συνάρτηση `sskfgeiteration` παράγει την εκτίμηση για μία επανάληψη για το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης με απαλοιφή κέρδους.

Η συνάρτηση `sskfgeiteration` έχει εισόδους τους συντελεστές του φίλτρου  $A = [I - KH]F$ ,  $C = [I - KH]B$  και  $K$ , την είσοδο  $u(k)$ , την προηγούμενη εκτίμηση  $x(k/k)$  και την παρούσα μέτρηση  $z(k)$ . Η συνάρτηση έχει έξοδο την εκτίμηση  $x(k+1/k+1)$ .

Έτσι, για παράδειγμα, για την παραγωγή της εκτίμησης για το βαθμωτό μοντέλο με παραμέτρους  $A=0.38197, C=0.38197, K=0.61803$ , με είσοδο  $u(k)=10$ , με προηγούμενη εκτίμηση  $x(k/k)=1$  και με την παρούσα μέτρηση  $z(k)=2$  απαιτείται η κλήση:

```
a=0.38197;
c=0.38197;
g=0.61803;
u=10;
xe=1;
z=2;
[xe]= sskfgeiteration (a,c,g,u,xe,z)
```

```
function [xe]=sskfgeiteration(a,c,g,u,xe,z)
% STEADY STATE KALMAN FILTER GAIN ELIMINATION
% ONE ITERATION
    xe=a*xe+c*u+g*z;
```

### 7.3 Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε τις εξισώσεις του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman με απαλοιφή κέρδους για το βαθμωτό μοντέλο, όπου  $n=1$  και  $m=1$ .

2. Για το βαθμωτό μοντέλο, όπου  $n=1$  και  $m=1$ , να δείξετε ότι ο ορισμός του λόγου

$$\Lambda(k) = \frac{K(k)}{1 - K(k)H(k)}$$

εξασφαλίζεται στην περίπτωση που  $R(k) > 0$  και  $P_0 > 0$ .

3. Να υπολογίσετε  $x(2/1)$  και  $P(2/1)$  για το φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους χωρίς είσοδο, με παραμέτρους:  $F=1, H=1, Q=1, R=1$  και αρχικές συνθήκες  $x_0 = 0, P_0 = 1$ .

4. Να γράψετε συνάρτηση για το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους για το βαθμωτό μοντέλο, όπου  $n=1$  και  $m=1$ , χωρίς είσοδο και με παραμέτρους χρονικά αμετάβλητες.

`function [XE, PE] = tikfge11(f, h, q, r, x0, p0, kmax, Z)`

- Να γράψετε πρόγραμμα για να υλοποιήσετε το φίλτρο Kalman με παραμέτρους:  $F=0.9, H=1, Q=2, R=1$  και αρχικές συνθήκες  $x_0 = 0, P_0 = 1$ .
- Να υπολογίσετε την εκτίμηση  $x(k/k)$  της κατάστασης  $x(k)$  και τη διασπορά λάθους εκτίμησης  $P(k/k)$  τις χρονικές στιγμές  $k = 0, 1, \dots, 99$ .
- Να σχεδιάσετε την κατάσταση  $x(k)$  και την εκτίμηση  $x(k/k)$  τις χρονικές στιγμές  $k = 0, 1, \dots, 99$ .
- Να σχεδιάσετε τη διασπορά λάθους εκτίμησης  $P(k/k)$  τις χρονικές στιγμές  $k = 0, 1, \dots, 99$ .

## 7.4 Περίληψη

Η απαλοιφή (elimination) του κέρδους του φίλτρου Kalman από τις εξισώσεις του φίλτρου Kalman είναι εφικτή ορίζοντας τον λόγο (αναλογία) που περιγράφει τη σχέση των συντελεστών της πρόβλεψης και των μετρήσεων στην εξίσωση της εκτίμησης του φίλτρου Kalman.

Οι εξισώσεις του Φίλτρου Kalman με απαλοιφή κέρδους προκύπτουν από τις εξισώσεις του φίλτρου Kalman. Επομένως, το φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους και το φίλτρο Kalman υπολογίζουν θεωρητικά τις ίδιες εκτιμήσεις και τις ίδιες συνδιασπορές λάθους εκτίμησης. Αυτό σημαίνει ότι τα δύο φίλτρα είναι ισοδύναμα.

Μπορείτε να ακούσετε την περίληψη με τον Ήχο 7.1.



**Ήχος 7.1 Περίληψη – Κεφάλαιο 7.**

## 7.5 Κριτήριο Αξιολόγησης

Απαντήστε με Σωστό ή Λάθος.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Το φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους δεν είναι επαναληπτικός αλγόριθμος.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

$$\Lambda(k) = [I - K(k)H(k)]K(k)$$

### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

$$\Lambda(k) = P(k/k-1)H^T(k)R^{-1}(k)$$

### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Ο λόγος  $\Lambda(k)$  του φίλτρου Kalman με απαλοιφή κέρδους είναι πίνακας διαστάσεων  $n \times m$ .

### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Στο βαθμωτό μοντέλο όπου  $n=1$  και  $m=1$ , ισχύει η σχέση  $\Lambda(k) \geq 0$ .

### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Στη μόνιμη κατάσταση, ο λόγος τείνει στη σταθερή τιμή  $\Lambda = P_p H^T R^{-1}$

### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

$$I - K(k)H(k) = I + P(k/k-1)H^T(k)R^{-1}(k)H(k)$$

### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

$$[I + P_p H^T R^{-1} H] \Lambda = K$$

### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

Οι συντελεστές του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης με απαλοιφή κέρδους μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας τη λύση της εξίσωσης Riccati.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Το φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους και το φίλτρο Kalman υπολογίζουν θεωρητικά τις ίδιες εκτιμήσεις και τις ίδιες συνδιασπορές λάθους εκτίμησης.

Θα βρείτε την Απάντηση στο Κριτήριο Αξιολόγησης στο Παράρτημα A'.

Μπορείτε να κάνετε το Κριτήριο Αξιολόγησης με το Διαδραστικό Πρόγραμμα 7.1.



Διαδραστικό Πρόγραμμα 7.1 Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 7.

## **Βιβλιογραφία/Αναφορές**

- Anderson, B. D. O., Moore, J. B. (2005). *Optimal Filtering*. Dover Publications, New York.
- Assimakis, N. (2020). Kalman Filter Gain Elimination in Linear Estimation. *International Journal of Computer and Information Engineering*, vol. 14, no. 7, pp. 236-241, 2020.

## Κεφάλαιο 8 Υπολογιστικός φόρτος φίλτρων Kalman

### Σύνοψη

Στο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι υπολογιστικοί φόρτοι των φίλτρων *Kalman*. Εξηγείται ο υπολογιστικός χρόνος και ο υπολογιστικός φόρτος των φίλτρων *Kalman*. Αναλύεται ο ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος των φίλτρων *Kalman* και συγκεκριμένα τα χρονικά μεταβαλλόμενα *Kalman*, τα χρονικά αμετάβλητα *Kalman* και τα φίλτρα *Kalman* μόνιμης κατάστασης για το γραμμικό φίλτρο *Kalman*, το φίλτρο *Kalman* πληροφορίας και το φίλτρο *Kalman* με απαλοιφή κέρδους. Αναλύεται η μέθοδος επιλογής του ταχύτερου φίλτρου *Kalman*.

### Προαπαιτούμενη γνώση

Φίλτρα *Kalman*, πίνακες.

## 8.1 Υπολογιστικός φόρτος επαναληπτικών φίλτρων *Kalman*

Τα φίλτρα *Kalman* είναι επαναληπτικοί αλγόριθμοι, γιατί υπολογίζουν επαναληπτικά την εκτίμηση και τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης. Επομένως, ο συνολικός **υπολογιστικός χρόνος (calculation)** που απαιτείται για την υλοποίησή τους είναι:

$$t_{alg} = CB_{alg}s_{alg}t_{op} \quad (8.1)$$

όπου  $t_{op}$  είναι ο χρόνος που απαιτείται για την υλοποίηση μιας βαθμωτής πράξης (scalar operation),  $CB_{alg}$  είναι ο ανά επανάληψη **υπολογιστικός φόρτος (calculation burden)** του αλγορίθμου και  $s_{alg}$  είναι το πλήθος των επαναλήψεων που εκτελεί ο αλγόριθμος.

Δεν λαμβάνεται υπόψη ο υπολογιστικός φόρτος των εκ των προτέρων υπολογισμών (off-line calculations), όπως είναι η αρχικοποίηση παραμέτρων για τα φίλτρα μόνιμης κατάστασης.

## 8.2 Υπολογιστικός φόρτος πράξεων πινάκων

Η υλοποίηση των φίλτρων απαιτεί πράξεις πινάκων. Ο υπολογιστικός φόρτος (calculation burden) των πράξεων πινάκων εξαρτάται από τις διαστάσεις των πινάκων. Στις πράξεις πινάκων εμπλέκονται βαθμωτές πράξεις (scalar operations), των οποίων οι υπολογιστικοί φόρτοι θεωρούνται ίσοι μεταξύ τους.

Στον Πίνακα 8.1 παρουσιάζεται ο υπολογιστικός φόρτος των πράξεων με πίνακες [Assimakis & Adam (2007)].

Πράξη Πινάκων	Διαστάσεις Πινάκων	Υπολογιστικός Φόρτος
$A + B = C$	$(n \times m) + (n \times m)$	$nm$
$A + B = S$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$I + A = B$	$(n \times n) + (n \times n)$	$n$
$A \cdot B = C$	$(n \times m) \cdot (m \times k)$	$2nmk - nk$
$A \cdot B = S$	$(n \times m) \cdot (m \times n)$	$n^2m + nm - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$A^{-1} = B$	$(n \times n)^{-1}$	$\begin{cases} \frac{1}{6}(16n^3 - 3n^2 - n), & n \geq 2 \\ 1, & n = 1 \end{cases}$

Πίνακας 8.1 Υπολογιστικός φόρτος των πράξεων με πίνακες

$I$  μοναδιαίος πίνακας  
 $S$  συμμετρικός πίνακας

### 8.3 Υπολογιστικός φόρτος γραμμικού φίλτρου Kalman

Στον Πίνακα 8.2 παρουσιάζεται ο ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος του χρονικά μεταβαλλόμενου φίλτρου Kalman.

Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο Kalman Time Varying Kalman Filter (TVKF)		
Πράξη Πινάκων	Διαστάσεις Πινάκων	Υπολογιστικός Φόρτος
$H(k)P(k / k-1)$	$(m \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^2m - nm$
$[H(k)P(k / k-1)]H^T(k)$	$(m \times n) \cdot (n \times m)$	$nm^2 + nm - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m$
$H(k)P(k / k-1)H^T(k) + R(k)$	$(m \times m) + (m \times m)$	$\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m$
$[H(k)P(k / k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1}$	$(m \times m)^{-1}$	$\frac{1}{6}(16m^3 - 3m^2 - m)$
$K(k) = [H(k)P(k / k-1)]^T [H(k)P(k / k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1}$	$(n \times m) \cdot (m \times m)$	$2nm^2 - nm$
$K(k)H(k)$	$(n \times m) \cdot (m \times n)$	$2n^2m - n^2$
$I - K(k)H(k)$	$(n \times n) + (n \times n)$	$n$
$[I - K(k)H(k)]x(k / k-1)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$K(k)z(k)$	$(n \times m) \cdot (m \times 1)$	$2nm - n$
$x(k / k) = [I - K(k)H(k)]x(k / k-1) + K(k)z(k)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$P(k / k) = [I - K(k)H(k)]P(k / k-1)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$F(k+1, k)x(k / k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$B(k)u(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$x(k+1 / k) = F(k+1, k)x(k / k) + B(k)u(k)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$F(k+1, k)P(k / k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$[F(k+1, k)P(k / k)]F^T(k+1, k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$P(k+1 / k) = Q(k) + F(k+1, k)P(k / k)F^T(k+1, k)$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$n \geq 2, m \geq 2$	$CB_{TVKF} = \frac{1}{2}(8n^3 + 11n^2 - 3n) + 4n^2m + nm + 3nm^2 + \frac{1}{6}(16m^3 - 3m^2 - m)$	
$n = 1, m \geq 2$	$CB_{TVKF} = \frac{1}{6}(16m^3 + 15m^2 + 29m + 48)$	
$n \geq 2, m = 1$	$CB_{TVKF} = \frac{1}{2}(8n^3 + 19n^2 + 5n + 2)$	
$n = 1, m = 1$	$CB_{TVKF} = 17$	

Πίνακας 8.2 Χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman.  
Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος.

Στον Πίνακα 8.3 παρουσιάζεται ο ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman.

Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman Time Invariant Kalman Filter (TIKF)		
Πράξη Πινάκων	Διαστάσεις Πινάκων	Υπολογιστικός Φόρτος
$HP(k / k - 1)$	$(m \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^2 m - nm$
$[HP(k / k - 1)]H^T$	$(m \times n) \cdot (n \times m)$	$nm^2 + nm - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m$
$HP(k / k - 1)H^T + R$	$(m \times m) + (m \times m)$	$\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m$
$[HP(k / k - 1)H^T + R]^{-1}$	$(m \times m)^{-1}$	$\frac{1}{6}(16m^3 - 3m^2 - m)$
$K(k) = [HP(k / k - 1)]^T [HP(k / k - 1)H^T + R]^{-1}$	$(n \times m) \cdot (m \times m)$	$2nm^2 - nm$
$K(k)H$	$(n \times m) \cdot (m \times n)$	$2n^2 m - n^2$
$I - K(k)H$	$(n \times n) + (n \times n)$	$n$
$[I - K(k)H]x(k / k - 1)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$K(k)z(k)$	$(n \times m) \cdot (m \times 1)$	$2nm - n$
$x(k / k) = [I - K(k)H]x(k / k - 1) + K(k)z(k)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$P(k / k) = [I - K(k)H]P(k / k - 1)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$Fx(k / k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$Bu(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$x(k + 1 / k) = Fx(k / k) + Bu(k)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$FP(k / k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$[FP(k / k)]F^T$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$P(k + 1 / k) = Q + FP(k / k)F^T$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$n \geq 2, m \geq 2$	$CB_{TIKF} = \frac{1}{2}(8n^3 + 11n^2 - 3n) + 4n^2 m + nm + 3nm^2 + \frac{1}{6}(16m^3 - 3m^2 - m)$	
$n = 1, m \geq 2$	$CB_{TIKF} = \frac{1}{6}(16m^3 + 15m^2 + 29m + 42)$	
$n \geq 2, m = 1$	$CB_{TIKF} = \frac{1}{2}(8n^3 + 19n^2 + 5n + 2)$	
$n = 1, m = 1$	$CB_{TIKF} = 15$	

**Πίνακας 8.3** Χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman.  
Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος.

Για  $n = 1$ ,  $FP(k / k)F^T = F^2 P(k / k)$  όπου  $F^2$  υπολογίζεται off-line.

Για  $n = m = 1$ ,  $HP(k / k - 1)H^T = H^2 P(k / k - 1)$  όπου  $H^2$  υπολογίζεται off-line.

Στον Πίνακα 8.4 παρουσιάζεται ο ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης.

Φίλτρο Kalman Μόνιμης Κατάστασης Steady State Kalman Filter (SSKF)		
Πράξη Πινάκων	Διαστάσεις Πινάκων	Υπολογιστικός Φόρτος
$Ax(k / k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$Cu(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$Kz(k + 1)$	$(n \times m) \cdot (m \times 1)$	$2nm - n$
$Ax(k / k) + Cu(k)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$x(k + 1 / k + 1) = Ax(k / k) + Cu(k) + Kz(k + 1)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
		$CB_{SSKF} = 4n^2 - n + 2nm$

**Πίνακας 8.4** Φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης.  
Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος.

Στο Ασημάκης (2009) υπολογίζεται ο υπολογιστικός φόρτος του γραμμικού φίλτρου Kalman (χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman, χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman και φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης) χωρίς είσοδο, για τη γενική περίπτωση με πίνακες ( $n \geq 2$  και  $m \geq 2$ ).

## 8.4 Υπολογιστικός φόρτος φίλτρου Kalman πληροφορίας

Στον Πίνακα 8.5 παρουσιάζεται ο ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος του χρονικά μεταβαλλόμενου φίλτρου Kalman πληροφορίας.

Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο Kalman Πληροφορίας Time Varying Information Kalman Filter (TVIKF)		
Πράξη Πινάκων	Διαστάσεις Πινάκων	Υπολογιστικός Φόρτος
$R^{-1}(k)$	$(m \times m)^{-1}$	$\frac{1}{6}(16m^3 - 3m^2 - m)$
$H^T(k)R^{-1}(k)$	$(n \times m) \cdot (m \times m)$	$2nm^2 - nm$
$H^T(k)R^{-1}(k)z(k)$	$(n \times m) \cdot (m \times 1)$	$2nm - n$
$y(k / k) = y(k / k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)z(k)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$H^T(k)R^{-1}(k)H(k)$	$(n \times m) \cdot (m \times n)$	$n^2m + nm - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$S(k / k) = S(k / k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)H(k)$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$P(k / k) = S^{-1}(k / k)$	$(n \times n)^{-1}$	$\frac{1}{6}(16n^3 - 3n^2 - n)$
$x(k / k) = S^{-1}(k / k)y(k / k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$K(k) = S^{-1}(k / k)H^T(k)R^{-1}(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times m)$	$2n^2m - nm$
$F(k+1, k)S^{-1}(k / k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$F(k+1, k)S^{-1}(k / k)F^T(k+1, k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$P(k+1 / k) = Q(k) + F(k+1, k)S^{-1}(k / k)F^T(k+1, k)$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$S(k+1 / k) = P^{-1}(k+1 / k)$	$(n \times n)^{-1}$	$\frac{1}{6}(16n^3 - 3n^2 - n)$
$F(k+1, k)S^{-1}(k / k)y(k / k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$B(k)u(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$F(k+1, k)S^{-1}(k / k)y(k / k) + B(k)u(k)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$y(k+1 / k) = S(k+1 / k)[F(k+1, k)S^{-1}(k / k)y(k / k) + B(k)u(k)]$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$x(k+1 / k) = P(k+1 / k)y(k+1 / k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$n \geq 2, m \geq 2$	$CB_{TVIKF} = \frac{1}{3}(25n^3 + 27n^2 - 13n) + 3n^2m + nm + 2nm^2 + \frac{1}{6}(16m^3 - 3m^2 - m)$	
$n = 1, m \geq 2$	$CB_{TVIKF} = \frac{1}{6}(16m^3 + 9m^2 + 23m + 66)$	
$n \geq 2, m = 1$	$CB_{TVIKF} = \frac{1}{3}(25n^3 + 36n^2 - 4n + 3)$	
$n = 1, m = 1$	$CB_{TVIKF} = 18$	

**Πίνακας 8.5** Χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman πληροφορίας  
Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος.

Στον Πίνακα 8.6 παρουσιάζεται ο ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman πληροφορίας.

Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman Πληροφορίας Time Invariant Information Kalman Filter (ΤΙΙΚF)		
Πράξη Πινάκων	Διαστάσεις Πινάκων	Υπολογιστικός Φόρτος
$H^T R^{-1} z(k)$	$(n \times m) \cdot (m \times 1)$	$2nm - n$
$y(k / k) = y(k / k - 1) + H^T R^{-1} z(k)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$S(k / k) = S(k / k - 1) + H^T R^{-1} H$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$P(k / k) = S^{-1}(k / k)$	$(n \times n)^{-1}$	$\frac{1}{6}(16n^3 - 3n^2 - n)$
$x(k / k) = S^{-1}(k / k) y(k / k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$K(k) = S^{-1}(k / k) H^T R^{-1}$	$(n \times n) \cdot (n \times m)$	$2n^2 m - nm$
$FS^{-1}(k / k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$FS^{-1}(k / k) F^T$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$P(k+1 / k) = Q + FS^{-1}(k / k) F^T$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$S(k+1 / k) = P^{-1}(k+1 / k)$	$(n \times n)^{-1}$	$\frac{1}{6}(16n^3 - 3n^2 - n)$
$FS^{-1}(k / k) y(k / k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$Bu(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$FS^{-1}(k / k) y(k / k) + Bu(k)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$y(k+1 / k) = S(k+1 / k) [FS^{-1}(k / k) y(k / k) + Bu(k)]$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$x(k+1 / k) = P(k+1 / k) y(k+1 / k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$n \geq 2, m \geq 2$	$CB_{TIIF} = \frac{1}{6}(50n^3 + 57n^2 - 23n) + 2n^2 m + nm$	
$n = 1, m \geq 2$	$CB_{TIIF} = 3m + 11$	
$n \geq 2, m = 1$	$CB_{TIIF} = \frac{1}{6}(50n^3 + 69n^2 - 17n)$	
$n = 1, m = 1$	$CB_{TIIF} = 14$	

**Πίνακας 8.6** Χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman πληροφορίας.  
Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος

Για  $n = 1$ ,  $FS^{-1}(k / k) F^T = F^2 S^{-1}(k / k)$  όπου  $F^2$  υπολογίζεται off-line.

Στον Πίνακα 8.7 παρουσιάζεται ο ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος του φίλτρου Kalman πληροφορίας μόνιμης κατάστασης.

Φίλτρο Kalman Πληροφορίας Μόνιμης Κατάστασης Steady State Information Kalman Filter (SSIKF)		
Πράξη Πινάκων	Διαστάσεις Πινάκων	Υπολογιστικός Φόρτος
$Ax(k / k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$Cu(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$Kz(k+1)$	$(n \times m) \cdot (m \times 1)$	$2nm - n$
$Ax(k / k) + Cu(k)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$x(k+1 / k+1) = Ax(k / k) + Cu(k) + Kz(k+1)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$CB_{SSIKF} = 4n^2 - n + 2nm$		

**Πίνακας 8.7** Φίλτρο Kalman πληροφορίας μόνιμης κατάστασης  
Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος.

Στο Assimakis, Adam, Douladiris (2012) υπολογίζεται ο υπολογιστικός φόρτος του φίλτρου Kalman πληροφορίας χωρίς είσοδο, για τη γενική περίπτωση με πίνακες ( $n \geq 2$  και  $m \geq 2$ ).

## 8.5 Υπολογιστικός φόρτος φίλτρου Kalman με απαλοιφή κέρδους

Στον Πίνακα 8.8 παρουσιάζεται ο ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος του χρονικά μεταβαλλόμενου φίλτρου Kalman με απαλοιφή κέρδους.

Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο Kalman με Απαλοιφή Κέρδους Time Varying Kalman Filter Gain Elimination (TVKFGF)		
Πράξη Πινάκων	Διαστάσεις Πινάκων	Υπολογιστικός Φόρτος
$R^{-1}(k)$	$(m \times m)^{-1}$	$\frac{1}{6}(16m^3 - 3m^2 - m)$
$H^T(k)R^{-1}(k)$	$(n \times m) \cdot (m \times m)$	$2nm^2 - nm$
$H^T(k)R^{-1}(k)H(k)$	$(n \times m) \cdot (m \times n)$	$n^2m + nm - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$\Lambda(k) = P(k / k-1)H^T(k)R^{-1}(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times m)$	$2n^2m - nm$
$P(k / k-1)H^T(k)R^{-1}(k)H(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$I + P(k / k-1)H^T(k)R^{-1}(k)H(k)$	$(n \times n) + (n \times n)$	$n$
$[I + P(k / k-1)H^T(k)R^{-1}(k)H(k)]^{-1}$	$(n \times n)^{-1}$	$\frac{1}{6}(16n^3 - 3n^2 - n)$
$\Lambda(k)z(k)$	$(n \times m) \cdot (m \times 1)$	$2nm - n$
$x(k / k-1) + \Lambda(k)z(k)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$x(k / k) = [I + P(k / k-1)H^T(k)R^{-1}(k)H(k)]^{-1} [x(k / k-1) + \Lambda(k)z(k)]$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$P(k / k) = [I + P(k / k-1)H^T(k)R^{-1}(k)H(k)]^{-1} P(k / k-1)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$F(k+1, k)x(k / k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$B(k)u(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$x(k+1 / k) = F(k+1, k)x(k / k) + B(k)u(k)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$F(k+1, k)P(k / k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$F(k+1, k)P(k / k)F^T(k+1, k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$P(k+1 / k) = Q(k) + F(k+1, k)P(k / k)F^T(k+1, k)$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$n \geq 2, m \geq 2$	$CB_{TVKFGF} = \frac{1}{6}(52n^3 + 27n^2 - 13n) + 3n^2m + nm + 2nm^2 + \frac{1}{6}(16m^3 - 3m^2 - m)$	
$n = 1, m \geq 2$	$CB_{TVKFGF} = \frac{1}{6}(16m^3 + 9m^2 + 23m + 60)$	
$n \geq 2, m = 1$	$CB_{TVKFGF} = \frac{1}{6}(52n^3 + 45n^2 + 5n + 6)$	
$n = 1, m = 1$	$CB_{TVKFGF} = 17$	

**Πίνακας 8.8** Χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους  
Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος.

Στον Πίνακα 8.9 παρουσιάζεται ο ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman με απαλοιφή κέρδους.

Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman με Απαλοιφή Κέρδους Time Invariant Kalman Filter Gain Elimination (TIKFGE)		
Πράξη Πινάκων	Διαστάσεις Πινάκων	Υπολογιστικός Φόρτος
$\Lambda(k) = P(k / k-1)H^T R^{-1}$	$(n \times n) \cdot (n \times m)$	$2n^2m - nm$
$P(k / k-1)H^T R^{-1}H$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$I + P(k / k-1)H^T R^{-1}H$	$(n \times n) + (n \times n)$	$n$
$[I + P(k / k-1)H^T R^{-1}H]^{-1}$	$(n \times n)^{-1}$	$\frac{1}{6}(16n^3 - 3n^2 - n)$
$\Lambda(k)z(k)$	$(n \times m) \cdot (m \times 1)$	$2nm - n$
$x(k / k-1) + \Lambda(k)z(k)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$x(k / k) = [I + P(k / k-1)H^T R^{-1}H]^{-1} [x(k / k-1) + \Lambda(k)z(k)]$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$P(k / k) = [I + P(k / k-1)H^T R^{-1}H]^{-1} P(k / k-1)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$Fx(k / k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$Bu(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$x(k+1 / k) = Fx(k / k) + Bu(k)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$FP(k / k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$FP(k / k)F^T$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$P(k+1 / k) = Q + FP(k / k)F^T$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$n \geq 2, m \geq 2$	$CB_{TIKFGE} = \frac{1}{3}(26n^3 + 15n^2 - 5n) + 2n^2m + nm$	
$n = 1, m \geq 2$	$CB_{TIKFGE} = 3m + 10$	
$n \geq 2, m = 1$	$CB_{TIKFGE} = \frac{1}{3}(26n^3 + 21n^2 - 2n)$	
$n = 1, m = 1$	$CB_{TIKFGE} = 13$	

**Πίνακας 8.9** Χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους  
Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος.

Για  $n = 1$ ,  $FP(k / k)F^T = F^2P(k / k)$  όπου  $F^2$  υπολογίζεται off-line.

Στον Πίνακα 8.10 παρουσιάζεται ο ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης με απαλοιφή κέρδους.

Φίλτρο Kalman Μόνιμης Κατάστασης με Απαλοιφή Κέρδους Steady State Kalman Filter Gain Elimination (SSKFGE)		
Πράξη Πινάκων	Διαστάσεις Πινάκων	Υπολογιστικός Φόρτος
$Ax(k / k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$Cu(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$Kz(k+1)$	$(n \times m) \cdot (m \times 1)$	$2nm - n$
$Ax(k / k) + Cu(k)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$x(k+1 / k+1) = Ax(k / k) + Cu(k) + Kz(k+1)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$CB_{SSKFGE} = 4n^2 - n + 2nm$		

**Πίνακας 8.10** Φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης με απαλοιφή κέρδους.  
Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος.

Στο Assimakis (2020) υπολογίζεται ο υπολογιστικός φόρτος του φίλτρου Kalman με απαλοιφή κέρδους χωρίς είσοδο, για τη γενική περίπτωση με πίνακες ( $n \geq 2$  και  $m \geq 2$ ).

## 8.6 Επιλογή του ταχύτερου φίλτρου Kalman

Στον πίνακα 8.11 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι ανά επανάληψη υπολογιστικοί φόρτοι των φίλτρων Kalman, για τη γενική πολυδιάστατη (multi-dimensional) περίπτωση, όπου  $n \geq 2, m \geq 2$ .

Φίλτρο	Μοντέλο	Υπολογιστικός Φόρτος
φίλτρο Kalman	Χρονικά Μεταβαλλόμενο	$CB_{TVKF} = \frac{1}{2}(8n^3 + 11n^2 - 3n) + 4n^2m + nm + 3nm^2 + \frac{1}{6}(16m^3 - 3m^2 - m)$
	Χρονικά Αμετάβλητο	$CB_{TIKF} = \frac{1}{2}(8n^3 + 11n^2 - 3n) + 4n^2m + nm + 3nm^2 + \frac{1}{6}(16m^3 - 3m^2 - m)$
	Μόνιμη Κατάσταση	$CB_{SSKF} = 4n^2 - n + 2nm$
φίλτρο Kalman πληροφορίας	Χρονικά Μεταβαλλόμενο	$CB_{TVIKF} = \frac{1}{3}(25n^3 + 27n^2 - 13n) + 3n^2m + nm + 2nm^2 + \frac{1}{6}(16m^3 - 3m^2 - m)$
	Χρονικά Αμετάβλητο	$CB_{TIKF} = \frac{1}{6}(50n^3 + 57n^2 - 23n) + 2n^2m + nm$
	Μόνιμη Κατάσταση	$CB_{SSIKF} = 4n^2 - n + 2nm$
φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους	Χρονικά Μεταβαλλόμενο	$CB_{TVKFG} = \frac{1}{6}(52n^3 + 27n^2 - 13n) + 3n^2m + nm + 2nm^2 + \frac{1}{6}(16m^3 - 3m^2 - m)$
	Χρονικά Αμετάβλητο	$CB_{TIKFG} = \frac{1}{3}(26n^3 + 15n^2 - 5n) + 2n^2m + nm$
	Μόνιμη Κατάσταση	$CB_{SSKFG} = 4n^2 - n + 2nm$

Πίνακας 8.11 Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος φίλτρων Kalman

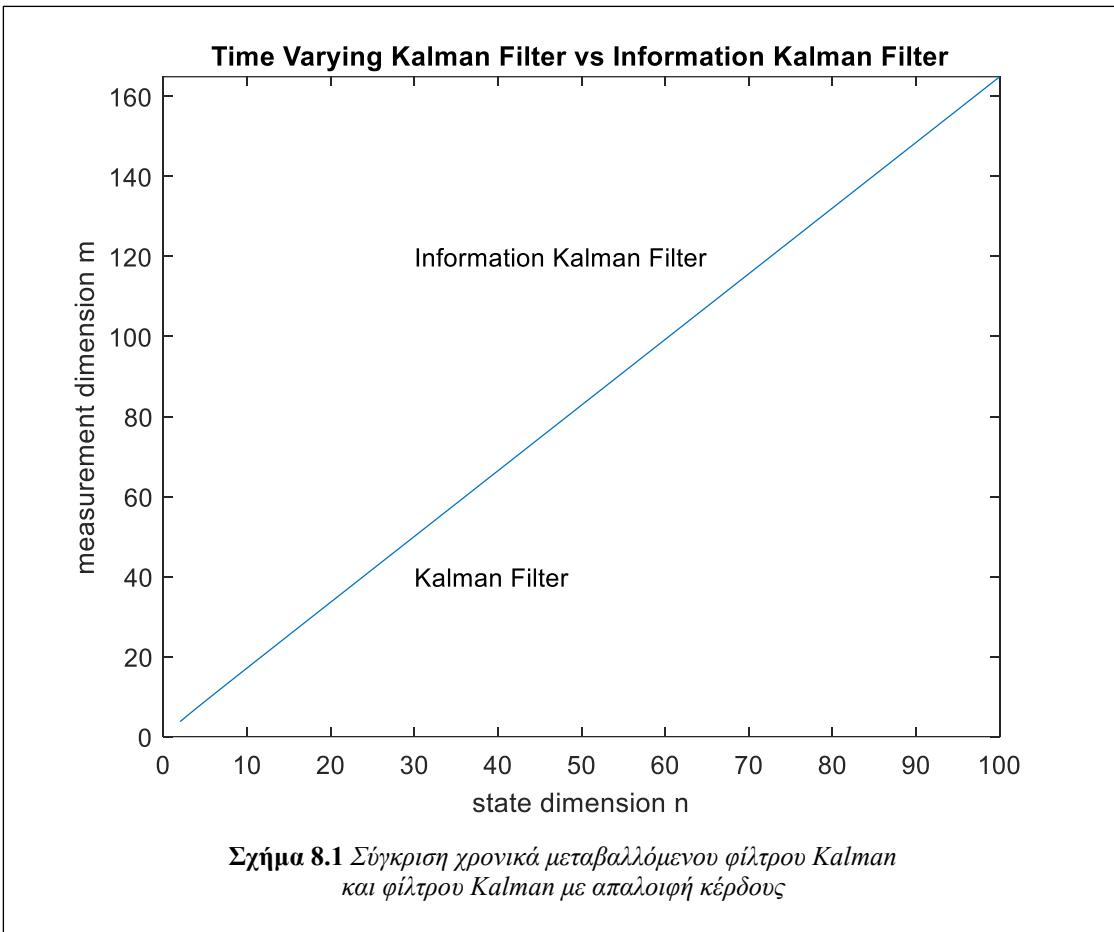
Τα φίλτρα Kalman είναι επαναληπτικοί αλγόριθμοι. Υπό την προϋπόθεση ότι χρησιμοποιούν τις ίδιες αρχικές συνθήκες, τα φίλτρα Kalman εκτελούν ίσο πλήθος επαναλήψεων για να υπολογίζουν την εκτίμηση σε κάποια χρονική στιγμή. Επομένως, προκειμένου να συγκρίνουμε τους υπολογιστικούς χρόνους των φίλτρων, συγκρίνουμε τους υπολογιστικούς φόρτους των φίλτρων.

### Σύγκριση φίλτρων Kalman και φίλτρων Kalman πληροφορίας

Για τα χρονικά μεταβαλλόμενα φίλτρα, έχουμε:

$$CB_{TVKF} - CB_{TIVKF} = \left( m^2 + nm - \frac{1}{6}(26n^2 + 21n - 17) \right) n \quad (8.2)$$

Στο Σχήμα 8.1 αποτυπώνονται οι περιοχές, όπου το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman ή το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman πληροφορίας είναι ταχύτερο για διάφορες τιμές των διαστάσεων του μοντέλου  $n = 2..100$  και  $m = 2..100$



Από το Σχήμα 8.1 προκύπτει ο κανόνας (rule of thumb):

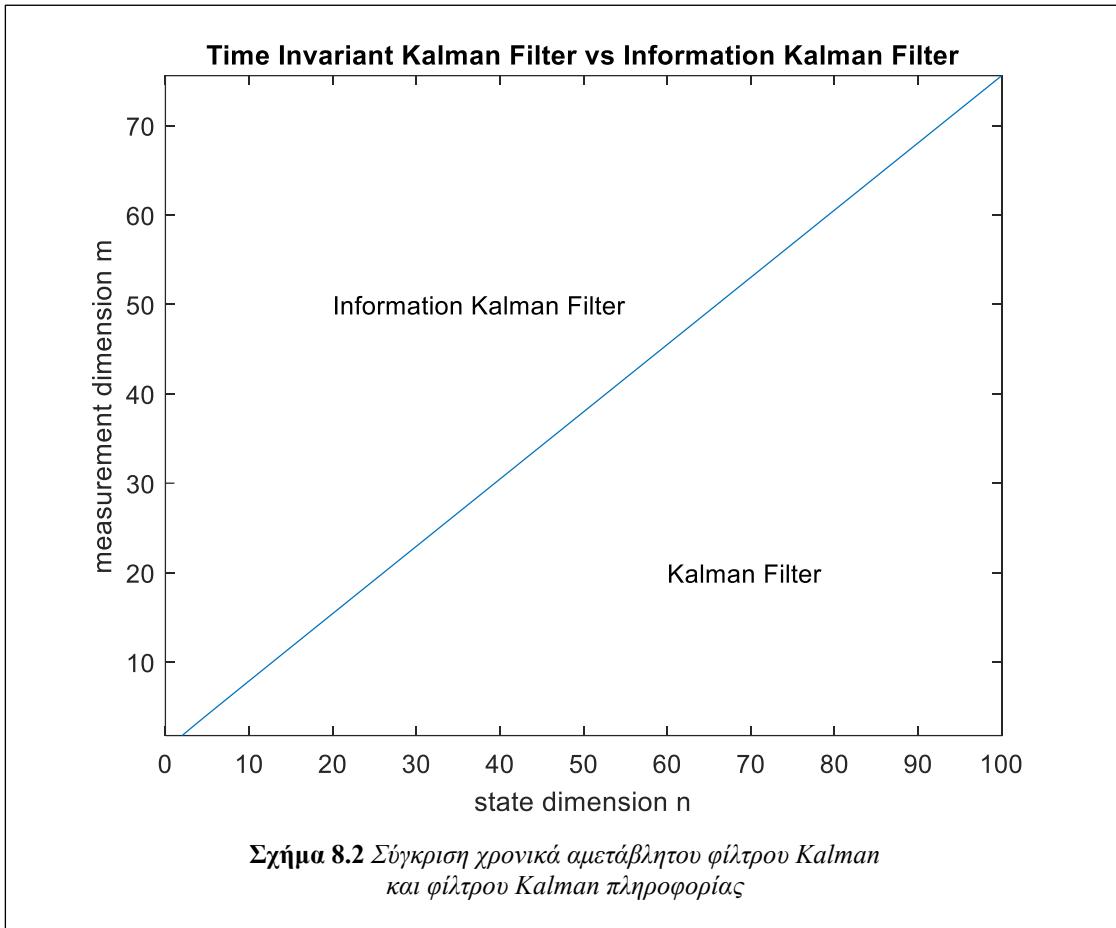
$$CB_{TIVKF} < CB_{TVKF}, \text{ όταν } m > 1.65n \quad (8.3)$$

δηλαδή, το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman πληροφορίας είναι ταχύτερο από το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman, όταν  $m > 1.65n$ .

Για τα χρονικά αμετάβλητα φίλτρα έχουμε:

$$CB_{TIKF} - CB_{TIIKF} = \frac{8}{3}m^3 + \frac{1}{2}(6n-1)m^2 + \frac{1}{6}(12n^2-1)m - \frac{1}{6}(26n^3 + 24n^2 - 14n) \quad (8.4)$$

Στο Σχήμα 8.2 αποτυπώνονται οι περιοχές, όπου το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman ή το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman πληροφορίας είναι ταχύτερο για διάφορες τιμές των διαστάσεων του μοντέλου  $n = 2..100$  και  $m = 2..100$



Από το Σχήμα 8.2 προκύπτει ο κανόνας (rule of thumb):

$$CB_{TIKF} < CB_{TIKF}, \text{ όταν } m > 0.75n \quad (8.5)$$

δηλαδή, το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman πληροφορίας είναι ταχύτερο από το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman, όταν  $m > 0.75n$ .

Για τα φίλτρα μόνιμης κατάστασης, έχουμε:

$$CB_{SSIKF} = CB_{SSKF} \quad (8.6)$$

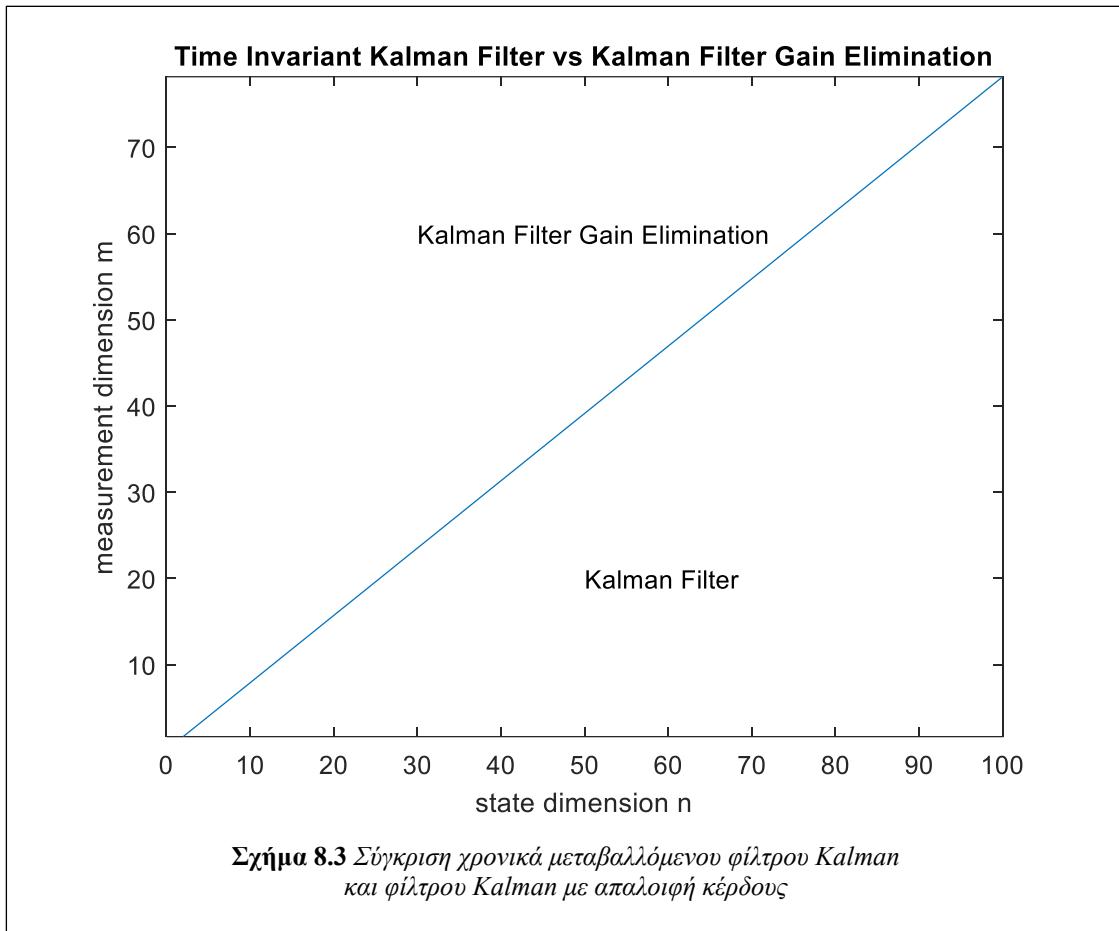
δηλαδή, το φίλτρο Kalman πληροφορίας μόνιμης κατάστασης και το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης έχουν ίσους υπολογιστικούς φόρτους και ίσους υπολογιστικούς χρόνους.

#### Σύγκριση φίλτρων Kalman και φίλτρων Kalman με απαλοιφή κέρδους

Για τα χρονικά μεταβαλλόμενα φίλτρα, έχουμε:

$$CB_{TVKF} - CB_{TVKFG} = \left( m^2 + nm + \frac{1}{3}(-14n^2 + 3n + 7) \right) n \quad (8.7)$$

Στο Σχήμα 8.3 αποτυπώνονται οι περιοχές, όπου το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman ή το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους είναι ταχύτερο για διάφορες τιμές των διαστάσεων του μοντέλου  $n = 2..100$  και  $m = 2..100$



Από το Σχήμα 8.3 προκύπτει ο κανόνας (rule of thumb):

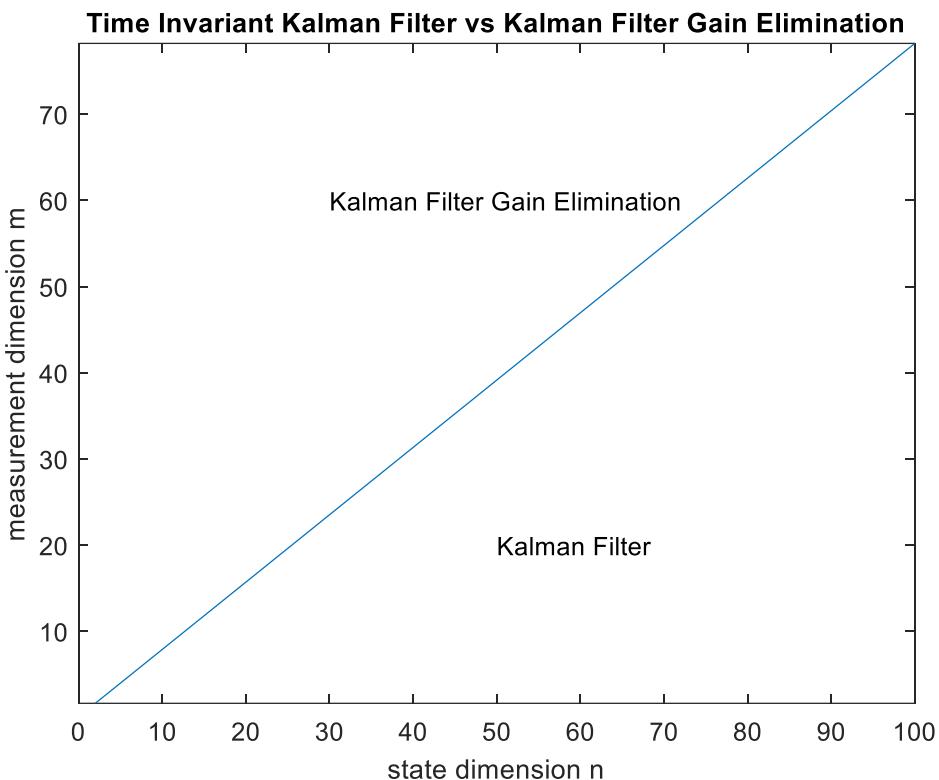
$$CB_{TVKFGE} < CB_{TVKF}, \text{ όταν } m > 1.7n \quad (8.8)$$

δηλαδή, το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους είναι ταχύτερο από το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman, όταν  $m > 1.7n$ .

Για τα χρονικά αμετάβλητα φίλτρα έχουμε:

$$CB_{TIKF} - CB_{TIKFGE} = \frac{8}{3}m^3 + \frac{1}{2}(6n-1)m^2 + \frac{1}{6}(12n^2-1)m + \frac{1}{6}(-28n^3 + 3n^2 + n) \quad (8.9)$$

Στο Σχήμα 8.4 αποτυπώνονται οι περιοχές, όπου το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman ή το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους είναι ταχύτερο για διάφορες τιμές των διαστάσεων του μοντέλου  $n = 2..100$  και  $m = 2..100$



**Σχήμα 8.4** Σύγκριση χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman και φίλτρου Kalman με απαλοιφή κέρδους

Από το Σχήμα 8.4 προκύπτει ο κανόνας (rule of thumb):

$$CB_{TIKFGE} < CB_{TIKF}, \text{ όταν } m > 0.8n \quad (8.10)$$

δηλαδή, το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους είναι ταχύτερο από το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman, όταν  $m > 0.8n$ .

Για τα φίλτρα μόνιμης κατάστασης, έχουμε:

$$CB_{SSKFG} = CB_{SSKF} \quad (8.11)$$

δηλαδή, το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης με απαλοιφή κέρδους και το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης έχουν ίσους υπολογιστικούς φόρτους και ίσους υπολογιστικούς χρόνους

**Σύγκριση φίλτρων Kalman πληροφορίας και φίλτρων Kalman με απαλοιφή κέρδους**  
Για τα χρονικά μεταβαλλόμενα φίλτρα, έχουμε:

$$\begin{aligned} CB_{TVKFG} - CB_{TVKF} &= \frac{1}{6}(52n^3 + 27n^2 - 13n) - \frac{1}{3}(25n^3 + 27n^2 - 13n) \\ &= \frac{1}{6}(52n^3 + 27n^2 - 13n) - \frac{1}{6}(50n^3 + 54n^2 - 26n) \\ &= \frac{1}{6}(2n^3 - 24n^2 + 16n) \\ &= \frac{1}{3}(n^2 - 12n + 8)n \\ &= \frac{1}{3}n(n - (6 + \sqrt{28}))(n - (6 - \sqrt{28})) \end{aligned}$$

Οπότε:

$$CB_{TVKFG} - CB_{TVKF} = \frac{1}{3}n(n - 11.2915)(n - 0.7085) \quad (8.12)$$

Από την (8.12) προκύπτει ο κανόνας:

$$CB_{TVKFGE} < CB_{TIKF}, \text{ όταν } n \leq 11 \quad (8.13)$$

δηλαδή, το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους είναι ταχύτερο από το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman πληροφορίας, όταν  $n \leq 11$ .

Για τα χρονικά αμετάβλητα φίλτρα, έχουμε:

$$\begin{aligned} CB_{TIKFGE} - CB_{TIKF} &= \frac{1}{3}(26n^3 + 15n^2 - 5n) - \frac{1}{6}(50n^3 + 57n^2 - 23n) \\ &= \frac{1}{6}(52n^3 + 30n^2 - 10n) - \frac{1}{6}(50n^3 + 57n^2 - 23n) \\ &= \frac{1}{6}(2n^3 - 27n^2 + 13n) \\ &= \frac{1}{6}(2n^2 - 27n + 13)n \\ &= \frac{1}{6}2(n-13)(n-\frac{1}{2})n \end{aligned}$$

Οπότε:

$$CB_{TIKFGE} - CB_{TIKF} = \frac{1}{3}n(n-13)(n-\frac{1}{2}) \quad (8.14)$$

Από την (8.14) προκύπτει ο κανόνας:

$$CB_{TVKFGE} < CB_{TIKF}, \text{ όταν } n < 13 \quad (8.15)$$

δηλαδή, το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους είναι ταχύτερο από το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman πληροφορίας, όταν  $n < 13$ .

Για τα φίλτρα μόνιμης κατάστασης, έχουμε:

$$CB_{SSKFG} = CB_{SSIKF} \quad (8.16)$$

δηλαδή, το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης με απαλοιφή κέρδους και το φίλτρο Kalman πληροφορίας μόνιμης κατάστασης έχουν ίσους υπολογιστικούς φόρτους και ίσους υπολογιστικούς χρόνους.

Από τη σύγκριση των υπολογιστικών φόρτων των φίλτρων Kalman προκύπτει το συμπέρασμα ότι η γνώση των διαστάσεων του μοντέλου, δηλαδή των διαστάσεων  $n$  και  $m$ , μπορεί να καθορίσει ποιο φίλτρο είναι το ταχύτερο.

## 8.7 Υπολογιστικός φόρτος φίλτρων Kalman σε προγραμματιστικό περιβάλλον

Η συνάρτηση cbkf υπολογίζει τους υπολογιστικούς φόρτους των φίλτρων Kalman για τη γενική πολυδιάστατη (multi-dimensional) περίπτωση, όπου  $n \geq 2, m \geq 2$ , για μία επανάληψη.

Η συνάρτηση cbkf έχει εισόδους τις διαστάσεις του μοντέλου  $n$  και  $m$  και εξόδους τους ανά επανάληψη υπολογιστικούς φόρτους του χρονικά μεταβαλλόμενου φίλτρου Kalman, του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman και του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης.

Έτσι, για παράδειγμα, για τον υπολογισμό των υπολογιστικών φόρτων των φίλτρων Kalman με εισόδους  $n = 4$  και  $m = 2$ , απαιτείται η κλήση:

```
n=4;
m=2;
[cbtvkf, cbtikf, cbsskf]=cbkf(n,m)
```

```
function [cbtvkf, cbtikf, cbsskf]=cbkf(n,m)

% CALCULATION BURDEN
% KALMAN FILTER

% TIME VARYING KALMAN FILTER
cbtvkf=(8*(n^3)+11*(n^2)-3*n)/2+4*(n^2)*m+n*m+3*n*(m^2)+(16*(m^3)-
3*(m^2)-m)/6;
```

```
% TIME INVARIANT KALMAN FILTER
cbtikf=(8*(n^3)+11*(n^2)-3*n)/2+4*(n^2)*m+n*m+3*n*(m^2)+(16*(m^3)-
3*(m^2)-m)/6;
% STEADY STATE KALMAN FILTER
cbsskf=4*(n^2)-n+2*n*m;
```

Η συνάρτηση cbikf υπολογίζει τους υπολογιστικούς φόρτους των φίλτρων Kalman πληροφορίας για τη γενική πολυδιάστατη (multi-dimensional) περίπτωση, όπου  $n \geq 2, m \geq 2$ , για μία επανάληψη.

Η συνάρτηση cbikf έχει εισόδους τις διαστάσεις του μοντέλου  $n$  και  $m$  και εξόδους τους ανά επανάληψη υπολογιστικούς φόρτους του χρονικά μεταβαλλόμενου φίλτρου Kalman πληροφορίας, του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman πληροφορίας και του φίλτρου Kalman πληροφορίας μόνιμης κατάστασης.

Έτσι, για παράδειγμα, για τον υπολογισμό των υπολογιστικών φόρτων των φίλτρων Kalman πληροφορίας με εισόδους  $n = 4$  και  $m = 2$ , απαιτείται η κλήση:

```
n=4;
m=2;
[cbtvikf,cbtiikf,cbssikf]=cbikf(n,m)
```

```
function [cbtvikf,cbtiikf,cbssikf]=cbikf(n,m)

% CALCULATION BURDEN
% INFORMATION KALMAN FILTER

% TIME VARYING INFORMATION KALMAN FILTER
cbtvikf=(25*(n^3)+27*(n^2)-13*n)/3+3*(n^2)*m+n*m+2*n*(m^2)+(16*(m^3)-
3*(m^2)-m)/6;
% TIME INVARIANT INFORMATION KALMAN FILTER
cbtiikf=(50*(n^3)+57*(n^2)-23*n)/6+2*(n^2)*m+n*m;
% STEADY STATE INFORMATION KALMAN FILTER
cbssikf=4*(n^2)-n+2*n*m;
```

Η συνάρτηση cbkfge υπολογίζει τους υπολογιστικούς φόρτους των φίλτρων Kalman με απαλοιφή κέρδους για τη γενική πολυδιάστατη (multi-dimensional) περίπτωση, όπου  $n \geq 2, m \geq 2$ , για μία επανάληψη.

Η συνάρτηση cbkfge έχει εισόδους τις διαστάσεις του μοντέλου  $n$  και  $m$  και εξόδους τους ανά επανάληψη υπολογιστικούς φόρτους του χρονικά μεταβαλλόμενου φίλτρου Kalman με απαλοιφή κέρδους, του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman με απαλοιφή κέρδους και του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης με απαλοιφή κέρδους.

Έτσι, για παράδειγμα, για τον υπολογισμό των υπολογιστικών φόρτων των φίλτρων Kalman με απαλοιφή κέρδους με εισόδους  $n = 4$  και  $m = 2$ , απαιτείται η κλήση:

```
n=4;
m=2;
[cbtvkfge,cbtikfge,cbsskfge]=cbkfge(n,m)
```

```
function [cbtvkfge,cbtikfge,cbsskfge]=cbkfge(n,m)

% CALCULATION BURDEN
% KALMAN FILTER GAIN ELIMINATION

% TIME VARYING KALMAN FILTER GAIN ELIMINATION
cbtvkfge=(52*(n^3)+27*(n^2)-13*n)/6+3*(n^2)*m+n*m+2*n*(m^2)+(16*(m^3)-
3*(m^2)-m)/6;
% TIME INVARIANT KALMAN FILTER GAIN ELIMINATION
cbtikfge=(26*(n^3)+15*(n^2)-5*n)/3+2*(n^2)*m+n*m;
% STEADY STATE KALMAN FILTER GAIN ELIMINATION
cbsskfge=4*(n^2)-n+2*n*m;
```

## 8.8 Ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τον ανά επανάληψη υπολογιστικό φόρτο των φίλτρων Kalman για το βαθμωτό μοντέλο, όπου  $n = 1$  και  $m = 1$
2. Να υπολογίσετε τον ανά επανάληψη υπολογιστικό φόρτο των φίλτρων Kalman για το μοντέλο με μονοδιάστατη κατάσταση, όπου  $n = 1$
3. Να υπολογίσετε τον ανά επανάληψη υπολογιστικό φόρτο των φίλτρων Kalman για το μοντέλο με μονοδιάστατη μέτρηση, όπου  $m = 1$
4. Δίνεται ένα χρονικά αμετάβλητο μοντέλο διαστάσεων  $n = 4$  και  $m = 2$ . Να υπολογίσετε ποιο φίλτρο είναι το ταχύτερο.
5. Δίνεται ένα χρονικά αμετάβλητο μοντέλο διαστάσεων  $n = 3$  και  $m = 1$ . Να υπολογίσετε την επιτάχυνση (speedup) από το φίλτρο Kalman πληροφορίας στο φίλτρο Kalman

$$speedup_{TIIKF/TIKF} = \frac{CB_{TIIKF}}{CB_{TIKF}}$$

6. Δίνεται ένα χρονικά αμετάβλητο μοντέλο διαστάσεων  $n = 4$  και  $m = 1000$ . Να υπολογίσετε την επιτάχυνση (speedup) από το φίλτρο Kalman στο φίλτρο Kalman πληροφορίας

$$speedup_{TIKF/TIIKF} = \frac{CB_{TIKF}}{CB_{TIIKF}}.$$

## 8.9 Περίληψη

Τα φίλτρα Kalman είναι επαναληπτικοί αλγόριθμοι, γιατί υπολογίζουν επαναληπτικά την εκτίμηση και τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης. Επομένως ο συνολικός υπολογιστικός χρόνος (calculation time) που απαιτείται για την υλοποίησή τους είναι το γινόμενο:

- του χρόνου που απαιτείται για την υλοποίηση μιας βαθμωτής πράξης (scalar operation)
- του ανά επανάληψη υπολογιστικού φόρτου (calculation burden) του αλγορίθμου
- του πλήθος των επαναλήψεων που εκτελεί ο αλγόριθμος.

Η υλοποίηση των φίλτρων απαιτεί πράξεις πινάκων. Ο υπολογιστικός φόρτος (calculation burden) των πράξεων πινάκων εξαρτάται από τις διαστάσεις των πινάκων. Στις πράξεις πινάκων εμπλέκονται βαθμωτές πράξεις (scalar operations), των οποίων οι υπολογιστικοί φόρτοι θεωρούνται ίσοι μεταξύ τους.

Τα φίλτρα Kalman είναι επαναληπτικοί αλγόριθμοι. Υπό την προϋπόθεση ότι χρησιμοποιούν τις ίδιες αρχικές συνθήκες, τα φίλτρα Kalman εκτελούν ίσο πλήθος επαναλήψεων για να υπολογίζουν την εκτίμηση σε κάποια χρονική στιγμή. Επομένως, προκειμένου να συγκρίνουμε τους υπολογιστικούς χρόνους των φίλτρων, συγκρίνουμε τους υπολογιστικούς φόρτους των φίλτρων.

Η γνώση των διαστάσεων του μοντέλου, δηλαδή των διαστάσεων  $n$  και  $m$ , μπορεί να καθορίσει ποιο φίλτρο είναι το ταχύτερο.

Το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman πληροφορίας είναι ταχύτερο από το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman, όταν  $m > 1.65n$ .

Το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους είναι ταχύτερο από το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman, όταν  $m > 1.7n$ .

Το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους είναι ταχύτερο από το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman πληροφορίας, όταν  $n \leq 11$ .

Το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman πληροφορίας είναι ταχύτερο από το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman, όταν  $m > 0.75n$ .

Το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους είναι ταχύτερο από το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman, όταν  $m > 0.8n$ .

Το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους είναι ταχύτερο από το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman πληροφορίας, όταν  $n < 13$ .

Το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης, το φίλτρο Kalman πληροφορίας μόνιμης κατάστασης και το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης με απαλοιφή κέρδους έχουν ίσους υπολογιστικούς φόρτους και ίσους υπολογιστικούς χρόνους.

Μπορείτε να ακούσετε την περίληψη με τον Ήχο 8.1.



**Ήχος 8.1 Περίληψη – Κεφάλαιο 8.**

## **8.10 Κριτήριο Αξιολόγησης**

Απαντήστε με Σωστό ή Λάθος.

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 1**

Ο υπολογιστικός χρόνος των φίλτρων Kalman είναι ανάλογος του υπολογιστικού φόρτου των φίλτρων Kalman.

---

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 2**

Η υλοποίηση των φίλτρων Kalman για πολυδιάστατα μοντέλα απαιτεί πράξεις πινάκων.

---

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 3**

Ο υπολογιστικός φόρτος (calculation burden) των πράξεων πινάκων εξαρτάται από τις διαστάσεις των πινάκων.

---

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 4**

Η γνώση των διαστάσεων του μοντέλου μπορεί να καθορίσει ποιο φίλτρο είναι το ταχύτερο.

---

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 5**

Το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman πληροφορίας είναι ταχύτερο από το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman, όταν  $m > 2n$

---

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 6**

Το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman είναι ταχύτερο από το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους, όταν  $m > 2n$ .

---

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 7**

Το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους είναι ταχύτερο από το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman πληροφορίας, όταν  $n = 4$ .

---

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 8**

Το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους είναι ταχύτερο από το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman πληροφορίας, όταν  $n = 15$ .

---

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 9**

Τα φίλτρα χρονικά αμετάβλητα Kalman είναι ταχύτερα από τα φίλτρα Kalman μόνιμης κατάστασης.

---

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 10**

Το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης, το φίλτρο Kalman πληροφορίας μόνιμης κατάστασης και το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης με απαλοιφή κέρδους έχουν ίσους υπολογιστικούς φόρτους και ίσους υπολογιστικούς χρόνους.

Θα βρείτε την Απάντηση στο Κριτήριο Αξιολόγησης στο Παράρτημα A'.

Μπορείτε να κάνετε το Κριτήριο Αξιολόγησης με το Διαδραστικό Πρόγραμμα 8.1.



**Διαδραστικό Πρόγραμμα 8.1 Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 8.**

## 8.11 Εφαρμογή: Επιλογή του ταχύτερου φίλτρου Kalman

Ο υπολογιστικός χρόνος των φίλτρων Kalman είναι ανάλογος του υπολογιστικού φόρτου των φίλτρων Kalman και του πλήθους των επαναλήψεων που εκτελούν τα φίλτρα. Θεωρώντας ότι τα φίλτρα εκτελούν το ίδιο πλήθος επαναλήψεων, προκύπτει ότι ο υπολογιστικός χρόνος των φίλτρων Kalman εξαρτάται από τον υπολογιστικό φόρτο των φίλτρων Kalman.

Ο υπολογιστικός φόρτος των φίλτρων Kalman εξαρτάται από:

- τη διάσταση  $n$  του διανύσματος κατάστασης
- τη διάσταση  $m$  του διανύσματος μετρήσεων
- τον τύπο του φίλτρου:
  - Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο (Time Varying Filter)
  - Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο (Time Invariant Filter)
  - Φίλτρο Μόνιμης Κατάστασης (Steady State Filter)
- τον αλγόριθμο του φίλτρου:
  - (συμβατικό/παραδοσιακό) Φίλτρο Kalman (Kalman Filter)
  - Φίλτρο Kalman Πληροφορίας (Information Kalman Filter)
  - Φίλτρο Kalman με Απαλοιφή Κέρδους (Kalman Filter Gain Elimination)

Η εφαρμογή υπολογίζει τους υπολογιστικούς φόρτους των φίλτρων Kalman.

Η εφαρμογή επιλέγει το ταχύτερο φίλτρο Kalman, δηλαδή τον ταχύτερο αλγόριθμο. Η εφαρμογή μπορεί να επιλέγει ένα ή περισσότερα φίλτρα ως ταχύτερα φίλτρα.

Η εφαρμογή υπολογίζει την αποδοτικότητα των αλγορίθμων σε σχέση με τον ταχύτερο αλγόριθμο.

Η εφαρμογή έχει εισόδους:

- τη διάσταση  $n$  του διανύσματος κατάστασης
- τη διάσταση  $m$  του διανύσματος μετρήσεων
- τον τύπο του φίλτρου
  - Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο - Time Varying Kalman Filter (TVKF)
  - Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο - Time Invariant Kalman Filter (TIKF)
  - Φίλτρο Μόνιμης Κατάστασης - Steady State Kalman Filter (SSKF)

Η εφαρμογή έχει εξόδους:

- το ταχύτερο φίλτρο Kalman, δηλαδή τον ταχύτερο αλγόριθμο
  - (συμβατικό/παραδοσιακό) Φίλτρο Kalman (Kalman Filter – KF)
  - Φίλτρο Kalman Πληροφορίας (Information Kalman Filter – IKF)
  - Φίλτρο Kalman με Απαλοιφή Κέρδους (Kalman Filter Gain Elimination – KFGE)
- την αποδοτικότητα των αλγορίθμων σε σχέση με τον ταχύτερο αλγόριθμο

Η εφαρμογή υλοποιείται με τη συνάρτηση fasterkalmanfilter:

```
function [fasterkf, cbkfefficiency]=fasterkalmanfilter(n,m,kftype)

% input
% model dimensions
% n state vector dimension
% m measurement vector dimension
% kftype
% TVKF - Time Varying Kalman Filter
% TIKF - Time Invariant Kalman Filter
% SSKF - Steady State Kalman Filter
% output
% faster Kalman Filter algorithm
% KF - Kalman Filter
% IKF - Information Kalman Filter
% KFGE - Kalman Filter Gain Elimination
% calculation burden efficiency
```

```

% TVKF CALCULATION BURDEN
if kftype=='TVKF'
    if and((n>=2), (m>=2))
        cbtvkf=(8*(n^3)+11*(n^2)-
3*n)/2+4*(n^2)*m+n*m+3*n*(m^2)+(16*(m^3)-3*(m^2)-m)/6;
        cbtvikf=(25*(n^3)+27*(n^2)-
13*n)/3+3*(n^2)*m+n*m+2*n*(m^2)+(16*(m^3)-3*(m^2)-m)/6;
        cbtvkfge=(52*(n^3)+27*(n^2)-
13*n)/6+3*(n^2)*m+n*m+2*n*(m^2)+(16*(m^3)-3*(m^2)-m)/6;
    end;
    if and((n==1), (m>=2))
        cbtvkf=(16*(m^3)+15*(m^2)+29*m+48)/6;
        cbtvikf=(16*(m^3)+9*(m^2)+23*m+66)/6;
        cbtvkfge=(16*(m^3)+9*(m^2)+23*m+60)/6;
    end;
    if and((n>=1), (m==1))
        cbtvkf=(8*(n^3)+19*(n^2)+5*n+2)/2;
        cbtvikf=(25*(n^3)+36*(n^2)-4*n+3)/3;
        cbtvkfge=(52*(n^3)+45*(n^2)+5*n+6)/6;
    end;
    if and((n==1), (m==1))
        cbtvkf=17;
        cbtvikf=18;
        cbtvkfge=17;
    end;
    cbkf=[cbtvkf cbtvikf cbtvkfge];
end;

% TIKF CALCULATION BURDEN
if kftype=='TIKF'
    if and((n>=2), (m>=2))
        cbtikf=(8*(n^3)+11*(n^2)-
3*n)/2+4*(n^2)*m+n*m+3*n*(m^2)+(16*(m^3)-3*(m^2)-m)/6;
        cbtiikf=(50*(n^3)+57*(n^2)-23*n)/6+2*(n^2)*m+n*m;
        cbtikfge=(26*(n^3)+15*(n^2)-5*n)/3+2*(n^2)*m+n*m;
    end;
    if and((n==1), (m>=2))
        cbtikf=(16*(m^3)+15*(m^2)+29*m+42)/6;
        cbtiikf=3*m+11;
        cbtikfge=3*m+10;
    end;
    if and((n>=1), (m==1))
        cbtikf=(8*(n^3)+19*(n^2)+5*n+2)/2;
        cbtiikf=(50*(n^3)+69*(n^2)-17*n)/6;
        cbtikfge=(26*(n^3)+21*(n^2)-2*n)/3;
    end;
    if and((n==1), (m==1))
        cbtikf=15;
        cbtiikf=14;
        cbtikfge=13;
    end;
    cbkf=[cbtikf cbtiikf cbtikfge];
end;

```

```

% SSKF CALCULATION BURDEN
if kftype=='SSKF'
    cbsskf=4*(n^2)-n+2*n*m;
    cbssikf=4*(n^2)-n+2*n*m;
    cbsskfge=4*(n^2)-n+2*n*m;
    cbkf=[cbsskf cbssikf cbsskfge];
end;

% faster Kalman Filter
[cbkfsorted,sI]=sort(cbkf);
sIkf=[];
for i=1:3
if sI(i)==1
    sIkf=[sIkf 'KF '];
end;
if sI(i)==2
    sIkf=[sIkf 'IKF '];
end;
if sI(i)==3
    sIkf=[sIkf 'KFGE '];
end;
end;
fasterkf=sIkf;

% calculation burden efficiency
mincb=cbkfsorted(1);
cbkfefficiency=cbkfsorted/mincb;

```

Μπορείτε να εκτελέσετε την εφαρμογή με το Διαδραστικό Πρόγραμμα 8.2.



**Διαδραστικό Πρόγραμμα 8.2** Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 8.

## **Βιβλιογραφία/Αναφορές**

- Assimakis, N. (2020). Kalman Filter Gain Elimination in Linear Estimation. *International Journal of Computer and Information Engineering*, vol. 14, no. 7, pp. 236-241, 2020.
- Assimakis, N., Adam, M. (2007). Discrete time Kalman and Lainiotis filters comparison. *Int. Journal of Mathematical Analysis (IJMA)*, vol. 1, no. 13, pp. 635-659.
- Assimakis, N., Adam, M. & Douladiris A. (2012). Information Filter and Kalman Filter Comparison: Selection of the Faster Filter. *International Journal of Information Engineering*, vol. 2, no. 1, pp. 1-5.
- Ασημάκης, Ν. (2009). *Φίλτρα Kalman και Λαϊνιώτη*. Εκδόσεις APAKYNΘΟΣ.

## Κεφάλαιο 9 Υπολογιστικός φόρτος αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati

### Σύνοψη

Στο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι υπολογιστικοί φόρτοι των επαναληπτικών αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati. Εξηγείται ο υπολογιστικός χρόνος και ο υπολογιστικός φόρτος των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati. Αναλύεται ο ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati και συγκεκριμένα τον ανά βήμα αλγορίθμου, τον ειδικού ανά βήμα αλγορίθμου, τον αλγορίθμου διπλασιασμού, τον ειδικού αλγορίθμου διπλασιασμού και τον αλγορίθμου κυκλικής αναγωγής. Αναλύεται η μέθοδος επιλογής του ταχύτερου αλγορίθμου για την επίλυση της εξίσωσης Riccati.

### Προαπαιτούμενη γνώση

Εξίσωση Riccati, αλγόριθμοι για την επίλυση της εξίσωσης Riccati, πίνακες.

### 9.1 Υπολογιστικός φόρτος επαναληπτικών αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati

Οι επαναληπτικοί αλγόριθμοι για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov υπολογίζουν επαναληπτικά τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης, έως ότου ικανοποιηθεί το κριτήριο σύγκλισης. Επομένως, ο συνολικός **υπολογιστικός χρόνος (calculation time)** που απαιτείται για την υλοποίησή τους είναι:

$$t_{\text{alg}} = CB_{\text{alg}} s_{\text{alg}} t_{\text{op}} \quad (9.1)$$

όπου  $t_{\text{op}}$  είναι ο χρόνος που απαιτείται για την υλοποίηση μίας βαθμωτής πράξης (scalar operation),  $CB_{\text{alg}}$  είναι ο ανά επανάληψη **υπολογιστικός φόρτος (calculation burden)** του αλγορίθμου και  $s_{\text{alg}}$  είναι το πλήθος των επαναλήψεων που εκτελεί ο αλγόριθμος.

Δεν λαμβάνεται υπόψη ο υπολογιστικός φόρτος των εκ των προτέρων υπολογισμών (off-line calculations), όπως είναι η αρχικοποίηση των αλγορίθμων.

Η υλοποίηση των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov απαιτεί πράξεις πινάκων. Ο υπολογιστικός φόρτος (calculation burden) των πράξεων πινάκων εξαρτάται από τις διαστάσεις των πινάκων. Στις πράξεις πινάκων εμπλέκονται βαθμωτές πράξεις (scalar operations), των οποίων οι υπολογιστικοί φόρτοι θεωρούνται ίσοι μεταξύ τους. Ο υπολογιστικός φόρτος των πράξεων με πίνακες [Assimakis and Adam (2007)] έχει παρουσιαστεί στον Πίνακα 8.1.

## 9.2 Υπολογιστικός φόρτος ανά βήμα αλγορίθμου

Στον Πίνακα 9.1 παρουσιάζεται ο ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος του ανά βήμα αλγορίθμου για την επίλυση της εξίσωσης Riccati.

Ανά Βήμα Αλγόριθμος Per Step Algorithm		
Πράξη Πινάκων	Διαστάσεις Πινάκων	Υπολογιστικός Φόρτος
$HP(k / k-1)$	$(m \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^2 m - nm$
$[HP(k / k-1)]H^T$	$(m \times n) \cdot (n \times m)$	$nm^2 + nm - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m$
$HP(k / k-1)H^T + R$	$(m \times m) + (m \times m)$	$\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m$
$[HP(k / k-1)H^T + R]^{-1}$	$(m \times m)^{-1}$	$\frac{1}{6}(16m^3 - 3m^2 - m)$
$[HP(k / k-1)H^T + R]^{-1}[HP(k / k-1)]$	$(m \times m) \cdot (m \times n)$	$2nm^2 - nm$
$[HP(k / k-1)]^T [HP(k / k-1)H^T + R]^{-1} HP(k / k-1)$	$(n \times m) \cdot (m \times n)$	$n^2 m + nm - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$P(k / k-1) - P(k / k-1)H^T [HP(k / k-1)H^T + R]^{-1} HP(k / k-1)$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$F \left[ P(k / k-1) - P(k / k-1)H^T [HP(k / k-1)H^T + R]^{-1} HP(k / k-1) \right]$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$F \left[ P(k / k-1) - P(k / k-1)H^T [HP(k / k-1)H^T + R]^{-1} HP(k / k-1) \right] F^T$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$P(k+1 / k) = Q$ $+ F \left[ P(k / k-1) - P(k / k-1)H^T [HP(k / k-1)H^T + R]^{-1} HP(k / k-1) \right] F^T$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$n \geq 2, m \geq 2$	$CB_{PSA} = 3n^3 + 3n^2 m + 3nm^2 + \frac{1}{6}(16m^3 - 3m^2 - m)$	
$n = 1, m \geq 2$	$CB_{PSA} = \frac{1}{6}(16m^3 + 15m^2 + 17m + 12)$	
$n \geq 2, m = 1$	$CB_{PSA} = 3n^3 + 3n^2 + 3n + 1$	
$n = 1, m = 1$	$CB_{PSA} = 8$	

**Πίνακας 9.1** Ανά βήμα αλγόριθμος.  
Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος.

Για  $n = 1$ ,

$$\begin{aligned} & F \left[ P(k / k-1) - P(k / k-1)H^T [HP(k / k-1)H^T + R]^{-1} HP(k / k-1) \right] F^T \\ &= F^2 \left[ P(k / k-1) - P(k / k-1)H^T [HP(k / k-1)H^T + R]^{-1} HP(k / k-1) \right] \end{aligned}$$

όπου  $F^2$  υπολογίζεται off-line.

Για  $n = m = 1$ ,  $HP(k / k-1)H^T = H^2 P(k / k-1)$  όπου  $H^2$  υπολογίζεται off-line.

Στον Πίνακα 9.2 παρουσιάζεται ο ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος του ειδικού ανά βήμα αλγορίθμου για την επίλυση της ειδικής εξίσωσης Riccati.

Ειδικός Ανά Βήμα Αλγόριθμος Special Per Step Algorithm		
Πράξη Πινάκων	Διαστάσεις Πινάκων	Υπολογιστικός Φόρτος
$P^{-1}(k / k-1)$	$(n \times n)$	$\frac{1}{6}(16n^3 - 3n^2 - n)$
$P^{-1}(k / k-1) + H^T R^{-1} H$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$[P^{-1}(k / k-1) + H^T R^{-1} H]^{-1}$	$(n \times n)$	$\frac{1}{6}(16n^3 - 3n^2 - n)$
$F[P^{-1}(k / k-1) + H^T R^{-1} H]^{-1}$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$F[P^{-1}(k / k-1) + H^T R^{-1} H]^{-1} F^T$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$P(k+1 / k) = Q + F[P^{-1}(k / k-1) + H^T R^{-1} H]^{-1} F^T$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$n \geq 2$	$CB_{SPSA} = \frac{1}{6}(50n^3 - 3n^2 + n)$	
$n = 1$	$CB_{SPSA} = 6$	

**Πίνακας 9.2** Ειδικός ανά βήμα αλγόριθμος.  
Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος.

### 9.3 Υπολογιστικός φόρτος αλγορίθμου διπλασιασμού

Στον Πίνακα 9.3 παρουσιάζεται ο ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος του αλγορίθμου διπλασιασμού για την επίλυση της εξίσωσης Riccati.

Αλγόριθμος Διπλασιασμού Doubling Algorithm		
$b(k)c(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$I + b(k)c(k)$	$(n \times n) + (n \times n)$	$n$
$[I + b(k)c(k)]^{-1}$	$(n \times n)$	$\frac{1}{6}(16n^3 - 3n^2 - n)$
$a(k)[I + b(k)c(k)]^{-1}$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$a(k+1) = a(k)[I + b(k)c(k)]^{-1} a(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$[I + b(k)c(k)]^{-1} b(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$a(k)[I + b(k)c(k)]^{-1} b(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$a(k)[I + b(k)c(k)]^{-1} b(k)a^T(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$b(k+1) = b(k) + a(k)[I + b(k)c(k)]^{-1} b(k)a^T(k)$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$c(k)[I + b(k)c(k)]^{-1}$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$c(k)[I + b(k)c(k)]^{-1} a(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$a^T(k)c(k)[I + b(k)c(k)]^{-1} a(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$c(k+1) = c(k) + a^T(k)c(k)[I + b(k)c(k)]^{-1} a(k)$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$n \geq 2$	$CB_{DA} = \frac{1}{6}(100n^3 - 15n^2 - n)$	
$n = 1$	$CB_{DA} = 13$	

**Πίνακας 9.3** Αλγόριθμος διπλασιασμού.  
Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος.

Στον Πίνακα 9.4 παρουσιάζεται ο ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος του ειδικού αλγορίθμου διπλασιασμού για την επίλυση της ειδικής εξίσωσης Riccati.

Ειδικός Αλγόριθμος Διπλασιασμού Special Doubling Algorithm		
$\beta(k) + \gamma(k)$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$[\beta(k) + \gamma(k)]^{-1}$	$(n \times n)$	$\frac{1}{6}(16n^3 - 3n^2 - n)$
$[\beta(k) + \gamma(k)]^{-1} \alpha(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$\alpha(k+1) = \alpha(k)[\beta(k) + \gamma(k)]^{-1} \alpha(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$\alpha^T(k)[\beta(k) + \gamma(k)]^{-1} \alpha(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$\beta(k+1) = \beta(k) - \alpha^T(k)[\beta(k) + \gamma(k)]^{-1} \alpha(k)$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$\alpha(k)[\beta(k) + \gamma(k)]^{-1}$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$\alpha(k)[\beta(k) + \gamma(k)]^{-1} \alpha^T(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$\gamma(k+1) = \gamma(k) - \alpha(k)[\beta(k) + \gamma(k)]^{-1} \alpha^T(k)$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$n \geq 2$	$CB_{SDA} = \frac{1}{3}(32n^3 - 3n^2 + n)$	
$n = 1$	$CB_{SDA} = 9$	

**Πίνακας 9.4** Ειδικός αλγόριθμος διπλασιασμού.  
Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος

#### 9.4 Υπολογιστικός φόρτος αλγορίθμου κυκλικής αναγωγής

Στον Πίνακα 9.5 παρουσιάζεται ο ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος του αλγορίθμου κυκλικής αναγωγής για την επίλυση της ειδικής εξίσωσης Riccati.

Αλγόριθμος Κυκλικής Αναγωγής Cyclic Reduction Algorithm		
$L^{-1}(k)$	$(n \times n)$	$\frac{1}{6}(16n^3 - 3n^2 - n)$
$A(k)L^{-1}(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$A(k+1) = A(k)L^{-1}(k)A(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$A(k)L^{-1}(k)A^T(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$A(k)L^{-1}(k)A^T(k) + [A(k)L^{-1}(k)A^T(k)]^T$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$L(k+1) = L(k) - A(k)L^{-1}(k)A^T(k) - A^T(k)L^{-1}(k)A(k)$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$X(k+1) = X(k) - [A(k)L^{-1}(k)A^T(k)]^T$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$Y(k+1) = Y(k) - A(k)L^{-1}(k)A^T(k)$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$n \geq 2$	$CB_{CRA} = \frac{1}{3}(23n^3 + 4n)$	
$n = 1$	$CB_{CRA} = 8$	

**Πίνακας 9.5** Αλγόριθμος κυκλικής αναγωγής.  
Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος.

Ο υπολογιστικός φόρτος των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati υπολογίζεται στο [Ασημάκης, (2013)], για τη γενική περίπτωση με πίνακες ( $n \geq 2$  και  $m \geq 2$ ).

## 9.5 Επιλογή του ταχύτερου αλγορίθμου για την επίλυση της εξίσωσης Riccati

Στον πίνακα 9.6 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι ανά επανάληψη υπολογιστικοί φόρτοι των επαναληπτικών αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati, για τη γενική πολυδιάστατη (multi-dimensional) περίπτωση, όπου  $n \geq 2, m \geq 2$ .

Τύπος επανάληψης	Εξίσωση Riccati	Υπολογιστικός Φόρτος
Ανά βήμα	κλασική	$CB_{PSA} = 3n^3 + 3n^2m + 3nm^2 + \frac{1}{6}(16m^3 - 3m^2 - m)$
	ειδική	$CB_{SPSA} = \frac{1}{6}(50n^3 - 3n^2 + n)$
Διπλασιασμού	κλασική	$CB_{DA} = \frac{1}{6}(100n^3 - 15n^2 - n)$
	ειδική	$CB_{SDA} = \frac{1}{3}(32n^3 - 3n^2 + n)$
	ειδική	$CB_{CRA} = \frac{1}{3}(23n^3 + 4n)$

Πίνακας 9.6 Αλγόριθμοι για την επίλυση της εξίσωσης Riccati.

Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος.

Υπό την προϋπόθεση ότι οι ανά βήμα επαναληπτικοί αλγόριθμοι για την επίλυση της εξίσωσης Riccati χρησιμοποιούν τις ίδιες συνθήκες και το ίδιο κριτήριο σύγκλισης  $\varepsilon$ , θεωρούμε ότι οι ανά βήμα επαναληπτικοί αλγόριθμοι συγκλίνουν στη μόνιμη κατάσταση την ίδια χρονική στιγμή. Τότε οι ανά βήμα αλγόριθμοι εκτελούν ίσο πλήθος επαναλήψεων:

$$s_{PSA} = s_{SPSA} = s \quad (9.2)$$

Υπό την προϋπόθεση ότι οι αλγόριθμοι διπλασιασμού για την επίλυση της εξίσωσης Riccati χρησιμοποιούν τις ίδιες συνθήκες και το ίδιο κριτήριο σύγκλισης  $\varepsilon$ , θεωρούμε ότι οι αλγόριθμοι διπλασιασμού συγκλίνουν στη μόνιμη κατάσταση την ίδια χρονική στιγμή. Τότε οι αλγόριθμοι διπλασιασμού εκτελούν ίσο πλήθος επαναλήψεων:

$$s_{DA} = s_{SDA} = s_{CRA} = d \quad (9.3)$$

Λόγω της δομής των αλγορίθμων διπλασιασμού, η σχέση του πλήθους των επαναλήψεων των ανά βήμα αλγορίθμων και των αλγορίθμων διπλασιασμού είναι:

$$s = 2^d \quad (9.4)$$

Παρατήρηση. Ο παραπάνω τύπος δίνει  $d = \log_2 s$ . Η χρήση του πάνω ακέραιου μέρους  $d = \lceil \log_2 s \rceil$  εξασφαλίζει ότι το πλήθος των επαναλήψεων των αλγορίθμων διπλασιασμού είναι θετικός ακέραιος.

### Σύγκριση ανά βήμα αλγορίθμων

Ο υπολογιστικός χρόνος (calculation time) ο οποίος απαιτείται για την υλοποίηση του ανά βήμα αλγορίθμου είναι:

$$t_{PSA} = CB_{PSA} s_{PSA} t_{op} = \left(3n^3 + 3n^2m + 3nm^2 + \frac{1}{6}(16m^3 - 3m^2 - m)\right) \cdot s \cdot t_{op} \quad (9.5)$$

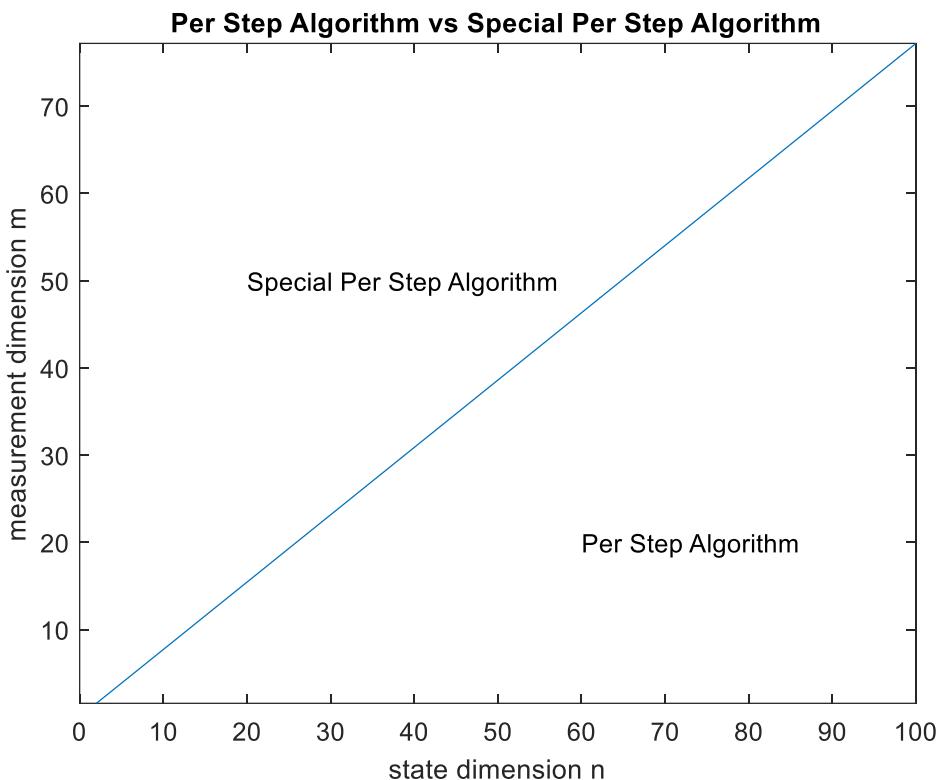
και ο υπολογιστικός χρόνος (calculation time) ο οποίος απαιτείται για την υλοποίηση του ειδικού ανά βήμα αλγορίθμου είναι:

$$t_{SPSA} = CB_{SPSA} s_{SPSA} t_{op} = \left(\frac{1}{6}(50n^3 - 3n^2 + n)\right) \cdot s \cdot t_{op} \quad (9.6)$$

Τότε

$$CB_{PSA} - CB_{SPSA} = \frac{8}{3}m^3 + \frac{1}{2}(6n-1)m^2 + \frac{1}{6}(18n^2 - 1)m - \frac{1}{6}(32n^3 - 3n^2 + n) \quad (9.7)$$

Στο Σχήμα 9.1 αποτυπώνονται οι περιοχές, όπου ο ανά βήμα αλγόριθμος ή ο ειδικός ανά βήμα αλγόριθμος είναι ταχύτερος για διάφορες τιμές των διαστάσεων του μοντέλου  $n = 2..100$  και  $m = 2..100$



**Σχήμα 9.1** Σύγκριση ανά βήμα αλγορίθμων

Από το Σχήμα 9.1 προκύπτει ο κανόνας (rule of thumb):

$$CB_{SPSA} < CB_{PSA}, \text{ όταν } m > 0.77n \quad (9.8)$$

δηλαδή, ο ειδικός ανά βήμα αλγόριθμος είναι ταχύτερος από τον ανά βήμα αλγόριθμο, όταν  $m > 0.77n$

#### Σύγκριση αλγορίθμων διπλασιασμού

Ο υπολογιστικός χρόνος (calculation time) που απαιτείται για την υλοποίηση του αλγορίθμου διπλασιασμού είναι:

$$t_{DA} = CB_{DA} s_{DA} t_{op} = \left( \frac{1}{6} (100n^3 - 15n^2 - n) \right) \cdot d \cdot t_{op} \quad (9.9)$$

ο υπολογιστικός χρόνος (calculation time) που απαιτείται για την υλοποίηση του ειδικού αλγορίθμου διπλασιασμού είναι:

$$t_{SDA} = CB_{SDA} s_{SDA} t_{op} = \left( \frac{1}{3} (32n^3 - 3n^2 + n) \right) \cdot d \cdot t_{op} \quad (9.10)$$

και ο υπολογιστικός χρόνος (calculation time) που απαιτείται για την υλοποίηση του αλγορίθμου κυκλικής αναγωγής είναι:

$$t_{CRA} = CB_{CRA} s_{CRA} t_{op} = \left( \frac{1}{3} (23n^3 + 4n) \right) \cdot d \cdot t_{op} \quad (9.11)$$

Τότε:

$$\frac{t_{DA}}{t_{SDA}} = \frac{\left( \frac{1}{6} (100n^3 - 15n^2 - n) \right) \cdot d \cdot t_{op}}{\left( \frac{1}{3} (32n^3 - 3n^2 + n) \right) \cdot d \cdot t_{op}} = \frac{\frac{1}{6} (100n^3 - 15n^2 - n)}{\frac{1}{3} (64n^3 - 6n^2 + 2n)} \approx \frac{100n^3}{64n^3} = \frac{100}{64} > 1 \quad (9.12)$$

$$\frac{t_{DA}}{t_{CRA}} = \frac{\left(\frac{1}{6}(100n^3 - 15n^2 - n)\right) \cdot d \cdot t_{op}}{\left(\frac{1}{3}(23n^3 + 4n)\right) \cdot d \cdot t_{op}} = \frac{\frac{1}{6}(100n^3 - 15n^2 - n)}{\frac{1}{3}(23n^3 + 4n)} \approx \frac{100n^3}{46n^3} = \frac{100}{46} > 2 \quad (9.13)$$

$$\frac{t_{SDA}}{t_{CRA}} = \frac{\left(\frac{1}{3}(32n^3 - 3n^2 + n)\right) \cdot d \cdot t_{op}}{\left(\frac{1}{3}(23n^3 + 4n)\right) \cdot d \cdot t_{op}} \approx \frac{32n^3}{23n^3} = \frac{32}{23} > 1 \quad (9.14)$$

Οπότε:

$$t_{DA} > t_{SDA} > t_{CRA} \quad (9.15)$$

δηλαδή, ο αλγόριθμος κυκλικής αναγωγής είναι ο ταχύτερος αλγόριθμος διπλασιασμού.

### Σύγκριση ανά βήμα αλγορίθμων και αλγορίθμων διπλασιασμού

Όταν ο ειδικός ανά βήμα αλγόριθμος είναι ταχύτερος από τον ανά βήμα αλγορίθμο, δηλαδή, όταν

$$m > 0.77n$$

έχουμε:

$$\frac{t_{PSA}}{t_{SPSA}} > 1$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας τη σχέση του πλήθους των επαναλήψεων των ανά βήμα αλγορίθμων και των αλγορίθμων διπλασιασμού έχουμε:

$$\frac{t_{SPSA}}{t_{CRA}} = \frac{\left(\frac{1}{6}(50n^3 - 3n^2 + n)\right) \cdot s \cdot t_{op}}{\left(\frac{1}{3}(23n^3 + 4n)\right) \cdot d \cdot t_{op}} = \frac{\frac{1}{6}(50n^3 - 3n^2 + n) \cdot s}{\frac{1}{3}(23n^3 + 4n) \cdot d} \approx \frac{\frac{1}{6}(50n^3 - 3n^2 + n) \cdot s}{\frac{1}{3}(23n^3 + 4n) \cdot \log_2 s} \quad (9.16)$$

Τότε:

$$\frac{t_{SPSA}}{t_{CRA}} \approx \frac{50n^3 \cdot s}{46n^3 \cdot \log_2 s} = \frac{25 \cdot s}{23 \cdot \log_2 s} \quad (9.17)$$

και

$$\frac{t_{SPSA}}{t_{CRA}} \approx \frac{25 \cdot s}{23 \cdot \log_2 s} > 1 \quad (9.18)$$

$$\text{αν } s \geq 2$$

Οπότε:

$$t_{PSA} > t_{SPSA} > t_{CRA}, \quad (9.19)$$

$$\text{αν } s \geq 2$$

Όταν ο ανά βήμα αλγόριθμος είναι ταχύτερος από τον ειδικό ανά βήμα αλγορίθμο, δηλαδή, όταν

$$m \leq 0.77n$$

έχουμε:

$$\frac{t_{SPSA}}{t_{PSA}} > 1$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας τη σχέση του πλήθους των επαναλήψεων των ανά βήμα αλγορίθμων και των αλγορίθμων διπλασιασμού έχουμε:

$$\frac{t_{PSA}}{t_{CRA}} = \frac{\left(3n^3 + 3n^2m + 3nm^2 + \frac{1}{6}(16m^3 - 3m^2 - m)\right) \cdot s \cdot t_{op}}{\left(\frac{1}{3}(23n^3 + 4n)\right) \cdot d \cdot t_{op}} \approx \frac{\left(3n^3 + 3n^2m + 3nm^2 + \frac{1}{6}(16m^3 - 3m^2 - m)\right) \cdot s}{\frac{1}{3}(23n^3 + 4n) \cdot \log_2 s} \quad (9.20)$$

Τότε:

$$\frac{t_{PSA}}{t_{CRA}} \approx \frac{\left(3n^3 + \frac{1}{6}(16m^3)\right) \cdot s}{\frac{1}{3}(23n^3) \cdot \log_2 s} = \frac{9n^3 \cdot s}{23n^3 \cdot \log_2 s} = \frac{9 \cdot s}{23 \cdot \log_2 s} \quad (9.21)$$

και

$$\frac{t_{PSA}}{t_{CRA}} = \frac{9 \cdot s}{23 \cdot \log_2 s} > 1 \quad (9.22)$$

αν  $s \geq 8$

Οπότε:

$$t_{SPSA} > t_{PSA} > t_{CRA}, \quad (9.23)$$

αν  $s \geq 8$

Επομένως, ο αλγόριθμος διπλασιασμού είναι ταχύτερος από τον ανά βήμα αλγόριθμο, όταν το πλήθος των επαναλήψεων του ανά βήμα αλγορίθμου είναι μεγάλο, δηλαδή όταν το κριτήριο σύγκλισης είναι μικρό. Αυτό είναι επιθυμητό για μεγαλύτερη ακρίβεια στον υπολογισμό της λύσης της εξίσωσης Riccati.

Από τη σύγκριση των υπολογιστικών φόρτων των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati προκύπτει το συμπέρασμα ότι η γνώση των διαστάσεων του μοντέλου, δηλαδή των διαστάσεων  $n$  και  $m$ , μπορεί να καθορίσει ποιος αλγόριθμος είναι ο ταχύτερος.

## 9.6 Υπολογιστικός φόρτος αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati σε προγραμματιστικό περιβάλλον

Η συνάρτηση `cbre` υπολογίζει τους υπολογιστικούς φόρτους των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati, για τη γενική πολυδιάστατη (multi-dimensional) περίπτωση, όπου  $n \geq 2, m \geq 2$ , για μία επανάληψη.

Η συνάρτηση `cbre` έχει εισόδους τις διαστάσεις του μοντέλου  $n$  και  $m$  και εξόδους τους ανά επανάληψη υπολογιστικούς φόρτους του ανά βήμα αλγορίθμου, του ειδικού ανά βήμα αλγορίθμου, του αλγορίθμου διπλασιασμού, του ειδικού αλγορίθμου διπλασιασμού και του αλγορίθμου κυκλικής αναγωγής.

Έτσι, για παράδειγμα, για τον υπολογισμό των υπολογιστικών φόρτων των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati με εισόδους  $n = 4$  και  $m = 2$ , απαιτείται η κλήση:

```
n=4;
m=2;
[cbpsa,cbspsa,cbda,cbsda,cbcra]=cbre(n,m)
```

```
function [cbpsa,cbspsa,cbda,cbsda,cbcra]=cbre(n,m)

% CALCULATION BURDEN
% RICCATI EQUATION

% PER STEP ALGORITHM
cbpsa=3*(n^3)+3*(n^2)*m+3*n*(m^2)+(16*(m^3)-3*(m^2)-m)/6;

% SPECIAL PER STEP ALGORITHM
cbspsa=(50*(n^3)-3*(n^2)+n)/6;

% DOUBLING ALGORITHM
cbda=(100*(n^3)-15*(n^2)-n)/6;
```

```
% SPECIAL DOUBLING ALGORITHM  
cbsda=(32*(n^3)-3*(n^2)+n)/3;  
  
% CYCLIC REDUCTION ALGORITHM  
cbcra=(23*(n^3)+4*n)/3;
```

## 9.7 Ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τον ανά επανάληψη υπολογιστικό φόρτο των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati για το βαθμωτό μοντέλο, όπου  $n = 1$  και  $m = 1$
2. Να υπολογίσετε τον ανά επανάληψη υπολογιστικό φόρτο των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati για το μοντέλο με μονοδιάστατη κατάσταση, όπου  $n = 1$
3. Να υπολογίσετε τον ανά επανάληψη υπολογιστικό φόρτο των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati για το μοντέλο με μονοδιάστατη μέτρηση, όπου  $m = 1$
4. Δίνεται ένα χρονικά αμετάβλητο μοντέλο διαστάσεων  $n = 4$  και  $m = 2$ . Να υπολογίσετε ποιος αλγόριθμος για την επίλυση της εξίσωσης Riccati είναι ο ταχύτερος.

## 9.8 Περίληψη

Οι αλγόριθμοι για την επίλυση της εξίσωσης Riccati είναι επαναληπτικοί αλγόριθμοι, γιατί υπολογίζουν επαναληπτικά τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης, έως ότου ικανοποιηθεί το κριτήριο σύγκλισης. Επομένως, ο συνολικός υπολογιστικός χρόνος (calculation time) που απαιτείται για την υλοποίησή τους είναι το γινόμενο:

- του χρόνου που απαιτείται για την υλοποίηση μιας βαθμωτής πράξης (scalar operation)
- του ανά επανάληψη υπολογιστικού φόρτου (calculation burden) του αλγορίθμου
- του πλήθος των επαναλήψεων που εκτελεί ο αλγόριθμος.

Δεν λαμβάνεται υπόψη ο υπολογιστικός φόρτος των εκ των προτέρων υπολογισμών (off-line calculations), όπως είναι η αρχικοποίηση των αλγορίθμων.

Η υλοποίηση αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati απαιτεί πράξεις πινάκων. Ο υπολογιστικός φόρτος (calculation burden) των πράξεων πινάκων εξαρτάται από τις διαστάσεις των πινάκων. Στις πράξεις πινάκων εμπλέκονται βαθμωτές πράξεις (scalar operations), των οποίων οι υπολογιστικοί φόρτοι θεωρούνται ίσοι μεταξύ τους.

Υπό την προϋπόθεση ότι οι ανά βήμα επαναληπτικοί αλγόριθμοι για την επίλυση της εξίσωσης Riccati χρησιμοποιούν τις ίδιες συνθήκες και το ίδιο κριτήριο σύγκλισης  $\varepsilon$ , θεωρούμε ότι οι ανά βήμα επαναληπτικοί αλγόριθμοι συγκλίνουν στη μόνιμη κατάσταση την ίδια χρονική στιγμή. Τότε, οι ανά βήμα αλγόριθμοι εκτελούν ίσο πλήθος επαναλήψεων  $s$ .

Υπό την προϋπόθεση ότι οι αλγόριθμοι διπλασιασμού για την επίλυση της εξίσωσης Riccati χρησιμοποιούν τις ίδιες συνθήκες και το ίδιο κριτήριο σύγκλισης  $\varepsilon$ , θεωρούμε ότι οι αλγόριθμοι διπλασιασμού συγκλίνουν στη μόνιμη κατάσταση την ίδια χρονική στιγμή. Τότε, οι αλγόριθμοι διπλασιασμού εκτελούν ίσο πλήθος επαναλήψεων  $d$ .

Λόγω της δομής των αλγορίθμων διπλασιασμού, η σχέση του πλήθους των επαναλήψεων των ανά βήμα αλγορίθμων και των αλγορίθμων διπλασιασμού είναι:

$$s = 2^d$$

Η γνώση των διαστάσεων του μοντέλου, δηλαδή των διαστάσεων  $n$  και  $m$ , μπορεί να καθορίσει ποιος αλγόριθμος είναι ο ταχύτερος.

Ο ειδικός ανά βήμα αλγόριθμος είναι ταχύτερος από τον ανά βήμα αλγόριθμο, όταν  $m > 0.77n$ .

Ο αλγόριθμος κυκλικής αναγωγής είναι ο ταχύτερος αλγόριθμος διπλασιασμού.

Ο αλγόριθμος διπλασιασμού είναι ταχύτερος από τον ανά βήμα αλγόριθμο, όταν το πλήθος των επαναλήψεων του ανά βήμα αλγορίθμου είναι μεγάλο, δηλαδή, όταν το κριτήριο σύγκλισης είναι μικρό. Αυτό είναι επιθυμητό για μεγαλύτερη ακρίβεια στον υπολογισμό της λύσης της εξίσωσης Riccati.

Μπορείτε να ακούσετε την περίληψη με τον Ήχο 9.1.



Ήχος 9.1 Περίληψη – Κεφάλαιο 9.

## 9.9 Κριτήριο Αξιολόγησης

Απαντήστε με Σωστό ή Λάθος.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Ο υπολογιστικός χρόνος των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati είναι αντιστρόφως ανάλογος του υπολογιστικού φόρτου των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Η υλοποίηση των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati για πολυδιάστατα μοντέλα απαιτεί πράξεις πινάκων.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Ο υπολογιστικός φόρτος (calculation burden) των πράξεων πινάκων δεν εξαρτάται από τις διαστάσεις των πινάκων.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Η γνώση των διαστάσεων του μοντέλου μπορεί να καθορίσει ποιος αλγόριθμος είναι ο ταχύτερος.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Ο ειδικός ανά βήμα αλγόριθμος είναι ταχύτερος από τον ανά βήμα αλγόριθμο όταν  $m > n$

### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Ο αλγόριθμος κυκλικής αναγωγής δεν είναι ο ταχύτερος αλγόριθμος διπλασιασμού.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

Ο αλγόριθμος διπλασιασμού είναι ταχύτερος από τον ανά βήμα αλγόριθμο, όταν το πλήθος των επαναλήψεων του ανά βήμα αλγορίθμου είναι μεγάλο.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

Η σχέση του πλήθους των επαναλήψεων των ανά βήμα αλγορίθμων  $s$  και των αλγορίθμων διπλασιασμού  $d$  είναι  $s = 2^d$

### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

$$CB_{SPSA} < CB_{PSA}$$

### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

$$t_{DA} > t_{SDA} > t_{CRA}$$

Θα βρείτε την Απάντηση στο Κριτήριο Αξιολόγησης στο Παράρτημα A'.

Μπορείτε να κάνετε το Κριτήριο Αξιολόγησης με το Διαδραστικό Πρόγραμμα 9.1.



Διαδραστικό Πρόγραμμα 9.1 Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 9.

## **Βιβλιογραφία/Αναφορές**

Assimakis, N., Adam, M. (2007). Discrete time Kalman and Lainiotis filters comparison. *Int. Journal of Mathematical Analysis (IJMA)*, vol. 1, no. 13, pp. 635-659.

Ασημάκης, Ν. (2013). *Εξίσωση Riccati Αλγόριθμοι και Εφαρμογές*, Εκδόσεις ΑΠΑΚΥΝΘΟΣ.

# Κεφάλαιο 10 Υπολογιστικός φόρτος αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov

## Σύνοψη

Στο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι υπολογιστικοί φόρτοι των επαναληπτικών αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov. Εξηγείται ο υπολογιστικός χρόνος και ο υπολογιστικός φόρτος των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov. Αναλύεται ο ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov και συγκεκριμένα του ανά βήμα αλγορίθμου και του αλγορίθμου διπλασιασμού. Αναλύεται η μέθοδος επιλογής του ταχύτερου αλγορίθμου για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov.

## Προαπαιτούμενη γνώση

Εξίσωση Lyapunov, αλγόριθμοι για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov, πίνακες.

## 10.1 Υπολογιστικός φόρτος επαναληπτικών αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov

Οι επαναληπτικοί αλγόριθμοι για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov υπολογίζουν επαναληπτικά τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης, έως ότου ικανοποιηθεί το κριτήριο σύγκλισης. Επομένως, ο συνολικός υπολογιστικός χρόνος (**calculation time**) που απαιτείται για την υλοποίησή τους είναι:

$$t_{\text{alg}} = CB_{\text{alg}} s_{\text{alg}} t_{\text{op}} \quad (10.1)$$

όπου  $t_{\text{op}}$  είναι ο χρόνος που απαιτείται για την υλοποίηση μίας βαθμωτής πράξης (scalar operation),  $CB_{\text{alg}}$  είναι ο ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος (**calculation burden**) του αλγορίθμου και  $s_{\text{alg}}$  είναι το πλήθος των επαναλήψεων που εκτελεί ο αλγόριθμος.

Δεν λαμβάνεται υπόψη ο υπολογιστικός φόρτος των εκ των προτέρων υπολογισμών (off-line calculations), όπως είναι η αρχικοποίηση των αλγορίθμων.

Η υλοποίηση των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov απαιτεί πράξεις πινάκων. Ο υπολογιστικός φόρτος (calculation burden) των πράξεων πινάκων εξαρτάται από τις διαστάσεις των πινάκων. Στις πράξεις πινάκων εμπλέκονται βαθμωτές πράξεις (scalar operations), των οποίων οι υπολογιστικοί φόρτοι θεωρούνται ίσοι μεταξύ τους. Ο υπολογιστικός φόρτος των πράξεων με πίνακες [Assimakis and Adam (2007)] έχει παρουσιαστεί στον Πίνακα 8.1.

## 10.2 Υπολογιστικός φόρτος ανά βήμα αλγορίθμου

Στον Πίνακα 10.1 παρουσιάζεται ο ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος του ανά βήμα αλγορίθμου για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov.

Ανά Βήμα Αλγόριθμος Per Step Algorithm		
Πράξη Πινάκων	Διαστάσεις Πινάκων	Υπολογιστικός Φόρτος
$FP(k / k - 1)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$FP(k / k - 1)F^T$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$P(k + 1 / k) = Q + FP(k / k - 1)F^T$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$CB_{PSA} = 3n^3$		

Πίνακας 10.2 Αλγόριθμος διπλασιασμού.

Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος.

### 10.3 Υπολογιστικός φόρτος αλγορίθμου διπλασιασμού

Στον Πίνακα 10.2 παρουσιάζεται ο ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος του αλγορίθμου διλασιασμού για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov.

Αλγόριθμος Διπλασιασμού Doubling Algorithm		
$a(k+1) = a(k)a(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$c(k)a(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$a^T(k)c(k)a(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$c(k+1) = c(k) + a^T(k)c(k)a(k)$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$CB_{DA} = 5n^3 - n^2$		

Πίνακας 10.2 Αλγόριθμος διπλασιασμού.

Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος.

Ο υπολογιστικός φόρτος των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov υπολογίζεται στο [Ασημάκης, (2013)], για τη γενική περίπτωση με πίνακες ( $n \geq 2$  και  $m \geq 2$ ).

### 10.4 Επιλογή του ταχύτερου αλγορίθμου για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov

Στον πίνακα 10.3 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι ανά επανάληψη υπολογιστικοί φόρτοι των επαναληπτικών αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov.

Τύπος επανάληψης	Υπολογιστικός Φόρτος
Ανά βήμα	$CB_{PSA} = 3n^3$
Διπλασιασμού	$CB_{DA} = 5n^3 - n^2$

Πίνακας 10.3 Αλγόριθμοι για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov.

Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος.

Το πλήθος των επαναλήψεων που εκτελούν οι ανά επανάληψη αλγόριθμοι εξαρτάται από την τιμή του κριτηρίου σύγκλισης  $\varepsilon$ . Θεωρούμε ότι το πλήθος των επαναλήψεων που εκτελεί ο ανά βήμα αλγόριθμος είναι:

$$s_{PSA} = s \quad (10.2)$$

Το πλήθος των επαναλήψεων που εκτελεί ο αλγόριθμος διπλασιασμού εξαρτάται από την τιμή του κριτηρίου σύγκλισης  $\varepsilon$ . Θεωρούμε ότι το πλήθος των επαναλήψεων που εκτελεί ο αλγόριθμος διπλασιασμού είναι:

$$s_{DA} = d \quad (10.3)$$

Λόγω της δομής του αλγορίθμου διπλασιασμού, η σχέση του πλήθους των επαναλήψεων του ανά βήμα αλγορίθμου και του αλγορίθμου διπλασιασμού είναι:

$$s = 2^d \quad (10.4)$$

Παρατίρηση. Ο παραπάνω τύπος δίνει  $d = \log_2 s$ . Η χρήση του πάνω ακέραιου μέρους  $d = \lceil \log_2 s \rceil$  εξασφαλίζει ότι το πλήθος των επαναλήψεων των αλγορίθμων διπλασιασμού είναι θετικός ακέραιος. Επομένως, ο υπολογιστικός χρόνος (calculation time) που απαιτείται για την υλοποίηση του ανά βήμα αλγορίθμου είναι:

$$t_{PSA} = CB_{PSA} s_{PSA} t_{op} = 3n^3 \cdot s \cdot t_{op} \quad (10.5)$$

και ο υπολογιστικός χρόνος (calculation time) που απαιτείται για την υλοποίηση του αλγορίθμου διπλασιασμού είναι:

$$t_{DA} = CB_{DA} s_{DA} t_{op} = (5n^3 - n^2) \cdot d \cdot t_{op} \quad (10.6)$$

Τότε:

$$\frac{t_{PSA}}{t_{DA}} = \frac{3n^3 \cdot s \cdot t_{op}}{(5n^3 - n^2) \cdot d \cdot t_{op}} \approx \frac{3n^3 \cdot s}{5n^3 \cdot \log_2 s} = \frac{3 \cdot s}{5 \cdot \log_2 s} \quad (10.7)$$

και

$$\frac{t_{SPSA}}{t_{DA}} \approx \frac{3 \cdot s}{5 \cdot \log_2 s} > 1 \quad (10.8)$$

αν  $s \geq 2$

Οπότε:

$$t_{PSA} > t_{DA}, \quad (10.9)$$

αν  $s \geq 2$

Επομένως, ο αλγόριθμος διπλασιασμού είναι ταχύτερος από τον ανά βήμα αλγόριθμο, όταν το πλήθος των επαναλήψεων του ανά βήμα αλγορίθμου είναι μεγάλο, δηλαδή, όταν το κριτήριο σύγκλισης είναι μικρό. Αυτό είναι επιθυμητό για μεγαλύτερη ακρίβεια στον υπολογισμό της λύσης της εξίσωσης Lyapunov.

Από τη σύγκριση των υπολογιστικών φόρτων των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov προκύπτει το συμπέρασμα ότι η γνώση της διάστασης  $n$  του μοντέλου μπορεί να καθορίσει ποιος αλγόριθμος είναι ο ταχύτερος.

## 10.5 Υπολογιστικός φόρτος αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov σε προγραμματιστικό περιβάλλον

Η συνάρτηση `cble` υπολογίζει τους υπολογιστικούς φόρτους των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov για μία επανάληψη.

Η συνάρτηση `cble` έχει είσοδο τη διάσταση του μοντέλου  $n$  και εξόδους τους ανά επανάληψη υπολογιστικούς φόρτους του ανά βήμα αλγορίθμου και του αλγορίθμου διπλασιασμού.

Έτσι, για παράδειγμα, για τον υπολογισμό των υπολογιστικών φόρτων των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov με εισόδους  $n = 4$  και  $m = 2$ , απαιτείται η κλήση:

```
n=4;
[cbpsa, cbda]=cble(n)
```

```
function [cbpsa, cbda]=cble(n)

% CALCULATION BURDEN
% LYAPUNOV EQUATION

% PER STEP ALGORITHM
cbpsa=3*(n^3);

% DOUBLING ALGORITHM
cbda=5*(n^3)-(n^2);
```

## 10.6 Ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τον ανά επανάληψη υπολογιστικό φόρτο των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov για το βαθμωτό μοντέλο, όπου  $n = 1$
2. Δίνεται ένα χρονικά αμετάβλητο μοντέλο, όπου  $n = 4$ . Να υπολογίσετε ποιος αλγόριθμος για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov είναι ο ταχύτερος.

## 10.7 Περίληψη

Οι αλγόριθμοι για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov είναι επαναληπτικοί αλγόριθμοι, γιατί υπολογίζουν επαναληπτικά τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης, έως ότου ικανοποιηθεί το κριτήριο σύγκλισης. Επομένως, ο συνολικός υπολογιστικός χρόνος (calculation time) που απαιτείται για την υλοποίησή τους είναι το γινόμενο:

- του χρόνου που απαιτείται για την υλοποίηση μιας βαθμωτής πράξης (scalar operation)
- του ανά επανάληψη υπολογιστικού φόρτου (calculation burden) του αλγορίθμου
- του πλήθος των επαναλήψεων που εκτελεί ο αλγόριθμος.

Δεν λαμβάνεται υπόψη ο υπολογιστικός φόρτος των εκ των προτέρων υπολογισμών (off-line calculations), όπως είναι η αρχικοποίηση των αλγορίθμων.

Η υλοποίηση αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov απαιτεί πράξεις πινάκων. Ο υπολογιστικός φόρτος (calculation burden) των πράξεων πινάκων εξαρτάται από τις διαστάσεις των πινάκων. Στις πράξεις πινάκων εμπλέκονται βαθμωτές πράξεις (scalar operations), των οποίων οι υπολογιστικοί φόρτοι θεωρούνται ίσοι μεταξύ τους.

Το πλήθος των επαναλήψεων που εκτελούν οι αλγόριθμοι εξαρτάται από την τιμή του κριτηρίου σύγκλισης  $\varepsilon$ . Τότε, ο ανά βήμα αλγόριθμος εκτελεί πλήθος επαναλήψεων  $s$ , ο αλγόριθμος διπλασιασμού εκτελεί πλήθος επαναλήψεων  $d$  και λόγω της δομής του αλγορίθμου διπλασιασμού, η σχέση του πλήθους των επαναλήψεων του ανά βήμα αλγορίθμου και του αλγορίθμου διπλασιασμού είναι:

$$s = 2^d$$

Η γνώση της διάστασης  $n$  του μοντέλου μπορεί να καθορίσει ποιος αλγόριθμος είναι ο ταχύτερος.

Ο αλγόριθμος διπλασιασμού είναι ταχύτερος από τον ανά βήμα αλγόριθμο, όταν το πλήθος των επαναλήψεων του ανά βήμα αλγορίθμου είναι μεγάλο, δηλαδή όταν το κριτήριο σύγκλισης είναι μικρό. Αυτό είναι επιθυμητό για μεγαλύτερη ακρίβεια στον υπολογισμό της λύσης της εξίσωσης Lyapunov.

Μπορείτε να ακούσετε την περίληψη με τον Ήχο 10.1.



**Ήχος 10.1 Περίληψη – Κεφάλαιο 10.**

## 10.8 Κριτήριο Αξιολόγησης

Απαντήστε με Σωστό ή Λάθος.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Ο υπολογιστικός χρόνος των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov είναι ανάλογος του υπολογιστικού φόρτου των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Η υλοποίηση των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov για πολυδιάστατα μοντέλα δεν απαιτεί πράξεις πινάκων.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Ο υπολογιστικός φόρτος (calculation burden) των πράξεων πινάκων εξαρτάται από τις διαστάσεις των πινάκων.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Στον υπολογισμό του υπολογιστικού χρόνου των αλγορίθμων δεν λαμβάνεται υπόψη ο υπολογιστικός φόρτος των εκ των προτέρων υπολογισμών (off-line calculations), όπως είναι η αρχικοποίηση των αλγορίθμων.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Η γνώση της διάστασης  $n$  του μοντέλου μπορεί να καθορίσει ποιος αλγόριθμος είναι ο ταχύτερος.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Ο αλγόριθμος διπλασιασμού είναι ταχύτερος από τον ανά βήμα αλγόριθμο, όταν το πλήθος των επαναλήψεων του ανά βήμα αλγορίθμου είναι πολύ μικρό.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

Η σχέση του πλήθους των επαναλήψεων του ανά βήμα αλγορίθμου  $s$  και του αλγορίθμου διπλασιασμού  $d$  είναι  $d = 2^s$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

$$CB_{PSA} = 3n^3$$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

$$t_{PSA} > t_{DA} \text{ av } s \geq 2$$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Όταν αυξάνει η διάσταση του μοντέλου, τότε ο υπολογιστικός χρόνος του αλγορίθμου διπλασιασμού αυξάνει.

---

Θα βρείτε την Απάντηση στο Κριτήριο Αξιολόγησης στο Παράρτημα A'.

Μπορείτε να κάνετε το Κριτήριο Αξιολόγησης με το Διαδραστικό Πρόγραμμα 10.1.



**Διαδραστικό Πρόγραμμα 10.1** Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 10.

## **Βιβλιογραφία/Αναφορές**

Assimakis, N., Adam, M. (2007). Discrete time Kalman and Lainiotis filters comparison. *Int. Journal of Mathematical Analysis (IJMA)*, vol. 1, no. 13, pp. 635-659.

Ασημάκης, Ν. (2013). *Εξίσωση Riccati Αλγόριθμοι και Εφαρμογές*, Εκδόσεις ΑΠΑΚΥΝΘΟΣ.

# Κεφάλαιο 11 Παραδείγματα εφαρμογής των φίλτρων Kalman

## Σύνοψη

Στο κεφάλαιο παρουσιάζονται παραδείγματα εφαρμογής των φίλτρων Kalman. Το φίλτρο Kalman χρησιμοποιείται για εκτίμηση τυχαίας σταθεράς, για εκτίμηση κίνησης με σταθερή ταχύτητα, για εκτίμηση ελεύθερης πτώσης, για εκτίμηση βολής, για εκτίμηση ημερήσιας διακύμανσης του ηλεκτρικού φορτίου, για εκτίμηση εξόδου αυτοπαλινόρομούμενου μοντέλου (*autoregressive model – AR model*), για εκτίμηση κίνησης οφθαλμού (*eye movement*) και για εκτίμηση απόστασης από κίνηση με τυχαίο περίπατο (*random walk*).

## Προαπαιτούμενη γνώση

Φίλτρα Kalman, Εξίσωση Riccati.

### 11.1 Εκτίμηση τυχαίας σταθεράς

Το φίλτρο Kalman έχει χρησιμοποιηθεί με επιτυχία σε ένα ευρύτατο φάσμα εφαρμογών [Anderson & Moore (2005), Ασημάκης (2009)]. Στο κεφάλαιο παρουσιάζονται παραδείγματα εφαρμογής των φίλτρων Kalman.

Στο παράδειγμα αυτό χρησιμοποιείται το φίλτρο Kalman για την εκτίμηση τυχαίας σταθεράς.

Τα μοντέλο [Welch & Bishop, 2006] είναι βαθμωτό:

$$x(k+1) = x(k) + w(k) \quad (11.1)$$

$$z(k) = x(k) + v(k) \quad (11.2)$$

Η κατάσταση δεν μεταβάλλεται από χρονική στιγμή σε χρονική στιγμή:  $F = 1$ .

Η μέτρηση προέρχεται απευθείας από την κατάσταση:  $H = 1$ .

Δεν υπάρχει είσοδος:  $u(k) = 0$ .

Οι διασπορές του μοντέλου είναι:  $Q = 10^{-4}$  και  $R = 10^{-2}$ .

#### Προσομοίωση.

Θεωρείται η σταθερά  $c = 0.3456$  την οποία θέλουμε να εκτιμήσουμε.

Δημιουργήθηκαν μετρήσεις με θόρυβο.

Χρησιμοποιήθηκε το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman με αρχικές συνθήκες:

$$x(0 / -1) = x_0 = 1 \text{ και } P(0 / -1) = P_0 = 0.1.$$

Στο Σχήμα 11.1 παρουσιάζεται η σταθερά, οι μετρήσεις και η εκτίμηση.

Η εκτίμηση είναι ίση με την πρόβλεψη, γιατί  $F = 1$ .

Στο Σχήμα 11.2 παρουσιάζεται η διασπορά λάθους εκτίμησης.

Η διασπορά λάθους εκτίμησης τείνει στη διασπορά λάθους εκτίμησης μόνιμης κατάστασης

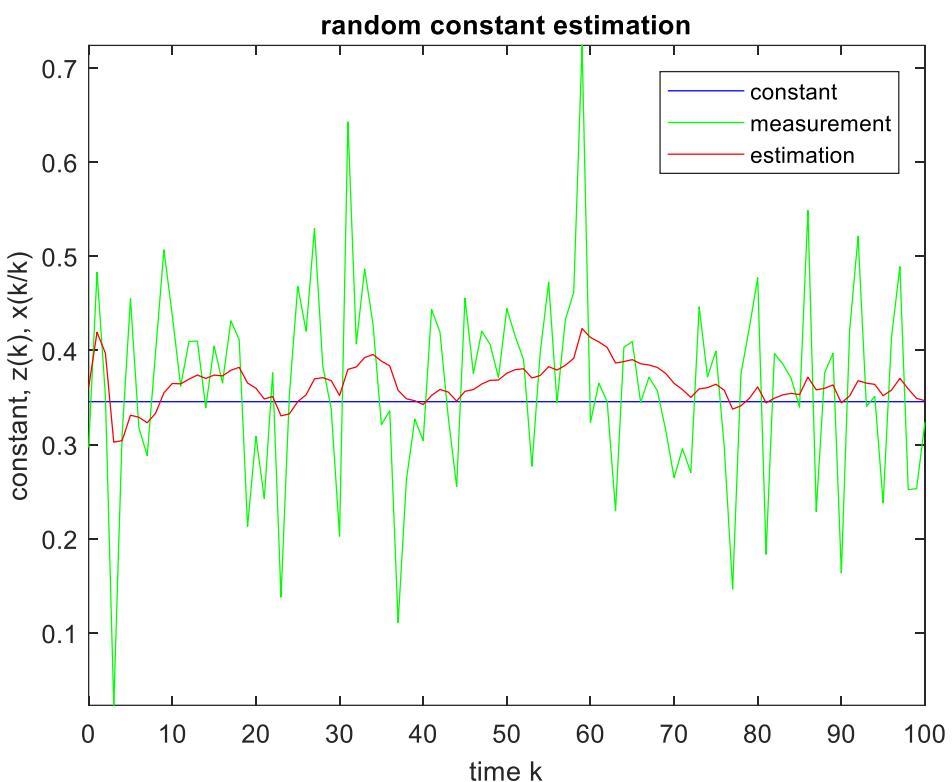
$$P_e = 9.512492197250409 \cdot 10^{-4}.$$

Μπορεί να χρησιμοποιηθεί και το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης.

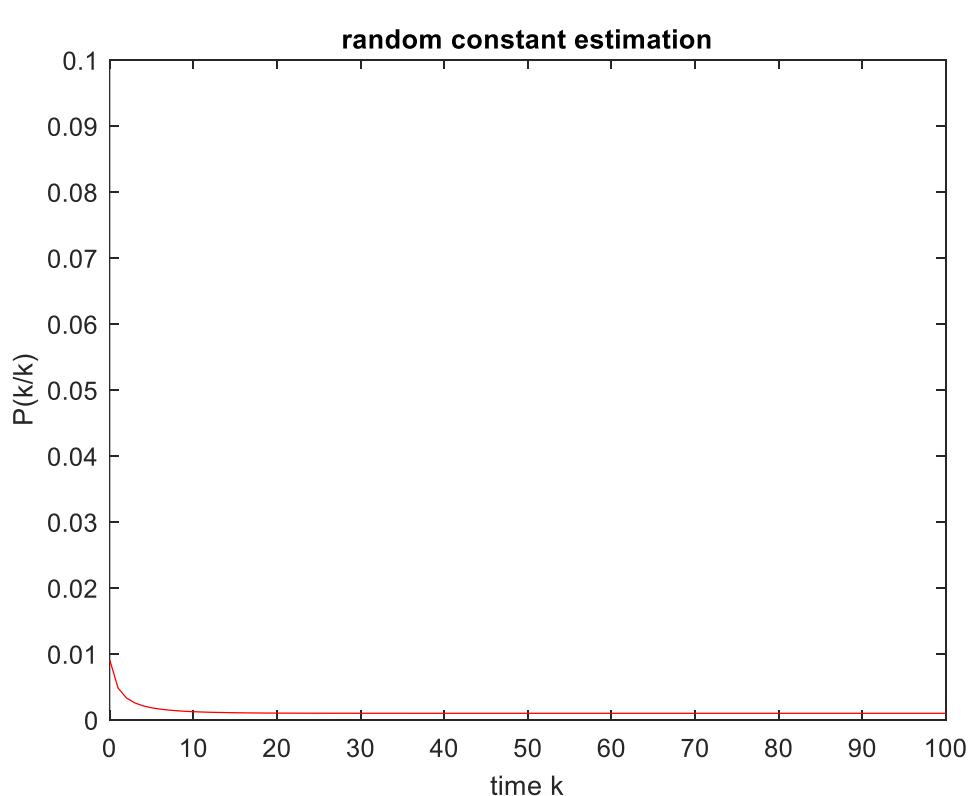
Οι συντελεστές του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης είναι:

$$A = 0.904875078027496$$

$$K = 0.095124921972504$$



**Σχήμα 11.1** Εκτίμηση των αίσιας σταθεράς.



**Σχήμα 11.2** Διασπορά λάθους εκτίμησης των αίσιας σταθεράς.

## 11.2 Εκτίμηση κίνησης με σταθερή ταχύτητα

Στο παράδειγμα αυτό χρησιμοποιείται το φίλτρο Kalman για την εκτίμηση της θέσης και της ταχύτητας ενός κινητού που κινείται σε μια γραμμή με σταθερή ταχύτητα.

### Μοντέλο συνεχούς χρόνου

Το μοντέλο συνεχούς χρόνου είναι:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \quad (11.3)$$

$$z(t) = Cx(t) + v(t) \quad (11.4)$$

Το διάνυσμα κατάστασης  $x(t)$  περιλαμβάνει τη θέση (position)  $s(t)$  του κινητού τη χρονική στιγμή  $t$  και την ταχύτητα (velocity)  $v(t)$  του κινητού τη χρονική στιγμή  $t$  ( $t$  είναι ο συνεχής χρόνος):

$$x(t) = \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

Η μέτρηση  $z(t)$  είναι η απόσταση  $s(t)$  που διανύει το κινητό με θόρυβο.

Τότε, από τις εξισώσεις κίνησης έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \dot{s}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t)$$

$$z(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + v(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0]$$

### Διακριτοποίηση

$$\begin{aligned} F = e^{A(\Delta t)} &= I + A(\Delta t) + \frac{1}{2!} A^2 (\Delta t)^2 + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\Delta t) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 (\Delta t)^2 + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\Delta t) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\Delta t)^2 + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$H = C = [1 \ 0]$$

$$G = B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

### Μοντέλο διακριτού χρόνου

Το μοντέλο διακριτού χρόνου είναι:

$$x(k+1) = Fx(k) + Gw(k) \quad (11.5)$$

$$z(k) = Hx(k) + v(k) \quad (11.6)$$

Το διάνυσμα κατάστασης  $x(k)$  περιλαμβάνει τη θέση (position)  $s(k)$  του κινητού τη χρονική στιγμή  $k$  και την ταχύτητα (velocity)  $v(k)$  του κινητού τη χρονική στιγμή  $k$  ( $k$  είναι ο διακριτός χρόνος):

$$x(k) = \begin{bmatrix} s(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$$

Η μέτρηση  $z(k)$  είναι η απόσταση  $s(k)$  που διανύει το κινητό με θόρυβο.

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Δεν υπάρχει είσοδος:  $u(k) = 0$ .

Οι συνδιασπορές του μοντέλου είναι:

$$Q = GqG^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}$$

$$q = E[w(k)w^T(k)]$$

και

$$R = 1.$$

### Προσομοίωση

Θεωρείται η κίνηση με σταθερή ταχύτητα  $v(t) = 20m/s$ .

Επιλογή διαστήματος χρόνου  $\Delta t = 1$ .

Δημιουργήθηκαν μετρήσεις με θόρυβο.

Χρησιμοποιήθηκε το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman.

Οι παράμετροι του φίλτρου είναι:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = 1$$

Χρησιμοποιήθηκαν οι αρχικές συνθήκες:

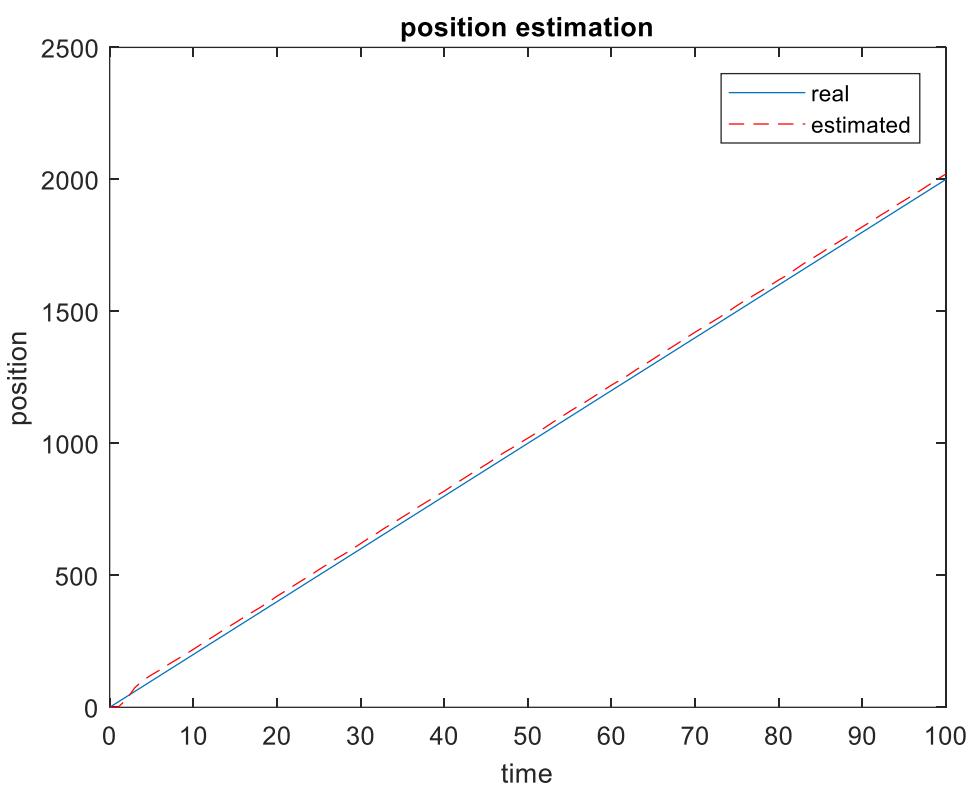
$$x(0/-1) = x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και

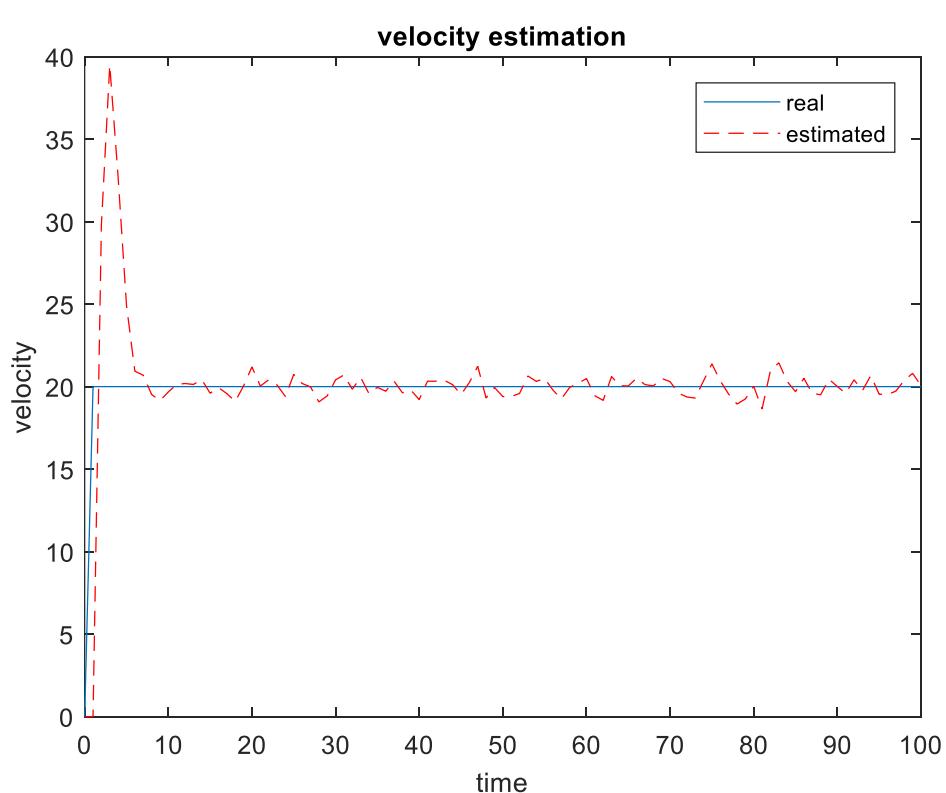
$$P(0/-1) = P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Στο Σχήμα 11.3 παρουσιάζεται η εκτίμηση της θέσης του κινητού (απόσταση).

Στο Σχήμα 11.4 παρουσιάζεται η εκτίμηση της ταχύτητας του κινητού (απόσταση).



**Σχήμα 11.3** Εκτίμηση θέσης κινητού με σταθερή ταχύτητα.



**Σχήμα 11.4** Εκτίμηση ταχύτητας κινητού με σταθερή ταχύτητα.

### 11.3 Εκτίμηση κίνησης αντικειμένου σε ελεύθερη πτώση

Στο παράδειγμα αυτό χρησιμοποιείται το φίλτρο Kalman για την εκτίμηση του ύψους και της ταχύτητας αντικειμένου σε ελεύθερη πτώση.

Θεωρείται ελεύθερη πτώση αντικειμένου από αρχικό ύψος  $h_0 = 100m$  και αρχική ταχύτητα  $v_0 = 0m/s$ .

Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι:  $g = 9.81m/s^2$ .

#### Ελεύθερη πτώση σε συνεχή χρόνο

Οι κινηματικές εξισώσεις (στο συνεχή χρόνο  $t$ ) είναι:

$$h(t) = h_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad (11.7)$$

$$v(t) = g \cdot t \quad (11.8)$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι:

$$h(0) = h_0$$

$$v(0) = 0$$

Ο χρόνος πτήσης είναι:

$$t_f = \sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{g}}$$

και υπολογίζεται όταν:

$$h(t) = h_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 0 \Rightarrow h_0 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Τότε, η ταχύτητα πρόσκρουσης στο έδαφος είναι:

$$v_f = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0}$$

#### Διακριτοποίηση

Επιλογή μικρού διαστήματος χρόνου  $\Delta t$

$$\begin{aligned} h(t + \Delta t) &= h_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t + \Delta t)^2 \\ &= h_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 - g \cdot t \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \Delta t^2 \\ &= (h_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2) - (g \cdot t) \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \Delta t^2 \\ &= h(t) - v(t) \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \Delta t^2 \end{aligned}$$

$$v(t + \Delta t) = g \cdot (t + \Delta t) = g \cdot t + g \cdot \Delta t = v(t) + g \cdot \Delta t$$

#### Μοντέλο διακριτού χρόνου

Ορίζουμε το διάνυσμα κατάστασης ως το διάνυσμα με στοιχεία το ύψος και την ταχύτητα:

$$x(k) = \begin{bmatrix} h(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$$

Τότε:

$$\begin{bmatrix} h(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \Delta t^2 \\ g \cdot \Delta t \end{bmatrix}$$

Ορίζουμε το διάνυσμα της μέτρησης ως το διάνυσμα της μέτρησης του ύψους με θόρυβο:

$$z(k) = h(k) + v(k)$$

Τότε:

$$z(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + w(k)$$

Έτσι, προκύπτει το μοντέλο διακριτού χρόνου:

$$x(k+1) = Fx(k) + Bu(k) + w(k) \quad (11.9)$$

$$z(k) = Hx(k) + v(k) \quad (11.10)$$

με παραμέτρους

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u(k) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \Delta t^2 \\ g \cdot \Delta t \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και συνδιασπορές θορύβων

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R > 0$$

### Προσομοίωση

Επιλογή διαστήματος χρόνου  $\Delta t = 0.01s$

$$t_f = \sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100m}{9.81m/s^2}} = 4.5152s$$

$$v_f = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0} = 44.294m/s$$

Επομένως:

$$k \cdot \Delta t = t_f \Rightarrow k = \frac{t_f}{\Delta t} = \frac{20.387}{0.01} = 451.52$$

Θόρυβοι

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

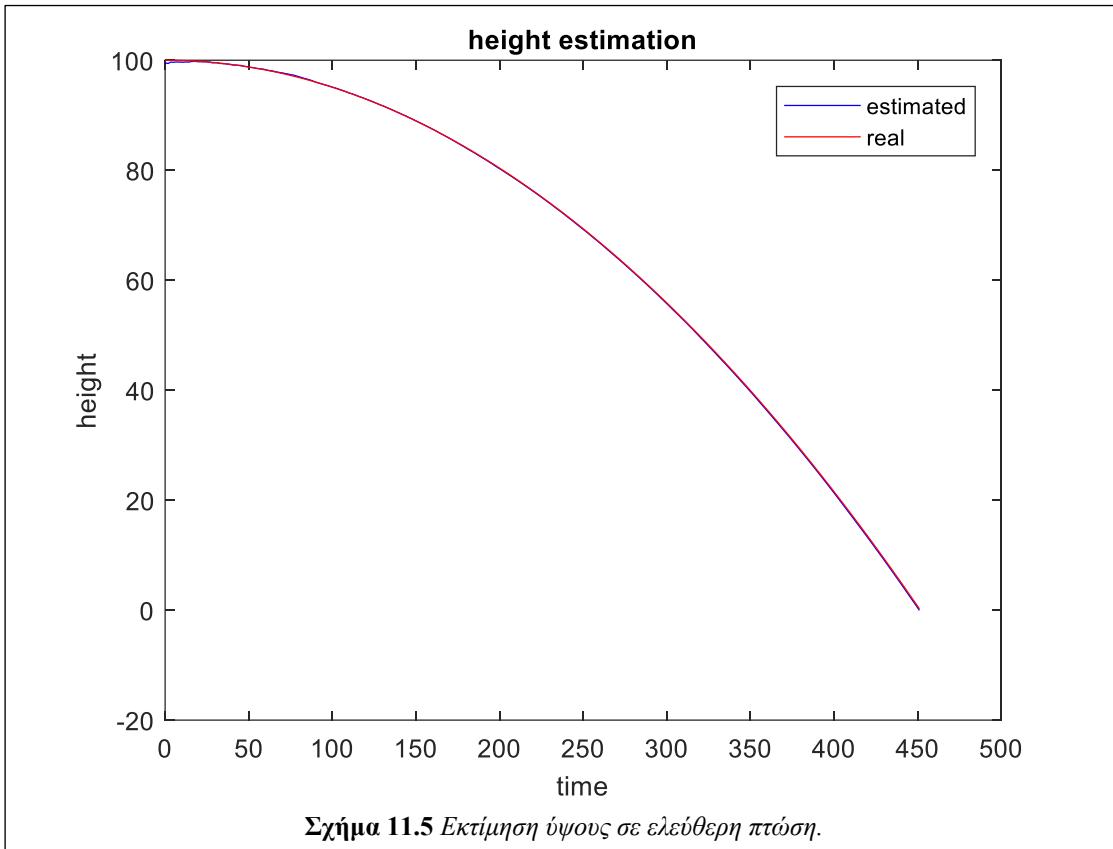
$$R = 0.2$$

Χρησιμοποιήθηκαν οι αρχικές συνθήκες:

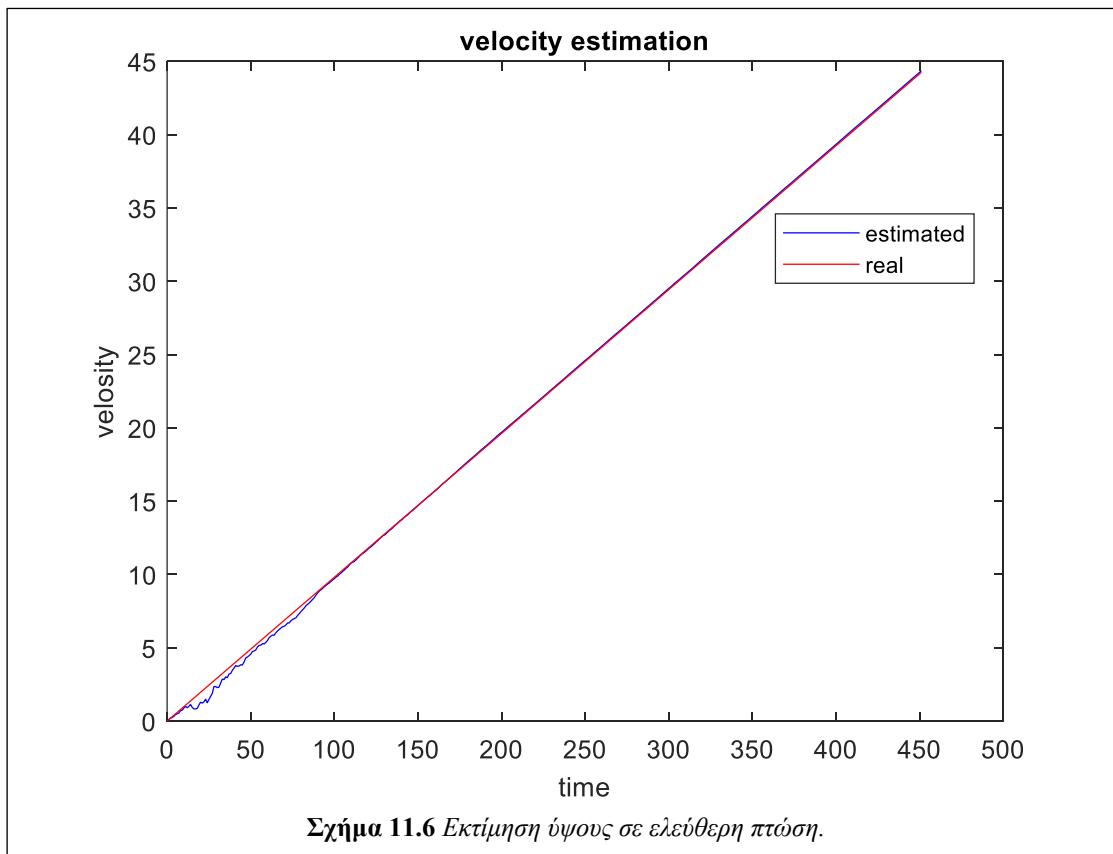
$$x(0 / -1) = x_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P(0 / -1) = P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Στο Σχήμα 11.5 παρουσιάζεται η εκτίμηση του ύψους σε ελεύθερη πτώση.



Στο Σχήμα 11.6 παρουσιάζεται η εκτίμηση της ταχύτητας σε ελεύθερη πτώση.



## 11.4 Εκτίμηση θέσης αντικειμένου από βολή

Στο παράδειγμα αυτό χρησιμοποιείται το φίλτρο Kalman για την εκτίμηση της θέσης αντικειμένου από βολή.

Το παράδειγμα αφορά τη ρίψη αντικειμένου (βολή) από την αρχή των αξόνων με γωνία  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  και αρχική ταχύτητα  $v_0 = 100m/s$ .

### Βολή σε συνεχή χρόνο

Οι κινηματικές εξισώσεις (στον συνεχή χρόνο  $t$ ) είναι:

$$s_x(t) = s_{x,0} + v_{x,0} \cdot t \quad (11.11)$$

$$v_x(t) = v_{x,0} \quad (11.12)$$

$$s_y(t) = s_{y,0} + v_{y,0} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad (11.13)$$

$$v_y(t) = v_{y,0} - g \cdot t \quad (11.14)$$

Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι:  $g = 9.81m/s^2$

Οι αρχικές συνθήκες είναι:

$$s_{x,0} = 0$$

$$v_{x,0} = 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$s_{y,0} = 0$$

$$v_{y,0} = 100 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

### Διακριτοποίηση

Επιλογή μικρού διαστήματος χρόνου  $\Delta t$

$$s_x(t + \Delta t) = s_{x,0} + v_{x,0} \cdot (t + \Delta t) = s_{x,0} + v_{x,0} \cdot t + v_{x,0} \cdot \Delta t = s_x(t) + v_{x,0} \cdot \Delta t$$

$$v_x(t + \Delta t) = v_{x,0} = v_x(t)$$

$$\begin{aligned} s_y(t + \Delta t) &= s_{y,0} + v_{y,0} \cdot (t + \Delta t) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t + \Delta t)^2 \\ &= s_{y,0} + v_{y,0} \cdot t + v_{y,0} \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 - g \cdot t \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \Delta t^2 \\ &= \left(s_{y,0} + v_{y,0} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2\right) + \left(v_{y,0} - g \cdot t\right) \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \Delta t^2 \\ &= s_y(t) + \left(v_{y,0} - g \cdot t\right) \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \Delta t^2 \\ &= s_y(t) + v_y(t) \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \Delta t^2 \end{aligned}$$

$$v_y(t + \Delta t) = v_{y,0} - g \cdot (t + \Delta t) = v_{y,0} - g \cdot t - g \cdot \Delta t = v_y(t) - g \cdot \Delta t$$

δηλαδή:

$$\begin{bmatrix} s_x(k+1) \\ v_x(k+1) \\ s_y(k+1) \\ v_y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x(k) \\ v_x(k) \\ s_y(k) \\ v_y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \Delta t^2 \\ -g \cdot \Delta t \end{bmatrix}$$

### Μοντέλο διακριτού χρόνου

$$x(k+1) = Fx(k) + Bu(k) + w(k) \quad (11.15)$$

$$z(k) = Hx(k) + v(k) \quad (11.16)$$

με παραμέτρους

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \Delta t^2 \\ -g \cdot \Delta t \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και συνδιασπορές θορύβων

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

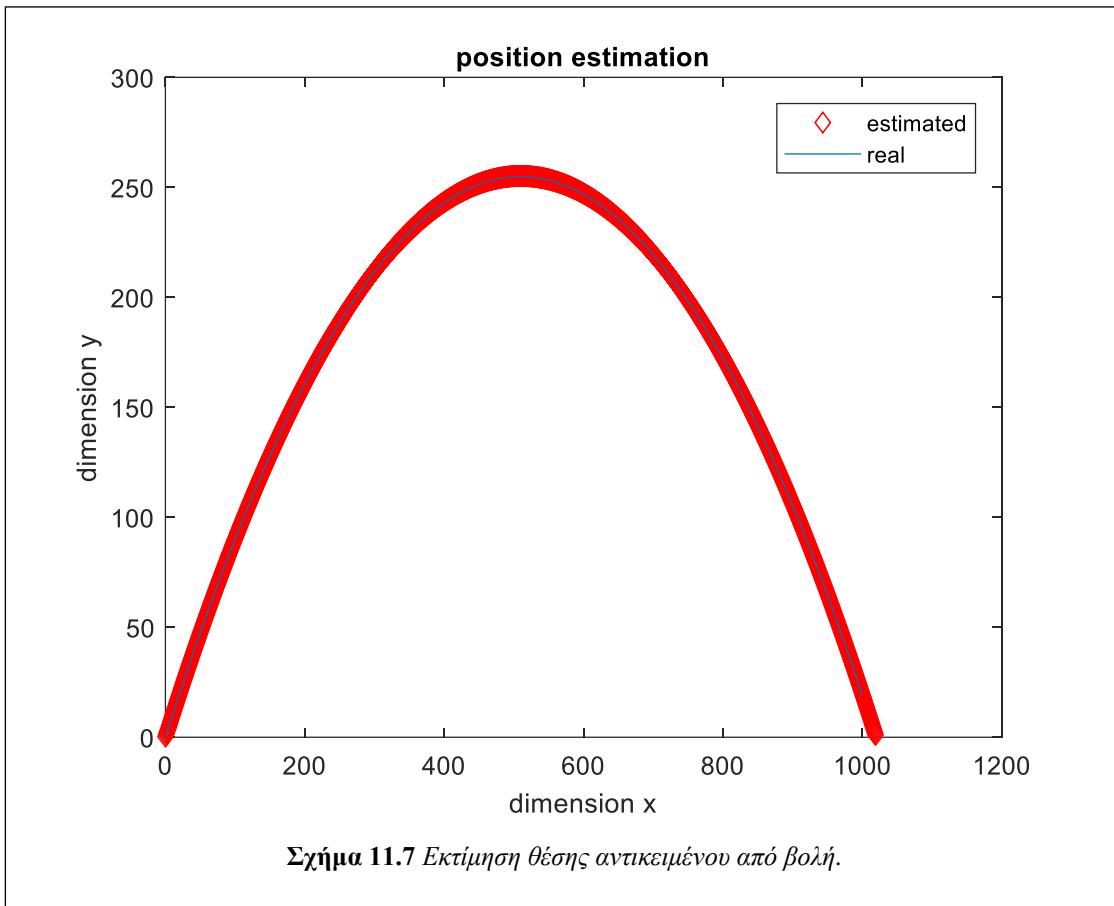
### Προσομοίωση

Επιλογή μικρού διαστήματος χρόνου  $\Delta t = 0.01s$   
Χρησιμοποιήθηκαν οι αρχικές συνθήκες:

$$x(0 / -1) = x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 100\cos(\frac{\pi}{4}) \\ 0 \\ 100\sin(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}$$

$$P(0 / -1) = P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Στο Σχήμα 11.7 παρουσιάζεται η εκτίμηση της θέσης αντικειμένου από βολή.



## 11.5 Εκτίμηση ημερήσιας διακύμανσης του ηλεκτρικού φορτίου

Στο παράδειγμα αυτό χρησιμοποιείται το φίλτρο Kalman για την εκτίμηση της ημερήσιας διακύμανσης του ηλεκτρικού φορτίου.

Στη βιβλιογραφία [Hamadi & Soliman (2004), Shankar, Chatterjee & Chatterjee (2012), Καρακυριακού (2009), Μαρκουλάκης (2004)] υπάρχουν πολλές μέθοδοι για πρόβλεψη ηλεκτρικού φορτίου, όπου χρησιμοποιείται το φίλτρο Kalman.

### Μοντέλο διακριτού χρόνου

Η Καρακυριακού (2009) χρησιμοποιεί ένα απλό βαθμωτό μοντέλο. Η μέτρηση είναι το ηλεκτρικό φορτίο. Η κατάσταση είναι η τάση που δίνει τις πιο αργές και ομαλές μεταβολές του φορτίου:

$$x(k+1) = x(k) + w(k) \quad (11.17)$$

$$z(k) = x(k) + v(k) \quad (11.18)$$

Η κατάσταση δεν μεταβάλλεται από χρονική στιγμή σε χρονική στιγμή:  $F = 1$ .

Η μέτρηση προέρχεται απευθείας από την κατάσταση:  $H = 1$ .

Οι διασπορές των θορύβων που προτείνονται στο [Καρακυριακού (2009)] είναι:  $Q = 0.235$  (μια τιμή αρκετά μικρή αλλά μη μηδενική, ώστε να δώσει προσαρμοστικότητα στο φίλτρο Kalman) και  $R = 0.655$ .

### Προσομοίωση

Χρησιμοποιήθηκε το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman.

Οι παράμετροι του φίλτρου είναι:

$$F = 1$$

$$H = 1$$

$$Q = 0.235$$

$$R = 0.655$$

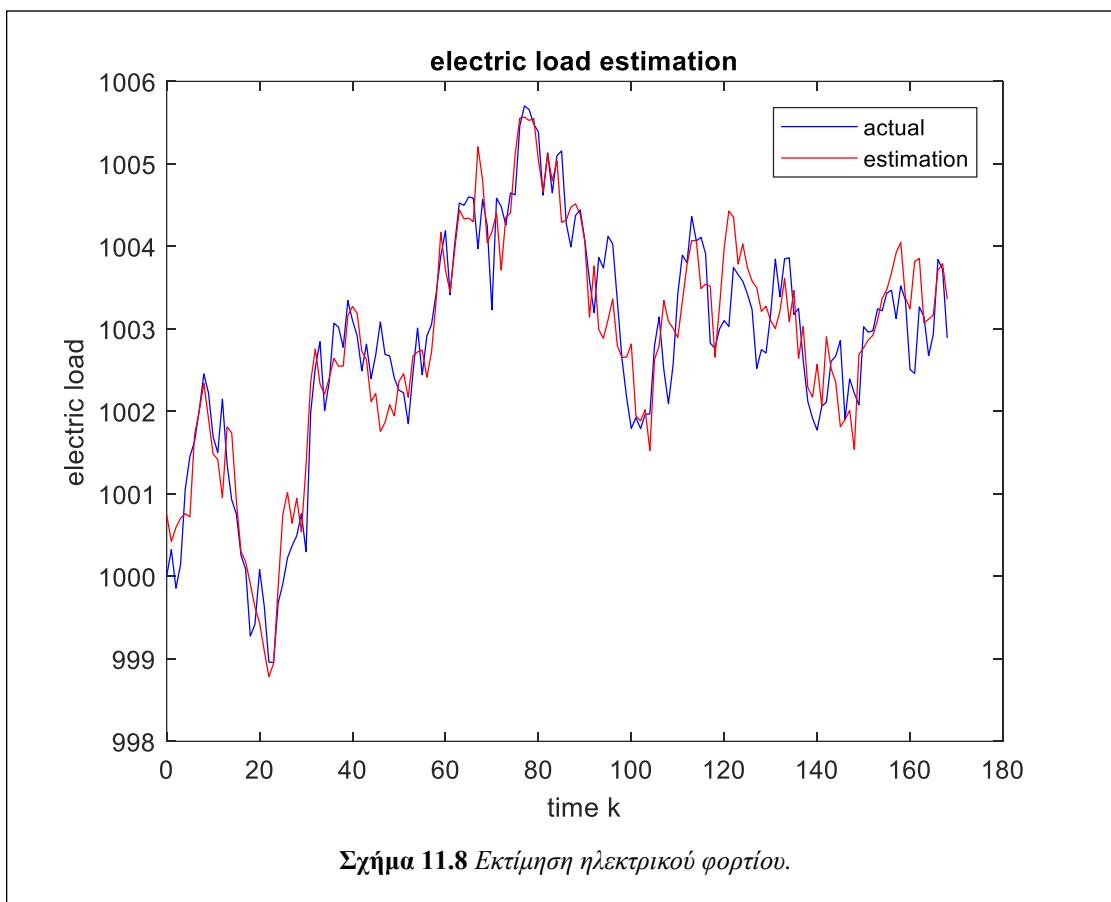
Χρησιμοποιήθηκαν οι αρχικές συνθήκες:

$$x(0 / -1) = x_0 = 1000$$

$$x(0 / -1) = P_0 = 1$$

Η εκτίμηση είναι ίση με την πρόβλεψη, γιατί  $F = 1$ .

Στο Σχήμα 11.8 παρουσιάζεται η εκτίμηση της ημερήσιας διακύμανσης του ηλεκτρικού φορτίου.



Μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης.  
Η εξίσωση Riccati είναι:

$$P = Q + \left[ P^{-1} + R^{-1} \right]^{-1}$$

ή

$$P^2 - QP - QR = 0$$

και η λύση της είναι:

$$P_p = \frac{Q + \sqrt{Q^2 + 4QR}}{2}$$

Τότε, οι συντελεστές του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης είναι:

$$K = \frac{P_p}{P_p + R} = \frac{\frac{Q + \sqrt{Q^2 + 4QR}}{2}}{\frac{Q + \sqrt{Q^2 + 4QR}}{2} + R} = \frac{Q + \sqrt{Q^2 + 4QR}}{2R + Q + \sqrt{Q^2 + 4QR}} = \frac{-Q + \sqrt{Q^2 + 4QR}}{2R}$$

$$A = [I - KH]F = 1 - \frac{-Q + \sqrt{Q^2 + 4QR}}{2R} = \frac{2R + Q - \sqrt{Q^2 + 4QR}}{2R}$$

Για τους θορύβους του μοντέλου  $Q = 0.235$  και  $R = 0.655$ ,  
η λύση της εξίσωσης Riccati, δηλαδή η διασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση, είναι:

$$P_p = 0.52705$$

και οι συντελεστές του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης είναι:

$$A = 0.55412$$

$$K = 0.44588$$

Επίσης η διασπορά λάθους εκτίμησης στη μόνιμη κατάσταση είναι:

$$P_e = 0.29205$$

### Παρατήρηση:

Η διασπορά λάθους εκτίμησης στη μόνιμη κατάσταση είναι μικρότερη από τη διασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση:

$$P_e < P_p$$

## 11.6 Αυτοπαλινδρομούμενο φίλτρο (autoregressive filter – AR filter)

Είναι γνωστό [Ασημάκης & Αδάμ (2015)] ότι τα γραμμικά χρονικά αμετάβλητα (LTI) συστήματα (φίλτρα) διακρίνονται σε δύο κατηγορίες ανάλογα με τη διάρκεια της κρουστικής τους απόκρισης:

- τα φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (Finite duration Impulse Response – FIR)
- τα φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης (Infinite duration Impulse Response – IIR)

Τα φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης (Infinite duration Impulse Response – IIR) περιγράφονται από τη γενική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b(i)x(n-i) - \sum_{i=1}^N a(i)y(n-i) \quad (11.19)$$

και ονομάζονται αυτοπαλινδρομούμενα φίλτρα κινητού μέσου όρου (Auto Regressive Moving Average filter – ARMA filter) τάξης  $(N, M)$ .

Στην ειδική περίπτωση, όπου  $M = 0$  και  $b(0) = 1$ , τα IIR φίλτρα περιγράφονται από την εξίσωση διαφορών:

$$y(n) = x(n) - \sum_{i=1}^N a(i)y(n-i) \quad (11.20)$$

και ονομάζονται **αυτοπαλινδρομούμενα φίλτρα** (Auto Regressive filter – AR filter) τάξης  $N$ .

Η έξοδος  $y(n)$  σε κάθε χρονική στιγμή ενός AR φίλτρου εξαρτάται από την είσοδο  $x(n)$  του φίλτρου σε κάθε χρονική στιγμή και από τις εξόδους του φίλτρου τις προηγούμενες χρονικές στιγμές.

Είναι γνωστό [Anderson & Moore (2005)] ότι το AR φίλτρο είναι ισοδύναμο με το μοντέλο χώρου κατάστασης (state space):

$$\underline{x}(k+1) = F\underline{x}(k) + Gw(k) \quad (11.21)$$

$$z(k) = H\underline{x}(k) + v(k) \quad (11.22)$$

όπου το διάνυσμα κατάστασης είναι διαστάσεων  $(N+1) \times 1$ :

$$\underline{x}(k) = [x(k) \quad x(k-1) \quad \dots \quad x(k-N)]^T$$

Τότε, το μοντέλο παίρνει τη μορφή:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k) \\ x(k-1) \\ \dots \\ x(k-N+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{N-1} & -a_N \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-1) \\ x(k-2) \\ \dots \\ x(k-N) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} w(k) \quad (11.23)$$

$$z(k) = [-a_1 \quad -a_2 \quad \dots \quad -a_N] \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-1) \\ \dots \\ x(k-N) \end{bmatrix} + v(k) \quad (11.24)$$

Οι παράμετροι του μοντέλου είναι:

$$F = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{N-1} & -a_N \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H = [-a_1 \quad -a_2 \quad \dots \quad -a_N]$$

$$v(k) = w(k)$$

Είναι προφανές ότι οι παράμετροι του μοντέλου χώρου κατάστασης περιλαμβάνουν τους συντελεστές του AR φίλτρου.

Στο παράδειγμα αυτό χρησιμοποιείται το φίλτρο Kalman για την εκτίμηση της εξόδου ενός AR φίλτρου.

Στο παράδειγμα αυτό θεωρείται ένα AR φίλτρο τάξης  $N = 8$  [Bourke (1998)] με συντελεστές:

$$a_1 = -4.259079$$

$$a_2 = 6.232740$$

$$a_3 = -2.107323$$

$$a_4 = -2.969714$$

$$a_5 = 1.421269$$

$$a_6 = 2.591832$$

$$a_7 = -2.614633$$

$$a_8 = 0.704923$$

### Προσομοίωση

Χρησιμοποιήθηκε το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης.

Οι παράμετροι του φίλτρου είναι:

$$F = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & -a_6 & -a_7 & -a_8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = [-a_1 \quad -a_2 \quad -a_3 \quad -a_4 \quad -a_5 \quad -a_6 \quad -a_7 \quad -a_8]$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = 1$$

Οι συντελεστές του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης είναι:

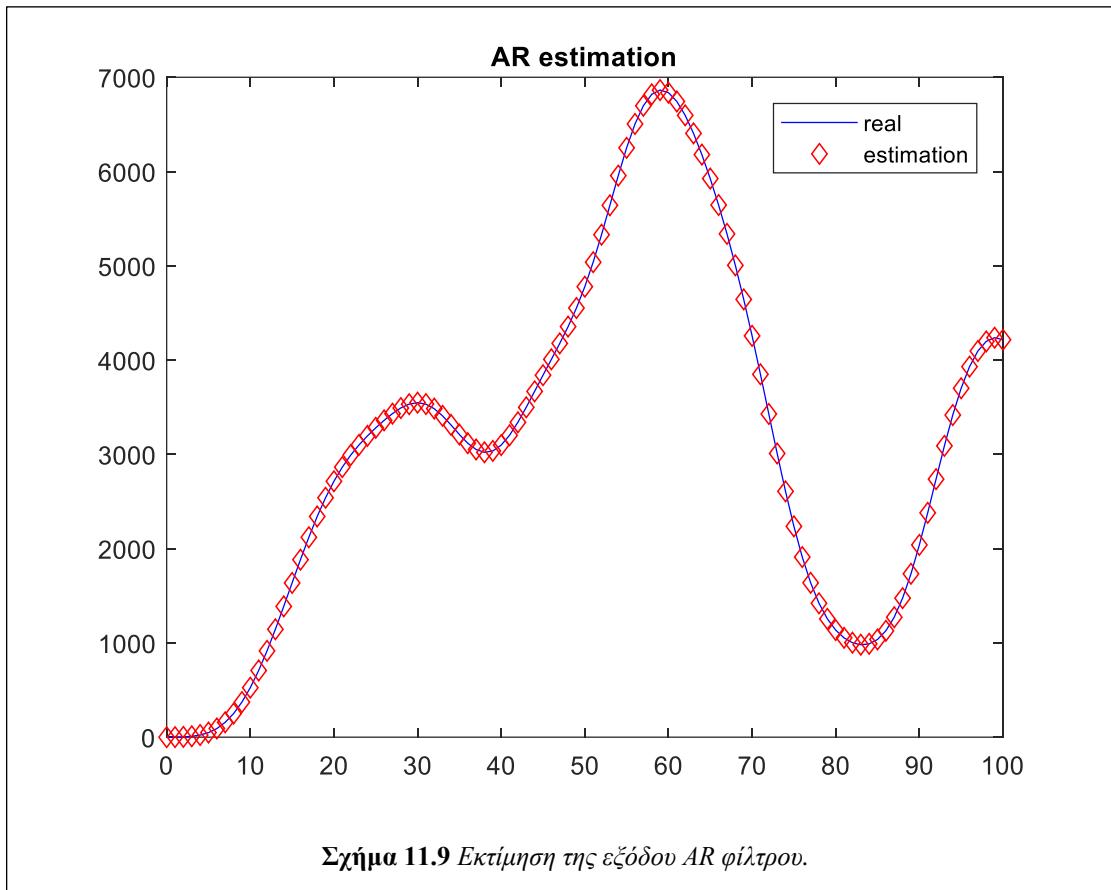
$$A = \begin{bmatrix} 1.6652 & -0.9090 & -0.4948 & 0.5240 & 0.4620 & -0.7567 & 0.3423 & -0.0509 \\ 1.2314 & -0.4749 & 0.2321 & 0.2182 & -0.1680 & -0.1637 & 0.2027 & -0.0583 \\ 0.2265 & 0.5351 & 0.2272 & 0.2136 & -0.1645 & -0.1603 & -0.1984 & -0.0571 \\ -0.1300 & 0.2667 & 0.8696 & -0.1225 & 0.0944 & 0.0919 & -0.1139 & 0.0328 \\ -0.2988 & 0.6132 & -0.2997 & 0.7183 & 0.2169 & 0.2114 & -0.2617 & 0.0753 \\ -0.2020 & 0.4147 & -0.2027 & -0.1905 & 1.1467 & 0.1429 & -0.1770 & 0.0509 \\ 0.0215 & -0.0441 & 0.0216 & 0.0203 & -0.0156 & -0.9848 & 0.0188 & -0.0054 \\ 0.1944 & -0.3990 & 0.1950 & 0.1833 & -0.1412 & -0.1376 & 1.1703 & -0.0490 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.2178 \\ -0.0194 \\ -0.0190 \\ 0.0109 \\ 0.0251 \\ 0.0170 \\ 0.0170 \\ -0.0163 \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιήθηκε η αρχική συνθήκη:

$$x(0/0) = 0$$

Στο Σχήμα 11.9 παρουσιάζεται η εκτίμηση της εξόδου του AR φίλτρου.



## 11.7 Κίνηση οφθαλμού (eye movement)

Στο παράδειγμα αυτό χρησιμοποιείται το φίλτρο Kalman για την εκτίμηση της κίνησης οφθαλμού (eye movement).

Η κίνηση του οφθαλμού περιγράφεται αναλυτικά στο [Grindinger (2006)]. Η κίνηση του οφθαλμού μπορεί να μοντελοποιηθεί είτε σε δύο είτε σε τρεις διαστάσεις. Στο παράδειγμα αυτό θεωρείται κίνηση σε δύο διαστάσεις.

Το μοντέλο διακριτού χρόνου είναι:

$$x(k+1) = Fx(k) + w(k) \quad (11.25)$$

$$z(k) = Hx(k) + v(k) \quad (11.26)$$

Το διάνυσμα κατάστασης περιλαμβάνει τη θέση (position) και την ταχύτητα (velocity) της κίνησης του οθφαλμού σε δύο διαστάσεις.

$$x(k) = \begin{bmatrix} s_x(k) \\ s_y(k) \\ v_x(k) \\ v_y(k) \end{bmatrix}$$

Οι παράμετροι του μοντέλου [Grindinger (2006)] είναι:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \frac{10000}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 102 & 0 \\ 0 & 102 \end{bmatrix}$$

### Προσομοίωση

Θεωρείται η κίνηση με σταθερή ταχύτητα  $v_x = 0.3 \text{ pixels / ms}$  στον οριζόντιο άξονα και  $v_x = 0.4 \text{ pixels / ms}$  στον κάθετο άξονα.

Χρησιμοποιήθηκε το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης.

Οι συντελεστές του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης είναι:

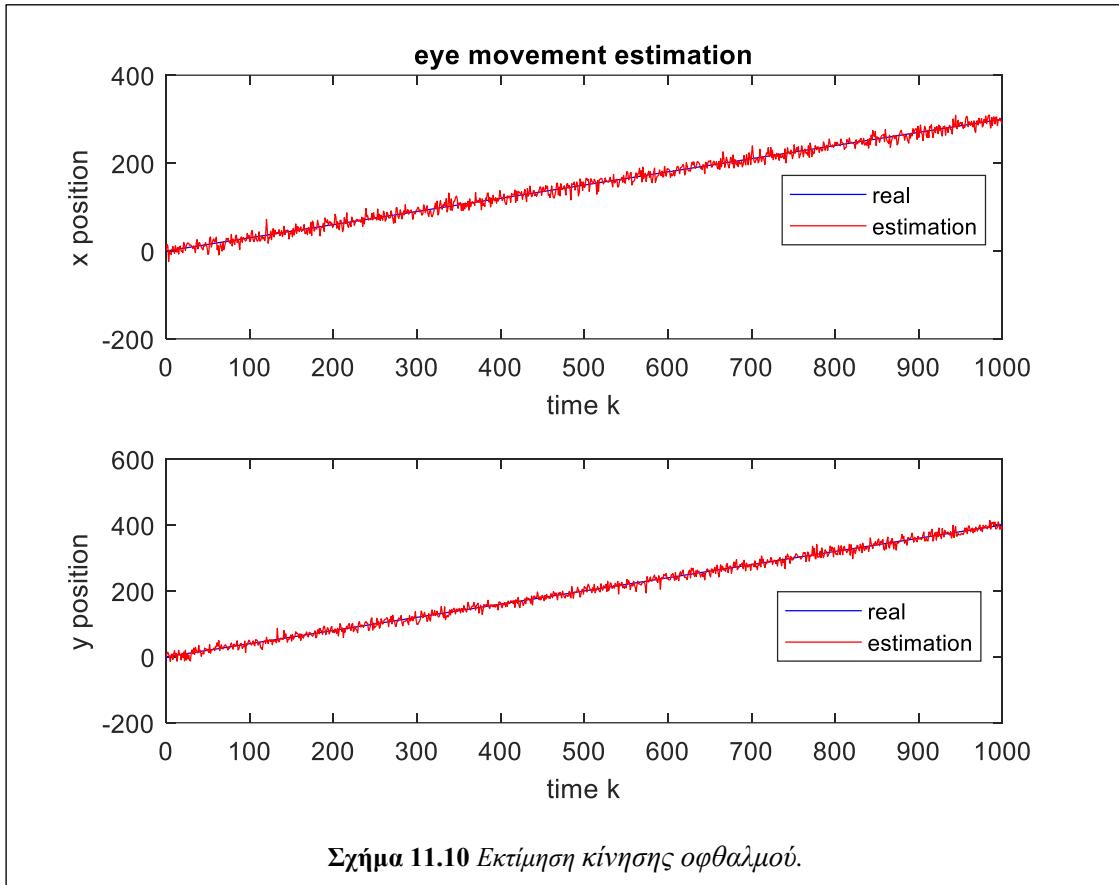
$$K = \begin{bmatrix} 0.9856 & 0 \\ 0 & 0.9856 \\ 1.1902 & 0 \\ 0 & 1.1902 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.0144 & 0 & 0.0144 & 0 \\ 0 & 0.0144 & 0 & 1 \\ -1.1902 & 0 & -1.1902 & 0 \\ 0 & -1.1902 & 0 & -1.1902 \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιήθηκε η αρχική συνθήκη:

$$x(0 / 0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Στο Σχήμα 11.10 παρουσιάζεται η εκτίμηση εκτίμησης της κίνησης του οφθαλμού στους δύο άξονες.



## 11.8 Τυχαίος περίπατος (random walk)

Στο παράδειγμα αυτό θεωρείται ο **τυχαίος περίπατος (random walk)** και χρησιμοποιείται το φίλτρο Kalman για την εκτίμηση της απόστασης που διανύεται με την κίνηση του τυχαίου περίπατου.

Θεωρείται η κίνηση του τυχαίου περίπατου σε μία διάσταση.

Το μοντέλο διακριτού χρόνου είναι:

$$x(k+1) = Fx(k) + w(k) \quad (11.27)$$

$$z(k) = Hx(k) + v(k) \quad (11.28)$$

Οι παράμετροι του μοντέλου είναι:

$$F = 1$$

$$H = 1$$

$$Q = 1$$

$$R = 1$$

Η κίνηση στο επίπεδο με την κίνηση του τυχαίου περίπατου (random walk) μπορεί να θεωρηθεί ως κίνηση σε δύο διαστάσεις.

Η απόσταση που διανύεται υπολογίζεται από τις επί μέρους αποστάσεις στους δύο άξονες.

### Προσομοίωση

Χρησιμοποιήθηκαν δύο χρονικά αμετάβλητα φίλτρα Kalman.

Οι παράμετροι των δύο φίλτρων είναι:

$$F = 1$$

$$H = 1$$

$$Q = 1$$

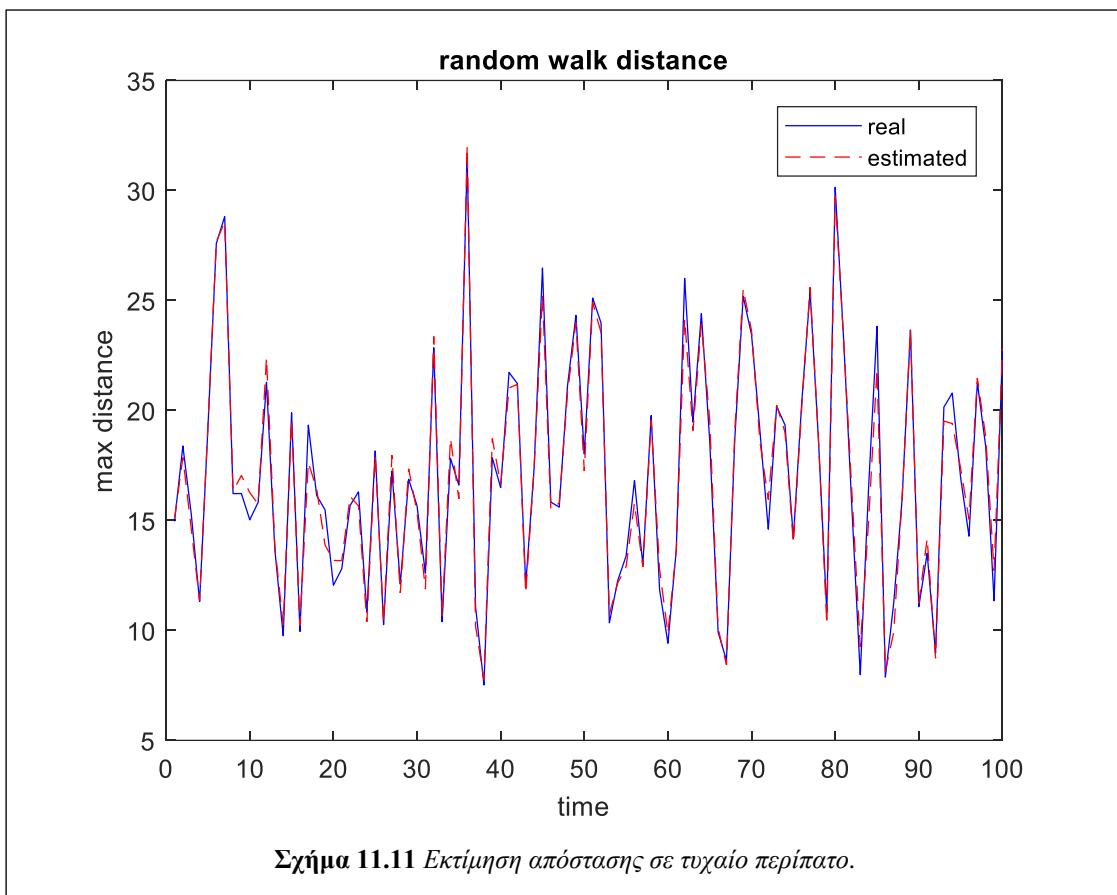
$$R = 1$$

Χρησιμοποιήθηκαν οι αρχικές συνθήκες:

$$x(0 / -1) = x_0 = 0$$

$$x(0 / -1) = P_0 = 0$$

Στο Σχήμα 11.11 παρουσιάζεται η εκτίμηση της απόστασης που διανύεται με την κίνηση του τυχαίου περίπατου (random walk).



Μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης.  
Η εξίσωση Riccati είναι:

$$P = 1 + \left[ P^{-1} + 1 \right]^{-1}$$

ή

$$P^2 - P - 1 = 0$$

και η λύση της είναι:

$$P_p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Τότε, οι συντελεστές του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης είναι:

$$K = \frac{P_p}{P_p + 1} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$A = 1 - K = 1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Επίσης, η διασπορά λάθους εκτίμησης στη μόνιμη κατάσταση είναι:

$$P_e = [1 - K] P_p = A P_p = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

### Παρατήρηση:

Η διασπορά λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση είναι ίση με τη **χρυσή τομή (golden ratio)**

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

## 11.9 Ασκήσεις

- Στο παράδειγμα της εκτίμησης τυχαίας σταθεράς, να θέσετε  $R = 10^2$ . Πώς επηρεάζεται η εκτίμηση;
- Στο παράδειγμα της εκτίμησης της ημερήσιας διακύμανσης του ηλεκτρικού φορτίου, να θέσετε  $R = 10$ . Πώς επηρεάζεται η εκτίμηση;
- Στο παράδειγμα της εκτίμησης της απόστασης που διανύεται με την κίνηση του τυχαίου περίπατου (random walk), να αποδείξετε ότι:

$$\varphi = \frac{1}{\alpha} = 1 + \alpha$$

όπου,

$$P_p = \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$P_e = \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

4. Στο παράδειγμα αυτό χρησιμοποιείται το φίλτρο Kalman για την εκτίμηση της θέσης και της ταχύτητας ενός κινητού που κινείται σε μια γραμμή με σταθερή ταχύτητα, να κάνετε προσομοίωση για διαστήματα χρόνου  $\Delta t = 0.1$ ,  $\Delta t = 1$ ,  $\Delta t = 10$ . Τι παρατηρείτε;

5. Στο παράδειγμα της εκτίμησης της εξόδου ενός AR φίλτρου, να γράψετε πρόγραμμα για να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές του πίνακα μεταφοράς  $F$ .

6. Στο παράδειγμα της εκτίμησης της κίνησης οφθαλμού (eye movement), να βρείτε το μοντέλο για κίνηση σε τρεις διαστάσεις και να κάνετε προσομοίωση.

7. Να εξηγήστε το μοντέλο κίνησης βλέμματος δύο διαστάσεων.

- Να γράψετε πρόγραμμα για το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman.
- Να σχεδιάσετε την πραγματική κίνηση, τις μετρήσεις και την εκτίμηση στους δύο άξονες ξεχωριστά και σε επίπεδο τροχιάς για σταθερή ταχύτητα 0.5 pixels/ms στον άξονα x και σταθερή ταχύτητα 0.4 pixels/ms στον άξονα y.
- Να υπολογίσετε την πραγματική τελική απόσταση και την εκτίμηση της τελικής απόστασης.

8. Θέλουμε να εκτιμήσουμε το ηλεκτρικό φορτίο με χρήση Kalman Filter με παραμέτρους

$$F = 1$$

$$H = 1$$

$$Q = 0.2$$

$$R$$

και αρχικές συνθήκες:

$$x(0 / -1) = x_0 = 1000$$

$$x(0 / -1) = P_0 = 1$$

Να γράψετε πρόγραμμα που για μία εβδομάδα:

- υπολογίζει και σχεδιάζει το πραγματικό και το εκτιμώμενο φορτίο για  $R = 0.2$
- υπολογίζει και εμφανίζει το μέσο απόλυτο επί τοις εκατό λάθος ως προς το πραγματικό ηλεκτρικό φορτίο για  $R = 0.2$

Να γράψετε πρόγραμμα που σχεδιάζει το μέσο απόλυτο επί τοις εκατό λάθος σε σχέση με την παράμετρο R του θορύβου μετρήσεων.

9. Ένας άνθρωπος περπατάει με τυχαίο περίπατο (random walk) στο επίπεδο (x-axis, y-axis) ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων, για χρονικό διάστημα κ χρονικών στιγμών.

Θέλουμε να εκτιμήσουμε την κίνηση με χρήση φίλτρου Kalman Filter με παραμέτρους

$$F = 1$$

$$H = 1$$

$$Q = 1$$

$$R = 1$$

και μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Να γράψετε πρόγραμμα που για κίνηση 100 χρονικών στιγμών:

- υπολογίζει και σχεδιάζει την πραγματική θέση και την εκτιμώμενη θέση
- υπολογίζει και εμφανίζει τη μέγιστη εκτιμώμενη απόσταση και την πρώτη χρονική στιγμή που διανύεται η μέγιστη εκτιμώμενη απόσταση

10. Στο παράδειγμα της εκτίμησης της απόστασης που διανύεται με την κίνηση του τυχαίου περίπατου (random walk), να γράψετε πρόγραμμα που σχεδιάζει την εκτιμώμενη μέγιστη απόσταση σε σχέση με τον χρόνο κίνησης για μέγιστο χρόνο κίνησης 100 χρονικών στιγμών.

## 11.10 Περίληψη

Το φίλτρο Kalman έχει χρησιμοποιηθεί με επιτυχία σε ένα ευρύτατο φάσμα εφαρμογών.

Παραδείγματα εφαρμογής των φίλτρων Kalman: το φίλτρο Kalman χρησιμοποιείται για εκτίμηση τυχαίας σταθεράς, για εκτίμηση κίνησης με σταθερή ταχύτητα, για εκτίμηση ελεύθερης πτώσης, για εκτίμηση βολής, για εκτίμηση ημερήσιας διακύμανσης του ηλεκτρικού φορτίου, για εκτίμηση εξόδου αυτοπαλινδρομούμενου μοντέλου (autoregressive model – AR model), για εκτίμηση κίνησης οφθαλμού (eye movement) και για εκτίμηση απόστασης από κίνηση με τυχαίο περίπατο (random walk).

Μπορείτε να ακούσετε την περίληψη με τον Ήχο 11.1.



Ήχος 11.1 Περίληψη – Κεφάλαιο 11.

## 11.11 Κριτήριο Αξιολόγησης

Απαντήστε με Σωστό ή Λάθος.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Στο παράδειγμα της εκτίμησης τυχαίας σταθεράς μπορεί να χρησιμοποιηθεί το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Η διακριτοποίηση του πίνακα μεταφοράς στον διακριτό χρόνο  $F$  υπολογίζεται από τον πίνακα μεταφοράς  $A$  στον συνεχή χρόνο με τον τύπο  $F = e^{A(\Delta t)}$ .

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Στο παράδειγμα της εκτίμησης της ημερήσιας διακύμανσης του ηλεκτρικού φορτίου, με χρήση του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης, όταν  $Q = R$ , το κέρδος του φίλτρου Kalman στη μόνιμη κατάσταση είναι

$$K = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Στο παράδειγμα της εκτίμησης της εξόδου ενός AR φίλτρου με συντελεστές  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ , ο πίνακας εξόδου είναι:  $H = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \ a_8]$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Στο παράδειγμα της εκτίμησης της ημερήσιας διακύμανσης του ηλεκτρικού φορτίου, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Στο παράδειγμα της εκτίμησης της κίνησης οφθαλμού (eye movement) η κίνηση του οφθαλμού μπορεί να μοντελοποιηθεί είτε σε δύο είτε σε τρεις διαστάσεις.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

Στο παράδειγμα της εκτίμησης της κίνησης οφθαλμού (eye movement), όπου η κίνηση μοντελοποιείται σε δύο διαστάσεις, το διάνυσμα κατάστασης περιλαμβάνει τη θέση (position) και την ταχύτητα (velocity) της κίνησης του οφθαλμού σε δύο διαστάσεις.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

Στο παράδειγμα της εκτίμησης της κίνησης οφθαλμού (eye movement) δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

Στο παράδειγμα της εκτίμησης της απόστασης που διανύεται με την κίνηση του τυχαίου περίπατου (random walk) οι παράμετροι του μοντέλου είναι:  $F = 1$ ,  $H = 1$ ,  $Q = 1$ ,  $R = 1$ .

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Στο παράδειγμα της εκτίμησης της απόστασης που διανύεται με την κίνηση του τυχαίου περίπατου (random walk), ισχύει η σχέση:  $\varphi = 1 - \alpha$ , όπου  $P_p = \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  και  $P_e = \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

---

Θα βρείτε την Απάντηση στο Κριτήριο Αξιολόγησης στο Παράρτημα A'.

Μπορείτε να κάνετε το Κριτήριο Αξιολόγησης με το Διαδραστικό Πρόγραμμα 11.1.



**Διαδραστικό Πρόγραμμα 11.1** *Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 13.*

## **Βιβλιογραφία/Αναφορές**

- Al-Hamadi, H.M., Soliman, S.A. (2004). Short-term electric load forecasting based on Kalman filtering algorithm with moving window weather and load model, *Electric Power Systems Research*, vol. 68, pp.47-59.
- Anderson, B. D. O., Moore, J. B. (2005). *Optimal Filtering*. Dover Publications, New York.
- Bourke, P. (1998). AutoRegression Analysis (AR), <http://paulbourke.net/miscellaneous/ar/>
- Grindinger, T. (2006). *Eye movement analysis and prediction with the Kalman filter*, MsC Thesis, Clemson University.
- Shankar, R., Chatterjee, K. & Chatterjee, T.K. (2012). A Very Short-Term Load forecasting using Kalman filter for Load Frequency Control with Economic Load Dispatch, *Journal of Engineering Science and Technology Review*, vol. 5, no. 1, pp. 97-103.
- Welch, G., Bishop, G. (2001). An Introduction to the Kalman Filter, Department of Computer Science, University of North Carolina, [http://www.cs.unc.edu/~welch/media/pdf/kalman\\_intro.pdf](http://www.cs.unc.edu/~welch/media/pdf/kalman_intro.pdf)
- Ασημάκης, Ν. (2009). *Φίλτρα Kalman και Λαϊνιώτη*. Εκδόσεις ΑΠΑΚΥΝΘΟΣ.
- Ασημάκης, Ν., & Αδάμ, Μ. (2015). *Σήματα και Συστήματα [Προπτυχιακό εγχειρίδιο]*. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. <http://hdl.handle.net/11419/5311>
- Καρακυριακού, Α. (2009). *Βέλτιστος Προγραμματισμός Λειτουργίας Υβριδικού Συστήματος Φωτοβολταϊκών και Συμπαραγωγής Ηλεκτρισμού και Θερμότητας με Βάση την Ανάλυση Διακύμανσης του Ηλεκτρικού Φορτίου*, Διπλωματική Εργασία, ΕΜΠ, Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Τομέας Ηλεκτρικής Ισχύος.
- Μαρκουλάκης, Σ. (2004). *Τεχνικές Βραχυπρόθεσμης Πρόβλεψης Ηλεκτρικού Φορτίου*, Μεταπτυχιακή Εργασία, Πολυτεχνείο Κρήτης, Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών.

## Κεφάλαιο 12 Παράλληλη υλοποίηση του φίλτρου Kalman

### Σύνοψη

Στο κεφάλαιο παρουσιάζεται η παράλληλη υλοποίηση του φίλτρου Kalman. Παρουσιάζεται το κατανεμημένο γραμμικό μοντέλο, όπου οι μετρήσεις κατανέμονται σε παράλληλους επεξεργαστές. Παρουσιάζεται το μη κατανεμημένο φίλτρο Kalman και το κατανεμημένο φίλτρο Kalman, για χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα, για χρονικά αμετάβλητα μοντέλα και στη μόνιμη κατάσταση. Αναλύεται ο ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος του μη κατανεμημένου και του κατανεμημένου φίλτρου Kalman. Παρουσιάζεται η μέθοδος για τον προσδιορισμό της βέλτιστης παράλληλης υλοποίησης του φίλτρου Kalman. Η μέθοδος βασίζεται στον εκ των προτέρων (*a-priori*) καθορισμό (πριν την υλοποίηση του φίλτρου) της βέλτιστης κατανομής των μετρήσεων σε παράλληλους επεξεργαστές χρησιμοποιώντας το κριτήριο της ελαχιστοποίησης του χρόνου επεξεργασίας. Το βέλτιστο παράλληλο φίλτρο Kalman παρουσιάζει μεγάλη επιτάχυνση παραλληλισμού (speedup). Αυτό το αποτέλεσμα είναι πολύ σημαντικό, γιατί στις περισσότερες εφαρμογές πραγματικού χρόνου (real-time), έχει τεράστια σημασία ο υπολογισμός των εκτιμήσεων στον συντομότερο δυνατό χρόνο.

### Προαπαιτούμενη γνώση

Φίλτρο Kalman, πίνακες

### 12.1 Κατανεμημένο γραμμικό μοντέλο

Το γραμμικό μοντέλο διακριτού χρόνου περιγράφεται από τις εξισώσεις χώρου κατάστασης (state space equations) (Κεφάλαιο 1):

$$x(k+1) = F(k+1, k)x(k) + B(k)u(k) + w(k) \quad (12.1)$$

$$z(k) = H(k)x(k) + v(k) \quad (12.2)$$

για  $k \geq 0$ , όπου

οι στοχαστικές διαδικασίες  $\{w(k)\}$  και  $\{v(k)\}$  ακολουθούν την **κανονική κατανομή (Gaussian distribution)**, έχουν μηδενικές μέσες τιμές και είναι λευκές διαδικασίες (white processes) με συνδιασπορές  $Q(k)$  και  $R(k)$ , αντιστοίχως. Επίσης, η αρχική τιμή της κατάστασης  $x(0)$  είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την **κανονική κατανομή (Gaussian distribution)**, έχει μέση τιμή  $x_0$  και συνδιασπορά  $P_0$ , ενώ οι στοχαστικές διαδικασίες  $\{w(k)\}$ ,  $\{v(k)\}$  και η τυχαία μεταβλητή  $x(0)$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Σε **περιβάλλον πολλαπλών αισθητήρων (multi-sensor environment)**, το διάνυσμα μετρήσεων  $z(k)$ , ο θόρυβος των μετρήσεων  $v(k)$  και ο πίνακας εξόδου  $H(k)$  χωρίζονται σε  $p$  **μέρη (parts)** [Hashemipour, Roy & Laub (1988)]:

το διάνυσμα μετρήσεων  $z(k)$  χωρίζεται σε  $p$  μέρη (parts)

$$z^T(k) = [z_1^T(k) \quad z_2^T(k) \quad \dots \quad z_p^T(k)], \quad (12.3)$$

όπου  $z_i(k), i = 1, \dots, p$  είναι διανύσματα μετρήσεων διαστάσεων  $m_i \times 1, i = 1, \dots, p$  και

$$\sum_{i=1}^p m_i = m \quad (12.4)$$

ο θόρυβος των μετρήσεων  $v(k)$  χωρίζεται σε  $p$  στατιστικά ανεξάρτητα μέρη:

$$v^T(k) = [v_1^T(k) \quad v_2^T(k) \quad \dots \quad v_p^T(k)], \quad (12.5)$$

όπου

$$E[v(k)v^T(k)] = diag(R_1^T(k), R_2^T(k), \dots, R_p^T) \quad (12.6)$$

και  $R_i(k), i = 1, \dots, p$  είναι πίνακες διαστάσεων  $m_i \times n, i = 1, \dots, p$ .

ο πίνακας εξόδου  $H(k)$  χωρίζεται σε  $P$  μέρη:

$$H^T(k) = \begin{bmatrix} H_1^T(k) & H_2^T(k) & \dots & H_p^T(k) \end{bmatrix} \quad (12.7)$$

όπου  $H_i(k), i = 1, \dots, p$  είναι πίνακες διαστάσεων  $m_i \times n, i = 1, \dots, p$ .

Τότε, η εξίσωση των μετρήσεων (12.2) παίρνει τη μορφή

$$z_i(k) = H_i(k)x(k) + v_i(k), i = 1, \dots, p \quad (12.8)$$

Έτσι, προκύπτει το **κατανεμημένο γραμμικό μοντέλο** διακριτού χρόνου που περιγράφεται από τις εξισώσεις χώρου κατάστασης (state space equations):

$$x(k+1) = F(k+1, k)x(k) + B(k)u(k) + w(k) \quad (12.9)$$

$$z_i(k) = H_i(k)x(k) + v_i(k), i = 1, \dots, p \quad (12.10)$$

για  $k \geq 0$ .

## 12.2 Μη κατανεμημένο φίλτρο Kalman

Για το γραμμικό μοντέλο, όταν οι πίνακες  $F(k+1, k)$ ,  $H(k)$ ,  $Q(k)$ ,  $R(k)$  και  $B(k)$  είναι χρονικά μεταβαλλόμενοι, από τις εξισώσεις του χρονικά μεταβαλλόμενου φίλτρου Kalman (Κεφάλαιο 2), προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:

για τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης

$$P(k/k) = \left[ P^{-1}(k/k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)H(k) \right]^{-1} \quad (12.11)$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned} P(k/k) &= [I - K(k)H(k)]P(k/k-1) \\ &= P(k/k-1) - K(k)H(k)P(k/k-1) \\ &= P(k/k-1) - P(k/k-1)H^T(k)[H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1}H(k)P(k/k-1) \\ &= \left[ P^{-1}(k/k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)H(k) \right]^{-1} \end{aligned}$$

για το κέρδος

$$K(k) = P(k/k)H^T(k)R^{-1}(k) \quad (2.12)$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned} K(k) &= P(k/k-1)H^T(k)[H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1} \\ \Leftrightarrow K(k)[H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k)] &= P(k/k-1)H^T(k) \\ \Leftrightarrow K(k)H(k)P(k/k-1)H^T(k) + K(k)R(k) &= P(k/k-1)H^T(k) \\ \Leftrightarrow K(k)R(k) &= P(k/k-1)H^T(k) - K(k)H(k)P(k/k-1)H^T(k) \\ &= [P(k/k-1) - K(k)H(k)P(k/k-1)]H^T(k) \\ &= [I - K(k)H(k)]P(k/k-1)H^T(k) \\ &= P(k/k)H^T(k) \\ \Leftrightarrow K(k) &= P(k/k)H^T(k)R^{-1}(k) \end{aligned}$$

για την εκτίμηση

$$x(k/k) = P(k/k) \left[ P^{-1}(k/k-1)x(k/k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)z(k) \right] \quad (12.13)$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned} x(k/k) &= [I - K(k)H(k)]x(k/k-1) + K(k)z(k) \\ &= P(k/k)P^{-1}(k/k-1)x(k/k-1) + K(k)z(k) \\ &= P(k/k)P^{-1}(k/k-1)x(k/k-1) + P(k/k)H^T(k)R^{-1}(k)z(k) \\ &= P(k/k) \left[ P^{-1}(k/k-1)x(k/k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)z(k) \right] \end{aligned}$$

Για το χρονικά μεταβαλλόμενο μοντέλο, όπου οι πίνακες  $F(k+1,k)$ ,  $H(k)$ ,  $Q(k)$ ,  $R(k)$  και  $B(k)$  είναι χρονικά μεταβαλλόμενοι, προκύπτει το Μη Κατανεμημένο Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο Kalman (Non Distributed Time Varying Kalman Filter):

**Μη κατανεμημένο Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο Kalman  
Non Distributed Time Varying Kalman Filter (NDTVKF)**

$$x(k/k) = P(k/k) \left[ P^{-1}(k/k-1)x(k/k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)z(k) \right]$$

$$P(k/k) = \left[ P^{-1}(k/k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)H(k) \right]^{-1}$$

$$x(k+1/k) = F(k+1,k)x(k/k) + B(k)u(k)$$

$$P(k+1/k) = Q(k) + F(k+1,k)P(k/k)F^T(k+1,k)$$

$$k = 0, 1, \dots$$

$$x(0/-1) = x_0$$

$$P(0/-1) = P_0$$

Όταν οι πίνακες  $F(k+1,k) = F$ ,  $H(k) = H$ ,  $Q(k) = Q$ ,  $R(k) = R$  και  $B(k) = B$  είναι χρονικά αμετάβλητοι, προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:

για τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης

$$P(k/k) = \left[ P^{-1}(k/k-1) + H^T R^{-1} H \right]^{-1} \quad (12.14)$$

για το κέρδος

$$K(k) = P(k/k)H^T R^{-1} \quad (12.15)$$

για την εκτίμηση

$$x(k/k) = P(k/k) \left[ P^{-1}(k/k-1)x(k/k-1) + H^T R^{-1} z(k) \right] \quad (12.16)$$

Για το χρονικά μεταβαλλόμενο μοντέλο, όπου οι πίνακες  $F(k+1,k) = F$ ,  $H(k) = H$ ,  $Q(k) = Q$ ,  $R(k) = R$  και  $B(k) = B$  είναι χρονικά αμετάβλητοι, προκύπτει το Μη Κατανεμημένο Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman (Non Distributed Time Invariant Kalman Filter):

**Μη Κατανεμημένο Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman  
Non Distributed Time Invariant Kalman Filter (NDTIKF)**

$$x(k/k) = P(k/k) \left[ P^{-1}(k/k-1)x(k/k-1) + H^T R^{-1} z(k) \right]$$

$$P(k/k) = \left[ P^{-1}(k/k-1) + H^T R^{-1} H \right]^{-1}$$

$$x(k+1/k) = Fx(k/k) + Bu(k)$$

$$P(k+1/k) = Q + FP(k/k)F^T$$

$$k = 0, 1, \dots$$

$$x(0/-1) = x_0$$

$$P(0/-1) = P_0$$

Στη μόνιμη κατάσταση, προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:  
για την εκτίμηση

$$\begin{aligned} x(k/k) &= P_e \left[ P_p^{-1} x(k/k-1) + H^T R^{-1} z(k) \right] \\ &= P_e P_p^{-1} x(k/k-1) + P_e H^T R^{-1} z(k) \\ &= [I - KH] x(k/k-1) + K z(k) \end{aligned} \quad (12.17)$$

για την πρόβλεψη

$$x(k+1/k) = Fx(k/k) + Bu(k) \quad (12.18)$$

Συνδυάζοντας τις (12.17) και (12.18) προκύπτει η παρακάτω επαναληπτική εξίσωση για την εκτίμηση:

$$x(k+1/k+1) = Ax(k/k) + Cu(k) + Kz(k+1), \quad (12.19)$$

όπου

$$A = [I - KH]F \quad (12.20)$$

$$C = [I - KH]B \quad (12.21)$$

Η αρχική συνθήκη είναι:

$$x(0/0) = [I - KH]x(0/-1) + Kz(0) = [I - KH]x_0 + Kz(0)$$

Στη μόνιμη κατάσταση, προκύπτει το Μη Κατανεμημένο Φίλτρο Kalman Μόνιμης Κατάστασης (Non Distributed Steady State Kalman Filter):

**Μη Κατανεμημένο Φίλτρο Kalman Μόνιμης Κατάστασης  
Non Distributed Steady State Kalman Filter (NDSSKF)**

$$x(k+1/k+1) = Ax(k/k) + Cu(k) + Kz(k+1)$$

$$k = 0, 1, \dots$$

$$A = [I - KH]F$$

$$C = [I - KH]B$$

$$x(0/0) = [I - KH]x_0 + Kz(0)$$

Οι συντελεστές του Μη Κατανεμημένου Φίλτρου Kalman Μόνιμης Κατάστασης, δηλαδή οι πίνακες  $A$ ,  $C$  υπολογίζονται εκ των προτέρων (off-line) επιλύοντας την εξίσωση Riccati και υπολογίζοντας το κέρδος  $K$  στη μόνιμη κατάσταση.

### 12.3 Κατανεμημένο φίλτρο Kalman (distributed Kalman filter)

Για το κατανεμημένο γραμμικό μοντέλο, το κατανεμημένο φίλτρο Kalman χωρίζεται σε δύο επίπεδα: το **Τοπικό Επίπεδο (Local Level)** και το **Κεντρικό Επίπεδο (Central Level)**. Στο τοπικό επίπεδο, κάθε επεξεργαστής (processor) υπολογίζει την τοπική εκτίμηση χρησιμοποιώντας τις τοπικές μετρήσεις. Στο κεντρικό επίπεδο, υπολογίζεται η συνολική εκτίμηση από τα δεδομένα κάθε τοπικού επεξεργαστή. Οι τοπικοί επεξεργαστές μπορούν να λειτουργούν ανεξάρτητα, γιατί δεν απαιτείται ανταλλαγή πληροφορίας ανάμεσά τους ούτε απαιτείται μεταφορά πληροφορίας από το κεντρικό επίπεδο προς τους τοπικούς επεξεργαστές.

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (12.3), (12.6) και (12.7), προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$H^T(k)R^{-1}(k)H(k) = \sum_{i=1}^p H_i^T(k)R_i^{-1}H_i(k) \quad (12.22)$$

$$H^T(k)R^{-1}(k)z(k) = \sum_{i=1}^p H_i^T(k)R_i^{-1}z_i(k) \quad (12.23)$$

Οπότε:

$$H^T(k)R^{-1}(k)H(k) = \sum_{i=1}^p B_i(k), \quad (12.24)$$

όπου:

$$B_i(k) = H_i^T(k)R_i^{-1}(k)H_i(k), i=1,...,p \quad (12.25)$$

και

$$H^T(k)R^{-1}(k)z(k) = \sum_{i=1}^p b_i(k), \quad (12.26)$$

όπου:

$$b_i(k) = H_i^T(k)R_i^{-1}(k)z_i(k), i=1,...,p \quad (12.27)$$

Για το κατανεμημένο γραμμικό μοντέλο, όταν οι πίνακες  $F(k+1,k)$ ,  $H(k)$ ,  $Q(k)$ ,  $R(k)$  και  $B(k)$  είναι χρονικά μεταβαλλόμενοι, από τις εξισώσεις του μη κατανεμημένου χρονικά μεταβαλλόμενου φίλτρου Kalman, προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:

- για τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης

$$P(k/k) = \left[ P^{-1}(k/k-1) + \sum_{i=1}^p B_i(k) \right]^{-1} \quad (12.28)$$

- για την εκτίμηση

$$x(k/k) = P(k/k) \left[ P^{-1}(k/k-1)x(k/k-1) + \sum_{i=1}^p b_i(k) \right] \quad (12.29)$$

Για το χρονικά μεταβαλλόμενο μοντέλο, όπου οι πίνακες  $F(k+1,k)$ ,  $H(k)$ ,  $Q(k)$ ,  $R(k)$  και  $B(k)$  είναι χρονικά μεταβαλλόμενοι, προκύπτει το Κατανεμημένο Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο Kalman (Distributed Time Varying Kalman Filter):

<b>Κατανεμημένο Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο Kalman Distributed Time Varying Kalman Filter (DTVKF)</b>
--

*τοπικό επίπεδο (local level)*

$$B_i(k) = H_i^T(k)R_i^{-1}(k)H_i(k), i=1,...,p$$

$$b_i(k) = H_i^T(k)R_i^{-1}(k)z_i(k), i=1,...,p$$

*κεντρικό επίπεδο (central level)*

$$x(k/k) = P(k/k) \left[ P^{-1}(k/k-1)x(k/k-1) + \sum_{i=1}^p b_i(k) \right]$$

$$P(k/k) = \left[ P^{-1}(k/k-1) + \sum_{i=1}^p B_i(k) \right]^{-1}$$

$$x(k+1/k) = F(k+1,k)x(k/k) + B(k)u(k)$$

$$P(k+1/k) = Q(k) + F(k+1,k)P(k/k)F^T(k+1,k)$$

$$k = 0, 1, \dots$$

$$x(0/-1) = x_0$$

$$P(0/-1) = P_0$$

Για το κατανεμημένο γραμμικό μοντέλο, όταν οι πίνακες  $F(k+1,k) = F$ ,  $H(k) = H$ ,  $Q(k) = Q$ ,  $R(k) = R$  και  $B(k) = B$  είναι χρονικά αμετάβλητοι, από τις εξισώσεις του μη κατανεμημένου χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman, προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:

- για τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης

$$P(k/k) = \left[ P^{-1}(k/k-1) + \sum_{i=1}^p B_i \right]^{-1}, \quad (12.30)$$

όπου:

$$B_i = H_i^T R_i^{-1} H_i, i=1, \dots, p \quad (12.31)$$

- για την εκτίμηση

$$x(k/k) = P(k/k) \left[ P^{-1}(k/k-1)x(k/k-1) + \sum_{i=1}^p b_i(k) \right], \quad (12.32)$$

όπου:

$$b_i(k) = H_i^T R_i^{-1} z_i(k), i=1, \dots, p \quad (12.33)$$

Για το χρονικά αμετάβλητο μοντέλο, όπου οι πίνακες  $F(k+1, k) = F$ ,  $H(k) = H$ ,  $Q(k) = Q$ ,  $R(k) = R$  και  $B(k) = B$  είναι χρονικά αμετάβλητοι, προκύπτει το Κατανεμημένο Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman (Distributed Time Invariant Kalman Filter):

<b>Κατανεμημένο Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman Distributed Time Invariant Kalman Filter (DTIKF)</b>
<i>τοπικό επίπεδο (local level)</i>
$b_i(k) = H_i^T R_i^{-1} z_i(k), i=1, \dots, p$
<i>κεντρικό επίπεδο (central level)</i>
$x(k/k) = P(k/k) \left[ P^{-1}(k/k-1)x(k/k-1) + \sum_{i=1}^p b_i(k) \right]$
$P(k/k) = \left[ P^{-1}(k/k-1) + \sum_{i=1}^p B_i \right]^{-1}$
$x(k+1/k) = Fx(k/k) + Bu(k)$
$P(k+1/k) = Q + FP(k/k)F^T$
$k = 0, 1, \dots$
$x(0/-1) = x_0$
$P(0/-1) = P_0$

Οι σταθεροί πίνακες  $H_i^T R_i^{-1}, i=1, \dots, p$  στο τοπικό επίπεδο και οι σταθεροί πίνακες  $B_i = H_i^T R_i^{-1} H_i, i=1, \dots, p$  και  $\sum_{i=1}^p B_i$  στο κεντρικό επίπεδο υπολογίζονται εκ των προτέρων (off-line).

Στη μόνιμη κατάσταση προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:

- για την εκτίμηση

$$\begin{aligned} x(k/k) &= P_e \left[ P_p^{-1} x(k/k-1) + \sum_{i=1}^p b_i(k) \right] \\ &= P_e P_p^{-1} x(k/k-1) + P_e \sum_{i=1}^p b_i(k) \\ &= [I - KH] x(k/k-1) + P_e \sum_{i=1}^p b_i(k) \\ &= [I - KH] x(k/k-1) + \sum_{i=1}^p P_e b_i(k) \\ &= [I - KH] x(k/k-1) + \sum_{i=1}^p P_e H_i^T R_i^{-1} z_i(k) \end{aligned} \quad (12.34)$$

- για την πρόβλεψη

$$x(k+1/k) = Fx(k/k) + Bu(k) \quad (12.35)$$

Συνδυάζοντας τις (12.34) και (12.35) προκύπτει η παρακάτω επαναληπτική εξίσωση για την εκτίμηση:

$$x(k+1/k+1) = Ax(k/k) + Cu(k) + \sum_{i=1}^p d_i(k+1), \quad (12.36)$$

όπου:

$$A = [I - KH]F \quad (12.37)$$

$$C = [I - KH]B \quad (12.38)$$

$$d_i(k+1) = P_e H_i^T R_i z_i(k+1), i = 1, \dots, p \quad (12.39)$$

Η αρχική συνθήκη είναι:

$$x(0/0) = [I - KH]x(0/-1) + Kz(0) = [I - KH]x_0 + Kz(0)$$

Στη μόνιμη κατάσταση, προκύπτει το Κατανεμημένο Φίλτρο Kalman Μόνιμης Κατάστασης (Distributed Steady State Kalman Filter):

<b>Κατανεμημένο Φίλτρο Kalman Μόνιμης Κατάστασης Distributed Steady State Kalman Filter (NDSSKF)</b>
<p>τοπικό επίπεδο (<i>local level</i>)</p> $d_i(k+1) = P_e H_i^T R_i z_i(k+1), i = 1, \dots, p$ <p>κεντρικό επίπεδο (<i>central level</i>)</p> $x(k+1/k+1) = Ax(k/k) + Cu(k) + \sum_{i=1}^p d_i(k+1)$ $k = 0, 1, \dots$ $A = [I - KH]F$ $C = [I - KH]B$ $x(0/0) = [I - KH]x_0 + Kz(0)$

Οι σταθεροί πίνακες  $P_e H_i^T R_i, i = 1, \dots, p$  στο τοπικό επίπεδο υπολογίζονται εκ των προτέρων (off-line).

Οι συντελεστές του Μη Κατανεμημένου Φίλτρου Kalman Μόνιμης Κατάστασης, δηλαδή οι πίνακες  $A, C, d_i(k+1) = P_e H_i^T R_i z_i(k+1), i = 1, \dots, p$  υπολογίζονται εκ των προτέρων (off-line) επιλύοντας την εξίσωση Riccati και υπολογίζοντας το κέρδος  $K$  στη μόνιμη κατάσταση και τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης στη μόνιμη κατάσταση  $P_e$ .

## 12.4 Υπολογιστικός φόρτος μη κατανεμημένου και κατανεμημένου φίλτρου Kalman

Τα μη κατανεμημένα και τα κατανεμημένα φίλτρα Kalman υπολογίζουν επαναληπτικά την εκτίμηση. Επομένως, ο συνολικός **υπολογιστικός χρόνος** (**calculation time**) που απαιτείται για την υλοποίησή τους είναι:

$$t_{alg} = CB_{alg} s_{alg} t_{op}, \quad (12.40)$$

Όπου  $t_{op}$  είναι ο χρόνος που απαιτείται για την υλοποίηση μιας βαθμωτής πράξης (scalar operation),  $CB_{alg}$  είναι ο ανά επανάληψη **υπολογιστικός φόρτος** (**calculation burden**) του αλγορίθμου και  $s_{alg}$  είναι το πλήθος των επαναλήψεων που εκτελεί ο αλγόριθμος.

Δεν λαμβάνεται υπόψη ο υπολογιστικός φόρτος των εκ των προτέρων υπολογισμών (off-line calculations), όπως είναι η αρχικοποίηση των αλγορίθμων.

Η υλοποίηση των κατανεμημένων και των μη κατανεμημένων φίλτρων Kalman απαιτεί πράξεις πινάκων. Ο υπολογιστικός φόρτος (calculation burden) των πράξεων πινάκων εξαρτάται από τις διαστάσεις των πινάκων. Στις πράξεις πινάκων εμπλέκονται βαθμωτές πράξεις (scalar operations), των οποίων οι υπολογιστικοί φόρτοι θεωρούνται ίσοι μεταξύ τους. Ο υπολογιστικός φόρτος των πράξεων με πίνακες [Assimakis & Adam (2007)], για τη γενική πολυδιάστατη (multidimensional) περίπτωση, έχει παρουσιαστεί στον Πίνακα 8.1.

Τα κατανεμημένα φίλτρα έχουν νόημα σε περιβάλλον πολλαπλών αισθητήρων (multi-sensor environment), όπου το διάνυσμα μετρήσεων  $z(k)$  διάστασης  $m$  χωρίζεται σε  $p$  μέρη (parts)  $z_i(k), i=1, \dots, p$ . Οπότε, τα κατανεμημένα φίλτρα έχουν νόημα, όταν  $m \geq 2$ .

Στα μη κατανεμημένα φίλτρα Kalman, όλοι οι υπολογισμοί γίνονται σε έναν κεντρικό επεξεργαστή. Ο υπολογιστικός φόρτος εξαρτάται από τη διάσταση  $n$  του διανύσματος κατάστασης και από τη διάσταση  $m$  του διανύσματος μετρήσεων.

Στον Πίνακα 12.1 παρουσιάζεται ο ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος του μη κατανεμημένου χρονικά μεταβαλλόμενου φίλτρου Kalman.

Μη Κατανεμημένο Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο Kalman Non Distributed Time Varying Kalman Filter (NDTVKF)		
Πράξη Πινάκων	Διαστάσεις Πινάκων	Υπολογιστικός Φόρτος
<b>τοπικό επίπεδο (local level)</b>		
$R^{-1}(k)$	$(m \times m)^{-1}$	$\frac{1}{6}(16m^3 - 3m^2 - m)$
$H^T(k)R^{-1}(k)$	$(n \times m) \cdot (m \times m)$	$2nm^2 - nm$
$H^T(k)R^{-1}(k)H(k)$	$(n \times m) \cdot (m \times n)$	$n^2m + nm - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$P^{-1}(k+1/k)$	$(n \times n)^{-1}$	$\frac{1}{6}(16n^3 - 3n^2 - n)$
$P^{-1}(k+1/k) + H^T(k)R^{-1}(k)H(k)$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$P(k/k) = [P^{-1}(k/k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)H(k)]^{-1}$	$(n \times n)^{-1}$	$\frac{1}{6}(16n^3 - 3n^2 - n)$
$P^{-1}(k+1/k)x(k/k-1)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$H^T(k)R^{-1}(k)z(k)$	$(n \times m) \cdot (m \times 1)$	$2nm - n$
$P^{-1}(k+1/k)x(k/k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)z(k)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$x(k/k) = P(k/k)[P^{-1}(k/k-1)x(k/k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)z(k)]$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$F(k+1,k)x(k/k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$B(k)u(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$x(k+1/k) = F(k+1,k)x(k/k) + B(k)u(k)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$F(k+1,k)P(k/k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$[F(k+1,k)P(k/k)]F^T(k+1,k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$P(k+1/k) = Q(k) + F(k+1,k)P(k/k)F^T(k+1,k)$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$n \geq 2$	$CB_{NDTVKF} = \frac{1}{6}(50n^3 + 42n^2 - 20n) + n^2m + 2nm + 2nm^2 + \frac{1}{6}(16m^3 - 3m^2 - m)$	
$n = 1$	$CB_{NDTVKF} = \frac{1}{6}(16m^3 + 9m^2 + 17m + 54)$	

**Πίνακας 12.1** Μη κατανεμημένο χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman.  
Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος.

Για  $n=1$ ,  $FP(k/k)F^T = F^2P(k/k)$  όπου  $F^2$  υπολογίζεται off-line.

Στον Πίνακα 12.2 παρουσιάζεται ο ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος του μη κατανεμημένου χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman.

Μη Κατανεμημένο Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman Non Distributed Time Invariant Kalman Filter (NDTIKF)		
Πράξη Πινάκων	Διαστάσεις Πινάκων	Υπολογιστικός Φόρτος
<b>τοπικό επίπεδο (local level)</b>		
$P^{-1}(k+1/k)$	$(n \times n)^{-1}$	$\frac{1}{6}(16n^3 - 3n^2 - n)$
$P^{-1}(k+1/k) + H^T R^{-1} H$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$P(k/k) = [P^{-1}(k/k-1) + H^T R^{-1} H]^{-1}$	$(n \times n)^{-1}$	$\frac{1}{6}(16n^3 - 3n^2 - n)$
$P^{-1}(k+1/k)x(k/k-1)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$H^T R^{-1} z(k)$	$(n \times m) \cdot (m \times 1)$	$2nm - n$
$P^{-1}(k+1/k)x(k/k-1) + H^T R^{-1} z(k)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$x(k/k) = P(k/k)[P^{-1}(k/k-1)x(k/k-1) + H^T R^{-1} z(k)]$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$Fx(k/k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$Bu(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$x(k+1/k) = Fx(k/k) + Bu(k)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$FP(k/k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$[FP(k/k)]F^T$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$P(k+1/k) = Q + FP(k/k)F^T$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$n \geq 2$	$CB_{NDTIKF} = \frac{1}{6}(50n^3 + 45n^2 - 17n) + 2nm$	
$n = 1$	$CB_{NDTIKF} = 2m + 10$	

Για  $n=1$ ,  $FP(k/k)F^T = F^2 P(k/k)$  όπου  $F^2$  υπολογίζεται off-line.

**Πίνακας 12.2** Μη κατανεμημένο χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman.  
Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος.

Στον Πίνακα 12.3 παρουσιάζεται ο ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος του μη κατανεμημένου φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης.

Μη Κατανεμημένο Φίλτρο Kalman Μόνιμης κατάστασης Non Distributed Steady State Kalman Filter (NDSSKF)		
Πράξη Πινάκων	Διαστάσεις Πινάκων	Υπολογιστικός Φόρτος
$Ax(k/k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$Cu(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$Kz(k+1)$	$(n \times m) \cdot (m \times 1)$	$2nm - n$
$Ax(k/k) + Cu(k)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$x(k+1/k+1) = Ax(k/k) + Cu(k) + Kz(k+1)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$CB_{NDSSKF} = 4n^2 - n + 2nm$		

**Πίνακας 12.3** Μη κατανεμημένο φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης.  
Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος.

Στα κατανεμημένα φίλτρα Kalman, οι υπολογισμοί του τοπικού επιπέδου γίνονται στους τοπικούς επεξεργαστές και οι υπολογισμοί του κεντρικού επιπέδου σε έναν κεντρικό επεξεργαστή. Ο υπολογιστικός

φόρτος εξαρτάται από το πλήθος  $p$  των επεξεργαστών, από τη διάσταση  $n$  του διανύσματος κατάστασης και από τη μέγιστη διάσταση  $M$  από τα τοπικά διανύσματα μετρήσεων, όπου:

$$M = \max \{m_i\}, i=1, \dots, p \quad (12.41)$$

Στον Πίνακα 12.4 παρουσιάζεται ο ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος του κατανεμημένου χρονικά μεταβαλλόμενου φίλτρου Kalman.

Κατανεμημένο Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο Kalman Distributed Time Varying Kalman Filter (DTVKF)		
Πράξη Πινάκων	Διαστάσεις Πινάκων	Υπολογιστικός Φόρτος
<b>τοπικό επίπεδο (local level)</b>		
$R_i^{-1}(k), i=1, \dots, p$	$(M \times M)^{-1}$	$\frac{1}{6}(16M^3 - 3M^2 - M)$
$H_i^T(k)R_i^{-1}(k), i=1, \dots, p$	$(n \times M) \cdot (M \times M)$	$2nM^2 - nM$
$B_i(k) = H_i^T(k)R_i^{-1}(k)H_i(k), i=1, \dots, p$	$(n \times M) \cdot (M \times n)$	$n^2M + nM - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$b_i(k) = H_i^T(k)R_i^{-1}(k)z_i(k), i=1, \dots, p$	$(n \times M) \cdot (M \times 1)$	$2nM - n$
<b>κεντρικό επίπεδο (central level)</b>		
$P^{-1}(k+1/k)$	$(n \times n)^{-1}$	$\frac{1}{6}(16n^3 - 3n^2 - n)$
$\sum_{i=1}^p B_i(k)$	$(n \times n) + (n \times n) + \dots + (n \times n)$	$\left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right)(p-1)$
$P^{-1}(k+1/k) + \sum_{i=1}^p B_i(k)$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$P(k/k) = \left[ P^{-1}(k/k-1) + \sum_{i=1}^p B_i(k) \right]^{-1}$	$(n \times n)^{-1}$	$\frac{1}{6}(16n^3 - 3n^2 - n)$
$P^{-1}(k/k-1)x(k/k-1)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$\sum_{i=1}^p b_i(k)$	$(n \times 1) + (n \times 1) + \dots + (n \times 1)$	$n(p-1)$
$P^{-1}(k+1/k)x(k/k-1) + \sum_{i=1}^p b_i(k)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$x(k/k) = P(k/k) \left[ P^{-1}(k/k-1)x(k/k-1) + \sum_{i=1}^p b_i(k) \right]$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$F(k+1,k)x(k/k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$B(k)u(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$x(k+1/k) = F(k+1,k)x(k/k) + B(k)u(k)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$F(k+1,k)P(k/k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$[F(k+1,k)P(k/k)]F^T(k+1,k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$P(k+1/k) = Q(k) + F(k+1,k)P(k/k)F^T(k+1,k)$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$n \geq 2$	$CB_{DTVKF} = \frac{1}{6}(50n^3 + 39n^2 - 29n) + \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n\right)p + n^2M + 2nM + 2nM^2 + \frac{1}{6}(16M^3 - 3M^2 - M)$	
$n = 1$	$CB_{DTVKF} = \frac{1}{6}(16M^3 + 9M^2 + 17M + 48) + 2p$	

**Πίνακας 12.4** Κατανεμημένο χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman.  
Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος.

Στον Πίνακα 12.5 παρουσιάζεται ο ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος του κατανεμημένου χρονικά αμετάβλητου φύλτρου Kalman.

Κατανεμημένο Χρονικά Αμετάβλητο Φύλτρο Kalman Distributed Time Invariant Kalman Filter (DTIKF)		
Πράξη Πινάκων	Διαστάσεις Πινάκων	Υπολογιστικός Φόρτος
<b>τοπικό επίπεδο (local level)</b>		
$b_i(k) = H_i^T R_i^{-1} z_i(k), i = 1, \dots, p$	$(n \times M) \cdot (M \times 1)$	$2nM - n$
<b>κεντρικό επίπεδο (central level)</b>		
$P^{-1}(k+1/k)$	$(n \times n)^{-1}$	$\frac{1}{6}(16n^3 - 3n^2 - n)$
$P^{-1}(k+1/k) + \sum_{i=1}^p B_i$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$P(k/k) = \left[ P^{-1}(k/k-1) + \sum_{i=1}^p B_i \right]^{-1}$	$(n \times n)^{-1}$	$\frac{1}{6}(16n^3 - 3n^2 - n)$
$P^{-1}(k/k-1)x(k/k-1)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$\sum_{i=1}^p b_i$	$(n \times 1) + (n \times 1) + \dots + (n \times 1)$	$n(p-1)$
$P^{-1}(k+1/k)x(k/k-1) + \sum_{i=1}^p b_i$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$x(k/k) = P(k/k) \left[ P^{-1}(k/k-1)x(k/k-1) + \sum_{i=1}^p b_i \right]$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$Fx(k/k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$Bu(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$x(k+1/k) = Fx(k/k) + Bu(k)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$FP(k/k)$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$[FP(k/k)]F^T$	$(n \times n) \cdot (n \times n)$	$n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$P(k+1/k) = Q + FP(k/k)F^T$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$n \geq 2$	$CB_{DTIKF} = \frac{1}{6}(50n^3 + 45n^2 - 23n) + 2nM + np$	
$n = 1$	$CB_{DTIKF} = 2M + p + 9$	

Για  $n = 1$ ,  $FP(k/k)F^T = F^2P(k/k)$  όπου  $F^2$  υπολογίζεται off-line.

**Πίνακας 12.5** Κατανεμημένο χρονικά αμετάβλητο φύλτρο Kalman.  
Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος.

Στον Πίνακα 12.6 παρουσιάζεται ο ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος του κατανεμημένου φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης.

Κατανεμημένο Φίλτρο Kalman Μόνιμης Κατάστασης Distributed Steady State Kalman Filter (DSSKF)		
Πράξη Πινάκων	Διαστάσεις Πινάκων	Υπολογιστικός Φόρτος
<b>τοπικό επίπεδο (local level)</b>		
$d_i(k+1) = P_e H_i^T R_i z_i(k+1), i=1, \dots, p$	$(n \times M) \cdot (M \times 1)$	$2nM - n$
<b>κεντρικό επίπεδο (central level)</b>		
$Ax(k / k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$Cu(k)$	$(n \times n) \cdot (n \times 1)$	$2n^2 - n$
$Ax(k / k) + Cu(k)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$\sum_{i=1}^p d_i(k+1)$	$(n \times 1) + (n \times 1) + \dots + (n \times 1)$	$n(p-1)$
$x(k+1 / k+1) = Ax(k / k) + Cu(k) + \sum_{i=1}^p d_i(k+1)$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$CB_{DSSKF} = 4n^2 - 2n + 2nM + np$		

Πίνακας 12.6 Κατανεμημένο φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης.

Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος.

Στον πίνακα 12.7 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι ανά επανάληψη υπολογιστικοί φόρτοι των μη κατανεμημένων και των κατανεμημένων φίλτρων Kalman, για τη γενική πολυδιάστατη (multi-dimensional) περίπτωση, όπου  $n \geq 2, m \geq 2$ .

Φίλτρο	Μοντέλο	Υπολογιστικός Φόρτος
μη κατανεμημένο	Χρονικά Μεταβαλλόμενο	$CB_{NDTVKF} = \frac{1}{6}(50n^3 + 42n^2 - 20n) + n^2m + 2nm + 2nm^2 + \frac{1}{6}(16m^3 - 3m^2 - m)$
	Χρονικά Αμετάβλητο	$CB_{NDTIKF} = \frac{1}{6}(50n^3 + 45n^2 - 17n) + 2nm$
	Μόνιμη Κατάσταση	$CB_{NDSSKF} = 4n^2 - n + 2nm$
κατανεμημένο	Χρονικά Μεταβαλλόμενο	$CB_{DTVKF} = \frac{1}{6}(50n^3 + 39n^2 - 29n) + \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n\right)p + n^2M + 2nM + 2nM^2 + \frac{1}{6}(16M^3 - 3M^2 - M)$
	Χρονικά Αμετάβλητο	$CB_{DTIKF} = \frac{1}{6}(50n^3 + 45n^2 - 23n) + 2nM + np$
	Μόνιμη Κατάσταση	$CB_{DSSKF} = 4n^2 - 2n + 2nM + np$

Πίνακας 12.7 Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος μη κατανεμημένων και κατανεμημένων φίλτρων Kalman.  
Ανά επανάληψη υπολογιστικός φόρτος.

Είναι προφανές ότι σε μονοεπεργαστικό περιβάλλον, ο υπολογιστικός φόρτος του μη κατανεμημένου φίλτρου Kalman γίνεται ίσος με τον υπολογιστικό φόρτο του κατανεμημένου φίλτρου Kalman για  $p=1$  και  $M=m$ .

## 12.5 Προσδιορισμός του βέλτιστου κατανεμημένου φίλτρου Kalman

Τα κατανεμημένα φίλτρα Kalman είναι επαναληπτικοί αλγόριθμοι. Υπό την προϋπόθεση ότι χρησιμοποιούνται ίδιες αρχικές συνθήκες, τα κατανεμημένα φίλτρα Kalman εκτελούν ίσο πλήθος επαναλήψεων για να υπολογίζουν την εκτίμηση σε κάποια χρονική στιγμή. Επομένως, προκειμένου να συγκρίνουμε τους υπολογιστικούς χρόνους των κατανεμημένα φίλτρων, συγκρίνουμε τους υπολογιστικούς φόρτους των κατανεμημένα φίλτρων.

Η ελαχιστοποίηση του υπολογιστικού χρόνου των κατανεμημένου φίλτρου Kalman οδηγεί στην επιλογή του βέλτιστου κατανεμημένου φίλτρου Kalman. Είναι προφανές ότι προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί ο υπολογιστικός χρόνος του κατανεμημένου φίλτρου Kalman, πρέπει να ελαχιστοποιηθεί ο υπολογιστικός φόρτος του κατανεμημένου φίλτρου Kalman. Από τον Πίνακα 12.7 είναι σαφές ότι ο υπολογιστικός φόρτος του κατανεμημένου φίλτρου Kalman εξαρτάται από το πλήθος των επεξεργαστών  $p$  και το μέγιστο πλήθος των μετρήσεων  $M$  σε κάθε επεξεργαστή. Επομένως, για τον προσδιορισμό του βέλτιστου κατανεμημένου φίλτρου Kalman παίζει ρόλο η κατανομή των  $m$  μετρήσεων στους  $p$  παράλληλους επεξεργαστές.

Όταν  $p=1$  και  $M=m$ , προκύπτει η ειδική κατανομή με χρήση ενός επεξεργαστή που επεξεργάζεται όλες τις μετρήσεις, δηλαδή δεν υπάρχει παράλληλη υλοποίηση του φίλτρου Kalman.

Όταν  $p=M$  και  $M=1$ , προκύπτει η ειδική κατανομή με χρήση ενός επεξεργαστή την επεξεργασία κάθε μέτρησης, δηλαδή δεν υπάρχει πλήρης παράλληλη υλοποίηση του φίλτρου Kalman.

**Ομοιόμορφη κατανομή των μετρήσεων στους παράλληλους επεξεργαστές.**

Ισχύει η υπόθεση (**assumption**):

Το διάνυσμα των μετρήσεων χωρίζεται σε  $p$  ίσα μέρη, επομένως, έχουμε **ομοιόμορφη κατανομή (uniform distribution)** των μετρήσεων στους παράλληλους επεξεργαστές.

Τότε, είναι προφανές ότι ισχύει η σχέση:

$$m_i = M, i = 1, \dots, p \quad (12.42)$$

Από τη σχέση (12.4) προκύπτει:

$$p \cdot M = m \quad (12.43)$$

Η ομοιόμορφη κατανομή των μετρήσεων στους παράλληλους επεξεργαστές έχει τα παρακάτω πλεονεκτήματα [Assimakis, Adam, Koziri & Voliotis (2009)]:

- Όλοι οι παράλληλοι τοπικοί επεξεργαστές κάνουν τους ίδιους υπολογισμούς που αφορούν ποσότητες ίδιου τύπου και ίσων διαστάσεων. Έτσι, οι τοπικοί επεξεργαστές έχουν την ίδια δομή (structure) και, επομένως, η παράλληλη υλοποίηση του κατανεμημένου φίλτρου Kalman απαιτεί χαμηλού κόστους υλικό (low hardware cost).
- Κανένας επεξεργαστής δεν μένει άεργος (idle).

Από τον Πίνακα 12.7 προκύπτει ότι ο υπολογιστικός φόρτος των κατανεμημένων φίλτρων Kalman εξαρτάται από το πλήθος των επεξεργαστών  $p$  και το μέγιστο πλήθος των μετρήσεων  $M$  σε κάθε επεξεργαστή. Επιπλέον, ισχύει η σχέση (12.43) που συνδέει το πλήθος των επεξεργαστών  $p$  και το μέγιστο πλήθος των μετρήσεων  $M$  σε κάθε επεξεργαστή. Επομένως, ο υπολογιστικός φόρτος των κατανεμημένων φίλτρων Kalman μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση των πλήθους των επεξεργαστών  $p$  ή ως συνάρτηση του μέγιστου πλήθους των μετρήσεων  $M$  σε κάθε επεξεργαστή.

Υπολογίζοντας τις παραγώγους των υπολογιστικών φόρτων των κατανεμημένων φίλτρων Kalman ως προς  $p$  ή  $M$  μπορούμε να προσδιορίσουμε το βέλτιστο κατανεμημένο φίλτρο Kalman ευρίσκοντας τη **βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή (optimal uniform distribution)** των μετρήσεων στους επεξεργαστές, η οποία είναι η χρήση  $p_{opt}$  επεξεργαστών που επεξεργάζονται  $M_{opt}$  μετρήσεις ο καθένας.

Για το κατανεμημένο χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman έχουμε:

$$CB_{DTVKF} = \frac{1}{6} (50n^3 + 39n^2 - 29n) + \left( \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n \right)p + n^2M + 2nM + 2nM^2 + \frac{1}{6} (16M^3 - 3M^2 - M) \quad (12.44)$$

Θεωρώντας τον υπολογιστικό φόρτο ως συνάρτηση του πλήθους των επεξεργαστών  $p$ , προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 CB_{DTVKF} &= \frac{1}{6} \left( 50n^3 + 39n^2 - 29n \right) + \left( \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n \right)p + n^2 \left( \frac{m}{p} \right) + 2n \left( \frac{m}{p} \right)^2 + \frac{1}{6} \left( 16 \left( \frac{m}{p} \right)^3 - 3 \left( \frac{m}{p} \right)^2 - \left( \frac{m}{p} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{6} \left( 50n^3 + 39n^2 - 29n \right) + \left( \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n \right)p + \left( n^2 + 2n - \frac{1}{6} \right) \left( \frac{m}{p} \right) + \left( 2n - \frac{3}{6} \right) \left( \frac{m}{p} \right)^2 + \frac{16}{6} \left( \frac{m}{p} \right)^3 \\
 \frac{\partial}{\partial p} CB_{DTVKF} &= \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{6} \left( 50n^3 + 39n^2 - 29n \right) + \left( \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n \right)p + \left( n^2 + 2n - \frac{1}{6} \right) \left( \frac{m}{p} \right) + \left( 2n - \frac{3}{6} \right) \left( \frac{m}{p} \right)^2 + \frac{16}{6} \left( \frac{m}{p} \right)^3 \right) \\
 &= \left( \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n \right) - \left( n^2 + 2n - \frac{1}{6} \right)m \frac{1}{p^2} - \left( 2n - \frac{3}{6} \right)m^2 \frac{2}{p^3} - \frac{16}{6}m^3 \frac{3}{p^4} \\
 &= \left( \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n \right) - \left( n^2 + 2n - \frac{1}{6} \right)m \frac{1}{p^2} - (4n-1)m^2 \frac{1}{p^3} - 8m^3 \frac{1}{p^4} \\
 \frac{\partial^2}{\partial p^2} CB_{DTVKF} &= \frac{\partial}{\partial p} \left( \left( \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n \right) - \left( n^2 + 2n - \frac{1}{6} \right)m \frac{1}{p^2} - (4n-1)m^2 \frac{1}{p^3} - 8m^3 \frac{1}{p^4} \right) \\
 &= \left( n^2 + 2n - \frac{1}{6} \right)m \frac{2}{p^3} + (4n-1)m^2 \frac{3}{p^4} + 8m^3 \frac{4}{p^5} > 0 \\
 \frac{\partial}{\partial p} CB_{DTVKF} &= 0 \Rightarrow \left( \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n \right) - \left( n^2 + 2n - \frac{1}{6} \right)m \frac{1}{p^2} - (4n-1)m^2 \frac{1}{p^3} - 8m^3 \frac{1}{p^4} = 0 \\
 &\Rightarrow \left( \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n \right)p^4 - \left( n^2 + 2n - \frac{1}{6} \right)mp^2 - (4n-1)m^2 p - 8m^3 = 0
 \end{aligned}$$

Θεωρώντας τον υπολογιστικό φόρτο ως συνάρτηση του μέγιστου πλήθους των μετρήσεων  $M$  σε κάθε επεξεργαστή, προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 CB_{DTVKF} &= \frac{1}{6} \left( 50n^3 + 39n^2 - 29n \right) + \left( \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n \right) \left( \frac{m}{M} \right) + n^2 M + 2nM + 2nM^2 + \frac{1}{6} \left( 16M^3 - 3M^2 - M \right) \\
 &= \frac{1}{6} \left( 50n^3 + 39n^2 - 29n \right) + \left( \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n \right) \left( \frac{m}{M} \right) + \left( n^2 + 2n - \frac{1}{6} \right)M + \left( 2n - \frac{3}{6} \right)M^2 + \frac{16}{6}M^3 \\
 \frac{\partial}{\partial M} CB_{DTVKF} &= \frac{\partial}{\partial M} \left( \frac{1}{6} \left( 50n^3 + 39n^2 - 29n \right) + \left( \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n \right) \left( \frac{m}{M} \right) + \left( n^2 + 2n - \frac{1}{6} \right)M + \left( 2n - \frac{3}{6} \right)M^2 + \frac{16}{6}M^3 \right) \\
 &= - \left( \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n \right)m \frac{1}{M^2} + \left( n^2 + 2n - \frac{1}{6} \right) + 2 \left( 2n - \frac{3}{6} \right)M + \frac{16}{6}3M^2 \\
 &= - \left( \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n \right)m \frac{1}{M^2} + \left( n^2 + 2n - \frac{1}{6} \right) + (4n-1)M + 8M^2 \\
 \frac{\partial^2}{\partial M^2} CB_{DTVKF} &= \frac{\partial}{\partial M} \left( - \left( \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n \right)m \frac{1}{M^2} + \left( n^2 + 2n - \frac{1}{6} \right) + (4n-1)M + 8M^2 \right) \\
 &= \left( \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n \right)m \frac{2}{M^3} + (4n-1) + 16M > 0 \\
 \frac{\partial}{\partial M} CB_{DTVKF} &= 0 \Rightarrow - \left( \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n \right)m \frac{1}{M^2} + \left( n^2 + 2n - \frac{1}{6} \right) + (4n-1)M + 8M^2 = 0 \\
 &\Rightarrow 8M^4 + (4n-1)M^3 + \left( n^2 + 2n - \frac{1}{6} \right)M^2 - \left( \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n \right)m = 0
 \end{aligned}$$

Για το κατανεμημένο χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman, η βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή (optimal uniform distribution) των μετρήσεων στους επεξεργαστές είναι η χρήση  $p_{opt}$  επεξεργαστών που επεξεργάζονται  $M_{opt}$  μετρήσεις ο καθένας, όπου:

$p_{opt}$  είναι η θετική λύση της εξίσωσης

$$\left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n\right)p^4 - \left(n^2 + 2n - \frac{1}{6}\right)mp^2 - (4n-1)m^2p - 8m^3 = 0 \quad (12.45)$$

και

$M_{opt}$  είναι η θετική λύση της εξίσωσης

$$8M^4 + (4n-1)M^3 + \left(n^2 + 2n - \frac{1}{6}\right)M^2 - \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n\right)m = 0 \quad (12.46)$$

Επομένως, για το κατανεμημένο χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman, η βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή (optimal uniform distribution) των μετρήσεων στους επεξεργαστές, που είναι η χρήση  $p_{opt}$  επεξεργαστών που επεξεργάζονται  $M_{opt}$  μετρήσεις ο καθένας, καθορίζεται εκ των προτέρων (a-priori), δηλαδή, πριν την υλοποίηση του φίλτρου, επιλύοντας τις πολυωνυμικές εξισώσεις (12.45) και (12.46) με συντελεστές που εξαρτώνται από τη διάσταση  $n$  του διανύσματος κατάστασης και από τη διάσταση  $m$  του διανύσματος μετρήσεων.

Για το κατανεμημένο χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman έχουμε:

$$CB_{DTIKF} = \frac{1}{6}(50n^3 + 45n^2 - 23n) + 2nM + np \quad (12.47)$$

Θεωρώντας τον υπολογιστικό φόρτο ως συνάρτηση του πλήθους των επεξεργαστών  $p$ , προκύπτει:

$$CB_{DTIKF} = \frac{1}{6}(50n^3 + 45n^2 - 23n) + 2n \frac{m}{p} + np$$

$$\frac{\partial}{\partial p} CB_{DTIKF} = \frac{\partial}{\partial p} \left( 2n \frac{m}{p} + np \right) = -\frac{2nm}{p^2} + n$$

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2} CB_{DTIKF} = \frac{\partial}{\partial p} \left( -\frac{2nm}{p^2} + n \right) = \frac{4nm}{p^3} > 0$$

$$\frac{\partial}{\partial p} CB_{DTIKF} = 0 \Rightarrow -\frac{2nm}{p^2} + n = 0 \Rightarrow \left( \frac{2m}{p^2} - 1 \right)n = 0 \Rightarrow p^2 - 2m = 0 \Rightarrow p = \sqrt{2m}$$

Θεωρώντας τον υπολογιστικό φόρτο ως συνάρτηση του μέγιστου πλήθους των μετρήσεων  $M$  σε κάθε επεξεργαστή, προκύπτει:

$$CB_{DTIKF} = \frac{1}{6}(50n^3 + 45n^2 - 23n) + 2nM + n \frac{m}{M}$$

$$\frac{\partial}{\partial M} CB_{DTIKF} = \frac{\partial}{\partial M} \left( 2nM + n \frac{m}{M} \right) = 2n - \frac{nm}{M^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial M^2} CB_{DTIKF} = \frac{\partial}{\partial M} \left( 2n - \frac{nm}{M^2} \right) = \frac{4nm}{M^3} > 0$$

$$\frac{\partial}{\partial M} CB_{DTIKF} = 0 \Rightarrow 2n - \frac{nm}{M^2} = 0 \Rightarrow \left( \frac{m}{M^2} - 2 \right)n = 0 \Rightarrow M^2 - \frac{m}{2} = 0 \Rightarrow M = \sqrt{\frac{m}{2}}$$

Για το κατανεμημένο χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman, η βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή (optimal uniform distribution) των μετρήσεων στους επεξεργαστές είναι η χρήση  $p_{opt}$  επεξεργαστών που επεξεργάζονται  $M_{opt}$  μετρήσεις ο καθένας, όπου:

$p_{opt}$  είναι η θετική λύση της εξίσωσης

$$p^2 - 2m = 0 \quad (12.48)$$

δηλαδή,

$$p_{opt} = \sqrt{2m} \quad (12.49)$$

και

$M_{opt}$  είναι η θετική λύση της εξίσωσης

$$M^2 - \frac{m}{2} = 0 \quad (12.50)$$

δηλαδή,

$$M_{opt} = \sqrt{\frac{m}{2}} \quad (12.51)$$

Επομένως, για το κατανεμημένο χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman, η βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή (optimal uniform distribution) των μετρήσεων στους επεξεργαστές, που είναι η χρήση  $p_{opt} = \sqrt{2m}$  επεξεργαστών που επεξεργάζονται  $M_{opt} = \sqrt{\frac{m}{2}}$  μετρήσεις ο καθένας, καθορίζεται εκ των προτέρων (a-priori), δηλαδή, πριν την υλοποίηση του φίλτρου, επιλύοντας τις πολυωνυμικές εξισώσεις (12.48) και (12.50) με συντελεστές που εξαρτώνται από τη διάσταση  $m$  του διανύσματος μετρήσεων.

Για το κατανεμημένο φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης έχουμε:

$$CB_{DSSKF} = 4n^2 - 2n + 2nM + np \quad (12.52)$$

Θεωρώντας τον υπολογιστικό φόρτο ως συνάρτηση του πλήθους των επεξεργαστών  $p$ , προκύπτει:

$$\begin{aligned} CB_{DSSKF} &= 4n^2 - 2n + 2n \frac{m}{p} + np \\ \frac{\partial}{\partial p} CB_{DSSKF} &= \frac{\partial}{\partial p} \left( 4n^2 - 2n + 2n \frac{m}{p} + np \right) = -\frac{2nm}{p^2} + n \\ \frac{\partial^2}{\partial p^2} CB_{DSSKF} &= \frac{\partial}{\partial p} \left( -\frac{2nm}{p^2} + n \right) = \frac{4nm}{p^3} > 0 \\ \frac{\partial}{\partial p} CB_{DSSKF} &= 0 \Rightarrow -\frac{2nm}{p^2} + n = 0 \Rightarrow \left( \frac{2m}{p^2} - 1 \right) n = 0 \Rightarrow p^2 - 2m = 0 \Rightarrow p = \sqrt{2m} \end{aligned}$$

Θεωρώντας τον υπολογιστικό φόρτο ως συνάρτηση του μέγιστου πλήθους των μετρήσεων  $M$  σε κάθε επεξεργαστή, προκύπτει:

$$CB_{DSSKF} = 4n^2 - 2n + 2nM + n \frac{m}{M}$$

$$\frac{\partial}{\partial M} CB_{DSSKF} = \frac{\partial}{\partial M} \left( 4n^2 - 2n + 2nM + n \frac{m}{M} \right) = 2n - \frac{2nm}{M^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial M^2} CB_{DSSKF} = \frac{\partial}{\partial M} \left( 2n - \frac{nm}{M^2} \right) = \frac{4nm}{M^3} > 0$$

$$\frac{\partial}{\partial M} CB_{DSSKF} = 0 \Rightarrow 2n - \frac{nm}{M^2} = 0 \Rightarrow \left( \frac{m}{M^2} - 2 \right) n = 0 \Rightarrow M^2 - \frac{m}{2} = 0 \Rightarrow M = \sqrt{\frac{m}{2}}$$

Για το κατανεμημένο φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης, η βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή (optimal uniform distribution) των μετρήσεων στους επεξεργαστές είναι η χρήση  $P_{opt}$  επεξεργαστών που επεξεργάζονται  $M_{opt}$  μετρήσεις ο καθένας, όπου:

$P_{opt}$  είναι η θετική λύση της εξίσωσης

$$P^2 - 2m = 0 \quad (12.53)$$

δηλαδή,

$$P_{opt} = \sqrt{2m} \quad (12.54)$$

και

$M_{opt}$  είναι η θετική λύση της εξίσωσης

$$M^2 - \frac{m}{2} = 0 \quad (12.55)$$

δηλαδή,

$$M_{opt} = \sqrt{\frac{m}{2}} \quad (12.56)$$

Επομένως, για το κατανεμημένο φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης, η βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή (optimal uniform distribution) των μετρήσεων στους επεξεργαστές, η οποία είναι η χρήση  $P_{opt} = \sqrt{2m}$

επεξεργαστών που επεξεργάζονται  $M_{opt} = \sqrt{\frac{m}{2}}$  μετρήσεις ο καθένας, καθορίζεται εκ των προτέρων (a-priori), δηλαδή, πριν την υλοποίηση του φίλτρου, επιλύοντας τις πολυωνυμικές εξισώσεις (12.53) και (12.55) με συντελεστές που εξαρτώνται από τη διάσταση  $m$  του διανύσματος μετρήσεων.

Η βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή (optimal uniform distribution), η οποία είναι η χρήση επεξεργαστών που επεξεργάζονται  $M_{opt}$  μετρήσεις ο καθένας, έχει το μειονέκτημα ότι δεν είναι πάντα εφαρμόσιμη [Assimakis, Adam, Koziri, Voliotis & Asimakis (2013)], γιατί πρέπει το βέλτιστο πλήθος  $P_{opt}$  των επεξεργαστών και το βέλτιστο πλήθος  $M_{opt}$  των μετρήσεων που επεξεργάζεται ο κάθε επεξεργαστής να είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Οι θετικές λύσεις, όμως, των πολυωνυμικών εξισώσεων που καθορίζουν το βέλτιστο πλήθος  $P_{opt}$  των επεξεργαστών και το βέλτιστο πλήθος  $M_{opt}$  των μετρήσεων που επεξεργάζεται ο κάθε επεξεργαστής, είναι πραγματικοί αριθμοί. Όταν οι λύσεις των πολυωνυμικών εξισώσεων είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί, τότε προκύπτει η βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή, η οποία είναι εφαρμόσιμη. Όταν οι λύσεις των πολυωνυμικών εξισώσεων δεν είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί, τότε η βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή προσδιορίζεται αναζητώντας τον ελάχιστο υπολογιστικό φόρτο όλων των ομοιόμορφων κατανομών [Assimakis, Adam, Koziri, Voliotis & Asimakis (2013)]. Αν προκύψουν δύο ομοιόμορφες κατανομές με τον ελάχιστο υπολογιστικό φόρτο, τότε επιλέγεται η κατανομή με το μικρότερο πλήθος επεξεργαστών, προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί το κόστος υλικού (hardware cost).

Η **επιτάχυνση παραλληλισμού (parallelism speedup)** του κατανεμημένου φίλτρου Kalman ορίζεται ως ο λόγος του υπολογιστικού χρόνου του μη κατανεμημένου φίλτρου Kalman προς τον υπολογιστικό χρόνο του κατανεμημένου φίλτρου Kalman, που προφανώς είναι ίσος με τον λόγο του υπολογιστικού φόρτου του μη κατανεμημένου φίλτρου Kalman προς τον υπολογιστικό φόρτο του κατανεμημένου φίλτρου Kalman:

$$speedup_{TVKF} = \frac{t_{NDTVKF}}{t_{DTVKF}} = \frac{CB_{NDTVKF}}{CB_{DTVKF}} \quad (12.57)$$

$$speedup_{TIKF} = \frac{t_{NDTIKF}}{t_{DTIKF}} = \frac{CB_{NDTIKF}}{CB_{DTIKF}} \quad (12.58)$$

$$speedup_{SSKF} = \frac{t_{NDSSKF}}{t_{DSSKF}} = \frac{CB_{NDSSKF}}{CB_{DSSKF}} \quad (12.59)$$

Η μέγιστη επιτάχυνση παραλληλισμού (maximum parallelism speedup) του κατανεμημένου φίλτρου Kalman επιτυγχάνεται με τη βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή (optimal uniform distribution), η οποία είναι η χρήση  $P_{opt}$  επεξεργαστών που επεξεργάζονται  $M_{opt}$  μετρήσεις ο καθένας, γιατί ο αριθμητής της επιτάχυνσης παραλληλισμού είναι σταθερός και ταυτόχρονα ο παρονομαστής της επιτάχυνσης παραλληλισμού είναι ελάχιστος.

Η μέγιστη επιτάχυνση παραλληλισμού (maximum parallelism speedup) του κατανεμημένου φίλτρου Kalman αυξάνεται, όσο αυξάνεται η διάσταση  $m$  του διανύσματος μετρήσεων, και ταυτόχρονα η διάσταση  $n$  του διανύσματος κατάστασης παραμένει σταθερή.

Πράγματι,

- για το κατανεμημένο χρονικά μεταβαλόμενο φίλτρο Kalman, έχουμε:

$$speedup_{TVKF} = \frac{CB_{NDTVKF}}{CB_{DTVKF}} = \frac{\frac{1}{6}(50n^3 + 42n^2 - 20n) + n^2m + 2nm + 2nm^2 + \frac{1}{6}(16m^3 - 3m^2 - m)}{\frac{1}{6}(50n^3 + 39n^2 - 29n) + (\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n)p + n^2M + 2nM + 2nM^2 + \frac{1}{6}(16M^3 - 3M^2 - M)}$$

$$\max speedup_{TVKF} = \frac{\frac{1}{6}(50n^3 + 42n^2 - 20n) + n^2m + 2nm + 2nm^2 + \frac{1}{6}(16m^3 - 3m^2 - m)}{\frac{1}{6}(50n^3 + 39n^2 - 29n) + (\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n)p_{opt} + n^2M_{opt} + 2nM_{opt} + 2nM_{opt}^2 + \frac{1}{6}(16M_{opt}^3 - 3M_{opt}^2 - M_{opt})}$$

- για το κατανεμημένο χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman, έχουμε:

$$speedup_{TIKF} = \frac{CB_{NDTIKF}}{CB_{DTIKF}} = \frac{\frac{1}{6}(50n^3 + 45n^2 - 17n) + 2nm}{\frac{1}{6}(50n^3 + 45n^2 - 23n) + 2nM + np}$$

$$\begin{aligned} \max speedup_{TIKF} &= \frac{\frac{1}{6}(50n^2 + 45n - 17) + 2m}{\frac{1}{6}(50n^2 + 45n - 23) + 2M_{opt} + p_{opt}} \\ &= \frac{\frac{1}{6}(50n^2 + 45n - 17) + 2m}{\frac{1}{6}(50n^2 + 45n - 23) + 2\sqrt{\frac{m}{2} + \sqrt{2m}}} = \frac{\frac{1}{6}(50n^2 + 45n - 17) + 2m}{\frac{1}{6}(50n^2 + 45n - 23) + 2\sqrt{2}\sqrt{m}} \end{aligned}$$

- για το κατανεμημένο φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης, έχουμε:

$$speedup_{SSKF} = \frac{CB_{NDSSKF}}{CB_{DSSKF}} = \frac{4n^2 - n + 2nm}{4n^2 - 2n + 2nM + np}$$

$$\begin{aligned} \max speedup_{SSKF} &= \frac{4n^2 - n + 2nm}{4n^2 - 2n + 2nM_{opt} + np_{opt}} \\ &= \frac{4n - 1 + 2m}{4n - 2 + 2\sqrt{\frac{m}{2} + \sqrt{2m}}} = \frac{4n - 1 + 2m}{4n - 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{m}} \end{aligned}$$

Επομένως, το βέλτιστο παράλληλο φίλτρο Kalman παρουσιάζει μεγάλη επιτάχυνση παραλληλισμού (parallelism speedup) και, μάλιστα, η μέγιστη επιτάχυνση παραλληλισμού (maximum parallelism speedup) αυξάνεται, όσο αυξάνεται η διάσταση  $m$  του διανύσματος μετρήσεων. Αυτό είναι πολύ σημαντικό σε συστήματα με μεγάλο πλήθος μετρήσεων και σε εφαρμογές πραγματικού χρόνου (real-time), όπου έχει τεράστια σημασία ο υπολογισμός των εκτιμήσεων στον συντομότερο δυνατό χρόνο.

**Παράδειγμα.** Κατανεμημένο χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman.

Στο παράδειγμα αυτό [Lainiotis, Katsikas & Likothanassis (1988)], ένα χρονικά αμετάβλητο κύμα (wavelet) το οποίο περιγράφει το σήμα που λαμβάνεται από σεισμικούς αισθητήρες, έχει διάσταση  $n=4$ . Ένα πλήθος  $m=1000$  αισθητήρων χωρισμένων σε τοπικά σμήνη γεωφώνων (geophone clusters) χρησιμοποιείται για τη σύλληψη του σεισμικού ίχνους.

Για το κατανεμημένο χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman, η θεωρητική βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή (optimal uniform distribution) των μετρήσεων στους επεξεργαστές είναι η χρήση  $p_{opt}$  επεξεργαστών που επεξεργάζονται  $M_{opt}$  μετρήσεις ο καθένας, όπου:

$$p_{opt} = \sqrt{2m} = \sqrt{2000} = 44.7214$$

και

$$M_{opt} = \sqrt{\frac{m}{2}} = \sqrt{500} = 22.3607$$

και η θεωρητική μέγιστη επιτάχυνση παραλληλισμού (maximum parallelism speedup) είναι:

$$\max speedup_{TIKF} = \frac{\frac{1}{6}(50n^2 + 45n - 17) + 2m}{\frac{1}{6}(50n^2 + 45n - 23) + 2\sqrt{2}\sqrt{m}} = 8.6787$$

Στον Πίνακα 12.8 παρουσιάζονται οι πραγματικές ομοιόμορφες κατανομές, όπου το πλήθος  $P$  των επεξεργαστών και το πλήθος  $M$  των μετρήσεων που επεξεργάζεται ο κάθε επεξεργαστής είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί, καθώς και η επιτάχυνση παραλληλισμού για κάθε κατανομή.

Ομοιόμορφη Κατανομή (Uniform Distribution)		Επιτάχυνση Παραλληλισμού (Parallelism Speedup)
πλήθος $P$ των επεξεργαστών	πλήθος $M$ των μετρήσεων που επεξεργάζεται ο κάθε επεξεργαστής	
1	1000	1.0000
2	500	1.8601
4	250	3.2562
5	200	3.8273
8	125	5.1749
10	100	5.8471
20	50	7.7299
25	40	8.1682
40	25	8.6593
50	20	8.6593
100	10	7.7299
125	8	7.1897
200	5	5.8471
250	4	5.1749
500	2	3.2562
1000	1	1.8601

**Πίνακας 12.8** Ομοιόμορφες κατανομές και επιτάχυνση παραλληλισμού.

Από τον Πίνακα 12.8 προκύπτουν δύο πραγματικές βέλτιστες ομοιόμορφες κατανομές:

- χρήση  $p_{opt}=40$  επεξεργαστών, οι οποίοι επεξεργάζονται  $M_{opt}=25$  μετρήσεις ο καθένας
- χρήση  $p_{opt}=50$  επεξεργαστών, οι οποίοι επεξεργάζονται  $M_{opt}=20$  μετρήσεις ο καθένας

με τη μέγιστη επιτάχυνση παραλληλισμού:

$$\max speedup_{TIKF} = 8.6593$$

Προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί το κόστος υλικού (hardware cost), επιλέγεται η κατανομή με το μικρότερο πλήθος επεξεργαστών, δηλαδή, η χρήση  $P_{opt} = 40$  επεξεργαστών οι οποίοι επεξεργάζονται  $M_{opt} = 25$  μετρήσεις ο καθένας.

Το βέλτιστο κατανεμημένο φίλτρο Kalman είναι 8.6593 φορές ταχύτερο από το μη κατανεμημένο φίλτρο Kalman.

## 12.6 Ασκήσεις

1. Στα κατανεμημένα φίλτρα Kalman, να βρείτε πώς χωρίζεται σε  $p$  μέρη (parts) ο πίνακας του κέρδους  $K(k)$
2. Για το κατανεμημένο χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman, να αποδείξετε τη σχέση:
$$P(k / k) = \left[ P^{-1}(k / k - 1) + \sum_{i=1}^p B_i(k) \right]^{-1}$$
3. Να επιβεβαιώσετε ότι σε μονοεπεργαστικό περιβάλλον, ο υπολογιστικός φόρτος του μη κατανεμημένου φίλτρου Kalman γίνεται ίσος με τον υπολογιστικό φόρτο του κατανεμημένου φίλτρου Kalman, για  $p=1$  και  $M = m$ .
4. Για το κατανεμημένο χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman και για το κατανεμημένο φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης, να αποδείξετε ότι η θεωρητική βέλτιση ομοιόμορφη κατανομή είναι μοναδική.
5. Για το κατανεμημένο χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman και για το κατανεμημένο φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης, να αποδείξετε ότι υπάρχουν το πολύ δύο πραγματικές βέλτιστες ομοιόμορφες κατανομές με τον ελάχιστο υπολογιστικό φόρτο.

## 12.7 Περίληψη

Το κατανεμημένο γραμμικό μοντέλο προκύπτει σε περιβάλλον πολλαπλών αισθητήρων (multi-sensor environment), όπου το διάνυσμα μετρήσεων  $z(k)$  διάστασης  $m$  χωρίζεται σε  $p$  μέρη (parts).

Για το κατανεμημένο γραμμικό μοντέλο, το κατανεμημένο φίλτρο Kalman χωρίζεται σε δύο επίπεδα: το Τοπικό Επίπεδο (Local Level) και το Κεντρικό Επίπεδο (Central Level). Στο τοπικό επίπεδο, κάθε επεξεργαστής (processor) υπολογίζει την τοπική εκτίμηση χρησιμοποιώντας τις τοπικές μετρήσεις. Στο κεντρικό επίπεδο, υπολογίζεται η συνολική εκτίμηση από τα δεδομένα κάθε τοπικού επεξεργαστή. Οι τοπικοί επεξεργαστές μπορούν να λειτουργούν ανεξάρτητα, γιατί δεν απαιτείται ανταλλαγή πληροφορίας ανάμεσά τους ούτε απαιτείται μεταφορά πληροφορίας από το κεντρικό επίπεδο προς τους τοπικούς επεξεργαστές.

Στα μη κατανεμημένα φίλτρα Kalman, όλοι οι υπολογισμοί γίνονται σε έναν κεντρικό επεξεργαστή. Ο υπολογιστικός φόρτος εξαρτάται από τη διάσταση  $n$  του διανύσματος κατάστασης και από τη διάσταση  $m$  του διανύσματος μετρήσεων.

Στα κατανεμημένα φίλτρα Kalman, οι υπολογισμοί του τοπικού επιπέδου γίνονται στους τοπικούς επεξεργαστές και οι υπολογισμοί του κεντρικού επιπέδου σε έναν κεντρικό επεξεργαστή. Ο υπολογιστικός φόρτος εξαρτάται από το πλήθος  $p$  των επεξεργαστών, από τη διάσταση  $n$  του διανύσματος κατάστασης και από τη μέγιστη διάσταση  $M$  από τα τοπικά διανύσματα μετρήσεων.

Στην ομοιόμορφη κατανομή (uniform distribution) των μετρήσεων στους παράλληλους επεξεργαστές, το διάνυσμα των μετρήσεων χωρίζεται σε  $p$  ίσα μέρη, οπότε ο κάθε επεξεργαστής επεξεργάζεται  $M$  μετρήσεις και  $p \cdot M = m$ .

Η ομοιόμορφη κατανομή των μετρήσεων στους παράλληλους επεξεργαστές έχει τα παρακάτω πλεονεκτήματα:

Όλοι οι παράλληλοι τοπικοί επεξεργαστές κάνουν τους ίδιους υπολογισμούς που αφορούν ποσότητες ίδιου τύπου και ίσων διαστάσεων. Έτσι, οι τοπικοί επεξεργαστές έχουν την ίδια δομή (structure) και, επομένως, η παράλληλη υλοποίηση του κατανεμημένου φίλτρου Kalman απαιτεί χαμηλού κόστους υλικό (low hardware cost).

Κανένας επεξεργαστής δεν μένει άεργος (idle).

Η ελαχιστοποίηση του υπολογιστικού χρόνου του κατανεμημένου φίλτρου Kalman οδηγεί στην επιλογή του βέλτιστου κατανεμημένου φίλτρου Kalman. Για τον προσδιορισμό του βέλτιστου κατανεμημένου φίλτρου Kalman παίζει ρόλο η κατανομή των  $m$  μετρήσεων στους  $p$  παράλληλους επεξεργαστές.

Για το κατανεμημένο χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman, η βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή (optimal uniform distribution) των μετρήσεων στους επεξεργαστές, που είναι η χρήση  $p_{opt}$  επεξεργαστών που επεξεργάζονται  $M_{opt}$  μετρήσεις ο καθένας, καθορίζεται εκ των προτέρων (a-priori), δηλαδή, πριν την υλοποίηση του φίλτρου, επιλύοντας πολυωνυμικές εξισώσεις με συντελεστές που εξαρτώνται από τη διάσταση  $m$  του διανύσματος μετρήσεων.

Για το κατανεμημένο χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman και για το κατανεμημένο φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης, η βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή (optimal uniform distribution) των μετρήσεων στους επεξεργαστές, που είναι η χρήση  $p_{opt} = \sqrt{2m}$  επεξεργαστών που επεξεργάζονται  $M_{opt} = \sqrt{\frac{m}{2}}$  μετρήσεις ο καθένας, καθορίζεται εκ των προτέρων (a-priori), δηλαδή, πριν την υλοποίηση του φίλτρου, επιλύοντας πολυωνυμικές εξισώσεις με συντελεστές που εξαρτώνται από τη διάσταση  $m$  του διανύσματος μετρήσεων.

Η βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή (optimal uniform distribution) έχει το μειονέκτημα ότι δεν είναι πάντα εφαρμόσιμη, γιατί πρέπει το βέλτιστο πλήθος  $p_{opt}$  των επεξεργαστών και το βέλτιστο πλήθος  $M_{opt}$  των μετρήσεων, που επεξεργάζεται ο κάθε επεξεργαστής, να είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Οι θετικές λύσεις, όμως, των πολυωνυμικών εξισώσεων που καθορίζουν το βέλτιστο πλήθος  $p_{opt}$  των επεξεργαστών και το βέλτιστο πλήθος  $M_{opt}$  των μετρήσεων, που επεξεργάζεται ο κάθε επεξεργαστής, είναι πραγματικοί αριθμοί. Όταν οι λύσεις των πολυωνυμικών εξισώσεων είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί, τότε προκύπτει η βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή, η οποία είναι εφαρμόσιμη. Όταν οι λύσεις των πολυωνυμικών εξισώσεων δεν είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί, τότε η βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή προσδιορίζεται αναζητώντας τον ελάχιστο υπολογιστικό φόρτο όλων των ομοιόμορφων κατανομών. Αν προκύψουν δύο ομοιόμορφες κατανομές με τον

ελάχιστο υπολογιστικό φόρτο, τότε επιλέγεται η κατανομή με το μικρότερο πλήθος επεξεργαστών, προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί το κόστος υλικού (hardware cost).

Η επιτάχυνση παραλληλισμού (parallelism speedup) του κατανεμημένου φίλτρου Kalman ορίζεται ως ο λόγος του υπολογιστικού χρόνου του μη κατανεμημένου φίλτρου Kalman προς τον υπολογιστικό χρόνο του κατανεμημένου φίλτρου Kalman και είναι ίσος με τον λόγο του υπολογιστικού φόρτου του μη κατανεμημένου φίλτρου Kalman προς τον υπολογιστικό φόρτο του κατανεμημένου φίλτρου Kalman.

Η μέγιστη επιτάχυνση παραλληλισμού (maximum parallelism speedup) του κατανεμημένου φίλτρου Kalman επιτυγχάνεται με τη βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή (optimal uniform distribution), που είναι η χρήση  $p_{opt}$  επεξεργαστών, οι οποίοι επεξεργάζονται  $M_{opt}$  μετρήσεις ο καθένας, γιατί ο αριθμητής της επιτάχυνσης παραλληλισμού είναι σταθερός και ταυτόχρονα ο παρονομαστής της επιτάχυνσης παραλληλισμού είναι ελάχιστος.

Η μέγιστη επιτάχυνση παραλληλισμού (maximum parallelism speedup) του κατανεμημένου φίλτρου Kalman αυξάνεται, όσο αυξάνεται η διάσταση  $m$  του διανύσματος μετρήσεων, και ταυτόχρονα η διάσταση  $n$  του διανύσματος κατάστασης παραμένει σταθερή.

Μπορείτε να ακούσετε την περίληψη με τον Ήχο 12.1.



**Ήχος 12.1 Περίληψη – Κεφάλαιο 12.**

## 12.8 Κριτήριο Αξιολόγησης

Απαντήστε με Σωστό ή Λάθος.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Στο κατανεμημένο γραμμικό μοντέλο σε περιβάλλον πολλαπλών αισθητήρων ισχύει:  $\sum_{i=1}^p m_i = m$ .

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Στα κατανεμημένα φίλτρα Kalman απαιτείται μεταφορά πληροφορίας από τους τοπικούς επεξεργαστές στο κεντρικό επίπεδο.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Στα κατανεμημένα φίλτρα Kalman, ο υπολογιστικός φόρτος εξαρτάται από το πλήθος των επεξεργαστών και από την ελάχιστη διάσταση των τοπικών διανυσμάτων μετρήσεων.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Στην ομοιόμορφη κατανομή (uniform distribution) των μετρήσεων στους παράλληλους επεξεργαστές, το διάνυσμα των μετρήσεων χωρίζεται σε ίσα μέρη.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Η ομοιόμορφη κατανομή των μετρήσεων στους παράλληλους επεξεργαστές έχει το πλεονεκτήματα ότι κανένας επεξεργαστής δεν μένει άεργος (idle).

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Για το κατανεμημένο χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman, η βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή (optimal uniform distribution) των μετρήσεων στους επεξεργαστές δεν μπορεί να καθοριστεί εκ των προτέρων (a-priori), δηλαδή, πριν την υλοποίηση του φίλτρου.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

Για το κατανεμημένο χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman, η θεωρητική βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή (optimal uniform distribution) των μετρήσεων στους επεξεργαστές είναι η χρήση  $p_{opt} = \sqrt{2m}$  επεξεργαστών που επεξεργάζονται  $M_{opt} = \sqrt{m/2}$  μετρήσεις ο καθένας.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

Η βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή (optimal uniform distribution) έχει το πλεονέκτημα ότι είναι πάντα εφαρμόσιμη, αφού το βέλτιστο πλήθος των επεξεργαστών και το βέλτιστο πλήθος των μετρήσεων που επεξεργάζεται ο κάθε επεξεργαστής είναι πάντα θετικοί ακέραιοι αριθμοί.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

Η επιτάχυνση παραλληλισμού (parallelism speedup) του κατανεμημένου φίλτρου Kalman ορίζεται ως ο λόγος του υπολογιστικού χρόνου του κατανεμημένου φίλτρου Kalman προς τον υπολογιστικό χρόνο του μη κατανεμημένου φίλτρου Kalman.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Η ελάχιστη επιτάχυνση παραλληλισμού (maximum parallelism speedup) του κατανεμημένου φίλτρου Kalman επιτυγχάνεται με τη βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή (optimal uniform distribution).

---

Θα βρείτε την Απάντηση στο Κριτήριο Αξιολόγησης στο Παράρτημα A'.

Μπορείτε να κάνετε το Κριτήριο Αξιολόγησης με το Διαδραστικό Πρόγραμμα 12.1.



**Διαδραστικό Πρόγραμμα 12.1** *Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 12.*

## 12.9 Εφαρμογή: Επιλογή του βέλτιστου κατανεμημένου φίλτρου Kalman με ομοιόμορφη κατανομή των μετρήσεων στους παράλληλους επεξεργαστές

Ο υπολογιστικός χρόνος των κατανεμημένων φίλτρων Kalman είναι ανάλογος του υπολογιστικού φόρτου των κατανεμημένων φίλτρων Kalman και του πλήθους των επαναλήψεων που αυτά εκτελούν. Θεωρώντας ότι τα κατανεμημένων φίλτρα εκτελούν το ίδιο πλήθος επαναλήψεων, προκύπτει ότι ο υπολογιστικός χρόνος των κατανεμημένων φίλτρων Kalman εξαρτάται από τον υπολογιστικό φόρτο των κατανεμημένων φίλτρων Kalman.

Τα κατανεμημένα φίλτρα Kalman έχουν νόημα σε περιβάλλον πολλαπλών αισθητήρων (multi-sensor environment), όπου το διάνυσμα μετρήσεων  $z(k)$  διάστασης  $m$  χωρίζεται σε  $p$  μέρη (parts). Οπότε, τα κατανεμημένα φίλτρα έχουν νόημα, όταν  $m \geq 2$ .

Στα κατανεμημένα φίλτρα Kalman, οι υπολογισμοί του τοπικού επιπέδου (local level) γίνονται στους τοπικούς επεξεργαστές και οι υπολογισμοί του κεντρικού επιπέδου (central level) σε έναν κεντρικό επεξεργαστή. Ο υπολογιστικός φόρτος εξαρτάται από το πλήθος  $p$  των επεξεργαστών, από τη διάσταση  $n$  του διανύσματος κατάστασης και από τη μέγιστη διάσταση  $M$  των τοπικών διανυσμάτων μετρήσεων, όπου  $M = \max\{m_i\}, i=1,...,p$ .

Ο υπολογιστικός φόρτος των κατανεμημένων φίλτρων Kalman εξαρτάται από:

- τη διάσταση  $n$  του διανύσματος κατάστασης
- τη διάσταση  $m$  του διανύσματος μετρήσεων
- την κατανομή των μετρήσεων στους παράλληλους επεξεργαστές
- τον τύπο του φίλτρου:
  - Χρονικά Μεταβαλλόμενο φίλτρο (Time Varying filter)
  - Χρονικά Αμετάβλητο φίλτρο (Time Invariant filter)
  - Φίλτρο Μόνιμης Κατάστασης (Steady State filter)

Στην ομοιόμορφη κατανομή (uniform distribution) των μετρήσεων στους παράλληλους επεξεργαστές, το διάνυσμα των μετρήσεων χωρίζεται σε  $p$  ίσα μέρη, οπότε ο κάθε επεξεργαστής επεξεργάζεται  $m_i = M, i=1,...,p$  μετρήσεις και  $p \cdot M = m$ .

Η θεωρητική βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή είναι εφαρμόσιμη, όταν το βέλτιστο πλήθος  $P_{opt}$  των επεξεργαστών και το βέλτιστο πλήθος  $M_{opt}$  των μετρήσεων που επεξεργάζεται ο κάθε επεξεργαστής είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί.

Διαφορετικά, η πραγματική βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή προσδιορίζεται αναζητώντας τον ελάχιστο υπολογιστικό φόρτο όλων των ομοιόμορφων κατανομών. Μπορεί να υπάρχουν μία ή περισσότερες βέλτιστες ομοιόμορφες κατανομές.

Η επιτάχυνση παραλληλισμού (parallelism speedup) του κατανεμημένου φίλτρου Kalman είναι ίση με τον λόγο του υπολογιστικού φόρτου του μη κατανεμημένου φίλτρου Kalman προς τον υπολογιστικό φόρτο του κατανεμημένου φίλτρου Kalman.

Η μέγιστη επιτάχυνση παραλληλισμού (maximum parallelism speedup) του κατανεμημένου φίλτρου Kalman επιτυγχάνεται με τη βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή.

Η εφαρμογή επιλέγει το βέλτιστο κατανεμημένο φίλτρο Kalman με ομοιόμορφη κατανομή των μετρήσεων στους παράλληλους επεξεργαστές, αναζητώντας τον ελάχιστο υπολογιστικό φόρτο όλων των ομοιόμορφων κατανομών.

Η εφαρμογή επιλέγει την (πραγματική) βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή των μετρήσεων στους επεξεργαστές, η οποία είναι η χρήση  $P_{opt}$  επεξεργαστών που επεξεργάζονται  $M_{opt}$  μετρήσεις ο καθένας. Η εφαρμογή μπορεί να επιλέγει μία ή περισσότερες ομοιόμορφες κατανομές ως βέλτιστες.

Η εφαρμογή υπολογίζει την (πραγματική) μέγιστη επιτάχυνση παραλληλισμού.

Η εφαρμογή έχει εισόδους:

- τη διάσταση  $n$  του διανύσματος κατάστασης
- τη διάσταση  $m$  του διανύσματος μετρήσεων ( $m \geq 2$ )
- τον τύπο του φίλτρου

- Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο (Time Varying Kalman Filter - TVKF)
- Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο (Time Invariant Kalman Filter - TIKF)
- Φίλτρο Μόνιμης Κατάστασης (Steady State Kalman Filter - SSKF)

Η εφαρμογή έχει εξόδους:

- τη βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή (optimal uniform distribution) των μετρήσεων στους επεξεργαστές ( $p_{opt}$  επεξεργαστές που επεξεργάζονται  $M_{opt}$  μετρήσεις ο καθένας)
- τη μέγιστη επιτάχυνση παραλληλισμού (maximum parallelism speedup) του βέλτιστου κατανεμημένου φίλτρου Kalman.

Η εφαρμογή υλοποιείται με τη συνάρτηση distributedkdf:

```
function [puopt,Muopt,maxspeedup]=distributedkalmanfilter(n,m,kftype)

% input
% model dimensions
% n state vector dimension
% m measurement vector dimension (m>=2)
% kftype
% TVKF - Time Varying Kalman Filter
% TIKF - Time Invariant Kalman Filter
% SSKF - Steady State Kalman Filter

% output
% optimal uniform distribution (popt, Mopt)
% maximum parallelism speedup

% real optimal uniform distribution
Mu=[];
Pu=[];
CBDu=[];
for i=1:m
    if (mod(m,i)==0)
        M=i;
        p=m/i;
        Mu=[Mu M];
        Pu=[Pu p];

        if kftype=='TVKF'
            if n==1
                CBD=(16*M^3+9*M^2+17*M+48)/6+2*p;
            else
                CBD=(50*n*n*n+39*n*n-
29*n)/6+(n^2+3*n)*p/2+n^2*M+2*n*M+2*n*M^2+(16*M^3-3*M^2-M)/6;
            end;
        end;
        if kftype=='TIKF'
            if n==1
                CBD=2*M+p+9;
            else
                CBD=(50*n*n*n+45*n*n-23*n)/6+2*n*M+n*p;
            end;
        end;
        if kftype=='SSKF'
            CBD=4*n^2-2*n+2*n*M+n*p;
        end;
    end;
end;
```

```

end;

CBDu=[CBDu CBD];

end;
end

% distributed Kalman Filter
% minimum calculation burden
CBDuopt=min(CBDu);

% non distributed Kalman Filter
% calculation burden
if kftype=='TVKF'
    if n==1
        CBND=(16*m^3+9*m^2+17*m+54)/6;
    else
        CBND=(50*n*n*n+42*n*n-20*n)/6+n^2*m+2*n*m+2*m^2*n+(16*m^3-
3*m^2-m)/6;
    end;
end;
if kftype=='TIKF'
    if n==1
        CBND=2*m+10;
    else
        CBND=(50*n*n*n+45*n*n-17*n)/6+2*n*m;
    end;
end;
if kftype=='SSKF'
    CBND=4*n^2-n+2*n*m;
end;
% maximum parallelism speedup
maxspeedup=CBND/CBDuopt;

% optimal uniform distribution
puopt=[];
Muopt=[];
for i=1:length(CBDu)
    if CBDu(i)==CBDuopt
        puopt=[puopt Pu(i)];
        Muopt=[Muopt Mu(i)];
    end;
end;

```

Μπορείτε να εκτελέσετε την εφαρμογή με το Διαδραστικό Πρόγραμμα 12.2.



**Διαδραστικό Πρόγραμμα 12.2 Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 12.**

## **Βιβλιογραφία/Αναφορές**

- Assimakis, N., Adam, M., Koziri, M. & Voliotis, S. (2009). Optimal distributed Kalman and Lainiotis filters  
Optimal uniform distribution of measurements into local processors, *Proceedings of 16th International  
Workshop on Systems, Signals and Image Processing (IWSSIP)*, pp. 19-24.
- Assimakis, N., Adam, M., Koziri, M., Voliotis, S. & Asimakis K. (2013). Optimal decentralized Kalman filter  
and Lainiotis filter, *Digital Signal Processing*, vol. 23, issue 1, pp. 442-452, DOI:  
10.1016/j.dsp.2012.08.005.
- Assimakis, N., Adam, M. (2007). Discrete time Kalman and Lainiotis filters comparison. *Int. Journal of  
Mathematical Analysis (IJMA)*, vol. 1, no. 13, pp. 635-659.
- Hashemipour, H. R., Roy, S. & Laub, A.J. (1988). Decentralized structures for parallel Kalman filtering, *IEEE  
Trans. on Automatic Control*, vol. 33, no. 1, pp. 88-94.
- Lainiotis, D. G., Katsikas, S. K. & Likothanassis, S.D. (1988) Optimal seismic deconvolution. *Signal  
Processing*, vol. 15, pp. 375-404.

## Κεφάλαιο 13 Επέκταση γραμμικού μοντέλου

### Σύνοψη

Στο κεφάλαιο παρουσιάζεται η επέκταση του γραμμικού μοντέλου. Συγκεκριμένα αναλύεται το γραμμικό μοντέλο με μη μηδενικές μέσες τιμές θορύβων και το γραμμικό μοντέλο με έγχρωμους θορύβους. Παρουσιάζονται τα φίλτρα Kalman για το επεκταμένο γραμμικό μοντέλο με μη μηδενικές μέσες τιμές θορύβων και τα φίλτρα Kalman για το επεκταμένο γραμμικό μοντέλο με έγχρωμους θορύβους. Δίνονται παραδείγματα.

### Προαπαιτούμενη γνώση

Γραμμικό μοντέλο, Φίλτρο Kalman.

#### 13.1 Μη μηδενικές μέσες τιμές θορύβων

Το γραμμικό μοντέλο διακριτού χρόνου:

$$x(k+1) = F(k+1, k)x(k) + w'(k) \quad (13.1)$$

$$z(k) = H(k)x(k) + v'(k) \quad (13.2)$$

μπορεί να επεκταθεί στην περίπτωση που οι θόρυβοι έχουν **μη μηδενικές μέσες τιμές** [Anderson & Moore (2005), Ασημάκης (2009)], οπότε ισχύουν οι παρακάτω υποθέσεις (assumptions):

1. Η στοχαστική διαδικασία  $\{w'(k)\}$  έχει μη μηδενική μέση τιμή  $u(k)$ , δηλαδή:

$$u(k) = E[w'(k)], \quad (13.3)$$

όπου:

$$w'(k) = w(k) + u(k) \quad (13.4)$$

και η στοχαστική διαδικασία  $\{w(k)\}$  ακολουθεί την **κανονική κατανομή** (Gaussian distribution), έχει μηδενική μέση τιμή και είναι λευκή διαδικασία (white process) με συνδιασπορά  $Q(k)$  διαστάσεων  $n \times n$ .

2. Η στοχαστική διαδικασία  $\{v'(k)\}$  έχει μη μηδενική μέση τιμή  $s(k)$ , δηλαδή:

$$s(k) = E[v'(k)] \quad (13.5)$$

όπου:

$$v'(k) = v(k) + s(k) \quad (13.6)$$

και η στοχαστική διαδικασία  $\{v(k)\}$  ακολουθεί την **κανονική κατανομή** (Gaussian distribution), έχει μηδενική μέση τιμή και είναι λευκή διαδικασία (white process) με συνδιασπορά  $R(k)$  διαστάσεων  $m \times m$ .

3. Η αρχική τιμή της κατάστασης  $x(0)$  είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή (Gaussian distribution), έχει μέση τιμή  $x_0$  και συνδιασπορά  $P_0$ .

4. Οι στοχαστικές διαδικασίες  $\{w(k)\}$ ,  $\{v(k)\}$  και η τυχαία μεταβλητή  $x(0)$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Τότε, το γραμμικό μοντέλο διακριτού χρόνου επεκτείνεται και παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$x(k+1) = F(k+1, k)x(k) + w(k) + u(k) \quad (13.7)$$

$$z(k) = H(k)x(k) + v(k) + s(k) \quad (13.8)$$

Οι εξισώσεις του χρονικά μεταβαλλόμενου φίλτρου Kalman που προκύπτουν είναι:

$$x(k/k) = [I - K(k)H(k)]x(k/k-1) + K(k)[z(k) - s(k)] \quad (13.9)$$

$$P(k/k) = [I - K(k)H(k)]P(k/k-1) \quad (13.10)$$

$$K(k) = P(k/k-1)H^T(k)[H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1} \quad (13.11)$$

$$x(k+1/k) = F(k+1,k)x(k/k) + u(k) \quad (13.12)$$

$$P(k+1/k) = Q(k) + F(k+1,k)P(k/k)F^T(k+1,k) \quad (13.13)$$

για  $k = 0, 1, \dots$

με αρχικές συνθήκες:

$$x(0/-1) = x_0$$

$$P(0/-1) = P_0$$

Οι μη μηδενικές μέσες τιμές των θορύβων επηρεάζουν τις εξισώσεις (13.9) και (13.12).

Για το χρονικά μεταβαλλόμενο μοντέλο, όπου οι πίνακες  $F(k+1,k)$ ,  $H(k)$ ,  $Q(k)$ ,  $R(k)$  είναι χρονικά μεταβαλλόμενοι και τα διανύσματα  $s(k)$  και  $u(k)$  είναι χρονικά μεταβαλλόμενα, προκύπτει το Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο Kalman (Time Varying Kalman Filter) με μη μηδενικές μέσες τιμές θορύβων:

**Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο Kalman  
Time Varying Kalman Filter (TVKF)  
με μη μηδενικές μέσες τιμές θορύβων**

$$\begin{aligned} K(k) &= P(k/k-1)H^T(k)[H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1} \\ x(k/k) &= [I - K(k)H(k)]x(k/k-1) + K(k)[z(k) - s(k)] \\ P(k/k) &= [I - K(k)H(k)]P(k/k-1) \\ x(k+1/k) &= F(k+1,k)x(k/k) + u(k) \\ P(k+1/k) &= Q(k) + F(k+1,k)P(k/k)F^T(k+1,k) \\ k &= 0, 1, \dots \\ x(0/-1) &= x_0 \\ P(0/-1) &= P_0 \end{aligned}$$

Για το χρονικά αμετάβλητο μοντέλο, όπου οι πίνακες  $F(k+1,k) = F$ ,  $H(k) = H$ ,  $Q(k) = Q$ ,  $R(k) = R$  είναι χρονικά αμετάβλητοι και τα διανύσματα  $s(k) = s$  και  $u(k) = u$  είναι χρονικά αμετάβλητα, προκύπτει το Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman (Time Invariant Kalman Filter) με μη μηδενικές μέσες τιμές θορύβων:

**Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman  
Time Invariant Kalman Filter (TIKF)  
με μη μηδενικές μέσες τιμές θορύβων**

$$\begin{aligned} K(k) &= P(k/k-1)H^T[H^T P(k/k-1)H + R]^{-1} \\ x(k/k) &= [I - K(k)H]x(k/k-1) + K(k)[z(k) - s] \\ P(k/k) &= [I - K(k)H]P(k/k-1) \\ x(k+1/k) &= Fx(k/k) + u \\ P(k+1/k) &= Q + FP(k/k)F^T \\ k &= 0, 1, \dots \\ x(0/-1) &= x_0 \\ P(0/-1) &= P_0 \end{aligned}$$

Στη μόνιμη κατάσταση, προκύπτει το Φίλτρο Kalman Μόνιμης Κατάστασης (Steady State Kalman Filter) με μη μηδενικές μέσες τιμές θορύβων:

Φίλτρο Kalman Μόνιμης Κατάστασης Steady State Kalman Filter (SSKF) με μη μηδενικές μέσες τιμές θορύβων
$x(k+1 / k+1) = Ax(k) + Kz(k+1) + C$
$k = 0, 1, \dots$
$A = [I - KH]F$
$C = [I - KH]u - Ks$
$x(0 / 0) = [I - KH]x_0 + K[z(0) - s]$

Οι συντελεστές του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης με μη μηδενικές μέσες τιμές θορύβων μπορούν να υπολογιστούν εκ των προτέρων (off-line) χρησιμοποιώντας τη λύση της εξίσωσης Riccati.

**Παράδειγμα. Μη μηδενική μέση τιμή θορύβου μετρήσεων σε χρονικά μεταβαλλόμενο μοντέλο.**  
Στο παράδειγμα αυτό θεωρείται ένα βαθμωτό μοντέλο ( $n = 1$  και  $m = 1$ ), με παραμέτρους:

$$F = 0.8$$

$$H = 1$$

$$Q = 0.1$$

$$R = 0.2$$

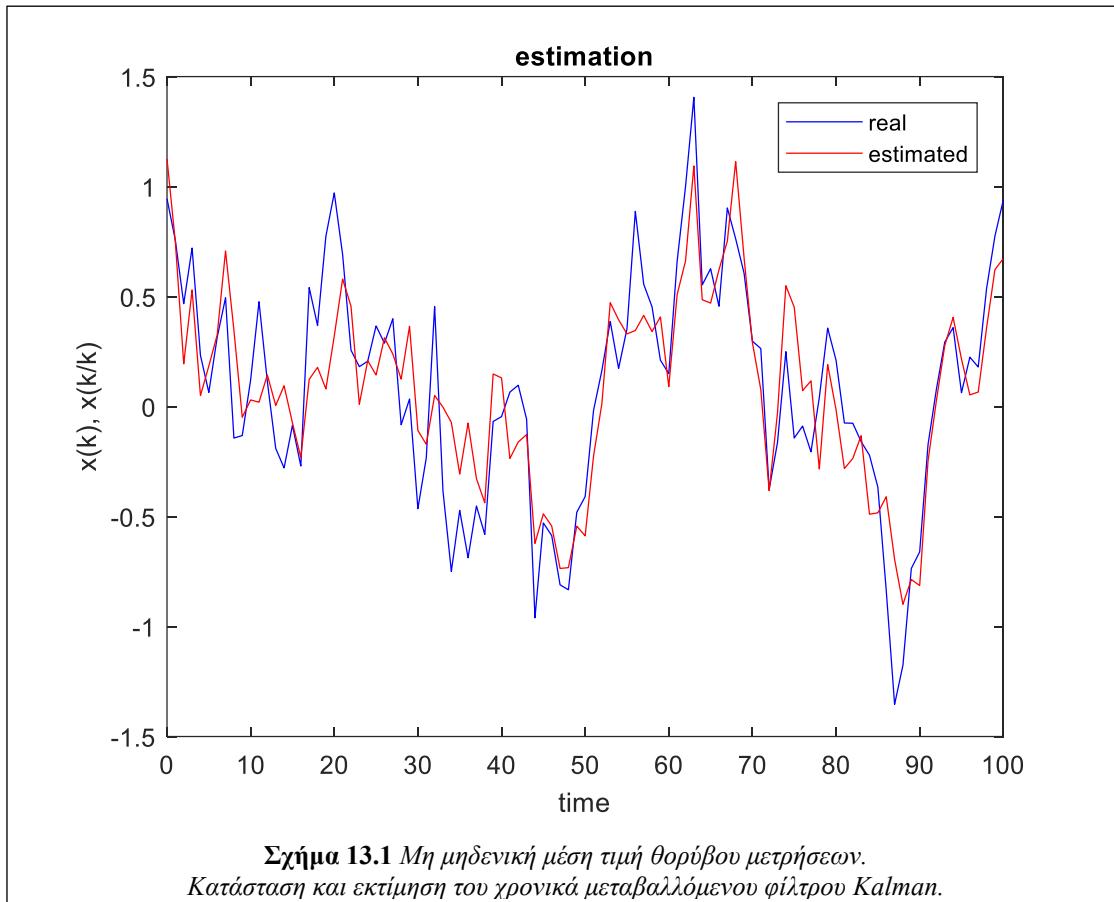
και με αρχικές συνθήκες:

$$x(0 / -1) = x_0 = 1$$

$$P(0 / -1) = P_0 = 1$$

Επίσης ο θόρυβος των μετρήσεων έχει μη μηδενική μέση τιμή  $s_v(k) = e^{-k/10}$ .

Στο Σχήμα 13.1 παρουσιάζεται η κατάσταση και η εκτίμηση του χρονικά μεταβαλλόμενου φίλτρου Kalman για μη μηδενική μέση τιμή θορύβου μετρήσεων.



#### Παράδειγμα. Μη μηδενική μέση τιμή θορύβου μετρήσεων σε χρονικά αμετάβλητο μοντέλο.

Στο παράδειγμα αυτό θεωρείται ένα βαθμωτό μοντέλο ( $n=1$  και  $m=1$ ), με παραμέτρους:

$$F = 0.8$$

$$H = 1$$

$$Q = 0.1$$

$$R = 0.2$$

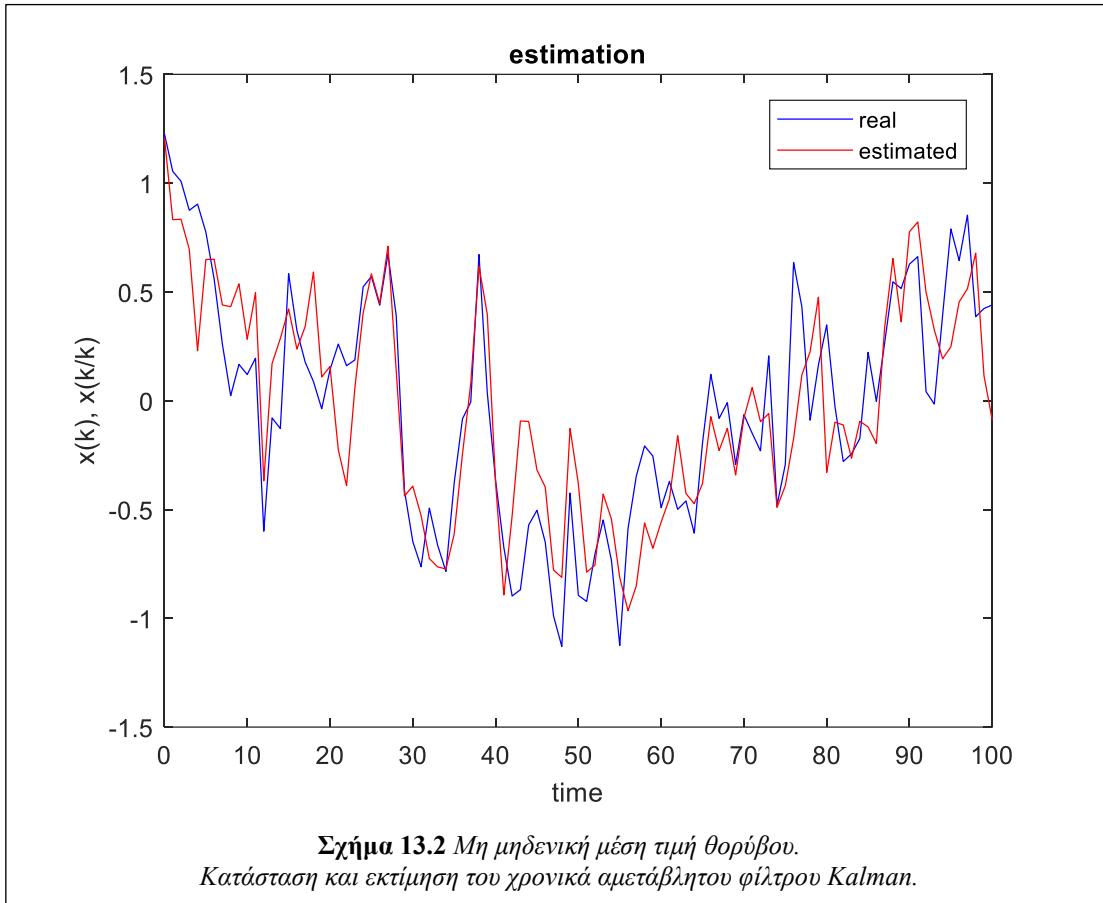
και με αρχικές συνθήκες:

$$x(0 / -1) = x_0 = 1$$

$$P(0 / -1) = P_0 = 1$$

Επίσης, ο θόρυβος των μετρήσεων έχει μη μηδενική μέση τιμή  $s_v(k) = s = 0.5$ .

Στο Σχήμα 13.2 παρουσιάζεται η κατάσταση και η εκτίμηση του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman για μη μηδενική μέση τιμή θορύβου μετρήσεων.



## 13.2 Έγχρωμοι θόρυβοι

Το γραμμικό μοντέλο διακριτού χρόνου:

$$x(k+1) = F(k+1, k)x(k) + w'(k) \quad (13.14)$$

$$z(k) = H(k)x(k) + v'(k) \quad (13.15)$$

μπορεί να επεκταθεί στην περίπτωση που οι θόρυβοι δεν είναι λευκοί (white noises), αλλά είναι **έγχρωμοι θόρυβοι (colored noises)** [Anderson & Moore (2005), Ασημάκης (2009)], οπότε ισχύουν οι παρακάτω υποθέσεις (assumptions):

1. Η στοχαστική διαδικασία  $\{w'(k)\}$  είναι έγχρωμη (colored process), δηλαδή:

$$x_w(k+1) = F_w(k+1, k)x_w(k) + w(k), \quad (13.16)$$

όπου:

$$w'(k) = H_w(k)x_w(k) \quad (13.17)$$

και η στοχαστική διαδικασία  $\{w(k)\}$  ακολουθεί την **κανονική κατανομή (Gaussian distribution)**, έχει μηδενική μέση τιμή και είναι λευκή διαδικασία (white process) με συνδιασπορά  $Q(k)$  διαστάσεων  $n \times n$ .

2. Η στοχαστική διαδικασία  $\{v'(k)\}$  είναι έγχρωμη (colored process), δηλαδή:

$$x_v(k+1) = F_v(k+1, k)x_v(k) + v(k), \quad (13.18)$$

όπου:

$$v'(k) = H_v(k)x_v(k) \quad (13.19)$$

και η στοχαστική διαδικασία  $\{v(k)\}$  ακολουθεί την **κανονική κατανομή (Gaussian distribution)**, έχει μηδενική μέση τιμή και είναι λευκή διαδικασία (white process) με συνδιασπορά  $R(k)$  διαστάσεων  $m \times m$ .

3. Η αρχική τιμή της κατάστασης  $x(0)$  είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή (Gaussian distribution), έχει μέση τιμή  $x_0$  και συνδιασπορά  $P_0$ . Οι αρχική τιμή  $x_w(0)$  ακολουθεί την κανονική κατανομή (Gaussian distribution), έχει μέση τιμή  $x_{w0}$  και συνδιασπορά  $P_{w0}$ . Οι αρχική τιμή  $x_v(0)$  ακολουθεί την κανονική κατανομή (Gaussian distribution), έχει μέση τιμή  $x_{v0}$  και συνδιασπορά  $P_{v0}$ . Οι αρχικές τιμές  $x_w(0)$  και  $x_v(0)$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και από την αρχική τιμή  $x(0)$ .

4. Οι στοχαστικές διαδικασίες  $\{w(k)\}$ ,  $\{v(k)\}$  και η τυχαία μεταβλητή  $x(0)$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Οι στοχαστικές διαδικασίες  $\{x_w(k)\}$  και  $\{x_v(k)\}$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ανεξάρτητες από τις αρχικές τιμές  $x(0)$ ,  $x_w(0)$  και  $x_v(0)$ .

Τότε, ορίζεται το **επανξημένο (augmented)** διάνυσμα κατάστασης:

$$x_a(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x_w(k) \\ x_v(k) \end{bmatrix} \quad (13.20)$$

και το γραμμικό μοντέλο διακριτού χρόνου παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$x_a(k+1) = F_a(k+1, k)x_a(k) + w_a(k) \quad (13.21)$$

$$z(k) = H_a(k)x_a(k) + v_a(k), \quad (13.22)$$

όπου:

$$F_a(k+1, k) = \begin{bmatrix} F(k+1, k) & H_w(k) & 0 \\ 0 & F_w(k+1, k) & 0 \\ 0 & 0 & F_v(k+1, k) \end{bmatrix} \quad (13.23)$$

$$H_a(k) = \begin{bmatrix} H(k) & 0 & H_v(k) \end{bmatrix} \quad (13.24)$$

$$w_a(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ w(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \quad (13.25)$$

$$v_a(k) = 0 \quad (13.26)$$

και

$$Q_a(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q(k) & 0 \\ 0 & 0 & R(k) \end{bmatrix} \quad (13.27)$$

$$R_a(k) = 0 \quad (13.28)$$

Στο μοντέλο αυτό οι λευκές στοχαστικές διαδικασίες  $\{w(k)\}$  και  $\{v(k)\}$  και η τυχαία μεταβλητή  $x_a(0)$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επομένως, μπορεί να υλοποιηθεί το φίλτρο Kalman.

Για το χρονικά μεταβαλλόμενο μοντέλο, όπου οι πίνακες  $F_a(k+1,k)$ ,  $H_a(k)$ ,  $Q(k)$ ,  $R(k)$  είναι χρονικά μεταβαλλόμενοι, προκύπτει το Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο Kalman (Time Varying Kalman Filter) με έγχρωμους θορύβους:

<b>Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο Kalman</b>
<b>Time Varying Kalman Filter (TVKF)</b>
<b>με έγχρωμους θορύβους</b>
$K(k) = P_a(k/k-1)H_a^T(k) \left[ H_a(k)P_a(k/k-1)H_a^T(k) \right]^{-1}$
$x_a(k/k) = [I - K(k)H_a(k)]x_a(k/k-1) + K(k)z(k)$
$P_a(k/k) = [I - K(k)H_a(k)]P_a(k/k-1)$
$x_a(k+1/k) = F_a(k+1,k)x_a(k/k)$
$P_a(k+1/k) = Q_a(k) + F_a(k+1,k)P_a(k/k)F_a^T(k+1,k)$
$k = 0, 1, \dots$
$x_{a0} = x_a(0/-1) = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{w0} \\ x_{v0} \end{bmatrix}$
$P_{a0} = P_a(0/-1) = \begin{bmatrix} P_0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{w0} & 0 \\ 0 & 0 & P_{v0} \end{bmatrix}$

Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν οι αντίστροφοι πίνακες που εμφανίζονται στην εξίσωση του κέρδους, μπορεί να γίνει χρήση του ψευδοαντίστροφου πίνακα (pseudo-inverse).

Για το χρονικά αμετάβλητο μοντέλο, όπου οι πίνακες  $F_a(k+1,k)$ ,  $H_a(k)$ ,  $Q(k)$ ,  $R(k)$  είναι χρονικά αμετάβλητοι, προκύπτει το Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman (Time Invariant Kalman Filter) με έγχρωμους θορύβους:

<b>Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman</b>
<b>Time Invariant Kalman Filter (TIKF)</b>
$K(k) = P_a(k/k-1)H_a^T(k) \left[ H_a(k)P_a(k/k-1)H_a^T(k) \right]^{-1}$
$x_a(k/k) = [I - K(k)H_a(k)]x_a(k/k-1) + K(k)z(k)$
$P_a(k/k) = [I - K(k)H_a(k)]P_a(k/k-1)$
$x_a(k+1/k) = F_a(k+1,k)x_a(k/k)$
$P_a(k+1/k) = Q_a(k) + F_a(k+1,k)P_a(k/k)F_a^T(k+1,k)$
$k = 0, 1, \dots$
$x_{a0} = x_a(0/-1) = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{w0} \\ x_{v0} \end{bmatrix}$
$P_{a0} = P_a(0/-1) = \begin{bmatrix} P_0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{w0} & 0 \\ 0 & 0 & P_{v0} \end{bmatrix}$

Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν οι αντίστροφοι πίνακες που εμφανίζονται στην εξίσωση του κέρδους, μπορεί να γίνει χρήση του ψευδοαντίστροφου πίνακα (pseudo-inverse).

#### Παράδειγμα. Έγχρωμοι θόρυβοι σε χρονικά αμετάβλητο μοντέλο.

Στο παράδειγμα αυτό θεωρείται ένα βαθμωτό μοντέλο ( $n=1$  και  $m=1$ ), με παραμέτρους:

$$F = 0.9$$

$$H = 1$$

$$Q = 0.1$$

$$R = 0.2$$

Επίσης, οι θόρυβοι είναι έγχρωμοι με παραμέτρους:

$$F_w = 0.8$$

$$H_w = 1$$

$$F_v = 0.7$$

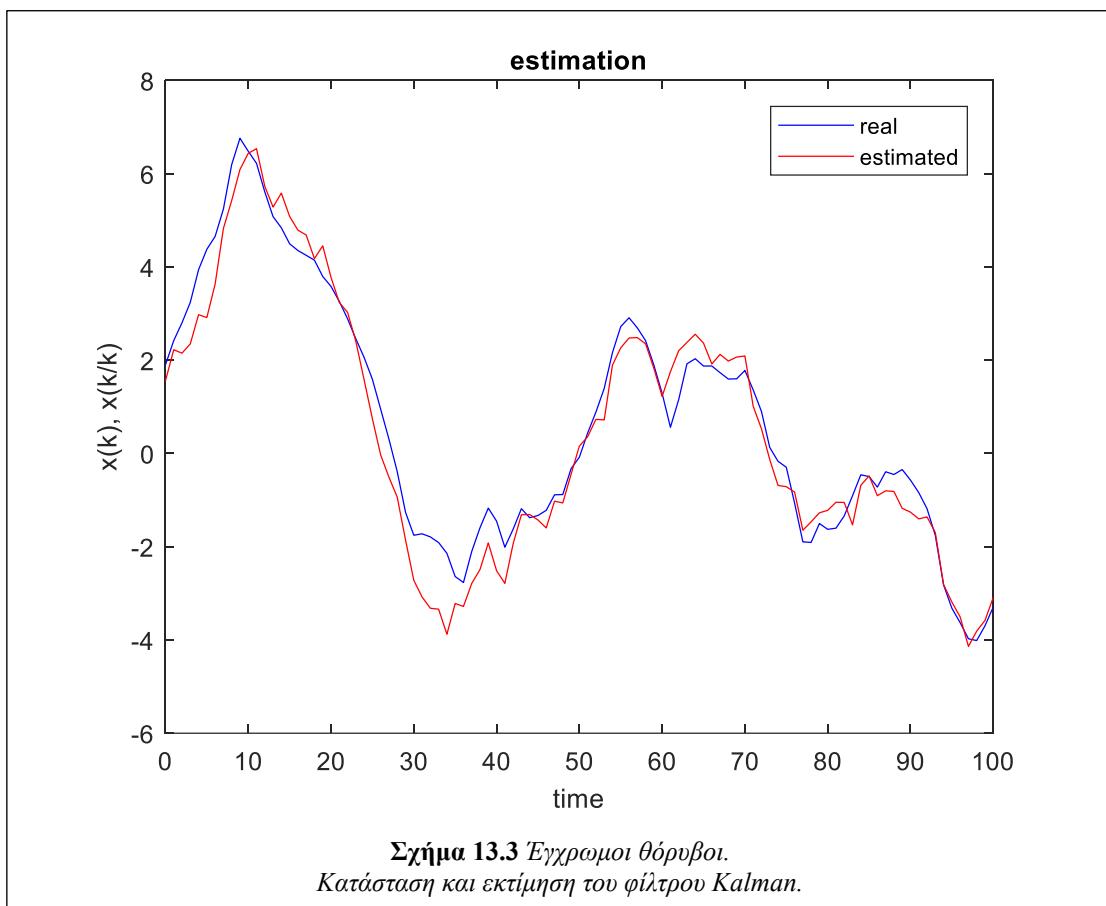
$$H_v = 1$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι:

$$x_a(0 / -1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_a(0 / -1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Στο Σχήμα 13.3 παρουσιάζεται η κατάσταση και η εκτίμηση του φίλτρου Kalman για έγχρωμους θορύβους.



### 13.3 Ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τους συντελεστές του Φίλτρου Kalman Μόνιμης Κατάστασης (Steady State Kalman Filter) με μη μηδενικές μέσες τιμές θορύβων και παραμέτρους:  $F = 0.9, H = 1, Q = 2, R = 0, u = 2, s = 1$ .

2. Να υπολογίσετε  $x(2/1)$  και  $P(2/1)$  για το Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman (Time Invariant Kalman Filter) με παραμέτρους:  $F = 0.9, H = 1, Q = 2, R = 1, u = 2, s = 1$  και αρχικές συνθήκες  $x_0 = 0, P_0 = 1$ .

3. Να αποδείξετε ότι ο πίνακας μεταφοράς για το Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο Kalman (Time Varying Kalman Filter) με έγχρωμους θορύβους είναι:

$$F_a(k+1,k) = \begin{bmatrix} F(k+1,k) & H_w(k) & 0 \\ 0 & F_w(k+1,k) & 0 \\ 0 & 0 & F_v(k+1,k) \end{bmatrix}$$

4. Να υπολογίσετε τις παραμέτρους για το Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman (Time Invariant Kalman Filter) με έγχρωμους θορύβους, όταν  $F = 0.9, H = 1, Q = 0.1, R = 0.2$  και οι θόρυβοι είναι έγχρωμοι με παραμέτρους  $F_w = 0.8, H_w = 1, F_v = 0.7, H_v = 1$ .

5. Να υπολογίσετε τις παραμέτρους για το Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman (Time Invariant Kalman Filter) με έγχρωμους θορύβους, όταν  $F = 0.9, H = 1, Q = 0.1, R = 0.2$ , οι θόρυβοι είναι έγχρωμοι με

παραμέτρους  $F_w = 0.8, H_w = 1, F_v = 0.7, H_v = 1$  και  $P_{a0} = P_a(0/-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. Να υπολογίσετε τον πίνακα μεταφοράς  $F_a$  και τον πίνακα εξόδου  $H_a$  για το Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman (Time Invariant Kalman Filter) με έγχρωμους θορύβους, όταν το επαυξημένο (augmented) διάνυσμα κατάστασης είναι:

$$x_a(k) = \begin{bmatrix} x_w(k) \\ x_v(k) \\ x(k) \end{bmatrix}$$

## 13.4 Περίληψη

Το γραμμικό μοντέλο διακριτού χρόνου μπορεί να επεκταθεί στην περίπτωση που οι θόρυβοι έχουν μη μηδενικές μέσες τιμές και στην περίπτωση που οι θόρυβοι δεν είναι λευκοί (white noises), αλλά είναι έγχρωμοι θόρυβοι (colored noises).

Οι μη μηδενικές μέσες τιμές των θορύβων επηρεάζουν τις εξισώσεις της εκτίμησης και της πρόβλεψης.

Στην περίπτωση που οι θόρυβοι είναι έγχρωμοι (colored) ορίζεται το επαυξημένο (augmented) διάνυσμα κατάστασης.

Μπορείτε να ακούσετε την περίληψη με τον Ήχο 13.1.



**Ήχος 13.1 Περίληψη – Κεφάλαιο 13.**

## 13.5 Κριτήριο Αξιολόγησης

Απαντήστε με Σωστό ή Λάθος.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Το γραμμικό μοντέλο διακριτού χρόνου μπορεί να επεκταθεί στην περίπτωση που οι θόρυβοι έχουν μη μηδενικές μέσες τιμές και στην περίπτωση που οι θόρυβοι είναι έγχρωμοι.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Στην περίπτωση που ο θόρυβος των μετρήσεων έχει μη μηδενική μέση τιμή ισχύει η σχέση  $v'(k) = v(k) + s(k)$  και η στοχαστική διαδικασία  $\{v(k)\}$  ακολουθεί την κανονική κατανομή (Gaussian distribution), έχει μηδενική μέση τιμή και είναι λευκή διαδικασία (white process) με συνδιασπορά  $R(k)$ .

### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Η μη μηδενική μέση τιμή της στοχαστικής διαδικασίας του θορύβου των μετρήσεων επηρεάζει την εξίσωση της εκτίμησης.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Στην περίπτωση που ο θόρυβος των μετρήσεων έχει μη μηδενική μέση τιμή υπάρχει πάντα Φίλτρο Kalman Μόνιμης Κατάστασης (Steady State Kalman Filter) με μη μηδενική μέση τιμή θορύβου.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Στο Φίλτρο Kalman Μόνιμης Κατάστασης (Steady State Kalman Filter) με μη μηδενικές μέσες τιμές θορύβων ισχύει η σχέση:  $C = [I - KH]s - Ku$ .

### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Στην περίπτωση που η στοχαστική διαδικασία  $\{v'(k)\}$  είναι έγχρωμη, ισχύει η σχέση  $v'(k) = H_v(k)x_v(k)$  και η στοχαστική διαδικασία  $\{v(k)\}$  ακολουθεί την κανονική κατανομή (Gaussian distribution), έχει μηδενική μέση τιμή και είναι λευκή διαδικασία (white process) με συνδιασπορά  $R(k)$ .

### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

Στην περίπτωση που οι θόρυβοι είναι έγχρωμοι, ορίζεται το επαυξημένο (augmented) διάνυσμα κατάστασης  $x_a(k)$ , το οποίο αποτελείται από τις καταστάσεις  $x(k), x_w(k), x_v(k)$ .

### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

Στην περίπτωση που οι θόρυβοι είναι έγχρωμοι, ισχύει η σχέση:

$$F_a(k+1,k) = \begin{bmatrix} F(k+1,k) & 0 & 0 \\ 0 & F_w(k+1,k) & 0 \\ 0 & 0 & F_v(k+1,k) \end{bmatrix}$$

### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

Στην περίπτωση που οι θόρυβοι είναι έγχρωμοι, ισχύει η σχέση:  $H_a(k) = [H(k) \quad H_w(k) \quad H_v(k)]$

### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Στην περίπτωση που οι θόρυβοι είναι έγχρωμοι, ισχύει η σχέση:  $Q_a(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q(k) & 0 \\ 0 & 0 & R(k) \end{bmatrix}$

Θα βρείτε την Απάντηση στο Κριτήριο Αξιολόγησης στο Παράρτημα A'.

Μπορείτε να κάνετε το Κριτήριο Αξιολόγησης με το Διαδραστικό Πρόγραμμα 13.1.



**Διαδραστικό Πρόγραμμα 13.1 Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 13.**

## **Βιβλιογραφία/Αναφορές**

- Anderson, B. D. O., Moore, J. B. (2005). *Optimal Filtering*. Dover Publications, New York.
- Ασημάκης, Ν. (2009). *Φίλτρα Kalman και Λαϊνιώτη*. Εκδόσεις ΑΠΑΚΥΝΘΟΣ.

# Κεφάλαιο 14 Επεκταμένο Φίλτρο Kalman (Extended Kalman Filter)

## Σύνοψη

Στο κεφάλαιο παρουσιάζεται το μη γραμμικό μοντέλο. Παρουσιάζεται το επεκταμένο φίλτρο Kalman (extended Kalman filter) και δίνεται παράδειγμα μη γραμμικής εκτίμησης με αυτό.

## Προσπατούμενη γνώση

Γραμμικό μοντέλο, Φίλτρο Kalman.

### 14.1 Μη γραμμικό μοντέλο

Το **μη γραμμικό μοντέλο (nonlinear model)** διακριτού χρόνου περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) + w(k) \quad (14.1)$$

$$z(k) = h(x(k)) + v(k) \quad (14.2)$$

για  $k \geq 0$ , όπου οι μη γραμμικές συναρτήσεις  $f(x(k), u(k))$  και  $h(x(k))$  είναι διανυσματικές συναρτήσεις διανυσματικών μεταβλητών.

Ισχύουν οι στατιστικές υποθέσεις του γραμμικού μοντέλου, δηλαδή οι στοχαστικές διαδικασίες του θορύβου κατάστασης και του θορύβου μετρήσεων ακολουθούν την **κανονική κατανομή (Gaussian distribution)**, έχουν μηδενικές μέσες τιμές και είναι λευκές (white processes) με γνωστές συνδιασπορές  $Q(k)$  και  $R(k)$  αντιστοίχως, η αρχική τιμή  $x(0)$  της κατάστασης είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την **κανονική κατανομή (Gaussian distribution)** με γνωστή μέση τιμή  $x_0$  και συνδιασπορά  $P_0$ , ενώ οι στοχαστικές διαδικασίες των θορύβων και η τυχαία μεταβλητή  $x(0)$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

### 14.2 Μη γραμμική εκτίμηση

Το Επεκταμένο Φίλτρο Kalman (Extended Kalman Filter) [Anderson & Moore (2005)] είναι ο πλέον γνωστός αλγόριθμος μη γραμμικής εκτίμησης. Το παραδοσιακό Επεκταμένο Φίλτρο Kalman (Extended Kalman filter) γραμμικοποιεί ένα μη γραμμικό σύστημα χρησιμοποιώντας τον πρώτο όρο της επέκτασης Taylor (Taylor expansion) και υπολογίζει την εκτίμηση  $x(k/k)$  και τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης  $P(k/k)$ , καθώς και την πρόβλεψη  $x(k/k-1)$  και τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης  $P(k/k-1)$ . Το High Order Extended Kalman Filter [Roth and Gustafsson (2011)] βασίζεται σε υψηλότερους όρους της επέκτασης Taylor (Taylor expansion). Το Square Root Extended Kalman Filter [Šmilid and Peroutka (2012)] χρησιμοποιεί την τετραγωνική ρίζα  $S(k/k)$  της συνδιασποράς λάθους εκτίμησης  $P(k/k)$ , δηλαδή η συνδιασπορά εκτίμησης αντικαθίσταται από  $P(k/k) = S(k/k)S^T(k/k)$ . Το Sigma-Point Kalman Filter [Van Der Merwe, Wan, Julier (2004)] εφαρμόζει ένα πιθανοτικό πλαίσιο. Το Unscented Kalman Filter [Julier & Uhlmann (1997)] χρησιμοποιεί ένα σύνολο κατάλληλα επιλεγμένων σταθμισμένων σημείων για την παραμετροποίηση των μέσων τιμών και των συνδιασπορών. Το Extended Information Kalman Filter [Thrun, Burgard, Fox (2005)] χρησιμοποιεί τον αντίστροφο πίνακα  $P^{-1}(k/k)$  του πίνακα  $P(k/k)$  και το διάνυσμα (information state vector)  $y(k/k) = P^{-1}(k/k)x(k/k)$ . Το Ensemble Kalman filter [Roth, Fritzsche, Hendeby, Gustafson (2015)] υπολογίζει σύνολα με πραγματικές καταστάσεις αντί για μέσες τιμές και συνδιασπορές. Το Particle Kalman Filter [Hoteit, Luo, Pham, (2011)] χρησιμοποιεί τον σταθμισμένο μέσο όρο ενός συνόλου φίλτρων Kalman που λειτουργούν παράλληλα. Το Adaptive Extended Kalman Filter [Lippiello, Siciliano, Villani, (2007)] είναι μία προσαρμοστική εκδοχή του Επεκταμένου Φίλτρου Kalman. Το Adaptive Unscented Kalman Filter [Han, Song, He, (2009)] διαχειρίζεται χρονικά μεταβαλόμενη ή αβέβαιη κατανομή θορύβου. Το Dual Kalman Filter [Wan, Nelson, (2001)] εκτιμά την κατάσταση και το μοντέλο συνδυάζοντας ταυτόχρονα δύο επεκταμένα φίλτρα Kalman. Το Rhythmic Extended Kalman Filter [Joukov, Bonnet, Karg, Venture, Kulic, (2018)] χρησιμοποιείται σε περιοδική κίνηση.

### 14.3 Επεκταμένο φίλτρο Kalman (Extended Kalman Filter – EKF)

Η γραμμικοποίηση των μη γραμμικών διανυσματικών συναρτήσεων  $f(x(k), u(k))$  και  $h(x(k))$  γίνεται μέσω της **επέκτασης Taylor (Taylor expansion)** με χρήση της πρώτης παραγώγου:

$$f(x(k), u(k)) = f(x(k/k), u(k)) + \left. \frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial x} \right|_{x=x(k/k)} (x(k) - x(k/k)) \quad (14.3)$$

$$h(x(k)) = h(x(k/k-1)) + \left. \frac{\partial h(x(k))}{\partial x} \right|_{x=x(k/k-1)} (x(k) - x(k/k-1)) \quad (14.4)$$

Για το μη γραμμικό μοντέλο, από τη χρήση των παραγώγων των μη γραμμικών διανυσματικών συναρτήσεων  $f(x(k))$  και  $h(x(k))$ , προκύπτει το Επεκταμένο Φίλτρο Kalman (Extended Kalman Filter – EKF) [Anderson & Moore (2005)]:

<b>Επεκταμένο Φίλτρο Kalman Extended Kalman Filter (EKF)</b>
$F(k+1, k) = \left. \frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial x} \right _{x=x(k/k)}$
$H(k) = \left. \frac{\partial h(x(k))}{\partial x} \right _{x=x(k/k-1)}$
$K(k) = P(k/k-1)H^T(k) \left[ H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k) \right]^{-1}$
$x(k/k) = x(k/k-1) + K(k)[z(k) - h(x(k/k-1))]$
$P(k/k) = [I - K(k)H(k)]P(k/k-1)$
$x(k+1/k) = f(x(k/k), u(k))$
$P(k+1/k) = Q(k) + F(k+1, k)P(k/k)F^T(k+1, k)$
$k = 0, 1, \dots$
$x(0/-1) = x_0$
$P(0/-1) = P_0$

Ο **ιακωβιανός πίνακας (jacobian matrix)** των συναρτήσεων

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

είναι:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Τον ρόλο του πίνακα μεταφοράς παίζει ο ιακωβιανός πίνακας (jacobian matrix)

$$F(k+1, k) = \left. \frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial x} \right|_{x=x(k/k)} \quad (14.5)$$

Τον ρόλο του πίνακα εξόδου παίζει ο ιακωβιανός πίνακας (jacobian matrix)

$$H(k) = \left. \frac{\partial h(x(k))}{\partial x} \right|_{x=x(k/k-1)} \quad (14.6)$$

### Παράδειγμα. Επεκταμένο φίλτρο Kalman.

Στο παράδειγμα αυτό θεωρείται ένα βαθμωτό ( $n = 1$  και  $m = 1$ ) μη γραμμικό μοντέλο που περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$x(k+1) = x(k) + w(k)$$

$$h(x(k)) = \cos(x(k))$$

με παραμέτρους:

$$Q = 0.1$$

$$R = 0.1$$

και με αρχικές συνθήκες:

$$x(0 / -1) = x_0 = 1$$

$$P(0 / -1) = P_0 = 1$$

Οι μη γραμμικές συναρτήσεις  $f(x(k))$  και  $h(x(k))$  είναι:

$$f(x(k)) = x(k)$$

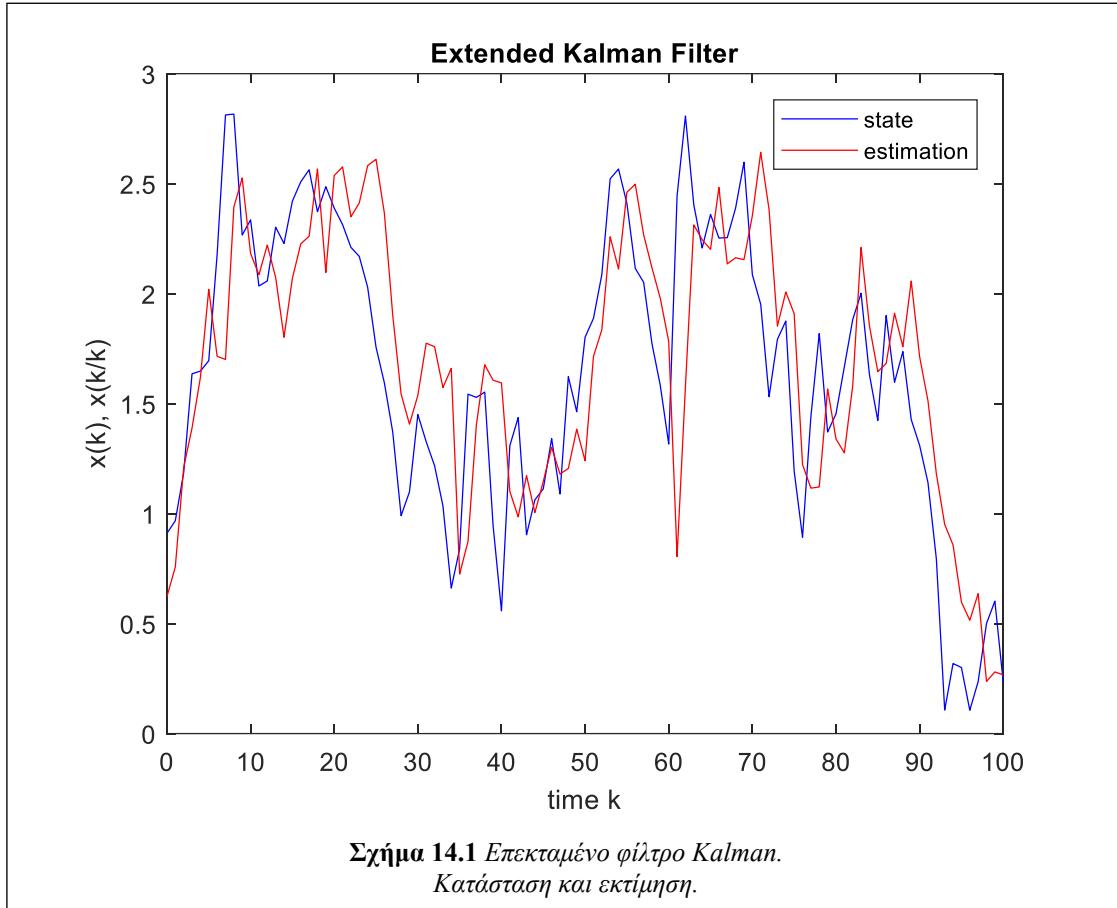
$$h(x(k)) = \cos(x(k))$$

Οπότε, οι παράγωγοι των συναρτήσεων  $f(x(k))$  και  $h(x(k))$  υπολογίζονται όπως παρακάτω:

$$F(k+1, k) = \left. \frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial x} \right|_{x=x(k/k)} = \left. \frac{\partial x}{\partial x} \right|_{x=x(k/k)} = 1$$

$$H(k) = \left. \frac{\partial h(x(k))}{\partial x} \right|_{x=x(k/k-1)} = \left. \frac{\partial \cos(x(k))}{\partial x} \right|_{x=x(k/k-1)} = -\sin(x(k / k - 1))$$

Στο Σχήμα 14.1 παρουσιάζεται η κατάσταση και η εκτίμηση του Επεκταμένου Φίλτρου Kalman (Extended Kalman Filter).



### Παράδειγμα. Εκτίμηση παραμέτρου με επεκταμένο φίλτρο Kalman.

Στο παράδειγμα αυτό θεωρείται ένα γραμμικό μοντέλο που περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$x(k+1) = cx(k) + w(k)$$

$$z(k) = x(k) + v(k)$$

με άγνωστη παράμετρο  $c$ .

Προκειμένου να γίνει εκτίμηση της άγνωστης παραμέτρου  $c$ , ορίζεται η νέα κατάσταση  $p(k) = c$  και χρησιμοποιείται η επαυξημένη κατάσταση (augmented state):

$$x_a(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ p(k) \end{bmatrix}$$

και το μη γραμμικό μοντέλο που περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$x_a(k+1) = \begin{bmatrix} x(k+1) \\ p(k+1) \end{bmatrix} = f(x_a(k)) + w_a(k) = \begin{bmatrix} p(k)x(k) \\ p(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w(k) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z(k) = h(x_a(k)) + v(k) = p(k)x(k) + v(k)$$

με παραμέτρους:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = 1$$

και με αρχικές συνθήκες:

$$x(0 / -1) = x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$P(0 / -1) = P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Η προς εκτίμηση (άγνωστη) παράμετρος είναι  $c = 1.2$ .

Οι μη γραμμικές συναρτήσεις  $f(x_a(k))$  και  $h(x_a(k))$  είναι:

$$f(x_a(k)) = \begin{bmatrix} p(k)x(k) \\ p(k) \end{bmatrix}$$

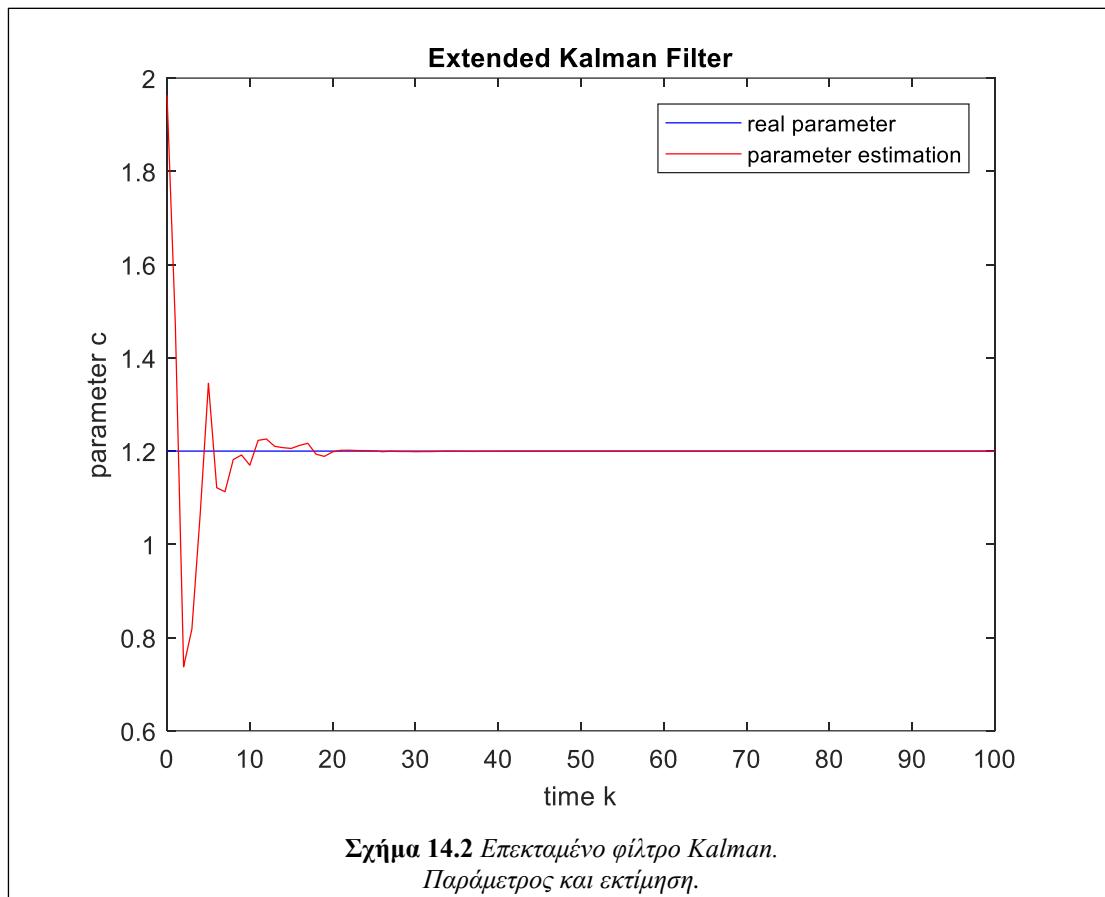
$$h(x_a(k)) = p(k)x(k)$$

Οπότε, οι παράγωγοι των συναρτήσεων  $f(x_a(k))$  και  $h(x_a(k))$  υπολογίζονται όπως παρακάτω:

$$F(k+1, k) = \frac{\partial f(x_a(k))}{\partial x} \Big|_{x=x(k/k)} \begin{bmatrix} p(k/k) & x(k/k) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H(k) = \frac{\partial h(x_a(k))}{\partial x} \Big|_{x=x(k/k-1)} = [p(k/k-1) \quad x(k/k-1)]$$

Στο Σχήμα 14.2 παρουσιάζεται η πραγματική παράμετρος και η εκτίμηση του Επεκταμένου Φίλτρου Kalman (Extended Kalman Filter).



## 14.4 Ασκήσεις

1. Δίνεται το μη γραμμικό μοντέλο:

$$x(k+1) = \sqrt{2+x(k)} + w(k)$$

$$z(k) = x^3(k) + v(k)$$

$$\text{Να υπολογίσετε τις παραμέτρους } F(k+1, k) = \left. \frac{\partial f(x(k))}{\partial x} \right|_{x=x(k/k)} \text{ και } H(k) = \left. \frac{\partial h(x(k))}{\partial x} \right|_{x=x(k/k-1)}$$

2. Δίνεται το μη γραμμικό μοντέλο:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + w(k)$$

$$z(k) = x_3(k) \sin(x_1(k)) + v(k)$$

όπου η κατάσταση είναι:

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

$$\text{Να υπολογίσετε τις παραμέτρους } F(k+1, k) = \left. \frac{\partial f(x(k))}{\partial x} \right|_{x=x(k/k)} \text{ και } H(k) = \left. \frac{\partial h(x(k))}{\partial x} \right|_{x=x(k/k-1)}$$

## 14.5 Περίληψη

Το Επεκταμένο Φίλτρο Kalman (Extended Kalman filter) είναι ο πλέον γνωστός αλγόριθμος μη γραμμικής εκτίμησης. Το Επεκταμένο Φίλτρο Kalman (Extended Kalman filter) γραμμικοποιεί ένα μη γραμμικό σύστημα χρησιμοποιώντας τον πρώτο όρο της επέκτασης Taylor (Taylor expansion) και υπολογίζει την εκτίμηση  $x(k/k)$  και τη συνδιασπορά λάθους εκτίμησης  $P(k/k)$ , καθώς και την πρόβλεψη  $x(k/k-1)$  και τη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης  $P(k/k-1)$ .

Μπορείτε να ακούσετε την περίληψη με τον Ήχο 14.1.



Ήχος 14.1 Περίληψη – Κεφάλαιο 14.

## 14.6 Κριτήριο Αξιολόγησης

Απαντήστε με Σωστό ή Λάθος.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Στο μη γραμμικό μοντέλο διακριτού χρόνου δεν ισχύουν οι στατιστικές προϋποθέσεις του γραμμικού μοντέλου.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Στο μη γραμμικό μοντέλο διακριτού χρόνου οι συνδιασπορές των θορύβων μπορεί να είναι χρονικά αμετάβλητες.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Οι μη γραμμικές συναρτήσεις  $f(x(k), u(k))$  και  $h(x(k))$  είναι διανυσματικές συναρτήσεις διανυσματικών μεταβλητών.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Οι ιακωβιανοί πίνακες  $F(k+1, k)$  και  $H(k)$  είναι, γενικά, χρονικά μεταβαλλόμενοι.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Τον ρόλο του πίνακα μεταφοράς παίζει ο ιακωβιανός πίνακας  $F(k+1, k) = \left. \frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial x} \right|_{x=x(k/k)}$

### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Τον ρόλο του πίνακα εξόδου παίζει ο ιακωβιανός πίνακας  $H(k) = \left. \frac{\partial h(x(k))}{\partial x} \right|_{x=x(k/k)}$

### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

$$x(k+1/k) = f(x(k/k), u(k))$$

### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

$$K(k) = P(k/k-1)H^T(k) \left[ H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k) \right]$$

### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

Το Επεκτεταμένο Φίλτρο Kalman (Extended Kalman Filter) γραμμικοποιεί ένα μη γραμμικό σύστημα χρησιμοποιώντας την επέκταση Taylor (Taylor expansion).

### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Το Επεκταμένο Φίλτρο Kalman (Extended Kalman Filter) χρησιμοποιείται στη μη γραμμική εκτίμηση.

Θα βρείτε την Απάντηση στο Κριτήριο Αξιολόγησης στο Παράρτημα A'.

Μπορείτε να κάνετε το Κριτήριο Αξιολόγησης με το Διαδραστικό Πρόγραμμα 14.1.



Διαδραστικό Πρόγραμμα 14.1 Κριτήριο Αξιολόγησης – Κεφάλαιο 14.

## Βιβλιογραφία/Αναφορές

- Anderson, B. D. O., Moore, J. B. (2005). *Optimal Filtering*. Dover Publications, New York.
- Han, J., Song, Q. & He, Y.Q. (2009). Adaptive Unscented Kalman Filter and Its Applications in Nonlinear Control. In book: *Kalman Filter Recent Advances and Applications*.
- Hoteit, I., Luo, X. & Pham, D. (2011). Particle Kalman Filtering: A Nonlinear Bayesian Framework for Ensemble Kalman Filters. *Monthly Weather Review*, vol. 140, no 2.
- Joukov, V., Bonnet, V., Karg, M., Venture, G. & Kulic, D. (2018). Rhythmic Extended Kalman Filter for Gait Rehabilitation Motion Estimation and Segmentation. *IEEE Trans Neural Syst Rehabil Eng*, vol. 26, no 2, pp. 407-418.
- Julier, S.J., Uhlmann, J.K. (1997). A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems. *The 11th Int. Symp. on Aerospace/Defence Sensing, Simulation and Controls*.
- Lippiello, V., Siciliano, B. & Villani, L. (2007). Adaptive extended Kalman filtering for visual motion estimation of 3D objects. *Control Engineering Practice*, vol. 15, issue 1, pp. 123-134.
- Roth, M., Fritzsche, C., Hendeby, G. & Gustafsson, F. (2015). The ensemble Kalman filter and its relations to other nonlinear filters. *23rd European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*.
- Roth, M., Gustafsson, F. (2011). An efficient implementation of the second order extended Kalman filter. *14th International Conference on Information Fusion (FUSION)*.
- Šmídl, V., Peroutka, Z. (2012). Advantages of Square-Root Extended Kalman Filter for Sensorless Control of AC Drives. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 59, no 11, pp. 4189-4196.
- Thrun, S., Burgard, W. & Fox, D. (2005). *Probabilistic robotics*. MIT press.
- Van Der Merwe, R., Wan, E.A. (2004). Sigma-Point Kalman Filters for Nonlinear Estimation and Sensor-Fusion—Applications to Integrated Navigation. *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*.
- Wan, E.A., Nelson, A.T. (2001). Dual Extended Kalman Filter Methods. In book: *Kalman Filtering and Neural Networks*. John Wiley & Sons, Inc.

# Παράρτημα Α'. Απαντήσεις Κριτηρίων Αξιολόγησης

## Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

$x(\ell/k)$  είναι η εκτίμηση της κατάστασης τη χρονική στιγμή  $\ell$  δεδομένης της μέτρησης τη χρονική στιγμή  $k$ , χρησιμοποιώντας ένα προκαθορισμένο βέλτιστο κριτήριο.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Οι τύποι εκτίμησης είναι η πρόβλεψη και η λείανση.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Πρόβλεψη μπορεί να γίνει κατά πολλά βήματα.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

$x(101/100)$  σημαίνει πρόβλεψη τη χρονική στιγμή 101, δεδομένων των μετρήσεων μέχρι και τη χρονική στιγμή 100.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Το κριτήριο βέλτιστης εκτίμησης είναι η ελαχιστοποίηση του τετραγώνου του λάθους εκτίμησης.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Δεν επιτρέπεται το διάνυσμα κατάστασης και το διάνυσμα μετρήσεων να έχουν ίσες διαστάσεις.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

Ο πίνακας μεταφοράς είναι διαστάσεων  $n \times n$ .

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

Η αρχική τιμή της κατάστασης είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

Οι συνδιασπορές  $Q(k)$  και  $R(k)$  μπορούν να είναι χρονικά αμετάβλητες:  $Q(k) = Q$  και  $R(k) = R$ .

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Δεν επιτρέπεται  $Q = R$ .

---

## **Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2**

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 1**

Το φίλτρο Kalman είναι επαναληπτικός αλγόριθμος. 

---

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 2**

x(2/1) σημαίνει εκτίμηση τη χρονική στιγμή 1. 

---

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 3**

x(3/2) σημαίνει πρόβλεψη τη χρονική στιγμή 3 δεδομένων των μετρήσεων μέχρι και τη χρονική στιγμή 2. 

---

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 4**

Το κέρδος  $K(k)$  του φίλτρου Kalman είναι πίνακας διαστάσεων  $n \times n$ . 

---

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 5**

Όλες οι παράμετροι του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman είναι σταθερές. 

---

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 6**

Όταν ο θόρυβος των μετρήσεων είναι άπειρος, τότε το κέρδος του φίλτρου Kalman είναι άπειρο. 

---

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 7**

Για κάθε γραμμικό μοντέλο υπάρχει φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης. 

---

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 8**

Για κάθε γραμμικό μοντέλο υπάρχει φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης. 

---

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 9**

Στη μόνιμη κατάσταση το κέρδος του φίλτρου Kalman παραμένει σταθερό. 

---

### **ΕΡΩΤΗΣΗ 10**

Οι συντελεστές του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης εξαρτώνται από όλες τις παραμέτρους του μοντέλου. 

---

## Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Η λύση της εξίσωσης Riccati μπορεί να υπολογιστεί πριν την υλοποίηση του φίλτρου Kalman.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Αν το μοντέλο είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, τότε η εξίσωση Riccati έχει λύση.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Η εξίσωση Riccati έχει μία μοναδική λύση, η οποία είναι θετικά ημιορισμένος πίνακας.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Η λύση της εξίσωσης Riccati είναι πάντα συμμετρικός πίνακας.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Το κριτήριο σύγκλισης των επαναληπτικών αλγορίθμων δεν επηρεάζει το πλήθος των επαναλήψεων.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$  είναι συμπλεκτικός.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

Οι πίνακες  $b(k), c(k)$  στον αλγόριθμο διπλασιασμού είναι συμμετρικοί.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

Ο αλγόριθμος διπλασιασμού δεν μπορεί να εφαρμοστεί, όταν ο πίνακας μεταφοράς είναι ο μοναδιαίος πίνακας.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

Ο συμπλεκτικός πίνακας  $\Phi$  του αλγορίθμου διπλασιασμού είναι διαστάσεων  $2n \times 2n$ .

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Αν η εξίσωση Riccati έχει λύση, τότε ο επαναληπτικός ανά βήμα αλγόριθμος συγκλίνει στη λύση για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη.

---

## Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Η εξίσωση Lyapunov είναι ειδική περίπτωση της εξίσωσης Riccati για μηδενικό θόρυβο μετρήσεων.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Η εξίσωση Lyapunov έχει πάντα λύση.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Η εξίσωση Lyapunov αντιστοιχεί σε ένα σύστημα  $\frac{n^2 + n}{2}$  αλγεβρικών εξισώσεων.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Η λύση της εξίσωσης Lyapunov είναι πάντα συμμετρικός πίνακας.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Όσο μειώνεται η τιμή του κριτηρίου σύγκλισης  $\varepsilon$ , τόσο αυξάνεται η ακρίβεια του υπολογισμού.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$  είναι συμπλεκτικός.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

Οι πίνακες  $a(k), c(k)$  στον αλγόριθμο διπλασιασμού είναι συμμετρικοί.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

Ο συμπλεκτικός πίνακας  $\Phi$  του αλγορίθμου διπλασιασμού είναι διαστάσεων  $2n \times 2n$ .

### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

Στον αλγόριθμο διπλασιασμού, όσο μειώνεται η τιμή του κριτηρίου σύγκλισης  $\varepsilon$ , τόσο αυξάνεται η ακρίβεια του υπολογισμού.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Οι αρχικές συνθήκες του αλγορίθμου διπλασιασμού είναι  $a(1) = F^T$  και  $c(1) = Q$ .

## Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Το φίλτρο Kalman πληροφορίας είναι επαναληπτικός αλγόριθμος.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

$S(k / k) = P^{-1}(k / k)$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

$y(k / k) = P(k / k)x(k / k)$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Το κέρδος  $K(k)$  του φίλτρου Kalman πληροφορίας είναι πίνακας διαστάσεων  $m \times m$ .

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Όλες οι παράμετροι του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman πληροφορίας είναι σταθερές.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

$S_e K = H^T R^{-1}$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

$P_p^{-1} = S_p$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

$S_p F = S_e [I - KH]F$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

Οι συντελεστές του φίλτρου Kalman πληροφορίας μόνιμης κατάστασης μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας τη λύση της εξίσωσης Lyapunov.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Το φίλτρο Kalman Πληροφορίας και το φίλτρο Kalman υπολογίζουν θεωρητικά τις ίδιες εκτιμήσεις και τις ίδιες συνδιασπορές λάθους εκτίμησης.

---

## Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Η ύπαρξη των αντίστροφων πινάκων στην ειδική εξίσωση Riccati εξασφαλίζεται στην περίπτωση που οι πίνακες  $Q$  και  $R$  είναι θετικά ορισμένοι.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Αν η εξίσωση Riccati έχει λύση, τότε ο ειδικός ανά βήμα αλγόριθμος συγκλίνει στη λύση για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

$$P(k+1/k) = Q + F \left[ P(k/k-1) + H^T R^{-1} H \right]^{-1} F^T \quad \text{✗}$$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Στον ειδικό αλγόριθμο διπλασιασμού, οι πίνακες  $\beta(k)$  και  $\gamma(k)$  είναι θετικά ορισμένοι.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

$$\Pi(k+1/k) = H^T R^{-1} H + F^T \left[ \Pi^{-1}(k/k-1) + Q \right]^{-1} F \quad \text{✓}$$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Οι αρχικές συνθήκες του ειδικού αλγόριθμου διπλασιασμού είναι  $a_d(1) = F$ ,  $b_d(1) = H^T R^{-1} H$ ,  $c_d(1) = Q$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

$$\lim c(k) = \lim b_d(k) = P_p \quad \text{✓}$$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

$$\lim b(k) = \lim b_d(k) = \Pi_p \quad \text{✗}$$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

$$a^{-1} = \gamma \alpha^{-T}, a^{-1}b = \gamma \alpha^{-T} \beta - \alpha, ca^{-1} = \alpha^{-T}, a^T + ca^{-1}b = \alpha^{-T} \beta \quad \text{✓}$$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Αν η εξίσωση Riccati έχει λύση, τότε η δυϊκή εξίσωση Riccati δεν έχει λύση.

---

## Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Το φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους δεν είναι επαναληπτικός αλγόριθμος. ✗

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

$$\Lambda(k) = [I - K(k)H(k)]K(k) \quad \text{✗}$$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

$$\Lambda(k) = P(k / k-1)H^T(k)R^{-1}(k) \quad \text{✓}$$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Ο λόγος  $\Lambda(k)$  του φίλτρου Kalman με απαλοιφή κέρδους είναι πίνακας διαστάσεων  $n \times m$ . ✓

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Στο βαθμωτό μοντέλο, όπου  $n = 1$  και  $m = 1$ , ισχύει η σχέση  $\Lambda(k) \geq 0$ . ✓

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Στη μόνιμη κατάσταση, ο λόγος τείνει στη σταθερή τιμή  $\Lambda = P_p H^T R^{-1}$  ✓

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

$$I - K(k)H(k) = I + P(k / k-1)H^T(k)R^{-1}(k)H(k) \quad \text{✗}$$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

$$[I + P_p H^T R^{-1} H] \Lambda = K \quad \text{✗}$$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

Οι συντελεστές του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης με απαλοιφή κέρδους μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας τη λύση της εξίσωσης Riccati. ✓

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Το φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους και το φίλτρο Kalman υπολογίζουν θεωρητικά τις ίδιες εκτιμήσεις και τις ίδιες συνδιασπορές λάθους εκτίμησης. ✓

---

## Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Ο υπολογιστικός χρόνος των φίλτρων Kalman είναι ανάλογος του υπολογιστικού φόρτου των φίλτρων Kalman. 

### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Η υλοποίηση των φίλτρων Kalman για πολυδιάστατα μοντέλα απαιτεί πράξεις πινάκων. 

### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Ο υπολογιστικός φόρτος (calculation burden) των πράξεων πινάκων εξαρτάται από τις διαστάσεις των πινάκων. 

### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Η γνώση των διαστάσεων του μοντέλου μπορεί να καθορίσει ποιο φίλτρο είναι το ταχύτερο. 

### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman πληροφορίας είναι ταχύτερο από το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman, όταν  $m > 2n$  

### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman είναι ταχύτερο από το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους, όταν  $m > 2n$  

### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

Το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους είναι ταχύτερο από το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman πληροφορίας, όταν  $n = 4$  

### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

Το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους είναι ταχύτερο από το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman πληροφορίας, όταν  $n = 15$  

### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

Τα φίλτρα χρονικά αμετάβλητα Kalman είναι ταχύτερα από τα φίλτρα Kalman μόνιμης κατάστασης. 

### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης, το φίλτρο Kalman πληροφορίας μόνιμης κατάστασης και το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης με απαλοιφή κέρδους έχουν ίσους υπολογιστικούς φόρτους και ίσους υπολογιστικούς χρόνους. 

## Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Ο υπολογιστικός χρόνος των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati είναι αντιστρόφως ανάλογος του υπολογιστικού φόρτου των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati. 

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Η υλοποίηση των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Riccati για πολυδιάστατα μοντέλα απαιτεί πράξεις πινάκων. 

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Ο υπολογιστικός φόρτος (calculation burden) των πράξεων πινάκων δεν εξαρτάται από τις διαστάσεις των πινάκων. 

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Η γνώση των διαστάσεων του μοντέλου μπορεί να καθορίσει ποιος αλγόριθμος είναι ο ταχύτερος. 

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Ο ειδικός ανά βήμα αλγόριθμος είναι ταχύτερος από τον ανά βήμα αλγόριθμο, όταν  $m > n$  

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Ο αλγόριθμος κυκλικής αναγωγής δεν είναι ο ταχύτερος αλγόριθμος διπλασιασμού. 

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

Ο αλγόριθμος διπλασιασμού είναι ταχύτερος από τον ανά βήμα αλγόριθμο, όταν το πλήθος των επαναλήψεων του ανά βήμα αλγορίθμου είναι μεγάλο. 

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

Η σχέση του πλήθους των επαναλήψεων των ανά βήμα αλγορίθμων  $s$  και των αλγορίθμων διπλασιασμού  $d$  είναι  $s = 2^d$  

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

$CB_{SPSA} < CB_{PSA}$  

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

$t_{DA} > t_{SDA} > t_{CRA}$  

---

## Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Ο υπολογιστικός χρόνος των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov είναι ανάλογος του υπολογιστικού φόρτου των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Η υλοποίηση των αλγορίθμων για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov για πολυδιάστατα μοντέλα δεν απαιτεί πράξεις πινάκων.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Ο υπολογιστικός φόρτος (calculation burden) των πράξεων πινάκων εξαρτάται από τις διαστάσεις των πινάκων.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Στον υπολογισμό του υπολογιστικού χρόνου των αλγορίθμων δεν λαμβάνεται υπόψη ο υπολογιστικός φόρτος των εκ των προτέρων υπολογισμών (off-line calculations), όπως είναι η αρχικοποίηση των αλγορίθμων.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Η γνώση της διάστασης  $n$  του μοντέλου μπορεί να καθορίσει ποιος αλγόριθμος είναι ο ταχύτερος.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Ο αλγόριθμος διπλασιασμού είναι ταχύτερος από τον ανά βήμα αλγόριθμο, όταν το πλήθος των επαναλήψεων του ανά βήμα αλγορίθμου είναι πολύ μικρό.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

Η σχέση του πλήθους των επαναλήψεων του ανά βήμα αλγορίθμου  $s$  και του αλγορίθμου διπλασιασμού  $d$  είναι  $d = 2^s$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

$$CB_{PSA} = 3n^3 \quad \checkmark$$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

$$t_{PSA} > t_{DA} \text{ αν } s \geq 2 \quad \times$$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Όταν αυξάνεται η διάσταση  $n$  του μοντέλου, τότε ο υπολογιστικός χρόνος του αλγορίθμου διπλασιασμού αυξάνεται.

---

## Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Στο παράδειγμα της εκτίμηση τυχαίας σταθεράς, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Η διακριτοποίηση του πίνακα μεταφοράς στον διακριτό χρόνο  $F$  υπολογίζεται από τον πίνακα μεταφοράς  $A$  στον συνεχή χρόνο με τον τύπο  $F = e^{A(\Delta t)}$ .

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Στο παράδειγμα της εκτίμησης της ημερήσιας διακύμανσης του ηλεκτρικού φορτίου, με χρήση του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης, όταν  $Q=R$ , το κέρδος του φίλτρου Kalman στη μόνιμη κατάσταση είναι  $K = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Στο παράδειγμα της εκτίμησης της εξόδου ενός AR φίλτρου με συντελεστές  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ , ο πίνακας εξόδου είναι:  $H = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \ a_8]$

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Στο παράδειγμα της εκτίμησης της ημερήσιας διακύμανσης του ηλεκτρικού φορτίου, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Στο παράδειγμα της εκτίμησης της κίνησης οφθαλμού (eye movement) η κίνηση του οφθαλμού μπορεί να μοντελοποιηθεί είτε σε δύο είτε σε τρεις διαστάσεις.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

Στο παράδειγμα της εκτίμησης της κίνησης οφθαλμού (eye movement), όπου η κίνηση μοντελοποιείται σε δύο διαστάσεις, το διάνυσμα κατάστασης περιλαμβάνει τη θέση (position) και την ταχύτητα (velocity) της κίνησης του οφθαλμού σε δύο διαστάσεις.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

Στο παράδειγμα της εκτίμησης της κίνησης οφθαλμού (eye movement), δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman.

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

Στο παράδειγμα της εκτίμησης της απόστασης που διανύεται με την κίνηση του τυχαίου περίπατου (random walk) οι παράμετροι του μοντέλου είναι:  $F=1$ ,  $H=1$ ,  $Q=1$ ,  $R=1$ .

---

### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Στο παράδειγμα της εκτίμησης της απόστασης που διανύεται με την κίνηση του τυχαίου περίπατου (random walk), ισχύει η σχέση:  $\varphi=1-\alpha$ , όπου  $P_p = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  και  $P_e = \alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

## Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Στο κατανεμημένο γραμμικό μοντέλο σε περιβάλλον πολλαπλών αισθητήρων ισχύει:  $\sum_{i=1}^p m_i = m$ .

### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Στα κατανεμημένα φίλτρα Kalman απαιτείται μεταφορά πληροφορίας από τους τοπικούς επεξεργαστές στο κεντρικό επίπεδο.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Στα κατανεμημένα φίλτρα Kalman, ο υπολογιστικός φόρτος εξαρτάται από το πλήθος  $p$  των επεξεργαστών και από την ελάχιστη διάσταση  $M$  των τοπικών διανυσμάτων μετρήσεων.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Στην ομοιόμορφη κατανομή (uniform distribution) των μετρήσεων στους παράλληλους επεξεργαστές, το διάνυσμα των μετρήσεων χωρίζεται σε ίσα μέρη.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Η ομοιόμορφη κατανομή των μετρήσεων στους παράλληλους επεξεργαστές έχει το πλεονεκτήματα ότι κανένας επεξεργαστής δεν μένει άεργος (idle).

### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Για το κατανεμημένο χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman, η βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή (optimal uniform distribution) των μετρήσεων στους επεξεργαστές, δεν μπορεί να καθοριστεί εκ των προτέρων (a-priori), δηλαδή, πριν την υλοποίηση του φίλτρου.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

Για το κατανεμημένο χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman, η θεωρητική βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή (optimal uniform distribution) των μετρήσεων στους επεξεργαστές είναι η χρήση  $p_{opt} = \sqrt{2m}$  επεξεργαστών, οι οποίοι επεξεργάζονται  $M_{opt} = \sqrt{m/2}$  μετρήσεις ο καθένας.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

Η βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή (optimal uniform distribution) έχει το πλεονέκτημα ότι είναι πάντα εφαρμόσιμη, αφού το βέλτιστο πλήθος των επεξεργαστών και το βέλτιστο πλήθος των μετρήσεων, τις οποίες επεξεργάζεται ο κάθε επεξεργαστής, είναι πάντα θετικοί ακέραιοι αριθμοί.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

Η επιτάχυνση παραλληλισμού (parallelism speedup) του κατανεμημένου φίλτρου Kalman ορίζεται ως ο λόγος του υπολογιστικού χρόνου του κατανεμημένου φίλτρου Kalman προς τον υπολογιστικό χρόνο του μη κατανεμημένου φίλτρου Kalman.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Η ελάχιστη επιτάχυνση παραλληλισμού (maximum parallelism speedup) του κατανεμημένου φίλτρου Kalman επιτυγχάνεται με τη βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή (optimal uniform distribution).

## Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Το γραμμικό μοντέλο διακριτού χρόνου μπορεί να επεκταθεί στην περίπτωση που οι θόρυβοι έχουν μη μηδενικές μέσες τιμές και στην περίπτωση που οι θόρυβοι είναι έγχρωμοι.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Στην περίπτωση που ο θόρυβος των μετρήσεων έχει μη μηδενική μέση τιμή ισχύει η σχέση  $v'(k) = v(k) + s(k)$  και η στοχαστική διαδικασία  $\{v(k)\}$  ακολουθεί την κανονική κατανομή (Gaussian distribution), έχει μηδενική μέση τιμή και είναι λευκή διαδικασία (white process) με συνδιασπορά  $R(k)$ .

### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Η μη μηδενική μέση τιμή της στοχαστικής διαδικασίας του θορύβου των μετρήσεων επηρεάζει την εξίσωση της εκτίμησης.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Στην περίπτωση που ο θόρυβος των μετρήσεων έχει μη μηδενική μέση τιμή, υπάρχει πάντα Φίλτρο Kalman Μόνιμης Κατάστασης (Steady State Kalman Filter) με μη μηδενική μέση τιμή θορύβου.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Στο Φίλτρο Kalman Μόνιμης Κατάστασης (Steady State Kalman Filter) με μη μηδενικές μέσες τιμές θορύβων ισχύει η σχέση:  $C = [I - KH]s - Ku$ .

### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Στην περίπτωση που η στοχαστική διαδικασία  $\{v'(k)\}$  είναι έγχρωμη, ισχύει η σχέση  $v'(k) = H_v(k)x_v(k)$  και η στοχαστική διαδικασία  $\{v(k)\}$  ακολουθεί την κανονική κατανομή (Gaussian distribution), έχει μηδενική μέση τιμή και είναι λευκή διαδικασία (white process) με συνδιασπορά  $R(k)$ .

### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

Στην περίπτωση που οι θόρυβοι είναι έγχρωμοι, ορίζεται το επαυξημένο (augmented) διάνυσμα κατάστασης  $x_a(k)$ , το οποίο αποτελείται από τις καταστάσεις  $x(k), x_w(k), x_v(k)$ .

### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

Στην περίπτωση που οι θόρυβοι είναι έγχρωμοι, ισχύει η σχέση:

$$F_a(k+1, k) = \begin{bmatrix} F(k+1, k) & 0 & 0 \\ 0 & F_w(k+1, k) & 0 \\ 0 & 0 & F_v(k+1, k) \end{bmatrix} \quad \text{X}$$

### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

Στην περίπτωση που οι θόρυβοι είναι έγχρωμοι, ισχύει η σχέση:  $H_a(k) = [H(k) \quad H_w(k) \quad H_v(k)]$

### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Στην περίπτωση που οι θόρυβοι είναι έγχρωμοι, ισχύει η σχέση:  $Q_a(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q(k) & 0 \\ 0 & 0 & R(k) \end{bmatrix}$

## Κριτήριο Αξιολόγησης – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14

### ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Στο μη γραμμικό μοντέλο διακριτού χρόνου δεν ισχύουν οι στατιστικές προϋποθέσεις του γραμμικού μοντέλου.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Στο μη γραμμικό μοντέλο διακριτού χρόνου οι συνδιασπορές των θορύβων μπορεί να είναι χρονικά αμετάβλητες.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Οι μη γραμμικές συναρτήσεις  $f(x(k), u(k))$  και  $h(x(k))$  είναι διανυσματικές συναρτήσεις διανυσματικών μεταβλητών.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Οι ιακωβιανοί πίνακες  $F(k+1, k)$  και  $H(k)$  είναι γενικά χρονικά μεταβαλλόμενοι.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Τον ρόλο του πίνακα μεταφοράς παίζει ο ιακωβιανός πίνακας  $F(k+1, k) = \left. \frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial x} \right|_{x=x(k/k)}$

### ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Τον ρόλο του πίνακα εξόδου παίζει ο ιακωβιανός πίνακας  $H(k) = \left. \frac{\partial h(x(k))}{\partial x} \right|_{x=x(k/k)}$

### ΕΡΩΤΗΣΗ 7

$x(k+1/k) = f(x(k/k))$

### ΕΡΩΤΗΣΗ 8

$K(k) = P(k/k-1)H^T(k) \left[ H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k) \right]$

### ΕΡΩΤΗΣΗ 9

Το Επεκταμένο Φίλτρο Kalman (Extended Kalman Filter) γραμμικοποιεί ένα μη γραμμικό σύστημα χρησιμοποιώντας την επέκτασης Taylor (Taylor expansion).

### ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Το επεκταμένο Φίλτρο Kalman (Extended Kalman filter) χρησιμοποιείται στη μη γραμμική εκτίμηση.

## Παράρτημα Β'. Απόδειξη των εξισώσεων του φίλτρου Kalman

Στο Παράρτημα Β' παρουσιάζεται λεπτομερειακά η απόδειξη των εξισώσεων του χρονικά μεταβαλλόμενου φίλτρου Kalman. Η απόδειξη βασίζεται στις αποδείξεις που παρουσιάζονται στα [Anderson & Moore (2005), chapter 3] και [Reid (2001)].

Στο κεφάλαιο 1 ορίστηκε το γραμμικό μοντέλο:

$$x(k+1) = F(k+1, k)x(k) + B(k)u(k) + w(k) \quad (\text{B.1})$$

$$z(k) = H(k)x(k) + v(k) \quad (\text{B.2})$$

### Εξισώσεις πρόβλεψης (time update)

Η πρόβλεψη είναι:

$$\begin{aligned} x(k+1/k) &= E[x(k+1)/Z_k] \\ &= E[(F(k+1, k)x(k) + B(k)u(k) + w(k))/Z_k] \\ &= E[F(k+1, k)x(k)/Z_k] + E[B(k)u(k)/Z_k] + E[w(k)/Z_k] \\ &= F(k+1, k)E[x(k)/Z_k] + B(k)u(k) + 0 \\ &= F(k+1, k)x(k/k) + B(k)u(k) \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$x(k+1/k) = F(k+1, k)x(k/k) + B(k)u(k) \quad (\text{B.3})$$

Τότε:

$$\begin{aligned} x(k+1) - x(k+1/k) &= (F(k+1, k)x(k) + B(k)u(k) + w(k)) - (F(k+1, k)x(k/k) + B(k)u(k)) \\ &= F(k+1, k)x(k) + w(k) - F(k+1, k)x(k/k) \\ &= F(k+1, k)(x(k) - x(k/k)) + w(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[x(k+1) - x(k+1/k)][x(k+1) - x(k+1/k)]^T \\ &= [F(k+1, k)(x(k) - x(k/k)) + w(k)][F(k+1, k)(x(k) - x(k/k)) + w(k)]^T \\ &= F(k+1, k)(x(k) - x(k/k))(x(k) - x(k/k))^T F^T(k+1, k) \\ &\quad + F(k+1, k)(x(k) - x(k/k))w^T(k) \\ &\quad + w(k)(x(k) - x(k/k))^T F^T(k+1, k) \\ &\quad + w(k)w^T(k) \end{aligned}$$

Η συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης είναι:

$$\begin{aligned}
P(k+1/k) &= E \left[ [x(k+1) - x(k+1/k)] [x(k+1) - x(k+1/k)]^T / Z_k \right] \\
&= E \left[ F(k+1, k) (x(k) - x(k/k)) (x(k) - x(k/k))^T F^T(k+1, k) / Z_k \right] \\
&\quad + E \left[ F(k+1, k) (x(k) - x(k/k)) w^T(k) / Z_k \right] \\
&\quad + E \left[ w(k) (x(k) - x(k/k))^T F^T(k+1, k) / Z_k \right] \\
&\quad + E \left[ w(k) w^T(k) / Z_k \right] \\
&= F(k+1, k) E \left[ (x(k) - x(k/k)) (x(k) - x(k/k))^T / Z_k \right] F^T(k+1, k) + 0 + 0 + E \left[ w(k) w^T(k) / Z_k \right] \\
&= F(k+1, k) P(k/k) F^T(k+1, k) + Q(k)
\end{aligned}$$

δηλαδή,

$$P(k+1/k) = Q(k) + F(k+1, k) P(k/k) F^T(k+1, k) \quad (\text{B.4})$$

### Εξισώσεις εκτίμησης (measurement update)

Η τυχαία μεταβλητή  $z(k/Z_{k-1})$  είναι κανονική τυχαία μεταβλητή (Gaussian random variable) με μέση τιμή

$$z(k/k-1) = E[z(k)/Z_{k-1}]$$

και συνδιασπορά

$$S(k/k-1) = E \left[ [z(k) - z(k/k-1)] [z(k) - z(k/k-1)]^T / Z_{k-1} \right]$$

Οπότε:

$$\begin{aligned}
z(k/k-1) &= E[z(k)/Z_{k-1}] \\
&= E[(H(k)x(k) + v(k))/Z_{k-1}] \\
&= E[H(k)x(k)/Z_{k-1}] + E[v(k)/Z_{k-1}] \\
&= H(k)E[x(k)/Z_{k-1}] + 0 \\
&= H(k)x(k/k-1)
\end{aligned}$$

δηλαδή,

$$z(k/k-1) = H(k)x(k/k-1) \quad (\text{B.5})$$

Τότε:

$$\begin{aligned}
z(k) - z(k/k-1) &= (H(k)x(k) + v(k)) - (H(k)x(k/k-1)) \\
&= H(k)x(k) + v(k) - H(k)x(k/k-1) \\
&= H(k)(x(k) - x(k/k-1)) + v(k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[z(k) - z(k/k-1)][z(k) - z(k/k-1)]^T \\
&= [H(k)(x(k) - x(k/k-1)) + v(k)][H(k)(x(k) - x(k/k-1)) + v(k)]^T \\
&= H(k)(x(k) - x(k/k-1))(x(k) - x(k/k-1))^T H^T(k) \\
&\quad + H(k)(x(k) - x(k/k-1))v^T(k) \\
&\quad + v(k)(x(k) - x(k/k-1))^T H^T(k) \\
&\quad + v(k)v^T(k)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
S(k / k-1) &= E\left[\left[z(k)-z(k / k-1)\right]\left[z(k)-z(k / k-1)\right]^T / Z_{k-1}\right] \\
&= E\left[H(k)(x(k)-x(k / k-1))(x(k)-x(k / k-1))^T H^T(k) / Z_{k-1}\right] \\
&\quad + E\left[H(k)(x(k)-x(k / k-1)) v^T(k) / Z_{k-1}\right] \\
&\quad + E\left[v(k)(x(k)-x(k / k-1))^T H^T(k) / Z_{k-1}\right] \\
&\quad + E\left[v(k)v^T(k) / Z_{k-1}\right] \\
&= H(k) E\left[(x(k)-x(k / k-1))(x(k)-x(k / k-1))^T / Z_{k-1}\right] H^T(k) + 0 + 0 + E\left[v(k)v^T(k) / Z_{k-1}\right] \\
&= H(k) P(k / k-1) H^T(k) + R(k)
\end{aligned}$$

δηλαδή,

$$S(k / k-1) = H(k) P(k / k-1) H^T(k) + R(k) \quad (\text{B.6})$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
&E\left[\left[x(k)-x(k / k-1)\right]\left[z(k)-z(k / k-1)\right]^T / Z_{k-1}\right] \\
&= E\left[\left[x(k)-x(k / k-1)\right]\left[H(k)(x(k)-x(k / k-1))+v(k)\right]^T / Z_{k-1}\right] \\
&= E\left[\left[x(k)-x(k / k-1)\right](x(k)-x(k / k-1))^T H^T(k) / Z_{k-1}\right] \\
&\quad + E\left[\left[x(k)-x(k / k-1)\right]v(k)^T / Z_{k-1}\right] \\
&= P(k / k-1) H^T(k) + 0 \\
&= P(k / k-1) H^T(k)
\end{aligned}$$

Οπότε, οι τυχαίες μεταβλητές  $x(k / Z_{k-1})$  και  $z(k / Z_{k-1})$  είναι από κοινού κανονικές τυχαίες μεταβλητές (jointly Gaussian random variables) με μέση τιμή

$$\begin{bmatrix} x(k / k-1) \\ H(k)x(k / k-1) \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

και συνδιασπορά

$$\begin{bmatrix} P(k / k-1) & P(k / k-1)H^T(k) \\ H(k)P(k / k-1) & H(k)P(k / k-1)H^T(k) + R(k) \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Τότε, η δεσμευμένη ή υπό συνθήκη τυχαία μεταβλητή  $x(k / Z_{k-1})$  δεδομένης της τυχαίας μεταβλητής  $z(k / Z_{k-1})$  είναι κανονική τυχαία μεταβλητή (Gaussian random variable) με μέση τιμή

$$\begin{aligned}
x(k / k) &= x(k / k-1) \\
&\quad + P(k / k-1)H^T(k)\left[H(k)P(k / k-1)H^T(k)+R(k)\right]^{-1}\left[z(k)-H(k)x(k / k-1)\right]
\end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

και συνδιασπορά

$$P(k / k) = P(k / k-1) - P(k / k-1)H^T(k)\left[H(k)P(k / k-1)H^T(k)+R(k)\right]^{-1}H(k)P(k / k-1) \quad (\text{B.10})$$

Το κέρδος του φίλτρου Kalman (Kalman filter gain) είναι:

$$K(k) = P(k / k-1)H^T(k)\left[H(k)P(k / k-1)H^T(k)+R(k)\right]^{-1} \quad (\text{B.11})$$

Στην απόδειξη χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα:

Αν οι τυχαίες μεταβλητές  $X$  και  $Y$  είναι από κοινού κανονικές τυχαίες μεταβλητές (jointly Gaussian random variables) με μέση τιμή

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

και συνδιασπορά

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

τότε, η δεσμευμένη ή υπό συνθήκη τυχαία μεταβλητή  $X$  δεδομένης της τυχαίας μεταβλητής  $Y$  είναι κανονική τυχαία μεταβλητή (Gaussian random variable)

με μέση τιμή

$$\bar{x} + \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} (y - \bar{y}) \quad (\text{B.14})$$

και συνδιασπορά

$$\Sigma_{xx} + \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yx} \quad (\text{B.15})$$

Οι εξισώσεις (B.3), (B.4), (B.9), (B.10), (B.11) είναι οι εξισώσεις του χρονικά μεταβαλλόμενου φίλτρου Kalman.

### Η βέλτιστη εκτίμηση (optimal estimation)

Έστω ότι η εκτίμηση εξαρτάται από την πρόβλεψη και τη μέτρηση:

$$x(k / k) = K'(k)x(k / k - 1) + K(k)z(k) \quad (\text{B.16})$$

όπου, οι συντελεστές  $K'(k)$  και  $K(k)$  ελαχιστοποιούν το μέσο τετραγωνικό λάθος εκτίμησης

$$x_e(k / k) = x(k) - x(k / k) \quad (\text{B.17})$$

Η πρόβλεψη είναι αμερόληπτη (unbiased):

$$\begin{aligned} E[x(k / k - 1)] &= E[F(k + 1, k)x(k / k) + B(k)u(k)] \\ &= F(k + 1, k)E[x(k / k)] + B(k)u(k) \\ &= E[x(k)] \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$E[x(k / k - 1)] = E[x(k)] \quad (\text{B.18})$$

Για να είναι η εκτίμηση αμερόληπτη (unbiased) πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη:

$$E[x(k / k)] = E[x(k)] \quad (\text{B.19})$$

Τότε:

$$\begin{aligned}
E[x(k / k)] &= E[K'(k)x(k / k - 1) + K(k)z(k)] \\
&= E[K'(k)x(k / k - 1) + K(k)[H(k)x(k) + v(k)]] \\
&= E[K'(k)x(k / k - 1) + K(k)H(k)x(k) + K(k)v(k)] \\
&= E[K'(k)x(k / k - 1)] + E[K(k)H(k)x(k)] + E[K(k)v(k)] \\
&= K'(k)E[x(k / k - 1)] + K(k)H(k)E[x(k)] + K(k)E[v(k)] \\
&= K'(k)E[x(k)] + K(k)H(k)E[x(k)] + 0 \\
&= (K'(k) + K(k)H(k))E[x(k)]
\end{aligned}$$

οπότε, πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη:

$$K'(k) + K(k)H(k) = I \quad (\text{B.20})$$

Επομένως, για να είναι το φίλτρο Kalman αμερόληπτο πρέπει

$$K'(k) = I - K(k)H(k)$$

Τότε, η αμερόληπτη εκτίμηση είναι:

$$\begin{aligned}
x(k / k) &= K'(k)x(k / k - 1) + K(k)z(k) \\
&= [I - K(k)H(k)]x(k / k - 1) + K(k)z(k) \\
&= x(k / k - 1) + K(k)[z(k) - H(k)x(k / k - 1)]
\end{aligned}$$

δηλαδή,

$$x(k / k) = x(k / k - 1) + K(k)[z(k) - H(k)x(k / k - 1)] \quad (\text{B.21})$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}
x(k) - x(k / k) &= x(k) - [(I - K(k)H(k))x(k / k - 1) + K(k)z(k)] \\
&= x(k) - [I - K(k)H(k)]x(k / k - 1) - K(k)[H(k)x(k) + v(k)] \\
&= x(k) - [I - K(k)H(k)]x(k / k - 1) - K(k)H(k)x(k) - K(k)v(k) \\
&= [I - K(k)H(k)][x(k) - x(k / k - 1)] - K(k)v(k)
\end{aligned}$$

Η συνδιασπορά λάθους εκτίμησης είναι:

$$\begin{aligned}
P(k / k) &= E[(x(k) - x(k / k))(x(k) - x(k / k))^T / Z_{k-1}] \\
&= E\left[\left[(I - K(k)H(k))[x(k) - x(k / k - 1)] - K(k)v(k)\right] \right. \\
&\quad \left. \left[(I - K(k)H(k))[x(k) - x(k / k - 1)] - K(k)v(k)\right]^T / Z_{k-1}\right] \\
&= E\left[(I - K(k)H(k))[x(k) - x(k / k - 1)][x(k) - x(k / k - 1)]^T [I - K(k)H(k)]^T / Z_{k-1}\right] \\
&\quad - E\left[(I - K(k)H(k))[x(k) - x(k / k - 1)]v^T(k)K^T(k) / Z_{k-1}\right] \\
&\quad - E\left[K(k)v(k)[x(k) - x(k / k - 1)]^T [I - K(k)H(k)]^T / Z_{k-1}\right] \\
&\quad + E\left[K(k)v(k)v^T(k)K^T(k) / Z_{k-1}\right] \\
&= [I - K(k)H(k)]P(k / k - 1)[I - K(k)H(k)]^T - 0 - 0 + K(k)R(k)K^T(k) \\
&= [I - K(k)H(k)]P(k / k - 1)[I - K(k)H(k)]^T + K(k)R(k)K^T(k)
\end{aligned}$$

οπότε,

$$\begin{aligned}
 P(k/k) &= [I - K(k)H(k)]P(k/k-1)[I - K(k)H(k)]^T + K(k)R(k)K^T(k) \\
 &= P(k/k-1) - K(k)H(k)P(k/k-1) - P(k/k-1)H^T(k)K^T(k) + K(k)H(k)P(k/k-1)H^T(k)K^T(k) \\
 &\quad + K(k)R(k)K^T(k) \\
 &= P(k/k-1) - K(k)H(k)P(k/k-1) - P(k/k-1)H^T(k)K^T(k) \\
 &\quad + K(k)[H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k)]K^T(k)
 \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\begin{aligned}
 P(k/k) &= P(k/k-1) - K(k)H(k)P(k/k-1) - P(k/k-1)H^T(k)K^T(k) \\
 &\quad + K(k)[H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k)]K^T(k)
 \end{aligned} \tag{B.22}$$

### Η επιλογή του κέρδους του φίλτρου Kalman

Η ελαχιστοποίηση του μέσου τετραγωνικού λάθους εκτίμησης ως προς το κέρδος του φίλτρου Kalman οδηγεί στη βέλτιστη εκτίμηση (**optimal estimation**).

$$\min_{K(k)} P(k/k) = \min_{K(k)} \text{tr}(P(k/k)) \tag{B.23}$$

όπου  $\text{tr}(M)$  είναι το ίχνος (trace) του τετραγωνικού πίνακα  $M$ , που ορίζεται ως το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του τετραγωνικού πίνακα  $M$ . Θα χρησιμοποιηθεί η ιδιότητα: [Δονάτος & Αδάμ (2008)]:

Για τετραγωνικούς πίνακες  $A$  και  $B$  ισχύει:

$$\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \tag{B.24}$$

Επίσης θα χρησιμοποιηθούν οι ιδιότητες [Reid (2001)]:

Για συμμετρικούς πίνακες  $A$  και  $B$  ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial A} (\text{tr}(ABA^T)) = 2AB \tag{B.25}$$

Για πίνακες  $A$  και  $B$  ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial A} (\text{tr}(AB^T)) = \frac{\partial}{\partial A} (\text{tr}(B^TA)) = \frac{\partial}{\partial A} (\text{tr}(A^TB)) = \frac{\partial}{\partial A} (\text{tr}(BA^T)) = B \tag{B.26}$$

Τότε:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial K(k)} \text{tr}(P(k/k)) \\
&= \frac{\partial}{\partial K(k)} \text{tr} \left( P(k/k-1) - K(k)H(k)P(k/k-1) - P(k/k-1)H^T(k)K^T(k) \right. \\
&\quad \left. + K(k)[H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k)]K^T(k) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial K(k)} \text{tr}(P(k/k-1)) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial K(k)} \text{tr}(K(k)H(k)P(k/k-1)) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial K(k)} \text{tr}(P(k/k-1)H^T(k)K^T(k)) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial K(k)} \text{tr}(K(k)[H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k)]K^T(k)) \\
&= 0 - [H(k)P(k/k-1)]^T - [P(k/k-1)H^T(k)] + 2K(k)[H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k)] \\
&= 0 - P(k/k-1)H^T(k) - P(k/k-1)H^T(k) + 2K(k)[H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k)] \\
&= -2P(k/k-1)H^T(k) + 2K(k)[H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k)] \\
&= -2P(k/k-1)H^T(k) + 2K(k)H(k)P(k/k-1)H^T(k) + 2K(k)R(k) \\
&= -2[I - K(k)H(k)]P(k/k-1)H^T(k) + 2K(k)R(k) \\
&= 2\{K(k)R(k) - [I - K(k)H(k)]P(k/k-1)H^T(k)\}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial K(k)} \text{tr}(P(k/k)) = 0 \\
& \Rightarrow 2\{K(k)R(k) - [I - K(k)H(k)]P(k/k-1)H^T(k)\} = 0 \\
& \Rightarrow K(k)R(k) - [I - K(k)H(k)]P(k/k-1)H^T(k) = 0 \\
& \Rightarrow [I - K(k)H(k)]P(k/k-1)H^T(k) = K(k)R(k) \\
& \Rightarrow P(k/k-1)H^T(k) - K(k)H(k)P(k/k-1)H^T(k) = K(k)R(k) \\
& \Rightarrow K(k)[H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k)] = P(k/k-1)H^T(k) \\
& \Rightarrow K(k) = P(k/k-1)H^T(k)[H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1}
\end{aligned}$$

δηλαδή:

$$K(k) = P(k/k-1)H^T(k)[H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1}, \quad (\text{B.27})$$

που είναι το κέρδος του φίλτρου Kalman που εξασφαλίζει τη βέλτιστη εκτίμηση (optimal estimation)

## **Βιβλιογραφία/Αναφορές**

Anderson, B. D. O., Moore, J. B. (2005). *Optimal Filtering*. Dover Publications, New York.

Reid, I. (2001). Estimation II, Hilary Term,

<http://www.robots.ox.ac.uk/~ian/Teaching/Estimation/LectureNotes2.pdf>

Δονάτος, Γ., Αδάμη, Μ. (2008). *Γραμμική Άλγεβρα*. Εκδόσεις GUTENBERG.

## Παράρτημα Γ'. Απόδειξη των εξισώσεων των αλγορίθμων διπλασιασμού (doubling algorithms) για την επίλυση των εξισώσεων Riccati και Lyapunov

**Απόδειξη των εξισώσεων του Αλγορίθμου Διπλασιασμού (Doubling Algorithm)** για την επίλυση της εξίσωσης Riccati.

Στο κεφάλαιο 3 ορίστηκε ο συμπλεκτικός πίνακας διαστάσεων  $2n \times 2n$

$$\Phi^{2^k} = \begin{bmatrix} a^{-1}(k) & a^{-1}(k)b(k) \\ c(k)a^{-1}(k) & a^T(k) + c(k)a^{-1}(k)b(k) \end{bmatrix} \quad (\Gamma.1)$$

με αρχικές συνθήκες  $a(0) = F^T$ ,  $b(0) = H^T R^{-1} H$  και  $c(0) = Q$ , όπου οι πίνακες  $a(k)$ ,  $b(k)$  και  $c(k)$  είναι διαστάσεων  $n \times n$ .

Τότε ισχύει:

$$\Phi^{2^{k+1}} = \Phi^{2^k} \Phi^{2^k} \quad (\Gamma.2)$$

Οπότε:

$$\begin{bmatrix} a^{-1}(k+1) & a^{-1}(k+1)b(k+1) \\ c(k+1)a^{-1}(k+1) & a^T(k+1) + c(k+1)a^{-1}(k+1)b(k+1) \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} a^{-1}(k) & a^{-1}(k)b(k) \\ c(k)a^{-1}(k) & a^T(k) + c(k)a^{-1}(k)b(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{-1}(k) & a^{-1}(k)b(k) \\ c(k)a^{-1}(k) & a^T(k) + c(k)a^{-1}(k)b(k) \end{bmatrix}$$

Δηλαδή

$$a^{-1}(k+1) = a^{-1}(k)a^{-1}(k) + a^{-1}(k)b(k)c(k)a^{-1}(k) \quad (\Gamma.3)$$

$$a^{-1}(k+1)b(k+1) = a^{-1}(k)a^{-1}(k)b(k) + a^{-1}(k)b(k)[a^T(k) + c(k)a^{-1}(k)b(k)] \quad (\Gamma.4)$$

$$c(k+1)a^{-1}(k+1) = c(k)a^{-1}(k)a^{-1}(k) + [a^T(k) + c(k)a^{-1}(k)b(k)]c(k)a^{-1}(k) \quad (\Gamma.5)$$

$$\begin{aligned} a^T(k+1) + c(k+1)a^{-1}(k+1)b(k+1) = & c(k)a^{-1}(k)a^{-1}(k)b(k) \\ & + [a^T(k) + c(k)a^{-1}(k)b(k)][a^T(k) + c(k)a^{-1}(k)b(k)] \end{aligned} \quad (\Gamma.6)$$

Οπότε:

- για τους πίνακες  $a(k)$  έχουμε από (Γ.3):

$$a^{-1}(k+1) = a^{-1}(k)a^{-1}(k) + a^{-1}(k)b(k)c(k)a^{-1}(k)a(k+1) = a^{-1}(k)[I + b(k)c(k)]a^{-1}(k)$$

$$\Rightarrow a(k+1) = a(k)[I + b(k)c(k)]^{-1}a(k)$$

δηλαδή:

$$a(k+1) = a(k)[I + b(k)c(k)]^{-1}a(k) \quad (\Gamma.7)$$

- για τους πίνακες  $b(k)$  έχουμε από (Γ.4):

$$\begin{aligned}
a^{-1}(k+1)b(k+1) &= a^{-1}(k)a^{-1}(k)b(k) + a^{-1}(k)b(k)\left[a^T(k) + c(k)a^{-1}(k)b(k)\right] \\
&= a^{-1}(k)a^{-1}(k)b(k) + a^{-1}(k)b(k)a^T(k) + a^{-1}(k)b(k)c(k)a^{-1}(k)b(k) \\
&= a^{-1}(k)[I + b(k)c(k)]a^{-1}(k)b(k) + a^{-1}(k)b(k)a^T(k) \\
\Rightarrow b(k+1) &= a(k+1)\left[a^{-1}(k)[I + b(k)c(k)]a^{-1}(k)b(k) + a^{-1}(k)b(k)a^T(k)\right] \\
&= a(k)[I + b(k)c(k)]^{-1}a(k)\left[a^{-1}(k)[I + b(k)c(k)]a^{-1}(k)b(k) + a^{-1}(k)b(k)a^T(k)\right] \\
&= a(k)[I + b(k)c(k)]^{-1}a(k)a^{-1}(k)[I + b(k)c(k)]a^{-1}(k)b(k) + a(k)[I + b(k)c(k)]^{-1}a(k)a^{-1}(k)b(k)a^T(k) \\
&= b(k) + a(k)[I + b(k)c(k)]^{-1}b(k)a^T(k)
\end{aligned}$$

δηλαδή:

$$b(k+1) = b(k) + a(k)[I + b(k)c(k)]^{-1}b(k)a^T(k), \quad (\Gamma.8)$$

όπου οι πίνακες  $b(k)$  είναι συμμετρικοί.

- για τους πίνακες  $c(k)$  έχουμε από (Γ.5):

$$\begin{aligned}
c(k+1)a^{-1}(k+1) &= c(k)a^{-1}(k)a^{-1}(k) + \left[a^T(k) + c(k)a^{-1}(k)b(k)\right]c(k)a^{-1}(k) \\
&= c(k)a^{-1}(k)a^{-1}(k) + a^T(k)c(k)a^{-1}(k) + c(k)a^{-1}(k)b(k)c(k)a^{-1}(k) \\
&= c(k)a^{-1}(k)[I + b(k)c(k)]a^{-1}(k) + a^T(k)c(k)a^{-1}(k) \\
c(k+1) &= \left[c(k)a^{-1}(k)[I + b(k)c(k)]a^{-1}(k) + a^T(k)c(k)a^{-1}(k)\right]a(k+1) \\
&= \left[c(k)a^{-1}(k)[I + b(k)c(k)]a^{-1}(k) + a^T(k)c(k)a^{-1}(k)\right]a(k)[I + b(k)c(k)]^{-1}a(k) \\
&= c(k)a^{-1}(k)[I + b(k)c(k)]a^{-1}(k)a(k)[I + b(k)c(k)]^{-1}a(k) + a^T(k)c(k)a^{-1}(k)a(k)[I + b(k)c(k)]^{-1}a(k) \\
&= c(k) + a^T(k)c(k)[I + b(k)c(k)]^{-1}a(k)
\end{aligned}$$

δηλαδή:

$$c(k+1) = c(k) + a^T(k)c(k)[I + b(k)c(k)]^{-1}a(k), \quad (\Gamma.9)$$

όπου οι πίνακες  $c(k)$  είναι συμμετρικοί.

- η (Γ.6) επιβεβαιώνεται:  
αφού

$$\begin{aligned}
a^T(k+1) + c(k+1)a^{-1}(k+1)b(k+1) &= c(k)a^{-1}(k)a^{-1}(k)b(k) \\
&\quad + \left[a^T(k) + c(k)a^{-1}(k)b(k)\right]\left[a^T(k) + c(k)a^{-1}(k)b(k)\right] \\
&= c(k)a^{-1}(k)[I + b(k)c(k)]a^{-1}(k)b(k) + c(k)a^{-1}(k)b(k)a^T(k) + a^T(k)c(k)a^{-1}(k)b(k) + a^T(k)a^T(k)
\end{aligned}$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned}
& a^T(k+1) + c(k+1)a^{-1}(k+1)b(k+1) \\
&= a^T(k)[I+b(k)c(k)]^{-1}a^T(k) \\
&+ \left[ c(k) + a^T(k)c(k)[I+b(k)c(k)]^{-1}a(k) \right] a^{-1}(k)[I+b(k)c(k)]a^{-1}(k) \left[ b(k) + a(k)[I+b(k)c(k)]^{-1}b(k)a^T(k) \right] \\
&= a^T(k)[I+b(k)c(k)]^{-1}a^T(k) \\
&+ c(k)a^{-1}(k)[I+b(k)c(k)]a^{-1}(k)b(k) \\
&+ c(k)a^{-1}(k)[I+b(k)c(k)]a^{-1}(k)a(k)[I+b(k)c(k)]^{-1}b(k)a^T(k) \\
&+ a^T(k)c(k)[I+b(k)c(k)]^{-1}a(k)a^{-1}(k)[I+b(k)c(k)]a^{-1}(k)b(k) \\
&+ a^T(k)c(k)[I+b(k)c(k)]^{-1}a(k)a^{-1}(k)[I+b(k)c(k)]a^{-1}(k)a(k)[I+b(k)c(k)]^{-1}b(k)a^T(k) \\
&= a^T(k)[I+b(k)c(k)]^{-1}a^T(k) \\
&+ c(k)a^{-1}(k)[I+b(k)c(k)]a^{-1}(k)b(k) \\
&+ c(k)a^{-1}(k)b(k)a^T(k) \\
&+ a^T(k)c(k)a^{-1}(k)b(k) \\
&+ a^T(k)c(k)[I+b(k)c(k)]^{-1}b(k)a^T(k) \\
&= c(k)a^{-1}(k)[I+b(k)c(k)]a^{-1}(k)b(k) \\
&+ c(k)a^{-1}(k)b(k)a^T(k) \\
&+ a^T(k)c(k)a^{-1}(k)b(k) \\
&+ a^T(k)[I+b(k)c(k)]^{-1} + c(k)[I+b(k)c(k)]^{-1}b(k) \\
&= c(k)a^{-1}(k)[I+b(k)c(k)]a^{-1}(k)b(k) + c(k)a^{-1}(k)b(k)a^T(k) + a^T(k)c(k)a^{-1}(k)b(k) + a^T(k)a^T(k)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
& c(k)a^{-1}(k)b(k) + \left[ a^T(k) + c(k)a^{-1}(k)b(k) \right] \left[ a^T(k) + c(k)a^{-1}(k)b(k) \right] \\
&= c(k)a^{-1}(k)b(k) + a^T(k)a^T(k) + a^T(k)c(k)a^{-1}(k)b(k) + c(k)a^{-1}(k)b(k)a^T(k) + c(k)a^{-1}(k)b(k)c(k)a^{-1}(k)b(k) \\
&= c(k)a^{-1}(k)[I+b(k)c(k)]a^{-1}(k)b(k) + a^T(k)c(k)a^{-1}(k)b(k) + c(k)a^{-1}(k)b(k)a^T(k) + a^T(k)a^T(k)
\end{aligned}$$

Στην απόδειξη χρησιμοποιήθηκε η σχέση:

$$[I+b(k)c(k)]^{-1} + c(k)[I+b(k)c(k)]^{-1}b(k) = I$$

που ισχύει γιατί:

$$\begin{aligned}
[I+b(k)c(k)]^{-1} &= I - b(k)[I+c(k)b(k)]^{-1}c(k) \\
&= I - [c^{-1}(k)b^{-1}(k) + I]^{-1} = I - c(k)[I+b(k)c(k)]^{-1}b(k)
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το Λήμμα Αντιστροφής Πινάκων (Matrix Inversion Lemma):

Για τους πίνακες  $A, B, C, D$  κατάλληλων διαστάσεων όπου οι πίνακες  $A, C$  είναι αντιστρέψιμοι, ισχύει:

$$[A+BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B[C^{-1} + DA^{-1}B]^{-1}DA^{-1} \quad (\Gamma.10)$$

Οι εξισώσεις ( $\Gamma.7$ ), ( $\Gamma.8$ ), ( $\Gamma.9$ ) είναι οι εξισώσεις του Αλγορίθμου Διπλασιασμού (Doubling Algorithm) για την επίλυση της εξίσωσης Riccati.

**Απόδειξη των εξισώσεων του Αλγορίθμου Διπλασιασμού (Doubling Algorithm) για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov**

Στο κεφάλαιο 4 ορίστηκε ο συμπλεκτικός πίνακας διαστάσεων  $2n \times 2n$

$$\Phi^{2^k} = \begin{bmatrix} a^{-1}(k) & 0 \\ c(k)a^{-1}(k) & a^T(k) \end{bmatrix} \quad (\Gamma.11)$$

με αρχικές συνθήκες  $a(0) = F^T$  και  $c(0) = Q$ ,  
όπου οι πίνακες  $a(k)$  και  $c(k)$  είναι διαστάσεων  $n \times n$ .

Τότε ισχύει:

$$\Phi^{2^{k+1}} = \Phi^{2^k} \Phi^{2^k} \quad (\Gamma.12)$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a^{-1}(k+1) & 0 \\ c(k+1)a^{-1}(k+1) & a^T(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a^{-1}(k) & 0 \\ c(k)a^{-1}(k) & a^T(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{-1}(k) & 0 \\ c(k)a^{-1}(k) & a^T(k) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^{-1}(k)a^{-1}(k) & 0 \\ c(k)a^{-1}(k)a^{-1}(k) + a^T(k)c(k)a^{-1}(k) & a^T(k)a^T(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$a^{-1}(k+1) = a^{-1}(k)a^{-1}(k) \quad (\Gamma.13)$$

$$c(k+1)a^{-1}(k+1) = c(k)a^{-1}(k)a^{-1}(k) + a^T(k)c(k)a^{-1}(k) \quad (\Gamma.14)$$

$$a^T(k+1) = a^T(k)a^T(k) \quad (\Gamma.15)$$

Οπότε:

- για τους πίνακες  $a(k)$  έχουμε από (Γ.13) και (Γ.15):

$$a^{-1}(k+1) = a^{-1}(k)a^{-1}(k) \Rightarrow a(k+1) = a(k)a(k)$$

και

$$a^T(k+1) = a^T(k)a^T(k) \Rightarrow a(k+1) = a(k)a(k)$$

δηλαδή,

$$a(k+1) = a(k)a(k) \quad (\Gamma.16)$$

- για τους πίνακες  $c(k)$  έχουμε από (Γ.14):

$$\begin{aligned} c(k+1)a^{-1}(k+1) &= c(k)a^{-1}(k)a^{-1}(k) + a^T(k)c(k)a^{-1}(k) \\ \Rightarrow c(k+1) &= [c(k)a^{-1}(k)a^{-1}(k) + a^T(k)c(k)a^{-1}(k)]a(k+1) \\ &= [c(k)a^{-1}(k)a^{-1}(k) + a^T(k)c(k)a^{-1}(k)]a(k)a(k) \\ &= c(k)a^{-1}(k)a^{-1}(k)a(k)a(k) + a^T(k)c(k)a^{-1}(k)a(k)a(k) \\ &= c(k) + a^T(k)c(k)a(k) \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$c(k+1) = c(k) + a^T(k)c(k)a(k) \quad (\Gamma.17)$$

όπου οι πίνακες  $c(k)$  είναι συμμετρικοί.

Οι εξισώσεις (Γ.16), (Γ.17) είναι οι εξισώσεις του Αλγορίθμου Διπλασιασμού (Doubling Algorithm) για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov.

## Παράρτημα Δ'. Απόδειξη των εξισώσεων του φίλτρου Kalman πληροφορίας

Στο Παράρτημα Δ' παρουσιάζεται λεπτομερειακά η απόδειξη των εξισώσεων του χρονικά μεταβαλλόμενου φίλτρου Kalman πληροφορίας. Η απόδειξη βασίζεται στην απόδειξη που παρουσιάζεται στο [Anderson & Moore (2005), chapter 6].

Οι εξισώσεις του χρονικά μεταβαλλόμενου φίλτρου Kalman παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 2 και αποδείχθηκαν στο Παράρτημα Β'.

$$x(k/k) = [I - K(k)H(k)]x(k/k-1) + K(k)z(k) \quad (\Delta.1)$$

$$P(k/k) = [I - K(k)H(k)]P(k/k-1) \quad (\Delta.2)$$

$$K(k) = P(k/k-1)H^T(k)[H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1} \quad (\Delta.3)$$

$$x(k+1/k) = F(k+1,k)x(k/k) + B(k)u(k) \quad (\Delta.4)$$

$$P(k+1/k) = Q(k) + F(k+1,k)P(k/k)F^T(k+1,k) \quad (\Delta.5)$$

Στο κεφάλαιο 5 ορίστηκαν οι πίνακες πληροφορίας (information matrices) ως οι αντίστροφοι πίνακες των συνδιασπορών λάθους πρόβλεψης και εκτίμησης:

$$S(k/k) = P^{-1}(k/k) \quad (\Delta.6)$$

$$S(k+1/k) = P^{-1}(k+1/k) \quad (\Delta.7)$$

και τα αντίστοιχα διανύσματα εκτίμησης πληροφορίας και πρόβλεψης πληροφορίας:

$$y(k/k) = P^{-1}(k/k)x(k/k) \quad (\Delta.8)$$

$$y(k+1/k) = P^{-1}(k+1/k)x(k+1/k) \quad (\Delta.9)$$

με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν οι αντίστροφοι πίνακες.

Στην απόδειξη των εξισώσεων του χρονικά μεταβαλλόμενου φίλτρου Kalman πληροφορίας θα χρησιμοποιηθεί το Λήμμα Αντιστροφής Πινάκων (Matrix Inversion Lemma): Για τους πίνακες  $A, B, C, D$  κατάλληλων διαστάσεων, όπου οι πίνακες  $A, C$  είναι αντιστρέψιμοι, ισχύει:

$$[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B[C^{-1} + DA^{-1}B]^{-1}DA^{-1} \quad (\Delta.10)$$

### Εξισώσεις πρόβλεψης

- από (Δ.5), (Δ.6) έχουμε:

$$P(k+1/k) = Q(k) + F(k+1,k)S^{-1}(k/k)F^T(k+1,k) \quad (\Delta.11)$$

- η (Δ.9) γράφεται:

$$x(k+1/k) = P(k+1/k)y(k+1/k) \quad (\Delta.12)$$

- από (Δ.9), (Δ.7), (Δ.4), (Δ.8), (Δ.6) έχουμε:

$$\begin{aligned} y(k+1/k) &= P^{-1}(k+1/k)x(k+1/k) \\ &= S(k+1/k)[F(k+1,k)x(k/k) + B(k)u(k)] \\ &= S(k+1/k)F(k+1,k)x(k/k) + S(k+1/k)B(k)u(k) \\ &= S(k+1/k)F(k+1,k)P(k/k)y(k/k) + S(k+1/k)B(k)u(k) \\ &= S(k+1/k)F(k+1,k)S^{-1}(k/k)y(k/k) + S(k+1/k)B(k)u(k) \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$y(k+1/k) = S(k+1/k)F(k+1,k)S^{-1}(k/k)y(k/k) + S(k+1/k)B(k)u(k) \quad (\Delta.13)$$

### Εξίσωση του κέρδους του φίλτρου Kalman

- από (Δ.3), (Δ.2), (Δ.6) έχουμε:

$$\begin{aligned} K(k) &= P(k/k-1)H^T(k) \left[ H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k) \right]^{-1} \\ \Rightarrow K(k) \left[ H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k) \right] &= P(k/k-1)H^T(k) \\ \Rightarrow K(k)H(k)P(k/k-1)H^T(k) + K(k)R(k) &= P(k/k-1)H^T(k) \\ \Rightarrow [I - K(k)H(k)]P(k/k-1)H^T(k) &= K(k)R(k) \\ \Rightarrow P(k/k)H^T(k) &= K(k)R(k) \\ \Rightarrow S^{-1}(k/k)H^T(k) &= K(k)R(k) \\ \Rightarrow K(k) &= S^{-1}(k/k)H^T(k)R^{-1}(k) \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$K(k) = S^{-1}(k/k)H^T(k)R^{-1}(k) \quad (\Delta.14)$$

### Εξισώσεις εκτίμησης

- η (Δ.6) γράφεται:

$$P(k/k) = S^{-1}(k/k) \quad (\Delta.15)$$

- από (Δ.2), (Δ.3), (Δ.6), (Δ.7) έχουμε:

$$\begin{aligned} P(k/k) &= [I - K(k)H(k)]P(k/k-1) = P(k/k-1) - K(k)H(k)P(k/k-1) \\ &= P(k/k-1) - P(k/k-1)H^T(k) \left[ H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k) \right]^{-1} H(k)P(k/k-1) \\ &= \left[ P^{-1}(k/k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)H(k) \right]^{-1} \\ \Rightarrow P^{-1}(k/k) &= P^{-1}(k/k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)H(k) \\ \Rightarrow S(k/k) &= S(k/k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)H(k) \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$S(k/k) = S(k/k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)H(k) \quad (\Delta.16)$$

- από (Δ.8), (Δ.6) έχουμε:

$$x(k/k) = P(k/k)y(k/k) = S^{-1}(k/k)y(k/k)$$

δηλαδή,

$$x(k/k) = S^{-1}(k/k)y(k/k) \quad (\Delta.17)$$

- από (Δ.1), (Δ.2), (Δ.8), (Δ.9), (Δ.14), (Δ.6)

$$\begin{aligned} x(k/k) &= [I - K(k)H(k)]x(k/k-1) + K(k)z(k) \\ &= P(k/k)P^{-1}(k/k-1)x(k/k-1) + K(k)z(k) \\ \Rightarrow P^{-1}(k/k)x(k/k) &= P^{-1}(k/k-1)x(k/k-1) + P^{-1}(k/k)K(k)z(k) \\ \Rightarrow y(k/k) &= y(k/k-1) + P^{-1}(k/k)S^{-1}(k/k)H^T(k)R^{-1}(k)z(k) \\ \Rightarrow y(k/k) &= y(k/k-1) + S(k/k)S^{-1}(k/k)H^T(k)R^{-1}(k)z(k) \\ \Rightarrow y(k/k) &= y(k/k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)z(k) \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$y(k / k) = y(k / k - 1) + H^T(k)R^{-1}(k)z(k) \quad (\Delta.18)$$

Οι εξισώσεις ( $\Delta.18$ ), ( $\Delta.16$ ), ( $\Delta.15$ ), ( $\Delta.17$ ), ( $\Delta.14$ ), ( $\Delta.11$ ), ( $\Delta.7$ ), ( $\Delta.13$ ), ( $\Delta.12$ ) είναι οι εξισώσεις του χρονικά μεταβαλλόμενου φίλτρου Kalman πληροφορίας.

## **Βιβλιογραφία/Αναφορές**

Anderson, B. D. O., Moore, J. B. (2005). *Optimal Filtering*. Dover Publications, New York.

# Ευρετήριο

## A. EYPETHPIO OPΩΝ

### 1. Ευρετήριο αγγλικών όρων

asymptotically stable model	ασυμπτωτικά ευσταθές μοντέλο
Auto Regressive filter – AR filter	αυτοπαλινδρομούμενο φίλτρο
Auto Regressive Moving Average filter – ARMA filter	αυτοπαλινδρομούμενο φίλτρο κινητού μέσου όρου
calculation burden	υπολογιστικός φόρτος
calculation time	υπολογιστικός χρόνος
central level	κεντρικό επίπεδο
colored noise	έγχρωμος θόρυβος
completely detectable pair	πλήρως ανιχνεύσιμο ζεύγος
completely reachable pair	πλήρως προσβάσιμο ζεύγος
completely stabilizable pair	πλήρως σταθεροποιήσιμο ζεύγος
controllability	ελεγξιμότητα
cyclic reduction method	μέθοδος κυκλικής αναγωγής
doubling algorithm	αλγόριθμος διπλασιασμού
dual Riccati equation	δυϊκή εξίσωση Riccati
estimation error	λάθος εκτίμησης
estimation error covariance	συνδιασπορά λάθους εκτίμησης
estimation theory	θεωρία εκτίμησης
estimation	εκτίμηση
extended Kalman filter	επεκταμένο φίλτρο Kalman
filtering	φίλτραρισμα
finite duration impulse response – FIR	πεπερασμένη κρουστική απόκριση
gain	κέρδος
gain elimination Kalman filter	φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους
gain elimination	απαλοιφή κέρδους
Gaussian distribution	κατανομή Gauss ή κανονική κατανομή
golden ratio	χρυσή τομή
infinite duration impulse response – IIR	άπειρη κρουστική απόκριση
information Kalman filter	φίλτρο Kalman πληροφορίας
jacobian matrix	ιακωβιανός πίνακας
Kalman filter	φίλτρο Kalman
Lainiotis filter	φίλτρο Λαϊνιώτη
linear model	γραμμικό μοντέλο
local level	τοπικό επίπεδο
Lyapunov equation	εξίσωση Lyapunov
matrix inversion lemma	λήμμα αντιστροφής πινάκων

maximum parallelism speedup measurement	μέγιστη επιτάχυνση παραλληλισμού μέτρηση
observability optimal uniform distribution	παρατηρησιμότητα βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή
parallelism speedup positive definite matrix prediction prediction error covariance	επιτάχυνση παραλληλισμού θετικά ορισμένος πίνακας πρόβλεψη συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης
random walk Riccati equation	τυχαίος περίπατος εξίσωση Riccati
Taylor expansion	επέκταση Taylor
smoothing state steady state steady state Kalman filter	λείανση κατάσταση μόνιμη κατάσταση φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης
time invariant Kalman filter time varying Kalman filter	χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman
uniform distribution	ομοιόμορφη κατανομή
white noise	λευκός θόρυβος

## 2. Ενρετήριο ελληνικών όρων

αλγεβρική ειδική εξίσωση Riccati  
αλγεβρική εξίσωση Lyapunov  
αλγεβρική εξίσωση Riccati  
αλγόριθμος διπλασιασμού  
αλγόριθμος λείανσης Meditch  
απαλοιφή κέρδους  
ασυμπτωτικά ευσταθές μοντέλο  
αυτοπαλινδρομούμενα φίλτρα  
αυτοπαλινδρομούμενα φίλτρα κινητού μέσου όρου

βέλτιστη ομοιόμορφη κατανομή

γραμμικό μοντέλο

διάνυσμα κατάστασης  
διάνυσμα μετρήσεων  
δυϊκή εξίσωση Riccati  
δυναμικό μοντέλο

έγχρωμος θόρυβος  
ειδική εξίσωση Riccati  
είσοδος  
εκτίμηση  
ελαχιστοποίηση του τετραγώνου του λάθους εκτίμησης  
ελεγξιμότητα  
εξίσωση Lyapunov  
εξίσωση Riccati  
έξοδος  
επανζημένο διάνυσμα κατάστασης  
επιτάχυνση παραλληλισμού

θετικά ορισμένος πίνακας  
θεωρία εκτίμησης  
θόρυβος στην κατάσταση  
θόρυβος στη μέτρηση

κανονική κατανομή  
κατανεμημένο γραμμικό μοντέλο διακριτού  
κατάσταση  
κεντρικό επίπεδο  
κέρδος  
κριτήριο βέλτιστης εκτίμησης

λάθος εκτίμησης  
λείανση  
λευκός θόρυβος  
λήμμα αντιστροφής πινάκων

μέγιστη επιτάχυνση παραλληλισμού  
μέθοδος κυκλικής αναγωγής  
μέτρηση  
μη γραμμικό μοντέλο  
μη μηδενικές μέσες τιμές θορύβων

μόνιμη κατάσταση

ομοιόμορφη κατανομή

παρατηρησιμότητα

πίνακας εισόδου

πίνακας εξόδου

πίνακας μεταφοράς

πλήρως ανιχνεύσιμο ζεύγος

πλήρως προσβάσιμο ζεύγος

πλήρως σταθεροποιήσιμο ζεύγος

πρόβλεψη

στατιστικό μοντέλο

συνδιασπορά λάθους εκτίμησης

συνδιασπορά λάθους πρόβλεψης

τοπικό επίπεδο

τυχαίος περίπατος

υπολογιστικός φόρτος

υπολογιστικός χρόνος

φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης

φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης

φιλτράρισμα

φίλτρο Kalman

φίλτρο Kalman με απαλοιφή κέρδους

φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης

φίλτρο Kalman πληροφορίας

φίλτρο Λαϊνιώτη

χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman

χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Kalman

χρυσή τομή

## B. EYPETHPIO ONOMATΩΝ

Gauss  
Kalman  
Kolmogorov  
Lyapunov  
Meditch  
Riccati  
Wiener  
Λαϊνιώτης

## **Γ. ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ**

FIR μορφή Φίλτρου Kalman Μόνιμης Κατάστασης – FIR Steady State Kalman Filter (FIRSSKF)  
Αλγεβρικός Αλγόριθμος (Algebraic Algorithm) για την επίλυση της εξίσωσης Riccati  
Αλγεβρικός Αλγόριθμος (Algebraic Algorithm) για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov  
Αλγόριθμος Διπλασιασμού (Doubling Algorithm) για την επίλυση της εξίσωσης Riccati  
Αλγόριθμος Διπλασιασμού (Doubling Algorithm) για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov  
Αλγόριθμος Κυκλικής Αναγωγής (Cyclic Reduction Algorithm) για την επίλυση της εξίσωσης Riccati  
Ανά Βήμα Αλγόριθμος (Per Step Algorithm) για την επίλυση της εξίσωσης Riccati  
Ανά Βήμα Αλγόριθμος (Per Step Algorithm) για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov  
Δυϊκός Αλγόριθμος Διπλασιασμού (dual Doubling Algorithm) για την επίλυση της δυϊκής εξίσωσης Riccati  
Ειδικός Αλγόριθμος Διπλασιασμού (Special Doubling Algorithm) για την επίλυση της εξίσωσης Riccati  
Ειδικός Ανά Βήμα Αλγόριθμος (Special Per Step Algorithm) για την επίλυση της εξίσωσης Riccati  
Επεκταμένο Φίλτρο Kalman (Extended Kalman Filter)  
Κατανεμημένο Φίλτρο Kalman Μόνιμης Κατάστασης – Distributed Steady State Kalman Filter (DSSKF)  
Κατανεμημένο Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman – Distributed Time Invariant Kalman Filter (DTIKF)  
Κατανεμημένο Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο Kalman – Distributed Time Varying Kalman Filter (DTVKF)  
Μη Κατανεμημένο Φίλτρο Kalman Μόνιμης Κατάστασης – Non Distributed Steady State Kalman Filter (NDSSKF)  
Μη Κατανεμημένο Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman – Non Distributed Time Invariant Kalman Filter (NDTIKF)  
Μη Κατανεμημένο Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο Kalman – Non Distributed Time Varying Kalman Filter (NDTVKF)  
Φίλτρο Kalman Μόνιμης Κατάστασης – Steady State Kalman Filter (SSKF)  
Φίλτρο Kalman Μόνιμης Κατάστασης (Steady State Kalman Filter) με μη μηδενικές μέσες τιμές θορύβων  
Φίλτρο Kalman Μόνιμης Κατάστασης με Απαλοιφή Κέρδους – Steady State Kalman Filter Gain Elimination (SSKFGF)  
Φίλτρο Kalman Πληροφορίας Μόνιμης Κατάστασης – Steady State Information Kalman Filter (SSIKF)  
Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman – Time Invariant Kalman Filter (TIKF)  
Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman (Time Invariant Kalman Filter) με μη μηδενικές μέσες τιμές θορύβων  
Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman (Time Invariant Kalman Filter) με έγχρωμους θορύβους  
Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman με Απαλοιφή Κέρδους – Time Invariant Kalman Filter Gain Elimination (TIKFGF)  
Χρονικά Αμετάβλητο Φίλτρο Kalman Πληροφορίας – Time Invariant Information Kalman Filter (TIIKF)  
Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο Kalman – Time Varying Kalman Filter (TVKF)  
Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο Kalman (Time Varying Kalman Filter) με μη μηδενικές μέσες τιμές θορύβων  
Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο Kalman (Time Varying Kalman Filter) με έγχρωμους θορύβους  
Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο Kalman με Απαλοιφή Κέρδους – Time Varying Kalman Filter Gain Elimination (TVKFGF)  
Χρονικά Μεταβαλλόμενο Φίλτρο Kalman Πληροφορίας – Time Varying Information Kalman Filter (TVIKF)

## **Δ. ΕΥΠΕΘΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ**

cbikf  
cbkf  
cbkfge  
cble  
cbre  
distributedkalmanfilter  
dualreda  
fasterkalmanfilter  
firsskfl  
lealg  
leda  
lepsa  
linearmodel  
realg  
recrm  
reda  
repsa  
resda  
respsa  
ssikfiteration  
sskfgeiteration  
sskfiteration  
tiikfiteration  
tikf  
tikfgeiteration  
tikfiteration  
tikfsm

```
timodel  
tvikfiteration  
tvkfgeiteration  
tvkfiteration  
tvmodel
```

