ELEMENTARY QUANTUM MECHANICS

Microscopic scale पर पदार्थ या द्रव्य के dynamics behaviour (गतिकी व्यवहार) का अध्ययन करना, क्वान्टम यांत्रिकी कहलाता है।

तरंग यांत्रिकी :- (Wave mechanics)
तरंग यांत्रिकी में e-, p जैसे अत्यन्त सूक्ष्म गतिमान कणों की तरंग प्रकृति मानते हुए उनके गतिक व्यवहार की व्याख्या की जाती है।

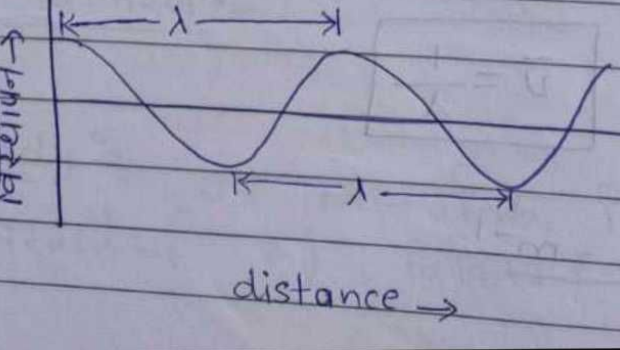
⇒ तरंग के लक्षण :-

(i) तरंग - दैर्ध्य :- (Wave-length) (λ)
किसी तरंग के दो निकटतम शिखर बिन्दु अथवा निम्नतर बिन्दुओं (गर्तों के मध्य बिन्दु) के बीच की दूरी, तरंग दैर्ध्य कहलाती है।

Unit → m, cm, Å

$$\boxed{1\text{Å} = 10^{-8}\,cm = 10^{-10}\,m}$$

(ii) आवृत्ति :- (Frequency)



(ii) आवृत्ति :- Frequency (ν)
एक तरंग एक सैकण्ड में किसी निश्चित बिन्दु से जितनी बार गुजरती है, वह सख्या उस तरंग की आवृत्ति कहलाती है।

→ न्यू (ν) से प्रदर्शित
→ इकाई → हर्ट्ज (Hz)

(iii) वेग :- (Velocity)
किसी तरंग द्वारा 1sec में तय की गई दूरी, उस तरंग का वेग कहलाती है।

→ c द्वारा प्रदर्शित

$$\left\{\begin{array}{l} c = \nu\lambda \\ \nu = \dfrac{c}{\lambda} \end{array}\right\}$$

$c = 3 \times 10^{8}\ ms^{-1}$ (वायु में प्रकाश का वेग)

(iv) तरंग सख्या :- (Wave number) ($\bar{\nu}$)
इकाई दूरी (1cm) में से गुजरने वाली तरंगों की सख्या, तरंग सख्या कहलाती है।

→ इसे $\bar{\nu}$ से प्रदर्शित करते है।

$$\boxed{\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda}}$$

Unit - cm^{-1}, m^{-1}

Q. 1500Å तरंग दैर्ध्य वाली तरंग की तरंग संख्या ज्ञात कीजिए।

$\lambda = 1500Å = 1500 \times 10^{-8}$ cm

Sol^{n}:- $\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1500 \times 10^{-8} cm}$

$\bar{\nu} = \frac{10^8}{1500} cm^{-1}$ $\left\{ \frac{10^4 \times \cancel{10000}^{6.6}}{\cancel{1500}} \right.$

$$\boxed{\bar{\nu} = 6.6 \times 10^4 cm^{-1}}$$

(v) तरंग फलन :- (Wave function)

किसी ऊर्जा स्तर में किसी गतिशील सूक्ष्म कण (e-) के बारे में बताने वाले गणितीय व्यंजक या फलन को तरंग फलन कहते है।

→ इसे psi (प्साई) ψ द्वारा प्रदर्शित करते है।

→ गतिशील कण की स्थिति ~~द~~ निर्देशांकों तथा समय दोनों पर निर्भर करती है, अतः ψ, निर्देशांकों तथा समय दोनों का फलन होता है।

1-D box में-

$$\boxed{\psi = \psi(x,t)}$$

कृष्णिका विकिरण :- (Black body Radiation)

Black body :- वह काल्पनिक पिण्ड, जो प्रकाश की सभी तरंगदैर्ध्य की विकिरणों को समान रूप से

अवशोषित या उत्सर्जित करता है, कृष्णिका कहलाता है।

→ आदर्श कृष्णिका के लिए 20 cm लम्बाई तथा 5 cm व्यास वाला एक खोखला सिलेण्डर लिया जाता है, जिसके एक सिरे पर 1-2 cm का छिद्र हो।

अवशोषकता- 'λ' पिण्ड / कृष्णिका द्वारा आपतित विकिरणों का जो भाग अवशोषित होता है, अवशोषकता कहलाता है

कृष्णिका के लिए → $\boxed{\lambda = 1}$

अतः कृष्णिका वह सतह या पृष्ठ होती है, जिसका अवशोषणांक इकाई होता है, अर्थात् कृष्णिका अपनी सतह पर गिरने वाली सभी विकिरणों को अवशोषित कर लेता है।

→ सम्पूर्ण उत्सर्जन क्षमताः- (E) किसी पिण्ड के इकाई क्षेत्रफल से इकाई समय में उत्सर्जित होने वाली कुल ऊर्जा को सम्पूर्ण उत्सर्जन क्षमता कहा जाता है

किरचॉफ का नियमः-

इस नियम के अनुसार सभी पिण्डों की एक निश्चित ताप पर उत्सर्जन क्षमता एवं अवशोषकता का अनुपात स्थिर होता है।

$$\boxed{\frac{E}{\lambda} = \frac{E_1}{\lambda_1}}$$

जहाँ-
$E \Rightarrow$ कृष्णिका की उत्सर्जन क्षमता
$\lambda \rightarrow$ कृष्णिका की अवशोषकता $(\lambda=1)$
$E_1 \rightarrow$ अन्य पिण्ड की उत्सर्जन क्षमता
$\lambda_1 \rightarrow$ अन्य पिण्ड की अवशोषकता $(\lambda_1<1)$

$$\boxed{E > E_1}$$

→ कृष्णिका उत्तम अवशोषक होने के साथ-2, उत्तम उत्सर्जक भी है।

कृष्णिका विकिरण से सम्बन्धित नियम :-

(1) वीन का विस्थापन नियम:-

विल्हेम वीन के अनुसार, वह तरंग जिसकी उत्सर्जन क्षमता उच्च होती है, की तरंगदैर्ध्य का मान ताप के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda_{max} \propto \frac{1}{T} \\ \\ T\lambda_{max} = b \end{array} \right\}$$

→ $b \rightarrow$ वीन स्थिरांक $\rightarrow 2.9 \times 10^{-3}$ mK

$$\left\{ \begin{array}{c} b = \underset{k}{\underset{\downarrow}{T}}\ \underset{m}{\underset{\downarrow}{\lambda_{max}}} \end{array} \right\}$$

→ इसी नियम के अनुसार, कृष्णिका विकिरणों की अधिकतम उत्सर्जन क्षमता ($E_{max.}$), ताप की 5वीं घात के अनुक्रमानुपाती होती है।

$$\left\{ E_{max.} \propto T^5 \quad / \quad \frac{E_{max.}}{T^5} = \text{Constant} \right\}$$

Q सूर्य के ऊर्जा स्पेक्ट्रम में 4840Å पर अधिकतम ऊर्जा का अवशोषण होता है। सूर्य को एक कृष्णिका मानकर उसके ताप का परिकलन करो यदि $b = 2.898 \times 10^{-3}$ mk हो।

Sol^n:- $T \lambda_{max} = b$

Given- $\lambda_{max.} = 4840 Å = 4840 \times 10^{-10}$ m

$$T = \frac{b}{\lambda_{max}} = \frac{2.898 \times 10^{-3} \cancel{m}k}{4840 \times 10^{-10} \cancel{m}}$$

$$\underline{T = 5987.6 K}$$

(2) स्टीफेन का नियम:-

स्टीफेन के अनुसार, किसी कृष्णिका के इकाई क्षेत्रफल से इकाई समय में उत्सर्जित सम्पूर्ण ~~क्ष~~ ऊर्जा उसके परमताप की चौथी घातांक के समानुपाती होता है।

$$\boxed{E \propto T^4 \; / \; E = \sigma T^4}$$

σ = स्टीफेन बोल्ट्जमैन स्थिरांक

$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ W m^{-2} K^{-4}$

(3) रैले-जीन्स का नियम :-

इस नियम के अनुसार, प्रकाश की आवृत्ति (आवर्ती दोलक) की ऊर्जा ताप T पर, औसत ऊर्जा kT के बराबर होती है।

$$\boxed{dU(\lambda) = kTN(\lambda)}$$

$dN(\lambda) \rightarrow$ इकाई आयतन के दोलकों की संख्या

प्लांक का विकिरण नियम :-

इस नियम के अनुसार,

⇒ कृष्णिका की दीवारों के कण ऊष्मीय गति करते है, जिससे विद्युत चुम्बकीय दोलक उत्तेजित हो जाते है। साम्यावस्था में कृष्णिका की दीवारों और विद्युत चुम्बकीय क्षेत्र के मध्य ऊर्जा प्रवाह नहीं होता है।

→ λ से $(\lambda + d\lambda)$ तक के क्षेत्र के लिए ऊर्जा का घनत्व -

$$dU = \rho(\lambda)\, d\lambda$$

$\rho \rightarrow$ अवस्था घनत्व

$$\rho(\lambda) = (8\pi hc/\lambda^5) \left\{ \frac{e^{-hc/\lambda kT}}{1 - e^{-hc/\lambda kT}} \right\} \quad (1)$$

→ समी॰ (1) के अनुसार यदि λ का मान कम हो, तो $hc/\lambda kT$ का मान अधिक होगा तथा $e^{-hc/\lambda kT}$ का मान शून्य के लगभग हो जाता है, तब ऊर्जा घनत्व भी शून्य हो जाता है।

→ यदि λ का मान (↑)es ;, $hc/\lambda kT$ → (↓)es ।

⇒ यदि ऊर्जा घनत्व को दिए गए ताप पर, तरंगदैर्ध्य ($\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \infty$ तक) समाकलित करने पर-

$$\boxed{U = \alpha T^4}$$

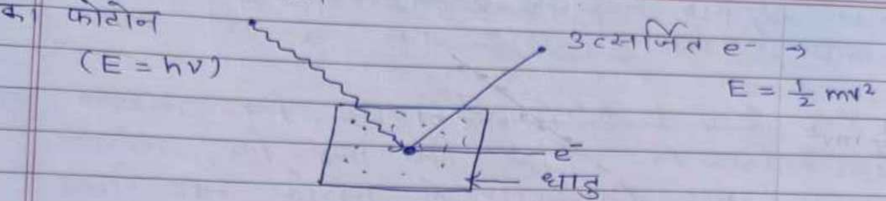
$\alpha = \frac{4\sigma}{c}$ and $\sigma = \pi^2 K^4 / 60 c^2 h^2$

⇒ वे तरंग-दैर्ध्य जिनके लिए $dP/d\lambda = 0$ हो, वे उच्च ताप पर निम्न समी॰ देते हैं-

$$\boxed{T\lambda_{max.} = \frac{hc}{5k}} \times \underbrace{\text{constant}}_{2.878 \times 10^{-3}\ mK}$$

-!- <u>प्रकाश विद्युत प्रभाव</u> :- (Photoelectric Effect)

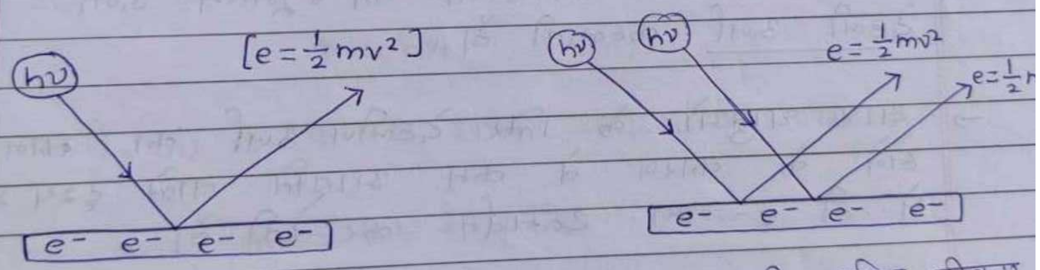
किसी प्रकाश की उचित तरंगदैर्ध्य की विकिरण (UV) जब धातु की सतह से टकराती है तो धातु की सतह से $e^{\ominus}$ उत्सर्जित होने लगते है, इसे <u>प्रकाश विद्युत प्रभाव</u> कहा जाता है।



प्रकाश विद्युत प्रभाव

Note:- Cs (सीजियम) की आयनन ऊर्जा कम होने के कारण यह आसानी से e^- का उत्सर्जन कर देता है, इस कारण इसका उपयोग प्रकाशविद्युत सेल बनाने में किया जाता है।

प्रकाश - विद्युत् प्रभाव की क्वान्टम यान्त्रिकी व्याख्या :-

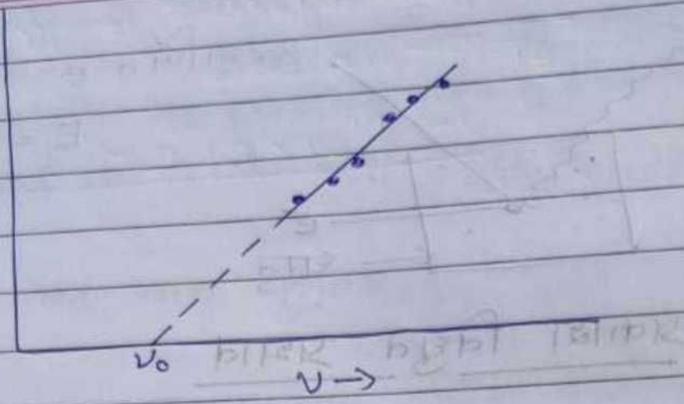


(a) प्रकाश की कम तीव्रता (b) प्रकाश की अधिक तीव्रता

उचित आवृत्ति वाले प्रकाश की तीव्रता को बढ़ाने पर धातु की सतह से उत्सर्जित e^- नों की संख्या बढ़ जाती है।

→ फोटॉन की ऊर्जा, आवृत्ति पर निर्भर करती है

$e = \frac{1}{2}mv^2$



→ फोटो -e- की गतिज ऊर्जा व आवृत्ति के मध्य ग्राफ

-!- देहलीज आवृत्ति :- (Threshold Energy) प्रकाश विकिरणों की वह न्यूनतम आवृत्ति, जिसके द्वारा धातु की सतह से e- का उत्सर्जन होता है, देहलीज आवृत्ति कहलाती है।

तथा इस समय विकिरणों की न्यूनतम ऊर्जा देहली ऊर्जा कहलाती है।

→ क्षार धातुओं के लिए देहलीज ऊर्जा का मान कम होने के कारण वे कम आवृत्ति वाले दृश्य प्रकाश में ही e- का उत्सर्जन कर देती है।

→ माना प्रकाश की थ्रेशोल्ड (देहली) आवृत्ति ν_0 है।

(i) क्वांटम के अनुसार यदि ν_0 आवृत्ति वाला फोटोन धातु की सतह से टकराता है तो वह अपनी सम्पूर्ण ऊर्जा $h\nu_0$, e- को दे देता है, जिससे e- उत्तेजित होकर, परमाणु में नाभिक के आकर्षण से मुक्त होकर धातु की सतह से उत्सर्जित हो जाता है।

(ii) फोटॉन की आवृत्ति ν_0 से कम होने पर धातु की सतह से e- का उत्सर्जन नहीं हो पाता है।

(iii) फोटॉन की आवृत्ति ν_0 से उच्च ν हो जाने पर, फोटॉन की ऊर्जा भी अधिक हो जाती है। इस $h\nu$ ऊर्जा वाले फोटॉन के धातु की सतह से टकराने पर इसकी ऊर्जा e- ग्रहण कर लेता है, जिससे e-, परमाणु में नाभिक के आकर्षण से मुक्त होकर, धातु की सतह से उत्सर्जित होगा तथा साथ ही उसकी गतिज ऊर्जा भी बढ़ जाती है।

आइन्स्टीन के अनुसार,

$$\boxed{h\nu = \phi + \frac{1}{2}mv^2} \quad \text{—(i)}$$

$\phi \rightarrow$ धातु की देहली ऊर्जा

$\frac{1}{2}mv^2 \rightarrow$ उत्सर्जित e- की गतिज ऊर्जा

$$\phi = h\nu_0 \quad \text{—(ii)}$$

समी. (ii) से ϕ का मान समी. (i) में रखने पर-

$$h\nu = h\nu_0 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 = h(\nu - \nu_0)} \quad \text{—(iii)}$$

Q. 3. धातु के लिए $\phi = 3.8 eV$

$\nu_0 = ?$

[$1 eV = 1.6 \times 10^{-19} J$, $h = 6.62 \times 10^{-34} Js$]

सूत्र $\phi = h\nu_0$, $\nu_0 = \frac{\phi}{h}$

$$\nu_0 = \frac{3.8 \times 1.6 \times 10^{-19} J}{6.62 \times 10^{-34} Js}$$

$$\underline{\nu_0 = 9.18 \times 10^{14}\ s^{-1}}$$

प्रकाश विद्युत प्रभाव की उपयोगिता :-

इस प्रभाव के आधार पर प्रकाश की कणीय प्रकृति प्रदर्शित होती है, प्रकाश के इन कणों को फोटॉन कहते है, जो प्रकाश विद्युत प्रभाव के लिए उत्तरदायी होते है।

जबकि ध्रुवण, विवर्तन आदि प्रकाश की तरंग प्रकृति को बताते है।

अतः प्रकाश की प्रकृति द्वैत (dual) होती है, अर्थात् वह तरंग तथा कण दोनों के रूप में व्यवहार करता है।

ठोसों की ऊष्माधारिता :-

किसी पदार्थ के लिए ऊष्मा की वह मात्रा जो पदार्थ के 1gm का ताप 1°C बढ़ा दे, ऊष्माधारिता या विशिष्ट ऊष्मा कहलाती है।

→ क्वांटम यांत्रिकी के अनुसार कण के कम्पन की स्वतंत्रता की कोटि $\frac{1}{2}kT$ होती हैं -

3D में -

$$\underset{(x)}{\frac{1}{2}kT} + \underset{(y)}{\frac{1}{2}kT} + \underset{(z)}{\frac{1}{2}kT}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{3}{2}kT}$$

* गतिज तथा स्थितिज ऊर्जा एक -दूसरे में अन्तर्परिवर्तित होती रहती है।

एक कण की कुल ऊर्जा इसकी गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा का योग होती हैं-

$$E = E_{(गतिज)} + E_{(स्थितिज)}$$

$$= \frac{3}{2}kT + \frac{3}{2}kT \quad \left\{ \rightarrow kT\underbrace{\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)}_{3kT} \rightarrow \frac{6}{2} = 3 \right.$$

$$E = 3kT$$

N mol के लिए -

$$E = 3kTN$$

$$\left[k = \text{बोल्टजमान स्थिरांक} = \frac{R}{N}\right]$$

$$E = 3\frac{RT\cancel{N}}{\cancel{N}}$$

$$\boxed{E = 3RT}$$

ठोस पदार्थों के लिए -

$$C_p \simeq C_v = \frac{dE}{dT} = 3R$$

$C_p \rightarrow$ स्थिर दाब पर ऊष्माधारिता ।
$C_v \rightarrow$ स्थिर आयतन पर ऊष्माधारिता ।

$$\left\{ C_v = 3R\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \cdot \frac{e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT}-1)^2} \right\}$$

$\nu \rightarrow$ कम्पन आवृत्ति

हाइड्रोजन परमाणु के लिए बोर मॉडल :-

यह मॉडल नील्स बोर द्वारा दिया गया।

अभिग्रहित :-

(1) परमाणु में e- नाभिक के चारों ओर के कुछ निश्चित वृत्ताकार पथों में ही चक्कर लगाते है, जिन्हें कक्ष या कोश (orbit) कहते है।

$n =$	1	2	3	4
orbit →	K	L	M	N

$[E \propto n^2]$

n ↑es; E ↑es
(Energy levels)

(2) कक्ष में घूमते हुए e- की ऊर्जा स्थिर होती है। वह उच्च ऊर्जा स्तर पर जाने के लिए ऊर्जा का अवशोषण तथा निम्न ऊर्जा स्तर पर जाने के लिए ऊर्जा का उत्सर्जन करता है।

$$\boxed{\Delta E = E_2 - E_1}$$

ΔE → अवशोषित या उत्सर्जित ऊर्जा।
E_1 & E_2 → ऊर्जा स्तर।

(3) परमाणु के ऊर्जा स्तर क्वाण्टीकृत होते है, अतः ऊर्जा का अवशोषण या उत्सर्जन फोटॉन ($h\nu$) के रूप में होता है।

$$\Delta E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} \qquad \left\{ \nu = \frac{c}{\lambda} \right.$$

h → Plank constant
ν → frequency of Radiation, λ → wave-length, c → velocity

(4) एक कक्षक में घूमते हुए e- पर दो विपरीत बल कार्य करते हैं-

(A) अपकेन्द्रण बल :-
वह बल जो e- को नाभिक से प्रतिकर्षित करता है।

(B) अभिकेन्द्रीय बल :-
वह बल जो e- को नाभिक की ओर आकर्षित करता है।

$$\boxed{\text{अपकेन्द्रण बल} = \text{अभिकेन्द्रीय बल}}$$

↓

अतः e- वृत्ताकार कोश में चक्कर लगाता रहता है।

(5) e- परमाणु के चारों ओर के केवल उन्हीं कोशों में चक्कर लगाता है, जिनके कोणीय संवेग का मान $\frac{h}{2\pi}$ का पूर्ण गुणज हो -

$$mvr = \frac{nh}{2\pi}$$

H- के लिए बोर त्रिज्या

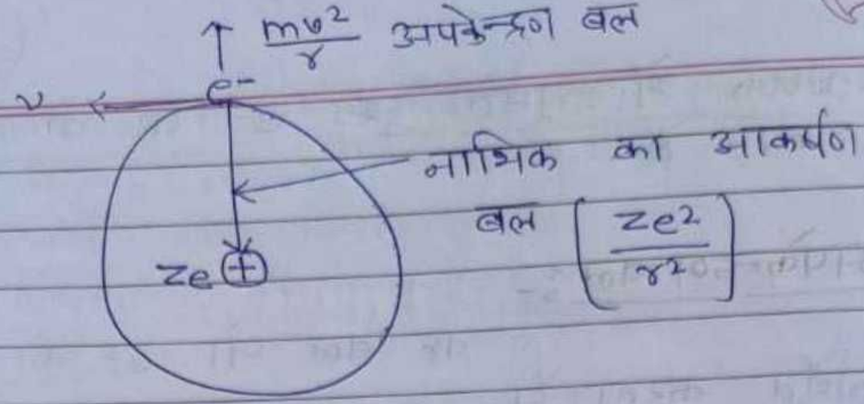
$$r = 0.529 \times 10^{-8} \times \frac{n^2}{z} \text{ cm}$$

n = कोश संख्या
z = परमाणु संख्या

$$E = -\frac{13.6 \times z^2}{n^2} \text{ eV}$$

for H → n = 1, z = 1

$$\boxed{E = -13.6 \text{ eV}}$$



वृत्ताकार पथ में घूमता हुआ e^-

⇒ बोर के परमाणु मॉडल के दोष :

① यह एक से अधिक e- वाले परमाणुओं के परमाणु मॉडल की व्याख्या नहीं कर सकता है।

② परमाणु स्पेक्ट्रम की रेखाओं में महीन रेखाएँ भी उप॰ होती है, जिनकी व्याख्या बोर मॉडल द्वारा नहीं की जा सकती है।

③ जीमान प्रभाव :-
चुम्बकीय क्षेत्र में रखने पर स्पेक्ट्रम की रेखाएँ विभाजित हो जाती है, इसे जीमान प्रभाव कहा जाता है।

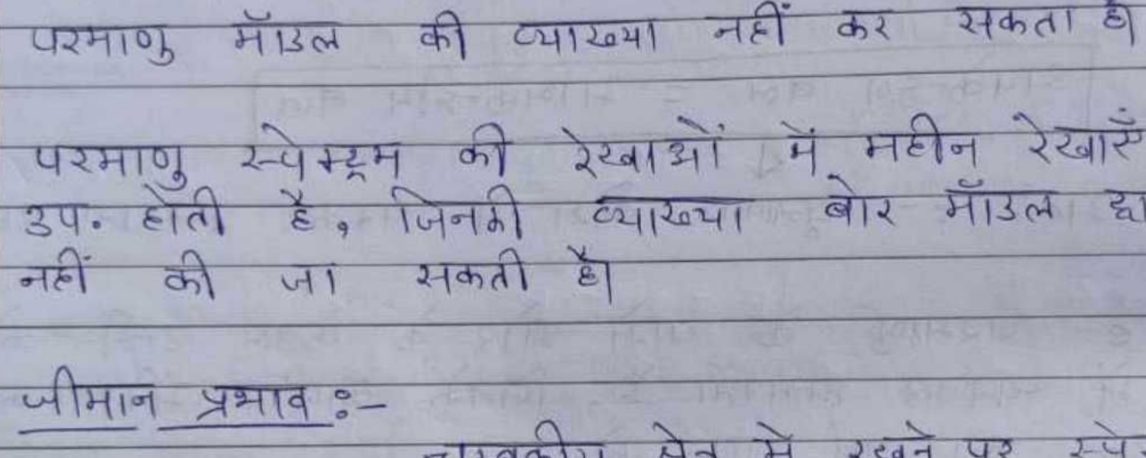


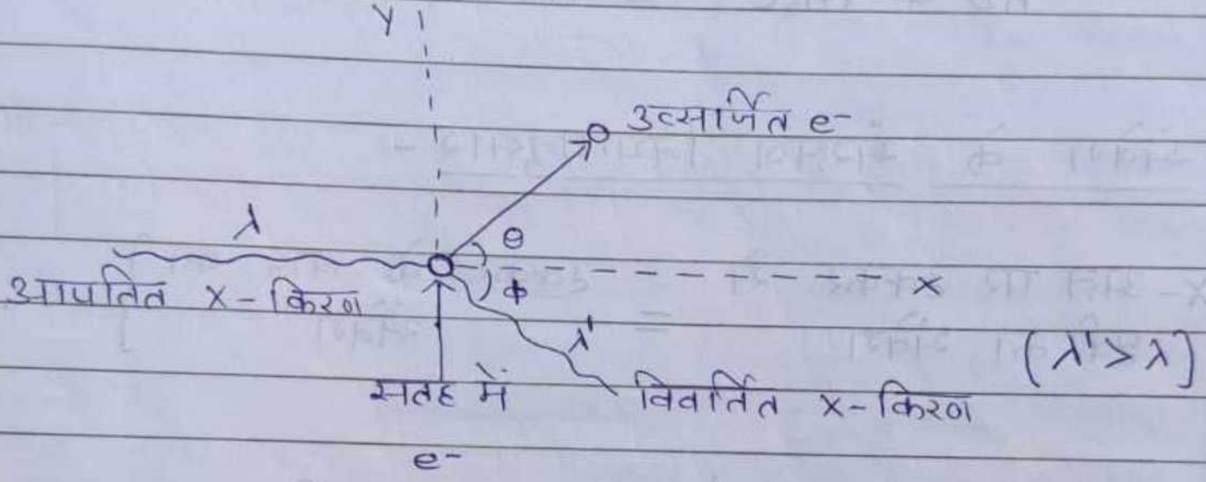
fig:- Zeeman's Effect

स्टार्क प्रभाव :-
विद्युत क्षेत्र की उप॰ में स्पेक्ट्रमी रेखाओं का विभाजन, स्टार्क प्रभाव कहलाता है।

Compton's Effect :-

A.H. Compton ने।

→ जब x-किरणें किसी वस्तु से टकराती है, तो उस वस्तु से e^- का उत्सर्जन होता है तथा ये कम ऊर्जा तथा अधिक तरंगदैर्घ्य वाली विकिरणों के रूप में प्रकीर्णित या विवर्तित हो जाती है।
यह कॉम्पटन प्रभाव कहलाता है।



कॉम्पटन प्रभाव की व्याख्या :-

माना x-किरणें कणीय प्रकृति की होती है। जब $h\nu$ ऊर्जा वाला फोटॉन सतह से टकराता है, जिसमें उप. e^- की ऊर्जा m_0c^2 है-
$m_0 \to$ e^- का विश्रामअवस्था में द्रव्यमान।
$c \to$ प्रकाश का वेग।

अब फोटॉन अपनी ऊर्जा का कुछ भाग e^- को देकर $h\nu'$ ऊर्जा सहित विवर्तित हो जाता है, तथा e^- उत्तेजित होकर सतह से बाहर निकल जाता है। इस समय इसकी ऊर्जा mc^2 तथा संवेग - mv होता है।
$m \to$ गति में e^- का द्रव्यमान

इन टक्करों पर ऊर्जा तथा संवेग संरक्षण नियम लागू करने पर -

(i) ऊर्जा संरक्षण नियमानुसार -

{टक्कर से पहले फोटॉन व e- की ऊर्जा = टक्कर के बाद दोनों की ऊर्जा}

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2$$

(ii) संवेग के संरक्षण नियमानुसार -

{x- अक्ष पर टक्कर से पूर्व का संवेग = टक्कर के बाद का संवेग}

$$\frac{h\nu}{c} + 0 = \frac{h\nu'}{c}\cos\theta + mv\cos\theta$$

$$mv\cos\theta = \frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c}\cos\theta$$

$$mv\cos\theta = \frac{h}{c}(\nu - \nu'\cos\theta) \quad (1)$$

{y- अक्ष पर टक्कर से पूर्व संवेग = टक्कर के बाद का संवेग}

$$0 + 0 = \frac{h\nu'}{c}\sin\theta + mv\sin\theta$$

$$0 = \frac{h\nu'\sin\theta + mv\sin\theta}{c}$$

$$h\nu' \sin\theta = -mvc\sin\theta \quad \text{(ii)}$$

e^- के द्रव्यमान m तथा विश्रामअवस्था द्रव्यमान m_0 के बीच निम्न सम्बन्ध होता हैं-

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad -(3)$$

$(\lambda' > \lambda)$

→ विवर्तित किरणों की तरंगदैर्ध्य (λ'), आपतित किरणों की तरंगदैर्ध्य (λ) से अधिक होती है।

$\Delta\lambda \rightarrow$ तरंग-दैर्ध्य विस्थापन ।

(i) $\underbrace{\text{यदि } \theta = 0 \text{, तो } \cos 0^\circ = 1}$

$\Delta\lambda = 0$; आपतित तथा विवर्तित किरणें समानान्तर तथा उनके तरंगदैर्ध्य में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

(ii) $\underbrace{\text{यदि } \theta = 90^\circ ; \cos 90^\circ = 0}$

आपतित किरणें, विवर्तित किरणों के लम्बवत् है।

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1-0)$$

$$\Delta\lambda = \frac{6.626 \times 10^{-34}\ Js}{(9.1 \times 10^{-31}\ kg)(3 \times 10^{8}\ ms^{-1})}$$

$$\boxed{\Delta\lambda = 0.02422 \times 10^{-10}\ m = 0.02422\ \text{Å}} \quad -(I)$$

$\Delta\lambda$ की यह value Compton wave-length कहलाती है।

(iii) $\underbrace{\text{यदि } \theta = 180^\circ \text{ ; तो } \cos 180^\circ = -1}$

अर्थात् आपतित किरणें, विवर्तित किरणों की विपरीत दिशा में है

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{mc} = \underline{0.04844\ \text{Å}} \quad -(II)$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta\lambda &= \frac{h}{mc}(1-(-1)) \\ &= \frac{h}{mc} \times 2 \\ \Delta\lambda &= \frac{2h}{mc} \end{aligned}\right\}$$

अतः θ की value बढ़ने के साथ-2, $\Delta\lambda$ की Value भी बढ़ती है।

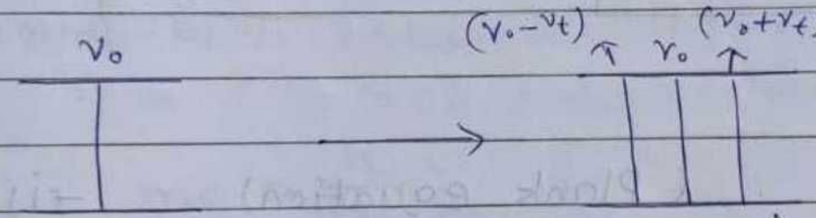
(Zeeman Effect)

जीमान प्रभाव:-

चुम्बकीय क्षेत्र की उप. में स्पेक्ट्रमी लाइनें और विभाजित हो जाती हैं, इसे जीमान प्रभाव कहा जाता है।

→ यह दो प्रकार का होता हैं-

(i) **सामान्य जीमान प्रभाव:-** इसमें स्पेक्ट्रमी लाइन चु. क्षेत्र की उप. में दो या तीन लाइनों में विभाजित हो जाती है।
जिनमें से एक लाईन की आवृत्ति मूल आवृत्ति से कुछ कम तथा दूसरी लाईन की आवृत्ति मूल आवृत्ति से कुछ अधिक होती है।



चुम्बकीय क्षेत्र की अनु. में — चुम्बकीय क्षेत्र की उप. में

(ii) **जटिल जीमान प्रभाव:-** इसमें स्पेक्ट्रमी लाइनें, चुम्बकीय क्षेत्र की उप. में, अधिक संख्या में विभाजित हो जाती है, जिससे एक जटिल प्रकार का स्पेक्ट्रम प्राप्त होता है, अतः इसे जटिल जीमान प्रभाव कहा जाता है।

-!- डी-ब्रॉग्ली परिकल्पना :-

डी ब्रोग्ली ने बताया कि प्रकाश तथा अन्य विद्युत चुम्बकीय विकिरणों की तरह e- जैसे सूक्ष्म गतिशील कण भी द्वैत व्यवहार प्रदर्शित करते है अर्थात् वे कण तथा तरंग दोनों की तरह व्यवहार करते है

→ एक समय में केवल ये एक ही प्रकार का व्यवहार प्रदर्शित करते है।

कणीय गुण	तरंगीय गुण
↓	↓
संवेग (mv)	तरंगदैर्ध्य (λ)
ऊर्जा (E)	आवृत्ति (ν)

$E = h\nu$ (Plank equation) -(i)

$E = mc^2$ (Einestene eq.^{n}) -(ii)

डी-ब्रोग्ली ने बताया कि तरंग की ऊर्जा तथा कण की ऊर्जा एक-दूसरे के बराबर होनी चाहिए।

eq.^{n} (1) & (2) से -

$$h\nu = mc^2$$

$$\frac{h\nu}{c} = mc$$

$\nu = \frac{c}{\lambda}$; $c \rightarrow$ Velocity of light

$\nu \rightarrow$ frequency

$\lambda \rightarrow$ wave-length

$$\frac{h}{c} \times \frac{c}{\lambda} = mc$$

$$\frac{h}{\lambda} = mc \qquad -(3)$$

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{mc}} \qquad -(4)$$

साधारण कण के लिए -

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{mv}} \qquad (5)$$

समी. (4) & (5) डी - ब्रोग्ली की तरंग समीकरण कहलाती है।

→ $$mc = \frac{h}{\lambda}$$

$$\underbrace{\text{द्रव्यमान} \times \text{वेग}} = \frac{h}{\text{तरंग दैर्घ्य}}$$

$$\boxed{\text{संवेग} \propto \frac{1}{\text{तरंगदैर्घ्य}}}$$

"अर्थात् गतिशील कण का संवेग उसकी तरंगदैर्घ्य के व्युत्क्रमानुपाती होता है।"

→ गतिशील कण से सम्बन्धित तरंगों की तरंगदैर्घ्य, डी- ब्रोग्ली तरंग दैर्घ्य कहलाती है

द्रव्य तरंगों एवं विद्युत-चुम्बकीय तरंगों के मध्य अन्तर :-

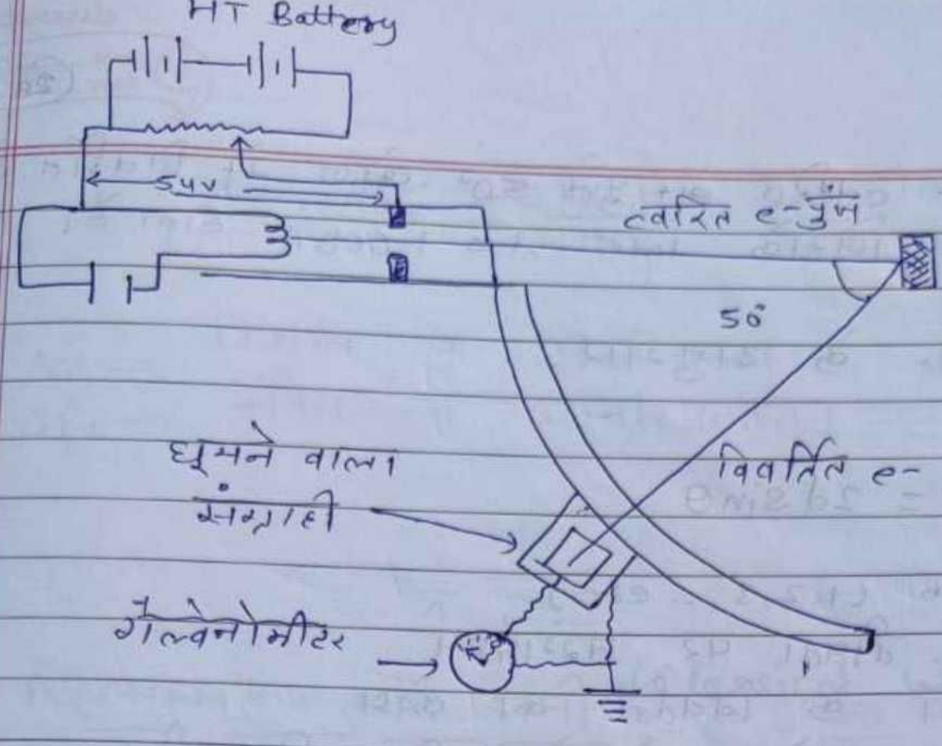
द्रव्य तरंग	विद्युत-चुम्बकीय तरंग
1. इनका वेग कम होता है।	इनका वेग उच्च ($3 \times 10^8 ms^{-1}$) होता है।
2. ये शून्य में संचरित नहीं होती है।	ये शून्य में संचरित हो जाती है।
3. ये कण से उत्सर्जित नहीं होती बल्कि उसके साथ जुड़ी होती है।	ये कण से उत्सर्जित ~~नहीं~~ होती है, परन्तु उससे जुड़ी हुयी नहीं होती है।
4. इनकी तरंगदैर्घ्य (λ) कम होती है।	इनकी तरंग-दैर्घ्य λ उच्च होती है।

डी-ब्रोग्ली सम्बन्ध का प्रायोगिक सत्यापन

डेवीसन तथा जर्मर का प्रयोग :-

डेवीसन तथा जर्मर के अनुसार गर्म तार से e-का उत्सर्जन होता है, जो स्लिट से निकलकर 40-80 वोल्ट से आवेशित होकर e-पुंज के रूप में Ni-क्रिस्टल पर आपतित होते है।

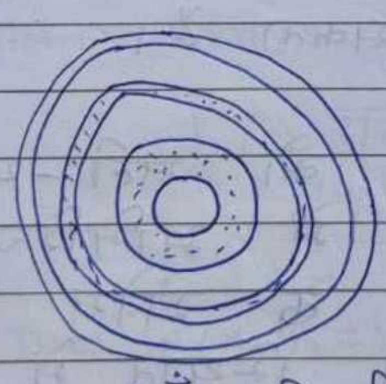
→ इन e-नों से सम्बन्धित तरंग का तरंगदैर्घ्य x-rays के बराबर होता है।



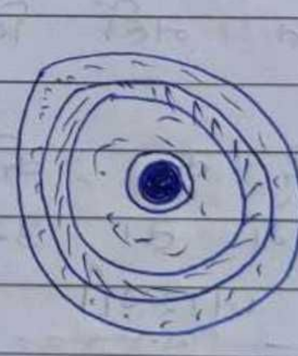
→ डेवीसन व जमर्र का प्रयोग

Ni- क्रिस्टल से ये किरणें θ कोण पर विवर्तित हो जाती है, जिसकी दिशा डिटेक्टर की सहायता से ज्ञात की जाती है।

इस प्रकार बनने वाले विवर्तन डिजाइन, x- किरण विवर्तन जैसे होते है।



(a) e⁻ पुंज विवर्तन डिजाइन



(b) x- किरण विवर्तन डिजाइन

e- पुंज का x- किरणों की तरह विवर्तन होने का मतलब है कि e-, x- किरणों की तरह तरंगीय प्रकृति प्रदर्शित करते है।

→ 54V से त्वरित e-पुंज 50° कोण से विवर्तित होता है, जिसके लिए $\lambda = 1.668 Å$ होता है।

ब्रैग समी॰ के अनुसार,

$$n\lambda = 2d\sin\theta$$

$n \rightarrow$ पूर्णांक (1, 2, 3, -- etc)
$\lambda \rightarrow$ max. तीव्रता पर तरंगदैर्ध्य
$\theta \rightarrow$ तरंगों के विवर्तन का कोण
$d \rightarrow$ क्रिस्टल के तलों के बीच की दूरी।

अनिश्चितता का सिद्धान्त :-

यह सिद्धान्त वर्नर हाइजेनबर्ग द्वारा 1927 में दिया गया।

→ इस नियम के अनुसार एक समय में किसी सूक्ष्म कण की स्थिति तथा संवेग को सही-2 ज्ञात नहीं किया जा सकता है।

→ यदि कण की स्थिति को सही-2 ज्ञात करेंगे तो उसके संवेग में अनिश्चितता उत्पन्न हो जाएगी तथा कण के संवेग को सही-2 ज्ञात करने पर उसकी स्थिति में अनिश्चितता उत्पन्न हो जाती है

→ सूक्ष्म कण की स्थिति तथा संवेग में अनिश्चितता का गुणनफल $\frac{h}{4\pi}$ के बराबर या इससे अधिक होता है

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}}$$

$\Delta x \rightarrow$ स्थिति में अनिश्चितता।
$\Delta p_x \rightarrow$ संवेग में अनिश्चितता।

-:- चिरसम्मत तरंग समी. :- (Classical wave equation)

$$\frac{\delta^2 D}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 D}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 D}{\delta z^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\delta^2 D}{\delta t^2} \quad -(1)$$

जहाँ x, y, z तीनों निर्देशांक है।
$t \rightarrow$ समय, $v \rightarrow$ संचरण वेग, $D \rightarrow$ तरंग का विस्थापन।

यदि v का मान समय अनाश्रित हो, तो विस्थापन D, निर्देशांको के फलन $\psi(x, y, z)$ तथा समय का आवर्तीफलन $e^{i2\pi vt}$ के गुणनफल के बराबर होता है

$$[i = \sqrt{-1}]$$

$$D = \psi(x, y, z) \cdot e^{i2\pi vt} \quad -(2)$$

$\rightarrow$ x, y, z में से किसी एक को स्थिर मानकर, D का मान ज्ञात करने पर, $t = 0$ पर-

$e^{i2\pi v \times 0} = e^0 \Rightarrow 1$

तब

$$\underline{D = \psi(x, y, z)}$$

→ कुछ समय बाद $t = 0 + \frac{1}{2}$ पर, $t = \frac{1}{v}$

$$e^{i2\pi v \times \frac{1}{v}} = e^{i2\pi} = 1$$

अतः $D = \psi(x, y, z)$

अतः सभी बिन्दुओ पर D का मान $t_0 = \frac{1}{v}$ से परिवर्तित होता है।

→ समयअन्तराल t_0 में D का औसत मान निम्न समी. से ज्ञात किया जा सकता है-

$$\langle D \rangle = \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} D\,dt = \frac{1}{t_0}\psi(x, y, z)\int_0^{t_0} e^{i2\pi vt}\,dt$$

इसे Solve करने पर $\langle D \rangle = 0$ प्राप्त होता है।

→ विस्थापन के औसत के वर्ग को निम्न प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है-

$$\langle |D|^2 \rangle = \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} |D|^2\,dt$$

D → Complex function

$|D|^2 = D^* D$ → D^* = D का complex function conjugate

$[i = -i]$

$$|D|^2 = \psi^* \psi\, e^{i2\pi vt}\, e^{-i2\pi vt} = \psi^* \psi$$

$$<|D|^2> = \psi^* \psi \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} dt = \psi^* \psi = |\psi|^2 \quad -(3)$$

$$<|D|^2> = |\psi|^2 \quad -(3)$$

$\psi \rightarrow$ तरंग का आयाम ।

समी.(2) से D का मान समी.(1) में रखकर उसमें $e^{i2\pi vt}$ का भाग देने पर -

$$\frac{\delta^2 \psi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \psi}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \psi}{\delta z^2} + \frac{4\pi^2 v^2 \psi}{v^2} = 0 \quad -(4)$$

$$\frac{\delta^2 \psi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \psi}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \psi}{\delta z^2} + \frac{4\pi^2 \psi}{\lambda^2} = 0 \quad -(5)$$

$$\left\{ \because \frac{v}{\nu} = \lambda \right\}$$

समी.(4) तथा (5) classical wave equation है।

हैमिल्टोनियन संकारक :- [Hamiltonian Operator]

संकारक एक methamatical term है, जो एक function को operate करती है तथा उसे another function में change कर देती है।

$$\underbrace{\frac{d}{dx}}_{\text{operator}} \underbrace{f(x)}_{\text{function}} = \frac{d}{dx} x^2 = \underbrace{2x}_{\text{another function}}$$

→ विभिन्न भौतिक मात्राओं के क्वान्टम यांत्रिकीय संकारक:-

भौतिक मात्रा	क्वांटम यान्त्रिकीय संकारक
1. स्थिति (Position)	
x	$\hat{x}$
y	$\hat{y}$
z	$\hat{z}$
2. संवेग (momentum) p_x	$-i\hbar \frac{d}{dx} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$
3. गतिज ऊर्जा (K.E.) $T_x = \frac{p_x^2}{2m}$	$T_x = \frac{-\hbar^2}{i^2 \times 2m}\frac{d^2}{dx^2}$ $[i^2 = -1]$ $T_x = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$
4. स्थितिज ऊर्जा (V)	$\hat{V}$
5. कुल ऊर्जा (Total energy)	$E_x = T_x + V_x$ $E_x\,(H_x) = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_x$

किसी तंत्र की कुल ऊर्जा से सम्बन्धित संकारक जो गतिज व स्थितिज ऊर्जा के योग के बराबर होता है, हैमिल्टोनियन संकारक कहलाता है।

→ इसे $\hat{H}$ से प्रदर्शित किया जाता है।

$$\boxed{\hat{H}_x = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_x}$$

⇒ Properties of Operators :-

(1) संकारकों का योग निम्न प्रकार से होता है -

$$\underbrace{(\hat{A} + \hat{B})}_{\text{Operators}}\underbrace{f(x)}_{\text{function}} = \hat{A}f(x) + \hat{B}f(x)$$

$$(\hat{A} - \hat{B})f(x) = \hat{A}f(x) - \hat{B}f(x)$$

Ex.- $\hat{D} = \frac{d}{dx}$ हो तो,

$$\underbrace{(\hat{D} + \hat{3})}_{\text{Operators}}\underbrace{(x^3 - 5)}_{\text{function}} = \hat{D}(x^3 - 5) + \hat{3}(x^3 - 5)$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dx}x^3}\ - \frac{d}{dx}\underbrace{5}_{\text{Constant}} + 3x^3 - 15$$

(constant का differenciate zero होता है)

$\left[\frac{d}{dx}x^n \Rightarrow nx^{n-1}\right]$

$$= 3x^{3-1} - 0$$

$$= 3x^2 + 3x^3 - 15$$

$$= \underline{3x^3 + 3x^2 - 15}$$

Note:- संकारकों का योग क्रमविनिमय होता है, अर्थात् उनके लिखने के क्रम से उनका परिणाम प्रभावित नहीं होता है

$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{A}$$

$$\hat{A} - \hat{B} = -\hat{B} + \hat{A}$$

(2) संकारकों का गुणा निम्न प्रकार से होता हैं:-

$$(\hat{A} \times \hat{B}) f(x) = \hat{A}[\hat{B} f(x)]$$
$$= \hat{A}[f'(x)]$$
$$= f''(x)$$

→ फलन को पहले Right वाले संकारक से गुणा किया जाता है तथा फिर left की तरफ क्रम से लिखे हुए संकारकों से गुणा करते है।

Ex.- $\hat{D} = \frac{d}{dx}$ हो तो -

(i) $\underline{\hat{3}\hat{D} f(x)} = \hat{3}[\hat{D} f(x)]$
$= \hat{3}(f'x) = \underline{3f'(x)}$

(ii) $\underline{\hat{D}\hat{3} f(x)} = \hat{D}[\hat{3} f(x)]$
$= \hat{D}[3f(x)]$
$= \underline{3f'(x)}$

→ संकारकों का गुणा भी क्रमविनिमय होता है, अर्थात् क्रम बदलने से उनका परिणाम प्रभावित नहीं होता है। $(\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A})$

Always not true $(\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A})$

Ex- यदि $\hat{A} = \frac{d}{dx}$, $\hat{B} = x$ व $f(x) = x^2$ तो सिद्ध करो कि $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$

→ $\hat{A}\hat{B} f(x) = \frac{d}{dx} x \cdot x^2 = \cancel{x^3}$

$= \frac{d}{dx} (x^3) \to (3x^{3-1})$ $\left\{ \begin{array}{l} x^n \\ \downarrow \\ nx^{n-1} \end{array} \right.$

$= 3x^2$

$\hat{B}\hat{A} f(x) = x \cdot \frac{d}{dx} \cdot x^2 = 2x^2$

अतः $\hat{A}\hat{B} f(x) \neq \hat{B}\hat{A} f(x)$

$$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$$

(3) दो संकारकों के क्रमविनिमयक को निम्न प्रकार से परिभाषित किया जा सकता है-

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

(i) यदि $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ हो तो

$$\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$$

तब संकारक $\hat{A}$ व $\hat{B}$ परस्पर क्रमविनिमयक (Commute) होते है।

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0$$

$$\left[\hat{3}, \frac{d}{dx}\right] = \hat{3}\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}\hat{3} = 0$$

(ii) यदि $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$ हो तो $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \neq 0$

तब संकारक $\hat{A}$ व $\hat{B}$ परस्पर क्रमविनिमयक नहीं होते है।

$$\left[\frac{d}{dx}, \hat{x}\right] = \hat{D}\hat{x} - \hat{x}\hat{D} = 1$$

(4) संकारकों का गुणा, साहचर्य नियम द्वारा होता है।

$$\hat{A}(\hat{B}\hat{C}) = (\hat{A}\hat{B})\hat{C}$$

Ex.- $\hat{A} = \frac{d}{dx} = \hat{D}$; $\hat{B} = \hat{x}$; $\hat{C} = \hat{3}$

$(\hat{A}\hat{B}) = \hat{D}\hat{x} = 1 + \hat{x}\hat{D}$

$(\hat{B}\hat{C}) = 3\hat{x}$

$\rightarrow$ $[\hat{A}(\hat{B}\hat{C})]f = \hat{D}(3xf) = 3f + 3xf'$

$[(\hat{A}\hat{B})\hat{C}]f = (1 + \hat{x}\hat{D})3f = 3f + 3xf'$

$$\boxed{\hat{A}(\hat{B}\hat{C}) = (\hat{A}\hat{B})\hat{C}}$$

(5) संकारक का स्वयं से गुणा करने पर संकारक का वर्ग प्राप्त होता है।

$$\hat{A}^2 = \hat{A}\hat{A}$$

$\hat{D}^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ व $\hat{D}^2 f(x) = \hat{D}[\hat{D}f(x)] = \hat{D}f' = \underline{f''}$

5) किसी संकारक $\hat{A}$ को रेखीय संकारक (linear operator) कहा जाएगा यदि-

(i) $\hat{A}[f+g] = \hat{A}f + \hat{A}g$

(ii) $\hat{A}[f+g] = \hat{A}f - \hat{A}g$

रेखीय संकारक → $\hat{x}^2, \frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}$

अरेखीय संकारक → $\sqrt{\ }$, $(\ )^2$, log etc.

Ex.- सिद्ध करो कि $\frac{d}{dx}$ एक रेखीय संकारक जबकि $\sqrt{\ }$ रेखीय संकारक नहीं है।

(i) $\frac{d}{dx}[f+g] = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$

(ii) $\frac{d}{dx}[f-g] = \frac{df}{dx} - \frac{dg}{dx}$

Rule follow, so $\frac{d}{dx}$ is linear operator.

→ $\sqrt{f \pm g} \neq \sqrt{f} + \sqrt{g}$

$\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$

$5 \neq 7$

$\sqrt{\ }$ is a non linear operator.

(7) संकारक $\hat{A}$ व $\hat{B}$ समान होंगे यदि -

$$\hat{A}f = \hat{B}f$$

Prove it :-

$$[\hat{A}\hat{B}] = -[\hat{B},\hat{A}]$$

$$[\hat{A},\hat{B}] = [\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}]$$

$$= -[\underbrace{\hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B}}_{(\hat{B},\hat{A})}]$$

$$\underline{[\hat{A},\hat{B}] = -[\hat{B},\hat{A}]} \quad \text{prove}$$

-!- संकारकों के लिए व्यंजक :- इसके लिए फलन पर पहले संकारक की क्रिया करवायी जाती है, फिर अन्त में फलन को हटा दिया जाता है।

Ex. $\left[\frac{d}{dx} + x\right]^2$ संकारक के लिए व्यंजक निम्न प्रकार से प्राप्त किया जाता है -

→ इस संकारक की क्रिया फलन $\psi(x)$ से करवाने पर -

$$\left[\frac{d}{dx} + x\right]^2 \psi(x) = \left(\frac{d}{dx} + x\right)\left[\frac{d}{dx} + x\right]\psi(x)$$

$$= \left(\frac{d}{dx} + x\right)\left(\frac{d\psi}{dx} + x\psi\right)$$

$$= \frac{d^2\psi}{dx^2} + 2x\frac{d\psi}{dx} + x^2\psi + \psi$$

$$\left[\frac{d}{dx}+x\right]^2 \psi(x) = \left[\frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx} + x^2 + 1\right] \psi$$

दोनो तरफ से ψ हटा लेने पर -

$$\left[\frac{d}{dx}+x\right]^2 = \frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx} + x^2 + 1$$

Ex. $\left[\frac{d}{dx}+x\right]\left[\frac{d}{dx}-x\right]$ का व्यंजक ज्ञात करो-

$$\left(\frac{d}{dx}+x\right)\left(\frac{d}{dx}-x\right)\psi(x) = \left[\frac{d}{dx}+x\right]\left(\frac{d\psi}{dx} - x\psi\right)$$

$$= \frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{d}{dx}(x\psi) + x\frac{d\psi}{dx} - x^2\psi$$

$$= \frac{d^2\psi}{dx^2} - \left[x\cancel{\frac{d\psi}{dx}} + \psi\cancel{\frac{dx}{dx}}\right] + x\cancel{\frac{d\psi}{dx}} - x^2\psi$$

$$= \frac{d^2\psi}{dx^2} - \psi - x^2\psi$$

$$\left[\frac{d}{dx}+x\right]\left[\frac{d}{dx}-x\right]\psi(x) = \left[\frac{d^2}{dx^2} - 1 - x^2\right]\psi$$

ψ हटाने पर -

$$\left(\frac{d}{dx}+x\right)\left(\frac{d}{dx}-x\right) = \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 - x^2\right)$$

Ex. यदि $\hat{A}$ व $\hat{B}$ दो इस प्रकार के संकारक हो कि $[\hat{A}, \hat{B}] = 1$ होतो सिद्ध करो कि $[\hat{A}\ \hat{B}^2] = 2\hat{B}$.

$\rightarrow$ $$[\hat{A}, \hat{B}] = (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) = 1 \quad \text{(Given)}$$

$$[\hat{A}, \hat{B}^2] = \hat{A}\hat{B}^2 - \hat{B}^2\hat{A}$$

$$[\hat{A}, \hat{B}^2] = \hat{A}\hat{B}^2 - \hat{B}^2\hat{A} + \hat{B}\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\hat{B}$$

$$= (\hat{A}\hat{B}^2 - \hat{B}\hat{A}\hat{B}) + (\hat{B}\hat{A}\hat{B} - \hat{B}^2\hat{A})$$

$$= [\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}]\hat{B} + \hat{B}(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$$

$$= (1)\hat{B} + \hat{B}(1)$$

$$\boxed{[\hat{A}, \hat{B}^2] = 2\hat{B}}$$

Ex.- सिद्ध करो कि - $\left[x, \frac{d}{dx}\right] = -1$

$\rightarrow$ $$\left[x, \frac{d}{dx}\right] = x\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}x$$

$$\left[x, \frac{d}{dx}\right]\psi(x) = \left[x\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}x\right]\psi(x)$$

$$= x\frac{d\psi}{dx} - x\frac{d\psi}{dx} - \psi\frac{dx}{dx} = -\psi$$

दोनों ओर से ψ हटाने पर -

$$\left[x, \frac{d}{dx}\right] = -1$$

Ex. सिद्ध करो कि $[\hat{x}^n, \hat{P}_x] = i\hbar n x^{n-1}$, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है

$$\hat{x} = x$$

$$\hat{P}_x = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

→ $$[\hat{x}^n, \hat{P}_x] = x^n \hat{P}_x - \hat{P}_x x^n$$

$$= x^n\left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right) - \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right) x^n$$

$$= i\hbar x^n \frac{d}{dx} + i\hbar \frac{d}{dx} x^n$$

फलन $\psi(x)$ के साथ गुणा करने पर -

$$[\hat{x}^n, \hat{P}_x]\psi(x) = -i\hbar x^n \frac{d\psi}{dx} + i\hbar \frac{d}{dx}(x^n \psi)$$

$$= -i\hbar x^n \cancel{\frac{d\psi}{dx}} + i\hbar x^n \cancel{\frac{d\psi}{dx}} + i\hbar n x^{n-1} \psi$$

$$[\hat{x}^n, \hat{P}_x]\psi(x) = i\hbar n x^{n-1} \psi$$

ψ हटाने पर -

$$[\hat{x}^n, \hat{P}_x] = i\hbar n x^{n-1}$$

आइगेन फलन व आइगेन मान

↓

[Eigen Functions and Eigen Values]

यदि किसी संकारक $\hat{A}$ की फलन $f(x)$ पर क्रिया करवायी जाए तो परिणाम में गुणांक k के साथ वही फलन प्राप्त होता है, तो ऐसे फलन को आइगेन फलन व गुणांक k को आइगेन मान कहते है।

$$\hat{A}\, f(x) = k\, f(x)$$

संकारक (आइगेन फलन) = (आइगेन मान) (वही फलन)

आइगेन फलन →
(I) सीमित / परिमित
(II) सतत
(III) एकमान (single valued)
(IV) शून्य नहीं होता है।

Ex.- $\frac{d}{dx}(e^{-ax}) = -a(e^{-ax})$

→ $(-a)$ → eigen value
e^{-ax} → eigen function

Ex.→ $\frac{d}{dx}(e^{2x}) = 2(e^{2x})$

→ 2 → eigen value
e^{2x} → eigen function

श्रोडिन्जर तरंग समीकरण:-

श्रोडिन्जर ने डी ब्रोग्ली की द्रव्य तरंगों पर गणितीय गणनाएँ करके परमाणु में e-नों के पाये जाने की प्रायिकता का परिकलन किया।

इस समी. के अनुसार नाभिक के चारों ओर e- अप्रगामी तरंगों के रूप में उप. होता है।
एक तनी हुयी डोरी की तरंगों को अप्रगामी तरंगें कहा जा सकता है।

→ किसी e- या कण की कुल ऊर्जा उसकी गतिज व स्थितिज ऊर्जा का योग होती है।
अर्थात्

$$E = K.E. + P.E.$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \left[-k\frac{Ze^2}{r}\right]$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - k\frac{Ze^2}{r} \quad -①$$

गतिज ऊर्जा -

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{m.mv^2}{m} = \frac{1}{2}\frac{(mv)^2}{m}$$

डी ब्रोग्ली समी. -

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

$$mv = \frac{h}{\lambda} \quad -②$$

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{(h/\lambda)^2}{2m}$$

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{h^2}{2\lambda^2 m} \quad -(3)$$

समी. (3) से $\frac{1}{2} mv^2$ का मान समी. (1) में रखने पर -

$$E = \frac{h^2}{2\lambda^2 m} - \frac{kZe^2}{r}$$

$$\frac{h^2}{2\lambda^2 m} = E + \frac{kZe^2}{r}$$

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{2m}{h^2}\left[E + \frac{kZe^2}{r}\right] \quad -(4)$$

तरंग गति का अवकलित समी.-

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\psi = 0 \quad -(5)$$

समी. (4) से $1/\lambda^2$ का मान समी. (5) में रखनेपर-

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + 4\pi^2\psi \cdot \frac{2m}{h^2}\left(E + \frac{kZe^2}{r}\right) = 0$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left[E + \frac{kze^2}{r}\right]\psi = 0 \quad -(6)$$

समी० (6) एकविमीय बॉक्स में गति कर रहे कण के लिए श्रोडिन्जर तरंग समी० है।

→ x, y व z तीनों अक्षों में गति करने वाले e⁻ के लिए तरंग समी० निम्न हो जाएगी-

$$\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\psi}{\delta y^2} + \frac{\delta^2\psi}{\delta z^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E + \frac{kze^2}{r}\right)\psi = 0$$

$$\boxed{\nabla^2\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - V)\psi = 0}$$

<u>जहाँ</u>-

$$\left[\nabla^2 = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2} \rightarrow \text{लेप्लेसियन ऑपरेटर}\right]$$

$$V = -\frac{kze^2}{r} \quad (\text{स्थितिज ऊर्जा})$$

लम्बकोणीयता एवं प्रसामान्यीकरण :-
(Orthogonality and Normalization)

हैमिल्टोनियन संकारक के रूप में श्रोडिंजर समी.-

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

जहाँ
$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V$$

$$\hat{H} = \hat{k} + \hat{V}$$

$$E\psi = \hat{H}\psi = \hat{k}\psi + \hat{V}\psi \qquad -(1)$$

समी.(1) के दोनों ओर ψ के complex conjugate ψ^* से गुणा करने पर -

$$\psi^* E\psi = \psi^*\hat{k}\psi + \psi^*\hat{V}\psi$$

→ $\psi^*\psi = |\psi|^2$; $\hat{V}\psi = \psi^*\hat{V}_{(x,y,z)}|\psi|^2$ →

$$E|\psi|^2 = \psi^*\hat{k}\psi + \hat{V}(x,y,z)|\psi|^2$$

इस समी. के दोनों ओर आयतन के भाग $d\tau$ से गुणा करने पर -

$$E|\psi|^2 d\tau = \psi^*\hat{k}\psi\, d\tau + \hat{V}(x,y,z)|\psi|^2 d\tau$$

समी. का समाकलन करने पर -

$$E\int|\psi|^2 d\tau = \int\psi^*\hat{k}\psi\, d\tau + \int\hat{V}(x,y,z)|\psi|^2 d\tau \qquad -(2)$$

→ E स्थिरांक है अतः समी. से हट जायेगा तथा $|\psi|^2 d\tau$ अर्थात् कण के पाये जाने की कुल सम्भावना 1 के बराबर होती है।

$$\boxed{\int |\psi|^2 d\tau = 1} \quad -③$$

समी (3) प्रसामान्यीकरण की स्थिति कहलाती है।

⇒ हैमिल्टोनियन संकारक के दो आइगेन फलन ψ_n व ψ_k हैं, तो श्रोडिंगर समी.-

$$\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n \quad \text{व} \quad \hat{H}k = E_k\psi_k \quad -(1)$$

समी. (1) का complex conjugate बनाकर उसका समाकलन करने पर -

$$\int \psi_k^* \hat{H} \psi_n d\tau = E_n \int \psi_k^* \psi_n d\tau \quad -(2)$$

$$\int \psi_n (\hat{H}\psi_k)^* d\tau = E_k \int \psi_k^* \psi_n d\tau \quad -(3)$$

समी. (2) में से (3) को घटाने पर -

$$(E_n - E_k)\int \psi_k^* \psi_n d\tau = \int \psi_k^* (\hat{H}\psi_k) d\tau - \int \psi_n (\hat{H}\psi_k)^* d\tau \quad (4)$$

→ हर्मिटियन के अनुसार समी. (4) के R.H.S. व्यंजक बराबर होगें।

$$(E_n - E_k)\int \psi_k^* \psi_n d\tau = 0$$

यदि $E_n \neq E_k$ तो

$$\boxed{\int \psi_k^* \psi_n d\tau = 0} \quad -(5)$$

समी.(5) को लम्बकोणीय सम्बन्ध कहते है।

-:- तरंगफलन की भौतिक व्याख्या :- किसी नाभिक के चारों ओर के त्रिविमीय स्थान का वह भाग जहाँ विशिष्ट ऊर्जा E वाले e-नों के पाये जाने की सम्भावना अधिक होती है, परमाणु कक्षक कहलाता है।

$\psi \rightarrow$ तरंग का आयाम
$\psi^2 \rightarrow$ इलेक्ट्रोन घनत्व

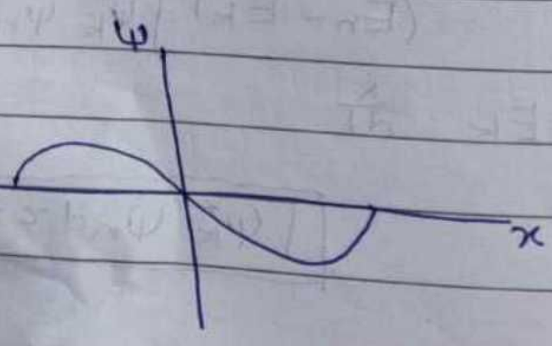
परमाणु में नाभिक के चारों ओर के स्थान में जहाँ ψ^2 का मान अधिक होता है वहाँ e^- का घनत्व भी अधिक होगा।
→ अतः ψ^2 नाभिक के चारों ओर के स्थान में e^- के पाये जाने की सम्भावना को बताता है।

तरंगफलन के गुण:-

(1) किसी बिन्दु पर ψ का मान सदैव सीमित होना चाहिए।

(2) ψ का मान सतत होना चाहिए।

(3) त्रिविम में किसी भी बिन्दु पर ψ का एक ही मान होना चाहिए।



$\psi \rightarrow$ जिसमें तीनों गुण है।

:- क्वाण्टम यांत्रिकी के अभिग्रहित :-

अभिग्रहित -I :-

किसी तंत्र की अवस्था की व्याख्या निर्देशांकों तथा समय के फलन ψ द्वारा दी जा सकती है।

$$\boxed{\int \psi^*(x,y,z)\,\psi(x,y,z)\,dz = 1} \quad -(1)$$

→ इस फलन को अवस्था फलन या तरंग फलन कहते है।
→ समी॰ (1) से स्पष्ट है कि ψ का मान एकमान, सतत तथा परिमित होना आवश्यक है

अभिग्रहित - II :-

प्रेक्षण योग्य प्रत्येक भौतिक राशि के लिए एक रेखीय हर्मिटियन संकारक होता है।

$$\boxed{\int \psi_i^* \hat{A}\,\psi_j\,dx = \int \psi_j\,(A\psi_i)^*\,dx} \quad -(2)$$

$\hat{A}$ = हर्मिटियन संकारक
ψ_i व ψ_j → क्वान्टम तंत्र की भौतिक अवस्था के तरंग फलन।

अभिग्रहित - III :-

किसी भौतिक प्रेक्षण योग्य गुण A के मापन से केवल वही मान सम्भव है जो निम्न समी॰ में आइगेन मान K हों—

$$\boxed{\hat{A} f(x) = k f(x)} \quad -(3)$$

$\hat{A} \rightarrow$ गुण A का संकारक।
$f(x) \rightarrow$ आइगेन फलन।

<u>अभिगृहित -(IV)</u> :-
किसी प्रेक्षण योग्य गुण A के प्रत्याशा मान $\langle A \rangle$ तंत्र के तरंग फलन पर निर्भर करते है।

$$\boxed{\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{A} \psi \, d\tau} \quad -(4)$$

<u>अभिगृहित -V</u> :-
यदि किसी भौतिक प्रेक्षण योग्य गुण A के लिए $\hat{A}$ एक हर्मिटियन संकारक हो तो $\hat{A}$ के आइगेन मान g_i एक पूर्ण सेट बनाते है।

$$\boxed{\psi = \sum_i c_i g_i = \sum_i |g_i\rangle \langle g_i|\psi\rangle} \quad -(5)$$

<u>अभिगृहित (VI)</u> :-
क्वान्टम यांत्रिकी तंत्र की अवस्था के समय श्रोडिन्जर समी॰ -

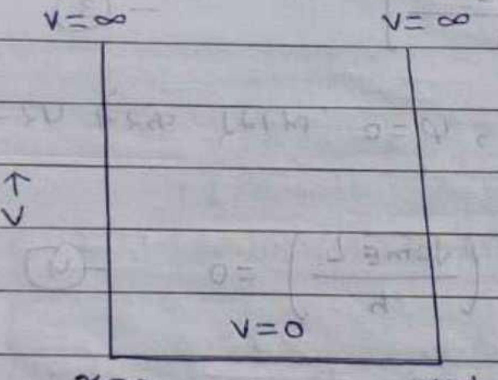
$$\boxed{-\frac{\hbar}{i}\frac{\delta\psi}{\delta t} = \hat{H}\psi} \quad -(6)$$

जहाँ $\hat{H} \rightarrow$ तंत्र का हैमिल्टोनियन संकारक है

-:- एकविमीय बॉक्स में कण:-

माना एक एकविमीय बॉक्स में, जिसकी L लम्बाई है, m संहति का एक कण गति कर रहा है।

→ बॉक्स में इसकी स्थितिज ऊर्जा $V=0$



(1) यह कण केवल x-अक्ष पर गति कर रहा है, अतः इसके लिए श्रोडिन्जर समी.-

$$\psi_1 = Ae^{i(2mE)^{1/2} x/\hbar}$$

$$\psi_2 = Be^{-i(2mE)^{1/2} x/\hbar}$$

अध्यारोपण सिद्धान्त के अनुसार-

$$\psi = Ae^{i(2mE)^{1/2} x/\hbar} + Be^{-i(2mE)^{1/2} x/\hbar} \quad -(1)$$

यदि $x=0$ तो $\psi=0$ तब,

$$0 = A + B$$

$$B = -A$$

समी. (1) -

$$\psi = A\left(e^{i\sqrt{2mE}\,x/\hbar} - e^{-i\sqrt{2mE}\,x/\hbar}\right) \quad -(2)$$

समी. (2) पर Euler's equation apply करने पर -

$$\left[e^{ix} = e^{-ix} = 2i\sin x\right]$$

$$\psi = 2iA\sin\left[\frac{\sqrt{2mE}\,x}{\hbar}\right]$$

$$\psi = C\sin\left[\frac{\sqrt{2mE}\,x}{\hbar}\right] \quad -(3)$$

समी. (3) पर $x=L$, $\psi=0$ लागू करने पर-

$$\psi_{(L)} = C\sin\left(\frac{\sqrt{2mE}\,L}{\hbar}\right) = 0 \quad -(4)$$

ऊर्जा E का मान n पर निर्भर करता है, n का मान शून्य नहीं हो सकता, क्योंकि $n=0$ होने पर $\psi=0$ जो कि सम्भव नहीं है

$$\frac{\sqrt{2mE_n}\,L}{\hbar} = \pm n\pi \quad (n = 1, 2, 3) \quad -(5)$$

समी. (5) का वर्ग करने पर -

$$\frac{2mE_nL^2}{\hbar^2} = n^2\pi^2$$

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$E_n = \frac{n^2h^2}{8mL^2} \qquad \left[\because \hbar = \frac{h}{2\pi}\right]$$
$$(n = 1, 2, 3)$$

कण का तरंग फलन -

$$\boxed{\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)} \quad ; n = 1, 2, 3$$

→ एकविमीय बॉक्स में कण की ऊर्जा का मान शून्य नहीं होता, वह $\left[\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\right]$ के बराबर होता है, इसे zero point energy कहते हैं।

$$\boxed{E_0 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = \frac{h^2}{8mL^2}} \qquad \left[\hbar = \frac{h}{2\pi}\right]$$

E_0 → कण की निम्न ऊर्जा अवस्था।

-:- H- परमाणु के लिए श्रोडिन्जर तरंग समी. और उसका तीन समी. में पृथक्करण:-

H- परमाणु में 1 P तथा 1e- होता है, इसलिए इसे two particle system माना जाता है।

→ परमाणु में e- के कक्षक को परमाणु कक्षक कहते हैं।

→ हाइड्रोजन जैसे परमाणु के लिए e- के लिए कूलॉम्ब

बल निम्न होगा -

$$\underline{F} = -\frac{Ze'^2}{r^2}\frac{\underline{r}}{r} \quad -(1)$$

जहाँ $\underline{r}/r$, $\underline{r}$ दिशा में इकाई सदिश

$e' = e/(4\pi\varepsilon_0)^{1/2}$

$e \rightarrow$ कूलॉम्ब में प्रोटॉन का आवेश

→ किसी कण पर केन्द्रीय आकर्षण बल -

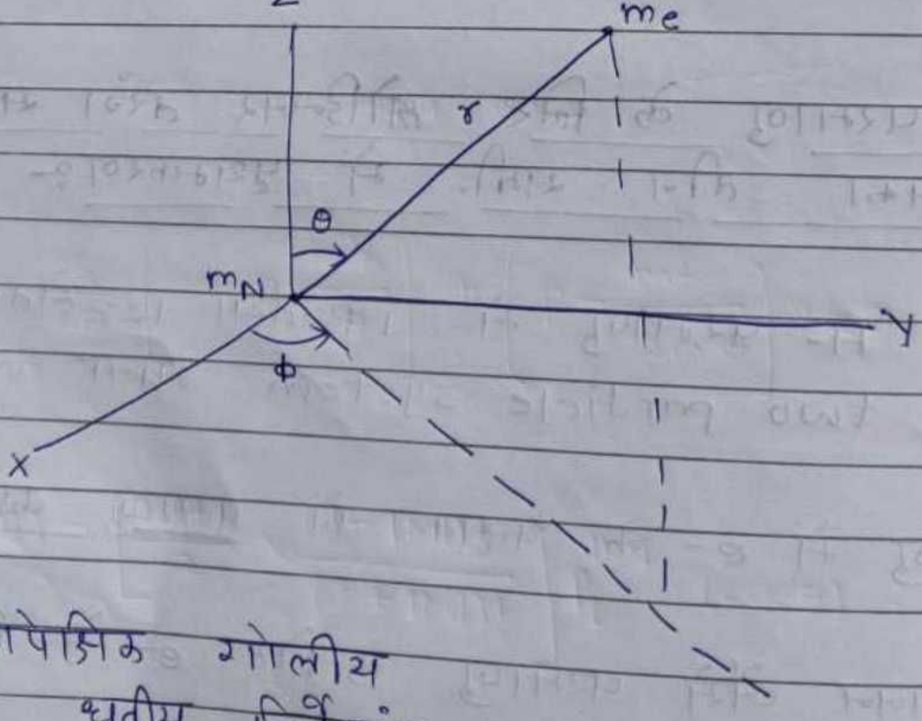
$$F = -\frac{dV(r)}{dr}\frac{\underline{r}}{r} \quad -(2)$$

समी. (1) व (2) से -

$$\frac{dV(r)}{dr} = \frac{Ze'^2}{r^2} \quad -(3)$$

समी. (3) का समाकलन करने पर -

$$V = Ze'^2\int\frac{dr}{r^2} = -\frac{Ze'^2}{r} \quad -(4)$$



आपेक्षिक गोलीय
ध्रुवीय निर्देशांक

H- परमाणु के लिए श्रोडिन्जर समी.-

$$\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}+\frac{\delta^2\psi}{\delta y^2}+\frac{\delta^2\psi}{\delta z^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V)\psi=0$$

V का मान रखने पर- $(m=\mu)$

$$\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}+\frac{\delta^2\psi}{\delta y^2}+\frac{\delta^2\psi}{\delta z^2}+\frac{8\pi^2\mu}{h^2}\left(E+\frac{Ze'^2}{r}\right)\psi=0 \quad -(5)$$

समी. (5) से H- परमाणु के 3 समी. निम्न बनते हैं-

(1) $$\frac{\delta^2 z}{\delta\phi^2}+m^2 z=0$$ (ϕ समीकरण)

(2) $$\frac{1}{r^2}\frac{\delta}{\delta r}\left[r^2\frac{\delta R}{\delta r}\right]-\beta\frac{R}{r^2}+\frac{8\pi^2\mu}{h^2}\left[E+\frac{Ze'^2}{r}\right]R=0$$

(रेडियल समीकरण)

(3) $$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\delta}{\delta\theta}\left(\sin\theta\frac{\delta Y}{\delta\theta}\right)+\left(\beta-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)Y=0$$

(θ समीकरण)

इस प्रकार H- परमाणु के तरंग फलन के तीन समी. प्राप्त किए जा सकते है।

क्वान्टम संख्या एवं उनका महत्व :-

H- परमाणु की तीनों तरंग फलन समी० को हल करने पर तीनों क्वान्टम संख्याओं से सम्बन्धित 3 समी० प्राप्त होती है।

(1) ϕ समीकरण को हल करने पर -

$$\frac{\delta^2 z}{\delta \phi^2} + m^2 z = 0$$

$$z(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm im\phi}$$

जहाँ $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$ etc.

$m \rightarrow$ चुम्बकीय क्वान्टम संख्या।

→ यह परमाणु को चुम्बकीय क्षेत्र में रखने पर e^- के व्यवहार की व्याख्या करती है।

→ यह z अवयव के कोणीय संवेग को प्रदर्शित करती है।

2) θ समी० को हल करने पर -

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\delta}{\delta\theta}\left[\sin\theta \frac{\delta Y}{\delta\theta}\right] + \left[\beta - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right] Y = 0$$

$$Y(\theta) = \left[\frac{2l+1}{2} \times \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right] P_l^{|m|} (\cos\theta)$$

जहाँ $l = 0, 1, 2, 3, 4$ etc.
$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots$ etc.

l के प्रत्येक मान के लिए $m = -l, 0, +l$
कुल मान $= (2l+1)$

जहाँ $l \rightarrow$ दिगंशी क्वान्टम संख्या।

→ $Z(\phi)$ तथा $\psi(\theta)$ दोनों फलन को कोणीय तरंगफलन कहते है।

3) रेडियल समी॰ को हल करने पर-

$$\frac{1}{r^2}\frac{\delta}{\delta r}\left[r^2\frac{\delta R}{\delta r}\right] - \beta\frac{R}{r^2} + \frac{8\pi^2\mu}{h^2}\left[E + \frac{Ze'^2}{r}\right]R = 0$$

$$R_{n,l}(r) = \left[\left(\frac{2Z}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n\{(n+l)!\}^3}\right]^{1/2} \cdot \left(\frac{2Zr}{na_0}\right)^l \cdot L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2Zr}{na_0}\right) e^{-\frac{Zr}{na_0}}$$

→ $R_{n,l}(r)$ को त्रिज्य तरंग फलन कहते है।

$n \rightarrow$ मुख्य क्वान्टम संख्या।
$n \rightarrow 1, 2, 3$
$l \rightarrow$ दिगंशी या कोणीय क्वान्टम संख्या।

तीनों क्वान्टम सख्याओं के मान एवं उनके सम्बन्ध को निम्न प्रकार से दर्शाया जा सकता हैं -

(1) त्रिज्य या मुख्य क्वान्टम सख्या -

$(n) = 1, 2, 3$

(2) दिगंशी या कोणीय संवेग क्वान्टम सख्या -

$(l) = 0, 1, 2 \; --- \; (n-1)$ तक

(3) चुम्बकीय क्वान्टम सख्या (m)

$m = -l \rightarrow 0 \rightarrow +l$

$m = (2l+1)$

$\rightarrow$ $$\boxed{\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = R_{n,l}(r)\, Y_{l,m}(\theta)\, Z_m(\phi)}$$