

Rigid-Body Motions

Introduccion

En el anterior capitulo aprendimos que necesitamos al menos 6 numeros para determinar la posicion y orientacion de un cuerpo rigido en el espacio. En este capitulo desarrollaremos una forma sistematica de describir la posicion y orientacion de un cuerpo rigido usando cambiando los marcos de referencia. Utilizaremos una matriz 4×4 , esto es una forma de representacion implicita como vimos en el capitulo pasado.

- Los 6 parametros es obtenido por 16 parametros de la matriz 4×4 mas 10 restricciones
- Esta matriz no solo nos sirve para representar la configuracion del espacio sino tambien para realizar operaciones como traslacion y rotacion.
- Tambien para cambiar la representacion de un vector que tiene coordenadas bajo un marco de referencia a otro.
- Estas 3 operaciones las podemos realizar de forma sencilla con la matriz 4×4 aplicando algebra lineal es por esta razon "simplicidad" que escogemos esta configuracion.
- Spatial velocity or twist es el vector de velocidad de 6 dimensiones 3 para las velocidades lineales y 3 para las angulares.
- Spatial Force or wrench es el vector de fuerzas o momentos de 6 dimensiones.

👉 **Vector Libre:** Es una cantidad geometrica con magnitud y direccion. Se lo llama libre porque no es necesario que este anclado a una referencia.

☀ La velocidad lineal es un ejemplo de un vector libre, la magnitud del vector es la v

- Un marco de referencia lo podemos anclar en cualquier parte del espacio.
- Normalmente asumimos que tenemos un marco referencia fijo `space frame`, asimismo asumimos que al menos un marco de referencia es anclado a un cuerpo rigido `body frame`, el mismo que acompaña al cuerpo en cualquier instante de tiempo.

🌟 **Importante:** Todos los marcos de referencia son estacionarios es decir que aunque el cuerpo se este moviendo nos referimos al marco estacionario coincidente con el marco del

cuerpo en un instante de tiempo particular.

3.1 Movimientos de un cuerpo rigido en el plano

- Solo necesitamos la posicion y la orientacion del objeto para representar su configuracion.
- Representaremos el eje del robot en terminos del eje referencia.
- La posicion la representaremos con un vector de n dimensiones y la orientacion con una matriz $n \times n$. Siendo n la dimension del espacio en el que estamos.
- Esta matriz para determinar la orientacion se la conoce como matriz de rotacion.
 - 1 Cada vector dentro de la matriz es unitario.
 - 2 Todos los vectores deben ser ortogonales entre ellos.
- La matriz de rotacion se la puede usar para 3 cosas:
 - 1 Para representar la configuracion del cuerpo con respecto a la referencia.
 - 2 Para cambiar el eje de referencia.
 - 3 Para desplazar el cuerpo.
- La rotacion y desplazamiento de un cuerpo se puede representar como un rotacion sobre un punto fijo en el espacio. Esto se lo conoce como `screw motion`.
- Screw motion tiene 3 parametros (β, s_x, s_y) , donde (s_x, s_y) es la posicion del punto fijo y β es el angulo al que voy a girar el cuerpo con respecto al punto fijo.
- Otra forma de representar el Screw motion es por medio de la velocidad angular y lineal formando el vector $S = (\omega, v_x, v_y)$ el cual es una representacion del `screw axis`.
- Multiplicar el vector S por un angulo θ nos da como resultado el desplazamiento neto.
- El desplazamiento neto obtenido por rotar un cuerpo sobre el `screw axis` a un angulo θ es equivalente al desplazamiento obtenido por rotar un cuerpo sobre el `screw axis` a un velocidad $\dot{\theta}$.
- Existen otras formas de representar la orientacion aparte de las coordenadas exponenciales como los angulos de euler, los parametros de Cayley-Rodrigues y los cuaterniones.

⚠ Utilizaremos las coordenadas exponenciales para representar la configuración de un cuerpo rígido basados en el teorema de Chasles-Mozzi

👉 **Coordenadas exponenciales:** Son las que definen un eje de rotación y un ángulo para rotar alrededor del eje.

👉 **Teorema de Chasles-Mozzi:** Cualquier desplazamiento de un cuerpo rígido puede ser obtenido por rotaciones finitas alrededor de un eje fijo.

3.2 Rotaciones y Velocidades Angulares

3.2.1 Matrices de Rotación

○ De los nueve parámetros en una matriz de rotación 3x3, 6 de esos son restricciones y 3 se los escoge de manera independiente.

○ Las siguientes condiciones se deben cumplir para R , la cual es la matriz de rotación.

1 Norma unitaria: $\hat{x}_b, \hat{y}_b, \hat{z}_b$ todos son vectores unitarios.

$$\begin{aligned}r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 &= 1, \\r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 &= 1, \\r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 &= 1,\end{aligned}$$

2 Ortogonalidad: $\hat{x}_b \cdot \hat{y}_b = \hat{x}_b \cdot \hat{z}_b = \hat{y}_b \cdot \hat{z}_b = 0$.

$$\begin{aligned}(r_{11})(r_{12}) + (r_{21})(r_{22}) + (r_{31})(r_{32}) &= 0, \\(r_{12})(r_{13}) + (r_{22})(r_{23}) + (r_{32})(r_{33}) &= 0, \\(r_{11})(r_{13}) + (r_{21})(r_{23}) + (r_{31})(r_{33}) &= 0,\end{aligned}$$

Estas 6 restricciones las podemos expresar en su forma compacta como

$$R^T R = I,$$

donde I es la matriz identidad y R^T es la transpuesta de la matriz R .

⚠ Además agregaremos una condición extra la cual nos asegurará que podemos utilizar ejes de referencia utilizando la regla de la mano derecha

$$\det R = 1.$$

👉 **Grupo Ortogonal Especial:** Son todas las matrices reales 3x3 R que cumplen $R^T R = I$ y $\det R = 1$.

👉 **Grupo Ortogonal Especial:** Son todas las matrices reales 2×2 R que cumplen $R^T R = I$ y $\det R = 1$.

$R \in SO(2)$ se puede escribir como:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \theta \in [0, 2\pi)$$

🔴 $SO(2)$ se usa para configuraciones de orientacion planares mientras que $SO(3)$ configuraciones de orientaciones espaciales.

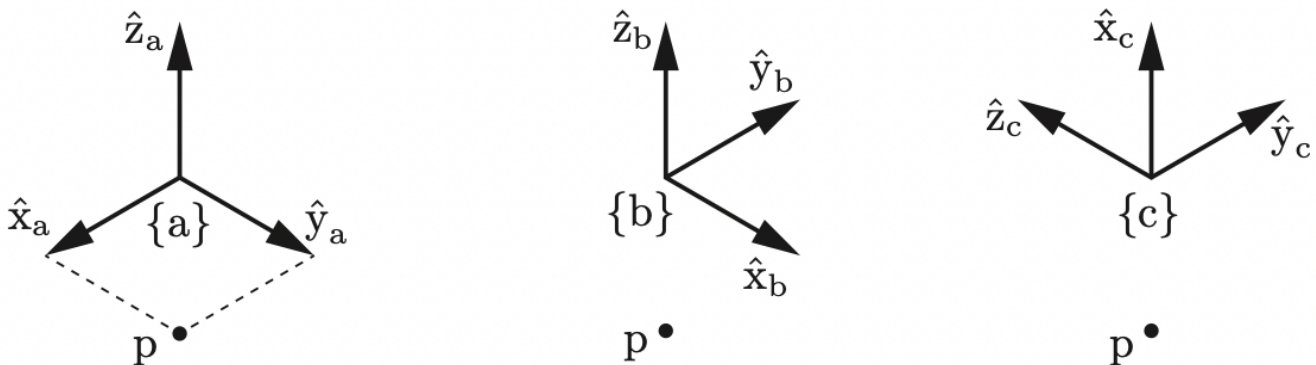
Propiedades

- **Cerradura:** AB debe pertenecer al conjunto.
- **Asociativa:** $(AB)C = A(BC)$.
- **Identidad:** Debe existir un elemento I en el grupo que $IA = AI = A$.
- **Inverso:** $AA_{-1} = A_{-1}A = I$.

Usos

- 1 Representar orientacion.
- 2 Rotar un cuerpo.
- 3 Cambiar el eje de referencia el cual el cuerpo esta representado

☀ Ejemplo



El mismo espacio y el mismo punto p representado en tres ejes distintos con 3 orientaciones distintas.

Orientacion de los 3 ejes relativos a $\{s\}$ se puede escribir como

$$R_a = \begin{bmatrix} \hat{x}_a & \hat{y}_a & \hat{z}_a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_b = \begin{bmatrix} \hat{x}_b & \hat{y}_b & \hat{z}_b \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_c = \begin{bmatrix} \hat{x}_c & \hat{y}_c & \hat{z}_c \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La ubicacion del punto en estos ejes seria

$$p_a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_c = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

⚠ **Nota:** $\{b\}$ se obtiene rotando $\{a\}$ 90° alrededor de \hat{z}_a y $\{c\}$ se obtiene rotando $\{b\}$ 90° alrededor de \hat{y}_b

Representando Orientacion:

● R_{sc} Matriz de rotacion del eje $\{c\}$ relativo a $\{s\}$.

● $R_{ac}R_{ca} = I$.

● $R_{ac} = R_{ca}^{-1} = R_{ca}^T$.

Cambiando el eje de referencia:

○ La matriz de rotacion R_{ab} representa la orientacion de $\{b\}$ en $\{a\}$, R_{bc} representa la orientacion de $\{c\}$ en $\{b\}$ para calcular la matriz de rotacion de $\{c\}$ en $\{a\}$ basta con.

$$R_{ac} = R_{ab}R_{bc}$$

○ Esto mismo podemos aplicar para vectores

$$R_{ab}p_b = p_a$$

Rotar un cuerpo:

○ $R_{sb} = R = Rot(\hat{\omega}, \theta)$

- Para rotar un punto p_s es tan facil como hacer $p'_s = Rp_s$
- $R_{sb'} = RR_{sb}$; rotar por R en $\{s\}$ eje (R_{sb})
- $R_{sb''} = R_{sb}R$; rotar por R en $\{b\}$ eje (R_{sb})

3.2.2 Velocidades Angulares

- Si tenemos un marco de referencia con ejes $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ el cual esta anclado a un cuerpo rigido, si queremos determinar las derivadas con respecto al tiempo de los ejes unitarios. Tenemos que solo la direccion de los ejes varia con respecto al tiempo.

3.2.3 Representacion de rotacion usando coordenadas exponenciales