Rigid-Body Motions

Introduccion

En el anterior capitulo aprendimos que necesitamos al menos 6 numeros para determinar la posicion y orientacion de un cuerpo rigido en el espacio. En este capitulo desarrollaremos una forma sistematica de describir la posicion y orientacion de un cuerpo rigido usando cambiando los marcos de referencia. Utilizaremos una matriz 4x4, esto es una forma de representacion implicita como vimos en el capitulo pasado.

⭕ Los 6 parametros es obtenido por 16 parametros de la matriz 4x4 mas 10 restricciones

⭕ Esta matriz no solo nos sirve para representar la configuracion del espacio sino tambien para realizar operaciones como traslacion y rotacion.

⭕ Tambien para cambiar la representacion de un vector que tiene coordenadas bajo un marco de referencia a otro.

⭕ Estas 3 operaciones las podemos realizar de forma sencilla con la matriz 4x4 aplicando algebra lineal es por esta razon "simplicidad" que escogemos esta configuracion.

⭕ Spatial velocity or twist es el vector de velocidad de 6 dimensiones 3 para las velocidades lineales y 3 para las angulares.

⭕ Spatial Force or wrench es el vector de fuerzas o momentos de 6 dimensiones.

✍🏽 **Vector Libre:** Es una cantidad geometrica con magnitud y direccion. Se lo llama libre porque no es necesario que este anclado a una referencia.

```
🔅 La velocidad lineal es un ejemplo de un vector libre, la magnitud del vector es la v
```

⭕ Un marco de referencia lo podemos anclar en cualquier parte del espacio.

⭕ Normalmente asumimos que tenemos un marco referencia fijo `space frame`, asimismo asumimos que al menos un marco de referencia es anclado a un cuerpo rigido `body frame`, el mismo que acompana al cuerpo en cualquier instante de tiempo.

> 💥 **Importante:** Todos los marcos de referencia son estacionarios es decir que aunque el cuerpo se este moviendo nos referimos al marco estacionario coincidente con el marco del

> cuerpo en un instante de tiempo particular.

3.1 Movimientos de un cuerpo rigido en el plano

⭕ Solo necesitamos la posicion y la orientacion del objeto para representar su configuracion.

⭕ Representaremos el eje del robot en terminos del eje referencia.

⭕ La posicion la representaremos con un vector de n dimensiones y la orientacion con una matriz nxn. Siendo n la dimension del espacio en el que estamos.

⭕ Esta matriz para determinar la orientacion se la conoce como matriz de rotacion.

```
1️⃣ Cada vector dentro de la matriz es unitario.

2️⃣ Todos los vectores deben ser ortogonales entre ellos.
```

⭕ La matriz de rotacion se la puede usar para 3 cosas:

```
1️⃣ Para representar la configuracion del cuerpo con respecto a la referencia.

2️⃣ Para cambiar el eje de referencia.

3️⃣ Para desplazar el cuerpo.
```

⭕ La rotacion y desplazamiento de un cuerpo se puede representar como un rotacion sobre un punto fijo en el espacio. Esto se lo conoce como `screw motion`.

⭕ Screw motion tiene 3 parametros (β, s_x, s_y), donde (s_x, s_y) es la posicion del punto fijo y β es el angulo al que voy a girar el cuerpo con respecto al punto fijo.

⭕ Otra forma de representar el Screw motion es por medio de la velocidad angular y lineal formando el vector $S = (\omega, v_x, v_y)$ el cual es una representacion del `screw axis`.

⭕ Multiplicar el vector S por un angulo θ nos da como resultado el desplazamiento neto.

⭕ El desplazamiento neto obtenido por rotar un cuerpo sobre el `screw axis` a un angulo θ es equivalente al desplazamiento obtenido por rotar un cuerpo sobre el `screw axis` a un velocidad $\dot{\theta}$

⭕ Existen otras formas de representar la orientacion aparte de las coordenadas exponenciales como los angulos de euler, los parametros de Cayley-Rodrigues y los cuarterniones.

> ⚠️ Utilizaremos las coordenadas exponenciales para representar la configuracion de un cuerpo rigido basados en el teorema de Chasles-Mozzi

✍🏽 **Coordenadas exponenciales:** Son las que definen un eje de rotacion y un angulo para rotar alrededor del eje.

✍🏽 **Teorema de Chasles-Mozzi:** Cualquier desplazamiento de un cuerpo rigido puede ser obtenido por rotaciones finitas alrededor de un eje fijo.

3.2 Rotaciones y Velocidades Angulares

3.2.1 Matrices de Rotacion

⭕ De los nueve parametros en una matriz de rotacion 3x3, 6 de esos son restricciones y 3 se los escoge de manera independiente.

⭕ Las siguientes condiciones se deben cumplir para R, la cual es la matriz de rotacion.

1️⃣ Norma unitaria: $\hat{x}_b, \hat{y}_b, \hat{z}_b$ todos son vectores unitarios.

$$\begin{aligned} r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 = 1, \\ r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 = 1, \\ r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 = 1, \end{aligned}$$

2️⃣ Ortogonalidad: $\hat{x}_b \cdot \hat{y}_b = \hat{x}_b \cdot \hat{z}_b = \hat{y}_b \cdot \hat{z}_b = 0.$

$$\begin{aligned} (r_{11})(r_{12}) + (r_{21})(r_{22}) + (r_{31})(r_{32}) = 0, \\ (r_{12})(r_{13}) + (r_{22})(r_{23}) + (r_{32})(r_{33}) = 0, \\ (r_{11})(r_{13}) + (r_{21})(r_{23}) + (r_{31})(r_{33}) = 0, \end{aligned}$$

Estas 6 restricciones las podemos expresar en su forma compacta como

$$R^T R = I,$$

donde I es la matriz identidad y R^T es la transpuesta de la matrix R.

> ⚠️ Ademas agregaremos una condicion extra la cual nos asegurara que podemos utilizar ejes de referencia utilizando la regla de la mano derecha

$$\det R = 1.$$

✍🏽 **Grupo Ortogonal Especial:** Son todas las matrices reales 3x3 R que cumplen $R^T R = I\ y \det R = 1.$

✍🏾 **Grupo Ortogonal Especial:** Son todas las matrices reales 2x2 R que cumplen $R^T R = I$ y $\det R = 1$.

$R \in SO(2)$ se puede escribir como:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \theta \in [0, 2\pi)$$

⭕ $SO(2)$ se usa para configuraciones de orientacion planares mientras que $SO(3)$ configuraciones de orientaciones espaciales.

Propiedades

⚫ **Cerradura:** AB debe pertenecer al conjunto.

⚫ **Asociativa:** $(AB)C = A(BC)$.

⚫ **Identidad:** Debe existir un elemento I en el grupo que $IA = AI = A$.

⚫ **Inverso:** $AA_{-1} = A_{-1}A = I$.

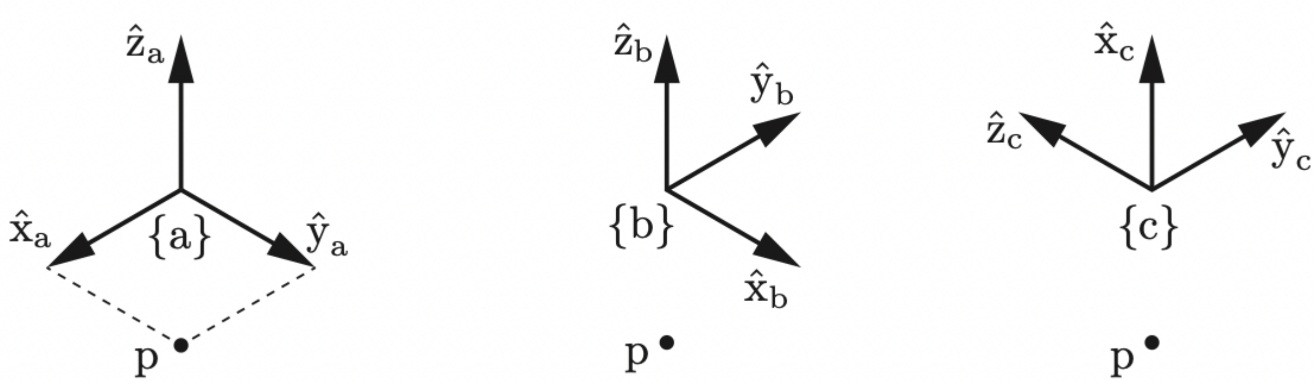
Usos

1️⃣ Representar orientacion.

2️⃣ Rotar un cuerpo.

3️⃣ Cambiar el eje de referencia el cual el cuerpo esta representado

🔆 **Ejemplo**



El mismo espacio y el mismo punto p representado en tres ejes distintos con 3 orientaciones distintas.

Orientacion de los 3 ejes relativos a $\{s\}$ se puede escribir como

$$R_a = \begin{array}{c} \begin{matrix} \hat{x}_a & \hat{y}_a & \hat{z}_a \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad R_b = \begin{array}{c} \begin{matrix} \hat{x}_b & \hat{y}_b & \hat{z}_b \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad R_c = \begin{array}{c} \begin{matrix} \hat{x}_c & \hat{y}_c & \hat{z}_c \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

La ubicacion del punto en estos ejes seria

$$p_a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

> ⚠️ **Nota:** $\{b\}$ se obtiene rotando $\{a\}$ $90°$ alrededor de $\hat{z}_a$ y $\{c\}$ se obtiene rotando $\{b\}$ $-90°$ alrededor de $\hat{y}_b$

Representando Orientacion:

- R_{sc} Matriz de rotacion del eje $\{c\}$ relativo a $\{s\}$.
- $R_{ac}R_{ca} = I$.
- $R_{ac} = R_{ca}^{-1} = R_{ca}^T$.

Cambiando el eje de referencia:

- La matriz de rotacion R_{ab} representa la orientacion de $\{b\}$ en $\{a\}$, R_{bc} representa la orientacion de $\{c\}$ en $\{b\}$ para calcular la matriz de rotacion de $\{c\}$ en $\{a\}$ basta con.

$$R_{ac} = R_{ab}R_{bc}$$

- Esto mismo podemos aplicar para vectores

$$R_{ab}p_b = p_a$$

Rotar un cuerpo:

- $R_{sb} = R = Rot(\hat{\omega}, \theta)$

⭕ Para rotar un punto p_s es tan facil como hacer $p'_s = Rp_s$

⭕ $R_{sb'} = RR_{sb}$; rotar por R en $\{s\}$ eje (R_{sb})

⭕ $R_{sb''} = R_{sb}R$; rotar por R en $\{b\}$ eje (R_{sb})

3.2.2 Velocidades Angulares

⭕ Si tenemos un marco de referencia con ejes $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ el cual esta anclado a un cuerpo rigido, si queremos determinar las derivadas con respecto al tiempo de los ejes unitarios. Tenemos que solo la direccion de los ejes varia con respecto al tiempo.

⭕ la velocidad angular del marco de rotacion.

- $\dot{R}R^{-1} = [\omega_s]$
- $R^{-1}\dot{R} = [\omega_b]$

⭕ La velocidad angular de un eje.

- $\omega_c = R_{cd}\omega_d$

⭕ velocidad lineal de ejes

- $\dot{r}_i = \omega_s \times r_i, \qquad i = 1, 2, 3$

✍🏽 **Matriz antisimetrica:** $[x] = -[x]^T$

⭕ $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ lo podemos definir como una matrix antisimetrica como:

$$[x] = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2.3 Representacion de rotacion usando coordenadas exponenciales

⭕ Aparte de la matriz de rotacion, tenemos otra forma de representar la orientacion de un cuerpo rigido la cual es coordenadas exponenciales

⭕ Las coordenadas exponenciales para la rotacion estan construidas por 3 parametros, parametrizan una matriz de rotacion en terminos de un eje de rotacion representado como $\hat{\omega}$ y un angulo de rotacion sobre el eje θ.

⭕ $\hat{\omega}\theta \in \mathbb{R}^3$ esta es la representacion de las coordenadas exponenciales.

Ecuaciones Diferenciales

⭕ Si tenemos al siguiente funcion $\dot{x}(t) = ax(t);\ a \in \mathbb{R},\ x(t) \in \mathbb{R}$, por ecuaciones diferenciales sabemos que su solucion es $x(t) = e^{at}x_0$ donde $x(0) = x_0$ es la condicion inicial.

⭕ Expansion numerica de e^{at}:

$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + ...$$

⭕ Lo mismo aplica si $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ y la condicion inicial es $x(0) = x_0$

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$
$$x(t) = e^{At}x_0$$
$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + ...$$

⭕ La matriz exponencial e^At satisface además las siguientes propiedades:

- $d(e^{At})/dt = Ae^{At} = e^{At}A$
- Si $A = PDP^{-1}$ para $D \in \mathbb{R}^{nxn}$ y $P \in \mathbb{R}^{nxn}$ e invertible $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$
- Si $AB = BA$ entonces $e^Ae^b = e^{A+B}$
- $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

Coordenadas Exponenciales de Rotacion

⭕ Si tenemos el vector $\hat{\omega}\theta \in \mathbb{R}^3$, si θ es un escalar y $\hat{\omega} \in \mathbb{R}^3$ es un vector unitario, la matriz de rotacion exponencial de $[\hat{\omega}]\theta = [\hat{\omega}\theta]$ es

$$Rot(\hat{\omega}, \theta) = I + \sin\theta[\hat{\omega}] + (1 - \cos\theta)[\hat{\omega}]^2 \in SO(3). \tag{1}$$

> ⚠️ **Nota:** La ecuacion 1 es la formula de rotacion de Rodrigues

⭕ $R' = e^{[\hat{\omega}]\theta}R$ Rotar R a θ grados sobre el eje $\hat{\omega}$ en el marco de referencia fijo

⭕ $R'' = Re^{[\hat{\omega}]\theta}$ Rotar R a θ grados sobre el eje $\hat{\omega}$ en el marco de referencia movil

Matriz Logaritmica de rotacion

⭕ La matriz logaritmica es la inversa de la matriz exponencial la cual es la matriz de rotacion, $[\hat{\omega}\theta = [\hat{\omega}]\theta]$

⭕ Si tenemos $R \in SO(3)$ debemos encontrar el angulo $\theta \in [0, \pi]$ y el eje unitario de rotacion $\hat{\omega} \in \mathbb{R}^3$, $||\hat{\omega}|| = 1$, tal que $e^{[\hat{\omega}]\theta} = R$. El vector $\hat{\omega}\theta \in \mathbb{R}^3$ representa las coordenadas exponenciales de R y la matriz asimetrica $[\hat{\omega}]\theta \in so(3)$ es la matriz logaritmica de R.

- Si $R = I$ entonces $\theta = 0$ y $\hat{\omega}$ es indefinido.

- Si la traza de de $R = -1$ entonces $\theta = \pi$ y $\hat{\omega}$ es igual a cualquiera de los siguientes vectores.

$$\hat{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + r_{33})}} \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ 1 + r_{33} \end{bmatrix};$$

$$\hat{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + r_{22})}} \begin{bmatrix} r_{12} \\ 1 + r_{22} \\ r_{33} \end{bmatrix};$$

$$\hat{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + r_{11})}} \begin{bmatrix} 1 + r_{11} \\ r_{21} \\ 1 + r_{31} \end{bmatrix};$$

> 💥 **Importante:** $\sqrt{2(1 + r_{nn})}$ debe ser mayor a 0

- De otra forma

$$\theta = \arccos(\frac{1}{2}(trR - 1)) \in [0, \pi);$$

$$[\hat{\omega}] = \frac{1}{2\sin\theta}(R - R^T)$$

⭕ Toda matriz $R \in SO(3)$ satisface uno de los 3 casos anteriores, para toda R existe una matrix logaritmica y por ende existe una representacion en coordenadas exponenciales.

⭕ Si $r = \hat{\omega}\theta$ entonces $\hat{\omega} = r/||r||$ y $\theta = ||r||$

Funciones en Python

```python
import modern_robotics as mr

mr.RotInv(R)
"""
Inverso de la matriz de rotacion R

:paramtros: R : Matriz de Rotacion
:retorna: La inversa de la matriz R
"""

mr.VecToso3(omg)
"""
Transforma un vector a una matriz 3x3 asimetrica

:parametros: omg : Vector de dimension 3
:retorna: Matrix 3x3 asimetrica
"""

mr.so3ToVec(so3mat)
"""
Convierte una matrix asimetrica 3x3 en un vector de 3 dimensiones

:parametros: so3mat : Matriz asimetrica 3x3
:retorna: vector de dimension 3
"""

mr.AxisAng3(expc3)
"""
Transforma un vector de coordenadas exponenciales en la forma eje-angulo

:parametros: expc3 : Vector de coordenadas exponenciales de rotacion
:retorna: omg : eje de rotacion unitario
        : theta : angulo de rotacion
"""

mr.MatrixExp3(so3mat)
"""
Calcula la matriz de Rotacion de la matriz logaritmica so3mat

:parametros: so3mat : Matriz 3x3 asimetrica
:retorna: matriz de Rotacion
"""

mr.MatrixLog3(R)
"""
Calcula la matriz logaritmica de la matriz de rotacion R

:parametros: R : MAtriz 3x3 de Rotacion
:retorna: Matriz 3x3 logaritmica
"""
```

3.3 Movimientos y Giros de un Cuerpo Rigido

- La matriz de transformacion homogenea T es analogo a la matriz de rotacion R

- el screw axis S es analogo a el eje de rotacion $\hat{\omega}$

- $S\theta \in \mathbb{R}^6$ son las coordenadas exponenciales del movimiento de los cuerpos rigididos similar a $\hat{\omega}\theta \in \mathbb{R}^3$ para las rotaciones.

3.3.1 Matrices de Transformación Homogenea

- estas matrices representaran la orientacion y posicion de los cuerpos rigidos.

- $SE(3)$ es el grupos especial euclidenano o tambien conociudo como el grupo de las matrices de transformacion homogeneas en R^3 es el grupo de matrices $4x4$

$$T = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_11 & r_12 & r_13 & p_1 \\ r_21 & r_22 & r_23 & p_2 \\ r_31 & r_32 & r_33 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Donde $R \in SO(3), p \in \mathbb{R}^3$ es un vector columna

- Lo que ocurre en que estamos encapsulando el vector p y la matriz R en una nueva matrix 4x4.

- el vector $[x^T 1]^T$ es la representacion de x en coordenadas homogeneas

Propiedades

- Asociativa

- Cerradura

- Inversa

> ⚠️ **Nota:** NO es conmutativa

-

$$Tx = T \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rx + p \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(a)\ \|Tx - Ty\| = \|x - y\|;$$
$$\|x\| = \sqrt{x^T x}$$

$$(b) \;\; < Tx - Tz, Ty - Tz > = < x - z, y - z >;$$
$$< x, y > = x^T y$$

⭕ la propiedad (a) preserva distancias mientras que la (b) preserva angulos.

⭕ Si tenemos un grupo de puntos $\{x, y, z\}$ donde $\{Tx, Ty, Tz\}$ representa el desplazamiento respetando distacias y orientacion.

⭕ Inversa de una matriz T se expresa de la siguiente forma.

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Usos

1️⃣ Representar la configuracion (posicion y orientacion) de un cuerpo rigido.

2️⃣ Cambiar el marco de referencia.

3️⃣ Desplazar un cuerpo un vector o eje.

⭕ $T_{ab}T_{bc} = T_{a\cancel{b}}T_{\cancel{b}c} = T_{ac}$

⭕ $T_{ab}v_b = T_{a\cancel{b}}v_{\cancel{b}} = v_a$, donde v_a es el vector v expresado en {a}.

⭕ $T_{sb'} = TT_{sb} = Trans(p)Rot(\hat{\omega}, \theta)T_{sb}$ eje de referencia

⭕ $T_{sb''} = T_{sb}T = T_{sb}Trans(p)Rot(\hat{\omega}, \theta)$ eje del cuerpo

3.3.2 Twist