Metoda Elementów Skończonych

1 Sformułowanie silne

Rozważmy równanie transportu ciepła (dla przypadku statycznego)

$$-k\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \tag{1}$$

Warunek Dirichleta w $x = 0 : u(0) = u_0$
Warunek Cauchy'ego w $x = 1 : ku'(1) + hu(1) = hu_z$

2 Sformułowanie wariacyjne

Znaleźć funkcję u spełniającą:

$$\int\limits_0^1 k\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx + hu(1)v(1) = hu_z v(1)\text{ , }\forall v : v(0) = 0 \tag{2}$$

i taką, że $u(0) = u_0$.

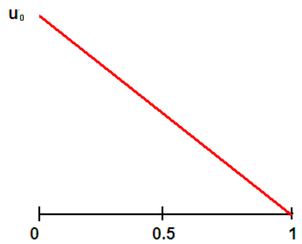
3 Rozszerzenie warunku brzegowego (shift warunku brzegowego Drichleta)

Przyjmijmy

$$\tilde{u}(x) = u_0(1 - x) \tag{3}$$

Podstawiamy $u = \tilde{u} + w$

$$\int\limits_0^1 k\frac{d(\tilde{u} + w)}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx + h\left(\tilde{u}(1) + w(1)\right)v(1) = hu_z v(1)\text{ , }\forall v : v(0) = 0 \tag{4}$$



$$\int_0^1 k\frac{d\tilde{u}}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx+\int_0^1 k\frac{dw}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx+h\tilde{u}(1)v(1)+hw(1)v(1)=hu_zv(1)\text{ , }\forall v: v(0)=0 \tag{5}$$

$$\int_0^1 k\frac{dw}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx+hw(1)v(1)=hu_zv(1)-\int_0^1 k\frac{d\tilde{u}}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx-h\tilde{u}(1)v(1)\text{ , }\forall v: v(0)=0 \tag{6}$$

Zadanie: znaleźć funkcję $u=\tilde{u}+w$ spełniającą

$$B(w,v)=L'(v)\text{ , }\forall v: v(0)=0 \tag{7}$$

gdzie

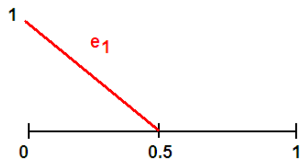
$$B(w,v)=\int_0^1 k\frac{dw}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx+hw(1)v(1) \tag{8}$$

$$L'(v)=hu_zv(1)-\int_0^1 k\frac{d\tilde{u}}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx-h\tilde{u}(1)v(1) \tag{9}$$

oraz $w(0)=0$

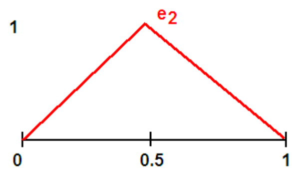
4 Konstrukcja podprzestrzeni elementów skończonych $V_h \subset V$

4.1 Dla 2 elementów $N=2$



$$e_1(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{dla } x \in (0,0.5) \\ 0 & \text{dla } x \in (0.5,1) \end{cases} \tag{10}$$

$$\frac{de_1(x)}{dx} = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (0,0.5) \\ 0 & \text{dla } x \in (0.5,1) \end{cases} \tag{11}$$



$$e_2(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \in (0,0.5) \\ 2-2x & \text{dla } x \in (0.5,1) \end{cases} \tag{12}$$

$$\frac{de_2(x)}{dx} = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (0,0.5) \\ -2 & \text{dla } x \in (0.5,1) \end{cases} \tag{13}$$

$$e_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (0,0.5) \\ 2x-1 & \text{dla } x \in (0.5,1) \end{cases} \tag{14}$$

$$\frac{de_3(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (0,0.5) \\ 2 & \text{dla } x \in (0.5,1) \end{cases} \tag{15}$$

Problem oryginalny
Znaleźć $w \in V$ spełniające

$$B(w,v) = L(v)\text{ , } \forall v \in V \tag{16}$$

Problem przybliżony $V_h \subset V$ Znaleźć $w \in V_h$ spełniające

$$B(w_h, v_h) = L(v_h)\text{ , } \forall v_v \in V_v \tag{17}$$

$$w \approx w_h = \sum_{i=1}^{3} w_i e_i \tag{18}$$

$$B\left(\sum_{i=1}^{3} w_i e_i, v_j\right) = L(v_j) \text{ dla } v_j = e_j \text{ dla } j = 1,2,3 \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^{3} w_i B(e_i, e_j) = L(e_j) \tag{20}$$

Wymuszamy warunek Dirichleta w zerze $u(0) = 0$ (po "przesunięciu")

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & B(e_2, e_2) & B(e_2, e_3) \\ 0 & B(e_3, e_2) & B(e_3, e_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ L(e_2) \\ L(e_3) \end{bmatrix} \tag{21}$$

Obliczamy

$$B(e_2, e_2) = \int_0^1 k \frac{de_2}{dx} \frac{de_2}{dx} \, dx + h e_2(1) e_2(1) \tag{22}$$

$$B(e_2, e_3) = \int_0^1 k \frac{de_2}{dx} \frac{de_3}{dx} \, dx + h e_2(1) e_3(1) \tag{23}$$

$$B(e_2, e_3) = B(e_3, e_2) \tag{24}$$

$$B(e_3, e_3) = \int_0^1 k \frac{de_3}{dx} \frac{de_3}{dx} \, dx + h e_3(1) e_3(1) \tag{25}$$

$$L(e_2) = h u_z e_2(1) - \int_0^1 k \frac{d\tilde{u}}{dx} \frac{de_2}{dx} \, dx - h \tilde{u}(1) e_2(1) \tag{26}$$

$$L(e_3) = h u_z e_3(1) - \int_0^1 k \frac{d\tilde{u}}{dx} \frac{de_3}{dx} \, dx - h \tilde{u}(1) e_3(1) \tag{27}$$

Po obliczeniu w_2, w_3 rozwiązanie przybliżone z przestrzeni V_h to

$$u(x) = \tilde{u}(x) + \begin{cases} w_2 e_2(x) & \text{dla } x \in (0, 0.5) \\ w_2 e_2(x) + w_3 e_3(x) & \text{dla } x \in (0.5, 1) \end{cases} \tag{28}$$

$$u(x) = u_0(1 - x) + \begin{cases} w_2 2x & \text{dla } x \in (0, 0.5) \\ w_2(2 - 2x) + w_3(2x - 1) & \text{dla } x \in (0.5, 1) \end{cases} \tag{29}$$