Metoda Galerkina

1 Metoda Galerkina

Ideą metody jest aproksymacja rozwiązania liniową kombinacją funkcji bazowych $e_i = e_i(x)$

$$u \approx \tilde{u} + \sum_{j=1}^{N} w_j e_j \text{ , } v \approx \sum_{j=1}^{N} v_j e_j \tag{1}$$

Współczynniki w_j należy wyznaczyć.
Podstawiając do VBVP dostajemy:

$$B\left(\tilde{u} + \sum_{j=1}^{N} w_j e_j, \sum_{j=1}^{N} v_j e_j\right) = L\left(\sum_{j=1}^{N} v_j e_j\right) \tag{2}$$

Ponieważ równanie (2) musi być spełnione dla każdej funkcji testowej v (a zatem dla dowolnego zestawu parametrów v_j), możemy przyjąć $v_j = \delta_{ji}, j = 1, \ldots, N$ otrzymując układ N równań

$$B\left(\tilde{u} + \sum_{j=1}^{N} w_j e_j, e_i\right) = L\left(e_i\right) \text{ , } i = 1, \ldots, N \tag{3}$$

Korzystając z biliniowości $B(u, v)$ mamy

$$B(\tilde{u}, e_i) + \sum_{j=1}^{N} B(e_j, e_i) w_j = L(e_i) \text{ , } i = 1, \ldots, N \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{N} B(e_j, e_i) w_j = L(e_i) - B(\tilde{u}, e_i) \text{ , } i = 1, \ldots, N \tag{5}$$

Jeżeli $B_{ij} = B(e_j, e_i)$, $B = \{B_{ij}\}$ i $L'_i = L'(e_i) = L(e_i) - B(\tilde{u}, e_i)$, $L' = \{L'_i\}$ to w celu wyznaczenia rozwiązania należy rozwiązać układ równań

$$Bu = L' \tag{6}$$

Często jako funkcje bazowe przyjmuje się

$$e_i = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{dla } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & \text{dla } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \tag{7}$$