Zagadnienie brzegowe (Boundary value problem, BVP)

1 Sformułowanie klasyczne

Znaleźć rozwiązanie $u(x)$, $x \in [0, l]$ równania różniczkowego drugiego rzędu postaci

$$-(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x),\ x \in (0, l) \tag{1}$$

z jednym z następujących warunków brzegowych dla $x = 0$ i $x = l$.

1. warunki brzegowe Dirichleta

$$u(0) = u_0 \text{ lub } u(l) = u_l \tag{2}$$

2. warunki brzegowe Neumanna

$$-a(0)u'(0) = \gamma_0 \text{ lub } -a(l)u'(l) = \gamma_l \tag{3}$$

3. warunki brzegowe Cauchy'ego

$$-a(0)u'(0) + \beta_0 u(0) = \gamma_0 \text{ lub } -a(l)u'(l) + \beta_l u(l) = \gamma_l \tag{4}$$

Dla ustalenia uwagi przyjmijmy warunki Dirichleta dla $x = 0$ i warunki Cauchy'ego dla $x = l$, czyli

$$u(0) = u_0,\ -a(l)u'(l) + \beta_l u(l) = \gamma_l$$

2 Sformułowanie wariacyjne

Niech u będzie rozwiązaniem problemu (1). Mnożymy równanie (1) przez arbitralną funkcję testową $v(x)$, spełniającą warunek $v(0) = 0$ i całkujemy w przedziale $(0, l)$

$$\int_0^l -(au')'v\,dx + \int_0^l bu'v\,dx + \int_0^l cuv\,dx = \int_0^l fvdx \tag{5}$$

całkując przez części mamy

$$\int_0^l -(au')'v\,dx = \int_0^l au'v'\,dx - a(l)u'(l)v(l) + a(0)u'(0)v(0) \tag{6}$$

Z warunku Cauchy'ego w $x = l$ mamy

$$-a(l)u'(l)v(l) = -\beta_l u(l)v(l) + \gamma_l v(l)$$

W efekcie uzyskujemy następujące rozwiązanie wariacyjne BVP:

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ \int_0^l (au'v' + bu'v + cuv)\,dx - \beta_l u(l)v(l) = \int_0^l fv\,dx - \gamma_l v(l) \end{cases} \tag{7}$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$L(v) = \int_0^l fv\,dx - \gamma_l v(l) \tag{8}$$

$$B(u, v) = \int_0^l (au'v' + bu'v + cuv)\,dx - \beta u(l)v(l) \tag{9}$$

$L(v)$ jest funkcjonałem liniowym, $B(u, v)$ jest funkcjonałem biliniowym. Równanie (7) można zapisać

$$B(u, v) = L(v) \tag{10}$$

Wprowadzamy funkcję $\tilde{u}(x)$, spełniającą warunek $\tilde{u}(0) = u_0$. Podstawiając $w = u - \tilde{u}$ i korzystając z biliniowości funkcjonału $B(u, v)$, dostajemy

$$\begin{cases} w(0) = 0 \\ B(w, v) = L(v) - B(\tilde{u}, v) \end{cases} \tag{11}$$

Przykładem funkcji $\tilde{u}$ może być $\tilde{u} = (1 - x)u_0$.

3 Przykład 2

Przyjmijmy warunki brzegowe Cauchyego dla $x = 0$ oraz Neumanna dla $x = l$, czyli

$$-a(0)u'(0) + \beta_0 u(0) = \gamma_0, \ -a(l)u'(l) = \gamma_l$$

Niech u będzie rozwiązaniem problemu (1). Mnożymy równanie (1) przez arbitralną funkcję testową $v(x)$, spełniającą warunek $v(0) = 0$ i całkujemy w przedziale $(0, l)$

$$\int_0^l -(au')'v\,dx + \int_0^l bu'v\,dx + \int_0^l cuv\,dx = \int_0^l fv dx \tag{12}$$

całkując przez części mamy

$$\int_0^l -(au')'v\,dx = \int_0^l au'v'\,dx - a(l)u'(l)v(l) + a(0)u'(0)v(0) \tag{13}$$

Z warunku Cauchy'ego w $x = 0$ mamy

$$-a(0)u'(0)v(0) = -\beta_l u(0)v(0) + \gamma_l v(0) = 0$$

Z warunku Neumanna w $x = l$ mamy

$$-a(l)u'(l)v(l) = \gamma_l v(l)$$

4 Równoważność z problemem minimalizacji

Wprowadźmy funkcjonał kwadratowy

$$J(u) = \frac{1}{2}B(u,u) - L(u) \tag{14}$$

Niech funkcjonał $J(u)$ osiąga minimum w u oraz

$$\begin{gathered}\phi(\epsilon) = J(u + \epsilon v) = \\ \frac{1}{2}B(u + \epsilon v, u + \epsilon v) - L(u + \epsilon v) = \\ \frac{1}{2}B(v,v)\epsilon^2 + (\frac{1}{2}(B(u,v) + B(v,u)) - L(v))\epsilon + (\frac{1}{2}B(u,u) - L(u))\end{gathered} \tag{15}$$

Jeżeli J osiąga minimum w u to $\phi(\epsilon)$ musi osiągać minimum dla $\epsilon = 0$, czyli

$$\frac{d\phi}{d\epsilon}(0) = \frac{1}{2}(B(u,v) + B(v,u)) - L(v) = 0 \tag{16}$$

Jeżeli $B(u,v)$ jest formą symetryczną (czyli $B(u,v) = B(v,u)$) to

$$B(u,v) = L(v) \tag{17}$$

Jest to warunek konieczny istnienia minimum u. Warunkiem wystarczającym jest

$$B(v,v) > 0, \forall v \neq 0 \tag{18}$$

Twierdzenie 1 (Równoważność problemu minimalizacji i wariacyjnego) *Jeżeli forma$B(u,v)$ jest symetryczma i dodatnio określona, to problemy minimalizacyjny i wariacyjny są równoważne, czyli u jest rozwiązaniem (10) wtedy i tylko wtedy gdy u jest rozwiązaniem (17)*