ASD - Wykład 13

Algorytm Bellmana-Forda (dla $G=(V,E)$, $w: E \to \mathbb{R}$)

① Inicjalizacja

```
for v ∈ V
    v.d = ∞
    v.parent = None
s.d = 0
```

② Relaksacje

```
for i in range(|V| - 1)
    for (u,v) ∈ E:
        Relax(u,v)
```

③ Weryfikacja

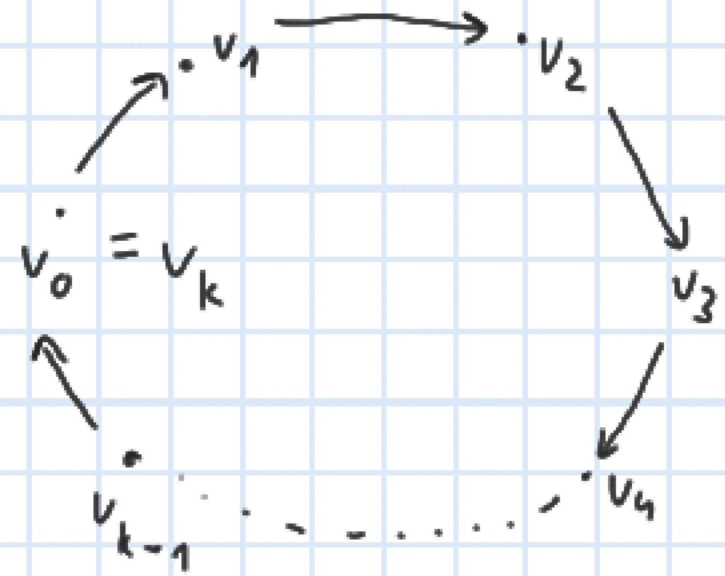
Czy dla każdej $(u,v) \in E$:

$$v.d \le u.d + w(u,v) \ ?$$

Jeśli tak – OK

Jeśli nie – ujemny cykl

Załóżmy, że G posiada pewien cykl o ujemnej wadze, osiągalny ze źródła s



$$\sum_{i=0}^{k-1} w(v_i, v_{i+1}) < 0$$

sprzeczność

Jeśli w takiej sytuacji weryfikacja by przeszła, to:

$$\forall_{\substack{v_i \\ (v_i, v_{i+1})}} : \quad v_{i+1}.d \le v_i.d + w(v_i, v_{i+1})$$

Sumując te nierówności:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k-1} v_{i+1}.d} \le \boxed{\sum_{i=0}^{k-1} \left(v_i.d\right.} + w(v_i, v_{i+1})\Big)$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le \sum_{i=0}^{k-1} w(v_i, v_{i+1})$$

Najkrótsze ścieżki między każdą parą wierzchołków

- $|V|$ wywołań algorytmu Dijkstry

  $O(V \cdot E \log V)$

- $|V|$ wywołań algorytmu Bellmana-Forda

  $O(V^2 E)$

Konwencja

Stosujemy reprezentację macierzową

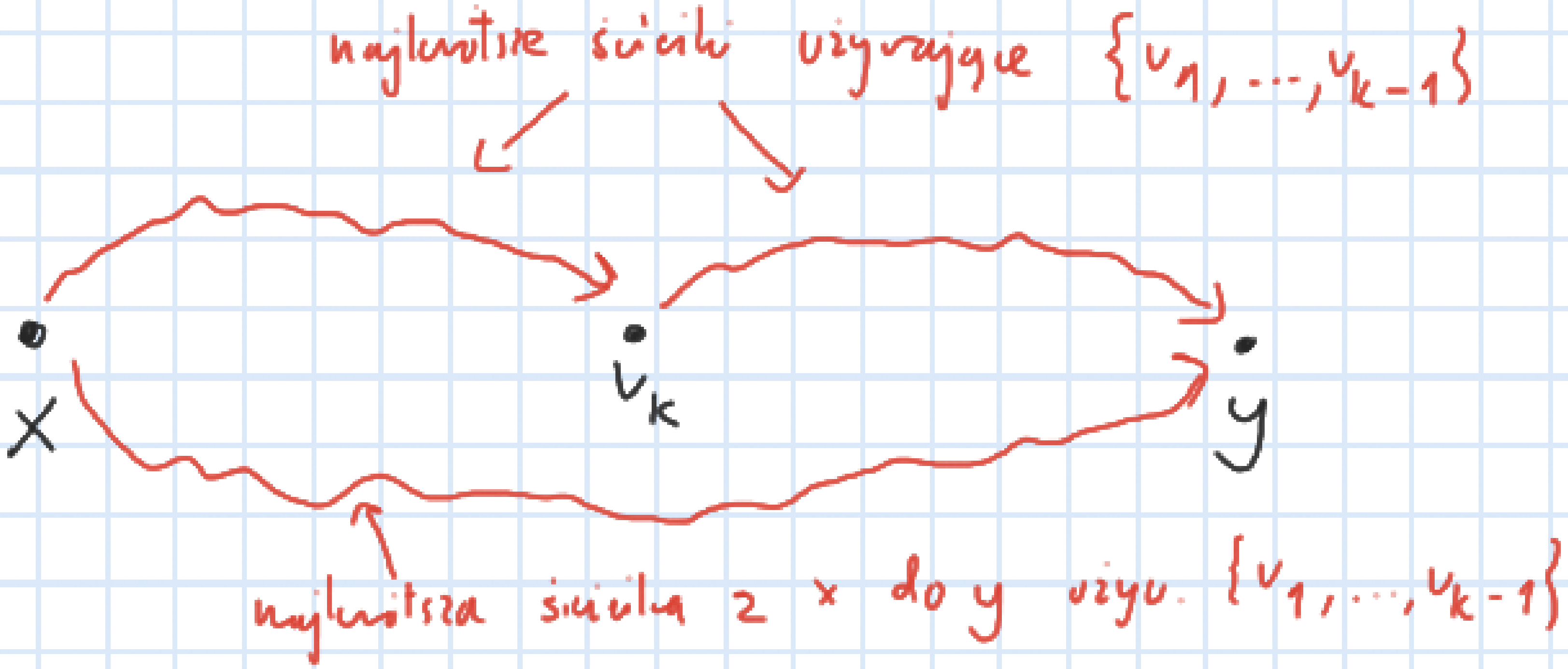
Stosujemy macierz najkrótszych odległości

$D[u][v]$ – dł. najkrótszej ścieżki z u do v

Algorytm Floyda-Warshalla

$G=(V,E)$, $w: V \times V \to \mathbb{R}$, $V=\{v_1,\dots,v_n\}$

Idea: Jeśli dla pewnego k znamy najkrótsze ścieżki między każdą parą wierzchołków, ale ograniczone do wierzchołków wewnętrznych $\{v_1,\dots,v_{k-1}\}$ to możemy łatwo obliczyć najkrótsze ścieżki z wierzchołkami wewnętrznymi $\{v_1,\dots,v_k\}$



Implementacja algorytmu Floyda-Warshalla

$D^{(t)}[u][v]$ – długość najkrótszej ścieżki z u do v, jeśli można po drodze korzystać z wierzchołków $\{v_1, \dots, v_t\}$

Złożoność $O(V^3)$

$D^{(0)} = D$

pomijamy w implementacji

```
for k in range(1, n+1):
  for u ∈ V:
    for v ∈ V:
      D^(k)[u][v] = min( D^(k-1)[u][v],
                         D^(k-1)[u][v_k] + D^(k-1)[v_k][v] )
return D^(n)
```