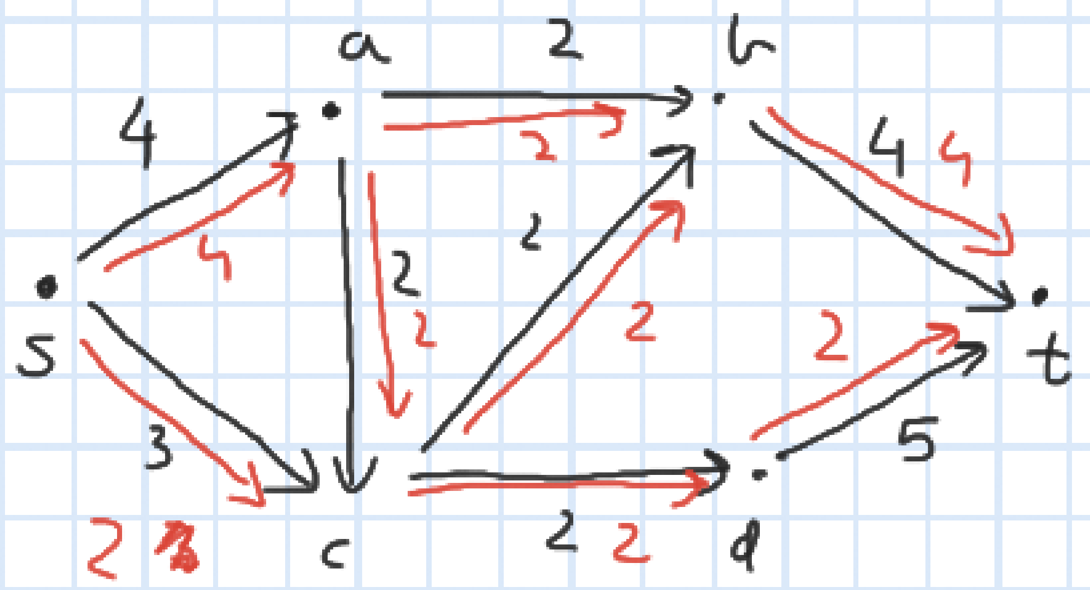
ASD - Wykład 13b

Problem maksymalnego przepływu



Wejście: $G = (V, E)$ - graf skierowany (krawędzie tylko w jedną stronę)

$c : V \times V \to \mathbb{N}$ ← pojemność krawędzi

Jeśli $(u,v) \notin E$ to $c(u,v) = 0$

s - źródło, nie ma krawędzi wchodzących

t - ujście, nie ma krawędzi wychodzących

Zadanie

Znaleźć "przepływ" f o maksymalnej wartości

to funkcja

$f : V \times V \to \mathbb{N}$

$(\forall u,v)[\, f(u,v) \leq c(u,v) \,]$

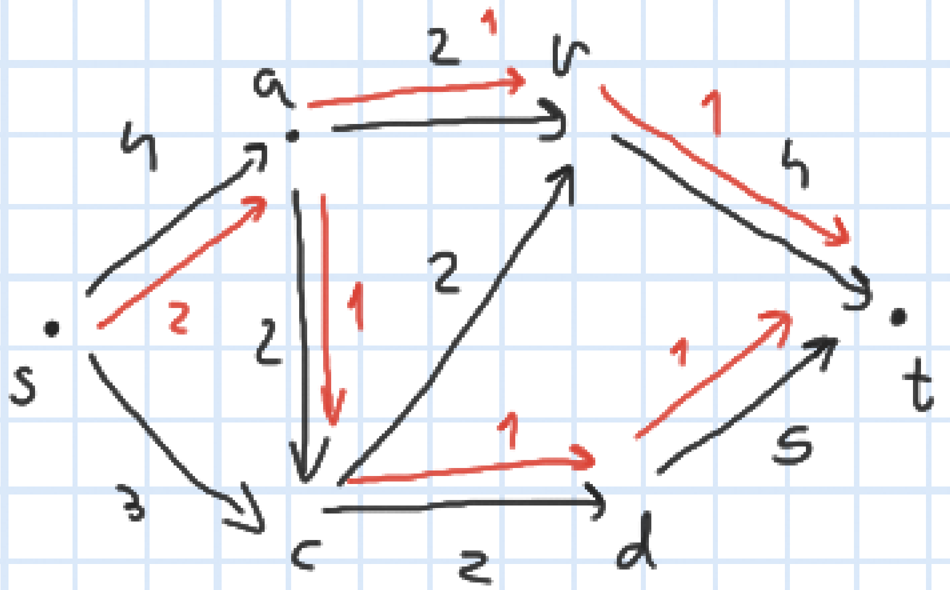
$(\forall v \in V - \{s,t\})\left[\, \sum_{u \in V} f(u,v) = \sum_{u \in V} f(v,u) \,\right]$

$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v) - \underbrace{\sum_{v \in V} f(v,s)}_{=0}$

Sieci residualne

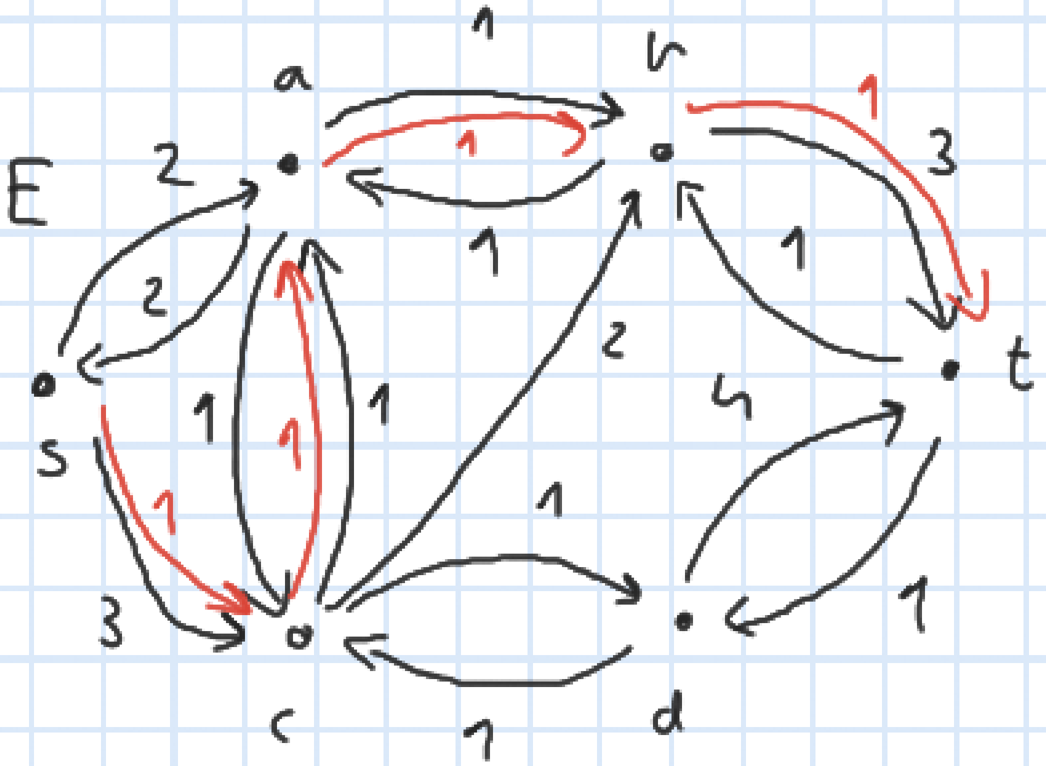
$$\left.\begin{array}{l} G = (V, E) \\ s, t \in V \\ c : V \times V \to \mathbb{N} \end{array}\right\} \text{sieć przepływowa}$$

$$f : V \times V \to \mathbb{N}$$



Definiujemy sieć residualną G_f, c_f przez funkcję c_f:

$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v), & (u,v) \in E \\ f(v,u), & (v,u) \in E \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}$$



Ścieżka powiększająca dla G_f to ścieżka z s do t w G_f, c_f.

Wartością tej ścieżki jest najmniejsza wartość $c_f(u,v)$ na ścieżce

Metoda Forda-Fulkersona

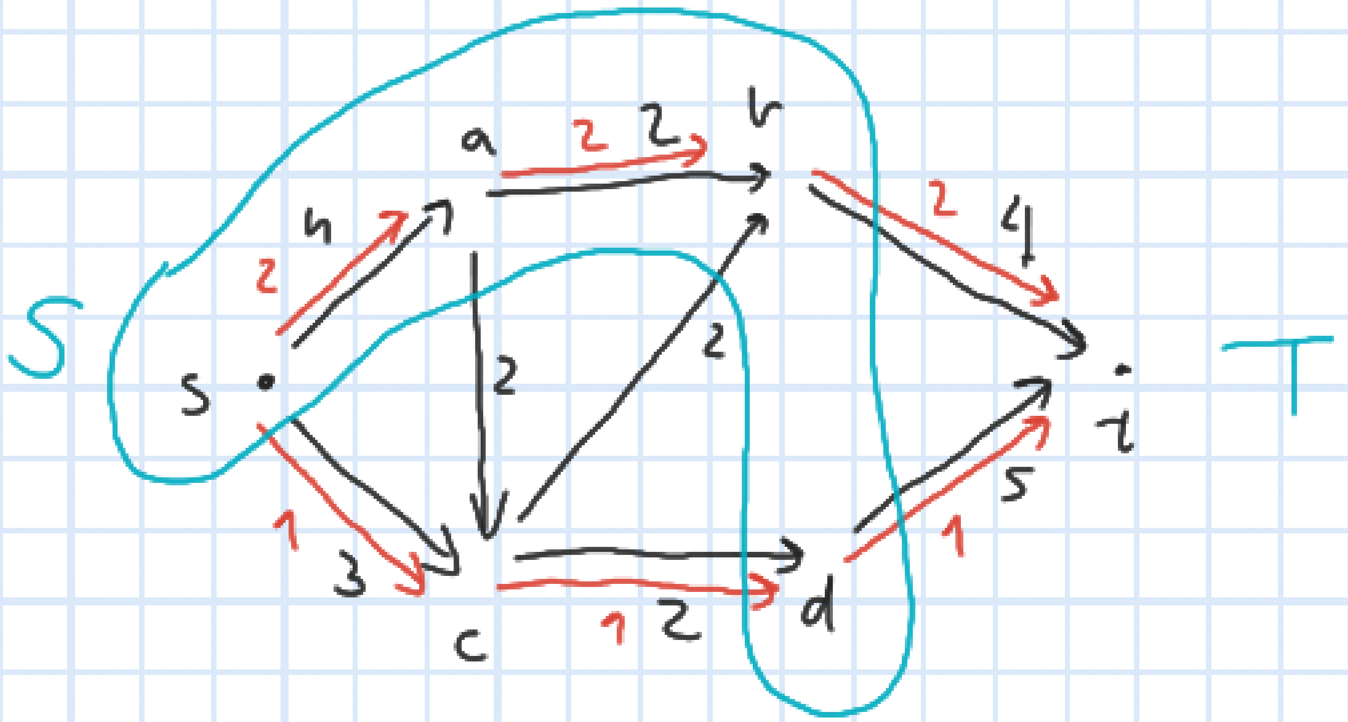
① Jeśli istnieje ścieżka powiększająca dla G_f, c_f, to powiększ zgodnie z nią przepływ

② wróć do kroku ①

Przekrój w sieci

$G=(V,E)$, s,t } sieć przepływowa
$c: V\times V \to \mathbb{N}$

$f: V\times V \to \mathbb{N}$



Przekrój sieci to podział V na

$$S, \quad V - S = T$$

gdzie $s \in S$, $t \in T$

$$c(S,T) = 3+2+4+5 = 14$$

$$f(S,T) = 4-1 = 3$$

Przepustowość przekroju S,T to:

$$c(S,T) = \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} c(u,v)$$

Przepływ netto:

$$f(S,T) = \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(v,u)$$

Lemat

$$f(S,T) = |f|$$

Dowód

$$|f| = \sum_{v\in V} f(s,v) - \sum_{v \in V} f(v,s)$$

$$+ \underbrace{\boxed{\sum_{u\in S-\{s\}} \sum_{v\in V} f(u,v) - \sum_{u\in S-\{s\}} \sum_{v\in V} f(v,u)}}_{=0}$$

(własność zachowania przepływu)

$$= \sum_{u\in S} \sum_{v\in V} f(u,v) - \sum_{u\in S} \sum_{v\in V} f(v,u)$$

$$= \sum_{u\in S} \sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{u\in S} \sum_{v\in T} f(v,u)$$

$$+ \boxed{\left(\sum_{u\in S} \sum_{v\in S} f(u,v) - \sum_{u\in S} \sum_{v\in S} f(v,u) \right)} = 0$$

$$= f(S,T)$$

Lemat

$$|f| \leq c(S,T)$$

Dowód

$$|f| = f(S,T)$$

$$= \sum_{u\in S} \sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{u\in S} \sum_{v\in T} f(v,u)$$

$$\leq \sum_{u\in S} \sum_{v\in T} f(u,v)$$

$$\leq \sum_{u\in S} \sum_{v\in T} c(u,v) = c(S,T)$$

tw (max-flow / min-cut theorem)

Niech $G=(V,E)$, s,t, $c: V \times V \to \mathbb{N}$ będzie siecią przepływową oraz f niech będzie przepływem w tej sieci. Następujące warunki są równoważne:

1. f jest maksymalnym przepływem w G
2. G_f, c_f nie ma ścieżki powiększającej
3. Dla pewnego przekroju S,T zachodzi
$$|f| = c(S,T)$$

Dowód

3 $\Rightarrow$ 1

1 $\Rightarrow$ 2

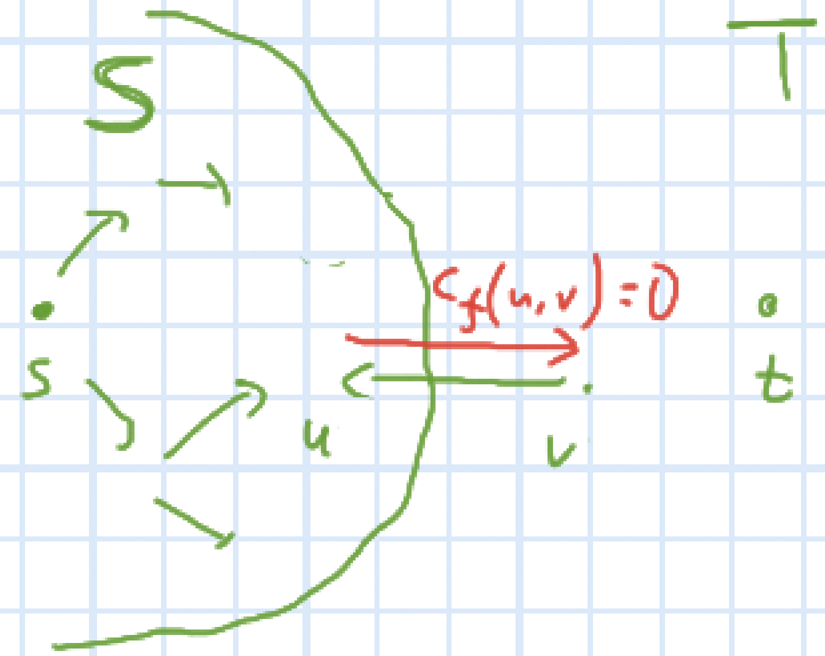
2 $\Rightarrow$ 3

$$S = \{ v \in V \mid \text{istnieje ścieżka z } s \text{ do } v \text{ w } G_f, c_f \}$$

$$T = V - S$$

zauważamy: $s \in S$, $\overbrace{t \in T}^{\text{inaczej istniałaby ścieżka powiększająca w } G_f, c_f}$

$$|f| = f(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} \Big(\overbrace{f(u,v)}^{=c(u,v)} - \overbrace{f(v,u)}^{=0} \Big) = c(S,T)$$



Jeśli $(u,v) \in E$ to $c_f(u,v)=0$, czyli $f(u,v) = c(u,v)$

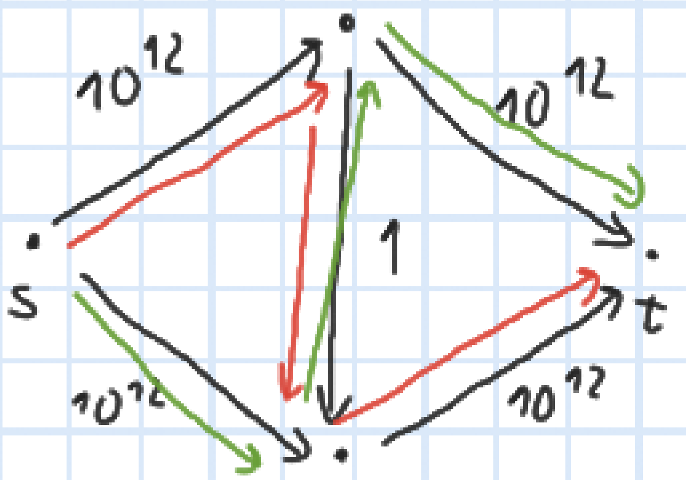
Jeśli $(v,u) \in E$ to $c_f(u,v) = 0$, czyli $f(v,u) = 0$

Jeśli $(u,v) \notin E$ i $(v,u) \notin E$ to $f(u,v) = 0 = c(u,v)$, $f(v,u) = 0$

Złożoność metody Forda-Fulkersona

$$O(\underbrace{(V+E)}_{\text{zakładamy, że } |E| > |V|}\ \underbrace{|f^*|}_{\text{wartość maksymalnego przepływu}}) = O(E|f^*|)$$

To może być bardzo dużo!



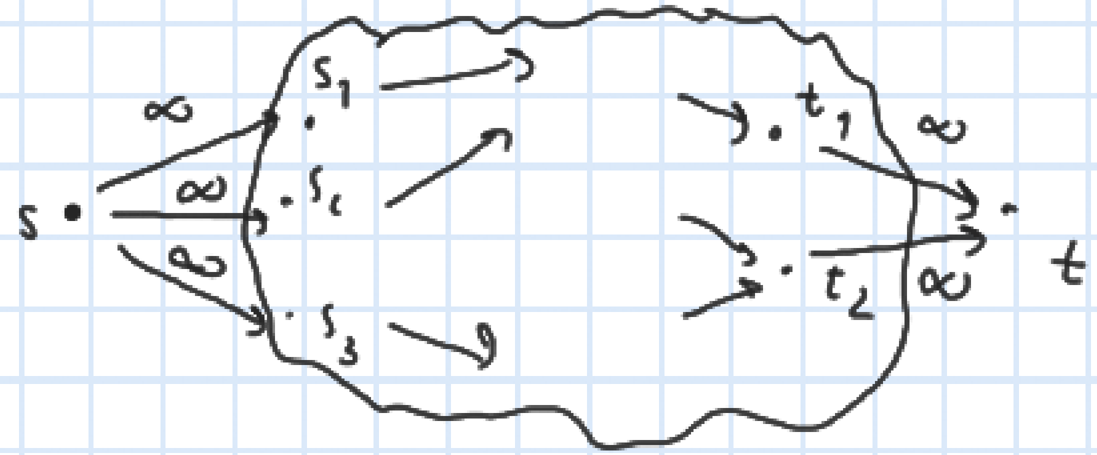
Czas działania można istotnie przyspieszyć wyszukując ścieżkę powiększającą metodą BFS

$\Downarrow$

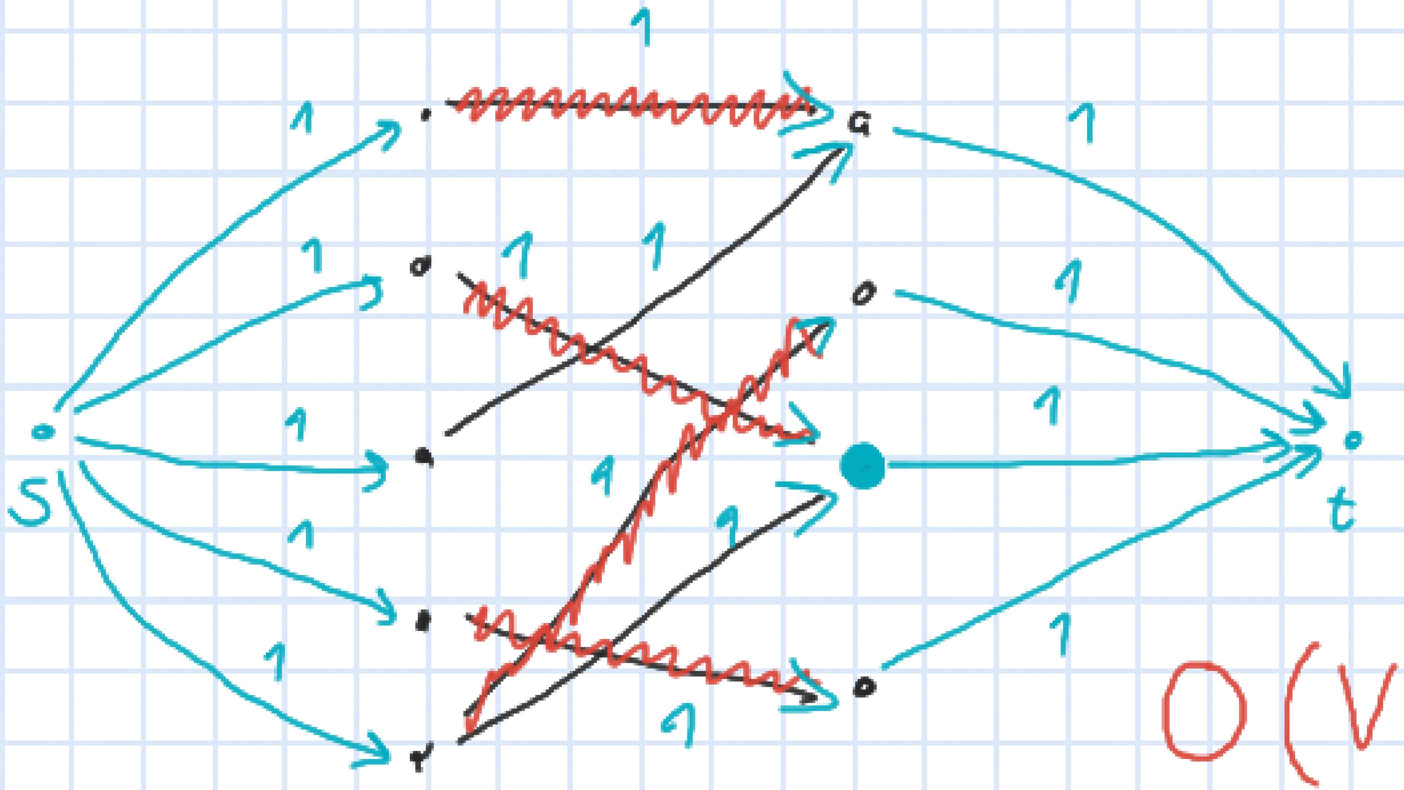
algorytm Edmondsa-Karpa $O(VE^2)$

Kilka wariantów problemu

1. krawędzie w obie strony
2. wiele źródeł i wiele ujść



3. maksymalne skojarzenie w grafie dwudzielnym



$O(VE)$