

Тэорыя катэгорый: кароткія ўводзіны

Яўген Пятліцкі

8 ліпеня 2022 г.

Гэты дакумэнт – кароткія нататкі з тэорыі катэгорый. Дакумэнт прызначаны для ўнутранага ўжытку. Тэкст сыры, зьмест, мова, стыль, тэрміналёгія будуць зьмяняцца.

Любая зваротная сувязь вітаецца (той, хто знайшоў дакумэнт праз пашуковік, а не атрымаў спасылку ад аўтара, можа скарыстацца стандартнымі сродкамі гітхабу, такімі як issues).

Зьмест

1	Катэгорыі, функтары, натуральныя пераўтварэньні	5
1.1	Азначэньне катэгорыі	6
1.2	Памер катэгорый	7
1.3	Віды марфізмаў	10
1.4	Дуальнасьць, пачатковыя і канчатковыя аб'екты	12
1.5	Функтары	14
1.6	Падкатэгорыі	17
1.7	Натуральныя пераўтварэньні	18
1.8	Катэгорыі функтараў	20
1.9	Азначэньні з дапамогай дыяграмаў	21
1.10	Катэгорны здабытак	23
1.11	Мультикатэгорыі	24
1.12	Унутраныя манойды	28

Разьдзел 1

Катэгорыі, функтары, натуральныя пераўтварэньні

Як казаў сп. Стэфан Банах, добры матэматык бачыць факты, выбітны – аналёгіі паміж фактамі, а геніяльны – аналёгіі паміж аналёгіямі.

Тэорыя катэгорый – гэта спроба фармалізаваць аналёгіі паміж фактамі і стварыць агульную тэорыю, у якой такія аналёгіі можна абмяркоўваць строга.

Гістарычна тэорыя катэгорый узнікла як інструмэнт альгебраічнай тапалёгіі, які дазваляў фармалізаваць паняцьце “натуральнасьці” і зрабіць строгімі пэўныя інтуіцыйныя разважаньні.

Ідэя тэорыі катэгорый палягае на тым, каб разгледзець цэлую клясу аб’ектаў у іхным узаемадзеяньні паміж сабой.

Такое абагульненьне – цалкам натуральнае: спачатку мы вучымся лічыць канкрэтныя аб’екты фізычнага сьвету, потым разумеем (да пэўнай ступені), што такое абстрактны цэлы лік, потым – паралельна з абагульненьнем паняцьця ліку – пачынаем вывучаць канкрэтныя функцыі паміж лікамі, пасля чаго разглядаем усю сукупнасьць лікаў як адзін аб’ект (тое ці іншае мноства) і пераходзім да больш абстрактнага паняцьця функцый паміж мноствамі.

Далей зьяўляецца патрэба разгледзець мноствы, надзеленыя нейкай структурай, геамэтрычнай альбо альгебраічнай, і функцыі паміж імі.

У нейкі момант аказваецца, што карысна вывучыць усю сукупнасьць, напрыклад, тапалягічных прастораў альбо груп. І цалкам натуральна ўзьнікаюць функцыі, якія пераводзяць тапалягічныя прасторы ў групы (напрыклад, групы гаматопій). У такой сытуацыі абсягам акрэсьленьня функцыі зьяўляецца ўся сукупнасьць (катэгорыя) тапалягічных прастораў, а абсягам значэньняў – катэгорыя груп.

У гэтым месцы ўважлівы чытач павінен сказаць мне “Пачкай, а ці

чуў ты што-небудзь пра Расэлаў парадокс? Што менавіта ты называеш сукупнасьцю ўсіх груп?”

На гэтае пытаньне я маю адказ, але троху пазьней. Пакуль уявім на хвіліну, што мноства ўсіх мностваў нас не непакоіць (а я паабяцаю па дарозе не будаваць аб’екты, якія ўтрымліваюць самі сябе альбо самаадносяцца якім-небудзь іншым чынам).

1.1 Азначэньне катэгорыі

Азначэньне катэгорыі – досыць простае, амаль трывіяльнае.

Што аб’ядноўвае ўсе сукупнасьці аб’ектаў, такіх як мноствы, тапалягічныя прасторы, альгебры, групы, колцы?

Па-першае, ёсьць самі аб’екты.

Па-другое, ёсьць функцыі паміж імі, прычым для кожнага аб’екта існуе тоеснае пераўтварэньне, а кампазыцыя функцыяў асацыяцыйная.

Насамрэч, гэта ўсё, што трэба каб абстрактна апісваць сукупнасьці аб’ектаў у агульным выпадку.

Азначэньне 1.1.1. Катэгорыя C – гэта сукупнасьці аб’ектаў ObC (па-іншаму пазначаецца C_0) і стрэлак паміж імі $MorC$ (па-іншаму пазначаецца C_1), якія маюць наступныя ўласцівасьці:

1. Кожная стрэлка мае вызначаны пачатак і канец (дамэн і судамэн, крыніцу і прызначэньне), якія зьяўляюцца аб’ектамі. Стрэлка f з X ў Y запісваецца $f : X \rightarrow Y$.

2. Для кожнай пары стрэлак $f : X \rightarrow Y$ і $g : Y \rightarrow Z$, вызначаная кампазыцыя $g \circ f : X \rightarrow Z$, калі канец першай супадае з пачаткам другой.

3. Сукупнасьць стрэлак паміж аб’ектамі X і Y пазначаецца $C(X, Y)$ альбо $Hom_C(X, Y)$ і называецца гомсэтам, дзьве такія сукупнасьці для розных аб’ектаў ня маюць супольных стрэлак.

4. Для кожнага аб’екта X вызначаная адзінкавая стрэлка 1_X , якая паводзіць сябе як адзінка пры кампазыцыі стрэлак, гэта значыць для $f : X \rightarrow Y$ і $g : Z \rightarrow X$ выконваюцца наступныя тоеснасьці:

$$f \circ 1_X = f$$

$$1_X \circ g = g$$

5. Для кожнай тройкі стрэлак $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, $h : Z \rightarrow W$ выконваецца наступная тоеснасьць:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

У гэтым азначэньні мы выкарысталі больш абстрактную тэрміналёгію: замест “функцыі” мы гаворым “стрэлкі”, таму што, як мы ўбачым пазьней, ёсьць катэгорыі, у якіх стрэлкі не зьяўляюцца функцыямі.

Па-іншаму “стрэлка” называецца “марфізм”.

Прыклад 1.1.1 (Прыклады катэгорый). 1. Катэгорыя мностваў Ens : аб’екты – мноствы, стрэлкі – функцыі паміж імі.

2. Катэгорыя тапалягічных прастор Top : аб’екты – тапалягічныя прасторы, стрэлкі – непарыўныя функцыі.

3. Катэгорыя груп Grp : аб’екты – групы, стрэлкі – гомамарфізмы.

4. Катэгорыя часткова ўпарадкаваных мностваў $Poset$: аб’екты – часткова ўпарадкаваныя мноствы, стрэлкі – манатонныя функцыі (то бок функцыі, якія захоўваюць частковы парадак).

5. Любая сукупнасць мностваў з структурай і функцыяў паміж імі, якія захоўваюць гэтую структуру, дае нам прыклад катэгорыі.

Але ці вычэрпваюцца катэгорыі толькі сукупнасцямі мностваў з структурай? Не, азначэнне катэгорыі дастаткова агульнае каб уключыць іншыя выпадкі (тут я не магу не ўзгадаць, што аўтары Матэматычнай энцыклапедыі, выдадзенай Тэхналёгіяй, даюць памылковае азначэнне тэрміну “катэгорыя”: у іх гэта толькі сукупнасць мностваў з структурай).

Перад тым як звярнуцца да больш абстрактных прыкладаў катэгорый, мы разьбярэмся з пытаньнем іх памеру.

1.2 Памер катэгорый

Як было ўзгадана вышэй, разгляд аб’ектаў такіх як “мноства ўсіх мностваў”, спалучаны з клясычнай лёгікай, імгненна вядзе да ўзьнікнення праблем. У прынцыпе, гэта праява больш агульнай праблемы: у клясычнай (і ў інтуіцыянісцкай, ды і ў любой кансыстэнтнай) лёгіцы немагчыма паслядоўна разглядаць сытэмы з самааднясеннем. Дастаткова ўзгадаць парадокс цырульніка, які не патрабуе для свайго ўзьнікнення ніякіх мностваў.

Як можна вырашыць гэтую праблему? Першы магчымы шлях – зьмена лёгікі на паракансыстэнтную, то бок такую, якая дапускае для некаторых выказваньняў магчымасьць быць адначасова праўдзівымі і непраўдзівымі, пры гэтым не прыводзячы да трывіялізацыі ўсёй тэорыі. На гэтым шляху на сёньняшні дзень не дасягнута істотных вынікаў, якія б пераконвалі ў ягонаў вартасці, хаця з майго пункту гледжаньня гэты кірунак вельмі цікавы і варты глыбейшага распрацоўваньня.

Іншы варыянт – не зьмяняючы лёгіку, палічыць, што Расэлаў парадокс даказвае, што сукупнасць усіх мностваў сама мноствам не зьяўляецца. Гэта стандартнае разьвязаньне, на якім мы і спынімся.

Аднак тут узьнікае праблема: калі мы хочам разгледзець сукупнасьць усіх мностваў, то мы ня можам зрабіць гэтага, застаючыся ў межах тэорыі, у якой ёсьць толькі мноствы.

Існуе некалькі разьвязаньняў праблемы, кожнае зь якіх прыводзіць да ўвядзеньне аб'ектаў большых за мноствы – клясаў.

Мы спынімся на Гротэндыхавых унівэрсумах.

Ідэя ўнівэрсуму палягае на тым, каб у якасьці сукупнасьці ўсіх мностваў выбраць мноства настолькі вялікае, каб у ім мы маглі займацца патрэбнай нам матэматыкай. Як мінімум нам неабходна быць у стане ажыццяўляць стандартныя тэарэтыка-множныя канструкцыі такія як утварэньне мноства ўсіх падмностваў зададзенага мноства.

Такім чынам, працуючы ўнутры нейкай тэорыі мностваў (напрыклад, ZFC), мы выбіраем пэўную сукупнасьць мностваў, элемэнты якой будзем называць малымі мноствамі. Сукупнасьць усіх малых мностваў сама малым мноствам ня будзе, а будзе мноствам вялікім, альбо іншымі словамі – уласнай клясай.

Усе “звычайныя” матэматычныя канструкцыі мы будзем ажыццяўляць з малымі мноствамі. Напрыклад, на іх мы будзем задаваць структуры груп, тапалягічных прастораў альбо колцаў.

У выніку сукупнасьць усіх груп, хаця ня будзе сама малым мноствам, аднак будзе аб'ектам, які мы можам законна разглядаць у нашай тэорыі.

Канструкцыі тэорыі катэгорый (прынамсі, калі мы хочам разглядаць вялікія катэгорыі, такія як катэгорыя ўсіх малых мностваў) запатрабуюць разгляду вялікіх падмностваў унівэрсуму, альбо ўсяго ўнівэрсуму. Больш за тое, некаторыя канструкцыі запатрабуюць цэлай гэрархii ўнівэрсумаў, у якой кожны наступны ўтрымлівае папярэднія.

На нашым узроўні строгаьці – улічваючы, што пытаньні падставаў матэматыкі не знаходзяцца ў нашым фокусе – хопіла б выкладзенай вышэй заўвагі пра магчымасьць строга разглядаць сукупнасьці ўсіх мностваў і падобныя. Але для паўнiны карціны я прывяду адпаведныя азначэньні.

Азначэньне 1.2.1. *Гротэндыхаў унівэрсум – гэта мноства U , якое мае наступныя ўласьцівасьці:*

1. Для ўсіх $u \in U$ і $t \in u$ мы маем $t \in U$.
2. Для ўсіх $u \in U$ мы маем $\mathcal{P}(u) \in U$, дзе $\mathcal{P}(u)$ – сукупнасьць усіх падмностваў мноства u .
3. $\mathbb{N} \in U$.
4. Для ўсіх $I \in U$ і функцыі $u : I \rightarrow U$ мы маем $\bigcup_{i \in I} u_i \in U$.

Нескладана давесці, што выконваючы звычайныя тэарэтыка-множныя

апэрацыі над элементамі Гротэндыкава ўнівэрсуму, мы не выходзім за ягоныя межы.

У якасці прыкладу дакажам, што аб'яднаньне малых мностваў – малое мноства (даказ ніжэй не дастаткова строгі, паколькі мы ня выбралі аксыяматыку тэорыі мностваў, але давядзецца паверыць мне на слова, што яго можна зрабіць поўнасьцю строгім).

Прыклад 1.2.1. *З $a \in U$ і $b \in U$ вынікае, што $a \cup b \in U$.*

Доказ. З аксыёмы 3 маем $\mathbb{N} \in U$. $\emptyset \in \mathbb{N}$, значыць з аксыёмы 1 $\emptyset \in U$. $\mathcal{P}(\emptyset) \in U$ як вынікае з аксыёмы 2. Значыць, у U ёсьць мноства з двух элементаў, назавем яго 2. Задамо функцыю $f : 2 \rightarrow U$ такім чынам, што адзін элемент 2 яна пераводзіць у a , а другі ў b . Паводле аксыёмы 4 $a \cup b \in U$. \square

Падобным няхітрым чынам мы можам ня толькі паказаць, што можам займацца звычайнымі тэарэтыка-множнымі пабудовамі ў Гротэндыкавым унівэрсуме, але і тое, што Гротэндыкаў унівэрсум сам па сабе ёсьць мадэллю ZFC (прынамсі, калі мы карыстаемся пры яго пабудове ZFC).

Аёй, існаваньне ўнівэрсуму – вельмі моцная рэч, даказаць яго ў межах ZFC не атрымаецца.

Што рабіць? Дадамо да ZFC новую аксыёму: аксыёму ўнівэрсуму.

Аксыёма 1.2.1. *Аксыёма ўнівэрсуму. Для любога мноства s існуе ўнівэрсум U , які яго ўтрымлівае.*

Падсумоўваючы, праблему катэгорыі ўсіх мностваў (і падобных вялікіх катэгорый) мы разьвязалі ўвядзеньнем герархіі ўнівэрсумаў. У звычайнай матэматыцы мы працуем толькі з малымі мноствамі (элементамі зафіксаванага ўнівэрсуму U , які сам па сабе служыць мадэллю ZFC), усе мноствы, якія ня ёсьць малымі мы называем вялікімі мноствамі альбо ўласнымі клясамі. Пры патрэбе, калі нашыя катэгорныя канструкцыі ня будуць зьмяшчацца ў адным унівэрсуме, і нам спатрэбяцца яшчэ большыя мноствы, мы проста возьмем большы ўнівэрсум. Што ён існуе, нам гарантуе аксыёма ўнівэрсуму, якую мы дадалі да ZFC.

Азначэньне 1.2.2. *Катэгорыя называецца малой, калі сукупнасьць яе стрэлак – малое мноства, іначэй катэгорыя называецца вялікай. Катэгорыя \mathcal{C} называецца лякальна малой, калі для любых двух яе аб'ектаў a і b , $\mathcal{C}(a, b)$ – малое мноства.*

Пакуль мы сустракаліся толькі з вялікімі, але лякальна малымі катэгорыямі. Як жа выглядаюць малыя катэгорыі?

Прыклад 1.2.2. 1. Катэгорыя 0 без аб'ектаў.

2. Катэгорыя 1 з адным аб'ектам і адной стрэлкай – 1_1 .

3. Манойд, то бок мноства, на элементах якога зададзена бінарная асацыяцыйная апэрацыя і ёсьць адзінкавы элемент. Гэтая катэгорыя мае толькі адзін – фармальны – аб'ект, а мноства яе стрэлак – гэта мноства элементаў манойду.

4. Група – як прыклад манойду.

5. Мноства зь перадпарадкам. Аб'екты катэгорыі – гэта элементы мноства, а стрэлка паміж двума элементамі існуе толькі тады, калі паміж імі існуюць адносіны парадку.

6. Як прыклад перадпарадку – мноства падмностваў $\mathcal{P}(S)$ зададзенага мноства S , упарадкаванае паводле ўключэньня.

7. Іншы прыклад перадпарадку: мноства ўсіх адкрытых падмностваў $\mathcal{O}(T)$ тапалягічнай прасторы T , упарадкаванае паводле ўключэньня. Аналягічна, мноства замкнёных падмностваў $\mathcal{C}(T)$.

8. Звычайнае малое мноства S – гэта прыклад катэгорыі з трывіяльнай структурай (дыскрэтнай катэгорыі). Яе аб'екты – гэта элементы мноства, а стрэлкі – адзінкавыя стрэлкі, фармальна вызначаныя для кожнага элементу. Гэта вельмі важны прыклад, які паказвае сувязь паняццяў мноства і катэгорыі. Насамрэч, існуе некалькі герархіяў катэгорападобных аб'ектаў, у якіх мноствы і катэгорыі – адны з найніжэйшых ступеняў.

9. Мноства сьпісаў як прыклад манойду. Няхай зададзенае мноства сымбалей \mathcal{L} , сьпісам над \mathcal{L} называецца ўпарадкаваная паслядоўнасьць сымбалей з \mathcal{L} . Мноства сьпісаў над \mathcal{L} – гэта манойд адносна апэрацыі канкатэнацыі, адзінкавы элемент – пусты сьпіс. Мноства сьпісаў – гэта прыклад гэтак званай свабоднай канструкцыі, па-іншаму яно называецца свабодным манойд. Свабодны манойд можна задаць на любым мностве.

Гэтыя прыклады паказваюць нам, што катэгорыя – не канечне сукупнасьць мностваў з структурай і стрэлак паміж імі. Троху пазьней мы фармалізуем паняцці абстрактнай і канкрэтнай катэгорый. Нефармальна, канкрэтная катэгорыя – гэта сукупнасьць структураваных мностваў, а абстрактная – любая іншая катэгорыя.

Усе катэгорыі, якія мы разглядалі, – лякальна малыя. Лякальна вялікія катэгорыі сустрануцца нам пазьней.

1.3 Віды марфізмаў

На катэгорнай мове можна апісваць шмат якія знаёмыя нам зьявы аднастайным спосабам. Мы пачнем з простае клясыфікацыі марфізмаў.

Нам ужо знаёмыя адзінкавыя марфізмы, якія ня робяць нічога.

Сьцьверджаньне 1.3.1. *У катэгорыі C для кожнага аб'екта X існуе толькі адзін тоесны марфізм.*

Доказ. Дапусьцім, што акрамя 1_X існуе іншы марфізм $g : X \rightarrow X$ такі, што для любых $Y, Z \in ObC$ і любых $f : Y \rightarrow X$ і $h : X \rightarrow Z$ выконваецца $g \circ f = f$ і $h \circ g = h$, тады мы маем $g = g \circ 1_X = 1_X$. \square

Прыведзены доказ адразу даказвае ўнікальнасьць адзінкі ў групе, манойдзе і іншых структурах, якія можна разглядаць як катэгорыю.

Няхай гэты доказ і трывіяльны, але ён ілюструе як з дапамогай паняцьця катэгорыі мы за адзін раз даказалі сьцьверджаньне для розных структур.

Ці можам мы ахарактарызаваць марфізмы, якія злучаюць розныя аб'екты, але пры гэтым поўнасьцю захоўваюць іхную структуру?

Азначэньне 1.3.1. *Ізамарфізм $f : X \rightarrow Y$ – гэта марфізм, які мае зваротны, то бок існуе такі марфізм $g : Y \rightarrow X$, што $fg = 1_Y$ і $gf = 1_X$.*

Як лёгка праверыць, гэтае азначэньне дае чаканы вынік.

Прыклад 1.3.1. 1. *Для катэгорыі мностваў Ens ізамарфізм – гэта біекцыя.*

2. *Для катэгорыі груп Grp – біекцыйны гомамарфізм.*

3. *Для катэгорыі тапалягічных прастор Top – гомэамамарфізм.*

Такім чынам, група – гэта манойд, у якім усе марфізмы – ізамарфізмы. Ёсьць катэгорнае абагульненьне паняцьця групы, якое абагульняе яго такім самым чынам, якім паняцьце катэгорыі абагульняе паняцьце манойда.

Азначэньне 1.3.2. *Групоід – гэта катэгорыя, усе марфізмы якой – ізамарфізмы.*

Прыклад 1.3.2. *Фундаментальны групоід тапалягічнай прасторы – гэта катэгорыя, элемэнтамі якой ёсьць пункты прасторы, а стрэлкамі – клясы гоматопій шляхоў, якія захоўваюць канцавыя пункты.*

З дапамогай ізамарфізмаў мы можам увесці паняцьце ізаморфных аб'ектаў.

Азначэньне 1.3.3. *Аб'екты $X, Y \in C$ ізаморфныя, калі існуе ізамарфізм $f : X \rightarrow Y$*

Ізаморфнасць аб'ектаў азначае, што па сутнасці з пункту гледжання катэгорыі \mathcal{C} яны не адрозныя.

Прыклад 1.3.3. 1. У катэгорыі \mathbf{Ens} любыя два мноствы той самай магутнасці ізаморфныя.

2. У катэгорыі \mathbf{Top} гамэамарфныя прасторы – ізаморфныя.

Натуральна, паняцце ізаморфнасці залежыць ад таго, якую структуру мы вывучаем. Так, любыя дзве тапалягічныя прасторы аднолькавай магутнасці ізаморфныя як мноствы, але не канечне ізаморфныя як тапалягічныя прасторы (простая і плоскасць – той самай магутнасці, аднак не гамэамарфныя і, значыць, не ізаморфныя як тапалягічныя прасторы).

З абагульненнем біекцыі мы разабраліся, а што з'яўляецца і ін'екцыяй?

Азначэнне 1.3.4. Монамарфізм – гэта марфізм, скарачальны злева, то бок такі $f : X \rightarrow Y$, што для любых $g, h : Z \rightarrow X$ з $fg = fh$ вынікае $g = h$.

Азначэнне 1.3.5. Эпімарфізм – гэта марфізм, скарачальны справа, то бок такі $f : X \rightarrow Y$, што для любых $g, h : Y \rightarrow Z$ з $gf = hf$ вынікае $g = h$.

Прыклад 1.3.4. У катэгорыі \mathbf{Ens} монамарфізмы – гэта ін'екцыі, а эпімарфізмы – сюр'екцыі.

Але монамарфізмы не заўжды ін'екцыі, а эпімарфізмы – сюр'екцыі.

Прыклад 1.3.5. Разгледзім катэгорыю \mathbf{Haus} Гаўсдарфавых тапалягічных прастор. Укладанне $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ – эпімарфізм, але не сюр'екцыя.

1.4 Дуальнасць, пачатковыя і канчатковыя аб'екты

На прыкладзе мона- і эпімарфізму мы ўбачылі пару азначэнняў, якія паўтараюцца практычна даслоўна. Ці можна гэтую амаль даслоўнасць неяк фармалізаваць? Можна! Калі мы ўважліва прыгледзімся да адпаведных азначэнняў, то ўбачым, што яны адрозніваюцца толькі парадкам кампазіцыі, то бок, па сутнасці, толькі кірункам стрэлак.

Азначэньне 1.4.1. Для кожнай катэгорыі C існуе супрацьлеглая, альбо дуальная, катэгорыя C^{op} , вызначаная наступным чынам

1. C^{op} мае тыя самыя аб’екты, што й C .
2. Для кожнага марфізму $f : X \rightarrow Y$ з C вызначаны марфізм $f^{op} : Y \rightarrow X$ з C^{op} , іншых марфізмаў у C^{op} няма.
3. Для кожнага аб’екта X адзінкавая стрэлка – гэта 1_X^{op} .
4. Кампазыцыя вызначаная ў зваротным кірунку, то бок $(fg)^{op} = g^{op}f^{op}$, як лёгка спраўдзіць, для так вызначанай кампазыцыі выконваюцца правілы кампазыцыі з азначэньня катэгорыі.

Прыклад 1.4.1. Для перадпарадку, разгледжанага як катэгорыя, дуальная катэгорыя – гэта супрацьлеглы перадпарадак.

Такім чынам мы бачым, што монамарфізм у катэгорыі C будзе эпімарфізмам у катэгорыі C^{op} . Падобныя паняцці называюць супрацьлеглымі альбо дуальнымі. Можна было б даць адно азначэньне, напрыклад, монамарфізму і сказаць “эпімарфізм – паняцце, дуальнае монамарфізму”, пакінуўшы чытачу працу зьмяніць кірунак стрэлак.

Ашчаджэньне на азначэньнях – гэта ня ўсё, што дае нам дуальнасьць. Калі мы даказваем нейкую катэгорную тэарэму, мы аўтаматычна атрымліваем дуальны вынік, паколькі паняцце дуальнасьці чыста сынтаксычнае і зводзіцца да змены кірунку стрэлак у азначэньнях і доказах.

З дапамогай катэгорных азначэньняў мы можам характарызаваць ня толькі марфізмы, але і аб’екты (сказанае – трывіяльнасьць, нагадаю, што кожнаму аб’екту X адпавядае марфізм 1_X і тэорыю катэгорый можна сфармуляваць наагул не карыстаючыся аб’ектамі, іхную ролю цудоўна выконваюць адзінкавыя стрэлкі).

Азначэньне 1.4.2. Пачатковы аб’ект катэгорыі C – гэта аб’ект, з якога ў любы аб’ект $X \in C$ ідзе роўна адна стрэлка.

Прыклад 1.4.2. У катэгорыі Ens пачатковы аб’ект – гэта пустое мноства.

Азначэньне 1.4.3. Канчатковы аб’ект – гэта аб’ект, дуальны да пачатковага, то бок такі, у які з кожнага аб’екта ідзе роўна адна стрэлка.

Прыклад 1.4.3. У катэгорыі Ens канчатковы аб’ект – гэта мноства з адным элементом.

Наколькі ўнікальныя пачатковы і канчатковы аб’екты? З прыкладаў мы бачым, што ў катэгорыі Ens пачатковы аб’ект – адзін, а канчатковых – бясконца многа, прычым усе яны ізаморфныя.

Тэарэма 1.4.1. *Канчатковы аб’ект вызначаны з дакладнасьцю да ўнікальнага ізамарфізму.*

Доказ. Разгледзім канчатковыя аб’екты $X, Y \in C$.

Паводле азначэньня з аб’екта X у аб’екты X і Y , і з Y у X існуе роўна па адным марфізьме. Марфізм з X у X – гэта 1_X . Назавем іншыя два марфізмы $f : X \rightarrow Y$ і $g : Y \rightarrow X$. Ёхная кампазыцыя $gf : X \rightarrow X$ – марфізм з X у X , але такі марфізм па азначэньні толькі адзін – адзначаны раней 1_X . Значыць, $gf = 1_X$.

Аналягічна, $fg = 1_Y$, а X і Y – ізаморфныя. Прычым па азначэньні канчатковага аб’екта ізамарфізм толькі адзін. \square

Дуальна мы маем аналягічны вынік для пачатковага аб’екта.

Ці можа той самы аб’ект быць адначасова канчатковым і пачатковым? У катэгорыі Ens – не, але ў цэлым – так.

Азначэньне 1.4.4. *Нулявы аб’ект – гэта аб’ект, які адначасова пачатковы і канчатковы.*

Прыклад 1.4.4. *У катэгорыі Grp ёсць нулявы аб’ект. Гэта трывіяльная група.*

1.5 Функтары

Тэорыя катэгорый вучыць нас глядзячы на любую структуру пытаць, як яна суадносіцца зь іншымі падобнымі структурамі, якія апэрацыі можна над імі ажыццяўляць?

А што з самімі катэгорыямі, як выглядаюць функцыі паміж імі?

Відавочна, мы мусім вызначыць дзеяньне падобнай функцыі на аб’ектах і на стрэлках. Акрамя таго мы мусім захаваць структуру, гэта значыць, адзінкавы стрэлкі і кампазыцыю. Гэтага дастаткова.

Азначэньне 1.5.1. *Функтар паміж катэгорыямі A і B – гэта сукупнасьць функцыі $F : ObA \rightarrow ObB$ і для кожнай пары аднаведных гомсэтаў функцыі $F_{XY} : A(X, Y) \rightarrow B(X, Y)$, такіх, што*

1. *Для кожнага $X \in A$ выконваецца $F_{XX}(1_X) = 1_{F(X)}$.*
2. *Для кожнай кампазавальнай пары $f, g \in MorC$ выконваецца $F(gf) = F(g)F(f)$. Тут мы ня сталі пісаць індэксы ў F , як звычайна і робяць.*

Увага на тэму памеру: у гэтым азначэньні функцыі ў агульным дзейнічаюць паміж клясамі.

Паняцьце функтару надзвычай багатае.

Прыклад 1.5.1. 1. На кожнай катэгорыі можна задаць адзінкавы (тоесны, трывіяльны) функтар, які ня робіць нічога, пераводзячы аб'екты і стрэлкі ў самых сябе.

2. Функтар забыцця. Для кожнай катэгорыі структураваных мностваў вызначым функтар, які ставіць у адпаведнасць структуры мноства, на якой яна зададзена (будзем называць такое мноства падсподным). Напрыклад, $U : \text{Top} \rightarrow \text{Ens}$ ставіць у адпаведнасць тапалягічнай прасторы мноства яе пунктаў, а $U : \text{Grp} \rightarrow \text{Ens}$ ставіць у адпаведнасць групе мноства яе элементаў. Марфізмы паміж структурамі функтар забыцця пераводзіць у адпаведныя функцыі паміж мноствамі.

3. Функтар свабоды з катэгорыі мностваў у катэгорыю груп $U : \text{Ens} \rightarrow \text{Grp}$ ставіць у адпаведнасць кожнаму мноству свабодную групу на гэтым мностве, марфізмы вызначаюцца адпаведна (мы яшчэ вернемся да гэтага пытання пры абмеркаванні ўніверсальных уласцівасцяў). Аналягічны функтар існуе для любой свабоднай канструкцыі, напрыклад, для свабоднага манойду.

4. Рэпрэзэнтацыя групы на вэктарнай прасторы. Разгледзім групу G як катэгорыю. Разгледзім таксама катэгорыю вэктарных прастор над полем \mathbb{R} $\text{Vec}_{\mathbb{R}}$. Функтар $F : G \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{R}}$ задае рэпрэзэнтацыю групы G . Сапраўды, $V = F(G) \in \text{Vec}_{\mathbb{R}}$ – канкрэтная вэктарная прастора. $F(1) = 1_{F(G)} = 1_V$. Для пары элементаў групы $f, g \in G$ маем $F(gf) = F(g)F(f)$.

5. Аналягічна задаецца дзеянне групы на мностве, і наагул на любым аб'екце нейкай катэгорыі.

6. Функтар паміж двума перадпарадкамі – гэта манатонная функцыя, то бок функцыя, якая захоўвае перадпарадак.

7. Функтар паміж дзвюма групамі – гэта гомамарфізм груп.

З дапамогай функтараў мы можам вызначыць ізаморфныя катэгорыі, аналягічна таму як мы вызначалі ізаморфныя аб'екты з дапамогай стрэлак.

Азначэнне 1.5.2. Катэгорыі C і D называюцца ізаморфнымі, калі існуе пара функтараў $F : C \rightarrow D, G : D \rightarrow C$ такіх, што $GF = 1_C$ і $FG = 1_D$.

Паняцце ізамарфізму катэгорый ня надта карыснае, каб фармалізаваць, калі дзве катэгорыі па сутнасці не адрозніваюцца, патрэбнае больш агульнае паняцце.

У некаторых выпадках карысна разглядаць функтары, якія дзейнічаюць не з катэгорыі, а з дуальнай ёй.

Азначэньне 1.5.3. Функтар, які дзейнічае з дуальнай катэгорыі, называецца контраварыянтным (адносна C): $F : C^{op} \rightarrow D$.

Звычайны функтар называецца варыянтным.

Як лёгка заўважыць, контраварыянтны функтар зьмяняе кірунак кампазыцыі.

Прыклад 1.5.2. 1. Існуе функтар з катэгорыі тапалягічных прастор у катэгорыю часткова ўпарадкаваных мностваў $\mathcal{O} : \text{Top} \rightarrow \text{Poset}$, які кожнай тапалягічнай прастору ставіць у адпаведнасьць мноства яе адкрытых падмностваў, упарадкаваных паводле ўключэньня, а кожнай непарыўнай функцыі $f : X \rightarrow Y$ ставіць у адпаведнасьць функцыю мностваў $f^{-1} : \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$, якая пераводзіць адкрытае мноства ў ягоны правобраз (які будзе адкрытым, таму што f – непарыўная).

2. Аналягічна, функтар $C : \text{Top} \rightarrow \text{Poset}$ пераводзіць тапалягічную прастору ў мноства яе замкнёных падмностваў.

3. Для малой катэгорыі C функтар $F : C^{op} \rightarrow \text{Ens}$ называецца перадпучком.

4. Перадпучок на тапалягічнай прастору T – гэта функтар $F : \mathcal{O}(T)^{op} \rightarrow \text{Ens}$. Прыклад такога функтара – перадпучок непарыўных рэчаісных функцыяў, які ставіць у адпаведнасьць кожнаму $U \in \mathcal{O}(C)$ мноства непарыўных рэчаісназначных функцыяў $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, а на стрэлках дзейнічае звужэньнем (то бок для $U, V \in \mathcal{O}(C)$, такіх, што $U \subseteq V$, і $f \in V$ $F(U \subseteq V)(f) = f|_U$).

Прыклад 1.5.3. Функтар, які ставіць у адпаведнасьць кожнай вэктарнай прастору дуальную – контраварыянтны.

Назавем наш функтар $(-)^* : \text{Vec}_{\mathbb{R}}^{op} \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{R}}$.

Вэктарную прастору V ён пераводзіць у V^* .

Элемэнт прастору V^* – гэта лінейны функцыянал, то бок лінейная функцыя з прастору V у поле, над якім зададзена вэктарная прастора.

Марфізм $f : V \rightarrow W$ наш функтар пераводзіць у марфізм $f^* : W^* \rightarrow V^*$, які дзейнічае прадкампазыцыяй на элемэнтах W^* , то бок для $\omega \in W^*$ мы маем $\omega : W \rightarrow \mathbb{R}$ і функтар дзейнічае так:

$$(f)^*(\omega) = f^*(\omega) = \omega \circ f : V \rightarrow \mathbb{R}.$$

Функтары, як і звычайныя функцыі, могуць мець некалькі аргумэнтаў. Па кожным з аргумэнтаў функтар можа мець сваю варыянтнасьць.

Каб разгледзець функтары многіх зменных нам спатрэбіцца паняцце здабытку катэгорый.

Азначэньне 1.5.4. Здабыткам катэгорый C і D называецца катэгорыя $C \times D$ такая, што

1. Яе аб'екты – гэта ўпарадкаваныя пары аб'ектаў з C і D : $(c, d) \in \text{Ob}(C \times D)$, дзе $c \in C$ і $d \in D$.
2. Яе марфізмы – гэта ўпарадкаваныя пары марфізмаў з C і D .
3. Кампазыцыя і адзінкавыя марфізмы вызначаныя па кампанэнтах.

Прыклад 1.5.4. Важным прыкладам функтара з двума аргументамі ёсць гом-функтар, які можна задаць на любой лякальна малой катэгорыі C .

$$C(-, -) : C^{\text{op}} \times C \rightarrow \text{Ens}$$

Гэты функтар пераводзіць пару аб'ектаў (a, b) у адпаведны гомсэт, а на марфізмы дзейнічае прад- і паслякампазыцыяй.

Для $f : a' \rightarrow a$, $g : b \rightarrow b'$ і $h \in C(a, b)$ маем

$$C(f, g) : C(a, b) \rightarrow C(a', b'),$$

$$C(f, g)(h) = g \circ h \circ f.$$

Прыклад 1.5.5. У гом-функтары з двума аргументамі можна зафіксаваць значэнне аднаго з аб'ектных аргументаў і атрымаць каварыянтны і контраварыянтны гом-функтары $C(c, -)$ і $C(-, c)$.

Па-іншаму гом-функтары называюцца рэпрэзэнтаванымі функтарамі. У выпадку аднааргументных гом-функтараў гавораць, што $C(c, -)$ і $C(-, c)$ рэпрэзэнтаваныя аб'ектам c .

1.6 Падкатэгорыі

Разьбіваць аб'екты вывучэння на часткі бывае надзвычай карысна, фізікі не дадуць падмануць. Таксама як мы вызначаем падмноства, падпрасторы, падгрупы альбо падальгебры, можна вызначыць і падкатэгорыю.

Азначэнне 1.6.1. Падкатэгорыя катэгорыі C – гэта такая катэгорыя D , што яе сукупнасці аб'ектаў і марфізмаў – часткі сукупнасцяў аб'ектаў і марфізмаў катэгорыі C ($D_0 \subset C_0$ і $D_1 \subset C_1$). Прычым калі $X \in D_0$, то $1_X \in D_1$, а калі $f, g \in D_1$, то $f \circ g \in D_1$ калі $f \circ g$ існуе ў C .

Прыклад 1.6.1. 1. Катэгорыя канцых мностваў Fin – падкатэгорыя катэгорыі мностваў Ens .

2. Катэгорыя Абэлевых груп Ab – падкатэгорыі катэгорыі груп Grp .

3. Катэгорыя Гаўсдарфавых тапалягічных прастор Haus – падкатэгорыя катэгорыі тапалягічных прастор Top .

1.7 Натуральныя пераўтварэньні

Фармалізацыя паняцця натуральнасьці – гэта тое, дзеля чаго першапачаткова тэорыя катэгорый была створаная.

У матэматыцы мы часта сустракаем нейкія канструкцыі, якія выглядаюць натуральнымі ў тым сэнсе, што не патрабуюць адвольнага выбару.

Напрыклад, як мы ведаем, усе концыя вэктарныя прасторы над дадзеным полем той самай разьмернасьці – ізаморфныя. Аднак, калі мы прыгледзімся да гэтага пытаньня бліжэй, то заўважым, што ізамарфізм можа быць розных тыпаў.

Так, калі мы возьмем падвойнаспалучаную прастору, то ізамарфізм паміж V і V^{**} можна прад’явіць, не ажыццяўляючы адвольнага выбару базісу.

Менавіта, элемент прасторы V – гэта вэктар $v \in V$.

Элемент прасторы V^{**} – гэта функцыя $\nu : V^* \rightarrow \mathbb{K}$, якая пераводзіць элемент прасторы V^* у элемент поля \mathbb{K} , над якім гэтая прастора зададзеная.

У сваю чаргу, элемент прасторы V^* – гэта функцыя $\omega : V \rightarrow \mathbb{K}$.

Як мы можа атрымаць з вэктара v функцыю ν ?

А вельмі проста, нашая функцыя будзе дзейнічаць так: $\nu(\omega) = \omega(v)$. То бок, мы проста пераводзім функцыю ω ў лік, прымяняючы яе да зададзенага вэктара.

Вы заўважылі ў працэсе нейкі выбар базісу ці іншую адвольнасьць? Я не. Падобныя адпаведнасьці называюцца натуральнымі.

А зараз спытаем сябе, ці можам мы падобным чынам пабудаваць ізамарфізм паміж прасторами V і V^* ? Не, ня можам. Як бы мы ні спрабавалі, нам спатрэбіцца выбраць нейкі базіс, адпаведнасьць ня мае натуральнага характару.

Паспрабуем фармалізаваць намацанае намі паняццё. Па-першае, мы маем эндафунктар (то бок, функтар, які дзейнічае з катэгорыі ў яе ж) $(-)^{**} : \text{Vec}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{K}}$. Па-другое, мы выкарыстоўвалі функцыю эвалюацыі (вылічэньня) ev , якая бярэ, і кожнаму элементу $v \in V$ ставіць у адпаведнасьць функцыю ev_v , якая дзейнічае на прасторы V^* , прымяняючы элементы гэтай прасторы да вэктара v .

Спачатку паглядзім, як дзейнічае функтар $(-)^{**}$. Прастору V ён пераводзіць у V^{**} , а стрэлку $f : V \rightarrow W$ у стрэлку $f^{**} : V^{**} \rightarrow W^{**}$, якая дзейнічае на элементах V^{**} такім чынам ($\nu \in V^{**}$, $\omega \in W^*$):

$$(f^{**}(\nu))(\omega) = \nu(\omega \circ f).$$

Як гэта суадносіцца зь дзеяньнем ev ? Паспрабуем намаляваць дыяграму, бо функцый яўна стала замнога, каб апісваць іхнае дзеяньне словамі альбо формуламі.

$$\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{ev} & V^{**} \\
\downarrow f & & \downarrow f^{**} \\
W & \xrightarrow{ev} & W^{**}
\end{array}$$

Аказваецца, што у якім парадку мы б не прымянялі функцыі з дыяграмы, мы атрымаем той сам вынік. То бок для вэктара $v \in V$ і $\omega \in W^*$ мы маем

$$f^{**}(ev(v))(\omega) = ev(v)(\omega \circ f) = \omega(f(v))$$

і

$$ev(f(v))(\omega) = \omega(f(v)).$$

Якім бы шляхам па дыяграме мы ня рухаліся, пераводзячы элемент з V у W^{**} , вынік атрымліваецца той самы. Каб апісаць падобную сытуацыю – вынік прымянення функцыі не залежыць ад выбранага на дыяграме шляху – гавораць, што дыяграма камутуе.

Гэта значыць, што наш функтар $(-)^{**}$ узаемадзейнічае нейкім натуральным чынам з функцыяй ev .

Калі мы дастаткова доўга падумаем над тым, што намалёвана на нашай карцінцы, то мы ўбачым, што справа мы бачым вынік дзеяння функтару $(-)^{**}$, а злева – адзінкавага (альбо тоеснага) функтару.

Азначэнне 1.7.1. Няхай зададзеныя два функтары, якія дзейнічаюць між тымі самымі катэгорыямі $F, G : C \rightarrow D$.

Натуральным пераўтварэннем паміж гэтымі функтарамі называецца набор стрэлак у D (яны называюцца кампанэнтамі натуральнага пераўтварэння), для кожнага аб'екта $c \in ObC$ па адной стрэлцы $\alpha_c : F(c) \rightarrow G(c)$, такі, што для кожнай стрэлкі з C $f : c \rightarrow c'$ дыяграма

$$\begin{array}{ccc}
F(c) & \xrightarrow{\alpha_c} & G(c) \\
\downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\
F(c') & \xrightarrow{\alpha_{c'}} & G(c')
\end{array}$$

камутуе.

Дыяграма з азначэння кажа нам, што $G(f) \circ \alpha_c = \alpha_{c'} \circ F(f)$.

Такім чынам, ev з нашага матывацыйнага прыкладу задае натуральнае пераўтварэнне з тоеснага функтару 1_{Vec_K} у функтар $(-)^{**}$. Больш за тое, гэтае натуральнае пераўтварэнне – натуральны ізамарфізм.

Азначэнне 1.7.2. Натуральны ізамарфізм – гэта натуральнае пераўтварэнне, кожны кампанэнт якога – ізамарфізм.

Прыклад 1.7.1. 1. Для кожнага функтару F існуе тоеснае (адзінкавае, трывіяльнае) натуральнае пераўтварэнне 1_F , якое, натуральна, ёсць натуральным ізамарфізмам.

2. Функтори адкрытых і замкнєных мностваў $\mathcal{O}, \mathcal{C} : \text{Top} \rightarrow \text{Poset}$ натуральна ізаморфныя. Кампанєнты натуральнага ізамарфізму пераводзяць кожнае мноства ў ягонае дапаўнєннє. Камутацыйнасьць дыяграмы натуральнасьці вынікае з таго, што ўзяцьце дапаўнєннє і апэрацыя правобраза камутуюць.

3. Возьмем дзьве вэктарныя рэпрэзэнтацыі групы G : ρ_1 і ρ_2 на прасторы V . Натуральнае пераїтварєннє паміж імі – гэта такі лінейны апэратар T на V , што для любога $g \in G$ мае месца $\rho_2(g) \circ u = u \circ \rho_1(g)$. Такім чынам, у гэтым выпадку натуральнае пераїтварєннє – гэта гомамарфізм рэпрэзэнтацый, як і варта было чакаць.

1.8 Категорії функтараў

Натуральныя пераїтварєннї – гэта марфізмы паміж функтарамі. Як мы ўжо заўважылі, існуе тоеснае натуральнае пераїтварєннє. Такім чынам, мы ў кроку ад таго, каб паглядзець на сукупнасьць функтараў з катэгорыі \mathcal{C} у катэгорыю \mathcal{D} як на катэгорыю.

Чаго нам бракуе? Кампазыцыі натуральных пераїтварєннєў. Няхай мы маем тры функтары $F, G, H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ і два натуральныя пераїтварєннї $\alpha : F \rightarrow G$ і $\beta : G \rightarrow H$. Давайце паспрабуем намаляваць дыяграму. Возьмем у катэгорыі \mathcal{C} аб'екты c і c' .

$$\begin{array}{ccccc} F(c) & \xrightarrow{\alpha_c} & G(c) & \xrightarrow{\beta_c} & H(c) \\ \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) & & \downarrow H(f) \\ F(c') & \xrightarrow{\alpha_{c'}} & G(c') & \xrightarrow{\beta_{c'}} & H(c') \end{array}$$

Мы хочам атрымаць натуральнае пераїтварєннє $\beta \circ \alpha : F \rightarrow H$. Што, калі ў якасьці ягоных кампанэнтаў узяць кампазыцыю кампанэнтаў пераїтварєннєў α і β ?

Нам трэба праверыць, што ўмова натуральнасьці выкананая. Кожны з квадратаў дыяграмы – камутацыйны, то бок $H(f) \circ \beta_c = \beta_{c'} \circ G(f)$ і $G(f) \circ \alpha_c = \alpha_{c'} \circ F(f)$.

Роўнасьць $(\beta_{c'} \circ \alpha_{c'}) \circ F(f) = H(f) \circ (\beta_c \circ \alpha_c)$ відавочная.

Асацыяцыйнасьць такой кампазыцыі натуральных пераїтварєннєў вынікае з асацыяцыйнасьці кампазыці функцый.

Азначєннє 1.8.1. Няхай зададзеныя дзьве катэгорыі \mathcal{C} і \mathcal{D} . Катэгорыяй функтараў з \mathcal{C} у \mathcal{D} называецца катэгорыя $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$, аб'ектамі якой ёсьць усе функтары з \mathcal{C} у \mathcal{D} , а стрэлкамі – натуральныя пераїтварєннї паміж імі з кампазыцыяй, вызначанай як кампазыцыя функцый-кампанэнтаў.

Што можна сказаць пра памер такой катэгорыі? Яна можа быць ня проста вялікай, а надзвычай вялікай. Возьмем для прыкладу катэгорыю мностваў Ens і катэгорыю з двума аб'ектамі 2_I , у якой два супрацьлеглыя нетрывіяльныя марфізмы $(0 \xleftarrow{\frac{01}{10}} 1)$. Каб задаць функтар з Ens у 2_I трэба выбраць для кожнага мноства з Ens аб'ект-вобраз у 2_I . Стрэлкі паміж мноствамі з аднаго правобраза пераходзяць у адпаведную адзінкавую стрэлку, а стрэлкі паміж мноствамі з розных правобразаў – у адпаведную стрэлку паміж аб'ектамі 2_I . Колькі такіх функтараў існуе? Столькі, колькі падмностваў у $Ob(Ens)$, то бок столькі, колькі падмностваў ва ўніверсуме U . Такім чынам, падобная катэгорыя сама не змяшчаецца ва ўніверсум U і патрабуе большага ўніверсуму.

Прыклад 1.8.1. 1. Катэгорыя функтараў з групы G у катэгорыю вэктарных прастораў над полем \mathbb{K} $Ves_{\mathbb{K}}$ – гэта катэгорыя \mathbb{K} -вэктарных рэпрэзэнтацый групы G .

2. Для малой катэгорыі C катэгорыя Ens^C – гэта катэгорыя перадпучкоў, па-іншаму яна пазначаецца \hat{C} .

1.9 Азначэнні з дапамогай дыяграмаў

У гэтай і наступнай частках абмяркуем больш падрабязна выкарыстаньне камутацыйных дыяграм у тэорыі катэгорый.

Нефармальна, дыяграма – гэта набор аб'ектаў катэгорыі і марфізмаў паміж імі. Камутацыйная дыяграма – гэта такая дыяграма, у якой кампазыцыі марфізмаў з пачаткам і канцом у тых самых аб'ектах не залежаць ад выбранага шляху.

Разгледзім, напрыклад, такую камутацыйную дыяграму

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ \downarrow h & & \downarrow k & & \downarrow l \\ U & \xrightarrow{m} & V & \xrightarrow{n} & W \end{array}$$

Камутацыйнасьць гэтае дыяграмы азначае, што $l \circ g \circ f = n \circ k \circ f = n \circ m \circ h$, але таксама і $k \circ f = m \circ h$, і гэтак далей.

Камутацыйныя дыяграмы зручна выкарыстоўваць пры аналізе суадносінаў паміж марфізмамі і аб'ектамі ў катэгорыі, у доказ і азначэннях.

Для прыкладу, выразім на мове камутацыйных дыяграм умову асацыяцыйнасьці з азначэння катэгорыі $((h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f))$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g \circ f & \downarrow g \\ & & Z \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \searrow h \circ g \\ & \downarrow g & \\ & Z & \xrightarrow{h} V \end{array}$$

Справіўшыся з гэтай задачай, давайце паспрабуем даць на дыяграмнай мове якое-небудзь знаёмае азначэньне. Напэўна, найпрасьцейшы альгебраічны аб'ект – гэта манойд. Як ужо ўспаміналася, манойд – гэта мноства з зададзенай на ім бінарнай асацыяцыйнай апэрацыяй і вылучаным адзінкавым элемэнтам.

Для заданьня бінарнай апэрацыі нам спатрэбіцца Дэкартаў здабытак мностваў (апэрацыя задаецца на пары элемэнтаў, а вызначэньне асацыяцыйнасьці патрабуе трох элемэнтаў), і мноства з адным элемэнтам (назавем яго проста 1), каб выбраць адзінку манойда.

Такім чынам, мы выбіраем мноства M (аб'ект у катэгорыі Ens), функцыю $\mu : M \times M \rightarrow M$, якая будзе прадстаўляць нашу апэрацыю, і функцыю $\eta : 1 \rightarrow M$.

Як працуе апэрацыя, ясна: яна бярэ два элемэнты і робіць зь іх адзін. А як працуе выбар адзінкавага элемэнта? Ён бярэ адзіны элемэнт мноства 1 і пераводзіць яго ў фіксаваны элемэнт мноства M , які мы і будзем называць адзінкай манойду M .

Засталося выразіць дыяграмамі асацыяцыйнасьць апэрацыі і тое, што адзінка сапраўды паводзіць сябе як адзінка адносна нашай апэрацыі.

Прыклад 1.9.1. Манойдам мы называем аб'ект M катэгорыі Ens разам з стрэлкамі $\mu : M \times M \rightarrow M$ і $\eta : 1 \rightarrow M$ такімі, што наступныя дыяграмы камутуюць:

$$\begin{array}{ccccc} M \times M \times M & \xrightarrow{1_M \times \mu} & M \times M & & M & \xrightarrow{\eta \times 1_M} & M \times M & \xleftarrow{1_M \times \eta} & M \\ & \downarrow \mu \times 1_M & \downarrow \mu & & \searrow 1_M & & \downarrow \mu & & \swarrow 1_M \\ & M \times M & \xrightarrow{\mu} & M & & & M & & \end{array}$$

Перакладаючы дыяграмы на мову формул, атрымліваем

1. Асацыяцыйнасьць: для элемэнтаў $a, b, c \in M$ маем $\mu(a, \mu(b, c)) = \mu(\mu(a, b), c)$.

2. Адзінка: для элемэнтаў $a, b \in M$ маем $\mu(\eta(1), a) = a$ і $\mu(b, \eta(1)) = b$.

Азначэньні на мове дыяграм карысныя ня толькі сваёй нагляднасьцю, але і лёгкасьцю перанясеньня з катэгорыі ў катэгорыю.

Так, для азначэньня манойду нам спатрэбіліся толькі Дэкартаў здабытак і мноства з адным элемэнтам, якое паводзіць сябе як адзінка адносна Дэкартава здабытку і дазваляе выбраць адзінкавы элемэнт у мностве.

А што, калі замест катэгорыі Ens мностваў мы возьмем катэгорыю Ab Абэлевых груп?

Тут нам давядзецца троху папрацаваць. Асноўнае пытаньне, што мы хочам лічыць здабыткам Абэлевых груп?

1.10 Катэгорны здабытак

Спачатку прааналізуем з катэгорнага пункту гледжаньня канструкцыю Дэкартавага здабытку.

У чым сутнасьць здабытку двух мностваў, як мы яго прымяняем?

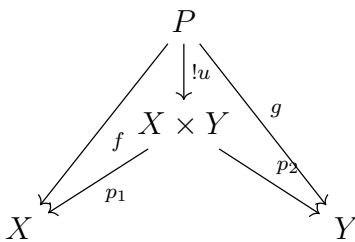
Для мностваў $X, Y \in \mathbf{ObEns}$ мы маем нейкі аб'ект $X \times Y$, з элемэнтаў якога мы можам атрымаць ягоныя складовыя часткі – элемэнт X і элемэнт Y . Фармалізуючы гэта, скажам, што існуюць праекцыі $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ і $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$.

Калі для нейкага мноства P мы маем пару функцый $f : P \rightarrow X$, $g : P \rightarrow Y$, то існуе функцыя $u : P \rightarrow X \times Y$, такая, што $p_1 \circ u = f$ і $p_2 \circ u = g$. Элемэнту $p \in P$ гэтая функцыя ставіць у адпаведнасьць пару $(f(p), g(p)) \in X \times Y$.

Існаваньне функцыі $u : P \rightarrow X \times Y$ для кожнай пары функцый $f : P \rightarrow X$ і $g : P \rightarrow Y$ азначае, што $X \times Y$ зьмяшчае ўсе магчымыя пары $\{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$. Калі $X \times Y$ не зьмяшчае ніякай іншай інфармацыі, такая функцыя – адзіная.

Цяпер мы гатовыя даць катэгорнае – у тэрмінах марфізмаў – азначэньне здабытку, якое будзе мець сэнс ня толькі ў катэгорыі мностваў і ня будзе вызначаць канкрэтную канструкцыю.

Азначэньне 1.10.1. *Здабыткам двух аб'ектаў X, Y катэгорыі \mathcal{C} называецца аб'ект $X \times Y$ і пара марфізмаў $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ і $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ такія, што для любога $P \in \mathcal{C}$ і пары марфізмаў $f : P \rightarrow X$ і $g : P \rightarrow Y$ існуе адзіны марфізм $u : P \rightarrow X \times Y$ такі, што $p_1 \circ u = f$ і $p_2 \circ u = g$. Іншымі словамі, існуе адзіны марфізм u такі, што дыяграма ніжэй камутуе*



Ці заўжды існуе так вызначаны здабытак? Не, ёсць катэгорыі, у якіх здабыткі не існуюць, альбо існуюць не для ўсіх элемэнтаў.

Тое, што нам трэба вынесці з прыведзенага прыкладу – гэта ідэя задаваць аб'ект не канструкцыяй, а ягонымі так званымі ўнівэрсальнымі ўласцівасцямі.

Каб задаць унівэрсальную ўласцівасць мы спачатку выбіраем нейкую ўласцівасць (як правіла гэта наяўнасьць нейкіх марфізмаў з аб'екта,

альбо ў яго), выбіраем спосаб параўнаньня аб'ектаў паміж сабой (напрыклад, наяўнасьць марфізму паміж двума аб'ектамі), а потым выбіраем найлепшы, унівэрсальны, аб'ект, той, які зададзеным чынам параўноўваецца з усімі іншымі аб'ектамі катэгорыі.

Прааналізуем з гэтага пункту гледжаньня азначэньне канцага аб'екта. Уласьцівасьць – гэта проста ўласьцівасьць быць аб'ектам катэгорыі. Спосаб параўнаньня: наяўнасьць стрэлкі паміж двума аб'ектамі, прычым лепшы – той аб'ект, які служыць канцом стрэлкі. Унівэрсальны аб'ект – такі, у які ідзе роўна адна стрэлка з кожнага аб'екта катэгорыі.

Для здабытку ўласьцівасьць – гэта мець дзьве стрэлкі з аб'екта ў два зададзеныя аб'екты X і Y . Параўнаньне – аналягічна як для канцага аб'екта – наяўнасьці стрэлкі паміж аб'ектамі, пры чым лепшы той, які ёсьць канцом стрэлкі. З тым, што цяпер мы параўноўваем ня проста аб'екты, а аб'екты, зь якіх ідуць дзьве стрэлкі ў X і Y . Унівэрсальны – той аб'ект з парай стрэлак у X і Y , у які ёсьць роўна па адной стрэлцы зь любога аб'екта з парай стрэлак у X і Y .

1.11 Мультыкатэгорыі

Перад тым, як займацца Абэлевымі групамі, разгледзім больш просты выпадак, а менавіта вэктарныя прасторы. Няхай мы маем катэгорыю $Vec_{\mathbb{K}}$ вэктарных прастор над полем \mathbb{K} . У якасьці здабытку прастор $V, W \in Vec_{\mathbb{K}}$ возьмем звычайны тэнзарны здабытак $V \otimes W$. Нагадаю ягоную канструкцыю.

Пачнем з школьнай – некатэгорнай – канструкцыі. Нефармальна прастора $V \otimes W$ – гэта вэктарная прастора, якая мае ў якасьці базісу мноства ўсіх пар $\{v \otimes w | v \in B_V, w \in B_W\}$, дзе B_V і B_W – выбраныя базісы V і W . Элемэнты гэтай прасторы называюцца тэнзарамі.

Тэнзарны здабытак двух адвольных вэктараў задаецца празь іхны расклад на базісы. Лёгка паказаць, што функцыя $-\otimes- : V \times W \rightarrow V \otimes W$ ($V \times W$ – звычайны Дэкартаў здабытак) білінейная.

Можна даць незалежнае ад базісу азначэньне тэнзарнага здабытку як фактар-прасторы.

У тэрмінах унівэрсальных уласьцівасьцяў тэнзарны здабытак задаецца наступным чынам.

Азначэньне 1.11.1. *Тэнзарным здабыткам двух вэктарных прастораў V і W называецца аб'ект $V \otimes W$, у які ёсьць білінейная функцыя $-\otimes- : V \times W \rightarrow V \otimes W$ такая, што для любой іншай білінейнай функцыі $b : V \times W \rightarrow U$ існуе адзіная лінейная функцыя $u : V \otimes W$ такая, што дыяграма ніжэй камутуе*

$$\begin{array}{ccc}
 V \times W & \xrightarrow{b} & U \\
 \downarrow -\otimes- & \nearrow !u & \\
 V \otimes W & &
 \end{array}$$

па-іншаму гавораць, што марфізм b адназначна фактарызуецца пра марфізм $-\otimes-$.

Як і для звычайнага здабытку лёгка паказаць, што такі здабытак існуе адзін з дакладнасьцю да адзінага ізамарфізму. Лёгка паказаць таксама, што азначэньні з дапамогай базісаў і з дапамогай фактар-прасторы адпавядаюць гэтай унівэрсальнай уласцівасьці і такім чынам, эквівалентныя.

Што кепска з нашым унівэрсальным азначэньнем? Кепска тое, што яно ня поўнасьцю катэгорнае ў тым сэнсе, што частка структуры, якую яна выкарыстоўвае ня выражаная непасрэдна ў тэрмінах ужываных катэгорый. Гаворка пра білінейныя функцыі. Нагадаю, што мы разглядаем аб'екты $Ves_{\mathbb{K}}$, марфізмы паміж якімі – лінейныя функцыі, і раптам нам спатрэбіўся яшчэ адзін від марфізмаў, азначэньне якога паходзіць з разглядаанай прадметнай галіны – білінейныя функцыі. Натуральна, так можна жыць, але ці можам мы даць больш катэгорнае азначэньне, у якім усё будзе фармалізавана катэгорнай мовай?

Чаго нам не хапае? Нам патрэбныя полілінейныя функцыі. У звычайнай катэгорыі мы можам задаць функцыі некалькіх аргументаў, калі існуюць здабыткі (такая функцыя – гэта проста $f : X \times Y \rightarrow Z$), аднак для выпадку катэгорыі $Ves_{\mathbb{K}}$ такая функцыя будзе лінейнай на $X \times Y$, а не білінейнай.

Нам магло б дапамагчы ўбудаванае ў катэгорыю паняццё функцыі некалькіх аргументаў. Катэгорныя структуры з стрэлкамі, дамэн якіх – сьпіс аб'ектаў, існуюць і называюцца мультыкатэгорыямі.

Кампазыцыя вызначаная дакладна так, як можна было б чакаць: функцыя n аргументаў можа быць скамбінаваная з n функцыяў.

Азначэньне 1.11.2. Мультыкатэгорыя C складаецца з наступных аб'ектаў:

1. Сукупнасьць аб'ектаў C_0 .
2. Сукупнасьць мультыстрэлак (мультымарфізмаў) C_1 .
3. Адлюстраваньня, якое для кожнай мультыстрэлкі задае яе крыніцу $s : C_1 \rightarrow (C_0)^*$, дзе $(C_0)^*$ – свабодны манойд на C_0 (то бок мноства концых сьпісаў на C_0 , пусты сьпіс уключаны).
4. Адлюстраваньня, якое для кожнай мультыстрэлкі задае яе прызначэньне $t : C_1 \rightarrow C_0$.

Мультыстрэлка запісваецца як $f : X_1, \dots, X_n \rightarrow Y$.

Сукупнасьць мультыстрэлак з X_1, \dots, X_n у Y пазначаецца $C(X_1, \dots, X_n; Y)$ альбо $\text{Hom}_C(X_1, \dots, X_n; Y)$.

На зададзеных вышэй аб'ектах вызначаныя наступныя апэрацыі:

1. Адлюстраваньне $1_- : C_0 \rightarrow C_0$ вызначае для кожнага $X \in C_0$ адзінкавую стрэлку 1_X .

2. Для кожнага набору лікаў $n, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ і аб'ектаў $Y, X_i, X_i^j \in C_0$ вызначаная кампазыцыя

$$\circ : C(X_1, \dots, X_n; Y) \times C(X_1^1, \dots, X_1^{k_1}; X_1) \times \dots \times C(X_n^1, \dots, X_n^{k_n}; X_n) \rightarrow C(X_1^1, \dots, X_1^{k_1}, \dots, X_n^1, \dots, X_n^{k_n}; Y),$$

якая запісваецца $f \circ (f_1, \dots, f_n)$.

Для так зададзенай структуры выконваюцца наступныя аксыёмы – у кожным выпадку, калі аднаведныя кампазыцыі вызначаныя:

1. Адзінкавасьць: $f \circ (1_{X_1}, \dots, 1_{X_n}) = f = 1_Y \circ f$.

2. Асацыяцыйнасьць: $f \circ (f_1 \circ (f_1^1, \dots, f_1^{k_1}), \dots, f_n \circ (f_n^1, \dots, f_n^{k_n})) = (f \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (f_1^1, \dots, f_1^{k_1}, \dots, f_n^1, \dots, f_n^{k_n})$.

Запісаныя формуламі аксыёмы мультыкатэгорый выглядаюць ня надта чытэльна (хаця тых, хто бачыў тэнзары, пужаць не павінныя).

Азначэньне 1.11.3. Стрэлка з даманам з аднаго аб'екта называецца унарнай.

Прыклад 1.11.1. 1. Мультыкатэгорыя, у якой усе стрэлкі ўнарныя – гэта звычайная катэгорыя.

2. Мультыкатэгорыя $MV_{\text{сж}}$ вэктарных прастор над полем K з полілінейнымі адлюстраваньнямі.

Маючы ў руках новы інструмэнт, мы можам даць натуральнае азначэньне тэнзарнага здабытку.

Азначэньне 1.11.4. Тэнзарным здабыткам аб'ектаў X і Y мультыкатэгорыі C называецца такі аб'ект $X \otimes Y \in C$ разам з мультымарфізмам $-\otimes- : X, Y \rightarrow X \otimes Y$, што любы мультымарфізм $f : X, Y \rightarrow Z$ адназначна фактарызуецца праз $-\otimes- : X, Y \rightarrow X \otimes Y$, то бок для любога f існуе адзіны мультымарфізм $u : X \otimes Y \rightarrow Z$ такі, што дыяграма ніжэй камутуе:

$$\begin{array}{ccc} X, Y & \xrightarrow{f} & Z \\ \downarrow -\otimes- & \nearrow u & \\ X \otimes Y & & \end{array}$$

Паспрабуем з гэтага агульнага азначэньня атрымаць канкрэтнае азначэньне тэнзарнага здабытку вэктарных прастораў.

Нам зададзеныя дзве прасторы $V, W \in MVes_{\mathbb{K}}$. Знойдзем прыклад $V \otimes W$ і білінейнае адлюстраваньне $-\otimes- : V, W \rightarrow V \otimes W$, якія адпавядаюць азначэнню.

Возьмем адвольнае білінейнае адлюстраваньне $f : V, W \rightarrow Z$.

Па азначэнні для f існуе (лінейнае) $u : V \otimes W \rightarrow Z$ такое, што $f(v, w) = u(v \otimes w)$.

У якасці першай версіі $X \otimes Y$ напрошваецца прастора фармальных лінейных камбінацый пар $(v, w) | v \in V, w \in W$, а $u(x, y) = f(x, y)$. Аднак, $-\otimes-$ мусіць быць білінейным адлюстраваннем, гэта значыць, што, напрыклад, $kv \otimes w = k(v \otimes w) = v \otimes kw$. Такім чынам, нам трэба фактарызаваць нашу прастору фармальных камбінацый па адпаведных суадносінах:

$$\begin{aligned}(kv, w) &= k(v, w) = (v, kw), \\ (v + v', w) &= (v, w) + (v', w), \\ (v, w + w') &= (v, w) + (v, w').\end{aligned}$$

Паколькі f таксама білінейная, то пасля такой фактарызацыі u застаецца добра вызначаным. u адназначна працягваецца па лінейнасці на ўсю прастору $V \otimes W$.

Заўважу, што прастора фармальных камбінацый – чарговы прыклад свабоднай канструкцыі.

Прыведзеная на пачатку канструкцыя з выкарыстаньне базісу таксама адпавядае азначэнню здабытку, а, значыць, ізаморфная канструкцыі фактарызаваанай прасторы фармальных камбінацый пар.

Прывядзем прыклады яшчэ колькі мультыкатэгорый і адпаведных тэнзарных здабыткаў.

Прыклад 1.11.2. 1. Мультыкатэгорыя Абэлевых груп MAb з марфізмамі – полілінейнымі адлюстраваннямі ($f(g + h, k + l) = f(g, k) + f(g, l) + f(h, k) + f(h, l)$).

Тэнзарны здабытак G, H – фактар свабоднай Абэлевай групы на $G \times H$ (то бок, фармальных лінейных камбінацый адпаведных пар) па $(g + g', h) = (g, h) + (g', h)$ і $(g, h + h') = (g, h) + (g, h')$.

2. Для камутацыйнага колца R разгледзім мультыкатэгорыю $R\text{-модуляў}$ $MRMod$ з марфізмамі – R -лінейнымі адлюстраваннямі.

Тэнзарны здабытак модуляў $A, B \in MRMod$ $A \otimes_R B$ будзеца аналягічна, як фактар тэнзарнага здабытку падсподных Абэлевых груп $A \otimes B$ па суадносінах $(a, rb) = (ra, b)$.

1.12 Унутраныя маноіды

Зараз, маючы ў сваіх руках азначэньні тэнзарных здабыткаў у некалькіх катэгорыях, мы можам вернуцца да задачы пераносу азначэньня маноіда з катэгорыі мностваў *Ens* у іншыя катэгорыі.