Тэорыя катэгорый: кароткія ўводзіны

Яўген Пятліцкі

10 ліпеня 2022 г.

Гэты дакумэнт – кароткія нататкі з тэорыі катэгорый. Дакумэнт прызначаны для ўнутранага ўжытку. Тэкст сыры, зьмест, мова, стыль, тэрміналёгія будуць зьмяняцца.

Любая зваротная сувязь вітаецца (той, хто знайшоў дакумэнт праз пашуковік, а не атрымаў спасылку ад аўтара, можа скарыстацца стандартнымі сродкамі гітхабу, такімі як issues).

Зьмест

Разьдзел 0

Агульнаматэматычны ўступ

Фармальна тэорыя катэгорый – гэта разьдзел альгебры. Катэгорыя – гэта проста пэўная альгебраічная структура, няхай і вельмі вялікая (у пэўным сэнсе, які будзе патлумачаны далей). Таму ў прынцыпе можна расказваць пра катэгорыі без адсылак да іншых разьдзелаў матэматыкі (акрамя неабходнага мінімуму з тэорыі мностваў, які дазваляе абмяркоўваць пытаньні памеру).

Аднак падобны аповед будзе цьмяны і незразумелы тым, хто ня ведае, навошта ўсё гэта трэба. Сытуацыю можна параўнаць з спробай расказаць чалавеку пра лікі адразу на падставе фармальнай аксыяматыкі без спасылак на лічэньне рэальных прадметаў і бяз сувязі з рэальнымі задачамі. Тэарэтычна можна, на практыцы ня веру.

Асаблівасьць тэорыі катэгорый у тым, што яна мае пэўны мэтаматэматычны статус, паколькі прымяняецца ў пэўным сэнсе да самой матэматыкі: асноўны прадмет прымяненьня тэорыі катэгорый – гэта вывучэньне сукупнасьцяў матэматычных структур, такіх, як, напрыклад, сукупнасьць усіх тапалягічных прастораў.

Каб даць зьмястоўныя прыклады ўведзеных паняцьцяў і праілюстраваць дзеяньне інструмэнтаў, якія дае нам тэорыя катэгорый, трэба мець запас разнастайных матэматычных аб'ектаў.

Матэматычная літаратура, даступная на беларускай мове, дастаткова абмежаваная. Ёсьць падручнікі з падставаў матэматычнага аналізу і ўводзінаў у матэматыку, асобныя канспэкты лекцыяў, аднак большасьць матэрыялу, патрэбнага для ілюстрацыі тэорыі катэгорый, у беларускамоўным друку адсутнічае. Гэта нараджае праблему тэрміналёгіі. Часткова яе разьвязвае наяўнасьць тэрміналягічных слоўнікаў і матэматычнай энцыкляпэдыі, аднак іхныя аб'ёмы па неабходнасьці далёкія ад задавальняльнага.

Таму, каб зафіксаваць натацыю і тэрміналёгію, у гэтым уступным разьдзеле я тэзісна прывяду асноўныя азначэньні і факты, датычныя аб'ектаў, якія пазьней буду выкарыстоўваць у якасьці ілюстрацыяў.

Падбор і аб'ём матэрыялу дыктуецца выключна патрэбамі наступнага тэксту. Гэтта ня месца для падрабязнага разьвіцьця адпаведных тэорый (кожная зь якіх патрабуе некалькі кніг па пяцьсот і болей старонак), таму чакаецца, што бальшыня паняцьцяў чытачу знаёмыя. На ўсялякі выпадак прыведзеныя спасылкі на публікацыі, якія дазваляюць азнаёміцца з разгляданымі тэмамі падрабязьней.

Вяртаючыся да мэтаматэматычнага зьместу тэорыі катэгорый, ягоная наяўнасьць змушае хаця б кранушца пытаньняў падставаў матэматыкі. Тэрмін падставы матэматыкі можна разумець у двух сэнсах: больш фармальна як яе фармальнае абгрунтаваньне, менш фармальна як падставовую мову і ідэалёгію, якімі карыстаюцца матэматыкі ў сваёй штодзённай практыцы.

Ёсьць спробы выкарыстаць тэорыю катэгорый, альбо блізкую да яе тэорыю тыпаў, асабліва гаматопную тэорыю тыпаў, як фармальныя падставы матэматыкі. Гэтай тэмы я асабліва кранацца ня буду і застануся з тэорыяй мностваў у якасьці фармальных падставаў. Якая канкрэтна тэорыя мностваў выкарыстоўваецца ў нашым кантэксьце ня мае вялікага значэньня, можна лічыць, што ZFC. Хаця, калі б я распрацоўваў курс матэматыкі для студэнтаў, то ў якасьці падставовай узяў бы ETCS, таму што яна больш натуральная і наглядная.

Наагул, пытаньне менавіта фармальных падставаў – далёкае ад штодзённай матэматычнай практыкі, і ў значнай ступені не рэлевантнае, не ў апошнюю чаргу праз груваткасьць тэарэтыка-множнасных падставаў. Цікавасьць да выкарыстаньня ў якасьці такіх падставаў тэорыі катэгорый злучаная з тым, што гэта дазволіла б мець фармальныя падставы бліжэйшыя да рэальнай практыкі, якія па-першае непасрэдна фармалізуюць тое, што робяць матэматыкі, па-другое не дазваляюць задаваць пытаньняў накшталт “Ці праўда, што $3 \in \pi$?”. Калі параўноўваць з праграмаваньнем, то падставы ў выглядзе тэорыі мностваў – гэта мова асэмблеру, а катэгорныя падставы – мова праграмаваньня высокага ўзроўню, якая непасрэдна мае неабходныя абстракцыі, а ня проста маніпулюе асобнымі бітамі.

Калі вядзецца пра падставы ў сэнсе мовы, ужыванай матэматыкамі, то цяпер адбываецца ўсё шырэйшае пранікненьне мовы тэорыі катэгорый ува ўсе разьдзелы матэматыкі (падобнае да колішняга працэсу пранікненьня мовы тэорыі мностваў, у якасьці добрага прыкладу магу прывесьці падручнік функцыянальнага анлізу Хелемскага), і ў гэтым сэнсе я свабодна буду карыстацца такой мовай нават ува ўступе, не ўжываючы яўна слова “катэгорыя”. Гэта значыць, разважаньні тут, хаця фармальна і не катэгорныя, будуць катэгорнымі па духу (троху таксама будзе запазычана з тэорыі мадэляў). У далейшых разьдзелах па меры ўвядзеньня катэгорных паняцьцяў, яны будуць выкарыстоўвацца яўна.

Пару слоў пра агульную і тэарэтыка-множную тэрміналёгію.

Словы "функцыя", "марфізм", "адлюстраваньне", "мапа" я ўжываю як сынонімы. Слова "апэратар" я ўжываю як яшчэ адзін сынонім слова "функцыя" у выпадку, калі гэтая функцыя дзейнічае з адной лінейнай прасторы ў іншую. Слова "функцыянал" – сынонім слова "функцыя" для выпадку дзеяньня функцыі зь лінейнай прасторы ў поле, над якім тая прастора зададзеная. У некаторых выпадках я называю функцыю "пераўтварэньнем". (Матэматычная энцыкляпэдыя называе пераўтварэньнем значна вузейшае паняцьце, у мяне пераўтварэньне не біекцыя, што адпавядае ўжытку ангельскага слова "transformation", якім пазначаюць далёка ня толькі біекцыі).

Што да адпаведных дзеясловаў, то функцыя "пераводзіць", "адлюстроўвае", "мапуе" альбо "пераўтварае" свае аргумэнты ў значэньні.

Словы "біекцыя", "ін'екцыя" і "сюр'екцыя" ўжытыя ў чаканым сэнсе.

Слова "дачыненьне" абазначае падмноства концага бінарнага здабытку зададзеных мностваў. Паняцьце дачыненьня абагульняе паняцьце функцыі.

0.1 Альгебра

Альгебра вывучае сукупнасьці апэрацый альбо абагульненьні паняцьця ліку.

Альгебраічная структура – гэта мноства з зададзенымі на ім апэрацыямі, дачыненьнямі і канстантамі, для якіх выкананыя пэўныя аксыёмы.

Прыклады альгебраічных структур – мноствы натуральных лікаў $\mathbb{N}$ (у якое я ўключаю 0), цэлых лікаў $\mathbb{Z}$, рэчаісных лікаў $\mathbb{R}$, камплексных лікаў $\mathbb{C}$ альбо кватэрніёнаў $\mathbb{H}$ ці актаніёнаў $\mathbb{O}$.

Гэта вельмі канкрэтныя прыклады (хаця ў якім сэнсе, напрыклад, мноства рэчаісных лікаў $\mathbb{R}$ адназначна вызначанае – асобнае пытаньне, якога мы кранемся па дарозе).

Больш абстрактныя прыклады альгебраічных структур абагульняюць паняцьце мноства лікаў і мноства апэрацый і ўключаюць у сябе такія прыклады як маноід, група, колца, модуль, альгебра, поле, упарадкаванае поле і гэтак далей.

Каб задаць альгебраічную структуру нам трэба для пачатку апісаць яе сыгнатуру – набор апэрацый, дачыненьняў, канстантаў.

Азначэньне 0.1.1. *Мова (сыгнатура) $\mathcal{L}$ задаецца*

1. Мноствам сымбаляў дачыненьняў.

2. Мноствам сымбаляў функцый.

3. Мноствам сымбаляў канстантаў.

4. Для кожнага сымбалю дачыненьня альбо функцыі – дадатным натуральным лікам, які называецца валентнасьцю альбо арнасьцю гэтага сымбаля.

Азначэньне 0.1.2. *Для сыгнатуры $\mathcal{L}$ $\mathcal{L}$-структурай называецца мноства A (саму структуру мы будзем пазначаць той жа літарай) разам з інтэрпрэтацыяй сымбаляў з $\mathcal{L}$, дзе інтэрпрэтацыя – гэта*

1. Для кожнага n-валентнага сымбалю дачыненьня R – падмноства R^A Дэкартава здабытку A^n, то бок n-арнае дачыненьне.

2. Для кожнага n-валентнага сымбалю функцыі f – функцыя $f^A : A^n \to A$.

3. Для кожнага сымбалю канстанты c – элемэнт $c^A \in A$.

Акрамя сыгнатуры структура вызначаецца аксыёмамі, якім адпавядаюць зададзеныя дачыненьне, функцыі і канстанты.

На практыцы функцыі і дачыненьні, асабліва бінарныя, я буду пісаць у інфікснай натацыі. Так, калі зададзеная функцыя $+ : A^2 \to A$, то для $a, b \in A$ буду запісваць яе дзеяньне як $a + b$, а не $+(a, b)$. Таксама часта, калі зададзеная адна апэрацыя такая як $\cdot$ альбо $\circ$, я буду апускаць яе сымбаль, пішучы проста ab. Калі апэрацыяў некалькі, я буду асобна агаворваць, сымбаль якой апускаецца. Нарэшце, у некаторых выпадках, я буду ўжываць розныя сымбалі для той самай апэрацыі – у залежнасьці ад тых уласьцівасьцяў, якія яна мае, альбо ад іншага кантэксту, што будзе агаворана асобна.

Паміж структурамі дзейнічаюць функцыі, якія захоўваюць структуру. Гэтыя функцыі называюцца гомамарфізмамі.

Азначэньне 0.1.3. *Гомамарфізм π паміж $\mathcal{L}$-структурамі A і B – гэта функцыя $\pi : A \to B$ такая, што*

1. Для ўсіх сымбаляў дачыненьня калі $(a_1, ..., a_n) \in R^A$, то $(\pi(a_1), ..., \pi(a_n)) \in R^B$.

2. Для ўсіх сымбаляў функцыі $\pi(f^A(a_1, ..., a_n) = f^B(\pi(a_1), ..., \pi(a_n)))$.

3. Для ўсіх канстантаў $\pi(c^A) = c^B$.

Частка структуры, замкнёная адносна яе сыгнатуры, называецца падструктурай.

Азначэньне 0.1.4. *Падструктура $\mathcal{L}$-структуры A – гэта такое падмноства $B \subseteq A$ з $\mathcal{L}$-структурай успадкаванай ад A, што*

1. Для ўсіх сымбаляў функцыі $f^B(b_1, ..., b_n) \in B$.

2. Для ўсіх сымбаляў канстанты $c^B \in B$.

Сыгнатуры мы будзем пазначаць як пералік сымбаляў, з кантэксту як правіла будзе ясная іхная валентнасьць і тып (дачыненьне, функцыя альбо канстанта). Калі трэба, мы агаворым валентнасьць і тып асобна.

0.1.1 Маноіды

Калі мы маем нейкі набор неабавязкова зваротных апэрацый, сярод якіх ёсьць тоесная (па-іншаму званая адзінкавая альбо трывіяльная), з асацыятыўнай кампазыцыяй паміж імі, то мы маем дачыненьне з маноідам.

Азначэньне 0.1.5. *Для сыгнатуры* $(\cdot, 1)$ *маноідам называецца структура* M *такая, што для любых* $a, b, c \in M$ *выконваецца* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *і* $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$. *У далейшым* $\cdot$ *мы называем апэрацыяй, а* 1 *– адзінкай.*

Прыклад 0.1.1 (Прыклады маноідаў)**.** *1. Мноства натуральных лікаў* $\mathbb{N}$ *адносна дадаваньня альбо адносна множаньня (адзінкавыя элемэнты адпаведна –* 0 *і* 1*).*

2. Свабодны маноід над мноствам $\mathcal{S}$, *то бок мноства концых сьпісаў элемэнтаў з* $\mathcal{S}$, *апэрацыя – канкатэнацыя, адзінка – пусты сьпіс.*

3. Набор сымэтрыяў нейкага аб'екта, апэрацыя – кампазыцыя сымэтрый, адзінка – тоеснае адлюстраваньне (сымэтрыі мы называем аўтамарфізмамі).

4. Мноства функцый з зададзенага мноства S *у яго ж, апэрацыя – кампазыцыя, адзінка – тоесная функцыя.*

5. Наагул, мноства пераўтварэньняў нейкага аб'екта, напрыклад, усе гамэамарфізмы тапалягічнай прасторы ў яе ж, альбо ўсе гомамарфізмы альгебраічнай структуры ў яе ж (эндамарфізмы).

Як паказваюць прыклады, лёгка знайсьці як камутатыўныя (такія, што для любых $a, b \in M$ $a \cdot b = b \cdot a$), так і некамутатыўныя маноіды (сьпісы адносна канкатэнацыі, альбо функцыі адносна кампазыцыі – некамутатыўныя). Камутатыўныя маноіды часта запісваюцца з знакам $+$ у якасьці знаку апэрацыі.

Гомамарфізм маноідаў захоўвае апэрацыю і адзінку: для маноідаў M і N і гомамарфізму $f : M \to N$ маем $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ і $f(1) = 1$. Тут я не пазначаю, да якога маноіду адносіцца апэрацыя альбо адзінка, таму што гэта ясна з кантэксту. У далейшым я так раблю без дадатковых агаворак.

Падманоід – гэта падмноства, якое ўключае адзінку арыгінальнага маноіду і здабытак кожнай пары сваіх элемэнтаў.

На пачатку было сказана, што маноід – гэта набор апэрацый, а ў прыкладах мы сустракаемся з мноствам натуральных лікаў $\mathbb{N}$, якія лікі, а не апэрацыі. Можна альбо сказаць, што набор апэрацый – гэта матывацыйны прыклад, альбо заўважыць, што кожны маноід насамрэч складаецца з апэрацый – над самім сабой.

Так, разгледзім мноства $\mathbb{N}$. Кожны лік $n \in \mathbb{N}$ натуральным чынам задае апэрацыю на $\mathbb{N}$ – множаньне $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ на гэты лік: для любога $m \in \mathbb{N}$ мы маем $n(m) = nm$.

Такім чынам любы маноід дзейнічае сам на сябе (для некамутатыўных маноідаў зададзеныя два дзеяньні – зьлева і справа).

0.1.2 Групы

Калі маноід – гэта набор адвольных апэрацый з асацыятыўнай кампазыцыяй, то група – гэта набор апэрацый сымэтрыі, то бок такіх апэрацый, кожная зь якіх мае зваротную.

Азначэньне 0.1.6. *Для сыгнатуры $(\cdot, -^{-1}, 1)$ групай называецца структура G такая, што для любых $g, h, n \in G$ выконваецца $(g{\cdot}h){\cdot}n = g{\cdot}(h{\cdot}n)$, $g{\cdot}1 = g = 1{\cdot}g$ і $g{\cdot}g^{-1} = 1 = g^{-1}{\cdot}g$. У далейшым $\cdot$ мы называем апэрацыяй, g^{-1} – зваротным элемэнтам, а 1 – адзінкай.*

Апэрацыя, такая як $-^{-1}$, пры паўторным прымяненьні якой элемэнт пераходзіць сам у сябе, называецца інвалюцыяй.

Такім чынам, група – гэта маноід, у якім кожны элемэнт мае зваротны.

Прыклад 0.1.2 (Прыклады груп)**.** *1. Мноства цэлых лікаў $\mathbb{Z}$ адносна дадаваньня (адзінкавы элемэнт – 0). Адносна множаньня цэлыя лікі – маноід, але ня група, а вось лікі рацыянальныя будуць ужо групай.*

2. Набор сымэтрыяў нейкага аб'екта, апэрацыя – кампазыцыя сымэтрый, адзінка – тоеснае адлюстраваньне. Паколькі аўтамарфізмы маюць зваротныя, то гэта група.

Гомамарфізм груп захоўвае апэрацыю, узяцьце зваротнага элемэнта і адзінку: для груп G і H і гомамарфізму $f : G \to H$ маем $f(g \cdot g') = f(g) \cdot f(g')$, $f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$ і $f(1) = 1$.

Падгрупа – гэта падмноства, якое ўключае адзінку арыгінальнай групы і мае зваротны элемэнт для кожнага свайго элемэнту, як і здабытак кожнай пары сваіх элемэнтаў. Іншымі словамі калі H – падгрупа G, то з $g, h \in H$ вынікае $gh^{-1} \in H$.

0.1.3 Колцы і палі

0.1.4 Модулі і вэктарныя прасторы

0.2 Тапалёгія

Тапалёгія вывучае пытаньне непарыўнасьці функцыяў, зьбежнасьці і блізкасьці пунктаў прасторы (гэтыя пытаньні шчыльна злучаныя паміж сабой).

Гэтта я разумею тапалёгію ў шырокім сэнсе – ня толькі як вывучэньне ўласна тапалягічных прастораў, але як вывучэньне непарыўнасьці наагул.

0.2.1 Сеткі і фільтры

Што такое зьбежнасьць усе мы ведаем з курсу матэматычнага аналізу. Найпрасьцейшае азначэньне зьбежнасьці выкарыстоўвае паняцьце пасьлядоўнасьці.

Разьдзел 1

Базавыя катэгорныя структуры

Як казаў сп. Стэфан Банах, добры матэматык бачыць факты, выбітны – аналёгіі паміж фактамі, а геніяльны – аналёгіі паміж аналёгіямі.

Тэорыя катэгорый – гэта спроба фармалізаваць аналёгіі паміж фактамі і стварыць агульную тэорыю, у якой такія аналёгіі можна абмяркоўваць строга.

Гістарычна тэорыя катэгорый узьнікла як інструмэнт альгебраічнай тапалёгіі, які дазваляў фармалізаваць паняцьце "натуральнасьці" і зрабіць строгімі пэўныя інтуіцыйныя развažаньні.

Ідэя тэорыі катэгорый палягае на тым, каб разгледзець цэлую клясу аб'ектаў у іхным узаемадзеяньні паміж сабой.

Такое абагульненьне – цалкам натуральнае: спачатку мы вучымся лічыць канкрэтныя аб'екты фізычнага сьвету, потым разумеем (да пэўнай ступені), што такое абстрактны цэлы лік, потым – паралельна з абагульненьнем паняцьця ліку – пачынаем вывучаць канкрэтныя функцыі паміж лікамі, пасьля чаго разглядаем усю сукупнасьць лікаў як адзін аб'ект (тое ці іншае мноства) і пераходзім да больш абстрактнага паняцьця функцый паміж мноствамі.

Далей зьяўляецца патрэба разгледзець мноствы, надзеленыя нейкай структурай, геамэтрычнай альбо альгебраічнай, і функцыі паміж імі.

У нейкі момант аказваецца, што карысна вывучыць усю сукупнасьць, напрыклад, тапалягічных прастораў альбо груп. І цалкам натуральна ўзьнікаюць функцыі, якія пераводзяць тапалягічныя прасторы ў групы (напрыклад, групы гаматопій). У такой сытуацыі абсягам акрэсьленьня функцыі зьяўляецца ўся сукупнасьць (катэгорыя) тапалягічных прастораў, а абсягам значэньняў – катэгорыя груп.

У гэтым месцы ўважлівы чытач павінен сказаць мне "Пачкай, а ці чуў ты што-небудзь пра Расэлаў парадокс? Што менавіта ты называеш сукупнасьцю ўсіх груп?"

На гэтае пытаньне я маю адказ, але троху пазьней. Пакуль уявім на хвіліну, што мноства ўсіх мностваў нас не непакоіць (а я паабяцаю па дарозе не будаваць аб'екты, якія ўтрымліваюць самі сябе альбо самаадносяцца якім-небудзь іншым чынам).

1.1 Азначэньне катэгорыі

Азначэньне катэгорыі – досыць простае, амаль трывіяльнае.

Што аб'ядноўвае ўсе сукупнасьці аб'ектаў, такіх як мноствы, тапалягічныя прасторы, альгебры, групы, колцы?

Па-першае, ёсьць самі аб'екты.

Па-другое, ёсьць функцыі паміж імі, прычым для кожнага аб'екта існуе тоеснае пераўтварэньне, а кампазыцыя функцыяў асацыятыўная.

Насамрэч, гэта ўсё, што трэба каб абстрактна апісваць сукупнасьці аб'ектаў у агульным выпадку.

Азначэньне 1.1.1. *Катэгорыя C – гэта сукупнасьці аб'ектаў ObC (па-іншаму пазначаецца C_0) і стрэлак паміж імі $MorC$ (па-іншаму пазначаецца C_1), якія маюць наступныя ўласьцівасьці:*

1. Кожная стрэлка мае вызначаныя пачатак і канец (дамэн і судамэн, крыніцу і прызначэньне), якія зьяўляюцца аб'ектамі. Стрэлка f з X ў Y запісваецца $f : X \to Y$.

2. Для кожнай пары стрэлак $f : X \to Y$ і $g : Y \to Z$, вызначаная кампазыцыя $g \circ f : X \to Z$, калі канец першай супадае з пачаткам другой.

3. Сукупнасьць стрэлак паміж аб'ектамі X і Y пазначаецца $C(X, Y)$ альбо $Hom_C(X, Y)$ і называецца гомсэтам, дзьве такія сукупнасьці для розных аб'ектаў ня маюць супольных стрэлак.

4. Для кожнага аб'екта X вызначаная адзінкавая стрэлка 1_X, якая паводзіць сябе як адзінка пры кампазыцыі стрэлак, гэта значыць для $f : X \to Y$ і $g : Z \to X$ выконваюцца наступныя тоеснасьці:

$f \circ 1_X = f$

$1_X \circ g = g$

5. Для кожнай тройкі стрэлак $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ выконваецца наступная тоеснасьць:

$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

У гэтым азначэньні мы выкарысталі больш абстрактную тэрміналёгію: замест "функцыі" мы гаворым "стрэлкі", таму што, як мы ўбачым пазьней, ёсьць катэгорыі, у якіх стрэлкі не зьяўляюцца функцыямі.

Па-іншаму "стрэлка" называецца "марфізм".

Варта заўважыць яшчэ, што, на прыклад, маноід альбо група – гэта альгебраічная структура з адным сортам элемэнтаў і ўсюды вызначанай апэрацыяй, тады як катэгорыя – альбо структура з двума сартамі (аб'екты і стрэлкі) і часткова вызначанай апэрацыяй кампазыцыі, альбо структура з адным сортам (калі мы замяняем аб'екты на адпаведныя адзінкавыя стрэлкі), але па-ранейшаму часткова вызначанай кампазыцыяй.

Прыклад 1.1.1 (Прыклады катэгорый)**.** *1. Катэгорыя мностваў Ens: аб'екты – мноствы, стрэлкі – функцыі паміж імі.*

2. Катэгорыя тапалягічных прастор Top: аб'екты – тапалягічныя прасторы, стрэлкі – непарыўныя функцыі.

3. Катэгорыя маноідаў Mon: аб'екты – маноіды, стрэлкі – гомамарфізмы.

4. Катэгорыя груп Grp: аб'екты – групы, стрэлкі – гомамарфізмы.

5. Катэгорыя часткова ўпарадкаваных мностваў Poset: аб'екты – часткова ўпарадкаваныя мноствы, стрэлкі – манатонныя функцыі (то бок функцыі, якія захоўваюць частковы парадак).

6. Любая сукупнасьць мностваў з структурай і функцыяў паміж імі, якія захоўваюць гэтую структуру, дае нам прыклад катэгорыі.

Але ці вычэрпваюцца катэгорыі толькі сукупнасьцямі мностваў з структурай? Не, азначэньне катэгорыі дастаткова агульнае каб уключыць іншыя выпадкі (тут я не магу не ўзгадаць, што аўтары Матэматычнай энцыкляпэдыі, выдадзенай Тэхналёгіяй, даюць памылковае азначэньне тэрміну "катэгорыя": у іх гэта толькі сукупнасьць мностваў з структурай).

Перад тым як зьвярнуцца да больш абстрактных прыкладаў катэгорый, мы разьбярэмся з пытаньнем іх памеру.

1.2 Памер катэгорый

Як было ўзгадана вышэй, разгляд аб'ектаў такіх як "мноства ўсіх мностваў", спалучаны з клясычнай лёгікай, імгненна вядзе да ўзьнікненьня праблем. У прынцыпе, гэта праява больш агульнай праблемы: у клясычнай (і ў інтуіцыяніісцкай, ды і ў любой кансыстэнтнай) лёгіцы немагчыма пасьлядоўна разглядаць сытэмы з самааднясеньнем. Дастаткова ўзгадаць парадокс цырульніка, які не патрабуе для свайго ўзьнікненьня ніякіх мностваў.

Як можна вырашыць гэтую праблему? Першы магчымы шлях – зьмена лёгікі на паракансыстэнтную, то бок такую, якая дапускае для некаторых выказваньняў магчымасьць быць адначасова праўдзівымі і непраўдзівымі, пры гэтым не прыводзячы да трывіялізацыі ўсёй тэорыі. На гэтым шляху на сёньняшні дзень не дасягнута істотных вынікаў, якія б пераконвалі ў ягонай вартасьці, хаця з майго пункту гледжаньня гэты кірунак вельмі цікавы і варты глыбейшага распрацоўваньня.

Іншы варыянт – не зьмяняючы лёгіку, палічыць, што Расэлаў парадокс даказвае, што сукупнасьць усіх мностваў сама мноствам не зьяўляецца. Гэта стандартнае разьвязаньне, на якім мы і спынімся.

Аднак тут узьнікае праблема: калі мы хочам разгледзець сукупнасьць усіх мностваў, то мы ня можам зрабіць гэтага, застаючыся ў межах тэорыі, у якой ёсьць толькі мноствы.

Існуе некалькі разьвязаньняў праблемы, кожнае зь якіх прыводзіць да ўвядзеньне аб'ектаў большых за мноствы – клясаў.

Мы спынімся на Гротэндыкавых унівэрсумах.

Ідэя ўнівэрсуму палягае на тым, каб у якасьці сукупнасьці ўсіх мностваў выбраць мноства настолькі вялікае, каб у ім мы маглі займацца патрэбнай нам матэматыкай. Як мінімум нам неабходна быць у стане ажыцьцяўляць стандартныя тэарэтыка-множнасныя канструкцыі такія як утварэньне мноства ўсіх падмностваў зададзенага мноства.

Такім чынам, працуючы ўнутры нейкай тэорыі мностваў (напрыклад, ZFC), мы выбіраем пэўную сукупнасьць мностваў, элемэнты якой будзем называць малымі мноствамі. Сукупнасьць усіх малых мностваў сама малым мноствам ня будзе, а будзе мноствам вялікім, альбо іншымі словамі – уласнай клясай.

Усе "звычайныя" матэматычныя канструкцыі мы будзем ажыцьцяўляць з малымі мноствамі. Напрыклад, на іх мы будзем задаваць структуры груп, тапалягічных прастораў альбо колцаў.

У выніку сукупнасьць усіх груп, хаця ня будзе сама малым мноствам, аднак будзе аб'ектам, які мы можам законна разглядаць у нашай тэорыі.

Канструкцыі тэорыі катэгорый (прынамсі, калі мы хочам разглядаць вялікія катэгорыі, такія як катэгорыя ўсіх малых мностваў) запатрабуюць разгляду вялікіх падмностваў унівэрсуму, альбо ўсяго ўнівэрсуму. Больш за тое, некаторыя канструкцыі запатрабуюць цэлай герархіі ўнівэрсумаў, у якой кожны наступны ўтрымлівае папярэднія.

На нашым узроўні строгасьці – улічваючы, што пытаньні падставаў матэматыкі не знаходзяцца ў нашым фокусе – хапіла б выкладзенай вышэй заўвагі пра магчымасьць строга разглядаць сукупнасьці ўсіх мностваў і падобныя. Але для паўніны карціны я прывяду адпаведныя азначэньні.

Азначэньне 1.2.1. *Гротэндыкаў унівэрсум – гэта мноства U, якое мае* *наступныя ўласьцівасьці:*

1. Для ўсіх $u \in U$ і $t \in u$ мы маем $t \in U$.

2. Для ўсіх $u \in U$ мы маем $\mathcal{P}(u) \in U$, дзе $\mathcal{P}(u)$ – сукупнасьць усіх падмностваў мноства u.

3. $\mathbb{N} \in U$.

4. Для ўсіх $I \in U$ і функцый $u : I \to U$ мы маем $\bigcup\limits_{i \in I} u_i \in U$.

Нескладана давесьці, што выконваючы звыклыя тэарэтыка-множныя апэрацыі над элемэнтамі Гротэндыкава ўнівэрсуму, мы не выходзім за ягоныя межы.

У якасьці прыкладу дакажам, што аб'яднаньне малых мностваў – малое мноства (доказ ніжэй не дастаткова строгі, паколькі мы ня выбралі аксыяматыку тэорыі мностваў, але давядзецца паверыць мне на слова, што яго можна зрабіць поўнасьцю строгім).

Прыклад 1.2.1. *З $a \in U$ і $b \in U$ вынікае, што $a \cup b \in U$.*

Доказ. З аксыёмы 3 маем $\mathbb{N} \in U$. $\emptyset \in \mathbb{N}$, значыць з аксыёмы 1 $\emptyset \in U$. $\mathcal{P}(\emptyset) \in U$ як вынікае з аксыёмы 2. Значыць, у U ёсьць мноства з двух элемэнтаў, назавем яго 2. Задамо функцыю $f : 2 \to U$ такім чынам, што адзін элемэнт 2 яна пераводзіць у a, а другі ў b. Паводле аксыёмы 4 $a \cup b \in U$. □

Падобным няхітрым чынам мы можам ня толькі паказаць, што можам займацца звычайнымі тэарэтыка-множнымі пабудовамі ў Гротэндыкавым унівэрсуме, але і тое, што Гротэндыкаў унівэрсум сам па сабе ёсьць мадэльлю ZFC (прынамсі, калі мы карыстаемся пры яго пабудове ZFC).

Аёй, існаваньне ўнівэрсуму – вельмі моцная рэч, даказаць яго ў межах ZFC не атрымаецца.

Што рабіць? Дадамо да ZFC новую аксыёму: аксыёму ўнівэрсуму.

Аксыёма 1.2.1. *Аксыёма ўнівэрсуму. Для любога мноства s існуе ўнівэрсум U, які яго ўтрымлівае.*

Падсумоўваючы, праблему катэгорыі ўсіх мностваў (і падобных вялікіх катэгорый) мы разьвязалі ўвядзеньнем герархіі ўнівэрсумаў. У звычайнай матэматыцы мы працуем толькі з малымі мноствамі (элемэнтамі зафіксаванага ўнівэрсуму U, які сам па сабе служыць мадэльлю ZFC), усе мноствы, якія ня ёсьць малымі мы называем вялікімі мноствамі альбо ўласнымі клясамі. Пры патрэбе, калі нашыя катэгорныя канструкцыі ня будуць зьмяшчацца ў адным унівэрсуме, і нам спатрэбяцца яшчэ большыя мноствы, мы проста возьмем большы ўнівэрсум. Што ён існуе, нам гарантуе аксыёма ўнівэрсуму, якую мы дадалі да ZFC.

Азначэньне 1.2.2. *Катэгорыя называецца малой, калі сукупнасьць яе стрэлак – малое мноства, іначай катэгорыя называецца вялікай. Катэгорыя C называецца лякальна малой, калі для любых двух яе аб'ектаў a і b, $C(a, b)$ – малое мноства.*

Пакуль мы сустракаліся толькі зь вялікімі, але лякальна малымі катэгорыямі. Як жа выглядаюць малыя катэгорыі?

Прыклад 1.2.2. *1. Катэгорыя* 0 *без аб'ектаў.*

2. Катэгорыя 1 *з адным аб'ектам і адной стрэлкай –* 1_1.

3. Маноід: гэтая катэгорыя мае толькі адзін – фармальны – аб'ект, а мноства яе стрэлак – гэта мноства элемэнтаў маноіду, кампазыцыя стрэлак – кампазыцыя элемэнтаў.

4. Група – як прыклад маноіду.

5. Мноства зъ перадпарадкам. Аб'екты катэгорыі – гэта элемэнты мноства, а стрэлка паміж двума элемэнтамі існуе толькі тады, калі паміж імі існуюць адносіны парадку.

6. Як прыклад перадпарадку – мноства падмностваў $\mathcal{P}(S)$ *зададзенага мноства* S*, упарадкаванае паводле ўключэньня.*

7. Іншы прыклад перадпарадку: мноства ўсіх адкрытых падмностваў $\mathcal{O}(T)$ *тапалягічнай прасторы* T*, упарадкаванае паводле ўключэньня. Аналягічна, мноства замкнёных падмностваў* $\mathcal{C}(T)$.

8. Звычайнае малое мноства S *– гэта прыклад катэгорыі з трывіяльнай структурай (дыскрэтнай катэгорыі). Яе аб'екты – гэта элемэнты мноства, а стрэлкі – адзінкавыя стрэлкі, фармальна вызначаныя для кожнага элемэнту. Гэта вельмі важны прыклад, які паказвае сувязь паняцьцяў мноства і катэгорыі. Насамрэчы, існуе некалькі герархіяў катэгорападобных аб'ектаў, у якіх мноствы і катэгорыі – адны з найніжэйшых ступеняў.*

9. Мноства сьпісаў як прыклад маноіду. Няхай зададзенае мноства сымбаляў $\mathcal{L}$*, сьпісам над* $\mathcal{L}$ *называецца ўпарадкаваная концая пасьлядоўнасьць сымбаляў з* $\mathcal{L}$*. Мноства сьпісаў над* $\mathcal{L}$ *– гэта маноід адносна апэрацыі канкатэнацыі, адзінкавы элемэнт – пусты сьпіс. Мноства сьпісаў – гэта прыклад гэтак званай свабоднай канструкцыі, па-іншаму яно называецца свабодны маноід. Свабодны маноід можна задаць на любым мностве.*

Гэтыя прыклады паказваюць нам, што катэгорыя – не канечне сукупнасьць мностваў з структурай і стрэлак паміж імі. Троху пазьней мы фармалізуем паняцьці абстрактнай і канкрэтнай катэгорый. Нефармальна, канкрэтная катэгорыя – гэта сукупнасьць структураваных мностваў, а абстрактная – любая іншая катэгорыя.

Усе катэгорыі, якія мы разглядалі, – лякальна малыя. Лякальна вялікія катэгорыі сустрэнуцца нам пазьней.

1.3 Віды марфізмаў

На катэгорнай мове можна апісваць шмат якія знаёмыя нам зьявы аднастайным спосабам. Мы пачнем з простай клясыфікацыі марфізмаў.

Нам ужо знаёмыя адзінкавыя марфізмы, якія ня робяць нічога.

Сьцьверджаньне 1.3.1. *У катэгорыі C для кожнага аб'екта X існуе толькі адзін тоесны марфізм.*

Доказ. Дапусьцім, што акрамя 1_X існуе іншы марфізм $g : X \to X$ такі, што для любых $Y, Z \in ObC$ і любых $f : Y \to X$ і $h : X \to Z$ выконваецца $g \circ f = f$ і $h \circ g = h$, тады мы маем $g = g \circ 1_X = 1_X$. □

Прыведзены доказ адразу даказвае ўнікальнасьць адзінкі ў групе, маноідзе і іншых структурах, якія можна разглядаць як катэгорыю.

Няхай гэты доказ і трывіяльны, але ён ілюструе як з дапамогай паняцьця катэгорыі мы за адзін раз даказалі сьцьверджаньне для розных структур.

Ці можам мы ахарактарызаваць марфізмы, якія злучаюць розныя аб'екты, але пры гэтым поўнасьцю захоўваюць іхную структуру?

Азначэньне 1.3.1. *Ізамарфізм $f : X \to Y$ – гэта марфізм, які мае зваротны, то бок існуе такі марфізм $g : Y \to X$, што $fg = 1_Y$ і $gf = 1_X$.*

Як лёгка праверыць, гэтае азначэньне дае чаканы вынік.

Прыклад 1.3.1. *1. Для катэгорыі мностваў Ens ізамарфізм – гэта біекцыя.*

2. Для катэгорыі груп Grp – біекцыйны гомамарфізм.

3. Для катэгорыі тапалягічных прастор Top – гамэамарфізм.

Такім чынам, група – гэта маноід, у якім усе марфізмы – ізамарфізмы. Ёсьць катэгорнае абагульненьне паняцьця групы, якое абагульняе яго такім самым чынам, якім паняцьце катэгорыі абагульняе паняцьце маноіда.

Азначэньне 1.3.2. *Групоід – гэта катэгорыя, усе марфізмы якой – ізамарфізмы.*

Прыклад 1.3.2. *Фундамэнтальны групоід тапалягічнай прасторы – гэта катэгорыя, элемэнтамі якой ёсьць пункты прасторы, а стрэлкамі – клясы гаматопіі шляхоў, якія захоўваюць канцавыя пункты.*

З дапамогай ізамарфізмаў мы можам увесьці паняцьце ізаморфных аб'ектаў.

Азначэньне 1.3.3. *Аб'екты $X, Y \in C$ ізаморфныя, калі існуе ізамарфізм $f : X \to Y$*

Ізаморфнасьць аб'ектаў азначае, што па сутнасьці з пункту гледжаньня катэгорыі C яны не адрозныя.

Прыклад 1.3.3. *1. У катэгорыі Ens любыя два мноствы той самай магутнасьці ізаморфныя.*

2. У катэгорыі Top гамэаморфныя прасторы – ізаморфныя.

Натуральна, паняцьце ізаморфнасьці залежыць ад таго, якую структуру мы вывучаем. Так, любыя дзьве тапалягічныя прасторы аднолькавай магутнасьці ізаморфныя як мноствы, але не канечне ізаморфныя як тапалягічныя прасторы (простая і плоскасьць – той самай магутнасьці, аднак не гамэаморфныя і, значыць, не ізаморфныя як тапалягічныя прасторы).

З абагульненьнем біекцыі мы разабраліся, а што зь сюр'екцыяй і ін'екцыяй?

Азначэньне 1.3.4. *Монамарфізм – гэта марфізм, скарачальны зьлева, то бок такі $f : X \to Y$, што для любых $g, h : Z \to X$ з $fg = fh$ вынікае $g = h$.*

Азначэньне 1.3.5. *Эпімарфізм – гэта марфізм, скарачальны справа, то бок такі $f : X \to Y$, што для любых $g, h : Y \to Z$ з $gf = hf$ вынікае $g = h$.*

Прыклад 1.3.4. *У катэгорыі Ens монамарфізмы – гэта ін'екцыі, а эпімарфізмы – сюр'екцыі.*

Але монамарфізмы не заўжды ін'екцыі, а эпімарфізмы – сюр'екцыі.

Прыклад 1.3.5. *Разгледзім катэгорыю Haus Гаўсдарфавых тапалягічных прастор. Укладаньне $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ – эпімарфізм, але не сюр'екцыя.*

1.4 Дуальнасьць, пачатковыя і канчатковыя аб'екты

На прыкладзе мона- і эпімарфізму мы ўбачылі пару азначэньняў, якія паўтараюцца практычна даслоўна. Ці можна гэтую амаль даслоўнасьць неяк фармалізаваць? Можна! Калі мы ўважліва прыгледзімся да адпаведных азначэньняў, то ўбачым, што яны адрозьніваюцца толькі парадкам кампазыцыі, то бок, па сутнасьці, толькі кірункам стрэлак.

Азначэньне 1.4.1. *Для кожнай катэгорыі C існуе супрацьлеглая, альбо дуальная, катэгорыя C^{op}, вызначаная наступным чынам*

1. C^{op} мае тыя самыя аб'екты, што й C.

2. Для кожнага марфізму $f : X \to Y$ з C вызначаны марфізм $f^{op} : Y \to X$ з C^{op}, іншых марфізмаў у C^{op} няма.

3. Для кожнага аб'екта X адзінкавая стрэлка – гэта 1_X^{op}.

4. Кампазыцыя вызначаная ў зваротным кірунку, то бок $(fg)^{op} = g^{op} f^{op}$, як лёгка спраўдзіць, для так вызначанай кампазыцыі выконваюцца правілы кампазыцыі з азначэньня катэгорыі.

Прыклад 1.4.1. *Для перадпарадку, разгледжанага як катэгорыя, дуальная катэгорыя – гэта супрацьлеглы перадпарадак.*

Такім чынам мы бачым, што монамарфізм у катэгорыі C будзе эпімарфізмам у катэгорыі C^{op}. Падобныя паняцьці называюць супрацьлеглымі альбо дуальнымі. Можна было б даць адно азначэньне, напрыклад, монамарфізму і сказаць "эпімарфізм – паняцьце, дуальнае монамарфізму", пакінуўшы чытачу працу зьмяніць кірунак стрэлак.

Ашчаджэньне на азначэньнях – гэта ня ўсё, што дае нам дуальнасьць. Калі мы даказваем нейкую катэгорную тэарэму, мы аўтаматычна атрымліваем дуальны вынік, паколькі паняцьце дуальнасьці чыста сынтаксычнае і зводзіцца да зьмены кірунку стрэлак у азначэньнях і доказах.

З дапамогай катэгорных азначэньняў мы можам характарызаваць ня толькі марфізмы, але і аб'екты (сказанае – трывіяльнасьць, нагадаю, што кожнаму аб'екту X адпавядае марфізм 1_X і тэорыю катэгорый можна сфармуляваць наагул не карыстаючыся аб'ектамі, іхную ролю цудоўна выконваюць адзінкавыя стрэлкі).

Азначэньне 1.4.2. *Пачатковы аб'ект катэгорыі C – гэта аб'ект, зь якога ў любы аб'ект $X \in C$ ідзе роўна адна стрэлка.*

Прыклад 1.4.2. *У катэгорыі $\mathcal{E}ns$ пачатковы аб'ект – гэта пустое мноства.*

Азначэньне 1.4.3. *Канчатковы аб'ект – гэта аб'ект, дуальны да пачатковага, то бок такі, у які з кожнага аб'екта ідзе роўна адна стрэлка.*

Прыклад 1.4.3. *У катэгорыі Ens канчатковы аб'ект – гэта мноства з адным элемэнтам.*

Наколькі ўнікальныя пачатковы і канчатковы аб'екты? З прыкладаў мы бачым, што ў катэгорыі Ens пачатковы аб'ект – адзін, а канчатковых – бясконца многа, прычым усе яны ізаморфныя.

Тэарэма 1.4.1. *Канчатковы аб'ект вызначаны з дакладнасьцю да ўнікальнага ізамарфізму.*

Доказ. Разгледзім канчатковыя аб'екты $X, Y \in C$.

Паводле азначэньня з аб'екта X у аб'екты X і Y, і з Y у X існуе роўна па адным марфізьме. Марфізм з X у X – гэта 1_X. Назавем іншыя два марфізмы $f : X \to Y$ і $g : Y \to X$. Іхная кампазыцыя $gf : X \to X$ – марфізм з X у X, але такі марфізм па азначэньні толькі адзін – адзначаны раней 1_X. Значыць, $gf = 1_X$.

Аналягічна, $fg = 1_Y$, а X і Y – ізаморфныя. Прычым па азначэньні канчатковага аб'екта ізамарфізм толькі адзін. □

Дуальна мы маем аналягічны вынік для пачатковага аб'екта.

Ці можа той самы аб'ект быць адначасова канчатковым і пачатковым? У катэгорыі Ens – не, але ў цэлым – так.

Азначэньне 1.4.4. *Нулявы аб'ект – гэта аб'ект, які адначасова пачатковы і канчатковы.*

Прыклад 1.4.4. *У катэгорыі Grp ёсьць нулявы аб'ект. Гэта трывіяльная група.*

1.5 Функтары

Тэорыя катэгорый вучыць нас гледзячы на любую структуру пытаць, як яна суадносіцца зь іншымі падобнымі структурамі, якія апэрацыі можна над імі ажыцьцяўляць?

А што з самімі катэгорыямі, як выглядаюць функцыі паміж імі?

Відавочна, мы мусім вызначыць дзеяньне падобнай функцыі на аб'ектах і на стрэлках. Акрамя таго мы мусім захаваць структуру, гэта значыць, адзінкавы стрэлкі і кампазыцыю. Гэтага дастаткова.

Азначэньне 1.5.1. *Функтар паміж катэгорыямі A і B – гэта сукупнасьць функцыі $F : ObA \to ObB$ і для кожнай пары адпаведных гомсэтаў функцый $F_{XY} : A(X,Y) \to B(X,Y)$, такіх, што*

1. Для кожнага $X \in A$ выконваецца $F_{XX}(1_X) = 1_{F(X)}$.

2. Для кожнай кампазавальнай пары $f, g \in MorC$ выконваецца $F(gf) = F(g)F(f)$. Тут мы ня сталі пісаць індэксы ў F, як звычайна і робяць.

Увага на тэму памеру: у гэтым азначэньні функцыі ў агульным дзейнічаюць паміж клясамі.

Паняцьце функтару надзвычай багатае.

Прыклад 1.5.1. *1. На кожнай катэгорыі можна задаць адзінкавы (тоесны, трывіяльны) функтар, які ня робіць нічога, пераводзячы аб'екты і стрэлкі ў самых сябе.*

2. Функтар забыцьця. Для кожнай катэгорыі структураваных мностваў вызначым функтар, які ставіць у адпаведнасьць структуры мноства, на якой яна зададзеная (будзем называць такое мноства падсподным). Напрыклад, $U : Top \to Ens$ ставіць у адпаведнасьць тапалягічнай прасторы мноства яе пунктаў, а $U : Grp \to Ens$ ставіць у адпаведнасьць групе мноства яе элемэнтаў. Марфізмы паміж структурамі функтар забыцьця пераводзіць у адпаведныя функцыі паміж мноствамі.

3. Функтар свабоды з катэгорыі мностваў у катэгорыю груп $U : Ens \to Grp$ ставіць у адпаведнасьць кожнаму мноству свабодную групу на гэтым мностве, марфізмы вызначаюцца адпаведна (мы яшчэ вернемся да гэтага пытаньня пры абмеркаваньні ўнівэрсальных уласьцівасьцяў). Аналягічны функтар існуе для любой свабоднай канструкцыі, напрыклад, для свабоднага маноіду.

4. Рэпрэзэнтацыя групы на вэктарнай прасторы. Разгледзім групу G як катэгорыю. Разгледзім таксама катэгорыю вэктарных прастор над полем $\mathbb{R}$ $Vec_{\mathbb{R}}$. Функтар $F : G \to Vec_{\mathbb{R}}$ задае рэпрэзэнтацыю групы G. Сапраўды, $V = F(G) \in Vec_{\mathbb{R}}$ – канкрэтная вэктарная прастора. $F(1) = 1_{F(G)} = 1_V$. Для пары элемэнтаў групы $f, g \in G$ маем $F(gf) = F(g)F(f)$.

5. Аналягічна задаецца дзеяньне групы на мностве, і наагул на любым аб'екце нейкай катэгорыі.

6. Функтар паміж двума перадпарадкамі – гэта манатонная функцыя, то бок функцыя, якая захоўвае перадпарадак.

7. Функтар паміж дзьвюма групамі – гэта гомамарфізм груп.

З дапамогай функтараў мы можам вызначыць ізаморфныя катэгорыі, аналягічна таму як мы вызначалі ізаморфныя аб'екты з дапамогай стрэлак.

Азначэньне 1.5.2. *Катэгорыі C і D называюцца ізаморфнымі, калі існуе пара функтараў $F : C \to D, G : D \to D$ такіх, што $GF = 1_C$ і $FG = 1_D$.*

Паняцьце ізамарфізму катэгорый ня надта карыснае, каб фармалізаваць, калі дзьве катэгорыя па сутнасьці не адрозьніваюцца, патрэбнае больш агульнае паняцьце.

У некаторых выпадках карысна разглядаць функтары, якія дзейнічаюць не з катэгорыі, а з дуальнай ёй.

Азначэньне 1.5.3. *Функтар, які дзейнічае з дуальнай катэгорыі, называецца контраварыянтным (адносна C): $F : C^{op} \to D$.*

Звычайны функтар називацца каварыянтным.

Як лёгка заўважыць, контраварыянтны функтар зьмяняе кірунак кампазыцыі.

Прыклад 1.5.2. *1. Існуе функтар з катэгорыі тапалягічных прастор у катэгорыю часткова ўпарадкаваных мностваў $\mathcal{O} : Top \to Poset$, які кожнай тапалягічнай прасторы ставіць у адпаведнасьць мноства яе адкрытых падмностваў, упарадкаваных паводле ўключэньня, а кожнай непарыўнай функцыі $f : X \to Y$ ставіць у адпаведнасьць функцыю мностваў $f^{-1} : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$, якая пераводзіць адкрытае мноства ў ягоны правобраз (які будзе адкрытым, таму што f – непарыўная).*

2. Аналягічна, функтар $\mathcal{C} : Top \to Poset$ пераводзіць тапалягічную прастору ў мноства яе замкнёных падмностваў.

3. Для малой катэгорыі C функтар $F : C^{op} \to Ens$ называецца перадпучком.

4. Перадпучок на тапалягічнай прасторы T – гэта функтар $F : \mathcal{O}(T)^{op} \to Ens$. Прыклад такога функтара – перадпучок непарыўных рэчаісных функцыяў, які ставіць у адпаведнасьць кожнаму $U \in \mathcal{O}(C)$ мноства непарыўных рэчаісназначных функцыяў $f : U \to \mathbb{R}$, а на стрэлках дзейнічае звужэньнем (то бок для $U, V \in \mathcal{O}(C)$, такіх, што $U \subseteq V$, і $f \in V$ $F(U \subseteq V)(f) = f\big|_U$).

Прыклад 1.5.3. *Функтар, які ставіць у адпаведнасьць кожнай вэктарнай прасторы дуальную – контраварыянтны.*

Назавем наш функтар $(-)^* : Vec_{\mathbb{R}}^{op} \to Vec_{\mathbb{R}}$.

Вэктарную прастору V ён пераводзіць у V^*.

Элемэнт прасторы V^* – гэта лінейны функцыянал, то бок лінейная функцыя з прасторы V у поле, над якім зададзеная вэктарная прастора.

Марфізм $f : V \to W$ наш функтар пераводзіць у марфізм $f^* : W^* \to V^*$, які дзейнічае прадкампазыцыяй на элемэнтах W^*, то бок для $\omega \in W^*$ мы маем $\omega : W \to \mathbb{R}$ і функтар дзейнічае так:

$(f)^*(\omega) = f^*(\omega) = \omega \circ f : V \to \mathbb{R}$.

Функтары, як і звычайныя функцыі, могуць мець некалькі аргумэнтаў. Па кожным з аргумэнтаў функтар можа мець сваю варыянтнасьць.

Каб разгледзець функтары многіх зьменных нам спатрэбіцца паняцьце здабытку катэгорый.

Азначэньне 1.5.4. *Здабыткам катэгорый C і D называецца катэгорыя $C \times D$ такая, што*

1. Яе аб'екты – гэта ўпарадкаваныя пары аб'ектаў з C і D: $(c, d) \in Ob(C \times D)$, дзе $c \in C$ і $d \in D$.

2. Яе марфізмы – гэта ўпарадкаваныя пары марфізмаў з C і D.

3. Кампазыцыя і адзінкавыя марфізмы вызначаныя пакампанэнтна.

Прыклад 1.5.4. *Важным прыкладам функтара з двума аргумэнтамі ёсьць гом-функтар, які можна задаць на любой лякальна малой катэгорыі C.*

$C(-,-) : C^{op} \times C \to Ens$

Гэты функтар пераводзіць пару аб'ектаў (a, b) у адпаведны гомсэт, а на марфізмы дзейнічае прад- і пасьлякампазыцыяй.

Для $f : a' \to a$, $g : b \to b'$ і $h \in C(a, b)$ маем

$C(f, g) : C(a, b) \to C(a', b')$,

$C(f, g)(h) = g \circ h \circ f$.

Прыклад 1.5.5. *У гом-функтары з двума аргумэнтамі можна зафіксаваць значэньне аднаго з аб'ектных аргумэнтаў і атрымаць каварыянтны і контраварыянтны гом-функтары $C(c, -)$ і $C(-, c)$.*

Па-іншаму гом-функтары называюцца рэпрэзэнтаванымі функтарамі. У выпадку аднааргумэнтных гом-функтараў гавораць, што $C(c, -)$ і $C(-, c)$ рэпрэзэнтаваныя аб'ектам c.

1.6 Падкатэгорыі

Разьбіваць аб'екты вывучэньня на часткі бывае надзвычай карысна, фізыкі не дадуць падмануць. Таксама як мы вызначаем падмноства, падпрастору, падгрупу альбо падальгебру, можна вызначыць і падкатэгорыю.

Азначэньне 1.6.1. *Падкатэгорыя катэгорыі C – гэта такая катэгорыя D, што яе сукупнасьці аб'ектаў і марфізмаў – часткі сукупнасьцяў аб'ектаў і марфізмаў катэгорыі C ($D_0 \subset C_0$ і $D_1 \subset C_1$). Прычым калі $X \in D_0$, то $1_X \in D_1$, а калі $f, g \in D_1$, то $f \circ g \in D_1$ калі $f \circ g$ існуе ў C.*

Прыклад 1.6.1. *1. Катэгорыя концых мностваў Fin – падкатэгорыя катэгорыі мностваў Ens.*

2. Катэгорыя Абэлевых груп Ab – падкатэгорыі катэгорыі груп Grp.

3. Катэгорыя Гаўсдарфавых тапалягічных прастор $Haus$ – падкатэгорыя катэгорыі тапалягічных прастор Top.

1.7 Натуральныя пераўтварэньні

Фармалізацыя паняцьця натуральнасьці – гэта тое, дзеля чаго першапачаткова тэорыя катэгорый была створаная.

У матэматыцы мы часта сустракаем нейкія канструкцыі, якія выглядаюць натуральнымі ў тым сэнсе, што не патрабуюць адвольнага выбару.

Напрыклад, як мы ведаем, усе концыя вэктарныя прасторы над дадзеным полем той самай разьмернасьці – ізаморфныя. Аднак, калі мы прыгледзімся да гэтага пытаньня бліжэй, то заўважым, што ізамарфізм можа быць розных тыпаў.

Так, калі мы возьмем падвойнаспалучаную прастору, то ізамарфізм паміж V і V^{**} можна прад'явіць, не ажыцьцяўляючы адвольнага выбару базісу.

Менавіта, элемэнт прасторы V – гэта вэктар $v \in V$.

Элемэнт прасторы V^{**} – гэта функцыя $\nu : V^* \to \mathbb{K}$, якая пераводзіць элемэнт прасторы V^* у элемэнт поля $\mathbb{K}$, над якім гэтая прастора зададзеная.

У сваю чаргу, элемэнт прасторы V^* – гэта функцыя $\omega : V \to \mathbb{K}$.

Як мы можа атрымаць з вэктара v функцыю ν?

А вельмі проста, нашая функцыя будзе дзейнічаць так: $\nu(\omega) = \omega(v)$. То бок, мы проста пераводзім функцыю ω ў лік, прымяняючы яе да зададзенага вэктара.

Вы заўважылі ў працэсе нейкі выбар базісу ці іншую адвольнасьць? Я не. Падобныя адпаведнасьці называюцца натуральнымі.

А зараз спытаем сябе, ці можам мы падобным чынам пабудаваць ізамарфізм паміж прасторамі V і V^*? Не, ня можам. Як бы мы ні спрабавалі, нам спатрэбіцца выбраць нейкі базіс, адпаведнасьць ня мае натуральнага характару.

Паспрабуем фармалізаваць намацанае намі паняцьце. Па-першае, мы маем эндафунктар (то бок, функтар, які дзейнічае з катэгорыі ў яе ж)

$(-)^{**} : Vec_{\mathbb{K}} \to Vec_{\mathbb{K}}$. Па-другое, мы выкарыстоўвалі фунцыю эвалюацыі (вылічэньня) ev, якая бярэ, і кожнаму элемэнту $v \in V$ ставіць у адпаведнасьць функцыю ev_v, якая дзейнічае на прасторы V^*, прымяняючы элемэнты гэтай прасторы да вэктара v.

Спачатку паглядзім, як дзейнічае функтар $(-) * *$. Прастору V ён пераводзіць у V^{**}, а стрэлку $f : V \to W$ у стрэлку $f^{**} : V^{**} \to W^{**}$, якая дзейнічае на элемэнтах V^{**} такім чынам ($\nu \in V^{**}$, $\omega \in W^*$):

$(f^{**}(\nu))(\omega) = \nu(\omega \circ f)$.

Як гэта суадносіцца зь дзеяньнем ev? Паспрабуем намаляваць дыяграму, бо функцый яўна стала замнога, каб апісваць іхнае дзеяньне словамі альбо формуламі.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{ev} & V^{**} \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f^{**}} \\ W & \xrightarrow{ev} & W^{**} \end{array}$$

Аказваецца, што у якім парадку мы б не прымянялі функцыі з дыяграмы, мы атрымаем той сам вынік. То бок для вэктара $v \in V$ і $\omega \in W^*$ мы маем

$f^{**}(ev(v))(\omega) = ev(v)(\omega \circ f) = \omega(f(v))$

і

$ev(f(v))(\omega) = \omega(f(v))$.

Якім бы шляхам па дыяграме мы ня рухаліся, пераводзячы элемэнт з V у W^{**}, вынік атрымліваецца той самы. Каб апісаць падобную сытуацыю – вынік прымяненьня функцый не залежыць ад выбранага на дыяграме шляху – гавораць, што дыяграма камутуе.

Гэта значыць, што наш функтар $(-)^{**}$ узаемадзейнічае нейкім натуральным чынам з функцыяй ev.

Калі мы дастаткова доўга падумаем над тым, што намалявана на нашай карцінцы, то мы ўбачым, што справа мы бачым вынік дзеяньня функтару $(-)^{**}$, а зьлева – адзінкавага (альбо тоеснага) функтару.

Азначэньне 1.7.1. *Няхай зададзеныя два функтары, якія дзейнічаюць між тымі самымі катэгорыямі $F, G : C \to D$.*

Натуральным пераўтварэньнем паміж гэтымі функтарамі называецца набор стрэлак у D (яны называюцца кампанэнтамі натуральнага пераўтварэньня), для кожнага аб'екта $c \in ObC$ па адной стрэлцы $\alpha_c : F(c) \to G(c)$, такі, што для кожнай стрэлкі з C $f : c \to c'$ дыяграма

$$\begin{array}{ccc} F(c) & \xrightarrow{\alpha_c} & G(c) \\ \downarrow{\scriptstyle F(f)} & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(c') & \xrightarrow{\alpha_{c'}} & G(c') \end{array}$$

камутуе.

Дыяграма з азначэньня кажа нам, што $G(f) \circ \alpha_c = \alpha_{c'} \circ F(f)$.

Такім чынам, ev з нашага матывацыйнага прыкладу задае натуральнае пераўтварэньне з тоеснага функтару $1_{Vec_{\mathbb{K}}}$ у функтар $(-)^{**}$. Больш за тое, гэтае натуральнае пераўтварэньне – натуральны ізамарфізм.

Азначэньне 1.7.2. *Натуральны ізамарфізм – гэта натуральнае пераўтварэньне, кожны кампанэнт якога – ізамарфізм.*

Прыклад 1.7.1. *1. Для кожнага функтару F існуе тоеснае (адзінкавае, трывіяльнае) натуральнае пераўтварэньне 1_F, якое, натуральна, ёсьць натуральным ізамарфізмам.*

2. Функтары адкрытых і замкнёных мностваў $\mathcal{O}, \mathcal{C} : Top \to Poset$ натуральна ізаморфныя. Кампанэнты натуральнага ізамарфізму пераводзяць кожнае мноства ў ягонае дапаўненьне. Камутатыўнасьць дыяграмы натуральнасьці вынікае з таго, што ўзяцьце дапаўненьня і апэрацыя правобраза камутуюць.

3. Возьмем дзьве вэктарныя рэпрэзэнтацыі групы G: ρ_1 і ρ_2 на прасторы V. Натуральнае пераўтварэньне паміж імі – гэта такі лінейны апэратар T на V, што для любога $g \in G$ мае месца $\rho_2(g) \circ u = u \circ \rho_1(g)$. Такім чынам, у гэтым выпадку натуральнае пераўтварэньне – гэта гомамарфізм рэпрэзэнтацый, як і варта было чакаць.

1.8 Катэгорыі функтараў

Натуральныя пераўтварэньні – гэта марфізмы паміж функтарамі. Як мы ўжо заўважылі, існуе тоеснае натуральнае пераўтварэньне. Такім чынам, мы ў кроку ад таго, каб паглядзець на сукупнасьць функтараў з катэгорыі C у катэгорыю D як на катэгорыю.

Чаго нам бракуе? Кампазыцыі натуральных пераўтварэньняў. Няхай мы маем тры функтары $F, G, H : C \to D$ і два натуральныя пераўтварэньні $\alpha : F \to G$ і $\beta : G \to H$. Давайце паспрабуем намаляваць дыяграму. Возьмем у катэгорыі C аб'екты c і c'.

$$\begin{tikzcd}
F(c) \arrow[r, "\alpha_c"] \arrow[d, "F(f)"] & G(c) \arrow[r, "\beta_c"] \arrow[d, "G(f)"] & H(c) \arrow[d, "H(f)"] \\
F(c') \arrow[r, "\alpha_{c'}"] & G(c') \arrow[r, "\beta_{c'}"] & H(c')
\end{tikzcd}$$

Мы хочам атрымаць натуральнае пераўтварэньне $\beta \circ \alpha : F \to H$. Што, калі ў якасьці ягоных кампанэнтаў узяць кампазыцыю кампанэнтаў пераўтварэньняў α і β?

Нам трэба праверыць, што ўмова натуральнасьці выкананая. Кожны з квадратаў дыяграмы – камутатыўны, то бок $H(f) \circ \beta_c = \beta_{c'} \circ G(f)$ і $G(f) \circ \alpha_c = \alpha_{c'} \circ F(f)$.

Роўнасьць $(\beta_{c'} \circ \alpha_{c'}) \circ F(f) = H(f) \circ (\beta_c \circ \alpha_c)$ відавочная.

Асацыятыўнасьць такой кампазыцыі натуральных пераўтварэньняў вынікае з асацыятыўнасьці кампазыцыі функцый.

Азначэньне 1.8.1. *Няхай зададзеныя дзьве катэгорыі C і D. Катэгорыяй функтараў з C у D называецца катэгорыя D^C, аб'ектамі якой ёсьць усе функтары з C у D, а стрэлкамі – натуральныя пераўтварэньні паміж імі з кампазыцыяй, вызначанай як кампазыцыя функцый-кампанэнтаў.*

Што можна сказаць пра памер такой катэгорыі? Яна можа быць ня проста вялікай, а надзвычай вялікай. Возьмем для прыкладу катэгорыю мностваў Ens і катэгорыю з двума аб'ектамі 2_I, у якой два супрацьлеглыя нетрывіяльныя марфізмы ($0 \underset{10}{\overset{01}{\longleftrightarrow}} 1$). Каб задаць функтар з Ens у 2_I трэба выбраць для кожнага мноства з Ens аб'ект-вобраз у 2_I. Стрэлкі паміж мноствамі з аднаго правобраза пераходзяць у адпаведную адзінкавую стрэлку, а стрэлкі паміж мноствамі з розных правобразаў – у адпаведную стрэлку паміж аб'ектамі 2_I. Колькі такіх функтараў існуе? Столькі, колькі падмностваў у $Ob(Ens)$, то бок столькі, колькі падмностваў ва ўнівэрсуме U. Такім чынам, падобная катэгорыя сама не зьмяшчаецца ва ўнівэрсум U і патрабуе большага ўнівэрсуму.

Прыклад 1.8.1. *1. Катэгорыя функтараў з групы G у катэгорыю вэктарных прастораў над полем $\mathbb{K}$ $Vec_{\mathbb{K}}$ – гэта катэгорыя $\mathbb{K}$-вэктарных рэпрэзэнтацый групы G.*

2. Для малой катэгорыі C катэгорыя Ens^C – гэта катэгорыя перадпучкоў, па-іншаму яна пазначаецца $\hat{C}$.

1.9 Азначэньні з дапамогай дыяграмаў

У гэтай і наступнай частках абмяркуем больш падрабязна выкарыстаньне камутатыўных дыяграм у тэорыі катэгорый.

Нефармальна, дыяграма – гэта набор аб'ектаў катэгорыі і марфізмаў паміж імі. Камутатыўная дыяграма – гэта такая дыяграма, у якой кампазыцыі марфізмаў з пачаткам і канцом у тых самых аб'ектах не залежаць ад выбранага шляху.

Разгледзім, напрыклад, такую камутатыўную дыяграму

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "k"] & Z \arrow[d, "l"] \\
U \arrow[r, "m"] & V \arrow[r, "n"] & W
\end{tikzcd}$$

Камутатыўнасьць гэтае дыяграмы азначае, што $l \circ g \circ f = n \circ k \circ f = n \circ m \circ h$, але таксама і $k \circ f = m \circ h$, і гэтак далей.

Камутатыўныя дыяграмы зручна выкарыстоўваць пры аналізе суадносінаў паміж марфізмамі і аб'ектамі ў катэгорыі, у доказ і азначэньнях.

Для прыкладу, выразім на мове камутатыўных дыяграм умову асацыятыўнасьці з азначэньня катэгорыі $((h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f))$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"] & Y \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\
& Z \arrow[r, "h"] & V
\end{tikzcd}$$

Справіўшыся з гэтай задачай, давайце паспрабуем даць на дыяграмнай мове якое-небудзь знаёмае азначэньне. Напэўна, найпрасьцейшы альгебраічны аб'ект – гэта маноід. Як ужо ўспаміналася, маноід – гэта мноства з зададзенай на ім бінарнай асацыятыўнай апэрацыяй і вылучаным адзінкавым элемэнтам.

Для заданьня бінарнай апэрацыі нам спатрэбіцца Дэкартаў здабытак мностваў (апэрацыя задаецца на пары элемэнтаў, а вызначэньне асацыятыўнасьці патрабуе трох элемэнтаў), і мноства з адным элемэнтам (назавем яго проста 1), каб выбраць адзінку маноіда.

Такім чынам, мы выбіраем мноства M (аб'ект у катэгорыі Ens), функцыю $\mu : M \times M \to M$, якая будзе прадстаўляць нашую апэрацыю, і функцыю $\eta : 1 \to M$.

Як працуе апэрацыя, ясна: яна бярэ два элемэнты і робіць зь іх адзін. А як працуе выбар адзінкавага элемэнта? Ён бярэ адзіны элемэнт мноства 1 і пераводзіць яго ў фіксаваны элемэнт мноства M, які мы і будзем называць адзінкай маноіду M.

Засталося выразіць дыяграмамі асацыятыўнасьць апэрацыі і тое, што адзінка сапраўды паводзіць сябе як адзінка адносна нашай апэрацыі.

Прыклад 1.9.1. *Маноідам мы называем аб'ект M катэгорыі Ens разам з стрэлкамі $\mu : M \times M \to M$ і $\eta : 1 \to M$ такімі, што наступныя дыяграмы камутуюць:*

$$\begin{tikzcd}
M \times M \times M \arrow[r, "1_M \times \mu"] \arrow[d, "\mu \times 1_M"] & M \times M \arrow[d, "\mu"] \\
M \times M \arrow[r, "\mu"] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\eta \times 1_M"] \arrow[dr, "1_M"'] & M \times M \arrow[d, "\mu"] & M \arrow[l, "1_M \times \eta"'] \arrow[dl, "1_M"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Перакладаючы дыяграмы на мову формул, атрымліваем

1. Асацыятыўнасьць: для элемэнтаў $a, b, c \in M$ маем $\mu(a, \mu(b, c)) = \mu(\mu(a, b), c)$.

2. Адзінка: для элемэнтаў $a, b \in M$ маем $\mu(\eta(1), a) = a$ і $\mu(b, \eta(1)) = b$.

Азначэньні на мове дыяграм карысныя ня толькі сваёй нагляднасьцю, але і лёгкасьцю перанясеньня з катэгорыі ў катэгорыю.

Так, для азначэньня маноіду нам спатрэбіліся толькі Дэкартаў здабытак і мноства з адным элемэнтам, якое паводзіць сябе як адзінка адносна Дэкартава здабытку і дазваляе выбраць адзінкавы элемэнт у мностве.

А што, калі замест катэгорыі Ens мностваў мы возьмем катэгорыю Ab Абэлевых груп?

Тут нам давядзецца троху папрацаваць. Асноўнае пытаньне, што мы хочам лічыць здабыткам Абэлевых груп?

1.10 Катэгорны здабытак

Спачатку прааналізуем з катэгорнага пункту гледжаньня канструкцыю Дэкартавага здабытку.

У чым сутнасьць здабытку двух мностваў, як мы яго прымяняем?

Для мностваў $X, Y \in ObEns$ мы маем нейкі аб'ект $X \times Y$, з элемэнтаў якога мы можам атрымаць ягоныя складовыя часткі – элемэнт X і элемэнт Y. Фармалізуючы гэта, скажам, што існуюць праекцыі $p_1 : X \times Y \to X$ і $p_2 : X \times Y \to Y$.

Калі для нейкага мноства P мы маем пару функцый $f : P \to X$, $g : P \to Y$, то існуе функцыя $u : P \to X \times Y$, такая, што $p_1 \circ u = f$ і $p_2 \circ u = g$. Элемэнту $p \in P$ гэтая функцыя ставіць у адпаведнасьць пару $(f(p), g(p)) \in X \times Y$.

Існаваньне функцыі $u : P \to X \times Y$ для кожнай пары функцый $f : P \to X$ і $g : P \to Y$ азначае, што $X \times Y$ зьмяшчае ўсе магчымыя пары $\{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$. Калі $X \times Y$ не зьмяшчае ніякай іншай інфармацыі, такая функцыя – адзіная.

Цяпер мы гатовыя даць катэгорнае – у тэрмінах марфізмаў – азначэньне здабытку, якое будзе мець сэнс ня толькі ў катэгорыі мностваў і ня будзе вызначаць канкрэтную канструкцыю.

Азначэньне 1.10.1. *Здабыткам двух аб'ектаў X, Y катэгорыі C называецца аб'ект $X \times Y$ і пара марфізмаў $p_1 : X \times Y \to X$ і $p_2 : X \times Y \to Y$ такія, што для любога $P \in C$ і пары марфізмаў $f : P \to X$ і $g : P \to Y$ існуе адзіны марфізм $u : P \to X \times Y$ такі, што $p_1 \circ u = f$ і $p_2 \circ u = g$.*

Іншымі словамі, існуе адзіны марфізм u такі, што дыяграма ніжэй камутуе

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[d, "!u"] \arrow[ddl, "f"'] \arrow[ddr, "g"] & \\
& X \times Y \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

Ці заўжды існуе так вызначаны здабытак? Не, ёсьць катэгорыі, у якіх здабыткі не існуюць, альбо існуюць не для ўсіх элемэнтаў.

Тое, што нам трэба вынесьці з прыведзенага прыкладу – гэта ідэя задаваць аб'ект не канструкцыяй, а ягонымі так званымі ўнівэрсальнымі ўласьцівасьцямі.

Каб задаць унівэрсальную ўласьцівасьць мы спачатку выбіраем нейкую ўласьцівасьць (як правіла гэта наяўнасьць нейкіх марфізмаў з аб'екта, альбо ў яго), выбіраем спосаб параўнаньня аб'ектаў паміж сабой (напрыклад, наяўнасьць марфізму паміж двума аб'ектамі), а потым выбіраем найлепшы, унівэрсальны, аб'ект, той, які зададзеным чынам параўноўваецца з усімі іншымі аб'ектамі катэгорыі.

Прааналізуем з гэтага пункту гледжаньня азначэньне канчатковага аб'екта. Уласьцівасьць – гэта проста ўласьцівасьць быць аб'ектам катэгорыі. Спосаб параўнаньня: наяўнасьць стрэлкі паміж двума аб'ектамі, прычым лепшы – той аб'ект, які служыць канцом стрэлкі. Унівэрсальны аб'ект – такі, у які ідзе роўна адна стрэлка з кожнага аб'екта катэгорыі.

Для здабытку ўласьцівасьць – гэта мець дзьве стрэлкі з аб'екта ў два зададзеныя аб'екты X і Y. Параўнаньне – аналягічна як для концага аб'екта – наяўнасьці стрэлкі паміж аб'ектамі, пры чым лепшы той, які ёсьць канцом стрэлкі. З тым, што цяпер мы параўноўваем ня проста аб'екты, а аб'екты, зь якіх ідуць дзьве стрэлкі ў X і Y. Унівэрсальны – той аб'ект з парай стрэлак у X і Y, у які ёсьць роўна па адной стрэлцы зь любога аб'екта з парай стрэлак у X і Y.

Як мы бачылі на прыкладзе канчатковага аб'екта, падобны ўнівэрсальны аб'екты вызначаны толькі з дакладнасьцю да адзінага ізамарфізму.

Як выглядае сытуацыя з здабыткам? Аналягічна.

Няхай U – іншы аб'ект, які адпавядае азначэньню здабытку (пазначым праекцыі зь яго u_1 і u_2). Мы маем наступную камутатыўную дыяграму:

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[dl, "u_1"'] \arrow[d, "!u"] \arrow[dr, "u_2"] & \\
X & X \times Y \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "!p"] & Y \\
& U \arrow[ul, "u_1"] \arrow[ur, "u_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Дзе стрэлкі u і p – гэта ўнікальныя стрэлкі з азначэньня здабытку (u існуе і ўнікальная таму што $X \times Y$ – здабытак, p – таму што U – здабытак).

З дыяграмы мы атрымліваем, што $p \circ u = 1_U$, аналягічна атрымліваецца $u \circ p = 1_{X \times Y}$. Паводле азначэньня здабытку, як адзначана вышэй, u і p – унікальныя стрэлкі.

Мы паказалі, што U і $X \times Y$ – ізаморфныя з дакладнасьцю да ўнікальнага ізамарфізму.

Ці можна неяк фармалізаваць паняцьце ўнівэрсальнасьці і раз і назаўжды давесьці ўнікальнасьць унівэрсальнага аб’екта з дакладнасьцю да ўнікальнага ізамарфізму? Можна. Гэтым мы зоймемся пазьней. Пакуль гэтага ня зроблена, адзначу, што ўнікальнасьць унівэрсальных аб’ектаў, якія будуць уводзіцца пазьней, можна даказаць па аналёгіі з унікальнасьцю канчатковага аб’екта і здабытку. Яўна я гэтага рабіць ня буду, але правесьці адпаведныя разважаньні павінна быць лёгкім практыкаваньнем.

1.11 Мультыкатэгорыі і тэнзарныя здабыткі

Перад тым, як займацца Абэлевымі групамі, разгледзім больш просты выпадак, а менавіта вэктарныя прасторы. Няхай мы маем катэгорыю $Vec_{\mathbb{K}}$ вэктарных прастор над полем $\mathbb{K}$. У якасьці здабытку прастор $V, W \in Vec_{\mathbb{K}}$ возьмем звычайны тэнзарны здабытак $V \otimes W$. Нагадаю ягоную канструкцыю.

Пачнем з школьнай – некатэгорнай – канструкцыі. Нефармальна прастора $V \otimes W$ – гэта вэктарная прастора, якая мае ў якасьці базісу мноства ўсіх пар $\{v \otimes w | v \in B_V, w \in B_W\}$, дзе B_V і B_W – выбраныя базісы V і W. Элемэнты гэтай прасторы называюцца тэнзарамі.

Тэнзарны здабытак двух адвольных вэктараў задаецца праз іхны расклад на базісы. Лёгка паказаць, што функцыя $-\otimes- : V \times W \to V \otimes W$ ($V \times W$ – звычайны Дэкартаў здабытак) білінейная.

Можна даць незалежнае ад базісу азначэньне тэнзарнага здабытку як фактар-прасторы.

У тэрмінах унівэрсальных уласьцівасьцяў тэнзарны здабытак задаецца наступным чынам.

Азначэньне 1.11.1. *Тэнзарным здабыткам двух вэктарных прастораў* V *і* W *называецца аб'ект* $V \otimes W$*, у які ёсьць білінейная функцыя* $-\otimes-: V \times W \to V \otimes W$ *такая, што для любой іншай білінейнай функцыі* $b : V \times W \to U$ *існуе адзіная лінейная функцыя* $u : V \otimes W$ *такая, што дыяграма ніжэй камутуе*

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "b"] \arrow[d, "-\otimes-"'] & U \\ V \otimes W \arrow[ur, "!u"'] & \end{tikzcd}$$

па-іншаму гавораць, што марфізм b *адназначна фактарызуецца пра марфізм* $- \otimes -$.

Як і для звычайнага здабытку лёгка паказаць, што такі здабытак існуе адзін з дакладнасьцю да адзінага ізамарфізму. Лёгка паказаць таксама, што азначэньні з дапамогай базісаў і з дапамогай фактар-прасторы адпавядаюць гэтай унівэрсальнай уласьцівасьці і такім чынам, эквівалентныя.

Што кепска з нашым унівэрсальным азначэньнем? Кепска тое, што яно ня поўнасьцю катэгорнае ў тым сэнсе, што частка структуры, якую яна выкарыстоўвае ня выражаная непасрэдна ў тэрмінах ужываных катэгорый. Гаворка пра білінейныя функцыі. Нагадаю, што мы разглядаем аб'екты $Vec_{\mathbb{K}}$, марфізмы паміж якімі – лінейныя функцыі, і раптам нам спатрэбіўся яшчэ адзін від марфізмаў, азначэньне якога паходзіць з разгляданай прадметнай галіны – білінейныя функцыі. Натуральна, так можна жыць, але ці можам мы даць больш катэгорнае азначэньне, у якім усё будзе фармалізавана катэгорнай мовай?

Чаго нам не хапае? Нам патрэбныя полілінейныя функцыі. У звычайнай катэгорыі мы можам задаць функцыі некалькіх аргумэнтаў, калі існуюць здабыткі (такая функцыя – гэта проста $f : X \times Y \to Z$), аднак для выпадку катэгорыі $Vec_{\mathbb{K}}$ такая фнукцыя будзе лінейнай на $X \times Y$, а не білінейнай.

Нам магло б дапамагчы ўбудаванае ў катэгорыю паняцьце функцыі некалькіх аргумэнтаў. Катэгорныя структуры з стрэлкамі, дамэн якіх – сьпіс аб'ектаў, існуюць і называюцца мультыкатэгорыямі.

Кампазыцыя вызначаная дакладна так, як можна было б чакаць: функцыя n аргумэнтаў можа быць скамбінаваная з n функцыяў.

Азначэньне 1.11.2. *Мультыкатэгорыя* C *складаецца з наступных аб'ектаў:*

1. *Сукупнасьць аб'ектаў* C_0.

2. Сукупнасьць мультыстрэлак (мультымарфізмаў) C_1.

3. Адлюстраваньня, якое для кожнай мультыстрэлкі задае яе крыніцу $s : C_1 \to (C_0)*$, дзе $(C_0)*$ – свабодны маноід на C_0 (то бок мноства концых сьпісаў на C_0, пусты сьпіс уключаны).

4. Адлюстраваньня, якое для кожнай мультыстрэлкі задае яе прызначэньне $t : C_1 \to C_0$.

Мультыстрэлка запісваецца як $f : X_1, ..., X_n \to Y$.

Сукупнасьць мультыстрэлак з $X_1, ..., X_n$ у Y пазначаецца $C(X_1, ..., X_n; Y)$ альбо $Hom_C(X_1, ..., X_n; Y)$.

На зададзеных вышэй аб'ектах вызначаныя наступныя апэрацыі:

1. Адлюстраваньне $1_{\_} : C_0 \to C_0$ вызначае для кожнага $X \in C_0$ адзінкавую стрэлку 1_X.

2. Для кожнага набора лікаў $n, k_1, ..., k_n \in \mathbb{N}$ і аб'ектаў $Y, X_i, X_i^j \in C_0$ вызначаная кампазыцыя

$\circ : C(X_1, ..., X_n; Y) \times C(X_1^1, ..., X_1^{k_1}; X_1) \times ... \times C(X_n^1, ..., X_n^{k_n}; X_n) \to C(X_1^1, ..., X_1^{k_1}, ..., X_n^1, ..., X_n^{k_n}; Y)$,

якая запісваецца $f \circ (f_1, ..., f_n)$.

Для так зададзенай структуры выконваюцца наступныя аксыёмы – у кожным выпадку, калі адпаведныя кампазыцыі вызначаныя:

1. Адзінкавасьць: $f \circ (1_{X_1}, ..., 1_{X_n}) = f = 1_Y \circ f$.

2. Асацыятыўнасьць: $f \circ (f_1 \circ (f_1^1, ..., f_1^{k_1}), ..., f_n \circ (f_n^1, ..., f_n^{k_n})) = (f \circ (f_1, ..., f_n)) \circ (f_1^1, ..., f_1^{k_1}, ..., f_n^1, ..., f_n^{k_n})$.

Запісаныя формуламі аксыёмы мультыкатэгорый выглядаюць ня надта чытэльна (хаця тых, хто бачыў тэнзары, пужаць не павінныя).

Азначэньне 1.11.3. *Стрэлка з дамэнам з аднаго аб'екта называецца унарнай.*

Прыклад 1.11.1. *1. Мультыкатэгорыя, у якой усе стрэлкі ўнарныя – гэта звычайная катэгорыя.*

2. Мультыкатэгорыя $MVec_{\mathbb{K}}$ вэктарных прастор над полем K з полілінейнымі адлюстраваньнямі.

Маючы ў руках новы інструмэнт, мы можам даць натуральнае азначэньне тэнзарнага здабытку.

Азначэньне 1.11.4. *Тэнзарным здабыткам аб'ектаў X і Y мультыкатэгорыі C называецца такі аб'ект $X \otimes Y \in C$ разам з мультымарфізмам $- \otimes - : X, Y \to X \otimes Y$, што любы мультымарфізм $f : X, Y \to Z$ адназначна фактарызуецца праз $- \otimes - : X, Y \to X \otimes Y$, то бок для любога f існуе адзіны мультымарфізм $u : X \otimes Y \to Z$ такі, што дыяграма ніжэй камутуе:*

$$\begin{tikzcd} X,Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "-\otimes-"] & Z \\ X\otimes Y \arrow[ur, "!u"] & \end{tikzcd}$$

Паспрабуем з гэтага агульнага азначэньня атрымаць канкрэтную канструкцыю тэнзарнага здабытку вэктарных прастораў.

Нам зададзеныя дзьве прасторы $V, W \in MVec_{\mathbb{K}}$. Знойдзем прыклад $V \otimes W$ і білінейнае адлюстраваньне $-\otimes- : V, W \to V \otimes W$, якія адпавядаюць азначэньню.

Возьмем адвольнае білінейнае адлюстраваньне $f : V, W \to Z$.

Па азначэньні для f існуе (лінейнае) $u : V \otimes W \to Z$ такое, што $f(v, w) = u(v \otimes w)$.

У якасьці першай вэрсіі $X \otimes Y$ напрошваецца прастора фармальных лінейных камбінацый пар $(v, w)|v \in V, w \in W$, а $u(x, y) = f(x, y)$. Аднак, $-\otimes-$ мусіць быць білінейным адлюстраваньнем, гэта значыць, што, напрыклад, $kv \otimes w = k(v \otimes w) = v \otimes kw$. Такім чынам, нам трэба фактарызаваць нашую прастору фармальных камбінацый па адпаведных суадносінах:

$(kv, w) = k(v, w) = (v, kw)$,

$(v + v', w) = (v, w) + (v', w)$,

$(v, w + w') = (v, w) + (v, w')$.

Паколькі f таксама білінейная, то пасьля такой фактарызацыі u застаецца добра вызначаным. u адназначна працягваецца па лінейнасьці на ўсю прастору $V \otimes W$.

Заўважу, што прастора фармальных камбінацый – чарговы прыклад свабоднай канструкцыі.

Прыведзеная на пачатку канструкцыя з выкарыстаньнем базісу таксама адпавядае азначэньню здабытку, а, значыць, ізаморфная канструкцыі фактарызаванай прасторы фармальных камбінацый пар.

Прывядзем прыклады яшчэ колькі мультыкатэгорый і адпаведных тэнзарных здабыткаў.

Прыклад 1.11.2. *1. Мультыкатэгорыя Абэлевых груп MAb з марфізмамі – полілінейнымі адлюстраваньнямі ($f(g + h, k + l) = f(g, k) + f(g, l) + f(h, k) + f(h, l)$).*

Тэнзарны здабытак G, H – фактар свабоднай Абэлевай групы на $G \times H$ (то бок, фармальных лінейных камбінацый адпаведных пар) па $(g + g', h) = (g, h) + (g', h)$ і $(g, h + h') = (g, h) + (g, h')$.

2. Для камутатыўнага колца R разгледзім мультыкатэгорыю R-модуляў $MRMod$ з марфізмамі – R-лінейнымі адлюстраваньнямі.

Тэнзарны здабытак модуляў $A, B \in MRMod$ $A \otimes_R B$ *будуецца аналягічна, як фактар тэнзарнага здабытку падсподных Абэлевых груп* $A \otimes B$ *па суадносінах* $(a, rb) = (ra, b)$.

1.12 Унутраныя маноіды

Зараз, маючы ў сваіх руках азначэньні тэнзарных здабыткаў у некалькіх катэгорыях, мы можам вернуцца да задачы пераносу азначэньня маноіда з катэгорыі мностваў Ens у іншыя катэгорыі.

Разьдзел 2

Ёнэдава лема

Разьдзел 3

Альгебраічныя тэорыі

Разьдзел 4

Топасы

Разьдзел 5

Катэгорыя катэгорый

Разьдзел 6

Фармальная тэорыя манад