Master: Ciencia de Datos e Ingeniería de Computadores

Curso: Visión por Computador

Rosa Mª Rodríguez Sánchez

Dpto. Ciencias de la Computación e I. A.

E.T.S. de Ingenierías Informática y de Telecomunicaciones

Universidad de Granada

Transformada de Hotelling (Transformada discreta Karhunen-Loeve o PCA).

Índice de contenido

1. Introducción

La transformada Hotelling, también conocida como transformada autovector, componente principal o transformada discreta de Karhunen-Loéve, se basa en propiedades estadísticas de representaciones vectoriales.

2. Conceptos de estadística necesarios.

Supongamos que tenemos M vectores procedentes de una muestra aleatoria con vectores x_k, la media m_x, se definen como:

$$m_x = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} m_k$$

y la covarianza como:

$$C_x = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} x_k x_k^t - m_k m_k^t$$

Siendo x_k^t y m_k^t el vector traspuesto de x_k y m_k ,respectivamente.

2.1. Autovalores y Autovectores

Los autovalores y autovectores aparecen en el contexto de transformaciones lineales, que afectan a matrices. Por ejemplo dados los siguientes vectores:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \quad y \quad y = \begin{bmatrix} -20 \\ -60 \\ 80 \end{bmatrix}$$

Estos vectores son uno múltplo del otro ya que $x = \lambda\, y$ con $\lambda = \frac{-1}{20}$. Para extender este concepto de multiplicidad escalar supongamos que tenemos una matriz A de n por n dimensiones. Tal que:

$Av = w$

desarrollando

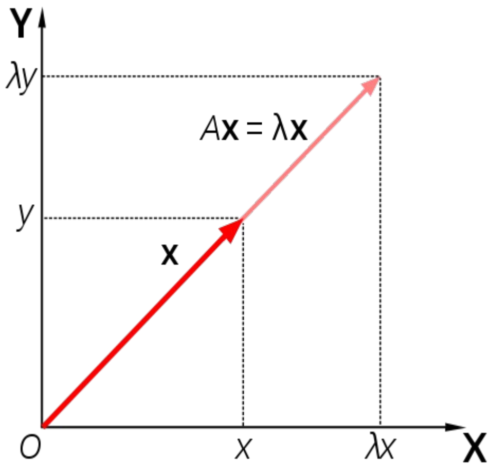
$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

siendo

$$w_i = A_{i1} v_1 + A_{i2} v_2 + \ldots + A_{¿} v_n = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} v_j$$

Si sucede que v y w son múltiplos se cumplen que $Av = \lambda v$. Entonces v es un autovector de la matriz A y el escalar λ es un autovalor correspondiente al autovector v.

Al aplicar A sobre uno de sus autovectores no cambia la dirección de x como se puede ver en la imagen. Simplemente se produce un escalado.



3. Observando a la matriz de covarianza

La covarianza es una matriz real y simétrica, por lo que siempre se puede obtener un conjunto de autovectores ortonormales (la multiplicación escalar entre dos vectores es 0 y el módulo de un vector es 1), junto con los correspondientes autovalores de C_x.

Normalmente los autovectores se ordenan en orden descendente según el autovalor asociado. Por definición se debe cumplir que :

$$C_x e_i = \lambda_i e_i$$

4. Transformada de Hotelling

La transformada Hotelling se define como:

$$y = A(x - m_x)$$

Siendo A una matriz cuyas filas están formadas por los autovectores de C_x , ordenadas de forma que la primera fila de A es el autovector asociado con el autovalor de mayor valor y la última fila es el autovector asociado con el autovalor más pequeño.

La matriz de covarianza de los vectores ***y*** se pueden obtener en términos de ***A*** y C_x como:

$$C_y = A C_x A^t$$

Y se cumple que C_y es una matriz diagonal cuyos elementos a lo largo de la diagonal principal son los autovalores de C_x :

$$C_y = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Los elementos fuera de la diagonal principal son 0, de forma que los elementos de los vectores ***y*** no están correlados. Por lo tanto C_x y C_y tienen los mismos autovalores y autovectores.

Una forma visual de estos conceptos se puede ver en la Figura 1.

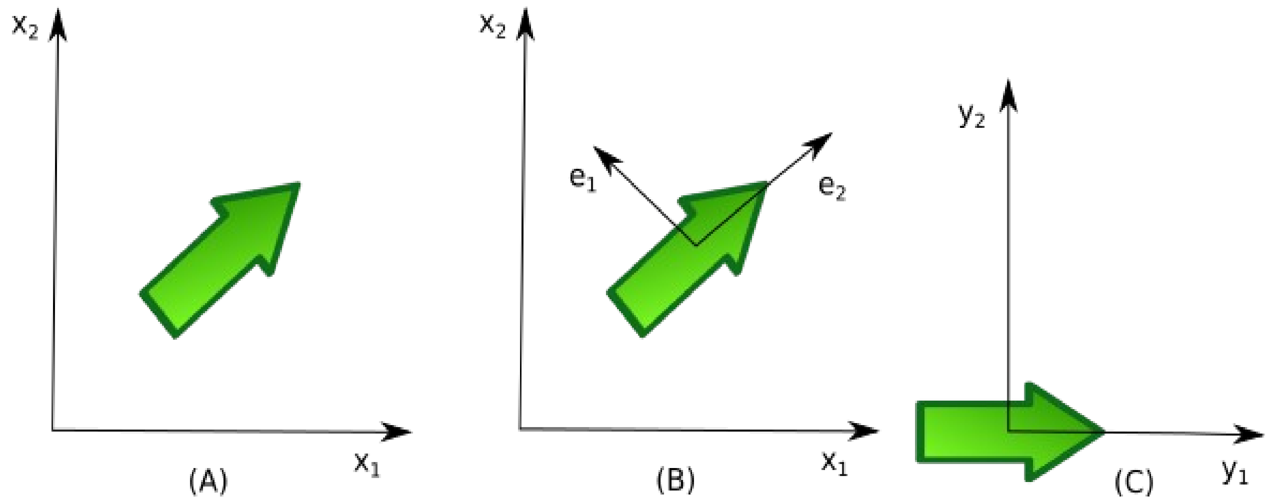


Ilustración 1. (A) Imagen que son un conjunto de datos indexados por (x1,x2). (B) De los datos hemos obtenido los autovectores e1, e2. Este nuevo eje de coordenadas formado por los autovectores eliminan redundancia, a diferencia de la representación que se hace de los datos con el eje (x1,x2) que estan correlados. Si aplicamos sobre (x1,x2) la rotación que indica los autovectores (e1,e2) se reduce la redundancia, como se puede ver en (C), representando los datos en un nuevo eje de coordenadas (y1,y2).

En la Figura 1.A tenemos una forma de flecha orientada en 45 grados. Cada dato de esta flecha se puede expresar con un vector x de componentes (a,b), siendo a y b los valores de coordenadas del pixel con respecto a los ejes x_1 y x_2. Estos vectores se usan para obtener el vector media y matriz de covarianza de la muestra.

El efecto de aplicar la ecuación $y=A(x-m_x)$ es obtener un nuevo sistema de coordenadas cuyo origen es el centroide de la muestra y cuyos ejes se sitúan en la dirección de los autovectores de C_x como se puede ver en la Figura 1.B. Este sistema de coordenadas muestra que la transformación realiza una rotación como se puede observar en la Figura 1.C. Cuando se rota el efecto que produce en los datos es decorrelarlos. Al aparecer los autovalores λ_i a lo largo de la diagonal principal de C_y , λ_i es la varianza de la componente y_i a lo largo del autovector e_i .

Otra propiedad de la transformada Hotelling es la reconstrucción de x a partir de y. Ya que las filas de A son vectores ortonormales $A^{-1}=A^t$, y cualquier vector x puede recuperarse a partir de su correspondiente ***y*** utilizando la relación:

$$x=A^t y+m_x$$

Supongamos que suamos un subconjunto de autovectores de C_x formando una matriz A_K a partir de los K autovectores correspondientes a los K autovalores de mayor valor, para obtener una matriz de Kxn dimensiones. Los vectores ***y*** sería de K -dimensionales y la reconstrucción no es exacta, pero si aproximada. El vector reconstruido usando A_K sería:

$$\hat{x} = A_K^t y + m_x$$

Se puede demostrar que el error al cuadrado medio e_{cm} entre ***x*** y $\hat{x}$ es igual a:

$$e_{cm} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j - \sum_{j=1}^{K} \lambda_j = \sum_{j=K+1}^{n} \lambda_j$$

Ya que los λ_i decrecen monótonamente, también muestra que el error puede minimizarse seleccionando los K autovectores asociados con los autovalores de mayor valor.

5. Aplicación de la Transformada de Hotelling a imágenes.

Supongamos que tenemos el conjunto de imágenes que se muestran en la Figura 2

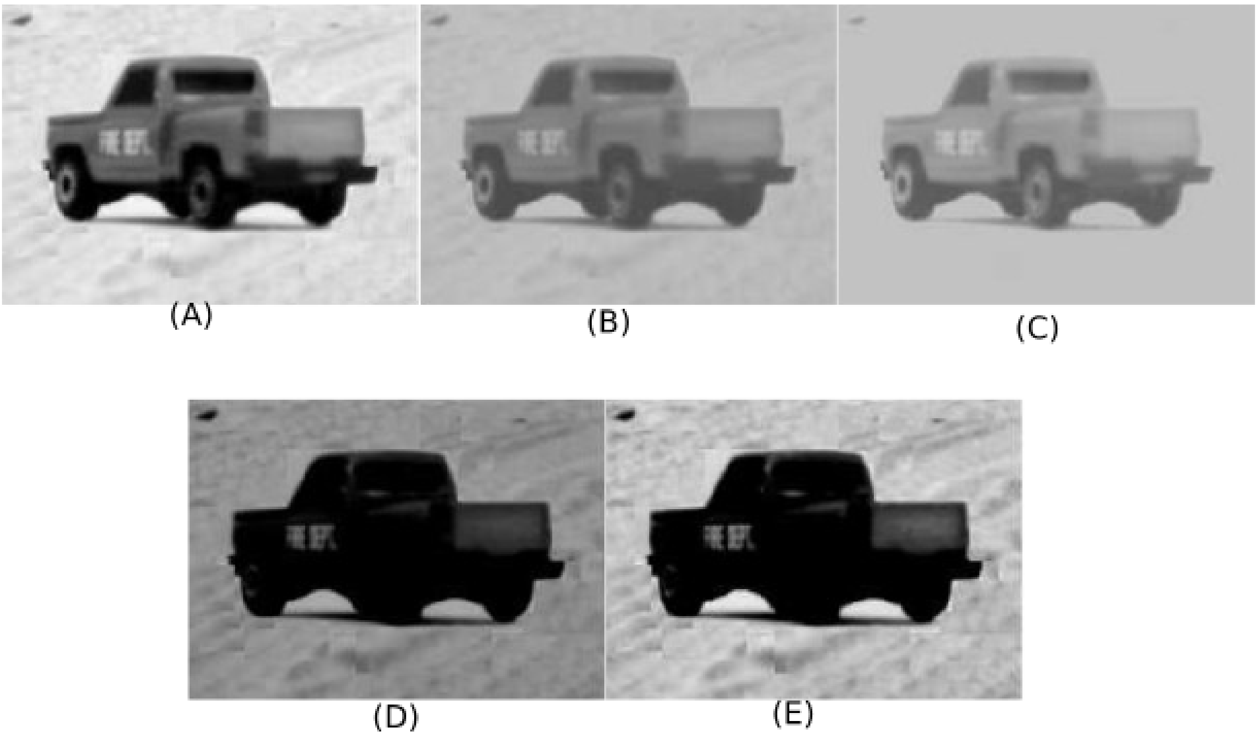


Ilustración 2. Imágenes de una misma escena con diferentes condiciones de ilumninación

En esta figura se muestra 5 imágenes de una misma escena, que muestra diferentes condiciones de iluminación. Para cada píxel podemos construir un vector $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ siendo cada valor x_i el nivel de gris del píxel de la imagen i.

Aplicando sobre estos vectores la transformada Hotelling en primer lugar calculamos la matriz de Covarianza:

$$C = 1.0 e^3 \begin{pmatrix} 5.6193 & 2.8306 & 2.2626 & 4.4931 & 6.0350 \\ 2.8306 & 1.4321 & 1.1437 & 2.2629 & 3.0394 \\ 2.2626 & 1.1437 & 0.9462 & 1.7219 & 2.3035 \\ 4.4931 & 2.2629 & 1.7219 & 3.9047 & 5.2612 \\ 6.0350 & 3.0394 & 2.3035 & 5.2612 & 7.1129 \end{pmatrix}$$

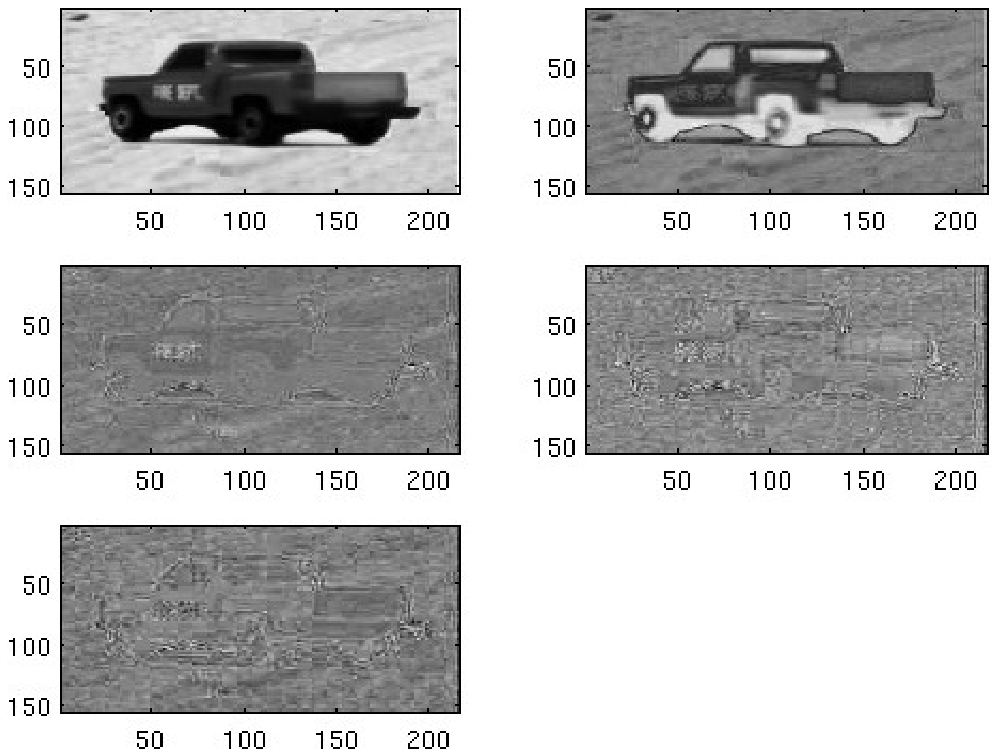
Buscamos sus autovectores dando lugar a:

$$A=1.0\,e^{4}\begin{pmatrix} 0.5434 & 0.2738 & 0.2129 & 0.4556 & 0.6138 \\ -0.5560 & -0.2885 & -0.4611 & 0.3401 & 0.5285 \\ -0.3346 & 0.0739 & 0.4123 & 0.7309 & -0.4224 \\ -0.5189 & 0.3534 & 0.5670 & -0.3726 & 0.3816 \\ -0.1199 & 0.8434 & -0.5006 & 0.0605 & -0.1414 \end{pmatrix}$$

y con autovalores:

$$D=1.0\,e^{4}\begin{pmatrix} 1.8516 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0480 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0008 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0007 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0004 \end{pmatrix}$$

Cuando aplicamos sobre los vectores x la transformada de la siguiente forma $y=A(x-m_x)$ para descubrir las nuevas imágenes, con objeto de disminuir la



redundancia entre las imágenes, da lugar a las imágenes que se muestran a continuación. Como se puede observar la primera imagen acumula la mayor energía (arriba izquierda). Mientras que las tres ultimas son imágenes como muy poca información.

6. Bibliografía

[1] Visión por Computador. Imágenes digitales y aplicaciones. Gonzalo Pajares, Jesus M de la Cruz. Ed Rama

[2]Wikipedia.