POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

CONTRÔLE PÉRIODIQUE 2

A2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 (**4.5 points)**
Sur l'ensemble E on considère la relation R suivante :

$$E = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{27}, \frac{1}{4}, 3, \frac{1}{36}, \frac{9}{4}\}$$

$$\forall x, y \in E, xRy \leftrightarrow \exists k \in Z; \frac{x}{y} = 3^k$$

Montrez que R est une relation d'équivalence sur E.

Réponse :

On a :

$$R = \{(1,1), \left(1, \frac{1}{3}\right), \left(1, \frac{1}{27}\right), (1,3), (\frac{1}{3}, 1), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{27}), (\frac{1}{3}, 3), (\frac{1}{27}, 1), (\frac{1}{27}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{27}, \frac{1}{27}), (\frac{1}{27}, 3), (3,1), (3, \frac{1}{3}), (3, \frac{1}{27}), (3,3), (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{36}), (\frac{1}{4}, \frac{9}{4}), (\frac{1}{36}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{36}, \frac{1}{36}), (\frac{1}{36}, \frac{9}{4}), (\frac{9}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{9}{4}, \frac{1}{36}), (\frac{9}{4}, \frac{9}{4})\}$$

- La relation est réflexive car elle contient les couples :

$$(1,1), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{27}, \frac{1}{27}), (3,3), (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{36}, \frac{1}{36}), (\frac{9}{4}, \frac{9}{4})$$

Note :

Lorsque l'étudiant a pris soin préalablement de montrer que la relation est non vide (R ≠ {}), la réflexivité peut également être montré en considérant que pour k = 0, on a bien

$$\frac{x}{x} = 1 = 3^0$$

D'où $\forall x \in E, xRx$

- La relation est symétrique car pour tout couple (a, b) appartenant à la relation, le couple (b, a) appartient également à la relation. En effet, on a :

$$(1,1); \left(1, \frac{1}{3}\right) et \left(\frac{1}{3}, 1\right); \left(1, \frac{1}{27}\right) et \left(\frac{1}{27}, 1\right); (1,3) et (3,1); \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right); \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{27}\right) et \left(\frac{1}{27}, \frac{1}{3}\right); \left(\frac{1}{3}, 3\right) et \left(3, \frac{1}{3}\right); \left(\frac{1}{27}, \frac{1}{27}\right); \left(\frac{1}{27}, 3\right) et \ (3, \frac{1}{27}) ; \ (3,3) ; \ (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) ; \ (\frac{1}{4}, \frac{1}{36}) \ et \ (\frac{1}{36}, \frac{1}{4}) ; \ (\frac{1}{4}, \frac{9}{4}) \ et \ (\frac{9}{4}, \frac{1}{4}) ; \ (\frac{1}{36}, \frac{1}{36}) ; \ (\frac{1}{36}, \frac{9}{4}) \ et \ (\frac{9}{4}, \frac{1}{36}) ; \ (\frac{9}{4}, \frac{9}{4})\}$$

Note :

La symétrie peut également être montrée comme suit.

Soit $x, y \in E$

$$\text{xRy} \leftrightarrow \exists k_1 \in Z; \frac{x}{y} = 3^{k_1}$$

$$\text{xRy} \rightarrow \exists k_1 \in Z; \frac{y}{x} = 3^{-k_1}$$

En posant $K_2 = -k_1$, on a :

$$\text{xRy} \rightarrow \exists k_2 \in Z; \frac{y}{x} = 3^{k_2}$$

D'où xRy → yRx

- La relation est transitive car pour tout couple (a, b) et (b, c) appartenant à la relation, le couple (a, c) appartient également à la relation. En écrivant cela, l'étudiant doit lister les couples en question.

Note :

- La transitivité peut également être montrée comme suit.

Soit $x, y, z \in E$ tel que xRy ∧ yRz

$$xRy \leftrightarrow \exists k_1 \in Z; \frac{x}{y} = 3^{k_1}$$

$$\text{yRz} \rightarrow \exists k_2 \in Z; \frac{y}{z} = 3^{k_2}$$

On a donc :

$$\text{xRy} \wedge \text{yRz} \rightarrow \exists k_1, k_2 \in Z;\ (\frac{x}{y} = 3^{k_1})\ \wedge\ (\frac{y}{z} = 3^{k_2})$$

$$\text{xRy} \wedge \text{yRz} \rightarrow \exists k_1,\ k_2 \in Z;\ \left(\frac{x}{y} \times \frac{y}{z} = 3^{k_1} \times 3^{k_2}\right)$$

$$\text{xRy} \wedge \text{yRz} \rightarrow \exists k_1,\ k_2 \in Z;\ \left(\frac{x}{z} = 3^{k_1+k_2}\right)$$

En posant $K = -k_1 + K_2$, on a :

$$\text{xRy} \rightarrow \exists k \in Z; \frac{x}{z} = 3^{k}$$

D'oùxRy ∧ yRz → xRz

La relation état réflexive, symétrique et transitive, elle est en conséquence une relation d'équivalence.

Exercice 2 (**5 points)**

Déterminez l'ensemble des couples d'entiers (x, y) tel que :

955*x* + 183y = 1

Réponse :

Résolvons l'équation 955x + 183y =1.

En utilisant l'algorithme d'Euclide étendu, nous avons les vecteurs [955, 1, 0][183, 0, 1].

Les opérations successives permettent d'obtenir

[40, 1, -5][183, 0, 1]

[40, 1, -5][23, -4, 21]

[17, 5, -26][23, -4, 21]

[17, 5, -26][6, -9, 47]

[5, 23, -120][6, -9, 47]

[5, 23, -120][1, -32, 167]

[1, 151, -788][1, -32, 167]

- **Cas 1**
  - Lorsque la solution particulière considérée est (-32, 167), on a x = 183k-32 et y = -955k + 167 avec k entier.
  - L'ensemble des couples d'entiers (x, y) tel que 955*x* + 183y = 1 sont (183k-32, -955k + 167) avec k entier.
- **Cas 2**

- Lorsque la solution particulière considérée est (151, -788), on a x = 183k + 151 et y = -955k - 788 avec k entier.
- L’ensemble des couples d’entiers (x, y) tel que 955*x* + 183y = 1 pourrait s’écrire (183k + 151, --955k - 788) avec k entier.

Exercice 3 (**5.5 points)**

On considère le segment de code suivant :

```
1.  x = 0 ;
2.  for (i = 1 ; i <= n/2 ; i++)
3.          for (j = 1 ; j <= n ; j=2*j)
4.                  x++;
```

Montrez que sa complexité temporelle est O***(n log n)*** ? Détaillez votre réponse.

Note : Si vous formulez des hypothèses, veuillez les préciser dans votre réponse.

Réponse :

- La ligne 1 est en O*(1)*.

  Explication : Une seule opération.
- La ligne 2 est en O*(n)*.

  Explication : À chaque passage dans l’entête de boucle for il y a :
  - soit une initialisation (la première fois), soit une incrementation
  - une comparaison

  Nous avons donc 2 opérations qui se répète $\lfloor n/2 \rfloor$ + 1 fois. D’où O*(n)* comme complexité temporelle.
- La ligne 3 est en O*(n log n)*.

  Explication : À chaque passage dans l’entête de boucle for il y a :
  - soit une initialisation (la première fois), soit un produit par 2
  - une comparaison

  Le fait que la variable soit multipliée par 2 à chaque passage fait que j ne contient que des puissance de 2. L’exposant k de cette puissance indique le nombre de le produit par 2 a été exécuté. De plus la valeur maximale est n. Le nombre de fois (k_ qu’un tel produit peut être fait est $\lfloor \log(n)/\log(2) \rfloor$.

  Nous avons donc 2 opérations qui se répète $\lfloor \log(n)/\log(2) \rfloor$ + 1 fois. D’où O*(log n)* comme complexité temporelle.
  Le tout est répété le nombre de fois que la ligne 2 s’exécute, soit $\lfloor n/2 \rfloor$ fois, ce qui correspond à O*(n)* comme complexité temporelle.

En conclusion, la ligne 3 a une complexité temporelle de $O(n)O(\log n)$, soit $O(n\log n)$ car, $O(f).\ O(g) = O(f.g)$.

- La ligne 4 a la même complexité que la ligne 3, soit $O(n \log n)$.

En sommant, les temps d'exécution des 4 lignes de code ou en appliquant la règle de la somme qui stipule que $O(f) + O(g) = O(\max(f, g))$, on arrive à la complexité du segment de code qui est $O(n \log n)$.

Exercice 4 (**5 points**)

Soit x un réel positif donné. Montrez par récurrence que pour tout entier positif non nul **n**,

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Réponse :

Soit la P(n) : $\mathbf{(1 + x)^n \geq 1 + nx}$, avec x un réel positif et n un entier positif non nul.

Étape de base :

Prenons n = 1.

La partie gauche de l'inégalité donne $(1 + x)^n = (1 + x)^1 = 1 + x$.

La partie droite de l'inégalité donne $(1 + n x) = (1 + x) = 1 + x$.

Puis que $1 + x \geq 1 + x$, la propriété est vraie à l'ordre n = 1.

Étape inductive:

Supposons que P(n) est vrai pour un entier positif non nul quelconque n et montrons que P(n+1) est vrai c'est-à-dire que $\mathbf{(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x}$.

On sait que $\mathbf{(1 + x) \geq x > 0}$.

De plus, par hypothèse d'induction, $\mathbf{(1 + x)^n \geq 1 + nx}$. Ainsi $\mathbf{(1 + x)^n \geq 1 + nx > 0}$.

En multipliant les deux termes de l'inégalité $\mathbf{(1 + x)^n \geq 1 + nx}$ par $\mathbf{(1 + x)}$, on a :

$\mathbf{(1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + nx)}$

On obtient $\mathbf{(1 + x)^{n+1} \geq 1 + nx + x + nx^2}$ ou encore $\mathbf{(1 + x)^{n+1} \geq (1 + nx + x) + nx^2}$.

On peut donc établir que $\mathbf{(1 + x)^{n+1} \geq (1 + nx + x) + nx^2 \geq (1 + nx + x)}$, soit $\mathbf{(1 + x)^{n+1} \geq (1 + nx + x)}$ ou encore $\mathbf{(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x}$. La propriété est donc vraie à l'ordre n+1.

Nous pouvons conclure à l'étape inductive que si P(n) est vrai alors P(n+1).

Conclusion générale

La propriété est vraie à l'ordre 1, Lorsqu'elle est vraie à l'ordre n, elle l'est à l'ordre n+1. D'où, pour tout n entier positif non nul, $\mathbf{(1 + x)^n \geq 1 + nx}$.