POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810
STRUCTURES DISCRÈTES

TD 4 : **ENSEMBLES ET FONCTIONS**

H2022

SOLUTIONNAIRE

Directives pour la remise :

- La remise est individuelle, mais le travail en équipe est encouragé.
- La remise est individuelle se fait à la fin de la séance de TD.
- Répondez directement sur ce document Word (docx). Dans l'intérêt de l'équité pour tous les étudiants, vous devez modifier le fichier Word. Modifiez le fichier **EXCLUT** le fait d'intégrer des scans de rédaction manuscrite ou d'y écrire avec un stylet.
- Lorsque vous avez terminé, générez un PDF avec le nom sous le format :
  Matricule-TDNuméro.pdf (exemple : 1234567-TD1.pdf).
- Téléversez votre fichier PDF dans la boîte de remise située dans la Zone TDs de la page Moodle du cours.
- Choisissez la boîte de remise qui correspond à votre section de TD.
- **Aucun retard et aucune remise par courriel ne seront acceptés.**
- **Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.**

Note : Uniquement dans le cadre de ce TD et dans le but de simplifier les manipulations, A^c désigne le complémentaire de A dans l'ensemble de référence considéré (univers).

Exercice 1. Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Simplifier chacune des expressions.

a) $(A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c) \cap (A^c \cup B^c)$

Réponse :

Considérons d'abord les 2 premières parenthèses.

$(A \cup B) \cap (A^c \cup B) = [A \cap (A^c \cup B)] \cup [B \cap (A^c \cup B)]$ Distributivité de ∪ par rapport à ∩

$= [(A \cap A^c) \cup (A \cap B)] \cup [(B \cap A^c) \cup (B \cap B)]$ Distributivité de ∩ par rapport à ∪

$= [\emptyset \cup (A \cap B)] \cup [(B \cap A^c) \cup (B \cap B)]$ Car $(A \cap A^c) = \emptyset$

$= [\emptyset \cup (A \cap B)] \cup [(B \cap A^c) \cup B]$ Car $(B \cap B)=B$

$= [(A \cap B)] \cup [B]$ Car $[(B \cap A^c) \cup B] = B$

$= B$ Car $(A \cap B) \cup B = B$

Considérons à présent ce résultat et la 3ème parenthèse, ce qui revient à considérer les 3 premières parenthèses.

$(A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c) = B \cap (A \cup B^c)$

$= (B \cap A) \cup (B \cap B^c)$

$= (A \cap B) \cup \emptyset$

$= (A \cap B)$

Considérons à présent ce résultat et la 4ème parenthèse, ce qui revient à considérer toute l'expression.

$(A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c) \cap (A^c \cup B^c) = (A \cap B) \cap (A^c \cup B^c)$

$=[(A \cap B) \cap A^c] \cup [(A \cap B) \cap B^c]$

$=[(A \cap A^c) \cap B] \cup [A \cap (B \cap B^c)]$

$=(\emptyset \cap B) \cup (A \cap \emptyset)$

$=\emptyset \cup \emptyset$

$\mathbf{(A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c) \cap (A^c \cup B^c) = \emptyset}$

b) $(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c)$

Réponse :

Considérons d'abord les 2 premières parenthèses.

$(A \cap B) \cup (A^c \cap B) = [A \cup (A^c \cap B)] \cap [B \cup (A^c \cap B)]$ Distributivité de ∩ par rapport à ∪

$= [(A \cup A^c) \cap (A \cup B)] \cap [(B \cup A^c) \cap (B \cup B)]$ Distributivité de ∪ par rapport à ∩

$= [E \cap (A \cup B)] \cap [(B \cup A^c) \cap (B \cup B)]$ Car $(A \cup A^c) = E$

$= [E \cap (A \cup B)] \cap [(B \cup A^c) \cap B]$ Car $(B \cup B)=B$

$= [(A \cup B)] \cap [B]$ Car $[(B \cup A^c) \cap B] = B$

$= B$ Car $(A \cup B) \cap B = B$

Considérons à présent ce résultat et la 3ème parenthèse, ce qui revient à considérer les 3 premières parenthèses.

$(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) = B \cup (A \cap B^c)$

$= (B \cup A) \cap (B \cup B^c)$

$= (A \cup B) \cap E$

$= (A \cup B)$

Considérons à présent ce résultat et la 4ème parenthèse, ce qui revient à considérer toute l'expression.

$(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c) = (A \cup B) \cup (A^c \cap B^c)$

$= (A \cup B) \cup (A \cup B)^c$

$= E$

$(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c)$ $= E$

Note : l'expression de la question b) est le complémentaire de l'expression a). Le résultat de l'un peut être exploité pour trouver l'autre.

Exercice 2. Soit A et B deux ensemble. Montrez que :

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

Réponse :

$x \in (A - B) \cup (B - A) \Leftrightarrow (x \in (A - B)) \lor (x \in (B - A))$

$\Leftrightarrow [(x \in A) \land (x \notin B)] \lor [(x \in B) \land (x \notin A)]$

$\Leftrightarrow [(x \in A) \lor [(x \in B) \land (x \notin A)]] \land [(x \notin B) \lor [(x \in B) \land (x \notin A)]]$

$\Leftrightarrow [((x \in A) \lor (x \in B)) \land ((x \in A) \lor (x \notin A))] \land [((x \notin B) \lor (x \in B)) \land ((x \notin B) \lor (x \notin A))]$

$\Leftrightarrow [((x \in A) \lor (x \in B))] \land [(x \notin B) \lor (x \notin A)]$

$\Leftrightarrow [x \in (A \cup B)] \land [(x \in B^c) \lor (x \in A^c)]$

$\Leftrightarrow [x \in (A \cup B)] \land [x \in (B^c \cup A^c)]$

$\Leftrightarrow [x \in (A \cup B)] \land [x \in (B \cap A)^c]$

$\Leftrightarrow [x \in (A \cup B)] \land [x \notin (B \cap A)]$

$\Leftrightarrow x \in [\,(A \cup B) - (B \cap A)]$

D'où $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

Exercice 3. Soit les ensembles E = {a, b, c, d, e} et F = {1, 2, 3, 4, 5}.
Dans chacun des cas, dites s'il s'agit d'une fonction, d'une fonction injective, d'une fonction surjective ou d'une fonction bijective. Justifiez votre réponse.

a) {(a, 3), (b, 3), (a, 5), (c, 4), (e, 1)}

Réponse :

- f n'est pas une fonction, car plus d'un élément de F sont affectés à a, notamment les deux images 3 et 5.

b) {(a, 3), (b, 3), (d, 5), (c, 4), (e, 1)}

Réponse :

- f est une fonction, car au plus un élément de F est affecté à chaque élément de E.
- f n'est pas injective car 3 = f(a) = f(b) et a ≠ b.
- f n'est pas surjective car 2 n'a pas d'antécédent.
- f n'est pas bijective car n'étant ni injective, ni surjective.

c) {(a, 3), (b, 5), (c, 4), (e, 1)}

Réponse :

- f est une fonction, car au plus un élément de F est affecté à chaque élément de E.
- f est injective car chaque image a un antécédent distinct.
- f n'est pas surjective car 2 n'a pas d'antécédent.

- f n'est pas bijective car n'étant pas surjective.

d) {(d, 2), (a, 3), (b, 5), (c, 4), (e, 1)}

Réponse :

- f est une fonction, car au plus un élément de F est affecté à chaque élément de E.
- f est injective car chaque image a un antécédent distinct.
- f est surjective car chaque image a un antécédent.
- f est bijective car étant à la fois injective et surjective.

e) {(d, 2), (a, 3), (b, 5), (c, 4), (e, 2)}

Réponse :

- f est une fonction, car au plus un élément de F est affecté à chaque élément de E.
- f n'est pas injective car 2 = f(d) = f(e) et d ≠ e.
- f n'est pas surjective car 1 n'a pas d'antécédent.
- f n'est pas bijective car n'étant ni injective, ni surjective.

Exercice 4. On considère la fonction ***f***

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^2 - 5$$

a) ***f*** est-elle injective ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

- Méthode 1 :

Soit x_1 et x_2 deux réels.
Si f est injective alors $f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$.
Supposons que $f(x_1) = f(x_2)$.
$f(x_1) = f(x_2) \to (x_1^2 - 5 = x_2^2 - 5)$
$f(x_1) = f(x_2) \to (x_1^2 = x_2^2)$
$f(x_1) = f(x_2) \to (x_1 = x_2$ ou $x_1 = - x_2)$
x_1 n'est pas toujours égal à x_2. f n'est donc pas injective.

- Méthode 2 :

La preuve par contre-exemple peut être utilisée. f(3)= f(-3) = 4 et -3 ≠3.

b) ***f*** est-elle surjective ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

Soit y un réel. Existe-t-il un réel x tel que y = f(x) ?
Supposons que y = f(x). Résolvons cette équation en x. On a :
$Y = x^2 - 5$
$x^2 = y + 5$
si $y \geq -5$, on a $x = (y+5)^{1/2}$ ou $x = - (y+5)^{1/2}$. y = f(x) a de solution réelle. y a donc un antécédent x.
Si y < 5, y = f(x) n'a pas de solution réelle. y n'a donc pas d'antécédent x.
Tous les y n'ont donc pas d'antécédent 3.
f n'est pas surjective.

c) ***f*** est-elle bijective ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

f n'est pas bijective car elle n'est pas à la fois injective et surjective.

Exercice 5. On considère la suite géométrique (V_n) tel que :

$$V_5 = \frac{5}{32} \text{ et } V_2 = \frac{5}{4}$$

Calculez V_n en fonction de n.

Réponse

Soit q la raison de la suite géométrique (V_n).

On a :

$V_5 = q.\ V_4$

$V_5 = q.(q.\ V_3)$

$V_5 = q.(q.(q.V_2)) = q^3.V_2$

On en déduit que $q^3 = V_5 / V_2$, soit $q^3 = 1/8$

D'où q = ½.

Note : On peut établir le lien entre V_5 et V_2 en exploitant la formule générale pour deux indices n et p qui est : $V_n = q^{(n-p)}.\ V_p$. Il suffit de considérer n=5 et p=3.

On peut retrouver V_0.

$V_2 = q\ V_1$ alors $V_1 = 5 / 2$

$V_1 = q\ V_0$ alors $V_0 = 5$

Or $V_n = q^n.V_0$

Donc $\mathbf{V_n = 5.(1/2)^n}$