POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810
STRUCTURES DISCRÈTES

TD 9 : DÉNOMBREMENT

E2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1

Aveline décide de visiter St-Viateur Bagel, la célèbre boulangerie emblématique de Montréal réputée pour ses bagels cuits au feu de bois et ses nombreuses saveurs et garnitures. À la borne de commande, elle découvre un large éventail de bagels parmi lesquels elle peut choisir :

Elle se demande combien de façons différentes elle a pour choisir :

a) Six bagels ?

Solution :

Il y a dix saveurs de bagels ($n = 10$) et elle doit choisir six bagels ($r = 6$).
De plus, dans ce problème, l'ordre n'a pas d'importance et les répétitions sont autorisées.
Ainsi, il y a donc :

$\binom{n+r-1}{r} = \binom{10+6-1}{6} = \binom{15}{6} = \frac{15!}{6!(15-6)!} = 5005$ façons de choisir six bagels.

b) Deux douzaines de bagels ?

Solution :

Similairement, il y a dix saveurs de bagels ($n = 10$), et elle doit choisir vingt-quatre bagels ($r = 24$). De plus, dans ce problème, l'ordre n'a pas d'importance et les répétitions sont autorisées.
Par conséquent, il y a donc :

$\binom{n+r-1}{r} = \binom{10+24-1}{24} = \binom{33}{24} = \frac{33!}{24!(33-24)!} = 38\,567\,100$ façons de choisir deux douzaines de bagels.

c) Une douzaine de bagels avec au moins un exemplaire de chaque saveur ?

Solution :

Étant donné qu'il y a dix saveurs de bagels ($n = 10$), il reste donc deux bagels à choisir ($r = 2$) puisque 12 moins les 10 bagels déjà sélectionnés pour satisfaire la condition qu'il y ait au moins un exemplaire de chaque type. Encore une fois, l'ordre n'a pas d'importance et les répétitions sont autorisées. Ainsi, il y a donc :

$\binom{n+r-1}{r} = \binom{10+2-1}{2} = \binom{11}{2} = \frac{11!}{2!(11-2)!} = 55$ façons de choisir une douzaine de bagels avec au moins un exemplaire de chaque type .

d) Une douzaine de bagels avec au moins trois bagels aux bleuets et au plus deux bagels au Pumpernickel ?

Solution :

Dans ce problème, elle doit choisir neuf bagels ($r = 9$) puisque 12 moins 3 bagels aux bleuets présélectionnés. De plus, l'ordre n'a pas d'importance et les répétitions sont autorisées.

Nous avons attribué trois choix aux bagels aux bleuets, mais nous devons maintenant déterminer comment choisir les bagels au Pumpernickel. Nous ajouterons le nombre de façon de choisir lorsque nous prenons exactement zéro, un et deux bagels au Pumpernickel.

<u>Aucun bagel au Pumpernickel :</u>

En excluant les bagels aux bleuets, il reste donc neuf saveurs de bagels ($n = 9$) et elle doit choisir neuf bagels ($r = 9$). De ce fait, il y a donc :

$\binom{n+r-1}{r} = \binom{9+9-1}{9} = \binom{17}{9} = \frac{17!}{9!(17-9)!} = 24\,310$ façons de choisir une douzaine de bagels avec au moins trois bagels aux bleuets et aucun bagel au Pumpernickel.

Un bagel au Pumpernickel :

En excluant les bagels aux bleuets, il reste neuf saveurs de bagels ($n = 9$) et elle doit choisir, cette fois-ci, huit bagels ($r = 8$) puisque 9 moins 1 bagel au Pumpernickel. De ce fait, il y a donc :

$\binom{n+r-1}{r} = \binom{9+8-1}{8} = \binom{16}{8} = \frac{16!}{8!(16-8)!} = 12\,870$ façons de choisir une douzaine de bagels avec au moins trois bagels aux bleuets et un bagel au Pumpernickel.

Deux bagels au Pumpernickel :

En excluant les bagels aux bleuets, il reste neuf saveurs de bagels ($n = 9$) et elle doit choisir sept bagels ($r = 7$) puisque 9 moins 2 bagels au Pumpernickel. De ce fait, il y a donc :

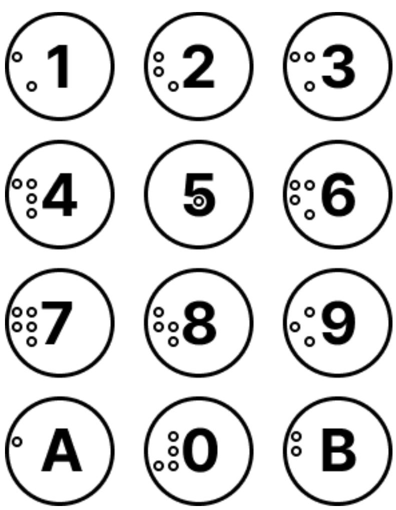
$\binom{n+r-1}{r} = \binom{9+7-1}{7} = \binom{15}{7} = \frac{15!}{7!(15-7)!} = 6\,435$ façons de choisir une douzaine de bagels avec au moins trois bagels aux bleuets et deux bagels au Pumpernickel.

Ainsi, il y a donc en total :

$\binom{17}{9} + \binom{16}{8} + \binom{15}{7} = 24\,310 + 12\,870 + 6\,435 = 43\,615$ façons de choisir une douzaine de bagels avec au moins trois bagels aux bleuets et au plus deux bagels au Pumpernickel.

Exercice 2

Un digicode typique à Paris est un dispositif électronique installé près de l'entrée d'un immeuble. Il se compose d'un clavier avec douze touches, comprenant les chiffres de zéro à neuf et des touches supplémentaires pour des fonctionnalités spécifiques. Pour accéder à un immeuble Haussmannien donné, un code d'entrée est requis, qui est constitué d'une lettre suivie d'un nombre de trois chiffres.



a) Combien y a-t-il de codes possibles comportant exactement deux chiffres identiques ? Justifiez votre réponse.

Solution :

- Choix d'une lettre parmi deux : $P(2,1)$.
- Choix du chiffre qui se répète : $C(10,1)$.
- Choix du chiffre qui ne se répète pas lorsqu'un chiffre est répété deux fois : $C(9,1)$.
- Placement du chiffre qui ne se répète pas lorsqu'un chiffre est répété deux fois : $P(3,1)$.

Le nombre de codes comportant exactement deux chiffres identiques est :

$P(2,1) \cdot C(10,1) \cdot C(9,1) \cdot P(3,1) = 2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 3 = 540$ codes.

b) Combien y a-t-il de codes possibles comportant exactement trois chiffres identiques ? Justifiez votre réponse.

Solution :

- Choix d'une lettre parmi deux : $P(2,1)$.
- Choix du chiffre qui se répète : $C(10,1)$.

Le nombre de codes comportant exactement trois chiffres identiques est :

$P(2,1) \cdot C(10,1) = 2 \cdot 10 = 20$ codes.

c) Combien y a-t-il de codes possibles comportant au moins deux chiffres identiques ? Justifiez votre réponse.

Solution :

Il faut sommer les cas où le nombre de codes comportant exactement deux ou trois chiffres identiques obtenus en a) et b). Ainsi, le nombre de codes comportant au moins deux chiffres identiques est donc :

$\underbrace{P(2,1) \cdot C(10,1) \cdot C(9,1) \cdot P(3,1)}_{\text{Résultat en a)}} + \underbrace{P(2,1) \cdot C(10,1)}_{\text{Résultat en b)}} = 540 + 20 = 560$ codes.

Alternativement, le nombre total de codes constitués d'une lettre suivie d'un nombre de trois chiffres sans restriction est :

$P(2,1) \cdot 10^3 = 2\,000$ codes.

Il suffit d'exclure de ce nombre total le nombre de codes comportant aucun chiffre identique qui est:

$P(2,1) \cdot C(10,1) \cdot C(9,1) \cdot C(8,1) = 2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 1\,440$ codes.
Ce qui donne également $P(2,1) \cdot 10^3 - (2,1) \cdot C(10,1) \cdot C(9,1) \cdot C(8,1) = 2\,000 - 1\,400 = 560$ codes.

Exercice 3

Une entreprise doit organiser un voyage d'entreprise pour ses 4 employés. Elle dispose de 3 vans identiques (indiscernables) pour transporter les employés. Combien y a-t-il de façons de répartir les 4 employés dans les 3 vans sachant que chaque van peut contenir un nombre quelconque d'employés ? Justifiez votre réponse.

Solution :

Nous pouvons résoudre ce problème en énumérant toutes les façons dont ces employés peuvent être placés dans les vans. Représentons les quatre employés par A, B, C et D.

Tout d'abord, notons que nous pouvons distribuer les employés de telle sorte que

- Les quatre employés soient placés dans un seul van
- Trois employés soient placés dans un van et le quatrième est placé dans un deuxième van
- Deux employés soient placés dans un van et deux autres dans un deuxième van
- Deux employés soient placés dans un van et un employé chacun dans les deux autres vans

Chaque façon de distribuer ces employés dans ces vans peut être représentée par une façon de partitionner les éléments A, B, C et D en sous-ensembles disjoints.

Pour mettre les quatre employés dans un seul van, il y a une seule façon de le faire, représentée par

{{A, B, C, D}}

Pour mettre trois employés dans un van et un employé dans un autre van, il y a quatre façons de le faire, représentées par

{{A, B, C}, {D}}, {{A, B, D}, {C}}, {{A, C, D}, {B}} et {{B, C, D}, {A}}

Pour mettre deux employés dans un van et deux autres dans un deuxième van, il y a trois façons de le faire, représentées par

{{A, B}, {C, D}}, {{A, C}, {B, D}} et {{A, D}, {B, C}}

Et enfin, pour mettre deux employés dans un van et un employé chacun dans les deux autres vans, il y a six façons de le faire, représentées par

{{A, B}, {C}, {D}}, {{A, C}, {B}, {D}}, {{A, D}, {B}, {C}}, {{B, C}, {A}, {D}}, {{B, D}, {A}, {C}} et {{C, D}, {A}, {B}}

En comptant toutes les possibilités, nous trouvons qu'il y a 14 façons de placer quatre employés différents dans trois vans identiques.

Exercice 4

La compagnie d'assurance AXA a réalisé une étude sur un groupe de souscripteurs pour analyser leurs habitudes de réclamations d'assurance. Voici les informations recueillies :

(I.) Parmi les 500 souscripteurs, 120 ont déposé des réclamations pour leur assurance automobile.
(II.) Parmi les 500 souscripteurs, 150 ont déposé des réclamations pour leur assurance habitation.
(III.) Parmi les 500 souscripteurs, 80 ont déposé des réclamations pour leur assurance santé.
(IV.) Sur les 120 souscripteurs ayant déposé des réclamations pour leur assurance automobile, 30 ont également déposé des réclamations pour leur assurance habitation.
(V.) Parmi les 150 souscripteurs ayant déposé des réclamations pour leur assurance habitation, 40 ont également déposé des réclamations pour leur assurance santé.
(VI.) Parmi les 80 souscripteurs ayant déposé des réclamations pour leur assurance santé, 20 ont également déposé des réclamations pour leur assurance automobile.
(VII.) Parmi l'ensemble du groupe étudié, 10 souscripteurs ont déposé des réclamations pour les trois types d'assurance.

En tant que consultant actuaire d'AXA, déterminez le nombre de souscripteurs qui n'ont déposé aucune réclamation pour aucun des trois types d'assurance. Montrez toutes les étapes de votre réponse.

Solution :

Soit A, H et S les ensembles des souscripteurs ayant déposé des réclamations pour leur assurance automobile, habitation et santé respectivement et soit Ω l'ensemble du groupe étudié.

Alors, $|A| = 120, |H| = 150, |S| = 80, |A \cap H| = 30, |H \cap S| = 40, |S \cap A| = 20, |A \cap H \cap S| = 10$ et $|\Omega| = 500$.

Aussi, $|\Omega| = |A \cup H \cup S| + \overline{|A \cup H \cup S|} = \underbrace{|A \cup H \cup S|}_{\substack{\text{Le nombre de souscripteurs} \\ \text{qui ont déposé au moins} \\ \text{une réclamation pour} \\ \text{les trois types d'assurance}}} + \underbrace{|\bar{A} \cap \bar{H} \cap \bar{S}|}_{\substack{\text{Le nombre de souscripteurs} \\ \text{qui n'ont déposé aucune réclamation} \\ \text{pour aucun des trois types d'assurance}}}$

Ainsi en utilisant le principe d'inclusion-exclusion, nous pouvons trouver le nombre de souscripteurs qui n'ont déposé aucune réclamation pour aucun des trois types d'assurance :

$$\begin{aligned} |\bar{A} \cap \bar{H} \cap \bar{S}| &= |\Omega| - |A \cup H \cup S| \\ &= |\Omega| - [|A| + |H| + |S| - |A \cap H| - |H \cap S| - |S \cap A| + |A \cap H \cap S|] \\ &= 500 - [120 + 150 + 80 - 30 - 40 - 20 + 10] \\ &= 500 - 270 \\ &= 230 \end{aligned}$$

De ce fait, le nombre de souscripteurs d'AXA qui n'ont déposé aucune réclamation pour aucun des trois types d'assurance est de 230.

Exercice 5

Résolvez l'équation de récurrence :

$$\ln(a_{n+1}) + \ln\left(\frac{1}{(a_n)^2}\right) = -1$$

Avec $a_0 = e^4, a_1 = e^7$.

Solution :

On peut réécrire l'équation de récurrence comme suit :

$$\ln(a_{n+1}) - 2\ln(a_n) = -1 \qquad (\mathrm{I.})$$

Également,

$$\ln(a_{n+2}) - 2\ln(a_{n+1}) = -1 \qquad (\mathrm{II.})$$

En soustrayant $(\mathrm{I.})$ de $(\mathrm{II.})$, on obtient :

$$\ln(a_{n+2}) - 3\ln(a_{n+1}) + 2\ln(a_n) = 0$$

En faisant un changement de variable $b_n = \ln(a_n)$, on obtient la relation de récurrence linéaire homogène à coefficients constants de degré 2 suivant :

$$b_{n+2} - 3b_{n+1} + 2b_n = 0$$

Avec $b_0 = \ln(a_0) = \ln(e^4) = 4$ et $b_1 = \ln(a_1) = \ln(e^7) = 7$

L'équation caractéristique est donc :

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

Et les racines de cette équation sont :

$$r_1 = 1 \text{ et } r_2 = 2$$

La forme générale de la solution est :

$$b_n = \alpha_1(1^n) + \alpha_2(2^n)$$

Avec les cas de base $b_0 = 4$ et $b_1 = 7$, on obtient

$$\alpha_1 = 1 \text{ et } \alpha_2 = 3$$

Ainsi en remplaçant les constantes dans la forme générale de la solution, on a :

$$b_n = (1^n) + 3(2^n)$$

Ou encore,

$$b_n = 1 + 3(2^n)$$

Du changement de variable $b_n = \ln(a_n)$, on déduit $a_n = e^{b_n}$.

D'où $a_n = e^{1+3(2^n)}$.

Exercice 6

Vous décidez d'utiliser la technique de diviser pour régner pour résoudre un certain type de problèmes.

(I.) Pour $n \geq 3$, vous pouvez obtenir la solution à un exemplaire de taille n en résolvant 5^{1250} sous-exemplaires de taille $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.

(II.) Le temps requis pour la décomposition de l'exemplaire original en 5^{1250} sous-exemplaires est $\theta\left(\frac{n^{1875}}{\log(n+2023)}\right)$.

(III.) Le temps requis pour la recombinaison des solutions est en $\theta(n^{1875})$.

En supposant que n est une puissance de 3, trouvez l'ordre de grandeur du temps d'exécution de la solution.

Solution :

Soit $f(n)$ la fonction correspondant à la solution.

En considérant les temps des manipulations complémentaires $\theta\left(\frac{n^{1875}}{\log(n+2023)}\right)$ et $\theta(n^{1875})$, on obtient une fonction $g(n)$ qui est $\theta\left(\max\left(\frac{n^{1875}}{\log(n+2023)}, n^{1875}\right)\right)$, soit $\theta(n^{1875})$.

Et puisque $g(n)$ est $\theta(n^{1875})$, elle est aussi $O(n^{1875})$.

On peut donc écrire que :

$$f(n) = 5^{1250} \cdot f\left(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil\right) + n^{1875}$$

Elle est de la forme :

$$f(n) = a \cdot f\left(\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil\right) + c \cdot n^d$$

Avec $a = 5^{1250}$, $b = 3$, $c = 1$ et $d = 1875$.

Comparons a et b^d.

On a :

$$a = 5^{1250} = 5^{2 \cdot 625} = (5^2)^{625} = (25)^{625}$$

Aussi,

$$b^d = 3^{1875} = 3^{3 \cdot 625} = (3^3)^{625} = (27)^{625}$$

Il s'en suit que $a < b^d$.

Ainsi, $f(n) \in O(n^d)$
$\in O(n^{1875})$

D'où $f(n) \in O(n^{1875})$