POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 3 : **INFÉRENCE ET TECHNIQUES DE PREUVES**

H2022

SOLUTIONNAIRE

Directives pour la remise :

- La remise est individuelle, mais le travail en équipe est encouragé.
- La remise est individuelle se fait à la fin de la séance de TD.
- Répondez directement sur ce document Word (docx). Dans l'intérêt de l'équité pour tous les étudiants, vous devez modifier le fichier Word. Modifiez le fichier **EXCLUT** le fait d'intégrer des scans de rédaction manuscrite ou d'y écrire avec un stylet.
- Lorsque vous avez terminé, générez un PDF avec le nom sous le format :
  Matricule-TDNuméro.pdf (exemple : 1234567-TD1.pdf).
- Téléversez votre fichier PDF dans la boîte de remise située dans la Zone TDs de la page Moodle du cours.
- Choisissez la boîte de remise qui correspond à votre section de TD.
- **Aucun retard et aucune remise par courriel ne seront acceptés.**
- **Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.**

Exercice 1. Soit l'univers des humains. Déterminez les raisonnements qui sont logiquement valides et ceux qui ne le sont pas. Justifiez vos réponses.
Note : Il n'est pas nécessaire ici de traduire les énoncés en propositions logiques.

Raisonnement A	1. Tous les élèves sont en confinement 2. Or Simon est en confinement 3. Donc Simon est un élève

Réponse :
Raisonnement non valide. Simon peut ne pas être un élève et être en confinement.

Raisonnement B	1. Aucun élève n'est en confinement 2. Or Simon n'est pas en confinement 3. Donc Simon est un élève

Réponse :
Raisonnement non valide. Simon peut ne pas être un élève. Le fait qu'il ne soit pas en confinement ne suffit pas pour conclure qu'il est un élève.

Raisonnement C	1. La plupart des élèves s'appellent Simon 2. Or tous les Simon sont en confinement 3. Donc certains élèves sont en confinement

Réponse :
Raisonnement valide. Si tous les Simon sont en confinement, alors ceux d'entre eux qui sont des élèves sont en confinement. Il existe donc des élèves en confinement.

Raisonnement D	1. Tous les élèves s'appellent Simon 2. Or certains Simon ne sont pas en confinement 3. Donc certains élèves sont en confinement

Réponse :
Raisonnement non valide.
Le fait que certains Simon ne soient pas en confinement n'est pas suffisant pour se prononcer sur leur statut d'élève. On peut trouver des Simon qui soient en confinement et qui sont élèves comme on peut ne pas du tout en trouver. Cette deuxième partie de la phrase précédente invalide donc la conclusion. Autrement dit, le fait que tous les élèves s'appellent Simon ne suffit pas pour conclure que certains élèves sont en confinement.

Exercice 2. Un homme politique fait le raisonnement suivant :

1. Nous perdrons les voix des agriculteurs si nous ne poursuivons pas notre politique de soutien des prix.
2. À moins d'entreprendre des réformes structurelles, il y aura surproduction si nous conservons cette politique.
3. Nous avons besoin des voix des agriculteurs pour être réélus.
4. À l'avenir, il faut éviter à tout prix toute surproduction.
5. Donc si nous sommes réélus, il nous faudra mettre en place des réformes structurelles.

Montrez que ce raisonnement est valide. Pour ce faire, vous devez d'abord traduire chacun des énoncés sous forme de propositions logiques. Lors de votre preuve, chaque étape doit être numérotée et justifiée.

Réponse :

Soit les propositions suivantes :

V : Avoir la voix des agriculteurs

P : Conserver la politique de soutien des prix

R : Entreprendre des réformes structurelles

S : Il y aura surproduction

E : Être réélus

Traduction de l'énoncé

H1 : $\neg P \rightarrow \neg V$

H2 : $\neg R \rightarrow (P \rightarrow S)$

H3 : $\neg V \rightarrow \neg E$

H4 : $\neg S$

C : $E \rightarrow R$

Raisonnement

1. $V \rightarrow P$	Contraposée de H1
2. $(\neg (P \rightarrow S)) \rightarrow R$	Contraposée de H2
3. $(\neg (\neg P \vee S)) \rightarrow R$	Étape 2 et réécriture de l'implication
4. $(P \wedge \neg S) \rightarrow R$	Étape 3 et Loi de De Morgan
5. $P \rightarrow R$	Étape 4 et H4
6. $V \rightarrow R$	Étapes 1 et 5 et syllogisme par hypothèse
7. $E \rightarrow V$	Contraposée de H3
8. $E \rightarrow R$	Étapes 6 et 7 et syllogisme par hypothèse

Le raisonnement est donc valide.

Exercice 3. En utilisant la preuve indirecte (preuve par contraposition), démontrez que :

Si l'entier (n^2 - 1) n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

Réponse :

Il s'agit de démontrer une implication par la preuve indirecte. Ce qui revient à faire la preuve directe de la contraposée de cette implication, c'est-à-dire :

Si l'entier n n'est pas pair, alors l'entier (n^2 - 1) est divisible par 8.

Ou encore

Si l'entier n est impair, alors l'entier (n^2 - 1) est divisible par 8.

Supposons que n est impair.

Il existe un entier k tel que $n=2.k + 1$. On a alors $(n^2 - 1)= 4k^2 +4k =4k(k+1)$.

k étant un entier, lorsqu'il est pair (K+1) est impair et leur produit est toujours pair. Aussi, lorsqu'il est impair, (K+1) est pair et leur produit est toujours pair.

On en déduit que $4k(k+1)$ est multiple de 8 et qu'ainsi (n^2 - 1) est divisible par 8.

D'où, Si l'entier (n^2 - 1) n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

Exercice 4.

En utilisant la preuve par contradiction (raisonnement par l'absurde), montrez que pour tous entiers positifs non nuls n et m, si n et m sont impairs, alors $(6n+m)(n+6m)$ n'est pas une puissance de 2.

Réponse :

Soit deux entiers positifs non nuls n et m.

Pour raisonner par l'absurde, nous supposons que l'implication est fausse.

Ainsi (n et m sont impairs) et ($(6n+m)(n+6m)$ est une puissance de 2).

$(6n+m)(n+6m)$ est une puissance de $2 \rightarrow (6n+m)$ est une puissance de 2 et $(n+6m)$ est également une puissance de 2.

$(6n+m)$ est une puissance de $2 \rightarrow (6n+m)$ est pair

$(n+6m)$ est une puissance de $2 \rightarrow (n+6m)$ est pair

$(6n+m)$ est pair $\rightarrow$ n est pair et m est pair (Note : 6n étant pair, nous oblige à considérer que m est pair et n pair)

$(n+6m)$ est une puissance de $2 \rightarrow$ n est pair et m est pair

Dans les deux cas n et m sont pairs.

Or par hypothèse, n et m sont tous deux impairs. Donc il y a une contradiction. N et m ne peuvent pas être à la fois pairs et impairs.

On peut donc conclure que l'hypothèse de départ était fausse et qu'ainsi, si n et m sont impairs, alors $(6n+m)(n+6m)$ n'est pas une puissance de 2.

Exercice 5.

Soit m et n deux entiers. En utilisant la preuve par cas, démontrez que :

Soit n.m est pair, soit n^2-m^2 est multiple de 8

Réponse

L'univers est celui des entiers. Il est demandé de démontrer que

$\forall n\ \forall m$, ((n.m est pair) $\lor$ (n^2-m^2 est multiple de 8))

Il suffit de démontrer, après avoir identifié les cas, que l'une des deux propositions (n.m est pair) et (n^2-m^2 est multiple de 8) est vraie.

- Si n et m sont tous deux pairs, alors (n.m) est pair en tant que produit de deux entiers pairs.
- Si l'un des 2 entiers est pair et l'autre impair, alors (n.m) est pair en tant produit d'un entier pair par un autre entier.

  Sans perte de généralité, on peut aussi considérer n pair et m impair pour faire cette partie de la preuve.

- Si n et m sont tous deux impairs, on peut écrire que n=2k+1 et m=2p+1, k et p étant des entiers.

  Ainsi, $n^2-m^2 = (4k^2 + 4k + 1) - (4p^2 + 4p + 1)$

  On obtient successivement :

  $n^2-m^2 = 4k^2 + 4k - 4p^2 - 4p$

  $n^2-m^2 = (4k^2 - 4p^2) + (4k - 4p)$

  $n^2-m^2 = 4 (k - p) (k+ p) + 4 (k - p)$

  $n^2-m^2 = 4(k - p)(k+ p +1)$

  - Si k est impair et p est impair alors (k-p) est pair.

  On en déduit que $4(k - p)(k+ p +1)$ est multiple de 8 et que n^2-m^2 est ainsi multiple de 8.

  - Si k est impair et p est pair alors (k+p) est impair, ce qui donne (k+ p +1) pair.

  On en déduit que $4(k - p)(k+ p +1)$ est multiple de 8 et que n^2-m^2 est ainsi multiple de 8.

  - Si k est pair et p est impair alors (k+p) est impair, ce qui donne (k+ p +1) pair.

  On en déduit que $4(k - p)(k+ p +1)$ est multiple de 8 et que n^2-m^2 est ainsi multiple de 8.

  Ce cas et le cas précédent peuvent être combinés ensembles, sans perte de généralité, en fixant juste l'un deux entiers pair et l'autre impair.

  - Si k est pair et p est pair alors (k-p) est pair.

  On en déduit que $4(k - p)(k+ p +1)$ est multiple de 8 et que n^2-m^2 est ainsi multiple de 8.

Ce cas et le cas premier peuvent être combinés ensemble, sans perte de généralité, en fixant juste les deux entiers soit tous pairs et soit tous impairs.

Note :
Si vous considérez que « soit (n.m) est pair, soit (n^2-m^2) est multiple de 8 » doit être traduite avec l'opérateur OU EXCLUSIF, la preuve reste valable en partie et nécessite un complément de preuve. Lorsque vous prouvez que (n.m) est pair, il faudra alors impérativement prouver que (n^2-m^2) n'est pas multiple de 8. Lorsque vous prouvez que (n^2-m^2) est multiple de 8, il faudra alors impérativement prouver que (n.m) n'est pas pair. Une introduction d'une preuve par l'absurde peut faciliter la preuve complémentaire.
Dans le cas d'espèce, il est erroné de l'interpréter en utilisant le OU Exclusif. Un contre-exemple n=12 et m=8 suffit à vous convaincre. 96 est pair et144-64=80 est multiple de 8.