POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810
STRUCTURES DISCRÈTES

TD 8 : INDUCTION ET RÉCURSIVITÉ

E2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1

Les nombres harmoniques sont une séquence de nombres qui sont utilisés dans diverses applications, notamment dans l'étude des ondes sonores et des oscillations, ainsi que dans l'évaluation des séries numériques. Ils sont définis comme la somme des inverses des m premiers entiers naturels non nuls, c'est-à-dire :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

En utilisant l'induction mathématique, montrez que pour tout entier positif non nul n,

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n$$

Solution :

Soit

$$P(n) : \sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n$$

Étape de base : Pour $n = 1$, on a :

Membre de gauche :

$$\sum_{k=1}^{1} H_k = H_1 = 1$$

Membre de droite :

$$(1+1)H_1 - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

Les deux membres sont donc bien égaux. $P(1)$ est donc vraie.

Étape inductive : Supposons que pour un certain m positif non nul, $P(m)$ est vraie i.e.

$$\sum_{k=1}^{m} H_k = (m+1)H_m - m \qquad (Hypothèse\ d'induction, H.I.)$$

On veut arriver à montrer que $P(m+1)$ est vraie, i.e.

$$\sum_{k=1}^{m+1} H_k = (m+2)H_{m+1} - (m+1) \qquad (Objectif)$$

En partant du membre de gauche de l'objectif :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1} H_k &= \sum_{k=1}^{m} H_k + H_{m+1} \\
&= \big((m+1)H_m - m\big) + H_{m+1} && \text{, par } H.I. \\
&= \big((m+1)H_m - m\big) + \left(\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}}_{H_m} + \frac{1}{m+1}\right) \\
&= \big((m+1)H_m - m\big) + \left(H_m + \frac{1}{m+1}\right) \\
&= (m+1)H_m + H_m - m + \frac{1}{m+1} \\
&= (m+2)H_m - m + \frac{1}{m+1} \\
&= (m+2)H_m - m + \frac{1}{m+1} + 1 - 1 \\
&= (m+2)H_m + \frac{1}{m+1} + 1 - m - 1 \\
&= (m+2)H_m + \frac{1}{m+1} + 1 \cdot \frac{m+1}{m+1} - (m+1) \\
&= (m+2)H_m + \frac{1 + (m+1)}{m+1} - (m+1) \\
&= (m+2)H_m + \frac{m+2}{m+1} - (m+1) \\
&= (m+2)\left(H_m + \frac{1}{m+1}\right) - (m+1) \\
&= (m+2)\left(\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1}}_{H_{m+1}}\right) - (m+1) \\
&= (m+2)H_{m+1} - (m+1)
\end{aligned}
$$

Il s'en suit que $P(m+1)$ est vraie et que $P(m) \to P(m+1)$ est vraie.

Conclusion :

Ainsi, $P(1)$ est vraie et $\forall m \geq 1, P(m) \to P(m+1)$ est vraie.

On peut alors conclure, en utilisant l'induction mathématique, que pour tout entier positif non nul n,

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n$$

CQFD

Exercice 2

En utilisant l'induction mathématique, montrez que pour tout entier naturel n,

$$n^5 - n \text{ est divisible par } 5$$

Solution :

Soit $P(n)$: $n^5 - n$ est divisible par 5.

Étape de base : Pour $n = 0$, on a :

$(0)^5 - (0) = 0 - 0 = 0$
0 est bien divisible par 5.
$P(0)$ est donc vraie.

Étape inductive : Supposons que pour un certain $m \geq 0$, $P(m)$ est vraie i.e.

$$m^5 - m \text{ est divisible par } 5 \quad (Hypothèse\ d'induction, H.I.)$$

On veut arriver à montrer que $P(m+1)$ est vraie i.e.

$$(m+1)^5 - (m+1) \text{ est divisible par } 5 \quad (Objectif)$$

En partant du membre de gauche de l'objectif :

$$\begin{aligned}
(m+1)^5 - (m+1) &= (m^5 + 5m^4 + 10m^3 + 10m^2 + 5m + 1) - (m+1) \\
&= m^5 + 5m^4 + 10m^3 + 10m^2 + 5m - m \\
&= (m^5 - m) + 5m^4 + 10m^3 + 10m^2 + 5m \\
&= (m^5 - m) + 5(m^4 + 2m^3 + 2m^2 + m) \\
&= 5k + 5(m^4 + 2m^3 + 2m^2 + m) && ,par\ H.I. \\
& && Et\ posons\ 5k = m^5 - m, avec\ k\ entier \\
&= 5k + 5(m^4 + 2m^3 + 2m^2 + m) \\
&= 5k' && où\ k' = k + m^4 + 2m^3 + 2m^2 + m
\end{aligned}$$

Il existe un entier k' tel que $(m+1)^5 - (m+1) = 5k'$.

$(m+1)^5 - (m+1)$ est donc divisible par 5.
Il s'en suit que $P(m+1)$ est vraie et que $P(m) \rightarrow P(m+1)$ est vraie.

Conclusion :

Ainsi, $P(0)$ est vraie et $\forall m \geq 0, P(m) \rightarrow P(m+1)$ est vraie.
On peut alors conclure, en utilisant l'induction mathématique, que pour tout entier naturel n,

$$(m+1)^5 - (m+1) \text{ est divisible par } 5$$

CQFD

Exercice 3

En utilisant l'induction mathématique, montrez que pour tout entier naturel n strictement supérieur à 3,

$$3^n < (n+1)!$$

Solution :

Soit $P(n)$: $3^n < n!$

Étape de base : Pour $n = 4$, on a :

$3^4 = 81$
Et $(4+1)! = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
On a bien $3^4 < (4+1)! =$, car $81 < 120$,
$P(4)$ est donc vraie.

Étape inductive : Supposons que pour un certain $m > 3$, $P(m)$ est vraie i.e.

$$3^m < (m+1)! \qquad (Hypothèse\ d'induction, H.I.)$$

On veut arriver à montrer que $P(m+1)$ est vraie i.e.

$$3^{m+1} < (m+2)! \qquad (Objectif)$$

Par hypothèse d'induction,

$$3^m < (m+1)!$$

Aussi,

$$3 \cdot 3^m < 3 \cdot (m+1)!$$

Soit,

$$3^{m+1} < 3 \cdot (m+1)! \qquad (\mathrm{I.})$$

Or, $3 < m$, donc $3 < m + 2$

Et

$$3 \cdot (m+1)! < (m+2) \cdot (m+1)! \qquad (\mathrm{II.})$$

Avec $(\mathrm{I.})$ et $(\mathrm{II.})$, on obtient :

$$3^{m+1} < 3 \cdot (m+1)! < \ (m+2) \cdot (m+1)!$$

Soit,

$$3^{m+1} < (m+2) \cdot (m+1)!$$

Ou encore,

$$3^{m+1} < (m+2)!$$

Il s'en suit que $P(m+1)$ est vraie et que $P(m) \rightarrow P(m+1)$ est vraie.

Conclusion :
Ainsi, $P(4)$ est vraie et $\forall m > 3, P(m) \rightarrow P(m+1)$ est vraie.
On peut alors conclure, en utilisant l'induction mathématique, que pour tout entier naturel $n > 3$,

$$3^n < n!$$

CQFD

Exercice 4
On considère la relation de récurrence suivante :

$$a_0 = 2$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 2a_n - n$$

En utilisant l'induction mathématique, montrez que pour tout entier naturel n :

$$a_n = 2^n + n + 1$$

Solution :

Étape de base : Pour $n = 0$, on a :

$$a_0 = 2 = 1 + 1 = 2^{(0)} + 1 = 2^{(0)} + (0) + 1$$

Ce résultat est conforme au cas de base fourni par l'énoncé.
La relation est donc vraie pour $n = 0$.

Étape inductive : Supposons que l'égalité est vraie pour un certain $m \geq 0$, i.e.

$$a_m = 2^m + m + 1 \quad (Hypothèse\ d'induction, H.I.)$$

On veut arriver à montrer que :

$$a_{m+1} = 2^{m+1} + (m+1) + 1 \quad (Objectif)$$

En partant du membre de gauche de l'objectif :

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= 2a_m - m \\ &= 2(2^m + m + 1) - m \qquad , par\ H.I. \\ &= 2^{m+1} + 2m + 2 - m \\ &= 2^{m+1} + m + 2 \\ &= 2^{m+1} + (m+1) + 1 \end{aligned}$$

Donc, l'égalité est établie pour $m + 1$.

Conclusion :

Ainsi, l'égalité est vraie pour $n = 0$. De plus, lorsque l'égalité est établie pour un $m \geq 0$ quelconque, elle l'est également pour $(m + 1)$. Donc, on a pu démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$a_n = 2^n + n + 1$$

CQFD

Exercice 5

Donnez une définition récursive de l'ensemble des entiers naturels qui ne sont pas divisibles par 5.

Solution :

Soit $\boldsymbol{C}$ l'ensemble des entiers qui ne sont pas divisibles par 5.
La définition récursive de $\boldsymbol{C}$ est donc :

$$1 \in \boldsymbol{C},\ \ 2 \in \boldsymbol{C},\ \ 3 \in \boldsymbol{C},\ \ 4 \in \boldsymbol{C}$$
$$\forall n \in \boldsymbol{C}, (n + 5) \in \boldsymbol{C}$$

Ou encore de manière moins élégante, mais admise :

$$1 \in \boldsymbol{C},\ \ 2 \in \boldsymbol{C},\ \ 3 \in \boldsymbol{C},\ \ 4 \in \boldsymbol{C}$$
$$\forall n \in \boldsymbol{C}, (5n + 1) \in \boldsymbol{C}, (5n + 2) \in \boldsymbol{C}, (5n + 3) \in \boldsymbol{C}, (5n + 4) \in \boldsymbol{C}$$

Exercice 6

Donnez une définition récursive de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivante :

$$a_n = \sqrt{2023}^{\left(\sqrt{2023}^{n}\right)}$$

Solution :

$$a_0 = \sqrt{2023}$$
$$a_{n+1} = (a_n)^{\sqrt{2023}}$$

Exercice 7
Le coefficient binomial est largement utilisé dans les domaines des mathématiques, de la statistique, de la combinatoire et de la théorie des probabilités pour représenter le nombre de combinaisons possibles. Le coefficient binomial est défini mathématiquement comme suit :

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Avec $0 \leq k \leq n$.

Donnez une relation de récurrence pour le coefficient binomial.

Indice : Écrivez $C(n+1, k)$ en termes de $C(n, i)$ pour certains i.

Solution :

$$C(n+1, k) = C(n, k) + C(n, k-1)$$

Exercice 8 (Facultatif)
Dans chacun des cas suivants, donnez une définition récursive de la suite (a_n), où n est un entier naturel.

a) $a_n = n + \left(\frac{\pi^e - 1}{1 + \sqrt{\pi^e}}\right) n$

Solution :

$$a_0 = 0 + \left(\frac{\pi^e - 1}{1 + \sqrt{\pi^e}}\right) \cdot 0 = 0 + 0 = 0$$

$$\begin{aligned}
a_{n+1} \quad &= (n+1) + \left(\frac{\pi^e - 1}{1 + \sqrt{\pi^e}}\right)(n+1) \\
&= n + 1 + \left(\frac{\pi^e - 1}{1 + \sqrt{\pi^e}}\right) n + \left(\frac{\pi^e - 1}{1 + \sqrt{\pi^e}}\right) \\
&= n + \left(\frac{\pi^e - 1}{1 + \sqrt{\pi^e}}\right) n + 1 + \left(\frac{\pi^e - 1}{1 + \sqrt{\pi^e}}\right) \\
&= \left[n + \left(\frac{\pi^e - 1}{1 + \sqrt{\pi^e}}\right) n\right] + \left[1 + \left(\frac{\pi^e - 1}{1 + \sqrt{\pi^e}}\right)\right] \\
&= a_n + \left[1 + \left(\frac{\pi^e - 1}{1 + \sqrt{\pi^e}}\right)\right]
\end{aligned}$$

Remarques : Il convient de noter que nous avons découvert la définition récursive pour a_{n+1} et qu'il n'est pas obligatoire de simplifier le terme constant. Cependant, nous le faisons ici à des fins pédagogiques.

$$= a_n + \left[\frac{1+\sqrt{\pi^e}}{1+\sqrt{\pi^e}} + \frac{\pi^e - 1}{1+\sqrt{\pi^e}}\right]$$
$$= a_n + \left[\frac{1+\sqrt{\pi^e}+\pi^e - 1}{1+\sqrt{\pi^e}}\right]$$
$$= a_n + \left[\frac{\sqrt{\pi^e}+\pi^e}{1+\sqrt{\pi^e}}\right]$$
$$= a_n + \left[\frac{\sqrt{\pi^e}\cancel{(1+\sqrt{\pi^e})}}{\cancel{1+\sqrt{\pi^e}}}\right]$$
$$= a_n + \sqrt{\pi^e}$$

La définition récursive de la suite $a_n = n + \left(\frac{\pi^e - 1}{1+\sqrt{\pi^e}}\right)n$ est donc :

- $a_0 = 0$
- $a_{n+1} = a_n + \sqrt{\pi^e}$

b) $a_n = 1 + (-1)^n$

Solution :

$a_0 = 1 + (-1)^0 = 1 + 1 = 2$

$a_n = 1 + (-1)^n$
$Alors \quad (a_n - 1) = (-1)^n$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1 + (-1)^{n+1} \\ &= 1 + (-1)\cdot(-1)^n \\ &= 1 + (-1)(a_n - 1) \\ &= 1 - a_n + 1 \\ &= -a_n + 2 \end{aligned}$$

La définition récursive de la suite $a_n = 1 + (-1)^n$ est donc :

- $a_0 = 2$
- $a_{n+1} = -a_n + 2$

c)

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} (3!)^{i-1}$$

Solution :

$$a_1 = \sum_{i=1}^{1} (3!)^{i-1} = (3!)^{1-1} = (3!)^0 = 1$$

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=1}^{n} (3!)^{i-1} \\ &= (3!)^{-1} \sum_{i=1}^{n} (3!)^{i} \\ &= (3!)^{-1} \cdot (3!) \left(\frac{(3!)^n - 1}{(3!) - 1} \right) \\ &= \frac{(3!)^n - 1}{5} \end{aligned}$$

Alors $(5\, a_n + 1) = (3!)^n$

Donc, $(5\, a_{n+1} + 1) = (3!)^{n+1} \iff (5\, a_{n+1} + 1) = (3\,!) \cdot (3\,!)^n$
$\iff (5\, a_{n+1} + 1) = (3!)(5a_n + 1)$
$\iff (5\, a_{n+1} + 1) = 30a_n + 6$

Ainsi, $a_{n+1} = 6a_n + 1$

La définition récursive de la suite $a_n = \sum_{i=1}^{n} (3!)^{i-1}$ est donc :

- $a_1 = 1$
- $a_{n+1} = 6\, a_n + 1$