POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 2 : LOGIQUE DES PRÉDICATS
H2022

SOLUTIONNAIRE

Directives pour la remise :

- La remise est individuelle, mais le travail en équipe est encouragé.
- La remise est individuelle se fait à la fin de la séance de TD.
- Répondez directement sur ce document Word (docx). Dans l'intérêt de l'équité pour tous les étudiants, vous devez modifier le fichier Word. Modifiez le fichier **EXCLUT** le fait d'intégrer des scans de rédaction manuscrite ou d'y écrire avec un stylet.
- Lorsque vous avez terminé, générez un PDF avec le nom sous le format :
  Matricule-TDNuméro.pdf (exemple : 1234567-TD1.pdf).
- Téléversez votre fichier PDF dans la boîte de remise située dans la Zone TDs de la page Moodle du cours.
- Choisissez la boîte de remise qui correspond à votre section de TD.
- **Aucun retard et aucune remise par courriel ne seront acceptés.**
- **Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.**

Exercice 1. Soit les domaines et fonctions propositionnelles ci-dessous. Quelle est la valeur de vérité de chaque proposition ? Justifiez Votre réponse.

a) $\forall x \, \exists y \; P(x, y)$

x est un entier et y est un entier.

$P(x, y)$: « $x = y + 1$ »

Réponse : Vrai.
Tout entier x a un prédécesseur y.

b) $\forall x \, \exists y \; P(x, y)$

x est un entier positif et y est un entier positif.

$P(x, y)$: « $x = y + 1$ »

Réponse : Faux
Pour $x=0$, il n'existe pas d'entier positif y tel que $x=y+1$

c) $\forall x \, \exists y \; P(x, y)$

x est un réel positif et y est un réel positif.

$P(x, y)$: « $x.y = 1$ »

Réponse : Faux
Pour $x=0$ et pour tout réel positif y, $x.y=0$.

d) $\forall x \, \forall y \, \exists z \; P(x, y, z)$

x est un entier non nul, y est un entier non nul et z est un entier non nul.

$P(x, y, z)$: « $z = x - y$ »

Réponse : Faux
Si deux entier non nuls x et y sont tels que $x=y$, alors $x-y = 0$. Z aurait serait donc nul. Ce qui n'est pas possible.

e) $\exists x \, \forall y \; P(x, y)$

x est un réel positif et y est un réel non nul.

$P(x, y)$: « $x.y < y$ »

Réponse : Faux

Lorsque x est compris entre 0 et 1, l'inégalité est vérifiée pour tout réel positif y et lorsque x est compris entre 1 et l'infini, l'inégalité est vérifiée pour tout réel négatif y. Aucun des 2 cas n'amène y à couvrir tout l'ensemble des réels.

Exercice 2. Soit P(x, y) une fonction propositionnelle pour laquelle les valeurs possibles de x et y sont : 1, 2, 3, 4. Le tableau suivant indique la valeur de vérité de P(x, y) pour chaque valeur x (ligne) et y (colonne).

	1	2	3	4
1	V	F	F	F
2	F	V	V	F
3	V	V	F	F
4	F	F	F	F

Utilisez le tableau pour déterminer sur la vérité de chacun des énoncés suivants.

a) $\forall x\, \exists y\, P(x, y)$
Réponse : Faux.
$\forall y\, \neg P(4,y)$

b) $\forall y\, \exists x\, P(x, y)$
Réponse : Faux.
$\forall x\, \neg\, P(x,4)$

c) $\forall y\, \neg P(4, y) \rightarrow \forall x\, P(x, 4)$
Réponse : Faux.
$\forall y\, \neg P(4, y)$ est Vrai et $\forall x\, P(x,4)$ est Faux. L'implication est donc fausse.

Exercice 3. Soit l'univers des humains. On note :

- filiation(x, y, z) : x est l'enfant de y et z
- yeuxBleus(x) : x a les yeux bleus
- yeuxBruns(x) : x a les yeux bruns

Représentez, à l'aide des quantificateurs, les phrases suivantes.

Note : Il est possible d'inverser 2 quantificateurs universels. Ainsi, $\forall u\, \forall v$ et $\forall v\, \forall u$ ont le même effet.

a) Les enfants de deux parents aux yeux bleus ont forcément les yeux bleus.
Réponse :

$\forall y\ \forall z\ \forall x\ ((\text{filiation}(x, y, z) \land \text{yeuxBleus}(y) \land \text{yeuxBleus}(z)) \longrightarrow \text{yeuxBleus}(x))$

b) Lorsqu'un enfant a les yeux bleus, on ne peut pas affirmer que ses deux parents ont les yeux bleus.

Réponse :

$\forall y\ \forall z\ \forall x\ ((\text{filiation}(x, y, z) \land \text{yeuxBleus}(x)) \longrightarrow \neg\ (\text{yeuxBleus}(y) \land \text{yeuxBleus}(z)))$

c) Un enfant de deux parents aux yeux bruns peut avoir les yeux bleus ou bruns.

Réponse :

$\forall y\ \forall z\ \exists x\ ((\text{filiation}(x, y, z) \land \text{yeuxBruns}(y) \land \text{yeuxBruns}(z)) \longrightarrow (\text{yeuxBleus}(x) \lor \text{yeuxBruns}(x)))$

d) Lorsqu'une personne a les yeux bruns, on peut affirmer que l'un au moins de ses parents a les yeux bruns.

Réponse :

$\forall y\ \forall z\ \forall x\ ((\text{filiation}(x, y, z) \land \text{yeuxBruns}(x)) \longrightarrow (\text{yeuxBruns}(y) \lor \text{yeuxBruns}(z)))$

Exercice 4. Soit l'univers des entiers positifs et les propositions suivantes :

a) $\forall x\ \exists y\ x \leq y$

b) $\forall x\ \forall y\ x \leq y$

c) $\exists x\ \exists y\ x \leq y$

d) $\exists x\ \forall y\ x \leq y$

En comparant 2 à 2 ces propositions, quelles sont celles qui impliquent les autres ?

Réponse :

$(\forall x\ \exists y\ x \leq y) \rightarrow (\exists x\ \exists y\ x \leq y)$ (a implique c)

$(\forall x\ \forall y\ x \leq y) \rightarrow (\forall x\ \exists y\ x \leq y)$ (b implique a)

$(\forall x\ \forall y\ x \leq y) \rightarrow (\exists x\ \exists y\ x \leq y)$ (b implique c)

$(\forall x\ \forall y\ x \leq y) \rightarrow (\exists x\ \forall y\ x \leq y)$ (b implique d)

$(\exists x\ \forall y\ x \leq y) \rightarrow (\exists x\ \exists y\ x \leq y)$ (d implique c)