POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

UNIVERSITÉ
D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 9 : DÉNOMBREMENT

A2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1

Aveline décide de visiter St-Viateur Bagel, la célèbre boulangerie emblématique de Montréal réputée pour ses bagels cuits au feu de bois et ses nombreuses saveurs et garnitures. À la borne de commande, elle découvre un large éventail de bagels parmi lesquels elle peut choisir :

Elle se demande combien de façons différentes elle a pour choisir :

a) Six bagels ?

Solution :

Il y a dix saveurs de bagels ($n = 10$) et elle doit en choisir six ($r = 6$).
Dans ce problème, l'ordre n'a pas d'importance et les répétitions sont autorisées.

Ainsi, il y a donc :

$\binom{n+r-1}{r} = \binom{10+6-1}{6} = \binom{15}{6} = \frac{15!}{6!(15-6)!} = 5005$ façons de choisir six bagels.

b) Deux douzaines de bagels ?

Solution :

Il y a dix saveurs de bagels ($n = 10$) et elle doit en choisir vingt-quatre ($r = 24$).
Dans ce problème, l'ordre n'a pas d'importance et les répétitions sont autorisées.

Par conséquent, il y a donc :

$\binom{n+r-1}{r} = \binom{10+24-1}{24} = \binom{33}{24} = \frac{33!}{24!(33-24)!} = 38\,567\,100$ façons de choisir deux douzaines de bagels.

c) Une douzaine de bagels avec au moins un exemplaire de chaque saveur ?

Solution :

Étant donné qu'il y a dix saveurs de bagels ($n = 10$), il reste donc deux bagels à choisir ($r = 2$) puisque 12 moins les 10 bagels déjà sélectionnés pour satisfaire la condition qu'il y ait au moins un exemplaire de chaque type. Encore une fois, l'ordre n'a pas d'importance et les répétitions sont autorisées.

De ce fait, il y a donc :

$\binom{n+r-1}{r} = \binom{10+2-1}{2} = \binom{11}{2} = \frac{11!}{2!(11-2)!} = 55$ façons de choisir une douzaine de bagels avec au moins un exemplaire de chaque type .

d) Une douzaine de bagels avec au moins trois bagels aux bleuets et au plus deux bagels au Pumpernickel ?

Solution :

Dans ce problème, il y a dix saveurs de bagels parmi lesquelles choisir ($n = 10$), et elle doit en choisir neuf ($r = 9$) puisque 12 moins 3 bagels aux bleuets présélectionnés. De plus, l'ordre n'a pas d'importance et les répétitions sont autorisées.

Nous avons attribué trois choix aux bagels aux bleuets, mais nous devons maintenant déterminer comment choisir les bagels au Pumpernickel. Pour ce faire, nous allons explorer les cas où nous sélectionnons zéro, un, ou deux bagels au Pumpernickel.

Aucun bagel au Pumpernickel :

- $n = 9$ (10 saveurs de bagels, en excluant le Pumpernickel)
- $r = 9$ ($12 - 3$ bagels aux bleuets)

Dans ce cas, il y a donc :

$\binom{n+r-1}{r} = \binom{9+9-1}{9} = \binom{17}{9} = \frac{17!}{9!(17-9)!} = 24\,310$ façons de choisir une douzaine de bagels avec au moins trois bagels aux bleuets et sans aucun bagel au Pumpernickel.

Un bagel au Pumpernickel :

- $n = 9$ (10 saveurs de bagels, en excluant le Pumpernickel)
- $r = 8$ ($12 - 3$ bagels aux bleuets -1 bagel au Pumpernickel)

Dans ce cas, il y a donc :

$\binom{n+r-1}{r} = \binom{9+8-1}{8} = \binom{16}{8} = \frac{16!}{8!(16-8)!} = 12\,870$ façons de choisir une douzaine de bagels avec au moins trois bagels aux bleuets et un bagel au Pumpernickel.

Deux bagels au Pumpernickel :

- $n = 9$ (10 saveurs de bagels, en excluant le Pumpernickel)
- $r = 7$ ($12 - 3$ bagels aux bleuets -2 bagels au Pumpernickel)

Dans ce cas, il y a donc :

$\binom{n+r-1}{r} = \binom{9+7-1}{7} = \binom{15}{7} = \frac{15!}{7!(15-7)!} = 6\,435$ façons de choisir une douzaine de bagels avec au moins trois bagels aux bleuets et deux bagels au Pumpernickel.

En somme, il y a un total de :

$\binom{17}{9} + \binom{16}{8} + \binom{15}{7} = 24\,310 + 12\,870 + 6\,435 = 43\,615$ façons de choisir une douzaine de bagels avec au moins trois bagels aux bleuets et au plus deux bagels au Pumpernickel.

Exercice 2

Combien de permutations des lettres $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{O}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{S}$ contiennent :

> **Note :** Pour chacune des sous questions, l'ordre des lettres est important, et les répétitions de lettres ne sont pas autorisées.

a) La chaîne $\boldsymbol{PR}$? Justifiez votre réponse.

Solution :

Pour le cas où nous voulons que la chaîne $\boldsymbol{PR}$ soit présente, nous avons $\boldsymbol{PR}$ comme un bloc à placer.

- Placement de la chaîne $\boldsymbol{PR}$: $P(7,1) = 7$
- Organisation des lettres restantes : $P(6,6) = 6!$

Le nombre de permutations des lettres $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{O}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{S}$ contenant la chaîne $\boldsymbol{PR}$ est donc :

$$7 \cdot 6! = 5\,040$$

b) Les chaînes $\boldsymbol{EU}$ et $\boldsymbol{PHO}$? Justifiez votre réponse.

Solution :

Pour le cas où nous voulons que les chaînes $\boldsymbol{EU}$ et $\boldsymbol{PHO}$ soient présentes, nous avons deux blocs distincts.

- Placement de la chaîne $\boldsymbol{EU}$: $P(5,1) = 5$
- Placement de la chaîne $\boldsymbol{PHO}$: $P(4,1) = 4$
- Organisation des lettres restantes : $P(3,3) = 3!$

Le nombre de permutations des lettres $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{O}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{S}$ contenant les chaînes $\boldsymbol{EU}$ et $\boldsymbol{PHO}$ est donc :

$$5 \cdot 4 \cdot 3! = 120$$

c) Les chaînes $\boldsymbol{SOM}$ et $\boldsymbol{MER}$? Justifiez votre réponse.

Solution :

Pour le cas où nous voulons que les chaînes $\boldsymbol{SOM}$ et $\boldsymbol{MER}$ soient présentes, nous considérons la chaîne $\boldsymbol{SOMER}$ comme un seul bloc, car la lettre $\boldsymbol{M}$ ne peut pas se répéter.

- Placement des chaînes $\boldsymbol{SOM}$ et $\boldsymbol{MER}$: $P(4,1) = 4$
- Organisation des lettres restantes : $P(3,3) = 3!$

Le nombre de permutations des lettres $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{O}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{S}$ contenant les chaînes $\boldsymbol{SOM}$ et $\boldsymbol{MER}$ est donc :

$$4 \cdot 3! = 24$$

d) Les chaînes $\boldsymbol{ORM}$ et $\boldsymbol{MOS}$? Justifiez votre réponse.

Solution :

Pour le cas où nous voulons que les chaînes $\boldsymbol{ORM}$ et $\boldsymbol{MOS}$ soient présentes, il est impossible de les placer simultanément, car elles ont des lettres en conflit, à savoir $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{O}$.

Donc, le nombre de permutations est de 0.

e) Les chaînes $\boldsymbol{MO}$, $\boldsymbol{PH}$ et $\boldsymbol{US}$? Justifiez votre réponse.

Solution :

Pour le cas où nous voulons que les chaînes $\boldsymbol{MO}, \boldsymbol{PH}$ et $\boldsymbol{US}$ soient présentes, nous avons trois blocs distincts à placer.

- Placement de la chaîne $\boldsymbol{MO}$: $P(5,1) = 5$
- Placement de la chaîne $\boldsymbol{PH}$: $P(4,1) = 4$
- Placement de la chaîne $\boldsymbol{US}$: $P(3,1) = 3$
- Organisation des lettres restantes : $P(2,2) = 2!$

Le nombre de permutations des lettres $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{O}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{S}$ contenant les chaînes $\boldsymbol{MO}, \boldsymbol{PH}$ et $\boldsymbol{US}$ est donc :

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! = 120$$

Exercice 3

Lors d'un voyage de 30 jours à Mykonos, un groupe de touristes souhaite participer à un total de 45 activités pendant le mois, soit une activité par jour au minimum. Montrez qu'il doit y avoir une période de plusieurs jours consécutifs au cours de laquelle le groupe participera exactement à 14 activités.

Solution :

Notons a_j le nombre d'activités auxquelles le groupe a participé jusqu'au j-ème jour du mois.

Ainsi, $a_1, a_2, \ldots, a_{30}$ forme une séquence croissante d'entiers distincts, où $1 \leq a_j \leq 45$.

De plus, les nombres $(a_1 + 14), (a_2 + 14), \ldots, (a_{30} + 14)$ forme également une séquence croissante d'entiers distincts, avec $(1 + 14) \leq \left(a_j + 14\right) \leq (45 + 14)$ ou encore $15 \leq \left(a_j + 14\right) \leq 59$.

Or, tous ces 60 entiers positifs, à savoir $a_1, a_2, \ldots, a_{30}$ et $(a_1 + 14), (a_2 + 14), \ldots, (a_{30} + 14)$ sont inférieurs ou égaux à 59. Selon le principe des tiroirs, nous avons un total de 60 entiers distincts, et la plus grande valeur possible parmi ces entiers est 59, donc au moins $\left\lceil \frac{60}{59} \right\rceil = 2$ de ces entiers doivent être égaux.

Cela signifie qu'il existe des indices i et j tels que $a_i = \left(a_j + 14\right)$. Cette égalité indique qu'il y a exactement 14 activités auxquelles le groupe a participé entre le $(j + 1)$-ème jour et le i-ème jour.
CQFD

Exercice 4

La compagnie d'assurance GHT a réalisé une étude sur un groupe de souscripteurs pour analyser leurs habitudes de réclamations d'assurance. Voici les informations recueillies :

- Parmi les 500 souscripteurs, 120 ont déposé des réclamations pour leur assurance automobile.
- Parmi les 500 souscripteurs, 150 ont déposé des réclamations pour leur assurance habitation.
- Parmi les 500 souscripteurs, 80 ont déposé des réclamations pour leur assurance santé.
- Sur les 120 souscripteurs ayant déposé des réclamations pour leur assurance automobile, 30 ont également déposé des réclamations pour leur assurance habitation.
- Parmi les 150 souscripteurs ayant déposé des réclamations pour leur assurance habitation, 40 ont également déposé des réclamations pour leur assurance santé.
- Parmi les 80 souscripteurs ayant déposé des réclamations pour leur assurance santé, 20 ont également déposé des réclamations pour leur assurance automobile.
- Parmi l'ensemble du groupe étudié, 10 souscripteurs ont déposé des réclamations pour les trois types d'assurance.

En tant que consultant actuaire de GHT, déterminez le nombre de souscripteurs qui n'ont déposé aucune réclamation pour aucun des trois types d'assurance. Montrez toutes les étapes de votre réponse.

Solution :

Soit A, H et S les ensembles des souscripteurs ayant déposé des réclamations pour leur assurance automobile, habitation et santé respectivement et soit Ω l'ensemble du groupe étudié.

Alors, $|A| = 120, |H| = 150, |S| = 80, |A \cap H| = 30, |H \cap S| = 40, |S \cap A| = 20, |A \cap H \cap S| = 10$ et $|\Omega| = 500.$

Aussi, $|\Omega| = |A \cup H \cup S| + \overline{|A \cup H \cup S|} = \underbrace{|A \cup H \cup S|}_{\substack{\text{Le nombre de souscripteurs}\\ \text{qui ont déposé au moins}\\ \text{une réclamation pour}\\ \text{les trois types d'assurance}}} + \underbrace{|\bar{A} \cap \bar{H} \cap \bar{S}|}_{\substack{\text{Le nombre de souscripteurs}\\ \text{qui n'ont déposé aucune réclamation}\\ \text{pour aucun des trois types d'assurance}}}$

Ainsi en utilisant le principe d'inclusion-exclusion, nous pouvons trouver le nombre de souscripteurs qui n'ont déposé aucune réclamation pour aucun des trois types d'assurance :

$$\begin{aligned}
|\bar{A} \cap \bar{H} \cap \bar{S}| &= |\Omega| - |A \cup H \cup S| \\
&= |\Omega| - (|A| + |H| + |S| - |A \cap H| - |H \cap S| - |S \cap A| + |A \cap H \cap S|) \\
&= 500 - (120 + 150 + 80 - 30 - 40 - 20 + 10) \\
&= 500 - 270 \\
&= 230
\end{aligned}$$

De ce fait, le nombre de souscripteurs de GHT qui n'ont déposé aucune réclamation pour aucun des trois types d'assurance est de 230.

Exercice 5

Résolvez l'équation de récurrence :

$$\ln(a_{n+1}) + \ln\left(\frac{1}{(a_n)^2}\right) = -1$$

Avec $a_0 = e^4, a_1 = e^7$.

Solution :

On peut réécrire l'équation de récurrence comme suit :

$$\ln(a_{n+1}) - 2\ln(a_n) = -1 \qquad (\mathbf{I.})$$

Également,

$$\ln(a_{n+2}) - 2\ln(a_{n+1}) = -1 \qquad (\mathbf{II.})$$

En soustrayant $(\mathbf{I.})$ de $(\mathbf{II.})$, on obtient :

$$\ln(a_{n+2}) - 3\ln(a_{n+1}) + 2\ln(a_n) = 0$$

En faisant un changement de variable $b_n = \ln(a_n)$, on obtient la relation de récurrence linéaire homogène à coefficients constants de degré 2 suivant :

$$b_{n+2} - 3b_{n+1} + 2b_n = 0$$

Avec $b_0 = \ln(a_0) = \ln(e^4) = 4$ et $b_1 = \ln(a_1) = \ln(e^7) = 7$

L'équation caractéristique est donc :

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

Et les racines de cette équation sont :

- $r_1 = 1$
- $r_2 = 2$

La forme générale de la solution est :

$$b_n = \alpha_1(1^n) + \alpha_2(2^n)$$

Avec les cas de base $b_0 = 4$ et $b_1 = 7$, on obtient :

$$\alpha_1 = 1 \text{ et } \alpha_2 = 3$$

Ainsi en remplaçant les constantes dans la forme générale de la solution, on a :

$$b_n = (1^n) + 3(2^n)$$

Ou encore,

$$b_n = 1 + 3(2^n)$$

À partir du changement de variable $b_n = \ln(a_n)$, on déduit $a_n = e^{b_n}$.

D'où $a_n = e^{1+3(2^n)}$.

Exercice 6

Vous décidez d'utiliser la technique de diviser pour régner pour résoudre un certain type de problèmes.

- Pour $n \geq 3$, vous pouvez obtenir la solution à un exemplaire de taille n en résolvant 5^{1250} sous-exemplaires de taille $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.
- Le temps requis pour la décomposition de l'exemplaire original en 5^{1250} sous-exemplaires est $\theta\left(\frac{n^{1875}}{\log(n+2023)}\right)$.
- Le temps requis pour la recombinaison des solutions est en $\theta(n^{1875})$.

En supposant que n est une puissance de 3, trouvez l'ordre de grandeur du temps d'exécution de la solution.

Solution :

Soit $f(n)$ la fonction correspondant à la solution.

En considérant les temps des manipulations complémentaires $\theta\left(\frac{n^{1875}}{\log(n+2023)}\right)$ et $\theta(n^{1875})$, on obtient une fonction $g(n)$ qui est $\theta\left(\max\left(\frac{n^{1875}}{\log(n+2023)}, n^{1875}\right)\right)$, soit $\theta(n^{1875})$.

Et puisque $g(n)$ est $\theta(n^{1875})$, elle est aussi $O(n^{1875})$.

Nous pouvons donc établir la relation de récurrence suivante :

$$f(n) = 5^{1250} \cdot f\left(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil\right) + n^{1875}$$

Elle suit la forme générale :

$$f(n) = a \cdot f\left(\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil\right) + c \cdot n^d$$

Où les paramètres sont définis comme suit :

- $a = 5^{1250}$
- $b = 3$
- $c = 1$
- $d = 1875$

Il est à noter que le théorème maître (p.13 des notes de cours) définit trois cas possibles, à savoir :

$$\begin{array}{lcl} (\text{Cas } 1) & O\left(n^d\right) & \text{pour } a < b^d \\ (\text{Cas } 2) & O\left(n^d \log n\right) & \text{pour } a = b^d \\ (\text{Cas } 3) & O\left(n^{\log_b a}\right) & \text{pour } a > b^d \end{array}$$

En comparant a et b^d, nous constatons que :

$$a = 5^{1250} = 5^{2 \cdot 625} = (5^2)^{625} = (25)^{625}$$

Aussi,

$$b^d = 3^{1875} = 3^{3 \cdot 625} = (3^3)^{625} = (27)^{625}$$

Il s'en suit que $a < b^d$.

En conséquence, conformément au cas 1 du théorème maître, nous pouvons conclure que $f(n) \in O\left(n^d\right)$, soit $f(n) \in O(n^{1875})$.

D'où $f(n) \in O(n^{1875})$.