POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 4 : ENSEMBLES ET FONCTIONS

H2025

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 :

Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

a) $2 \in \{1,2,3\}$
Vrai : 2 est un élément de l'ensemble $\{1,2,3\}$

b) $2 \subseteq \{1,2,3\}$
Faux : Pour que l'affirmation soit vraie, il aurait fallu que 2 soit un ensemble et que tous ses éléments appartiennent à l'ensemble $\{1,2,3\}$, ce qui n'est pas le cas.

c) $\{2\} \in \{\{1\},\{2\}\}$
Vrai : $\{\mathbf{2}\}$ est un élément de l'ensemble $\{\{1\},\{2\}\}$.

d) $\emptyset \in \{1,2,3\}$
Faux : Pour que l'affirmation soit vraie, il aurait fallu que $\emptyset$ soit un élément de l'ensemble $\{1,2,3\}$, ce qui n'est pas le cas.

e) $\emptyset \subseteq \{1,2,3\}$
Vrai : L'ensemble vide est un sous-ensemble de tout ensemble.

f) $(A \cup B) \cap A = \emptyset$
Faux : L'intersection de $A \cup B$ avec A n'est jamais vide car A est inclus dans $A \cup B$. L'intersection est au minimum A.

g) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$.
Vrai : Si A est un sous-ensemble de B, alors tous les éléments de A sont dans B. Ainsi, l'intersection de A et B est simplement A.

h) $Si\ A \cap B = \emptyset\ alors\ A - B = \mathrm{B}$
Faux : Si l'intersection de A et B est vide, alors ils n'ont aucuns éléments en commun et donc $A - B$ = A

Pour les sous-questions suivantes considérez :

- $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 2p, pour\ un\ entier\ p\ quelconque\}$
- $B = \{m \in \mathbb{Z} \mid m = 2q - 2, pour\ un\ entier\ q\ quelconque\}$
- $C = \{k \in \mathbb{Z} \mid k = 3r + 1, pour\ un\ entier\ r\ quelconque\}$

i) $A = C$

Solution

Faux : Nous avons par exemple $2 \in A$ car $2 = 2 \cdot 1$ (donc $p = 1$). Cependant, nous avons $2 \notin C$. Effectivement :

$$3r + 1 = 2$$
$$3r = 2 - 1$$
$$3r = 1$$
$$r = \frac{1}{3}$$

Ainsi, comme r doit être un entier, alors $2 \notin C$. De cette façon, comme nous avons trouvé un élément seulement présent dans l'ensemble A mais pas dans C, alors les ensembles A et C ne peuvent être égaux.

j) $A = B$

Solution

Vrai. Pour arriver à montrer que l'affirmation est vraie, nous devons montrer que tous les éléments de A sont aussi des éléments de B et que réciproquement tous les éléments de B sont aussi éléments de A. Nous devons donc montrer les deux affirmations suivantes :

1. Que n'importe quel entier de la forme $2p$ avec un p entier quelconque peut également s'écrire sous la forme $2q - 2$ avec un q entier quelconque.

2. Que n'importe quel entier de la forme $2q - 2$ avec un q entier quelconque peut également s'écrire sous la forme $2p$ avec un p entier quelconque.

Montrons d'abord la première affirmation :

Supposons qu'il existe un entier $n = 2p$ pour un p entier. Montrons que l'on peut trouver une valeur entière q telle que $n = 2q - 2$:

$$2q - 2 = 2p$$
$$2q = 2p + 2$$
$$q = p + 1$$

Ainsi, si nous avons $n = 2p$, il est aussi possible d'écrire :

$$n = 2q - 2 = 2(p + 1) - 2 = 2p$$

Nous avons donc montré que $A \subseteq \boldsymbol{B}$**.**

Montrons maintenant la deuxième affirmation.

Supposons qu'il existe un entier $m = 2q - 2$ pour un q entier. Montrons que l'on peut trouver une valeur entière p telle que $m = 2p$:

$$2p = 2q - 2$$
$$2p = 2(q - 1)$$
$$p = q - 1$$

Ainsi, si nous avons $m = 2q - 2$, il est aussi possible d'écrire :

$$m = 2p = 2(q - 1) = 2q - 2$$

Nous avons donc montré que $B \subseteq \boldsymbol{A}$**.**

Finalement, comme nous avons montré $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$, nous pouvons conclure que $A = B$.

Exercice 2

Considérons les ensembles suivants :

- $A = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $B = l'ensemble\ des\ nombres\ premiers$
- $C = \{2n^2 + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $D = \{x^2 < 9 \mid x \in \mathbb{Z}\}$

Déterminez le résultat des opérations suivantes.

a) $A \cap$ B.

Solution

L'ensemble A correspond à l'ensemble des nombres pairs. L'ensemble B correspond à l'ensemble des nombres premiers. Le seul nombre pair et premier est deux, nous avons donc :

$$A \cap B = \{2\}$$

b) $C \cup (A \cap B)$.

Solution

Nous avons l'ensemble $C = \{1,3,9,19, \dots\}$ et l'ensemble $A \cap B = \{2\}$. Ainsi, nous avons :

$$C \cup (A \cap B) = \{1, \mathbf{2}, 3,9,19, \dots\}$$

c) $D - \big(C \cup (A \cap B)\big)$.

Solution

Nous avons l'ensemble $D = \{-2,-1,0,1,2\}$ et l'ensemble $C \cup (A \cap B) = \{1,2,3,9,19, \dots\}$. Ainsi, nous avons :

$$D - \big(C \cup (A \cap B)\big) = \{-2,-1,0\}$$

d) Définissez par énumération l'ensemble $\mathcal{P}\Big(D - \big(C \cup (A \cap B)\big)\Big)$.

Solution

$$\mathcal{P}\Big(D - \big(C \cup (A \cap B)\big)\Big) = \{\emptyset, \{-2\}, \{-1\}, \{0\}, \{-2,-1\}, \{-2,0\}, \{-1,0\}, \{-2,-1,0\}\}$$

Exercice 3 :

<u>Partie A</u>

Démontrez la propriété de distributivité suivante des ensembles :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Solution :

$$\begin{aligned}
x \in [A \cap (B \cup C)\,] \quad &\Leftrightarrow [x \in A] \wedge [x \in (B \cup C)] && \text{Déf. Intersection} \\
&\Leftrightarrow [x \in A] \wedge [(x \in B) \vee (x \in C)] && \text{Déf. Union} \\
&\Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \in B)] \vee [(x \in A) \wedge (x \in C)] && \text{Distributivité} \\
&\Leftrightarrow [x \in (A \cap B)] \vee [x \in (A \cap C)] && \text{Déf. Intersection} \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) && \text{Déf. Union}
\end{aligned}$$

Nous obtenons bien $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

<u>Partie B</u>

Soit *A*, *B* et *C* trois sous-ensembles d'un ensemble *E*. En utilisant les propriétés des ensembles, simplifiez chacune des expressions. Justifiez toutes les étapes de votre réponse.

a) $(\overline{A \cup B}) \cap (\overline{B \cup C}) \cap (\overline{\overline{A} \cup C})$

Solution :

$$\begin{aligned}
(\overline{A \cup B}) \cap (\overline{B \cup C}) \cap (\overline{\overline{A} \cup C}) &= (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \cap (\overline{\overline{A}} \cap \overline{C}) && \text{Loi de De Morgan} \\
&= (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \cap (A \cap \overline{C}) && \text{Loi de complémentation} \\
&= \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap A \cap \overline{C} && \text{Loi d'associativité} \\
&= \overline{A} \cap A \cap \overline{B} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{C} && \text{Loi de commutativité} \\
&= (\overline{A} \cap A) \cap \overline{B} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{C} && \text{Loi d'associativité} \\
&= \emptyset \cap \overline{B} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{C} && \text{Loi complémentaire} \\
&= \emptyset && \text{Domination}
\end{aligned}$$

b) $(A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)$

Solution :

$$
\begin{aligned}
(A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) &= \left(A \cup \left(A \cap \overline{B}\right)\right) \cap \left(B \cup \left(A \cap \overline{B}\right)\right) && \text{Distributivité} \\
&= (A \cup A) \cap \left(A \cup \overline{B}\right) \cap (B \cup A) \cap \left(B \cup \overline{B}\right) && \text{Distributivité} \\
&= A \cap \left(A \cup \overline{B}\right) \cap (B \cup A) \cap \left(B \cup \overline{B}\right) && \text{Idempotence} \\
&= A \cap \left(A \cup \overline{B}\right) \cap (B \cup A) \cap E && \text{Loi complémentaire} \\
&= A \cap (B \cup A) \cap E && \text{Lois de l'absorption} \\
&= A \cap E && \text{Lois de l'absorption} \\
&= A && \text{Identité}
\end{aligned}
$$

c) $\left(\overline{\overline{A} \cap C}\right) \cup \left(\overline{A \cap B}\right)$

Solution :

$$
\begin{aligned}
\left(\overline{\overline{A} \cap C}\right) \cup \left(\overline{A \cap B}\right) &= \left(\overline{\overline{A}} \cup \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) && \text{Loi de De Morgan} \\
&= \left(A \cup \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) && \text{Loi de complémentation} \\
&= A \cup \overline{C} \cup \overline{A} \cup \overline{B} && \text{Loi d'associativité} \\
&= A \cup \overline{A} \cup \overline{C} \cup \overline{B} && \text{Loi de commutativité} \\
&= \left(A \cup \overline{A}\right) \cup \overline{C} \cup \overline{B} && \text{Loi d'associativité} \\
&= E \cup \overline{C} \cup \overline{B} && \text{Loi complémentaire} \\
&= E && \text{Domination}
\end{aligned}
$$

Exercice 4 :

Déterminez, dans chacun des cas suivants, si la fonction donnée est une fonction injective, une fonction surjective, une fonction bijective. Justifiez votre réponse.

a) En musique, transposer une mélodie consiste à la déplacer d'une tonalité à une autre tout en conservant les intervalles entre les notes. Par exemple, on peut transposer une mélodie de **Do majeur** vers **Si majeur** en abaissant chaque note d'un demi-ton. Les ensembles sont composés des notes suivantes :

- $DO = \{do, ré, mi, fa, sol, la, si\}$
- $SI = \{si, do\sharp, ré\sharp, mi, fa\sharp, sol\sharp, la\sharp\}$

On propose la fonction $f = \{(do, si),\ (ré, do\#),\ (mi, ré\#), (fa, mi),\ (sol, fa\#),\ (la, sol\#),$ $(si, la\#)\}$ définie de $\boldsymbol{DO} \rightarrow \boldsymbol{SI}.$

Solution

Fonction injective : Oui.

Les éléments du domaine ***Do*** ont chacun une image distincte des autres éléments de ***SI*.**

Fonction surjective : Oui

Tous les éléments du codomaine ***SI*** on un antécédant du domaine ***DO***.

Fonction Bijective : Oui.

Comme la fonction est injective et surjective, alors elle est bijective.

b) Définissons la fonction $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ par :

$$g(n) = \begin{cases} 2n - 1, & n > 0 \\ -2\text{n}, & n \leq 0 \end{cases}$$

Solution :
Fonction injective : Oui

Afin de montrer que la fonction $g(n)$ est injective, il faut montrer que si $g(n_1) = g(n_2)$, alors $n_1 = n_2$. Pour ce faire, considérons les cas suivants :

Cas 1 (n_1 et n_2 sont de signes différents) : On remarque que si $n > 0$, alors $g(n)$ est un nombre impair. Au contraire, quand $n \leq 0$, $g(n)$ est pair. Ainsi, comme un nombre ne peut pas être pair et impair, si on a n_1 et n_2 de signes différents, alors $g(n_1) \neq g(n_2)$ (à moter que l'expression $n_1 \neq n_2 \to g(n_1) \neq g(n_2)$ est la contraposé de l'expression initial).

Cas 2 (n_1 et n_2 sont positifs) : Pour un n positif, nous avons $g(n) = 2n - 1$. Nous avons dans ce cas :

$$g(n_1) = g(n_2)$$
$$2n_1 - 1 = 2n_2 - 1$$
$$\Rightarrow n_1 = n_2$$

Donc quand n_1 et n_2 sont positifs $g(n_1) = g(n_2)$, alors $n_1 = n_2$.

Cas 3 (n_1 et n_2 sont nuls ou négatif) : Pour un $n \leq 0$, nous avons $g(n) =$ -$2n$. Nous avons dans ce cas :

$$g(n_1) = g(n_2)$$
$$-2n_1 = -2n_2$$
$$\Rightarrow n_1 = n_2$$

Donc quand n_1 et n_2 sont positifs $g(n_1) = g(n_2)$, alors $n_1 = n_2$.

Ainsi, comme nous avons montré que dans le cas où n_1 et n_2 sont de signes différents $g(n_1) \neq g(n_2)$ et que dans les autres cas $g(n_1) = g(n_2)$, alors $n_1 = n_2$, alors la fonction est injective.

Fonction surjective : Oui

Nous voulons montrer que pour tout entier naturel m, il existe un nombre entier n tel que $g(n) = m$. Considérons les 3 cas suivants :

Cas 1 : $m = 0$. Alors, nous avons simplement : $g(0) = -2(0) = 0$.

Cas 2 : m est un entier impair, c'est-à-dire que $m = 2k + 1$ pour un $k > 0$ entier. Nous avons dans ce cas-là : $g(n) = g(k + 1) = 2(k + 1) - 1 = 2k + 1 = m$.

Cas 3 : m est un entier pair, c'est-à-dire que $m = 2k$ pour un $k > 0$ entier, Nous avons dans ce cas-là : $g(n) = g(\text{-k}) = -2(-k) = 2k = m$.

Ainsi, comme nous avons montré que pour tout entier naturel m, il existe un nombre entier naturel n tel que $g(n) = m$, la fonction est surjective.

Fonction Bijective : Oui.
Comme la fonction est injective et surjective, alors elle est bijective.

c) $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, h(x, y) \mapsto \left(e^x cos(y), e^x sin(y)\right)$

Solution :

Fonction injective : Non

On remarque que comme les fonctions $cos(y)$ et $sin(y)$ sont périodiques, alors la fonction ne peut pas être injective. Effectivement, nous avons :

$$cos(y + 2\pi) = cos(y)$$
$$sin(y + 2\pi) = sin(y)$$

Ainsi, nous avons :

$$h(x, y) = h(x, y + 2\pi)$$

Fonction surjective : Non

Pour que la fonction soit surjective, il faut que l'ensemble du codomaine $\mathbb{R}^2$ soit couvert. Nous remarquons que le point $(0,0)$ n'est pas couvert par la fonction. Effectivement, e^x n'est jamais nul et $cos(y)$ et $sin(y)$ ne sont jamais nuls en même temps pour une même valeur de y. Ainsi, le point $(0,0)$ du codomaine n'a pas d'antécédant, la fonction n'est donc pas surjective.

Fonction Bijective : Non

Comme la fonction n'est ni injective ni surjective, alors elle n'est pas bijective.