POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 1 : LOGIQUE PROPOSITIONNELLE

A2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1

On considère les propositions P, Q, R et S définies comme suit :

- P : « Kim priorise ses études sur son intérêt pour la danse »
- Q : « Kim obtiendra une bonne éducation »
- R : « Kim a du temps pour pratiquer la danse »
- S : « Kim participe à des cours de danse avancés »

Représentez **la négation** des énoncés suivants en logique propositionnelle.

a) Kim n'obtiendra une bonne éducation que si elle priorise ses études sur son intérêt pour la danse.

Solution :

$P \wedge \neg Q$

b) Ni Kim n'obtiendra une bonne éducation, ni n'aura-t-elle le temps de pratiquer la danse.

Solution :

$Q \vee R$

c) Kim participe à des cours de danse avancés à moins qu'elle ne priorise ses études sur son intérêt pour la danse.

Solution :

$\neg P \wedge \neg S$

d) Kim participe à des cours de danse avancés et pourtant elle n'a pas de temps pour pratiquer la danse.

Solution :

Plusieurs réponses possibles.

- $\neg S \vee R$
- $S \rightarrow R$
- $\neg R \rightarrow \neg S$

e) Kim n'obtiendra pas une bonne éducation si et seulement si elle ne priorise pas ses études sur son intérêt pour la danse.

Solution :

Plusieurs réponses possibles.

- $\neg Q \leftrightarrow P$
- $Q \leftrightarrow \neg P$
- $\neg Q \oplus \neg P$
- $Q \oplus P$

Exercice 2

Soit P, Q, R et S les propositions suivantes :

- P : « L'alpiniste atteint le sommet de l'Everest »
- Q : « Le ciel est dégagé »
- R : « Il neige »
- S : « Les températures sont glaciales »

Énoncez des phrases simples (en langage courant) qui traduisent chacune des propositions suivantes.

a) $(Q \wedge S) \vee (\neg Q \wedge \neg S)$

Solution :

Plusieurs formulations possibles.

- Le ciel est dégagé et les températures sont glaciales ou le ciel n'est pas dégagé et les températures ne sont pas glaciales.
- Le ciel est dégagé si et seulement si les températures sont glaciales.

b) $(Q \wedge \neg R \wedge \neg S) \rightarrow P$

Solution :

Si le ciel est dégagé et qu'il ne neige pas et que les températures ne sont pas glaciales, alors l'alpiniste atteint le sommet de l'Everest.

c) $R \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

Solution :

S'il neige, alors si le ciel n'est pas dégagé, l'alpiniste n'atteint pas le sommet de l'Everest.

d) $\neg(P \oplus (\neg R \vee Q))$

Solution :

L'alpiniste atteint le sommet de l'Everest si et seulement s'il ne neige pas ou le ciel est dégagé.

Exercice 3

On considère les propositions P, Q, R et S définies comme suit :

- P : « La sonde spatiale détecte la présence d'eau »
- Q : « La sonde spatiale analyse la surface avec succès »
- R : « Un problème technique survient »
- S : « Les données sont transmises à la station terrestre »

Trois énoncés sont également définis :

- $\boldsymbol{A}$: « Si la sonde spatiale analyse la surface avec succès, alors les données sont transmises à la station terrestre »
- $\boldsymbol{B}$: « Un problème technique survient dès que les données ne sont pas transmises à la station terrestre ou la sonde spatiale n'analyse pas la surface avec succès »
- $\boldsymbol{C}$: « La sonde spatiale détecte la présence d'eau et analyse la surface avec succès, donc les données sont transmises à la station terrestre si un problème technique survient »

a) Donnez en langage courant la **contraposée** de l'énoncé $\boldsymbol{A}$.

Solution :

Si les données ne sont pas transmises à la station terrestre, alors la sonde spatiale n'a pas analysé la surface avec succès.

b) Donnez en langage courant la **réciproque** de l'énoncé $\boldsymbol{B}$.

Solution :

Si un problème technique survient, alors les données ne sont pas transmises à la station terrestre ou la sonde spatiale n'analyse pas la surface avec succès.

c) Donnez en langage courant l'**inverse** de l'énoncé $\boldsymbol{C}$.

Solution :

Si la sonde spatiale ne détecte pas la présence d'eau ou n'analyse pas la surface avec succès, alors un problème technique survient et les données ne sont pas transmises à la station terrestre.

Exercice 4

Construisez une table de vérité pour chacune des propositions suivantes et dites s'il s'agit d'une **tautologie**, d'une **contradiction** ou d'une **contingence**. Justifiez votre réponse.

a) $(p \oplus q) \wedge (p \oplus \neg q)$

Solution :

p	q	$\neg q$	$p \oplus q$	$p \oplus \neg q$	$(p \oplus q) \wedge (p \oplus \neg q)$
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	T	F

D'après la table de vérité ci-dessus, il s'agit d'une **contradiction** puisque la proposition est toujours fausse quelles que soient les valeurs de p et q.

b) $[\neg(p \to q) \to (p \to q)] \to \neg(p \to q)$

Solution :

p	q	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$\neg(p \to q) \to (p \to q)$	$[\neg(p \to q) \to (p \to q)] \to \neg(p \to q)$
T	T	T	F	T	F
T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	T	F
F	F	T	F	T	F

D'après la table de vérité ci-dessus, il s'agit d'une **contingence** puisque la proposition est vraie lorsque la valeur de p est vrai et la valeur de q est faux, mais fausse pour toutes les autres combinaisons de valeurs de p et q.

Exercice 5

Soit la proposition suivante :

$$[(P \to Q) \wedge (\neg R \vee S) \wedge (P \vee R)] \to (\neg Q \to S)$$

En dérivant la proposition, dites s'il s'agit d'une **tautologie**, d'une **contradiction** ou d'une **contingence**. Justifiez chaque étape de votre réponse.

Solution :

$[(P \to Q) \wedge (\neg R \vee S) \wedge (P \vee R)] \to (\neg Q \to S) \equiv [(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee S) \wedge (P \vee R)] \to (\neg Q \to S)$	$A \to B \equiv (\neg A \vee B)$
$\equiv [(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee S) \wedge (P \vee R)] \to (\neg(\neg Q) \vee S)$	$A \to B \equiv (\neg A \vee B)$
$\equiv [(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee S) \wedge (P \vee R)] \to (Q \vee S)$	Double négation
$\equiv \neg[(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee S) \wedge (P \vee R)] \vee (Q \vee S)$	$A \to B \equiv (\neg A \vee B)$
$\equiv [\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg R \vee S) \vee \neg(P \vee R)] \vee (Q \vee S)$	De Morgan
$\equiv [(\neg(\neg P) \wedge \neg Q) \vee (\neg(\neg R) \wedge \neg S) \vee (\neg P \wedge \neg R)] \vee (Q \vee S)$	De Morgan
$\equiv [(P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge \neg S) \vee (\neg P \wedge \neg R)] \vee (Q \vee S)$	Double négation
$\equiv (P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge \neg S) \vee (\neg P \wedge \neg R) \vee Q \vee S$	Associativité de $\vee$
$\equiv (P \wedge \neg Q) \vee Q \vee (R \wedge \neg S) \vee S \vee (\neg P \wedge \neg R)$	Commutativité de $\vee$
$\equiv [(P \wedge \neg Q) \vee Q] \vee [(R \wedge \neg S) \vee S] \vee (\neg P \wedge \neg R)$	Associativité de $\vee$
$\equiv [(P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q)] \vee [(R \vee S) \wedge (\neg S \vee S)] \vee (\neg P \wedge \neg R)$	Distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$

$$
\begin{aligned}
&\equiv [(P \vee Q) \wedge VRAI] \vee [(R \vee S) \wedge VRAI] \vee (\neg P \wedge \neg R) && \text{Loi de négation}\\
&\equiv (P \vee Q) \vee (R \vee S) \vee (\neg P \wedge \neg R) && \text{Loi d'identité}\\
&\equiv P \vee Q \vee R \vee S \vee (\neg P \wedge \neg R) && \text{Associativité de } \vee\\
&\equiv P \vee R \vee Q \vee S \vee (\neg P \wedge \neg R) && \text{Commutativité de } \vee\\
&\equiv (P \vee R) \vee Q \vee S \vee (\neg P \wedge \neg R) && \text{Associativité de } \vee\\
&\equiv \neg(\neg P \wedge \neg R) \vee Q \vee S \vee (\neg P \wedge \neg R) && \text{Double négation}\\
&\equiv Q \vee S \vee \neg(\neg P \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg R) && \text{Commutativité de } \vee\\
&\equiv (Q \vee S) \vee [\neg(\neg P \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg R)] && \text{Associativité de } \vee\\
&\equiv (Q \vee S) \vee VRAI && \text{Loi de négation}\\
&\equiv VRAI && \text{Loi de domination}
\end{aligned}
$$

En dérivant la proposition, il s'agit donc d'une **tautologie**.

Exercice 6

En récompense d'avoir identifié une faille de sécurité importante dans le système informatique de l'Agence canadienne de développement international, le directeur général vous offre l'opportunité de gagner une clé USB contenant des informations confidentielles sur les ovnis. Les deux clés USB qui ne contiennent pas les informations sont vides. Pour gagner, vous devez sélectionner la bonne clé USB. Les clés USB 1 et 2 portent chacune l'inscription « Ce dispositif est vide », et la clé USB 3 porte l'inscription « Les informations se trouvent sur la clé USB 2 ». L'expert en cybersécurité, qui ne ment jamais, vous dit qu'une seule de ces inscriptions est vraie, tandis que les deux autres sont fausses. Quelle clé USB devriez-vous choisir pour gagner ? Justifiez votre réponse.

Solution :

Soit p_i la proposition que les informations sont sur la clé USB i, pour i = 1, 2, 3.

Alors, les inscriptions sur la clé USB 1, la clé USB 2 et la clé USB 3 sont respectivement $\neg p_1, \neg p_2$ et p_2.

Ainsi, la déclaration de l'expert en cybersécurité selon laquelle une seule des inscriptions est vraie peut être traduite en :

$$\left[\underbrace{\neg p_1}_{Vrai} \wedge \neg(\neg p_2) \wedge \neg p_2\right] \vee \left[\neg(\neg p_1) \wedge \underbrace{\neg p_2}_{Vrai} \wedge \neg p_2\right] \vee \left[\neg(\neg p_1) \wedge \neg(\neg p_2) \wedge \underbrace{p_2}_{Vrai}\right]$$

En utilisant les règles de la logique propositionnelle, on déduit

$$
\begin{aligned}
&[\neg p_1 \wedge \neg(\neg p_2) \wedge \neg p_2] \vee [\neg(\neg p_1) \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_2] \vee [\neg(\neg p_1) \wedge \neg(\neg p_2) \wedge p_2] && \\
&\equiv [\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_2] \vee [p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_2] \vee [p_1 \wedge p_2 \wedge p_2] && \text{Double négation}\\
&\equiv [\neg p_1 \wedge (p_2 \wedge \neg p_2)] \vee [p_1 \wedge (\neg p_2 \wedge \neg p_2)] \vee [p_1 \wedge (p_2 \wedge p_2)] && \text{Associativité de } \wedge\\
&\equiv [\neg p_1 \wedge (p_2 \wedge \neg p_2)] \vee [p_1 \wedge \neg p_2] \vee [p_1 \wedge p_2] && \text{Idempotence}\\
&\equiv [\neg p_1 \wedge (p_2 \wedge \neg p_2)] \vee [p_1 \wedge (\neg p_2 \vee p_2)] && \text{Distributivité de } \wedge \text{ par rapport à } \vee
\end{aligned}
$$

$\equiv [\neg p_1 \wedge FAUX] \vee [p_1 \wedge VRAI]$	Négation
$\equiv FAUX \vee [p_1 \wedge VRAI]$	Loi de domination
$\equiv FAUX \vee p_1$	Loi d'identité
$\equiv p_1$	Loi d'identité

Ainsi, les informations sont sur la clé **USB 1** (c'est-à-dire que p_1 est vraie), et p_2 et p_3 sont fausses et que l'inscription sur la clé USB 2 est la seule vraie.