POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810
STRUCTURES DISCRÈTES

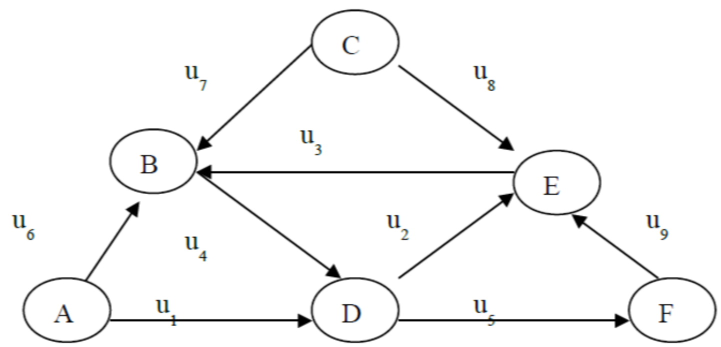
TD 10 : **GRAPHE**
H2022

SOLUTIONNAIRE

Directives pour la remise :

- La remise est individuelle, mais le travail en équipe est encouragé.
- La remise est individuelle se fait à la fin de la séance de TD.
- Répondez directement sur ce document Word (docx). Dans l'intérêt de l'équité pour tous les étudiants, vous devez modifier le fichier Word. Modifiez le fichier **EXCLUT** le fait d'intégrer des scans de rédaction manuscrite ou d'y écrire avec un stylet.
- Lorsque vous avez terminé, générez un PDF avec le nom sous le format :
  Matricule-TDNuméro.pdf (exemple : 1234567-TD1.pdf).
- Téléversez votre fichier PDF dans la boîte de remise située dans la Zone TDs de la page Moodle du cours.
- Choisissez la boîte de remise qui correspond à votre section de TD.
- **Aucun retard et aucune remise par courriel ne seront acceptés.**
- **Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.**

Exercice 1. On considère le graphe ci-dessous :



a. En utilisant le modèle du tableau ci-dessous, donnez la représentation du graphe sous forme de liste d'adjacence.

<u>**Réponse :**</u>

Sommet	Sommets adjacents
A	B, D
B	D
C	B, E
D	E, F
E	B
F	E

b. En utilisant le modèle de matrice ci-dessous, donnez la représentation du graphe sous forme de matrice d'adjacence. Précisez l'ordre dans lequel les sommets sont considérés.

<u>**Réponse :**</u>

Les lignes et les colonnes de la matrice sont étiquetées A, B, C, D, E et F, respectivement.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

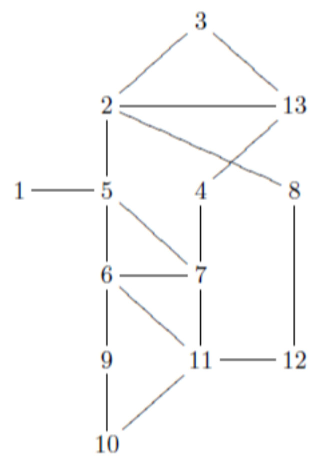
c. Le graphe est-il connexe ? Justifiez votre réponse.

<u>**Réponse :**</u>

Le graphe n’est pas connexe. Par exemple, il n’existe pas de chemin de B à C.

Exercice 2.

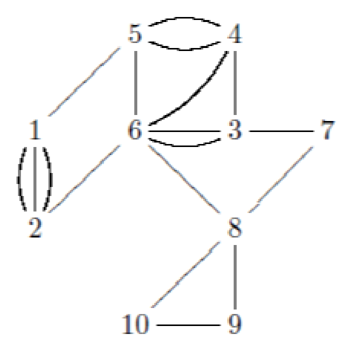
a. Le graphe ci-dessous admet-il une chaîne eulérienne ? Justifiez votre réponse et si oui, déterminez-en une.



Réponse :

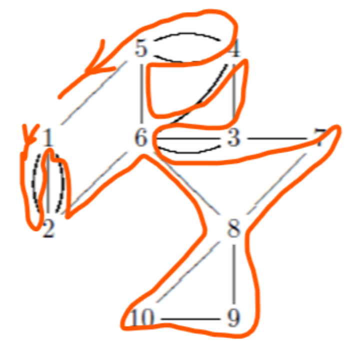
- Oui. Le graphe admet une chaîne eulérienne. En effet, il contient exactement 2 sommets de degrés impairs, soit deg(13) = 3 et deg(1) = 1.
- Exemple de chaîne eulérienne : 1-5-6-9-10-11-6-7-5-2-8-12-11-7-4-13-2-3-13

b. Le graphe ci-dessous admet-il un cycle eulérien ? Justifiez votre réponse et si oui, déterminez-en un.

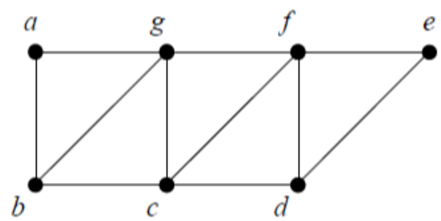


Réponse :

- Oui. Le graphe admet un cycle eulérien. En effet, tous les sommets sont de degrés pairs, soit : **deg(1) = 4, deg(2) = 4, deg(3) = 4, deg(4) = 4, deg(5) = 4, deg(6) = 6, deg(7) = 2, deg(8) = 4, deg(9) = 2 et deg(10) = 2**.
- Exemple de cycle eulérienne :

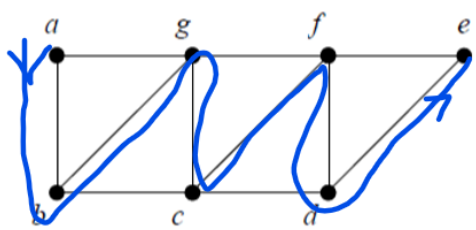


c. Le graphe ci-dessous admet-il une chaîne hamiltonienne ? Si oui, déterminez-en une.

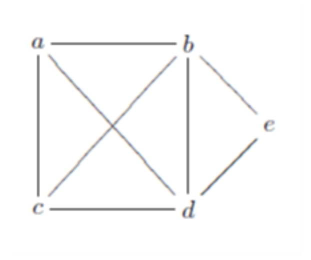
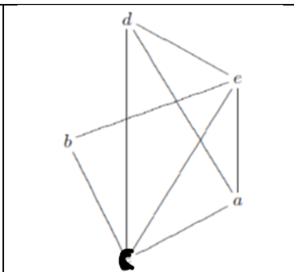
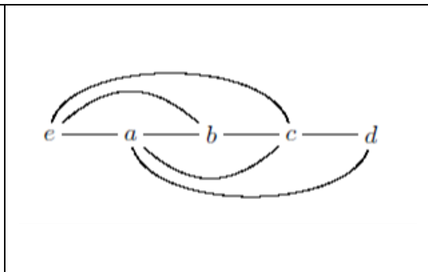
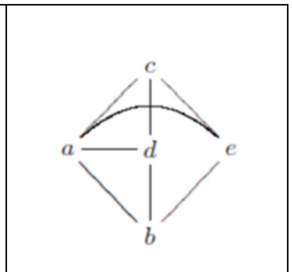


Réponse :

OUI. Exemple :



Exercice 3. Parmi les graphes ci-dessous, lesquels sont isomorphes ? Justifiez vos réponses :

			
Grape 1	**Graphe 2**	**Grape 3**	**Graphe 4**

Réponse :

On a :

- **Graphe 1** : deg(a) = 3, deg(b) = 4, deg(c) = 3, deg(d) = 4, deg(e) = 2
- **Graphe 2** : deg(a) = 3, deg(b) = 2, deg(c) = 4, deg(d) = 3, deg(e) = 4
- **Graphe 3** : deg(a) = 4, deg(b) = 3, deg(c) = 4, deg(d) = 2, deg(e) = 3
- **Graphe 4** : deg(a) = 4, deg(b) = 3, deg(c) = 3, deg(d) = 3, deg(e) = 3

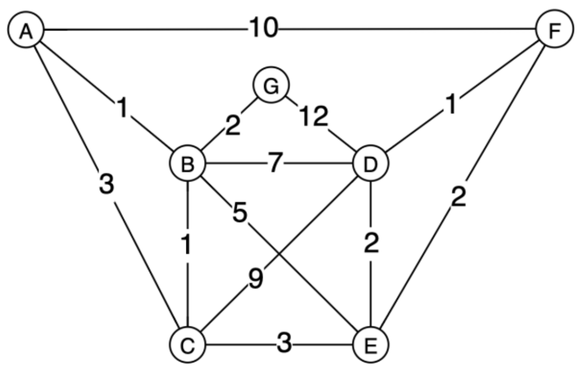
✓ Les graphes 1 et 2 sont isomorphes. Le graphe 1 peut être transformé en graphe 2 à travers la fonction ***f*** suivante : ***f(a) = d, f(b) = e, f(c) = a, f(d) = c, f(e) = b***.

✓ Les graphes 1 et 3 sont isomorphes. Le graphe 1 peut être transformé en graphe 3 à travers la fonction ***g*** suivante : ***g(a) = b, g(b) = a, g(c) = e, g(d) = c, g(e) = d***.

✓ Les graphes 2 et 3 sont isomorphes. Le graphe 2 peut être transformé en graphe 3 à travers la fonction ***h*** suivante *:* ***h(a) = e, h(b) = d, h(c) = c, h(d) = b, h(e) = a***.

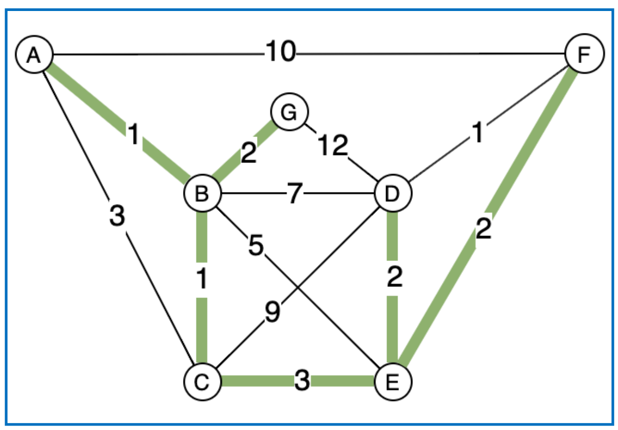
✓ En vérifiant les propriétés de préservation des degrés, on a que le graphe 4 n'a aucun sommet de degré 2. De plus il a 4 sommets de degrés 3, ce qu'aucun autre graphe n'a. Il n'est donc isomorphe à aucun des graphes 1, 2 et 3.

Exercice 4. Utilisez l'algorithme de Dijkstra pour calculer les parcours les plus courts du sommet de départ unique A vers tous les autres sommets. Spécifiez chacun des parcours et la distance totale pour atteindre chacun des sommets.



Réponse :

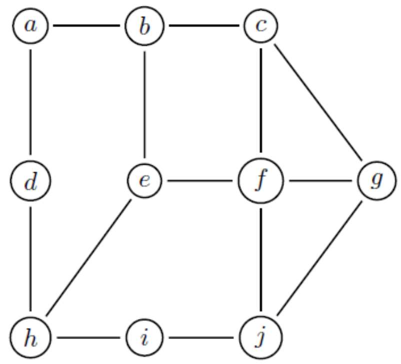
Sommet	Distance	Trajet
A	0	A
B	1	A, B
C	2	A, B, C
D	7	A, B, C, E, D
E	5	A, B, C, E
F	7	A, B, C, E, F
G	3	A, B, G



Exercice 5. Un groupe formé de 23 étudiant.(e).s de LOG2810 se propose d'échanger leurs numéros de téléphone. Lorsque que la personne A donne son numéro à la personne B, A prend également le numéro de B. Sachant que chaque personne n'a qu'un seul numéro de téléphone, est-il possible de procéder aux échanges de telle sorte que chaque personne ait pris exactement le numéro de 3 autres personnes ? justifiez votre réponse.

Réponse :
La réponse est non.
Considérons le graphe formé en échangeant les numéros. Les sommets sont les 23 personnes et chaque arc entre 2 personnes représente l'échange de numéros entre elles.
Par hypothèse, chaque sommet ***x*** du aurait pour degré ***deg(x) = 3***. La somme des degrés dans un tel graphe serait 3.23 = 69. Or, d'après le lemme des poignées de mains, cette somme doit être pair, car vaudrait 2 fois le nombre d'arcs. Donc c'est impossible.

Exercice 6. On considère le graphe suivant.



a. À partir du sommet a, donnez un parcours en largeur du graphe.

Réponse :

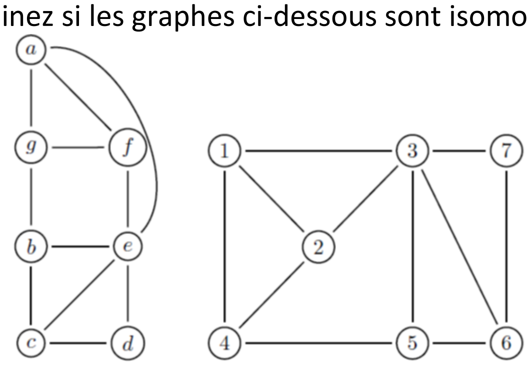
a-d-b-h-e-c-i-f-g-j

b. À partir du sommet a, donnez un parcours en profondeur du graphe.

Réponse :

a-d-h-i-j- g-c-b-f-e

Exercice 7 (facultatif). Déterminez si les graphes ci-dessous sont isomorphes. Justifiez votre réponse.



Réponse :

Les deux graphes sont isomorphes. Soit ***h*** la fonction bijective qui transforme le premier graphe en l'autre. On a :

h(a) = 1, h(b) = 5, h(c) = 6, h(d) = 7, h(e) = 3, h(f) = 2, h(g) = 4.