POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 8 : INDUCTION ET RÉCURSIVITÉ

H2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1.

La double sommation, également appelée somme double, est couramment utilisée en mathématiques, en informatique et dans nombreux autres domaines pour calculer des sommes de valeurs dans une matrice ou un tableau de données bidimensionnel.

Montrez par récurrence que pour $n \geq 1$, on a :

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} i = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Réponse :

Étape de base. Pour $n = 1$, on a :

$$\text{Membre de gauche : } \sum_{j=1}^{1} \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{i=1}^{1} i = 1$$

$$\text{Membre de droite : } \frac{1(1+1)(1+2)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Les deux membres sont donc bien égaux.
L'égalité est donc établie pour $n = 1$.

Étape inductive. Supposons que l'égalité est vraie pour un certain $n \geq 1$, i.e.

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} i = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \qquad (Hypothèse\ d'induction, H.I.)$$

On veut arriver à montrer que :

$$\sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{j} i = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} \qquad (Objectif)$$

En partant du membre de gauche de l'objectif :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{j} i &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} i + \sum_{j=n+1}^{n+1} \sum_{i=1}^{j} i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} i + \sum_{i=1}^{n+1} i \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \sum_{i=1}^{n+1} i \qquad\qquad [par\ H.I.] \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{3}{3} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{3(n+1)(n+2)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}
\end{aligned}
$$

Donc, l'égalité est établie pour n+1.

Conclusion.
Ainsi, l'égalité est vraie pour $n = 1$. De plus, lorsque l'égalité est établie pour un $n \geq 1$ quelconque, elle l'est également pour $(n+1)$. Donc, on a pu démontrer par récurrence que pour $n \geq 1$,
on a $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} i = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.
CQFD

Exercice 2.
Les nombres harmoniques sont une séquence de nombres qui sont utilisés dans diverses applications, notamment dans l'étude des ondes sonores et des oscillations, ainsi que dans l'évaluation des séries numériques. Ils sont définis comme la somme des inverses des m premiers entiers naturels non nuls, c'est-à-dire :

$$H_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}$$

En utilisant l'induction mathématique, montrez que pour tout entier naturel n,

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

Réponse :

Soit $P(n)$: $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$

Étape de base. Pour $n = 0$, on a :

$$\text{Membre de gauche : } H_{2^0} = H_1 = 1$$

$$\text{Membre de droite : } 1 + \frac{0}{2} = 1$$

Le membre de gauche est bien plus grand ou égal au membre de droite, puisque $1 \geq 1$.
$P(0)$ est donc vraie.

<u>Étape inductive.</u> Supposons que pour un certain n, $P(n)$ est vraie i.e.

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \qquad (Hypothèse\ d'induction, H.I.)$$

On veut arriver à montrer que $P(n+1)$ est vraie, i.e.

$$H_{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{n+1}{2} \qquad (Objectif)$$

En partant du membre de gauche de l'objectif :

$$\begin{aligned} H_{2^{n+1}} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= H_{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Avant de faire usage de l'hypothèse d'induction, examinons individuellement chacun des termes à droite de la série harmonique H_{2^n} qui a été identifiée. Pour $n \geq 0$, on a :

$$\begin{gathered} \frac{1}{2^n+1} \geq \frac{1}{2^{n+1}} \\ \frac{1}{2^n+2} \geq \frac{1}{2^{n+1}} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \frac{1}{2^n+2^n} \geq \frac{1}{2^{n+1}} \end{gathered}$$

En sommant membre à membre les 2^n inégalités, on obtient :

$$\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n} \geq \underbrace{\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{2^n\ fois}$$

Ainsi, $\frac{1}{2^{n+1}}$ étant sommés 2^n fois dans la partie droite de l'inégalité, on peut réécrire l'inégalité comme suit :

$$\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\cdots+\frac{1}{2^n+2^n}\geq 2^n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$$

Par conséquent, en appliquant l'hypothèse d'induction à présent, on obtient :

$$\begin{aligned} H_{2^{n+1}} &\geq \left(1+\frac{n}{2}\right)+2^n\cdot\frac{1}{2^{n+1}} && [par\ H.I.] \\ &\geq 1+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n}} && ,car\ 2^n>0 \\ &\geq 1+\frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

Il s'en suit que $P(n+1)$ est vraie et que $P(n)\rightarrow P(n+1)$ est vraie.

Conclusion.
Ainsi, $P(0)$ est vraie et $\forall n\geq 0, P(n)\rightarrow P(n+1)$ est vraie.
On peut alors conclure, en utilisant l'induction mathématique, que pour tout entier naturel n, $H_{2^n}\geq 1+\frac{n}{2}$.
CQFD

Exercice 3.
En utilisant l'induction mathématique, montrez que pour tout entier naturel n non nul,

$$11^{n+1}+12^{2n-1}\text{ est divisible par 133}$$

Réponse :

Soit $P(n)$: $11^{n+1}+12^{2n-1}$ est divisible par 133.

Étape de base. Pour $n=1$, on a :

$11^{1+1}+12^{2(1)-1}=11^2+12^1=121+12=133$
133 est bien divisible par 133.
$P(1)$ est donc vraie.

Étape inductive. Supposons que pour un certain n, $P(n)$ est vraie i.e.

$$11^{n+1}+12^{2n-1}\text{ est divisible par 133}\qquad (Hypothèse\ d'induction, H.I.)$$

On veut arriver à montrer que $P(n+1)$ est vraie i.e.

$$11^{(n+1)+1}+12^{2(n+1)-1}\text{ est divisible par 133}\qquad (Objectif)$$

En partant du membre de gauche de l'objectif :

$$
\begin{aligned}
11^{(n+1)+1} + 12^{2(n+1)-1} &= 11 \cdot 11^{n+1} + 12^2 \cdot 12^{2n-1} \\
&= 11 \cdot 11^{n+1} + 144 \cdot 12^{2n-1} \\
&= 11 \cdot 11^{n+1} + (11 + 133) \cdot 12^{2n-1} \\
&= 11 \cdot 11^{n+1} + 11 \cdot 12^{2n-1} + 133 \cdot 12^{2n-1} \\
&= 11(11^{n+1} + 12^{2n-1}) + 133 \cdot 12^{2n-1} \\
&= 11(133m) + 133 \cdot 12^{2n-1} \qquad [par\ H.I.] \\
& \qquad\qquad Et\ posons\ 133m = 11^{n+1} + 12^{2n-1}, avec\ m\ entier \\
&= 133(11m + 12^{2n-1}) \\
&= 133m' \qquad \text{où } m' = 11m + 12^{2n-1}\ entier
\end{aligned}
$$

Il existe un entier m' tel que $11^{(n+1)+1} + 12^{2(n+1)-1} = 133m^{'}$

$11^{(n+1)+1} + 12^{2(n+1)-1}$ est donc divisible par 133.
Il s'en suit que $P(n+1)$ est vraie et que $P(n) \rightarrow P(n+1)$ est vraie.

Conclusion.
Ainsi, $P(1)$ est vraie et $\forall n \geq 1, P(n) \rightarrow P(n+1)$ est vraie.
On peut alors conclure, en utilisant l'induction mathématique, que pour tout entier naturel n non nul, $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ est divisible par 133.
CQFD

Exercice 4.
En utilisant l'induction mathématique, montrez que pour tout entier naturel n strictement supérieur à 3,

$$3^n < (n+1)!$$

Réponse :

Soit $P(n) : 3^n < n!$

Étape de base. Pour $n = 4$, on a :

$3^4 = 81$
Et $(4+1)! = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
On a bien $3^4 < (4+1)! =$, car $81 < 120$,
$P(4)$ est donc vraie.

Étape inductive. Supposons que pour un certain $n > 3$, $P(n)$ est vraie i.e.

$$3^n < (n+1)! \qquad (Hypothèse\ d'induction, H.I.)$$

On veut arriver à montrer que $P(n+1)$ est vraie i.e.

$$3^{n+1} < (n+2)! \qquad (Objectif)$$

Par hypothèse d'induction,

$$3^n < (n+1)!$$

Aussi,

$$3 \cdot 3^n < 3 \cdot (n+1)!$$

Soit,

$$3^{n+1} < 3 \cdot (n+1)! \qquad (\mathbf{1})$$

Or, $3 < n$, donc $3 < n + 2$

Et

$$3 \cdot (n+1)! < (n+2) \cdot (n+1)! \qquad (\mathbf{2})$$

Avec **(1)** et **(2)**, on obtient :

$$3^{n+1} < 3 \cdot (n+1)! < \ (n+2) \cdot (n+1)!$$

Soit,

$$3^{n+1} < (n+2) \cdot (n+1)!$$

Ou encore,

$$3^{n+1} < (n+2)!$$

Il s'en suit que $P(n+1)$ est vraie et que $P(n) \to P(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion.</u>
Ainsi, $P(4)$ est vraie et $\forall n > 3, P(n) \to P(n+1)$ est vraie.
On peut alors conclure, en utilisant l'induction mathématique, que pour tout entier naturel $n > 3$,
$3^n < n!$
CQFD

Exercice 5.
L'armée canadienne lance des ballons météorologiques pour surveiller les conditions météorologiques dans une région donnée. Chaque heure, pour chaque ballon qui était présent l'heure précédente, deux nouveaux ballons sont lancés. Cependant, chaque ballon éclate après avoir été en l'air pendant 2 heures. Au début, 4 ballons météorologiques sont lancés dans la région. Établissez la relation de récurrence pour calculer le nombre de ballons météorologiques présents après n heures. Justifiez votre réponse.

Réponse :

Soit B_n la relation de récurrence donnant le nombre de ballons météorologiques présents après n heures.

$B_0 = 4$
$B_n = 3\,B_{n-1} - B_{n-2}$

Justification :

- À l'heure $n-1$, il existe B_{n-1} ballons météorologiques. Pour chaque ballon, deux nouveaux ballons sont lancés à l'heure n, soit $2\,B_{n-1}$ nouveaux ballons, pour un total de $3\,B_{n-1}$.

- Deux heures avant l'heure n, c'est l'heure $n-2$ et tous les ballons météorologiques de l'heure $n-2$ s'éclatent à l'heure n.

Exercice 6.
Dans chacun des cas suivants, donnez une définition récursive de la suite (a_n), où n est un entier naturel.

a) $a_n = n + \left(\frac{\pi^e-1}{1+\sqrt{\pi^e}}\right)n$

Réponse :

$$a_0 = 0 + \left(\frac{\pi^e - 1}{1+\sqrt{\pi^e}}\right)\cdot 0 = 0 + 0 = 0$$

$$\begin{aligned}
a_{n+1} \quad &= (n+1) + \left(\frac{\pi^e - 1}{1+\sqrt{\pi^e}}\right)(n+1) \\
&= n + 1 + \left(\frac{\pi^e - 1}{1+\sqrt{\pi^e}}\right)n + \left(\frac{\pi^e - 1}{1+\sqrt{\pi^e}}\right) \\
&= n + \left(\frac{\pi^e - 1}{1+\sqrt{\pi^e}}\right)n + 1 + \left(\frac{\pi^e - 1}{1+\sqrt{\pi^e}}\right) \\
&= \left[n + \left(\frac{\pi^e - 1}{1+\sqrt{\pi^e}}\right)n\right] + \left[1 + \left(\frac{\pi^e - 1}{1+\sqrt{\pi^e}}\right)\right] \\
&= a_n + \left[1 + \left(\frac{\pi^e - 1}{1+\sqrt{\pi^e}}\right)\right]
\end{aligned}$$

Remarques : Il convient de noter que nous avons découvert la définition récursive pour a_{n+1} et qu'il n'est pas obligatoire de simplifier le terme constant. Cependant, nous le faisons ici à des fins pédagogiques.

$$\begin{aligned}
&= a_n + \left[\frac{1+\sqrt{\pi^e}}{1+\sqrt{\pi^e}} + \frac{\pi^e - 1}{1+\sqrt{\pi^e}}\right] \\
&= a_n + \left[\frac{1+\sqrt{\pi^e}+\pi^e - 1}{1+\sqrt{\pi^e}}\right] \\
&= a_n + \left[\frac{\sqrt{\pi^e}+\pi^e}{1+\sqrt{\pi^e}}\right] \\
&= a_n + \left[\frac{\sqrt{\pi^e}\cancel{(1+\sqrt{\pi^e})}}{\cancel{1+\sqrt{\pi^e}}}\right] \\
&= a_n + \sqrt{\pi^e}
\end{aligned}$$

La définition récursive de la suite $a_n = n + \left(\frac{\pi^e - 1}{1+\sqrt{\pi^e}}\right) n$ est donc :

- $a_0 = 0$
- $a_{n+1} = a_n + \sqrt{\pi^e}$

b) $a_n = 1 + (-1)^n$

Réponse :

$a_0 = 1 + (-1)^0 = 1 + 1 = 2$

$a_n = 1 + (-1)^n$
$Alors \quad (a_n - 1) = (-1)^n$

$$\begin{aligned}
a_{n+1} \quad &= 1 + (-1)^{n+1} \\
&= 1 + (-1) \cdot (-1)^n \\
&= 1 + (-1)(a_n - 1) \\
&= 1 - a_n + 1 \\
&= -a_n + 2
\end{aligned}$$

La définition récursive de la suite $a_n = 1 + (-1)^n$ est donc :

- $a_0 = 2$
- $a_{n+1} = -a_n + 2$

c)

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} (3!)^{i-1}$$

Réponse :

$$a_1 = \sum_{i=1}^{1} (3!)^{i-1} = (3!)^{1-1} = (3!)^0 = 1$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sum_{i=1}^{n} (3!)^{i-1} \\
&= (3!)^{-1} \sum_{i=1}^{n} (3!)^{i} \\
&= (3!)^{-1} \cdot (3!) \left(\frac{(3!)^n - 1}{(3!) - 1} \right) \\
&= \frac{(3!)^n - 1}{5}
\end{aligned}
$$

Alors $(5\, a_n + 1) = (3!)^n$

Donc, $(5\, a_{n+1} + 1) = (3!)^{n+1}$ $\Leftrightarrow (5\, a_{n+1} + 1) = (3\,!) \cdot (3\,!)^n$

$\Leftrightarrow (5\, a_{n+1} + 1) = (3!)(5a_n + 1)$

$\Leftrightarrow (5\, a_{n+1} + 1) = 30a_n + 6$

Ainsi, $a_{n+1} = 6a_n + 1$

La définition récursive de la suite $a_n = \sum_{i=1}^{n} (3!)^{i-1}$ est donc :

- $a_1 = 1$
- $a_{n+1} = 6\, a_n + 1$

Exercice 7.

a) Calculez les sept premiers termes de la suite définie récursivement par :

- $f(0) = 4$
- $f(n) = 2f(n-1) - 1$

Réponse :

- $f(0) = 4$
- $f(1) = 2\, f(0) - 1 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$
- $f(2) = 2\, f(1) - 1 = 2 \cdot 7 - 1 = 13$
- $f(3) = 2\, f(2) - 1 = 2 \cdot 13 - 1 = 25$
- $f(4) = 2\, f(3) - 1 = 2 \cdot 25 - 1 = 49$
- $f(5) = 2\, f(4) - 1 = 2 \cdot 49 - 1 = 97$
- $f(6) = 2\, f(5) - 1 = 2 \cdot 97 - 1 = 193$

b) Établissez une formule explicite pour le terme de rang n de la suite.

Réponse :

La suite est {4, 7, 13, 25, 49, 97, 193, …}. On remarque qu'en soustrayant 1 de chaque terme, on obtient : {3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, …} et qu'ensuite, en divisant chaque terme obtenu par 3, on obtient : {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, …}.

La formule explicite doit donc être $3 \cdot 2^n + 1$, pour $n \geq 0$.

c) Démontrez par induction que la formule explicite représente bien le terme général de la suite définie récursivement.

Réponse :

Étape de base. Pour $n = 0$, on a :

$$\text{Formule explicite} : 3 \cdot 2^0 + 1 = 4$$
$$\text{Définition récursive} : f(0) = 4$$

Les deux expressions sont donc bien égales.

Étape inductive. Supposons que c'est vrai pour un certain n, i.e.

$$f(n) = 3 \cdot 2^n + 1 \qquad (Hypothèse\ d'induction, H.I.)$$

On veut arriver à montrer que :

$$f(n+1) = 3 \cdot 2^{n+1} + 1 \qquad (Objectif)$$

En partant du membre de gauche de l'objectif :

$$\begin{aligned} f(n+1) &= 2f(n) - 1 && [par\ définition\ récursive] \\ &= 2(3 \cdot 2^n + 1) - 1 && [par\ H.I.] \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 2^n + 2 - 1 \\ &= 3 \cdot 2 \cdot 2^n + 1 \\ &= 3 \cdot 2^{n+1} + 1 \end{aligned}$$

Donc, l'égalité est établie pour n+1.

Conclusion.
Ainsi, l'égalité est vraie pour $n = 0$. De plus, lorsque l'égalité est établie pour un certain n, elle l'est également pour (n+1). Donc, on a pu démontrer par induction que la formule explicite représente bien le terme général de la suite définie récursivement.
CQFD