POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 4 : ENSEMBLES, FONCTIONS ET MATRICES

Directives pour la remise:

- La remise est individuelle et se fait à la fin de la séance de TD.
- Répondez directement sur ce document Word (docx).
- Lorsque vous avez terminé, générez un PDF avec le nom sous le format: ***SectionDeTD-Matricule.pdf*** (exemple: *04-1234567.pdf*).
- Téléchargez votre fichier PDF dans la boîte de remise située dans la Zone TDs de la page Moodle du cours.
- Choisissez la boîte de remise qui correspond à votre section de TD.
- Aucun retard et aucune remise par courriel ne seront accepté.
- Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.

Objectifs du TD4

Exercice 1: Réviser et pratiquer les notions d’injection, de surjection et de bijection.

Exercice 2: Mettre en pratique la technique de preuve par contradiction. Les définitions données permettent également de mettre en relation les notions de logiques des prédicats et d’ensembles.

Exercice 3: Mettre en pratique la technique de preuve par cas, et ce toujours dans le contexte de la théorie des ensembles.

Exercice 4: Pratiquer la manipulation de matrice booléenne. Ces manipulations sont utiles plus tard dans le cours pour, par exemple, pour calculer et obtenir la fermeture transitive des graphes.

Exercice 5: Vous devez choisir de manière judicieuse la technique de preuve la plus appropriée pour un problème donné. Cet exercice permet également d’appliquer la notion de fonction injective déjà travaillée à l’exercice 1. Par contre ici l’objectif n’est pas de visualiser le concept mais bien d’appliquer la définition du concept dans un contexte de preuve mathématique.

Exercice 6: Réviser la règle d’inférence modus ponens. De plus l’exercice permet vous permet d’avoir un premier contact avec un assistant de preuve. L’objectif est en particulier de mettre en évidence l’aspect mécanique et systématique d’une démonstration.

La remise est individuelle mais le travail en équipe est encouragé. Veuillez inscrire votre nom, prénom et matricule ainsi que les noms des collègues avec lesquels vous avez collaboré pour le TD.

Nom:

Prénom:

Matricule:

Collègues:

Exercice 1

Soit une fonction $f : S \to T$ qui prend pour entrée un élément de l'ensemble S et qui retourne en sortie un élément de l'ensemble T. Pour les énoncés suivants, identifiez correctement l'illustration correspondante et justifiez votre réponse.

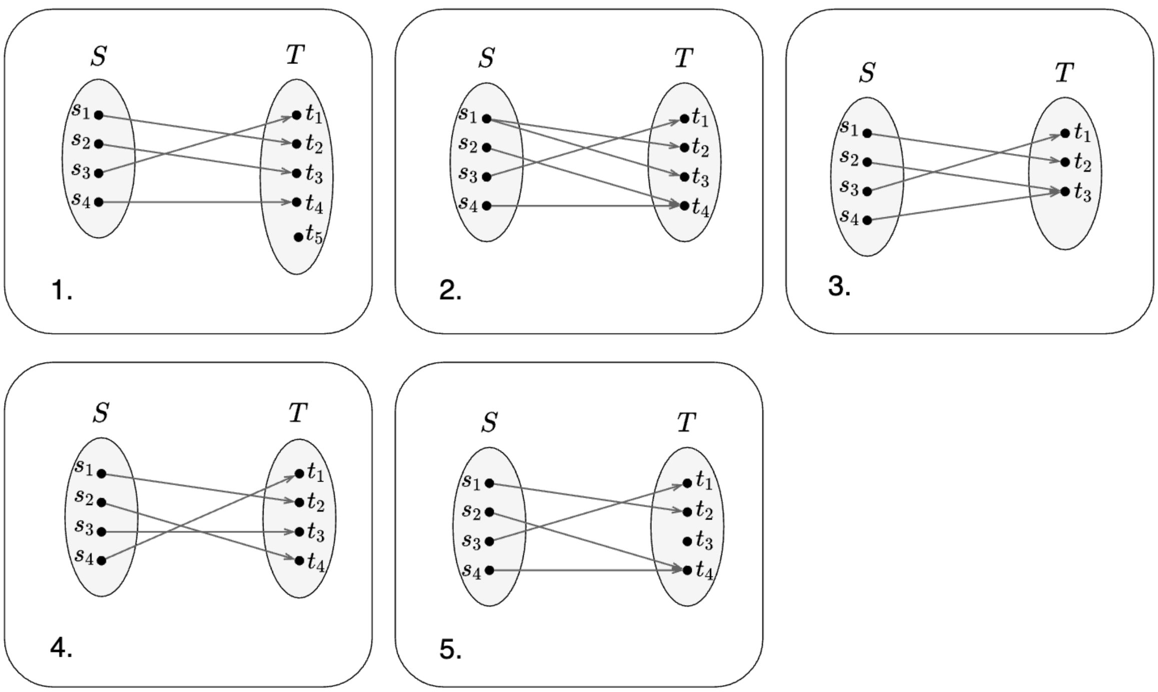


Figure 1.

a) La relation n'est pas une fonction

Réponse:

L'illustration 2 n'est pas une fonction puisque pour l'entrée s_1 il y a les deux sorties possibles t_2 et t_3. Par définition, une fonction doit avoir exactement une sortie pour chacune des entrées.

b) La fonction n'est ni injective ni surjective

Réponse:
La fonction 5 n'est pas injective puisque $f(s_2) = f(s_4) = t_4$. La fonction n'est pas surjective puisque l'image ne contient pas t_3.

c) La fonction est injective mais non surjective

Réponse:
La fonction 1 est injective puisque chacune des entrées donne une sortie différente. La fonction n'est pas surjective sur T puisque l'image ne contient pas t_5.

d) La fonction n'est pas injective mais est surjective

Réponse:
La fonction 3 n'est pas injective puisque $f(s_2) = f(s_4) = t_3$. Par contre la fonction est surjective puisque l'image contient tous les éléments de T.

e) La fonction est injective et surjective (bijective)

Réponse:
La fonction 4 est injective puisque chacune des entrées donne une sortie différente. La fonction est également surjective puisque l'image contient tous les éléments de T.

Exercice 2

Prouvez par contradiction (preuve par l'absurde) que si A et B sont des ensembles, alors $(A - B) \cap B = \varnothing$. Prouvez cette proposition en utilisant les définitions 1, 2 et 3.

Définition 1. L'**union** de deux ensembles A et B est l'ensemble
$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Définition 2. L'**intersection** de deux ensembles A et B est l'ensemble
$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Définition 3. La **soustraction** de deux ensembles A et B est l'ensemble
$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Réponse:
Assumons qu'il existe un élément $\exists e(e \in (A - B) \cap B)$. Alors de la définition 2 nous pouvons déduire que $e \in (A - B) \wedge e \in B$. La proposition composée étant vraie, les propositions des deux cotés de la conjonction sont vraies et donc $e \in (A - B)$ est vraie et $e \in B$ est vraie. Ensuite en utilisant la définition 3 nous pouvons déduire que $e \in A \wedge e \notin B$. Encore une fois, la proposition composée étant vraie, les propositions à gauche et à droite de la conjonction sont vraies. Mais alors nous avons établi que $e \in B$ et $e \notin B$. Ceci est une contradiction. Nous avons ainsi établi le nouveau fait que l'hypothèse de départ doit être fausse. Il est donc faux qu'il existe un élément faisant partie à la fois de $(A - B)$ et B et notre preuve est complète.

Exercice 3

Si A, B et C sont des ensembles, alors $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Prouvez cette proposition par inférence en deux parties: a) et b) et en utilisant les définitions 1 à 5 (les définitions 1 à 3 sont dans l'exercice précédent).

Définition 4. Un ensemble A est un sous ensemble de B, écrit $A \subseteq B$, si et seulement si, $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$.

Définition 5. Un ensemble A est égal à un ensemble B, écrit $A = B$, si et seulement si, $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$.

a) Utilisez une preuve par cas afin de démontrer que:
$\forall x(x \in A \cup (B \cap C) \rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C))$

Réponse:
On peut utiliser la définition 1 pour réécrire la prémisse $x \in A \vee x \in (B \cap C)$. Ainsi, pour que la prémisse soit vraie, il faut que $x \in A$ soit vraie ou $x \in (B \cap C)$ soit vraie.

Cas 1. Assumons que $x \in A$ est vraie. Si $x \in A$ est vraie alors par la loi de domination $x \in A \cup B$. De la même manière, nous pouvons conclure que $x \in A \cup C$. Nous pouvons combiner les résultats pour obtenir $x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C))$ et de la définition 2, nous pouvons conclure que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C))$.

Cas 2. Assumons que $x \in (B \cap C)$ est vraie. Si $x \in (B \cap C)$ est vraie alors nous pouvons déduire par la définition 2 que $x \in B \wedge x \in C$ et donc que $x \in B$ et $x \in C$ sont tous les deux vraies. Puisque $x \in B$ alors $x \in (A \cup B)$. Ensuite, puisque $x \in C$ alors $x \in (A \cup C)$. Nous pouvons combiner les résultats pour obtenir $x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C))$ et de la définition 2, nous pouvons conclure que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C))$.

Étant donné que $x \in A$ est vraie implique que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C))$ et que $x \in (B \cap C)$ implique que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C))$ alors $x \in A \cup (B \cap C) \rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

b) Utilisez une preuve par cas afin de démontrer que:
$\forall x (x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \rightarrow x \in A \cup (B \cap C))$

Réponse:
Supposons que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ est vraie. Nous pouvons utiliser la définition 2 pour réécrire la prémisse $x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)$ et ensuite avec la définition 3 nous obtenons $(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$. Nous pouvons déduire que les deux termes de chaque côté de la conjonction sont vraies.

Cas 1. Si nous supposons que $x \in A$ est vraie alors la prémisse est vraie. Donc on a $x \in A \cup (B \cap C)$ par la loi de domination.

Cas 2. Si on suppose que $x \in A$ est fausse alors $x \in B$ et $x \in C$ sont vraies. De la définition 2 nous obtenons $x \in (B \cap C)$. Si $x \in (B \cap C)$ est vraie alors $x \in A \cup (B \cap C)$ par la loi de domination.

Étant donné que $x \in A$ est vraie implique que $x \in A \cup (B \cap C)$ et que $x \in A$ est fausse et $x \in (B \cap C)$ est vraie implique que $x \in A \cup (B \cap C)$ alors $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$.

Exercice 4. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Trouvez.

a) $A \vee B$

Réponse:

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $A \wedge B$

Réponse:

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) $A \odot B$

Réponse:

$$A \odot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 5.

Si la composition des fonctions $f \circ g$ est injective, est-ce que la fonction g est nécessairement injective? Utilisez la définition suivante afin de faire la démonstration de votre réponse.

Définition 6. Une fonction f est injective si et seulement si $f(a) = f(b)$ implique que $a = b$ ou $a \neq b$ implique que $f(a) \neq f(b)$ pour tout a et b dans le domaine de f .

Réponse:

Pour clarifier le contexte, supposons que $g : A \to B$ et que $f : B \to C$, de sorte que $f \circ g : A \to C$.

Nous allons prouver que si $f \circ g$ est une fonction injective, alors g est aussi injective avec la technique de preuve par contraposée. Prouvons alors que si g n'est pas injective, alors la composition des fonctions $f \circ g$ n'est pas injective. Supposons que g n'est pas injective, c'est-à-dire $a_1 \neq a_2$ implique que $g(a_1) = g(a_2)$. Alors certainement $f(g(a_1)) = f(g(a_2))$, ce qui est le même énoncé que $f \circ g(a_1) = f \circ g(a_2)$. Par définition, cela signifie que $f \circ g$ n'est pas injective, et notre preuve est complète.

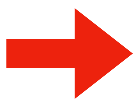
Exercice 6

Utilisez l'assistant de preuve Coq afin de faire la démonstration mathématique du **Modus Ponens** par règles d'inférences.

Modus Ponens: $\forall p \forall q(p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q)$

Étape 1. Lancez l'application en ligne https://coq.vercel.app.

Étape 2. Cliquez sur l'icône, comme indiqué à la figure 2, afin d'obtenir une nouvelle page.

Étape 3. Entrez la  ligne suivante sur cette nouvelle page.

Theorem MP: forall p q: Prop, p /\ (p -> q) -> q.
(lire « **forall p q: Prop** » : pour toutes propositions p et q)

Étape 4. Appuyez sur la flèche verte qui pointe vers le bas comme indiqué à la figure 3 afin de valider la première ligne de la preuve.

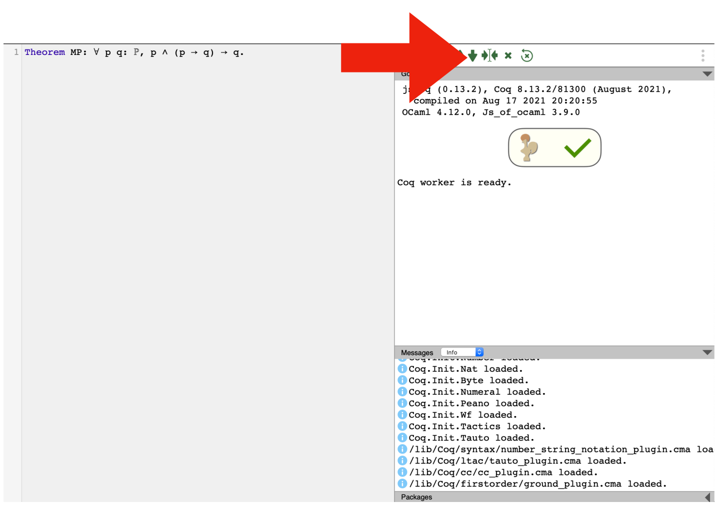


Figure 3.

Étape 5. Observez que dans la fenêtre de droite l'assistant de preuve affiche l'objectif initial (goal) que l'on doit atteindre afin de démontrer le théorème.

Étape 6. Entrez sous le texte que vous avez entrez à l'étape 3 les lignes *suivantes*.

intro p.
intro q.
Et appuyez deux fois sur la flèche verte qui pointe vers le bas pour valider ces deux lignes.

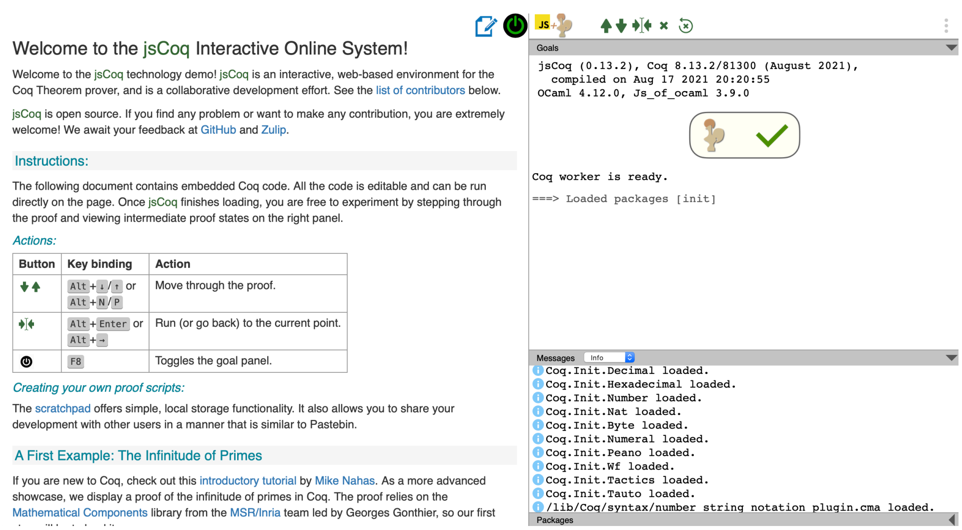


Figure 2.

Étape 7. Observez qu'à cette étape, dans le fenêtre de droite, au dessus de la ligne horizontale, vous avez établi le fait que p et q sont des propositions et que sous la ligne horizontale s'affiche le but que vous devez atteindre soit le théorème **Modus Ponens**:
$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$

Étape 8. Entrez la ligne suivante.

intro h.
Validez la ligne. Ceci permet de faire passer la prémisse $p \wedge (p \rightarrow q)$ au dessus de la ligne d'inférence.

Étape 9. Expliquez pourquoi, dans le cadre de cette preuve, il est possible ici d'assumer que la prémisse $p \wedge (p \rightarrow q)$ est vraie.

Réponse:
Il faut ici démontrer une implication. Si la prémisse est fausse alors l'implication est nécessairement vraie et il n'y a rien de plus à démontrer. Il suffit donc de faire la démonstration pour le cas où l'hypothèse est vraie.

Étape 10. Entrez la ligne suivante afin de séparer les deux termes de la conjonction de l'hypothèse h.

destruct h as [hp hpq].
Validez la ligne.

Étape 11: Entrez la ligne suivante pour utiliser l'hypothèse hpq et faire évoluer l'objectif de la preuve.

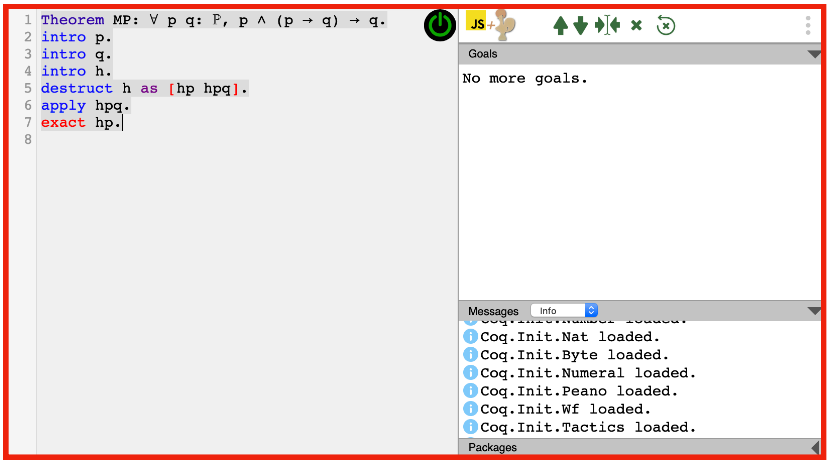
apply hpq.
Validez la ligne.

Étape 12: Entrez enfin la ligne suivante afin d'utiliser l'hypothèse **hp** et compléter de manière triviale la preuve.

exact hp.
Validez la ligne.

Étape 13: Faite un copier coller de votre écran. Vous devriez voir maintenant toutes les étapes qui ont menées à votre résultat final avec la mention «No more goals.» ce qui montre que vous avez atteint l'objectif de la démonstration:

Réponse:



À retenir:

1. Un assistant de preuve comme Coq permet de développer une preuve mathématique de manière systématique et ce sans qu'il soit possible de commettre des erreurs.

2. De plus, un assistant de preuve permet d'utiliser des tactiques afin de générer automatiquement certaines étapes d'une preuve. Par exemple dans le cadre de cet exercice, il est suffisant d'inscrire la tactique **tauto.** et l'assistant se chargera de valider par lui-même que ce théorème (**tauto**logie) simple de la logique propositionnelle est valide. (https://www.cs.cornell.edu/courses/cs3110/2018sp/a5/coq-tactics-cheatsheet.html).