POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 3 : INFÉRENCE ET TECHNIQUES DE PREUVES

A2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1

Michel-Ange est un célèbre peintre italien qui a vécu au XVIe siècle. Il est connu pour ses fresques à la chapelle Sixtine. En se préparant pour une nouvelle œuvre d'art, Michel-Ange essaie de se rappeler les couleurs de peinture qu'il a emportées. Il se souvient que :

(I.) Il n'a pas de blanc
(II.) Il a toujours du jaune lorsqu'il n'a pas de vert
(III.) S'il a du rouge, alors il n'a ni marron ni noir
(IV.) Des trois couleurs : vert, blanc et rouge, il en a au moins deux
(V.) Des deux couleurs : noir et gris, il en a exactement une

On suppose qu'il n'a jamais d'autres couleurs que celles citées. Quelle(s) couleur(s) a-t-il emportée(s) avec **certitude** ? Qu'en est-il des autres couleurs ? Montrez toutes les étapes de votre réponse.

Solution :

Pour résoudre ce problème, nous allons définir les propositions suivantes :

- B : Michel-Ange a du blanc
- J : Michel-Ange a du jaune
- V : Michel-Ange a du vert
- R : Michel-Ange a du rouge
- M : Michel-Ange a du marron
- N : Michel-Ange a du noir
- G : Michel-Ange a du gris

Ensuite, nous pouvons traduire les énoncés en utilisant ces propositions.

$H1 : \neg B$
$H2 : \neg V \rightarrow J$
$H3 : R \rightarrow (\neg M \wedge \neg N)$
$H4 : (V \wedge B) \vee (V \wedge R) \vee (B \wedge R)$
$H5 : N \oplus G$

Maintenant, nous allons utiliser les règles d'inférence pour déduire les couleurs de peinture que Michel-Ange a emportées avec certitude. Le raisonnement est le suivant :

1.	$\neg B$	$H1$
2.	$(V \wedge B) \vee (V \wedge R) \vee (B \wedge R)$	$H4$
3.	$(V \wedge R)$	Étapes 1 et 2 et résolution
4.	R	Étape 3 et règle de la simplification
5.	$R \rightarrow (\neg M \wedge \neg N)$	$H3$
6.	$(\neg M \wedge \neg N)$	Étapes 4 et 5 et règle du modus ponens
7.	$\neg N$	Étape 6 et règle de la simplification
8.	$\neg M$	Étape 6 et règle de la simplification

À partir des étapes 1, 7 et 8, nous pouvons affirmer avec certitude qu'il y n'y a pas de blanc, de noir ou de marron. Résumons à partir de l'étape 8 pour en déduire les informations sur les autres couleurs :

9. $N \oplus G$	$H5$
10. G	Étapes 7 et 9 et définition de $\oplus$
11. $(V \wedge R \wedge G)$	Étapes 3 et 10 et règle de la conjonction

Nous pouvons ainsi conclure que Michel-Ange a les couleurs de peinture suivantes avec certitude : vert, rouge et gris. Et enfin :

12. V	Étape 11 et règle de la simplification
13. $\neg J \to V$	Contraposée de $H2$

Cependant, nous ne pouvons pas déduire jaune, car avec les étapes 11 et 12, $([V \wedge (\neg J \to V)] \to \neg J)$ n'est pas une tautologie. Cela correspond à un sophisme et en particulier à l'affirmation du conséquent, ce qui n'est pas une règle d'inférence valide.

En somme, nous pouvons conclure avec certitude que Michel-Ange a les couleurs de peinture suivantes : vert, rouge et gris. De plus, nous pouvons affirmer avec certitude qu'il n'y a pas de blanc, de marron ou de noir. Cependant, nous ne pouvons pas conclure que Michel-Ange a emporté la couleur jaune.

Exercice 2

En utilisant la preuve par l'absurde (preuve par contradiction), démontrez que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^* \left[\left(\frac{\sqrt{2} + x}{y} = \frac{y + \sqrt{2}}{x} \right) \to (x = y) \right]$$

Solution :

Puisqu'on suggère une preuve par l'absurde, on doit supposer l'hypothèse vraie et la conclusion fausse pour arriver à une contradiction, donc :

$$\exists x \in \mathbb{R}_+^*, \exists y \in \mathbb{R}_+^* \left[\left(\frac{\sqrt{2} + x}{y} = \frac{y + \sqrt{2}}{x} \right) \wedge (x \neq y) \right]$$

x et y étant positifs, $y + \sqrt{2}$ et $\sqrt{2} + x$ sont non nuls.

On a que : $x\left(\sqrt{2} + x\right) = y\left(y + \sqrt{2}\right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)x + x^2 = y^2 + \left(\sqrt{2}\right)y$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\sqrt{2}\right)x - \left(\sqrt{2}\right)y\right) + (x^2 - y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(x - y) + (x - y)(x + y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)\left(\sqrt{2} + x + y\right) = 0$$

Or, puisque $x \neq y$, on a donc $\left(\sqrt{2} + x + y\right) = 0$, soit $x + y = -\sqrt{2}$.
Leur somme est donc négative.
Cela contredit l'hypothèse comme quoi il existe des x et y positifs satisfaisant l'énoncé. Ce qui est absurde. Il faut donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^* \left[\left(\frac{\sqrt{2} + x}{y} = \frac{y + \sqrt{2}}{x}\right) \rightarrow (x = y)\right]$$

CQFD

Exercice 3

Soit n un entier positif. En utilisant la preuve directe, démontrez que :

$\boldsymbol{n}$ **est pair** si et seulement si $\boldsymbol{n^2}$ **est pair** si et seulement si $\boldsymbol{n - 1}$ **est impair**

Solution :

Soit les propositions suivantes :

- p_1 : n est pair
- p_2 : n^2 est pair
- p_3 : $n - 1$ est impair

En utilisant ces propositions, nous pouvons traduire l'énoncé par

$$p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow p_3$$

Ceci est logiquement équivalent à

$$p_1 \leftrightarrow p_3 \leftrightarrow p_2$$

Ou encore à

$$(p_1 \rightarrow p_3) \land (p_3 \rightarrow p_2) \land (p_2 \rightarrow p_1)$$

Alors, il nous faut donc démontrer trois implications, soit :

(I.) $(p_1 \rightarrow p_3)$: Si n est pair, alors $n - 1$ est impair
(II.) $(p_3 \rightarrow p_2)$: Si $n - 1$ est impair, alors n^2 est pair
(III.) $(p_2 \rightarrow p_1)$: Si n^2 est pair, alors n est pair

(I.) Démontrons que si n est pair, alors $n - 1$ est impair, en utilisant la **preuve directe**.
Supposons par hypothèse que n est pair. Il existe donc un entier k tel que $n = 2k$.

Donc, que $n - 1 = (2k) - 1$

$$\begin{aligned} &= 2k - 1 + 1 - 1 \\ &= 2k - 2 + 1 \\ &= 2(k - 1) + 1 \end{aligned}$$

$$= \underbrace{2k' + 1}_{impair} \quad \text{où } k' = k - 1 \text{ est entier}$$

Il existe donc un entier k' tel que $n - 1 = 2k' + 1$.
L'implication $(p_1 \to p_3)$ est ainsi prouvé.

(II.) Démontrons que si $n - 1$ est impair, alors n^2 est pair, en utilisant la **preuve directe**.
Par hypothèse, supposons que $n - 1$ est impair.
Il existe donc un entier k tel que $n - 1 = 2k + 1$. On déduit que $n = 2k + 2$.

Donc, $n^2 = (2k + 2)^2$

$$\begin{aligned} &= (2k + 2)(2k + 2) \\ &= 4k^2 + 8k + 4 \\ &= 2(2k^2 + 4k + 2) \\ &= \underbrace{2k'}_{pair} \quad \text{où } k' = 2k^2 + 4k + 2 \text{ est entier} \end{aligned}$$

Il existe donc un entier k' tel que $n^2 = 2k'$.
L'implication $(p_3 \to p_2)$ est ainsi prouvé.

(III.) Démontrons que si n^2 est pair, alors n est pair, en utilisant la **preuve par contraposition (preuve indirecte)**.
On démontrera la contraposée : Si n est impair, alors n^2 est impair.
Supposons par hypothèse que n est impair. Il existe donc un entier k tel que $n = 2k + 1$.

Alors, $n^2 = (2k + 1)^2$

$$\begin{aligned} &= (2k + 1)(2k + 1) \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \\ &= \underbrace{2k' + 1}_{impair} \quad \text{où } k' = 2k^2 + 2k \text{ est entier} \end{aligned}$$

Il existe ainsi un entier k' tel que $n^2 = 2k' + 1$. Et donc, n^2 est impair.
Ainsi par contraposition, l'implication $(p_2 \to p_1)$ est ainsi prouvé.

Les trois implications étant prouvées, nous pouvons conclure que n est pair si et seulement si n^2 est pair si et seulement si $n - 1$ est impair.
CQFD

Exercice 4

En utilisant la preuve par cas, démontrez que si $x \in \mathbb{R}$, alors $0 \leq \frac{x+|x|}{2} \leq |x|$.

Solution :

Les deux cas sont :

- **Cas** $(\mathbf{I.})\ \boldsymbol{x \geq 0}$
- **Cas** $(\mathbf{II.})\ \boldsymbol{x < 0}$

Cas $(\mathbf{I.})\ \boldsymbol{x \geq 0}$

Procédons avec une preuve directe :

Supposons que $x \geq 0$. Dans ce cas, $|x| = x$.

Donc, $$\frac{x+|x|}{2} = \frac{x+x}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

Par hypothèse, $0 \leq x$ donc $0 \leq \frac{x+|x|}{2}$.

De plus $\frac{x+|x|}{2} = |x|$, ce qui implique que $\frac{x+|x|}{2} \leq |x|$.

Ainsi dans ce cas, $0 \leq \frac{x+|x|}{2} \leq |x|$ est vraie.

Cas $(\mathbf{II.})\ \boldsymbol{x < 0}$

Procédons avec une preuve directe :

Supposons que $x < 0$. Dans ce cas, $|x| = -x$.

Donc, $$\frac{x+|x|}{2} = \frac{x+(-x)}{2} = \frac{x-x}{2} = 0$$

Comme $x < 0$, on a également $|x| = -x > 0$, donc $\frac{x+|x|}{2} \leq |x|$.

Ainsi dans ce cas, $0 \leq \frac{x+|x|}{2} \leq |x|$ est également vraie.

Dans les deux cas, nous avons montré que $0 \leq \frac{x+|x|}{2} \leq |x|$.

Par conséquent, nous avons démontré que si $x \in \mathbb{R}$, alors $0 \leq \frac{x+|x|}{2} \leq |x|$.

CQFD

Exercice 5

Soit a et b deux entiers. En utilisant la preuve par contraposition (preuve indirecte), démontrez que

Si le produit de a et b est pair, alors au moins l'un des entiers a ou b est pair.

Solution :

Puisqu'on suggère une preuve une preuve indirecte, on démontrera la contraposée :

Si a et b sont impairs tous les deux, alors le produit de a et b est impair.

Supposons donc par hypothèse que a et b sont impairs.
Il existe ainsi k_1 et k_2 entiers tels que $a = 2k_1 + 1$ et $b = 2k_2 + 1$.

On a que
$$\begin{aligned} a \cdot b &= (2k_1 + 1)(2k_2 + 1) \\ &= 4k_1k_2 + 2k_1 + 2k_2 + 1 \\ &= 2\,\underbrace{(2k_1k_2 + k_1 + k_2)}_{k'} + 1 \\ &= \underbrace{2k' + 1}_{impair} \quad \text{où } k' = 2k_1k_2 + k_1 + k_2 \text{ est entier} \end{aligned}$$

Alors, il existe un entier k' tel que $a \cdot b = 2k' + 1$.
Donc, le produit de a et b est impair.
Ainsi par contraposition, si le produit de a et b est pair, alors au moins l'un des entiers a ou b est pair.
CQFD

Indication pour les Exercice 6 et Exercice 7 :

Un nombre q est rationnel si et seulement s'il existe deux entiers $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ tels que $q = \frac{a}{b}$.

Exercice 6

En utilisant la preuve directe, démontrez que la moyenne de deux nombres rationnels q_1 et q_2 est aussi un nombre rationnel.

Solution :

Supposons par hypothèse que q_1 et q_2 sont des nombres rationnels.
Il existe des entiers a_1, a_2 et des entiers non nuls b_1, b_2 tels que $q_1 = \frac{a_1}{b_1}$ et $q_2 = \frac{a_2}{b_2}$.
Si on note m la moyenne des nombres q_1 et q_2, on obtient :

$$\begin{aligned} m &= \frac{q_1 + q_2}{2} \\ &= \frac{\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}}{2} \\ &= \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{2b_1b_2} \end{aligned}$$

$= \frac{a\prime}{b\prime}$, en posant $a' = a_1 b_2 + a_2 b_1$entier et $b' = 2b_1 b_2$ entier non nul

Donc, il existe des entiers a' et des entiers non nuls b' tels que $m = \frac{a\prime}{b\prime}$.
Ainsi, la moyenne de q_1 et q_2 est un nombre rationnel.
CQFD

Exercice 7
Soit $a < b$ des nombres rationnels. En utilisant la preuve par contradiction (preuve par l'absurde), démontrez qu'il existe une infinité de nombres rationnels x satisfaisant $a < x < b$.

Solution :

Puisqu'on suggère une preuve par l'absurde, on doit supposer l'hypothèse vraie et la conclusion fausse pour arriver à une contradiction, donc que :

$a < b$ sont rationnels, mais il existe seulement un nombre fini de nombres rationnels x satisfaisant
$$a < x < b$$

Supposons donc par hypothèse que $a < b$ sont rationnels et qu'il existe seulement un nombre fini de nombres rationnels x tels que $a < x < b$.

Notons n la quantité de tous ces nombres x, et notons ces x en ordre croissant :

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b.$$

Donc, x_1 est le plus petit de tous les nombres rationnels x tels que $a < x < b$.

Soit $x' = \frac{a+x_1}{2}$ la moyenne des nombres rationnels a et x_1.
On a donc que

- x' est rationnel, car il est la moyenne de deux nombres rationnels
- $a < x' < x_1$, car la moyenne de deux nombres réels distincts est strictement comprise entre ces nombres

Et donc $a < x' < x_1 < b$.

Cela contredit que x_1 est le plus petit des nombres rationnels x tels que $a < x < b$.
Il faut donc que, si $a < b$ rationnels, qu'il existe une infinité de nombres rationnels x tels que $a < x < b$.
CQFD