POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 6 : ALGORITHMES ET ANALYSE DE COMPLEXITÉ

H2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1.
Donnez une évaluation du comportement asymptotique de chacune des fonctions suivantes, en utilisant le $\boldsymbol{O}$. Justifiez votre réponse.

a) $\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (\log n)^2$

Réponse :

Évaluons d'abord le comportement asymptotique de $(\log n)^2$

On a $\log n \leq n$

Donc, $(\log n)^2 \leq n^2$

Ainsi, $\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (\log n)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (\log n)^2 \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 9n^2 + n)$

$\frac{1}{6}(2n^3 + 9n^2 + n)$ est $\boldsymbol{O}(n^3)$

Donc $\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (\log n)^2$ est $\boldsymbol{O}(n^3)$

b) $5! \log(\log(n^n))$

Réponse :

$\log(n^n) = n \cdot \log n$

Ainsi, $5! \log(\log(n^n)) = 5! \log(n \log n) = 5! \log n + 5! \log(\log n)$ qui est $\boldsymbol{O}(\log n)$

Donc, $5! \log(\log(n^n))$ est $\boldsymbol{O}(\log n)$

c) $(6^n + n^6)(n^8 + 8^n)$

Réponse :

$(6^n + n^6)$ est $\boldsymbol{O}(6^n)$

$(n^8 + 8^n)$ est $\boldsymbol{O}(8^n)$

$(6^n + n^6)(n^8 + 8^n)$ est $\boldsymbol{O}(6^n \cdot 8^n)$

Donc, $(6^n + n^6)(n^8 + 8^n)$ est $\boldsymbol{O}(48^n)$

Exercice 2.
Démontrez que $n^2 + n^3$ est $\boldsymbol{\Theta}(n^3)$

Réponse :

Il suffit de trouver les témoins C_1, C_2 et k tel que $C_1 n^3 \leq n^2 + n^3 \leq C_2 n^3$ pour $n > k$.

Si on divise tous les termes par n^3, on obtient :

$$C_1 \leq \frac{1}{n} + 1 \leq C_2$$

Si on choisit $k = 1$, on a

$$1 \leq \frac{1}{n} + 1 \leq 2$$

On peut donc alors choisir par exemple $C_1 = 0{,}5$ et $C_2 = 2{,}5$.

En somme, en choisissant $C_1 = 0{,}5$ et $C_2 = 2{,}5$ et $k = 1$, on a :

$$n^2 + n^3 \text{ est } \boldsymbol{\Theta}(n^3)$$

CQFD

Exercice 3.

La double factorielle n!! est une extension de la factorielle standard n! pour les nombres entiers positifs et elle est utilisée dans différentes branches des mathématiques telles que la combinatoire, l'analyse et la théorie des nombres. Elle est définie comme suit :

$$n!! = \begin{cases} n \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 & , si\ n > 0\ est\ pair \\ n \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 & , si\ n > 1\ est\ impair \\ 1 & , si\ n = 0\ ou\ n = 1 \end{cases}$$

Par exemple, 0!! = 1, 1!! = 1, 2!! = 2, 3!! = 3 · 1 = 3, 4!! = 4 · 2 = 8, 5!! = 5 · 3 · 1 = 15.

Soit deux modules ***A*** et ***B*** de complexités respectives $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{O}(\alpha(n))$ et $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{O}(\beta(n))$ tel que :

$$\alpha(n) = \begin{cases} 10^n & , si\ n\ est\ pair \\ \log(n!!) & , si\ n\ est\ impair \end{cases} \qquad \beta(n) = \begin{cases} n^{10} & , si\ n\ est\ pair \\ \log(n^n) & , si\ n\ est\ impair \end{cases}$$

Déterminez la complexité lorsque les deux modules sont exécutés séquentiellement (***A*** suivi de ***B*** ou ***B*** suivi de ***A***). Justifiez votre réponse.

Réponse :

Lorsque les deux modules sont exécutés séquentiellement, la complexité recherchée est celle de ***A*** + ***B***. En appliquant la règle de la somme, elle vaut :

$$\boldsymbol{O}(\max(\alpha(n), \beta(n))) = \begin{cases} \max(10^n, n^{10}) & , si\ n\ est\ pair \\ \max(\log(n!!), \log(n^n)) & , si\ n\ est\ impair \end{cases}$$

Soit :

$$\boldsymbol{O}(\max(\alpha(n), \beta(n))) = \begin{cases} 10^n & , si\ n\ est\ pair \\ n \log\ n & , si\ n\ est\ impair \end{cases}$$

Exercice 4.

Soit $k, m \in \mathbb{N}$. Montrez que

$$\sum_{i=1}^{m} i^k = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + (m-1)^k + m^k \in \boldsymbol{O}(m^{k+1})$$

Réponse :

Pour $m \geq 1$, on a :

$$\begin{gathered} 1^k \leq m^k \\ 2^k \leq m^k \\ 3^k \leq m^k \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ (m-1)^k \leq m^k \\ m^k \leq m^k \end{gathered}$$

En sommant membre à membre les m inégalités, on obtient :

$$1^k + 2^k + 3^k + \cdots + (m-1)^k + m^k \leq \underbrace{m^k + m^k + m^k + \cdots + m^k + m^k}_{m\, fois}$$

Ainsi, m^k étant sommés m fois dans la partie droite de l'inégalité, on peut réécrire l'inégalité comme suit :

$$1^k + 2^k + 3^k + \cdots + (m-1)^k + m^k \leq m \cdot m^k$$
$$\Leftrightarrow 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + (m-1)^k + m^k \leq m^{k+1}$$

En posant c = 1, on a :

$$1^k + 2^k + 3^k + \cdots + (m-1)^k + m^k \leq c \cdot m^{k+1}$$

Rappelons que cette inégalité est établie pour $m \geq 1$.
En considérant les témoins k=1 et c=1, on a donc :

Pour m ≥ k et c=1, $\quad 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + (m-1)^k + m^k \leq c \cdot m^{k+1}$

D'où $\sum_{i=1}^{m} i^k = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + (m-1)^k + m^k \in \boldsymbol{O}\left(m^{k+1}\right)$.
CQFD

Exercice 5.
Donnez une évaluation de la complexité en Grand-Thêta de $2^{n+5} + 5^{n-1}$. Justifiez votre réponse.

Réponse :
$2^{n+5} + 5^{n-1} \in \boldsymbol{\Theta}(5^n)$

D'une part, montrons que $2^{n+5} + 5^{n-1} \in \mathbf{O}(5^n)$.
$2^{n+5} \in \boldsymbol{O}(2^n)$
$5^{n-1} \in \boldsymbol{O}(5^n)$
$2^{n+5} + 5^{n-1} \in \boldsymbol{O}(\max(2^n, 5^n))$
$2^{n+5} + 5^{n-1} \in \boldsymbol{O}(5^n)$

D'autre part, montrons que $5^n \in \boldsymbol{O}(2^{n+5} + 5^{n-1})$.
Cherchons c et k tel que $5^n \leq c\,(2^{n+5} + 5^{n-1})$ pour n ≥ k.
En prenant c=5, on a :
$c \cdot (5^{n+5} + 5^{n-1}) \qquad = 5 \cdot (2^{n+5} + 5^{n-1})$
$\qquad\qquad\qquad\qquad = 5 \cdot 2^{n+5} + 5^n$
On a donc $5^n \leq 5 \cdot 2^{n+5} + 5^n$ pour tout entier positif n.
À gauche et à droite de l'inégalité, on a bien 5^n.
Celui de droite est augmenté de $5 \cdot 2^{n+5}$, ce qui explique le sens de l'inégalité.
C'est-à-dire $5^n \leq c \cdot (2^{n+5} + 5^{n-1})$ pour n ≥ 0.
En prenant k = 1 et c =1, on a bien $5^n \leq c \cdot (2^{n+5} + 5^{n-1})$.
Ce qui permet de conclure que $5^n \in \boldsymbol{O}(2^{n+5} + 5^{n-1})$.

Exercice 6.

Démontrez que $\frac{n^3+2n}{2n+1}$ est $\boldsymbol{O}(n^2)$

Réponse :

Par définition, si $\frac{n^3+2n}{2n+1}$ est $\boldsymbol{O}(n^2)$, alors il existe c et k tel que $n \geq k$ et $\frac{n^3+2n}{2n+1} \leq c \cdot n^2$

Supposons que l'inégalité est vérifiée et trouvons les valeurs c et k.

On sait que pour $n \geq 1$, $2n + 1 > 0$. On peut donc écrire successivement :

$$\begin{aligned}
\frac{n^3+2n}{2n+1} \leq c \cdot n^2 \quad & \Leftrightarrow n^3 + 2n \leq c \cdot n^2(2n+1) \\
& \Leftrightarrow n^3 + 2n \leq c \cdot (2n^3 + n^2) \\
& \Leftrightarrow 0 \leq (2c-1)n^3 + c \cdot n^2 - 2n
\end{aligned}$$

En posant $c = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
0 \leq (2-1)n^3 + n^2 - 2n \quad & \Leftrightarrow 0 \leq n^3 + n^2 - 2n \\
& \Leftrightarrow 0 \leq n(n^2 + n^1 - 2) \\
& \Leftrightarrow 0 \leq n(n+2)(n-1)
\end{aligned}$$

- Lorsque $n \geq 1$, on peut déduire que $n \geq 0$.
- Lorsque $n \geq 1$, on a $(n+2) \geq 3$ et on déduit que $(n+2) \geq 0$.
- Lorsque $n \geq 1$, on a $(n-1) \geq 0$.

Ainsi, lorsque $n \geq 1$, $0 \leq n(n+2)(n-1)$ est vérifiée.

On peut donc considérer que lorsque $k = 1$ et $c = 1$, on a :

$$\text{Pour } n \geq k, \frac{n^3+2n}{2n+1} \leq c \cdot n^2$$

D'où $\frac{n^3+2n}{2n+1}$ est $\boldsymbol{O}(n^2)$.
CQFD

Exercice 7.

Déterminez l'ordre du temps de calcul pour les algorithmes suivants. Justifiez vos réponses tout en montrant toutes les étapes qui ont conduit à votre résultat. Si vous avez fait des hypothèses, énoncez-les.

a) Algorithme I

```
1. k = 0
2. while k < n
3.     k = k + 1
```

Réponse :
On fait l'hypothèse qu'une opération élémentaire s'exécute en une unité de temps. Comptons le nombre d'opérations.

Méthode 1
Ligne 1 : 1 opération.
Ligne 2 : (n + 1) comparaisons, donc (n+1) opérations.
Ligne 3 : 1 opération réalisée n fois, donc n opération. On considère l'incrémentation comme une opération élémentaire.

Au total [1 + (n + 1) + n] opérations, soit (2n +2) opérations.
Cet algorithme est donc ***O***(n).

Méthode 2
Ligne 1 : 1 opération.
Ligne 2 : 1 comparaison, donc 1 opération.
Ligne 3 : 1 opération. On considère l'incrémentation comme une opération élémentaire.
La boucle **while** s'exécute n fois et une dernière comparaison qui détermine la sortie de la boucle. Le nombre total d'opérations dans la boucle est donc 2n + 1.

Au total [1 + (2n + 1)] opérations, soit (2n +2) opérations.
Cet algorithme est donc ***O***(n).

b) Algorithme II

```
1. k = n
2. while k < n
3.     k = k +1
```

Réponse :
On fait l'hypothèse qu'une opération élémentaire s'exécute en une unité de temps. Comptons le nombre d'opérations.

Ligne 1 : 1 opération.
Ligne 2 : 1 comparaison, donc 1 opération.
Ligne 3 : 0 opération. La ligne ne s'exécutera pas, car on ne rentrera pas dans la boucle.

Au total (1 + 1) opérations, soit 2 opérations.
Cet algorithme est donc ***O***(1).

c) Algorithme III

```
1.  k = 1
2.  p = 0
3.  while k <= n
4.      q = 1
5.      while q <= n
6.          p = p + q
7.          q = q +1
8.      k = k + 1
```

Réponse :

On fait l'hypothèse qu'une opération élémentaire s'exécute en une unité de temps. Comptons le nombre d'opérations.

Ligne 1 : 1 opération.
Ligne 2 : 1 opération.
Ligne 3 : (n + 1) comparaisons, donc (n + 1) opérations.
Ligne 4 : 1 opération réalisée n fois, donc n opérations.
Ligne 5 : 1 comparaison réalisée n fois, donc n opérations.
Ligne 6 : 1 opération réalisée n fois, donc n opérations.
Ligne 7 : 1 opération réalisée n fois, donc n opérations.
Ligne 8 : 1 opération réalisée n fois, donc n opérations.

La boucle de la ligne 5 à 7 s'exécute n fois en tant que boucle imbriquée.
Cette boucle fait donc [n(n + n + n)], soit $3n^2$.

Au total [$1 + 1 + (n + 1) + n + 3n^2 + n$] opérations, soit ($3n^2 + 3n + 3$) opérations.
Cet algorithme est donc ***O***(n^2).

Exercice 8.

En vous basant sur les définitions des notations de Landau que sont : $\boldsymbol{O}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Theta}$, dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Il n'est pas nécessaire de justifier votre réponse ici.

a) $(n^7 + 7n^6 + 21n^5 + 35n^4 + 35n^3 + 21n^2 + 7n + 1) \in \boldsymbol{\Omega}(n^8)$

Réponse :

L'affirmation est fausse.

Il n'est pas possible de trouver des constantes k et c telles que :

Pour $n > k$, $n^8 \leq c\ (n^7 + 7n^6 + 21n^5 + 35n^4 + 35n^3 + 21n^2 + 7n + 1)$

b) $(\log n)^3 \in \boldsymbol{\Theta}(\sqrt{n}\log n)$

Réponse :

L'affirmation est fausse.

$(\log n)^3 \in \boldsymbol{\Omega}(\sqrt{n}\log n)$, mais $(\log n)^3 \notin \boldsymbol{O}(\sqrt{n}\log n)$

c) $(n^{99} + n^{98}) \in \boldsymbol{O}(n^{100})$

Réponse :

L'affirmation est vraie.

En tant que fonction polynôme, $(n^{99} + n^{98})$ est en $\boldsymbol{O}$ du monôme de plus haut degré, soit $\boldsymbol{O}(n^{99})$.

Et puisque $n^{99} < n^{100}, n^{99} \in \boldsymbol{O}(n^{100})$, et par conséquent la fonction aussi.

d) $\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}} \in \boldsymbol{\Theta}(n^{\frac{3}{2}})$

Réponse :

L'affirmation est vraie.

$\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}} \in \mathbf{O}\left(n^{\frac{3}{2}}\right)$, et $\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}} \in \boldsymbol{\Omega}(n^{\frac{3}{2}})$

e) $(2n^2 - 7) \in \boldsymbol{\Omega}(n^2)$

Réponse :

L'affirmation est vraie.

$n^2 < (2n^{\mathbf{2}} - 7)$ pour n>k avec k=3