POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 3 : PREUVES

H2025

Solutionnaire

Exercice 1 :

Soit n un entier positif. Montrez que n est un multiple de 5 si, et seulement si, n^2 est un multiple de 5.
Pour le sens direct, utilisez une **preuve directe**, puis pour le sens réciproque, utilisez une **preuve par contraposition** et départagez les cas.

Solution :

Nous démontrons les deux sens de l'équivalence séparément.
Sens direct :
Supposons que n est un multiple de 5. Cela signifie qu'il existe un entier k tel que :
$$n = 5k.$$
En élevant n au carré, on obtient :
$$n^2 = (5k)^2 = 25k^2.$$
Puisque $25k^2$ est un multiple de 5 (car $25 = 5 \cdot 5$), on en déduit que n^2 est également un multiple de 5.
Sens réciproque :
Nous prouvons ce sens par contraposition. Nous montrons que si n n'est pas un multiple de 5, alors n^2 n'est pas un multiple de 5.
Si n n'est pas un multiple de 5, alors n peut s'écrire sous la forme :
$$n = 5k + a,$$
où k est un entier et $a \in \{1,2,3,4\}$ (représentant les restes possibles de la division euclidienne de n par 5).
En élevant au carré, on a :
$$n^2 = (5k + a)^2 = 25k^2 + 10ka + a^2.$$
Puisque $25k^2 + 10ka$ est un multiple de 5, on peut écrire :
$$n^2 = 5h + a^2,$$
pour un entier h. Nous examinons maintenant les cas possibles pour a.
Cas possibles pour a :

- Si $a = 1$, alors $n^2 = 5h + 1$, qui n'est pas un multiple de 5.
- Si $a = 2$, alors $n^2 = 5h + 2^2 = 5h + 4$, qui n'est pas un multiple de 5.
- Si $a = 3$, alors $n^2 = 5h + 3^2 = 5h + 9 = 5h + 5 + 4 = 5(h + 1) + 4$, qui n'est pas un multiple de 5.
- Si $a = 4$, alors $n^2 = 5h + 4^2 = 5h + 16 = 5h + 15 + 1 = 5(h + 3) + 1$, qui n'est pas un multiple de 5.

Conclusion
Dans tous les cas possibles pour a, n^2 n'est pas un multiple de 5 si n n'est pas un multiple de 5.
Par conséquent, par contraposition, nous avons prouvé que si n^2 est un multiple de 5, alors n est également un multiple de 5.
Conclusion finale
Nous avons démontré les deux sens de l'équivalence. Ainsi, n est un multiple de 5 si, et seulement si, n^2 est un multiple de 5.

Exercice 2 :

Montrez que l'équation $r^3 + r + 1 = 0$ n'admet aucune solution rationnelle. Utilisez **une preuve par l'absurde** et départagez les cas.

Solution :

Supposons que $r = \frac{a}{b}$, où $a, b \in \mathbb{Z}$ et $b \neq 0$. En remplaçant r dans l'équation, on obtient :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 + \frac{a}{b} + 1 = 0.$$

En développant, cela donne :

$$\frac{a^3}{b^3} + \frac{a}{b} + 1 = 0.$$

En multipliant par b^3 (pour éliminer les dénominateurs), on obtient :

$$a^3 + ab^2 + b^3 = 0.$$

Ainsi, l'équation devient :

$$a^3 + ab^2 + b^3 = 0. \textbf{(1)}$$

Analysons cette équation en considérant les parités des entiers a et b.

Cas 1 : a et b sont tous deux impairs

Si a et b sont impairs, alors :

- a^3 est impair (le cube d'un entier impair est impair),
- ab^2 est impair (produit d'un impair et d'un carré impair),
- b^3 est impair.

Ainsi, $a^3 + ab^2 + b^3$ est impair, ce qui contredit l'équation **(1)**, puisque 0 est pair. Ce cas est donc impossible.

Cas 2 : a est impair et b est pair

Si b est pair, alors b^3 est pair, ab^2 est pair (produit d'un impair et d'un carré pair), et a^3 est impair. Dans ce cas, la somme $a^3 + ab^2 + b^3$ est impair, ce qui contredit l'équation **(1)**. Ce cas est donc impossible.

Cas 3 : a est pair et b est impair

Si a est pair, alors a^3 est pair, ab^2 est pair (produit d'un pair et d'un impair), et b^3 est impair. Dans ce cas, la somme $a^3 + ab^2 + b^3$ est impair, ce qui contredit l'équation **(1)**. Ce cas est donc impossible.

Cas 4 : a et b sont tous deux pairs

Si a et b sont tous deux pairs, alors a^3, ab^2, et b^3 sont tous pairs, ce qui fait que $a^3 + ab^2 + b^3$ est pair. Cependant, si a et b sont tous deux pairs, la fraction $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible, ce qui contredit notre hypothèse initiale que $\frac{a}{b}$ est sous sa forme irréductible.

Conclusion

Dans tous les cas possibles, nous aboutissons à une contradiction. Ainsi, notre hypothèse de départ selon laquelle r est rationnel est fausse. Par conséquent, l'équation $r^3 + r + 1 = 0$ n'admet aucune solution rationnelle.

Exercice 3 :

Prouvez que, pour tout entier n non négatif, il existe un entier m négatif unique tel que :

$$m^2 \leq n < (m+1)^2.$$

Solution :

La démonstration se divise en deux parties : preuve par existence et unicité.

1. Preuve de l'existence

Puisque n est un entier non négatif, $\sqrt{n}$ est bien défini et appartient à l'ensemble des réels positifs ou nuls ($\mathbb{R}_+$). Pour tout réel, il existe exactement deux entiers consécutifs m et $m+1$ tels que :

$$m \leq \sqrt{n} < m+1,$$

où m est le plus grand entier tel que $m \leq \sqrt{n}$.

En élevant chaque côté de l'inégalité au carré, nous obtenons :

$$m^2 \leq n < (m+1)^2.$$

Ainsi, nous avons prouvé qu'il existe un entier $m \in \mathbb{Z}_+$ tel que l'inégalité est satisfaite. De plus, comme $n \geq 0$, l'entier m est également non négatif.

2. Preuve de l'unicité

2. Unicité de m

Supposons qu'il existe un autre entier naturel m' satisfaisant

$$(m')^2 \leq n < (m'+1)^2.$$

Nous allons montrer que $m' = m$.

Comparaison de m^2 et $(m')^2$:

Comme $m^2 \leq n < (m'+1)^2$, il en résulte que :

$$m^2 < (m'+1)^2.$$

En prenant la racine carrée des deux côtés (en utilisant la croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ pour $x \geq 0$), nous obtenons :

$$m < m'+1.$$

Ce qui implique :

$$m \leq m'.$$

De même, puisque $(m')^2 \leq n < (m+1)^2$, nous avons :

$$(m')^2 < (m+1)^2.$$

En prenant la racine carrée des deux côtés :

$$m' < m+1.$$

Ce qui implique :

$$m' \leq m.$$

Ainsi, nous avons $m \leq m'$ et $m' \leq m$, ce qui donne $m = m'$.

L'entier m est donc unique.

Conclusion

Nous avons démontré que, pour tout entier non négatif n, il existe un **unique** entier non négatif m tel que :

$$m^2 \leq n < (m+1)^2.$$

Exercice 4 :

Au sujet de la nouvelle amie qu'il vient de rencontrer, Jean fait les affirmations suivantes :

- H1 : Si elle déteste le jazz, alors elle aime le tango ou la salsa.
- H2 : Elle a les mêmes préférences pour le tango et la rumba.
- H3 : Si elle déteste la salsa, alors elle aime le tango.
- H4 : Elle déteste le jazz ou la salsa, ou les deux d'ailleurs.
- H5 : Si elle aime la salsa et pas le jazz, alors elle aime la rumba.

Après de longue réflexion, il conclut :

C:Elle déteste la rumba, la salsa et le tango.

Josias n'est pas convaincu de la conclusion de son ami Jean. Il décide de mettre ses connaissances en logique mathématique à profit pour vérifier la conclusion de Jean. Dans un premier temps, il procède par des définitions et des traductions comme suit :

Définitions

- J : Jazz
- S : Salsa
- R : Rumba
- T : Tango
- $aime(x)$: Elle aime x.

Il affirme que ne pas aimer un rythme musical, c'est le détester.

Traductions

- H1 : $\left(\neg aime(J)\right) \rightarrow \left(aime(T) \vee aime(S)\right)$
- H2 : $aime(T) \leftrightarrow aime(R)$
- H3 : $\left(\neg aime(S)\right) \rightarrow aime(T)$
- H4 : $\left(\neg aime(J)\right) \vee \left(\neg aime(S)\right)$
- H5 : $\left(aime(S) \wedge \left(\neg aime(J)\right)\right) \rightarrow aime(R)$
- C : $\left(\neg aime(R)\right) \wedge \left(\neg aime(S)\right) \wedge \left(\neg aime(T)\right)$

À partir des travaux de Josias, montrez que la conclusion de Jean n'est pas valide.

Solution :

1.	$(\neg \text{aime}(J)) \vee (\neg \text{aime}(S))$	Hypothèse H4
2.	$(\neg \text{aime}(S)) \vee (\neg \text{aime}(J))$	Étape 1 et commutativité de $\vee$
3.	$\text{aime}(S) \rightarrow (\neg \text{aime}(J))$	Transformation de la disjonction en implication
4.	$(\neg \text{aime}(S)) \rightarrow \text{aime}(T)$	Hypothèse H3
5.	$(\neg \text{aime}(T)) \rightarrow \text{aime}(S)$	Contraposée de l'étape 4
6.	$(\neg \text{aime}(T)) \rightarrow (\neg \text{aime}(J))$	Étapes 3 et 5 et syllogisme par hypothèse
7.	$\text{aime}(J) \rightarrow \text{aime}(T)$	Contraposée de l'étape 6
8.	$(\neg \text{aime}(J)) \rightarrow (\text{aime}(T) \vee \text{aime}(S))$	Hypothèse H1
9.	$\neg(\text{aime}(T) \vee \text{aime}(S)) \rightarrow \text{aime}(J)$	Contraposée de l'étape 8
10.	$\neg(\text{aime}(T) \vee \text{aime}(S)) \rightarrow \text{aime}(T)$	Étapes 7 et 9 et syllogisme par hypothèse
11.	$(\text{aime}(T) \vee \text{aime}(S)) \vee \text{aime}(T)$	Étape 10 et transformation de l'implication en disjonction
12.	$\text{aime}(T) \vee \text{aime}(S) \vee \text{aime}(T)$	Étape 11 et associativité de $\vee$
13.	$\text{aime}(T) \vee \text{aime}(S)$	Étape 12 et simplification
14.	$\text{aime}(T) \vee \text{aime}(S) \vee \text{aime}(R)$	Étape 13 et règle de l'addition
15.	$\text{aime}(R) \vee \text{aime}(S) \vee \text{aime}(T)$	Étape 14 et commutativité de $\vee$
16.	$\neg\left(\neg \text{aime}(R) \wedge (\neg \text{aime}(S)) \wedge (\neg \text{aime}(T))\right)$	Étape 15 et loi de De Morgan
17.	$\neg C$	Étape 16 et C

La conclusion de Jean n'est donc pas valide.

Exercices suggérés pour la semaine :

Rosen **8e Edition**, chapitre 1 :
Section 1.6 : 1.6.3, 1.6.4, 1.6.10, 1.6.13, 1.6.14.
Section 1.7 : 1.7.5, 1.7.6, 1.7.7, 1.7.9, 1.7.10, 1.7.13, 1.7.18, 1.7.19, 1.7.20, 1.7.28, 1.7.29, 1.7.30,
Section 1.8 : 1.8.2, 1.8.3, 1.8.8, 1.8.9, 1.8.18, 1.8.19, 1.8.20, 1.8.24.