POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 6 : ALGORITHMES ET ANALYSE DE COMPLEXITÉ

H2024

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 :

Donnez une évaluation du comportement asymptotique de chacune des fonctions suivantes, en utilisant le O. Justifiez votre réponse.

a) $[2 + n^2][n^5 + 1]$

Solution :

$[2 + n^2]$ est $O(n^2)$

$[n^5 + 1]$ est $O(n^5)$

$[2 + \mathrm{n}^2][\mathrm{n}^5 + 1]$ est donc $O(n^7)$

b) $[n^3 + n^8][log(n^n) + n]$

Solution :

$log(n^n) = nlog(n)$

Alors, $[log(n^n) + n]$ est $O(n\ log\ n)$

$[n^3 + n^8]$ est $O(n^8)$

$[n^3 + n^8]\ [log(n^n) + n]$ est donc $O(n^9 log\ n)$

c) $[\sqrt{n} + 3\mathrm{log}(\mathrm{n})][\mathrm{n}! + 2^{\mathrm{n}}]$

Solution :

$[\sqrt{n} + 3log(n)]$ est $O(\sqrt{n})$

$[n! + 2^n]$ est $O(n!)$

$[\sqrt{n} + 3log(n)]\ [n! + 2^n]$ est donc $O(\sqrt{n}n!)$

d) $\left[n + log\left(\frac{12n^7}{18n^2}\right) + n^2\right][17log(n) + 17n^2] + \left[3n^n + 17^{n^2}\right]$

Solution :

$log\left(\frac{12n^7}{18n^2}\right) = log\left(\frac{12}{18}\right) + log(n^5) = log\left(\frac{12}{18}\right) + 5log(n)$

Alors, $\left[n + log\left(\frac{12n^7}{18n^2}\right) + n^2\right]$ est $O(n^2)$

$[17log(n) + 17n^2]$ est $O(n^2)$

$\left[n + log\left(\frac{12n^7}{18n^2}\right) + n^2\right][17log(n) + 17n^2]$ est donc $O(n^4)$

$\left[3n^n + 17^{n^2}\right]$ est $O\left(17^{n^2}\right)$

Finalement $\left[n + log\left(\frac{12n^7}{18n^2}\right) + n^2\right][17log(n) + 17n^2] + \left[3n^n + 17^{n^2}\right]$ est $O\left(17^{n^2}\right)$

e) $[n^3 + 2]^{17} + [2^n + 1]$

Solution :

$[n^3 + 2]$ est $O(\mathrm{n}^3)$

Or, comme l'exponentiation est une répétition de multiplication :

$[n^3 + 2]^{17}$ est $O((n^3)^{17}) \Rightarrow O(n^{51})$

$[2^n + 1]$ est $O(2^n)$

Ainsi, $[n^3 + 2]^{17} + [2^n + 1]$ est $O(2^n)$

Exercice 2 :

Ordonnez les fonctions suivantes de sorte que chaque fonction soit O de la suivante.

$$log\left(n^{n^8}\right), \sqrt{n}^{18}, log(17n^3), n^{n!}, n^3 + 17n^2 + 2, 10^6 n, (n!)^3, (n-1)^{17}$$

Solution :

$$log(17n^3)\ ;\ 10^6 n\ ;\ n^3 + 17n^2 + 2\ ;\ log\left(n^{n^8}\right)\ ;\ \sqrt{n}^{18}\ ;\ (n-1)^{17}\ ;\ (n!)^3\ ;\ n^{n!}$$

Exercice 3 :

Soit n ≥ 1. Montrez que $\frac{n^4+n^2}{2n}$ n'est pas $O(n)$.

Solution :

Raisonnons par l'absurde.

Supposons que $\frac{n^4+n^2}{2n}$ est $O(n)$ et cherchons une contradiction.

Par définition, il existe des constantes C et k telles que $n > k$ et $\frac{n^4+n^2}{2n} \leq Cn$.

Il nous est possible de manipuler l'inégalité afin d'arriver à une contradiction.

$$\frac{n^4 + n^2}{2n} \leq Cn$$
$$\Rightarrow n^4 + n^2 \leq 2Cn^2$$
$$\Rightarrow n^2 + 1 \leq 2C$$

Cependant, peu importe C, ce n'est pas possible que $n^2 + 1 \leq 2C$ pour tout n > k, car n peut être arbitrairement grand. La contradiction montre donc que $\frac{n^4+n^2}{2n}$ n'est pas $O(n)$.

CQFD

Exercice 4 :

Déterminez l'ordre du temps de calcul pour l'algorithme suivant. Justifiez votre réponse tout en montrant toutes les étapes qui ont conduit à votre résultat. Si vous avez fait des hypothèses, énoncez-les.

```
1.  y=0;
2.  for (i=1;  i<n;  i++)
3.          for(j=1;  j<=n;  j=3*j)
4.                  y+=j;
```

Solution :

- La ligne 1 est en $O(1)$ car une seule opération est effectuée.

- La ligne 2 est en $O(n)$. Effectivement, à chaque passage dans l'entête de la boucle, il y a une comparaison. Aussi, il y a eu l'initialisation et l'incrémentation de la variable i à chaque boucle. Soit un total de 2 opérations qui se répètent n-1 fois.

- La ligne 3 est en $O(n \: log \: n)$. Effectivement, à chaque passage dans l'entête de la boucle, il y a encore une fois 2 opérations, une comparaison ainsi que l'initialisation/incrémentation de j. Or, dans le cas de cette boucle, l'incrémentation est une multiplication par 3, de telle sorte que j ne prendra comme valeur que des puissances de 3. Ainsi, le nombre d'itération k est défini comme le plus grand entier k tel que :
$$3^k \leq n$$

  De cette équation, on en déduit que $k = \lfloor log_3(n) \rfloor = \lfloor \log(n)/log(3) \rfloor$. Ainsi, nous aurons 2 opérations qui se répèterons $\lfloor \log(n)/log(3) \rfloor + 1$ fois, d'où $O(log \: n)$. Or, cette boucle est répétée le nombre de fois que la ligne 2 est répété donc n+1 fois. Ainsi, la complexité est $O(n)O(log \: n)$, soit $O(n \: log \: n)$.

- La ligne 4 a la même complexité que la ligne 3, soit $O(n \: log \: n)$.

- En sommant les temps d'exécution des 4 lignes de code (en appliquant la règle de la somme $O(f) + O(g) = O\big(max(f, g)\big)$), on arrive à la complexité du segment qui est $O(n \: log \: n)$

Exercice 5 :

Démontrez que $(n + 2)log(n^2) \in \Theta(n\ log\ n)$

Solution :

Il faut trouver C_1, C_2 et k tel que :

$$C_1 nlog(n) \leq (n + 2)log(n^2) \leq C_2 nlog(n)\ pour\ n > k$$

On a d'abord, pour $n > 0$:

$$\begin{aligned} & nlog(n) \leq 2nlog(n) \\ \Rightarrow\ & nlog(n) \leq 2nlog(n) \leq 2nlog(n) + 4log(n) \\ \Rightarrow\ & nlog(n) \leq 2nlog(n) + 4log(n) \\ \Rightarrow\ & nlog(n) \leq (n + 2)log(n^2) \end{aligned}$$

Nous pouvons donc choisir $C_1 = 1$ pour tout $n > 0$

Ensuite, nous avons pour $n > 4$:

$$\begin{aligned} & 2 \leq 3 - \frac{4}{n} \\ \Rightarrow\ & 2n \leq 3n - 4 \\ \Rightarrow\ & 2nlog(n) \leq 3nlog(n) - 4log(n) \\ \Rightarrow\ & 2nlog(n) + 4log(n) \leq 3nlog(n) \\ \Rightarrow\ & (n + 2)log(n^2) \leq 3nlog(n) \end{aligned}$$

Nous pouvons donc choisir $C_2 = 3$ pour tout $n > 4$.

Ainsi, en choisissant par exemple $C_1 = 1, C_2 = 3$ et $k = 2$, on a :

$$(n + 2)log(n^2) \in \Theta(n\ log\ n)$$

CQFD

Exercice 6 :

On vous fournit un calculateur sur lequel chaque opération demande $10^{-11}s$ à être calculée. Quelle est la taille maximale (le plus grand n) que l'on puisse résoudre en un jour à l'aide des algorithmes suivants qui nécessite f(n) opérations.

a) $\boldsymbol{n^2}$

Solution :
$86400s = n^2 \cdot 10^{-11}$
$\Rightarrow n = 92951600$

b) $\boldsymbol{log(n)}$

Solution :
$86400s = log(n) \cdot 10^{-11}$
$\Rightarrow n = 10^{8{,}64 \cdot 10^{15}}$

c) $\sqrt{\boldsymbol{n}}$

Solution :
$86400s = \sqrt{n} \cdot 10^{-11}$
$\Rightarrow n = 7{,}46496 \cdot 10^{31}$

d) $\boldsymbol{3^{5n}}$

Solution :
$86400s = 3^{5n} \cdot 10^{-11}$
$\Rightarrow n = 6$

e) $\boldsymbol{n^{10}}$

Solution :
$86400s = n^{10} \cdot 10^{-11}$
$\Rightarrow n = 39$

f) $\boldsymbol{n}!$

Solution :
Pas de méthode directe, En procédant par essai-erreur, on obtient :
$n = 18$

g) $\boldsymbol{n^n}$

Solution :
Pas de méthode directe, En procédant par essai-erreur, on obtient :
$n = 13$

Exercice 7:

Donnez une évaluation de la complexité en Θ de $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} i$. Justifiez votre réponse.

Solution :

En premier lieu, cherchons à évaluer l'expression $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} i$. Nous avons d'abord :

$$\sum_{i=1}^{j} i = \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}(j^2 + j)$$

Ensuite :

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} j^2 + j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} j$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} i = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$$

Il est maintenant possible d'évaluer la complexité en Θ:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} i = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} \in \Theta(n^3)$$

Montrons d'abord que $\frac{n^3+3n^2+2n}{6} \in O(n^3)$

Soit, $n^3 \in O(n^3)$, $3n^2 \in O(n^2)$ et $2n \in O(n)$.

Alors, $n^3 + 3n^2 + 2n \ \in O(max(n^3, n^2, n) \ \Rightarrow O(n^3)$

Finalement, comme $\frac{1}{6} \in O(1)$, $\frac{n^3+3n^2+2n}{6} \in O(n^3)$ (multiplication)

D'autre part, montrons que $n^3 \in O\left(\frac{n^3+3n^2+2n}{6}\right)$

Cherchons un C et k tel que $n^3 \leq C\frac{n^3+3n^2+2n}{6}$ pour $n > k$

En prenant C=1, nous avons $n^3 \leq \frac{n^3+3n^2+2n}{6}$ pour $n > 0$.

Nous venons ainsi de montrer que $n^3 \in O\left(\frac{n^3+3n^2+2n}{6}\right)$

Ainsi comme $\frac{n^3+3n^2+2n}{6} \in O(n^3)$ et $n^3 \in O\left(\frac{n^3+3n^2+2n}{6}\right)$, nous avons montré que $\frac{n^3+3n^2+2n}{6} \in \Theta(n^3)$. Ainsi il en découle que :

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} i \in \Theta(n^3)$$