POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 3 : INFÉRENCE ET TECHNIQUES DE PREUVES

E2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1

Michel-Ange est un célèbre peintre italien qui a vécu au XVIe siècle. Il est connu pour ses fresques à la chapelle Sixtine. En se préparant pour une nouvelle œuvre d'art, Michel-Ange essaie de se rappeler les couleurs de peinture qu'il a emportées. Il se souvient que :

(I.) Il n'a pas de blanc
(II.) Il a toujours du jaune lorsqu'il n'a pas de vert
(III.) S'il a du rouge, alors il n'a ni marron ni noir
(IV.) Des trois couleurs : vert, blanc et rouge, il en a au moins deux
(V.) Des deux couleurs : noir et gris, il en a exactement une

On suppose qu'il n'a jamais d'autres couleurs que celles citées. Quelle(s) couleur(s) a-t-il emportée(s) avec certitude ? Qu'en est-il des autres couleurs ? Montrez toutes les étapes de votre réponse.

Solution :

Pour résoudre ce problème, nous allons définir les propositions suivantes :

- B : Michel-Ange a du blanc
- J : Michel-Ange a du jaune
- V : Michel-Ange a du vert
- R : Michel-Ange a du rouge
- M : Michel-Ange a du marron
- N : Michel-Ange a du noir
- G : Michel-Ange a du gris

Ensuite, nous pouvons traduire les énoncés en utilisant ces propositions.

$H1 : \neg B$
$H2 : \neg V \rightarrow J$
$H3 : R \rightarrow (\neg M \wedge \neg N)$
$H4 : (V \wedge B) \vee (V \wedge R) \vee (B \wedge R)$
$H5 : N \oplus G$

Maintenant, nous allons utiliser les règles d'inférence pour déduire les couleurs de peinture que Michel-Ange a emportées avec certitude. Le raisonnement est le suivant :

1.	$\neg B$	$H1$
2.	$(V \wedge B) \vee (V \wedge R) \vee (B \wedge R)$	$H4$
3.	$(V \wedge R)$	Étapes 1 et 2 et résolution
4.	R	Étape 3 et règle de la simplification
5.	$R \rightarrow (\neg M \wedge \neg N)$	$H3$
6.	$(\neg M \wedge \neg N)$	Étapes 4 et 5 et règle du modus ponens
7.	$\neg N$	Étape 6 et règle de la simplification
8.	$\neg M$	Étape 6 et règle de la simplification

À partir des étapes 1, 7 et 8, nous pouvons affirmer avec certitude qu'il y n'y a pas de blanc, de noir ou de marron.

9. $N \oplus G$	$H5$
10. G	Étapes 7 et 9 et définition de $\oplus$
11. $(V \wedge R \wedge G)$	Étapes 3 et 10 et règle de la conjonction

Nous pouvons ainsi conclure que Michel-Ange a les couleurs de peinture suivantes avec certitude : vert, rouge et gris.

12. V	Étape 11 et règle de la simplification
13. $\neg J \rightarrow V$	Contraposée de $H2$

Cependant, nous ne pouvons pas déduire jaune, car avec les étapes 11 et 12, $([V \wedge (\neg J \rightarrow V)] \rightarrow \neg J)$ n'est pas une tautologie et correspond à un sophisme, plus précisément à l'affirmation du conséquent, ce qui n'est pas une règle d'inférence valide.

En somme, nous pouvons conclure avec certitude que Michel-Ange a les couleurs de peinture suivantes : vert, rouge et gris. De plus, nous pouvons affirmer avec certitude qu'il n'y a pas de blanc, de marron ou de noir. Cependant, nous ne pouvons pas conclure que Michel-Ange a emporté la couleur jaune.

Exercice 2

Lors d'une galerie d'art au Musée des beaux-arts de Montréal. Salomé fait le raisonnement suivant :

(I.) Un artiste dans cette galerie n'a pas utilisé de pinceaux
(II.) Tous les artistes dans cette galerie ont vendu au moins une œuvre
(III.) Donc, quelqu'un qui a vendu au moins une œuvre n'a pas utilisé de pinceaux

Montrez que le raisonnement de Salomé est valide. Présentez toutes les étapes de votre réponse.

Utilisez

- les fonctions propositionnelles suivantes :
    - $G(x)$: « x est dans cette galerie »
    - $P(x)$: « x a utilisé des pinceaux »
    - $O(x)$: « x a vendu au moins une œuvre »

- les prémisses :
  $H1 : \exists x\big(G(x) \wedge \neg P(x)\big)$
  $H2 : \forall x\big(G(x) \rightarrow O(x)\big)$

- et la conclusion :
  $C : \exists x\big(O(x) \wedge \neg P(x)\big)$

Solution :

Soit a un artiste arbitraire.

1. $\exists x\big(G(x) \land \neg P(x)\big)$ — $H1$
2. $G(a) \land \neg P(a)$ — Instanciation existentielle de l'étape 1
3. $G(a)$ — Étape 2 et règle de la simplification
4. $\forall x\big(G(x) \to O(x)\big)$ — $H2$
5. $G(a) \to O(a)$ — Instanciation universelle de l'étape 4
6. $O(a)$ — Étapes 3 et 5 et règle du modus ponens
7. $\neg P(a)$ — Étape 2 et règle de la simplification
8. $O(a) \land \neg P(a)$ — Étapes 6 et 7 et règle de la conjonction
9. $\exists x\big(O(x) \land \neg P(x)\big)$ — Généralisation existentielle de l'étape 8

Le raisonnement de Salomé est donc valide.
CQFD

Exercice 3

En utilisant la preuve par cas, démontrez que si $x \in \mathbb{R}$, alors $0 \leq \frac{x+|x|}{2} \leq |x|$.

Solution :

Les deux cas sont :

- **Cas 1)** $x \geq 0$
- **Cas 2)** $x < 0$

Cas 1) $x \geq 0$
On le fait avec une preuve directe :
Par hypothèse, $x \geq 0$.
Dans ce cas, $|x| = x$.
Donc,
$$\frac{x+|x|}{2} = \frac{x+x}{2} = \frac{2x}{2} = x$$
D'une part, comme $x \geq 0$, on a $x \geq 0$ et donc $\frac{x+|x|}{2} \geq 0$.
Et d'autre part, on a également $x \leq |x|$, donc $\frac{x+|x|}{2} \leq |x|$.
Ainsi dans ce cas, $0 \leq \frac{x+|x|}{2} \leq |x|$ est vraie.

Cas 2) $x < 0$
On le fait avec une preuve directe :
Par hypothèse, $x < 0$.

Dans ce cas, $|x| = -x$.

Donc, $\frac{x+|x|}{2} = \frac{x+(-x)}{2}$

$= \frac{x-x}{2}$

$= 0$

Comme $x < 0$, on a également $|x| = -x > 0$, donc $\frac{x+|x|}{2} \leq |x|$.

Ainsi dans ce cas, $0 \leq \frac{x+|x|}{2} \leq |x|$ est également vraie.

Dans les deux cas, nous avons montré que $0 \leq \frac{x+|x|}{2} \leq |x|$.

Par conséquent, nous avons démontré que si $x \in \mathbb{R}$, alors $0 \leq \frac{x+|x|}{2} \leq |x|$.

CQFD

Exercice 4

En utilisant la preuve directe, démontrez que la moyenne de deux nombres rationnels q_1 et q_2 est aussi un nombre rationnel.

Indication :

Un nombre q est rationnel si et seulement s'il existe deux entiers $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ tels que $q = \frac{a}{b}$.

Solution :

Supposons par hypothèse que q_1 et q_2 sont des nombres rationnels.

Il existe donc des entiers a_1, b_1, a_2, b_2 tels que $q_1 = \frac{a_1}{b_1}$ et $q_2 = \frac{a_2}{b_2}$.

Si on note m la moyenne des nombres q_1 et q_2, on obtient :

$m = \frac{q_1+q_2}{2}$

$= \frac{\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}}{2}$

$= \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{2b_1b_2}$

$= \frac{a'}{b'}$, en posant $a' = a_1b_2 + a_2b_1$ et $b' = 2b_1b_2$ qui sont des entiers

Donc, il existe des entiers a' et b' tels que m$= \frac{a'}{b'}$.

Ainsi, la moyenne de q_1 et q_2 est un nombre rationnel.

CQFD

Exercice 5

Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la preuve par contradiction (preuve par l'absurde), démontrez que si x^2 n'est pas un multiple entier de 16, alors $\frac{x}{2}$ n'est pas un entier pair.

Solution :

Puisqu'on suggère une preuve par l'absurde, on doit supposer l'hypothèse vraie et la conclusion fausse pour arriver à une contradiction, donc que :

x^2 n'est pas un multiple entier de 16 et $\frac{x}{2}$ est un entier pair.

Supposons donc par hypothèse que $\frac{x}{2}$ est pair.
Il existe donc un entier k tel que $\frac{x}{2} = 2k$.
Donc, que $\frac{x}{2} = 2k$ $\equiv x = 4k$
$\equiv x^2 = (4k)^2$
$\equiv x^2 = 16\,k^2$
On a donc que x^2 est un multiple entier de 16.
Cela contredit l'hypothèse comme quoi x^2 n'est pas un multiple entier de 16, ce qui est absurde.
Il faut donc, si x^2 n'est pas un multiple entier de 16, alors $\frac{x}{2}$ n'est pas un entier pair.
CQFD

Exercice 6

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. En utilisant la preuve par contraposition (preuve indirecte), démontrez que

$$(\alpha + \beta) \geq 2 \rightarrow [(\alpha \geq 1) \vee (\beta \geq 1)]$$

Solution :

Puisqu'on suggère une preuve par contraposition, on démontrera la contraposée :

$$[(\alpha < 1) \wedge (\beta < 1)] \rightarrow (\alpha + \beta) < 2$$

Supposons donc par hypothèse que $(\alpha < 1) \wedge (\beta < 1)$ est vraie.
D'après la règle de la simplification, $(\alpha < 1)$ est vraie et $(\beta < 1)$ est aussi vraie.
Donc, la somme des deux inégalités donne $(\alpha + \beta) < 2$.
La conséquence de la contraposée est donc vraie.
Ainsi par contraposition, $(\alpha + \beta) \geq 2 \rightarrow [(\alpha \geq 1) \vee (\beta \geq 1)]$.
CQFD

Exercice 7.

Soit a < b des nombres rationnels. En utilisant la preuve par contradiction (preuve par l'absurde), démontrez qu'il existe une infinité de nombres rationnels x satisfaisant a < x < b.

Solution :

Puisqu'on suggère une preuve par l'absurde, on doit supposer l'hypothèse vraie et la conclusion fausse pour arriver à une contradiction, donc que :

a < b sont rationnels mais il existe seulement un nombre fini de nombres rationnels x satisfaisant a < x < b.

Supposons donc par hypothèse que a < b sont rationnels et qu'il existe seulement un nombre fini de nombres rationnels x tels que a < x < b.
Notons n la quantité de tous ces nombres x, et notons ces x en ordre croissant : $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$.
Donc, x_1 est le plus petit de tous les nombres rationnels x tels que a < x < b.
Soit $x' = \frac{a+x_1}{2}$ la moyenne des nombres rationnels a et x_1.
On a donc que x' est rationnel (car il est la moyenne de deux nombres rationnels), $a < x' < x_1$ (car la moyenne de deux nombres réels distincts est strictement comprise entre ces nombres) et donc
$a < x' < x_1 < b$.
Cela contredit que x_1 est le plus petit des nombres rationnels x tels que a < x < b.
Il faut donc que, si a < b rationnels, qu'il existe une infinité de nombres rationnels x tels que a < x < b.
CQFD