POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 3 : LOGIQUE PROPOSITIONNELLE

A2022

Directives pour la remise :

- Répondez directement sur ce document papier.
- La remise est individuelle, mais le travail en équipe est encouragé.
- La remise se fait à la fin de la séance de TD.
- **Aucun retard ne sera accepté.**
- **Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.**

Identification

Veuillez inscrire votre section, nom, prénom et matricule ainsi que les noms des collègues avec lesquels vous avez collaboré pour le TD

Section :

Nom :

Prénom :

Matricule :

Collègues :

Exercice 1 :

Soit l’univers des humains. Déterminez les raisonnements qui sont logiquement valides et ceux qui ne le sont pas. Justifiez vos réponses.

Note : Il n’est pas nécessaire ici de traduire les énoncés en propositions logiques.

a)

1. Tous les élèves sont en confinement
2. Or Simon est en confinement
3. Donc Simon est un élève

Réponse:

Raisonnement non valide. Simon peut ne pas être un élève et être en confinement.

b)

1. Aucun élève n’est en confinement
2. Or Simon n’est pas en confinement
3. Donc Simon est un élève

Réponse:

Raisonnement non valide. Simon peut ne pas être un élève. Le fait qu’il ne soit pas en confinement ne suffit pas pour conclure qu’il est un élève

c)

1. Il y a des élèves qui s’appellent Simon
2. Or tous les Simon sont en confinement
3. Donc certains élèves sont en confinement

Réponse :

Raisonnement valide. Si tous les Simon sont en confinement, alors ceux d’entre eux qui sont des élèves sont en confinement. Il existe donc des élèves en confinement.

d)

1. Tous les élèves s'appellent Simon
2. Or certains Simon ne sont pas en confinement
3. Donc certains élèves sont en confinement

Réponse :

Raisonnement non valide. Tous les Simon ne sont pas nécessairement des élèves. Donc on pourrait avoir tous les élèves (nommés Simon) pas en confinement, et d'autres Simons (pas des élèves) qui sont en confinement. Autrement dit, le fait que tous les élèves s'appellent Simon ne suffit pas pour conclure que certains élèves sont en confinement.

Exercice 2 :

Soit le raisonnement suivant au sujet d'une rencontre.
H1 : Quand Marie est là, c'est qu'elle accompagne Paul ou Jean.
H2 : Paul ne vient jamais en même temps que son cousin Serge.
H3 : Si Jean et Serge viennent tous les deux, leur sœur Louise les accompagne.
H4 : Si Louise se pointe, Raoul ne reste pas.
H5 : Hier, Raoul et Serge étaient présents jusqu'à la fin.

On considère également les définitions suivantes.

- M : Marie est présente à la rencontre
- P : Paul est présent à la rencontre
- J : Jean est présent à la rencontre
- S : Serge est présent à la rencontre
- L : Louise est présente à la rencontre
- R : Raoul est présent à la rencontre

a) En utilisant les définitions ci-dessus, traduisez les hypothèses énoncées en logique mathématique.

Réponse :

- Quand Marie est là, c'est qu'elle accompagne Paul ou Jean.
  - H1 : $M \rightarrow (P \vee J)$

- Paul ne vient jamais en même temps que son cousin Serge.
  - o H2 : P ⊕ S
    - Note : peut aussi se traduire par ¬(P ∧ S), sans que cela change la réponse pour la question 2.
- Si Jean et Serge viennent tous les deux, leur sœur Louise les accompagne.
  - o H3 : (J ∧ S) → L
- Si Louise se pointe, Raoul ne reste pas.
  - o H4 : L → ¬ R
- Hier, Raoul et Serge étaient présents jusqu'à la fin.
  - o H5 : (R ∧ S)

b) Peut-on conclure que Marie n'était pas présente à la rencontre ? Pour répondre à la question, vous utiliserez les hypothèses définies à la question a) et vos connaissances des règles d'inférence.

Réponse :
Soit C la conclusion Marie n'était pas présente à la rencontre. On a :

C : ¬ M

Le raisonnement est le suivant.

1. R ∧ S	H5
2. R	1 et règle de simplification
3. S	1 et règle de simplification
4. L → ¬R	H5
5. ¬L	2, 4 et règle du modus tollens
6. (J ∧ S) → L	H3
7. ¬(J ∧ S)	5, 6 et règle du modus tollens
8. ¬J ∨ (¬S)	7 et Loi de De Morgan
9. ¬J	3, 8 et règle du syllogisme disjonctif
10. P ⊕ S	H2
11. ¬P	3, 10 et Définition de ⊕
12. ¬J ∧ ¬P	9, 11 et règle de conjonction
13. ¬(J ∨ P)	12 et loi de De Morgan
14. ¬(P ∨ J)	14 et loi de commutativité de ∨
15. M → (P ∨ J)	H1
16. ¬ M	14, 15 et règle du modus tollens

On peut donc conclure que Marie n'était pas présente à la rencontre.

Exercice 3 :

Soit n un entier positif. En utilisant la preuve directe, démontrez que :

n est impair si et seulement si 5n + 2 est impair

Réponse :

Il s'agit de démontrer une biconditionnelle. Il nous faut donc démontrer 2 implications :

- Si 5n + 2 est impair, alors n est impair
- Si n est impair, alors 5n + 2 est impair

Démontrons l'implication si n est impair, alors 5n+2 est impair, en utilisant la preuve directe.
Supposons que n est impair. Il existe un entier k tel que n = 2k+1.
Ainsi, 5n+2 =10k +5+ 2 = 10k+6+1=2(5k + 3) +1
5n+2 est donc impair.
L'implication si n est impair alors 5n + 2 est impair est ainsi prouvée.

Démontrons l'implication si 5n+2 est impair alors n est impair, en utilisant la preuve directe.
Supposons que 5n + 2 est impair.
2 étant pair et 5n+2 impair, on a 5n est impair.
5 étant impair et 5n impair, il s'en suit que n est impair.
L'implication si 5n+2 est impair alors n est pair est ainsi prouvée.

Les deux implications étant prouvées, nous pouvons conclure que n est pair si et seulement si 5n+2 est pair.

Exercice 4 :
Soient a et b deux réels positifs. En utilisant la preuve par contradiction (raisonnement par l'absurde), montrez que :

$$Si\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}alorsa=b$$

Réponse :
Raisonnons par l'absurde. Supposons que l'implication

$$Si\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}alorsa=b$$

est fausse. C'est-à-dire :

$$\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}\wedge a\neq b$$

a et b étant positifs, 1 + b et 1+ a sont non nuls.
On a :

a(1+a) = b(1+b)
a + a^2 = b + b^2
(a-b) + (a^2 – b^2) = 0
(a - b) + (a - b)(a + b) = 0
(a - b)(1 + a + b) = 0
Puisque a ≠b, on a (1 + a + b) = 0
Soit a + b = -1.
Or a et b sont tous positifs. Leur somme ne peut pas être négative.
Contradiction.
D'où :

$$Si\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}\ alors\ a=b$$

Exercice 5 :

En utilisant la preuve indirecte (preuve par contraposition), démontrez que :

Si l'entier (n^2 - 1) n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

Réponse :

Il s'agit de démontrer une implication par la preuve indirecte. Ce qui revient à faire la preuve directe de la contraposée de cette implication, c'est-à-dire :

Si l'entier n n'est pas pair, alors l'entier (n2 - 1) est divisible par 8.

Ou encore

Si l'entier n est impair, alors l'entier (n2 - 1) est divisible par 8.

Supposons que n est impair.
Il existe un entier k tel que n=2.k + 1. On a alors (n^2 – 1)= 4k2 +4k =4k(k+1).
k étant un entier, lorsqu'il est pair (K+1) est impair et leur produit est toujours pair.
Aussi, lorsqu'il est impair, (K+1) est pair et leur produit est toujours pair.
On en déduit que 4k(k+1) est multiple de 8 et qu'ainsi (n2 - 1) est divisible par 8.
D'où, Si l'entier (n2 - 1) n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

Exercice 6 :

Montrer que les affirmations suivantes sont fausses.

a) Si la somme des chiffres d'un nombre entier naturel est un multiple de 6, alors le nombre est un multiple de 6.

Réponse :

Il suffit de prendre 33 : 3+3 = 6 mais 33 = 6*5 + 3

b) Tous les nombres de la forme 6k+1 ou 6k-1 avec k>0, sont premiers.

Réponse :

Pour k = 9, on a 6*9+1 = 55 , et 55 est un multiple de 5.

Exercice 7 :

Soit m et n deux entiers. En utilisant la preuve par cas, démontrez que :

Soit n.m est pair, soit n^2-m^2 est multiple de 8

Indication : utiliser « sans perte de généralité » vous permettra de diminuer le nombre de cas à étudier

Réponse :

L'univers est celui des entiers. Il est demandé de démontrer que

$\forall n\ \forall m$, ((n.m est pair) $\vee$ (n^2-m^2 est multiple de 8))

Il suffit de démontrer, après avoir identifié les cas, que l'une des deux propositions (n.m est pair) et (n^2-m^2 est multiple de 8) est vraie.

- Si n et m sont tous deux pairs, alors (n.m) est pair en tant que produit de deux entiers pairs.
- Si l'un des 2 entiers est pair et l'autre impair, alors (n.m) est pair en tant produit d'un entier pair par un autre entier.

Sans perte de généralité, on peut aussi considérer n pair et m impair pour faire cette partie de la preuve.

▪ Si n et m sont tous deux impairs, on peut écrire que n=2k+1 et m=2p+1, k et p étant des entiers.
Ainsi, $n^2-m^2 = (4k^2 + 4k + 1) - (4p^2 + 4p + 1)$
On obtient successivement :
$n^2-m^2 = 4k^2 + 4k - 4p^2 - 4p$
$n^2-m^2 = (4k^2 - 4p^2) + (4k - 4p)$
$n^2-m^2 = 4 (k - p) (k+ p) + 4 (k - p)$
$n^2-m^2 = 4(k - p)(k+ p +1)$

- Si k est impair et p est impair alors (k-p) est pair.

On en déduit que $4(k - p)(k+ p +1)$ est multiple de 8 et que n^2-m^2 est ainsi multiple de 8.

- Si k est impair et p est pair alors (k+p) est impair, ce qui donne (k+ p +1) pair.

On en déduit que $4(k - p)(k+ p +1)$ est multiple de 8 et que n^2-m^2 est ainsi multiple de 8.

- Si k est pair et p est impair alors (k+p) est impair, ce qui donne (k+ p +1) pair.

On en déduit que $4(k - p)(k+ p +1)$ est multiple de 8 et que n^2-m^2 est ainsi multiple de 8.

Ce cas et le cas précédent peuvent être combinés ensembles, sans perte de généralité, en fixant juste l'un deux entiers pair et l'autre impair.

- Si k est pair et p est pair alors (k-p) est pair.

On en déduit que $4(k - p)(k+ p +1)$ est multiple de 8 et que n^2-m^2 est ainsi multiple de 8.

Ce cas et le cas premier peuvent être combinés ensemble, sans perte de généralité, en fixant juste les deux entiers soit tous pairs et soit tous impairs.

Note : Dans le cas d'espèce, il est erroné de l'interpréter en utilisant le OU Exclusif. Un contre-exemple n=12 et m=8 suffit à vous convaincre. 96 est pair et144-64=80 est multiple de 8 .