POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 2 : LOGIQUE DES PRÉDICATS

E2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1

Soit les propositions suivantes pour l'univers des nombres réels :

- $P(x) : |x| > 5$
- $Q(x) : x > 5$
- $R(x) : x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

a) Déterminez la valeur de vérité de $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$. Justifiez votre réponse.

Solution :

$\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$ est fausse, car il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x)$ est vraie et $Q(x)$ est fausse.
Par exemple, $P(-6) : |-6| > 5$ est vraie, car $|-6| = 6$ et $6 > 5$.
Cependant, $Q(-6) : -6 > 5$ est fausse, car $-6 < 5$.
Ainsi, nous avons trouvé un contre-exemple où la prémisse est vraie et la conclusion est fausse.
D'où, la proposition $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$ est fausse.

b) Donnez la réciproque de **a)** et déterminez sa valeur de vérité. Justifiez votre réponse.

Solution :

La réciproque de **a)** est $\forall x[Q(x) \rightarrow P(x)]$, ce qui est vrai.
En effet, $(x > 5) \rightarrow (|x| > 5)$, car $|x| = x$ lorsque $x > 5$.
Lorsque $Q(x) : x > 5$ est vraie, alors $P(x) : |x| > 5$ est vraie.
De plus, si $Q(x)$ est fausse $(x \leq 5)$, l'implication est systématiquement vraie.
L'implication $Q(x) \rightarrow P(x)$ n'est donc jamais fausse, peu importe la valeur de x.

c) Donnez l'inverse de **b)** et déterminez sa valeur de vérité. Justifiez votre réponse.

Solution :

L'inverse de **b)** est $\forall x[\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x)]$, ce qui est faux, car il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $\neg Q(x) : x \leq 5$ est vraie et $\neg P(x) : |x| \leq 5$ est fausse.
Par exemple, si $x = -6$, alors $\neg Q(x) : x \leq 5$ est vraie $(-6 \leq 5)$, mais $\neg P(x) : |x| \leq 5$ est fausse $(|-6| = 6$ et $6 > 5)$.

d) Déterminez la valeur de vérité de $\forall x[R(x) \rightarrow \neg Q(x)]$. Montrez toutes les étapes de votre réponse.

Solution :

$$
\begin{aligned}
\forall x[R(x) \rightarrow \neg Q(x)] \quad &\equiv \forall x[(x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0) \rightarrow (x \leq 5)] \\
&\equiv \forall x\big[\big((x-1)(x-2)(x-3) = 0\big) \rightarrow (x \leq 5)\big] \\
&\equiv \forall x\big[\big((x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3)\big) \rightarrow (x \leq 5)\big] \\
&\equiv VRAI
\end{aligned}
$$

Exercice 2

Soit $\boldsymbol{U}$ l'univers des investisseurs et des actifs financiers et soit les fonctions propositionnelles suivantes :

- $Possède(x, y)$: L'investisseur x possède l'actif financier y
- $Risque(x, y)$: L'actif financier y est risqué pour l'investisseur x
- $A(x)$: L'actif financier x est une action
- $O(x)$: L'actif financier x est une obligation
- $P(x)$: L'investisseur x est une personne physique
- $S(x)$: L'investisseur x est une société

Traduisez en logique des prédicats les énoncés suivants.

a) Tous les investisseurs qui possèdent des actions risquées sont des sociétés.

Solution :

$\forall x \forall y [Possède(x, y) \land A(y) \land Risque(x, y) \rightarrow S(x)]$

b) Certains investisseurs ont des obligations qui ne sont pas forcément risquées en portefeuille.

Solution :

$\exists x \exists y \big[Possède(x, y) \land O(y) \land \big(Risque(x, y) \oplus \neg Risque(x, y)\big)\big]$

c) Tous les investisseurs physiques qui ont des obligations risquées dans leur portefeuille ont également des obligations sans risque.

Solution :

$\forall x \forall y \big[P(x) \land Possède(x, y) \land O(y) \land Risque(x, y) \rightarrow \exists z \big(Possède(x, z) \land O(z) \land \neg Risque(x, z)\big)\big]$

d) Aucune société ne possède d'obligations qui comportent un risque dans leur portefeuille.

Solution :

Plusieurs réponses possibles.

- $\neg(\exists x \exists y [S(x) \land Possède(x, y) \land O(y) \land Risque(x, y)])$
- $\forall x \forall y \neg [S(x) \land Possède(x, y) \land O(y) \land Risque(x, y)]$
- $\forall x \forall y \big[\big(S(x) \land Possède(x, y) \land O(y)\big) \rightarrow \neg Risque(x, y)\big]$

Exercice 3

On considère l'univers des transports et des livraisons de colis. Et soit :

- $Colis(x)$: x est un colis
- $Fragile(x)$: x est fragile
- $Camion(y)$: y est un camion
- $Transporter(x, y)$: x est transporté par y

Traduisez en langage courant, en utilisant les fonctions propositionnelles ci-dessus, chacun des énoncés de logique des prédicats suivants.

a) $\forall x\big[Colis(x) \wedge Fragile(x) \rightarrow \exists y\big(Camion(y) \wedge Transporter(x, y)\big)\big]$

Solution :

Plusieurs formulations possibles :

- Tous les colis fragiles sont transportés par au moins un camion.
- Tous les colis fragiles sont transportés par un camion.
- Tous les colis fragiles sont transportés par camion.
- Si un colis est fragile, alors il est transporté par au moins un camion.
- Si un colis est fragile, alors il est transporté par un camion.
- Si un colis est fragile, alors il est transporté par camion.

b) $\neg(\forall x[Colis(x) \rightarrow Fragile(x)])$

Solution :

Plusieurs formulations possibles :

- Il y a au moins un colis qui n'est pas fragile.
- Il existe un colis qui n'est pas fragile.
- Certains colis ne sont pas fragiles.

c) $\exists x \exists y[Colis(x) \wedge Camion(y) \wedge \neg Transporter(x, y)]$

Solution :

Plusieurs formulations possibles :

- Il y a un colis qui n'est pas transporté par un camion donné.
- Il y a un colis qui n'est pas transporté par un certain camion.
- Il existe un colis et un camion tels que le colis n'est pas transporté par le camion.

d) $\forall y\big[Camion(y) \rightarrow \forall x\big(Colis(x) \wedge Transporter(x, y) \rightarrow Fragile(x)\big)\big]$

Solution :

Plusieurs formulations possibles :

- Tous les colis transportés par un camion sont fragiles
- Si un camion transporte un colis, alors le colis est fragile.

Exercice 4

Soit V l'univers des voyageurs à destination d'un pays étranger. Énoncez en langage courant la négation des phrases suivantes. Vous n'avez pas besoins de donner la traduction en logique des prédicats.

a) Certains voyageurs de ce pays ont besoin d'un visa pour entrer dans ce pays étranger.

Solution :

Plusieurs formulations possibles :

- Tous les voyageurs de ce pays n'ont pas besoin d'un visa pour entrer dans ce pays étranger.
- Les voyageurs de ce pays n'ont pas besoin d'un visa pour entrer dans ce pays étranger.
- Aucun voyageur de ce pays n'a besoin d'un visa pour entrer dans ce pays étranger.

b) Dans tous les aéroports de ce pays étranger, il y a des boutiques hors taxes.

Solution :

Plusieurs formulations possibles :

- Dans certains aéroports de ce pays étranger, il n'y a pas de boutique hors taxes.
- Il y a au moins un aéroport dans ce pays étranger qui n'a pas de boutique hors taxes.
- Il existe au moins un aéroport dans ce pays étranger qui n'a pas de boutique hors taxes.

c) Les voyageurs de ce pays peuvent entrer dans ce pays étranger sans aucune restriction.

Solution :

Plusieurs formulations possibles :

- Il y a des voyageurs de ce pays qui ne peuvent pas entrer dans ce pays étranger sans restriction.
- Il existe des voyageurs de ce pays qui ne peuvent pas entrer dans ce pays étranger sans restriction.
- Certains voyageurs de ce pays ne peuvent pas entrer dans ce pays étranger sans restriction.

d) Il existe un et un seul hôtel dans ce pays étranger qui n'est pas complet en haute saison.

Solution :

- Il n'y a aucun hôtel dans ce pays étranger qui ne soit pas complet en haute saison ou il y a plusieurs hôtels dans ce pays étranger qui ne soit pas complet en haute saison.

- Il n'existe aucun hôtel dans ce pays étranger qui ne soit pas complet en haute saison ou il existe plusieurs hôtels dans ce pays étranger qui ne soit pas complet en haute saison.

Exercice 5

On considère une fonction propositionnelle $\boldsymbol{R(x,y)}$ et les six propositions suivantes :

- P_1 : $\forall x \forall y\ R(x,y)$
- P_2 : $\exists x \exists y\ R(x,y)$
- P_3 : $\forall x \exists y\ R(x,y)$
- P_4 : $\exists x \forall y\ R(x,y)$
- P_5 : $\forall y \exists x\ R(x,y)$
- P_6 : $\exists y \forall x\ R(x,y)$

Remplissez le tableau ci-dessous en indiquant si la proposition composée $\boldsymbol{P_i \to P_j}$ est vraie ou fausse pour tout couple de propositions $(\boldsymbol{P_i, P_j})$ avec $\boldsymbol{i, j} = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, peu importe la fonction propositionnelle $\boldsymbol{R(x,y)}$ et l'univers de discours (à l'exception de l'univers vide).

Solution :

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI
2	FAUX	VRAI	FAUX	FAUX	FAUX	FAUX
3	FAUX	VRAI	VRAI	FAUX	FAUX	FAUX
4	FAUX	VRAI	FAUX	VRAI	FAUX	FAUX
5	FAUX	VRAI	FAUX	FAUX	VRAI	FAUX
6	FAUX	VRAI	FAUX	FAUX	FAUX	VRAI

Exercice 6

Pour une proposition de la forme $\exists x[P(x) \to Q(x)]$, peut-on démontrer que cette proposition est fausse par un contre-exemple ? Justifiez votre réponse.

Solution :

Non, un contre-exemple ne suffit pas pour démontrer que la proposition est fausse, sauf dans le cas trivial où l'ensemble des x à considérer dans l'univers du discours contient un seul élément.

En général, pour prouver que de $\exists x[P(x) \to Q(x)]$ est fausse, il faut montrer que $\forall x[P(x) \wedge \neg Q(x)]$ est vraie pour tout x dans l'univers du discours. Cependant, même si un exemple vérifie cette condition, cela ne suffit pas à prouver que la proposition est fausse pour tous les x de l'univers du discours.

Exercice 7

Donnez un contre-exemple afin de démontrer que les expressions ci-dessous ne sont pas logiquement équivalentes.

- $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
- $\exists x\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$

Solution :

Si P est le prédicat « être un nombre pair » et Q le prédicat « être un nombre impair », alors la première expression nous dit qu'il existe un nombre pair et qu'il existe un nombre impair, mais pas nécessairement le même nombre.

Cependant, la deuxième expression nous dit qu'il existe un nombre qui est à la fois pair et impair, ce qui est impossible.

Un univers qui contient des nombres pairs et des nombres impairs, mais aucun nombre qui est à la fois pair et impair serait un contre-exemple.