POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

CONTRÔLE PÉRIODIQUE 1

A2022

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 (**2 points)**

Soit l'univers des animaux de compagnie d'une maison. Énoncez en langage courant la négation des phrases suivantes. Vous n'avez pas besoin de donner la traduction en expression logique.

a. (**1 point)** Les seuls animaux dans cette maison sont des chats.

Réponse :

- Les seuls animaux dans cette maison ne sont pas des chats.
- Les chats ne sont pas les seuls animaux dans cette maison.

b. (**1 point)** Aucun chat ne manque jamais de pourchasser les souris.

Réponse :

Formulations équivalentes :

- Il y a au moins un chat qui manque de pourchasser les souris.
- Il y a au moins un chat qui ne pourchasse pas les souris.
- Il arrive qu'un chat ne pourchasse pas les souris.
- Il peut arriver qu'un chat ne pourchasse pas les souris.

Exercice 2 (**2 points)**

Soit les fonctions propositionnelles suivantes :

- $C(x)$: *«x est une explication Claire » ;*
- $S(x)$: *«x est satisfaisant » ;*
- $E(x)$: *«x est une excuse ».*

L'univers du discours est l'ensemble de tous les textes en français. Exprimez chacun des énoncés suivants à l'aide de quantificateurs, de connecteurs logiques, de *C(x)*, *S(x)* et *E(x)*.

a. **(1 point)** Toutes les explications claires sont satisfaisantes.

Réponse :

- $\forall x\ C(x) \rightarrow S(x)$

b. **(1 point)** Certaines excuses sont insatisfaisantes.

Réponse :

- $\exists x\ E(x) \rightarrow \neg S(x)$

Exercice 3 (**3.5 points)**

En utilisant la technique de dérivation, montrez que :

$$[(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)] \equiv (P \rightarrow Q)$$

Justifiez toutes les étapes de votre preuve.

Réponse :

Dérivons l'expression de gauche.

$[(P \land Q) \lor (\neg P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)] \equiv (P \land Q) \lor [(\neg P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)]$	Associativité
$[(P \land Q) \lor (\neg P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)] \equiv (P \land Q) \lor ([\neg P \lor (\neg P \land \neg Q)] \land [Q \lor (\neg P \land \neg Q)])$	Distributivité
$[(P \land Q) \lor (\neg P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)] \equiv (P \land Q) \lor (\neg P \land [Q \lor (\neg P \land \neg Q)])$	Absorption
$[(P \land Q) \lor (\neg P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)] \equiv (P \land Q) \lor (\neg P \land [(Q \lor \neg P) \land (Q \lor \neg Q)])$	Distributivité
$[(P \land Q) \lor (\neg P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)] \equiv (P \land Q) \lor (\neg P \land [(Q \lor \neg P) \land \text{VRAI}])$	Loi de négation
$[(P \land Q) \lor (\neg P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)] \equiv (P \land Q) \lor (\neg P \land (Q \lor \neg P))$	Loi d'identité
$[(P \land Q) \lor (\neg P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)] \equiv (P \land Q) \lor (\neg P)$	Absorption
$[(P \land Q) \lor (\neg P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)] \equiv (P \lor \neg P) \land (Q \lor \neg P)$	Distributivité
$[(P \land Q) \lor (\neg P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)] \equiv \text{VRAI} \land (Q \lor \neg P)$	Loi de négation
$[(P \land Q) \lor (\neg P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)] \equiv (Q \lor \neg P)$	Loi d'identité
$[(P \land Q) \lor (\neg P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)] \equiv (\neg P \lor Q)$	Commutativité
$[(P \land Q) \lor (\neg P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)] \equiv (P \rightarrow Q)$	Équivalence de l'implication

CQFD

Exercice 4 (**4.5 points)**

Soient ***E* = {*a, b, c, d*}** et **F = {1, 2, 3, 4}** deux ensembles. Dans chaque cas, précisez s'il s'agit (i) d'une fonction, (ii) d'une fonction injective, (iii) d'une fonction surjective ou (iv) d'une fonction bijective définie de **E** vers **F**. Vous devez justifier vos réponses pour chacune des propriétés de manière claire et concise.

a. **(1.5 point) {**(*a*, 4), (*b*, 4), (*c*, 3), (*b*, 2), (*d*, 1)**}**

Réponse :

i. **Fonction** : NON. L'élément b de E est associé à deux éléments de F : 4 et 2.
ii. **Fonction injective** : NON. N'étant pas une fonction.
iii. **Fonction surjective** : NON. N'étant pas une fonction.
iv. **Fonction bijective** : NON. N'étant pas une fonction, ou n'étant ni une fonction injective, ni une fonction surjective.

b. **(1.5 point) {**(*a*, 1), (*b*, 3), (*d*, 2)**}**

Réponse :

i. **Fonction** : OUII. Les éléments a, b et d de E sont associés chacun à exactement un élément de F. De plus, l'élément c de E n'est associé à aucun élément de F.
ii. **Fonction injective** : NON. L'élément c de E n'a pas d'image.
iii. **Fonction surjective** : NON. L'élément 4 de F n'a pas d'antécédent (pré-image) dans E.
iv. **Fonction bijective** : NON. Elle n'est ni une fonction injective, ni une fonction surjective.

c. **(1.5 point) {**(*a*, 3), (*b*, 2), (*c*, 1), (*d*, 4)**}**

Réponse :

i. **Fonction** : OUI. Les éléments a, b, c et d de E sont associés chacun à exactement un élément de F.
ii. **Fonction injective** : OUI. Chaque élément de E a une image distincte de celle des autres éléments de E.
iii. **Fonction surjective** : OUI. Chaque élément de F a au moins un antécédent (pré-image) dans E.
iv. **Fonction bijective** : OUI. Étant une fonction injective et une fonction surjective, elle est une fonction bijective.

Exercice 5 (**4 points)**
Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.
Note : $|x|$ est la valeur absolue de x.

Réponse :
Utilisons une preuve pas cas.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- **Cas 1 : $x - 1 \geq 0$**
  On a : $|x - 1| = x - 1$
  $(x^2 - x + 1) - |x - 1| = (x^2 - x + 1) - (x - 1)$
  $(x^2 - x + 1) - |x - 1| = x^2 - x + 1 - x + 1$
  $(x^2 - x + 1) - |x - 1| = x^2 - 2x + 1 + 1$
  $(x^2 - x + 1) - |x - 1| = (x^2 - 2x + 1) + 1$
  $(x^2 - x + 1) - |x - 1| = (x - 1)^2 + 1$
  $(x - 1)^2 \geq 0$ ainsi que $(x - 1)^2 + 1 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en particulier pour $x \geq 1$, donc $(x^2 - x + 1) - |x - 1| \geq 0$ pour $x \geq 1$, soit $(x^2 - x + 1) \geq |x - 1|$ pour $x \geq 1$.
  L'inégalité $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$ est donc vérifiée pour le cas 1.

- **Cas 2 : $x - 1 < 0$**
  On a : $|x - 1| = -(x - 1)$
  $(x^2 - x + 1) - |x - 1| = (x^2 - x + 1) + (x - 1)$
  $(x^2 - x + 1) - |x - 1| = x^2 - x + 1 + x - 1$
  $(x^2 - x + 1) - |x - 1| = x^2$
  $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en particulier pour $x < 1$, donc $(x^2 - x + 1) - |x - 1| \geq 0$ pour $x < 1$, soit $(x^2 - x + 1) \geq |x - 1|$ pour $x < 1$.
  L'inégalité $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$ est donc vérifiée pour le cas 2.

Synthèse : L'inégalité est vérifiée dans les 2 cas. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.

Exercice 6 (**4 points)**
Bob un finissant qui cherche un emploi énonce ce qui suit :

H1 : En cas de tempête de neige, le bus sera en retard.
H2 : Ne pas réussir l'entrevue et manquer le rendez-vous d'entrevue sont les deux causes les plus sures de ne pas être embauché.
H3 : Compte-tenu de la pré-sélection effectuée, réussir à l'entrevue est synonyme d'embauche.
H4 : Qui dit bus en retard, dit rendez-vous d'entrevue manqué.

Après de longue réflexion, il conclut :

C : Donc, seule une tempête de neige peut empêcher mon embauche.

Alice sa coéquipière n'est pas trop convaincu de la conclusion. Elle décide de mettre ses connaissances en logique mathématique à profit pour vérifier la conclusion. Dans un premier temps, elle procède par des définitions et des traductions comme suit :

Définitions

N : Il y a une tempête de neige ;
B : Le bus est en retard ;
R : Réussir l'entrevue ;
M : Manquer le rendez-vous d'entrevue ;
E : Être embauché.

Traductions

H1 : $N \rightarrow B$
H2 : $(\neg R \vee M) \rightarrow \neg E$
H3 : $R \leftrightarrow E$
H4 : $B \rightarrow M$
C : $N \rightarrow \neg E$

À partir des travaux d'Alice et du raisonnement déductif, montrez que la conclusion de Bob est bien valide.

Réponse :

1.	$(\neg R \vee M) \rightarrow \neg E$	Hypothèse H2
2.	$(R \wedge \neg M) \vee \neg E$	Étape 1 et transformation de l'implication
3.	$(R \vee \neg E) \wedge (\neg M \vee \neg E)$	Étape 2 et distributivité
4.	$(\neg M \vee \neg E)$	Étape 3 et Simplification
5.	$M \rightarrow \neg E$	Étape 4 et transformation en implication
6.	$N \rightarrow B$	Hypothèse H1
7.	$B \rightarrow M$	Hypothèse H4
8.	$N \rightarrow M$	Étapes 6 et 7 et syllogisme par hypothèse
9.	$N \rightarrow \neg E$	Étapes 5 et 8 et syllogisme par hypothèse

La conclusion est donc bien valide.