POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 4 : ENSEMBLES ET FONCTIONS

A2022

Directives pour la remise :

- Répondez directement sur ce document papier.
- La remise est individuelle, mais le travail en équipe est encouragé.
- La remise se fait à la fin de la séance de TD.
- **Aucun retard ne sera accepté.**
- **Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.**

Identification

Veuillez inscrire votre section, nom, prénom et matricule ainsi que les noms des collègues avec lesquels vous avez collaboré pour le TD

Section :

Nom :

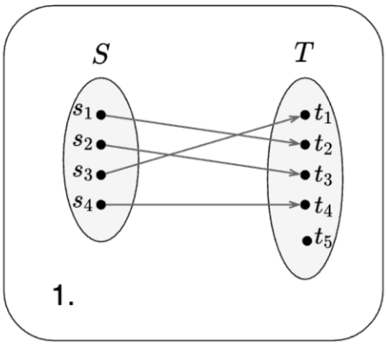
Prénom :

Matricule :

Collègues :

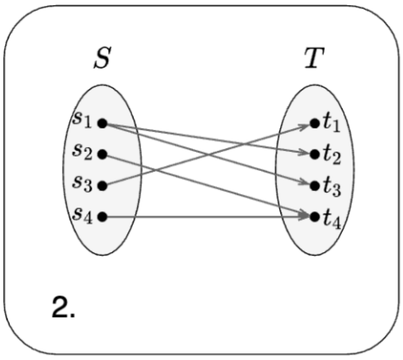
Exercice 1 :

Dans cet exercice, on définit pour chaque question une relation f d'un domaine S vers un codomaine T. Dans chaque cas, dites si la relation f est une fonction, une fonction injective, une fonction surjective, ou une fonction bijective. Justifiez votre réponse.



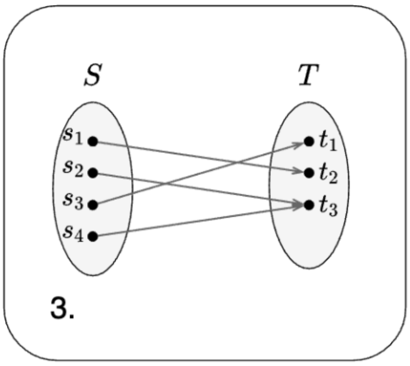
Réponse :

- f est une fonction, car au plus un élément de T est affecté à chaque élément de S.
- f est injective car chaque image a un antécédent distinct.
- f n'est pas surjective car t_5 n'as pas d'antécédant
- f n'est pas bijective car elle n'est pas surjective



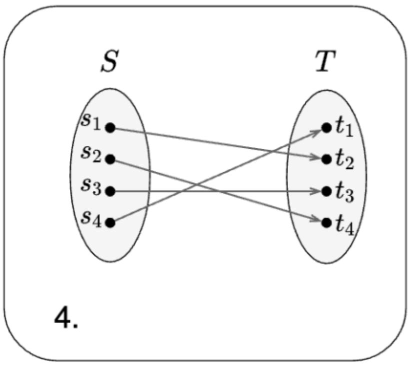
Réponse :

- f n'est pas une fonction, car 2 éléments de T sont associés à s_1, un élément de S



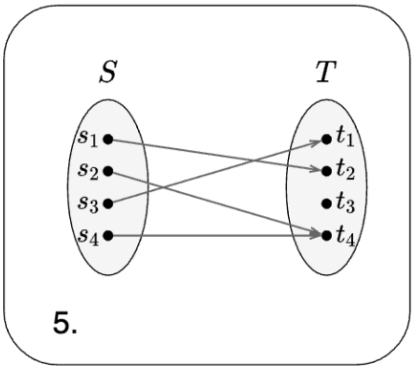
Réponse :

- f est une fonction, car au plus un élément de T est affecté à chaque élément de S.
- f n'est pas injective car $t_3 = f(s_3) = f(s_4)$ et $s_3 \neq s_4$
- f est surjective car chaque image a un antécédent.
- f n'est pas bijective car elle n'est pas injective



Réponse :

- f est une fonction, car au plus un élément de T est affecté à chaque élément de S.
- f est injective car chaque image a un antécédent distinct.
- f est surjective car chaque image a un antécédent.
- f est bijective car elle est injective et surjective



Réponse :

- f est une fonction, car au plus un élément de T est affecté à chaque élément de S.
- f n'est pas injective car $t_4 = f(s_2) = f(s_4)$ et $s_2 \neq s_4$
- f n'est pas surjective car t_3 n'as pas d'antécédant
- f n'est pas bijective car elle n'est ni injective ni surjective

Exercice 2 :

Définition : $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des réels positifs.

On définit deux fonctions :

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ , x \mapsto x^2$

a) f_1 est-elle injective ? f_2 est-elle injective ?

Réponse :

- f_1 n'est pas injective, car $f_1(-1) = f_1(1) = 1$.
- f_2 n'est pas injective pour la même raison.

b) f_1 est-elle surjective ? f_2 est-elle surjective ?

Réponse :

- f_1 n'est pas surjective, car -1 n'est l'image d'aucune valeur de $\mathbb{R}$ par f_1.
- Montrons que f_2 est surjective.

Soit $a \in \mathbb{R}_+$, quelconque.
a est positif ou nul donc on a le droit de poser $b= \sqrt{a}$ où $b \in \mathbb{R}$.
Ainsi, il existe un réel $b \in \mathbb{R}$ tel que $f_2(b) =a$. On peut en conclure que f_2 est surjective.

c) f_1 est-elle bijective ? f_2 est-elle bijective ?

Réponse :

- f_1 n'est ni injective ni surjective, donc elle n'est pas bijective.
- f_2 n'est pas surjective, , donc elle n'est pas bijective non plus

Exercice 3 :

Soit A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Simplifier chacune des expressions.

a) $\overline{A \cup B} \cap \overline{C \cup \bar{A}}$

Réponse :

$\overline{A \cup B} \cap \overline{C \cup \bar{A}} = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cap (\bar{C} \cap A)$

$\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} \cap \overline{\mathrm{C} \cup \bar{\mathrm{A}}} = (\bar{A} \cap A) \cap (\bar{B} \cap \bar{C})$

$\overline{A \cup B} \cap \overline{C \cup \bar{A}} = \emptyset \cap (\bar{B} \cap \bar{C})$

$\overline{A \cup B} \cap \overline{C \cup \bar{A}} = \emptyset$

b) $\overline{A \cap B} \cup \overline{C \cap \bar{A}}$

Réponse :

$\overline{A \cap B} \cup \overline{C \cap \bar{A}} = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cup (\bar{C} \cup \mathrm{A})$

$\overline{A \cap B} \cup \overline{C \cap \bar{A}} = (\bar{A} \cup \mathrm{A}) \cup (\bar{B} \cup \bar{C})$

$\overline{A \cap B} \cup \overline{C \cap \bar{A}} = \mathrm{E} \cup (\bar{B} \cup C)$

$\overline{A \cap B} \cup \overline{C \cap \bar{A}} = \mathrm{E}$

c) $(A \cap B) \cap \overline{A \cap C}$

Réponse :

$(A \cap B) \cap \overline{A \cap C} = (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})$

$(A \cap B) \cap \overline{A \cap C} = [(A \cap B) \cap \overline{A}] \cup [(A \cap B) \cap \overline{C}]$

$(A \cap B) \cap \overline{A \cap C} = (A \cap \overline{A} \cap B) \cup [(A \cap B) \cap \overline{C}]$

$(A \cap B) \cap \overline{A \cap C} = \emptyset \cup [(A \cap B) \cap \overline{C}]$

$(A \cap B) \cap \overline{A \cap C} = (A \cap B) \cap \overline{C}$

$(A \cap B) \cap \overline{A \cap C} = A \cap B \cap \overline{C}$

Exercice 4 :

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On pose :

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

Montrez que $A \Delta B = \overline{A} \Delta \overline{B}$.

Réponse :

Soit x un élément de E.

$x \in \overline{A} \Delta \overline{B} \Leftrightarrow (x \in (\overline{A} - \overline{B})) \vee (x \in (\overline{B} - \overline{A}))$

$\Leftrightarrow [(x \in \overline{A}) \wedge (x \notin \overline{B})] \vee [(x \in \overline{B}) \wedge (x \notin \overline{A})]$

$\Leftrightarrow [(x \notin A) \wedge (x \in B)] \vee [(x \notin B) \wedge (x \in A)]$

$\Leftrightarrow [(x \in B) \wedge (x \notin A)] \vee [(x \in A) \wedge (x \notin B)]$

$\Leftrightarrow (x \in (B - A)) \vee (x \in (A - B))$

$\Leftrightarrow x \in ((B - A) \cup (A - B))$

$\Leftrightarrow x \in ((A - B) \cup (B - A))$

$\Leftrightarrow x \in A \Delta B$

D'où $A \Delta B = \overline{A} \Delta \overline{B}$

Exercice 5

Pour tout entier naturel n, on définit U_n une suite arithmétique de raison r.
On donne $U_5 = 8$ et $U_{12} = 29$.

1. Trouver les valeurs de U_0 et r.

Réponse :
U_n est une suite arithmétique, donc on a $U_5 = U_0 + r*5$ et $U_{12} = U_0 + r*12$.
$U_{12} – U_5 = (U_0 + r*12) – (U_0 + r*5)$
$= r * (12-5)$
$= r * 7$
Et $U_{12} – U_5 = 29 – 8 = 21$
D'où $r * 7 = 21$
$r = \frac{21}{7} = 3$

On peut maintenant trouver U_0 :
$U_5 = 8 = U_0 + 3*5 = U_0 + 15$
Donc $U_0 = 8 – 15 = -7$

2.Exprimez U_n en fonction de n.

Réponse :
$U_n = -7 + 3n$

Exercice 6

On considère la suite V_n : $V_n = \frac{5^n}{2^{2n}}$ avec $n \in \mathbb{N}$

En mettant en évidence le premier terme ainsi que la raison, justifier que V_n est une suite géométrique.

Réponse :

Regardons le premier terme :

$V_0 = \frac{5^0}{2^{2*0}} = \frac{1}{1} = 1$

Identifions maintenant la raison.

$V_n = \frac{5^n}{2^{2n}}$

$$
\begin{aligned}
V_{n+1} &= \frac{5^{n+1}}{2^{2*(n+1)}} \\
&= \frac{5^{n+1}}{2^{2n+2}} \\
&= \frac{5^n}{2^{2n}} * \frac{5^1}{2^2} \\
&= V_n * \frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

Donc $V_n = 1 * \left(\frac{5}{4}\right)^n$

C'est une suite géométrique de raison $\frac{5}{4}$ et de premier terme 1 .