POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810
STRUCTURES DISCRÈTES

TD 4 : ENSEMBLES ET FONCTIONS

A2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1

Ania élabore son emploi du temps hebdomadaire en envisageant toutes les possibilités d'activités.
Elle se base sur deux ensembles : $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ pour les jours de la semaine et $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ pour les jours de la fin de semaine, définis comme suit :

- $\boldsymbol{\mathcal{S}} = \{lun, mar, mer, jeu, ven\}$
- $\boldsymbol{\mathcal{W}} = \{sam, dim\}$

a) Définissez par énumération l'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{W}}))$.

Solution :

$\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{W}}) = \{\phi,\ \{sam\},\ \{dim\},\ \{sam, dim\}\}$

Ainsi, $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{W}})) = \{$

$\phi,$
$\{\phi\},\ \{\{sam\}\},\ \{\{dim\}\},\ \{\{sam, dim\}\},$
$\{\phi, \{sam\}\},\ \{\phi, \{dim\}\},\ \{\phi, \{sam, dim\}\},\ \{\{sam\}, \{dim\}\},\ \{\{sam\}, \{sam, dim\}\},\ \{\{dim\}, \{sam, dim\}\},$
$\{\phi, \{sam\}, \{dim\}\},\ \{\phi, \{sam\}, \{sam, dim\}\},\ \{\phi, \{dim\}, \{sam, dim\}\},\ \{\{sam\}, \{dim\}, \{sam, dim\}\},$
$\{\phi, \{sam\}, \{dim\}, \{sam, dim\}\}$

$\}$

b) Définissez par énumération l'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{P}}\left(\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{S}} \cap \boldsymbol{\mathcal{W}}))\right)$.

Solution :

$\boldsymbol{\mathcal{S}} \cap \boldsymbol{\mathcal{W}} = \phi$

Donc, $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{S}} \cap \boldsymbol{\mathcal{W}}) = \boldsymbol{\mathcal{P}}(\phi) = \{\phi\}$

Par suite, $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{S}} \cap \boldsymbol{\mathcal{W}})) = \boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{P}}(\phi)) = \{\phi,\ \{\phi\}\}$

Ainsi, on obtient $\boldsymbol{\mathcal{P}}\left(\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{S}} \cap \boldsymbol{\mathcal{W}}))\right) = \boldsymbol{\mathcal{P}}\left(\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{P}}(\phi))\right) = \{\phi,\ \{\phi\},\ \{\{\phi\}\},\ \{\phi, \{\phi\}\}\}$

Exercice 2

Soit $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ deux sous-ensembles d'un ensemble $\boldsymbol{\Omega}$.
L'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ différence symétrique de l'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ est définit comme suit :

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}\ \boldsymbol{\Delta}\ \boldsymbol{\mathcal{H}} = (\boldsymbol{\mathcal{G}} \cup \boldsymbol{\mathcal{H}}) - (\boldsymbol{\mathcal{G}} \cap \boldsymbol{\mathcal{H}})$$

Montrez que $\boldsymbol{\mathcal{G}}\ \boldsymbol{\Delta}\ \boldsymbol{\mathcal{H}} = \overline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}\ \boldsymbol{\Delta}\ \overline{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$.

Solution :

Soit $\boldsymbol{x}$ est un élément de $\boldsymbol{\Omega}$.

$$
\begin{aligned}
x \in (\mathcal{G} \mathbin{\Delta} \mathcal{H}) &\Leftrightarrow x \in [(\mathcal{G} \cup \mathcal{H}) - (\mathcal{G} \cap \mathcal{H})] \\
&\Leftrightarrow [x \in (\mathcal{G} \cup \mathcal{H})] \wedge \neg[x \in (\mathcal{G} \cap \mathcal{H})] \\
&\Leftrightarrow [(x \in \mathcal{G}) \vee (x \in \mathcal{H})] \wedge \neg[(x \in \mathcal{G}) \wedge (x \in \mathcal{H})] \\
&\Leftrightarrow [(x \in \mathcal{G}) \vee (x \in \mathcal{H})] \wedge [\neg(x \in \mathcal{G}) \vee \neg(x \in \mathcal{H})] \\
&\Leftrightarrow [(x \in \mathcal{G}) \vee (x \in \mathcal{H})] \wedge [(x \notin \mathcal{G}) \vee (x \notin \mathcal{H})] \\
&\Leftrightarrow [(x \in \mathcal{G}) \vee (x \in \mathcal{H})] \wedge [(x \in \overline{\mathcal{G}}) \vee (x \in \overline{\mathcal{H}})] \\
&\Leftrightarrow [(x \in \overline{\mathcal{G}}) \vee (x \in \overline{\mathcal{H}})] \wedge [(x \in \mathcal{G}) \vee (x \in \mathcal{H})] \\
&\Leftrightarrow [(x \in \overline{\mathcal{G}}) \vee (x \in \overline{\mathcal{H}})] \wedge \neg[\neg(x \in \mathcal{G}) \wedge \neg(x \in \mathcal{H})] \\
&\Leftrightarrow [(x \in \overline{\mathcal{G}}) \vee (x \in \overline{\mathcal{H}})] \wedge \neg[(x \notin \mathcal{G}) \wedge (x \notin \mathcal{H})] \\
&\Leftrightarrow [(x \in \overline{\mathcal{G}}) \vee (x \in \overline{\mathcal{H}})] \wedge \neg[(x \in \overline{\mathcal{G}}) \wedge (x \in \overline{\mathcal{H}})] \\
&\Leftrightarrow [x \in (\overline{\mathcal{G}} \cup \overline{\mathcal{H}})] \wedge \neg[x \in (\overline{\mathcal{G}} \cap \overline{\mathcal{H}})] \\
&\Leftrightarrow x \in [(\overline{\mathcal{G}} \cup \overline{\mathcal{H}}) - (\overline{\mathcal{G}} \cap \overline{\mathcal{H}})] \\
&\Leftrightarrow x \in (\overline{\mathcal{G}} \mathbin{\Delta} \overline{\mathcal{H}})
\end{aligned}
$$

D'où $\mathcal{G} \mathbin{\Delta} \mathcal{H} = \overline{\mathcal{G}} \mathbin{\Delta} \overline{\mathcal{H}}$.
CQFD

Exercice 3

Soit $\boldsymbol{\Psi}$ l'ensemble univers et $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ trois ensembles de cet univers. Simplifiez l'expression :

$$\overline{\overline{A \cup \overline{C}} \cap \overline{A \cup \overline{B} \cup C} \cap (A \cap B)}$$

Justifiez toutes les étapes de votre réponse.

Solution :

$$
\begin{aligned}
\overline{\overline{A \cup \overline{C}} \cap \overline{A \cup \overline{B} \cup C} \cap (A \cap B)} &= \overline{\overline{A \cup \overline{C}}} \cup \overline{\overline{A \cup \overline{B} \cup C}} \cup \overline{A \cap B} && \text{Loi de De Morgan} \\
&= \left(A \cup \overline{C}\right) \cup \left(A \cup \overline{B} \cup C\right) \cup \overline{A \cap B} && \text{Loi de complémentation} \\
&= \left(A \cup \overline{C}\right) \cup \left(A \cup \overline{B} \cup C\right) \cup \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) && \text{Loi de De Morgan} \\
&= A \cup \overline{C} \cup A \cup \overline{B} \cup C \cup \overline{A} \cup \overline{B} && \text{Loi d'associativité} \\
&= A \cup A \cup \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{B} \cup C \cup \overline{C} && \text{Loi de commutativité} \\
&= \left(A \cup A \cup \overline{A}\right) \cup \left(\overline{B} \cup \overline{B}\right) \cup \left(C \cup \overline{C}\right) && \text{Loi d'associativité} \\
&= \left((A \cup A) \cup \overline{A}\right) \cup \left(\overline{B} \cup \overline{B}\right) \cup \left(C \cup \overline{C}\right) && \text{Loi d'associativité} \\
&= \left(A \cup \overline{A}\right) \cup \overline{B} \cup \left(C \cup \overline{C}\right) && \text{Loi d'idempotence} \\
&= \Psi \cup \overline{B} \cup \Psi && \text{Loi du complément} \\
&= \left(\Psi \cup \overline{B}\right) \cup \Psi && \text{Loi d'associativité} \\
&= \Psi \cup \Psi && \text{Loi de domination} \\
&= \Psi && \text{Loi d'idempotence}
\end{aligned}
$$

Exercice 4

Considérez l'ensemble des codes IATA des aéroports internationaux suivant :

- $\mathcal{A} = \{YUL, JFK, CDG, ZHR, NRT\}$

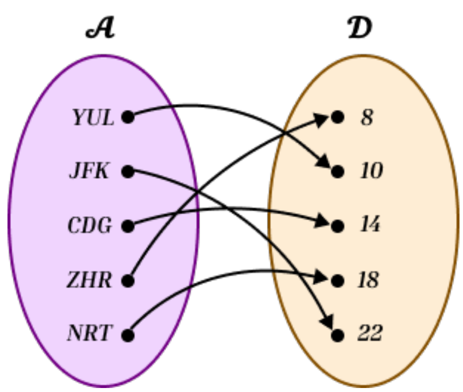
Et l'ensemble des heures de départ suivant :

- $\mathcal{D} = \{8, 10, 14, 18, 22\}$

Dans chaque cas, précisez s'il s'agit (I.) d'une fonction, (II.) d'une fonction injective, (III.) d'une fonction surjective ou (IV.) d'une fonction bijective définie de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{D}$. Justifiez vos réponses pour chacune des propriétés.

a) $\{(YUL, 10), (JFK, 22), (CDG, 14), (ZHR, 8), (NRT, 18)\}$

Solution :



(I.) **Fonction** : OUI. Les éléments YUL, JFK, CDG, ZHR et NRT de $\mathcal{A}$ sont associés chacun à exactement un élément de $\mathcal{D}$.

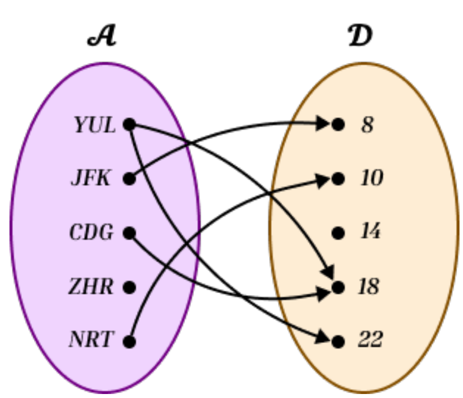
(II.) **Fonction injective** : OUI. Chaque élément de $\mathcal{A}$ a une image distincte de celle des autres éléments de $\mathcal{D}$.

(III.) **Fonction surjective** : OUI. Chaque élément de $\mathcal{D}$ a au moins un antécédent (pré-image) dans $\mathcal{A}$.

(IV.) **Fonction bijective** : OUI. Étant une fonction injective et une fonction surjective, elle est une fonction bijective.

b) $\{(YUL, 18), (JFK, 8), (CDG, 18), (YUL, 22), (NRT, 10)\}$

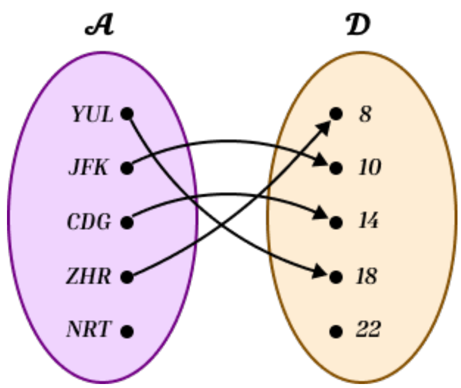
Solution :



(I.) **Fonction** : NON. L'élément YUL de $\mathcal{A}$ est associé à deux éléments de $\mathcal{D}$; à savoir : 18 et 22.
(II.) **Fonction injective** : NON. N'étant pas une fonction.
(III.) **Fonction surjective** : NON. N'étant pas une fonction.
(IV.) **Fonction bijective** : NON. N'étant pas une fonction, ou n'étant ni une fonction injective, ni une fonction surjective.

c) $\{(ZHR, 8), (JFK, 10), (CDG, 14), (YUL, 18)\}$

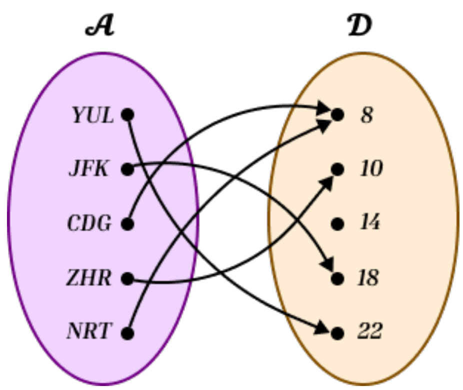
Solution :



(I.) **Fonction** : OUI. Les éléments ZHR, JFK, CDG et YUL de $\mathcal{A}$ sont associés chacun à exactement un élément de $\mathcal{D}$. L'élément NRT de $\mathcal{A}$ quant à lui n'est associé à aucun élément de de $\mathcal{D}$.
(II.) **Fonction injective** : NON. L'élément NRT de $\mathcal{A}$ n'a pas d'image.
(III.) **Fonction surjective** : NON. L'élément 22 de $\mathcal{D}$ n'a pas d'antécédent (pré-image) dans $\mathcal{A}$.
(IV.) **Fonction bijective** : NON. Elle n'est ni une fonction injective, ni une fonction surjective.

d) $\{(YUL, 22), (JFK, 18), (CDG, 8), (ZHR, 10), (NRT, 8)\}$

Solution :



(I.) **Fonction** : OUI. Les éléments YUL, JFK, CDG, ZHR et NRT de $\mathcal{A}$ sont associés chacun à exactement un élément de $\mathcal{D}$.
(II.) **Fonction injective** : NON. Les éléments CDG et NRT de $\mathcal{A}$ ont tous les deux comme image l'élément 8 de $\mathcal{D}$, alors que CDG et NRT sont deux éléments distincts de $\mathcal{A}$.
(III.) **Fonction surjective** : NON. L'élément 14 de $\mathcal{D}$ n'a pas d'antécédent (pré-image) dans $\mathcal{A}$.
(IV.) **Fonction bijective** : NON. Elle n'est ni une fonction injective, ni une fonction surjective.

Exercice 5

On définit une fonction de $\mathbb{N}^2$ vers $\mathbb{N}^*$ tel que :

$$f(a,c) = 2^a(1+2c)$$

La fonction est-elle injective ? Justifiez votre réponse.

Solution :

Soient (a,c) et (b,d) deux éléments de $\mathbb{N}^2$ tels que $f(a,c) = f(b,d)$.

Alors, on a

$$2^a(1+2c) = 2^b(1+2d)$$

Ou encore,

$$2^a(2c+1) = 2^b(2d+1) \qquad (\mathrm{I.})$$

Montrons que $(a,c) = (b,d)$ pour conclure que la fonction est injective, i.e. $a = b$ et $c = d$.

Commençons par prouver que $a = b$.
Raisonnons par l'absurde.
Supposons par hypothèse que $a \neq b$.
Sans perte de généralité, si $a > b$, on obtient donc

$$2^{a-b}(2c+1) = 2d+1 \qquad (\mathrm{II.})$$

Maintenant, examinons les parités des termes de cette équation :

- Terme de gauche : $2^{a-b}(2c+1)$ est pair, car c'est un produit de puissances de 2.
- Terme de droite : $2d+1$ est impair, car il est de la forme $2k+1$ où k est entier.

Ce qui est une contradiction par rapport à l'équation obtenue en $(\mathrm{II.})$ puisque le terme de gauche est pair, alors que celui de droite est impair.
Il faut donc que

$$a = b \qquad (\mathrm{III.})$$

Prouvons maintenant que $c = d$.
En utilisant $(\mathrm{I.})$ et $(\mathrm{III.})$ comme équations précédemment établies, on obtient par suite

$$2c+1 = 2d+1$$

En simplifiant davantage, on trouve

$$c = d$$

Ainsi, on a bien

$$(a,c) = (b,d)$$

Par conséquent, la fonction est injective.
CQFD

Exercice 6
On considère l'ensemble $\mathbb{T} = \{-3, 3\}$ et la fonction suivante :

$$\boldsymbol{h} : (\mathbb{Z} - \mathbb{T}) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x^2 - 9}$$

a) $\boldsymbol{h}$ est-elle injective ? Justifiez votre réponse.

Solution :

Méthode $(\mathbf{I}.)$:
Soient a et b deux entiers
Si $\boldsymbol{h}$ est injective, alors $\big(h(a) = h(b)\big) \to (a = b)$.

Supposons que $h(a) = h(b)$.
Alors, on a $\big(h(a) = h(b)\big) \to \big((a^2 - 9) = (b^2 - 9)\big)$
$\to (a^2 = b^2)$
$\to \big((a = b) \lor (a = -b)\big)$

Ainsi, a n'est pas toujours égal à b.
$\boldsymbol{h}$ n'est donc pas injective.
CQFD

Méthode $(\mathbf{II}.)$:
Alternativement, la preuve par contre-exemple peut être utilisée.

Lorsque $x = -4$, on a

$$h(-4) = \frac{1}{(-4)^2 - 9} = \frac{1}{16 - 9} = \frac{1}{7}$$

Et lorsque $x = 4$, on obtient

$$h(4) = \frac{1}{(4)^2 - 9} = \frac{1}{16 - 9} = \frac{1}{7}$$

Donc,

$$h(-4) = h(4) = \frac{1}{7}$$

Or,

$$-4 \neq 4$$

$\boldsymbol{h}$ n'est donc pas injective.
CQFD

b) $\boldsymbol{h}$ est-elle surjective ? Justifiez votre réponse.

Solution :

Soit y un réel.
Lorsque $y = 0$, aucun entier x ne vérifie l'équation $y = h(x)$.
0 n'ayant donc pas d'antécédant (pré-image), $\boldsymbol{h}$ nest pas surjective.
CQFD

Exercice 7

Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Il n'est pas nécessaire de justifier votre réponse ici.

a) $0 \in \phi$

Solution :

L'affirmation $0 \in \phi$ est **fausse** puisque l'ensemble vide ne contient aucun élément. Donc l'élément 0 n'appartient pas à l'ensemble ϕ.

b) $\{0\} \subset \phi$

Solution :

L'affirmation $\{0\} \subset \phi$ est **fausse** puisqu'encore une fois, l'élément vide ne contient aucun élément.

c) $\{0\} \in \{0\}$

Solution :

L'affirmation $\{0\} \in \{0\}$ est **fausse**, car $\{0\}$ est un ensemble qui contient l'élément 0, mais pas $\{0\}$ lui-même.

d) $\phi \in \{0\}$

Solution :

L'affirmation $\phi \in \{0\}$ est **fausse**, car ϕ n'est pas un élément de l'ensemble $\{0\}$, mais plutôt un ensemble à part entière.

e) $\phi \subset \{0\}$

Solution :

L'affirmation $\phi \subset \{0\}$ est **vraie**, car ϕ est un sous-ensemble de tous ensembles non vides, y compris $\{0\}$. Or, l'élément 0 de $\{0\}$ n'appartient pas à l'ensemble vide.

f) $\{\phi\} \subseteq \{\phi\}$

Solution :

L'affirmation $\{\phi\} \subseteq \{\phi\}$ est **vraie** puisque tous ensembles vides ou non sont des sous-ensembles d'eux-mêmes.

Exercice 8 (Facultatif)

Soit $(V_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ une suite tel que :

$$V_n = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{3^{n+1}}$$

a) Montrez que $(V_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

Solution :

$$V_0 = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{(0)}}{3^{(0)+1}} = \frac{1}{3}$$

$$V_{n+1} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{(n+1)}}{3^{(n+1)+1}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\underbrace{\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{3^{n+1}}}_{V_n} = \frac{\sqrt{2}}{3}V_n$$

Ainsi, $(V_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{3}$ et de premier terme $V_0 = \frac{1}{3}$.

b) Calculez la somme suivante :

$$\sum_{k=50}^{100} V_k$$

Montrez toutes les étapes de votre réponse.

Solution :

$$\sum_{k=0}^{100} V_k = \sum_{k=0}^{49} V_k + \sum_{k=50}^{100} V_k \Leftrightarrow \sum_{k=50}^{100} V_k = \underbrace{\sum_{k=0}^{100} V_k}_{\text{(I.)}} - \underbrace{\sum_{k=0}^{49} V_k}_{\text{(II.)}}$$

(I.) D'une part, on a

$$\sum_{k=0}^{100} V_k = \sum_{k=0}^{100} \frac{\left(\sqrt{2}\right)^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{100}\Bigg(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{3}}_{r}\Bigg)^k = \frac{1}{3}\left(\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{101}-1}{\frac{\sqrt{2}}{3}-1}\right), car\ r \neq 1$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{101}-1}{\frac{\sqrt{2}-3}{3}}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{101}-1}{\sqrt{2}-3}$$

(II.) D'autre part, on a

$$\sum_{k=0}^{49} V_k = \sum_{k=0}^{49} \frac{\left(\sqrt{2}\right)^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{49}\Bigg(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{3}}_{r}\Bigg)^k = \frac{1}{3}\left(\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{50}-1}{\frac{\sqrt{2}}{3}-1}\right), car\ r \neq 1$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{50}-1}{\frac{\sqrt{2}-3}{3}}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{50}-1}{\sqrt{2}-3}$$

Ainsi, à partir de $(\mathrm{I.})$ et $(\mathrm{II.})$, on obtient

$$\sum_{k=50}^{100} V_k = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{50}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{51}-1\right)}{\sqrt{2}-3}$$

Alternativement, en utilisant le glissement d'indice, on obtient

$$\sum_{k=50}^{100} V_k = \sum_{k=50}^{100} \frac{\left(\sqrt{2}\right)^k}{3^{k+1}} = \sum_{k=50-50}^{100-50} \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{k+50}}{3^{k+1+50}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{50} \cdot \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{50}\Bigg(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{3}}_{r}\Bigg)^k$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{50} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{50} - 1}{\frac{\sqrt{2}}{3} - 1}\right), car\ r \neq 1$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{50} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{50} - 1}{\frac{\sqrt{2} - 3}{3}}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{50}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{51} - 1\right)}{\sqrt{2} - 3}$$