POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

CONTRÔLE PÉRIODIQUE 1

H2022

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 (2 points)
Soit l'univers des animaux. Formalisez les affirmations suivantes en utilisant les fonctions propositionnelles indiquées.
C(x) : x est un carnivore   R(x) : x rôde dehors la nuit   L(x) : x aime contempler la lune

a) (**1 point**) Aucun animal n'est carnivore, à moins qu'il n'aille rôder dehors la nuit.

Réponse :

$$\forall x\,(\neg C(x) \rightarrow \neg R(x))$$
$$\forall x\,(R(x) \rightarrow C(x))$$

b) (**1 point**) Les animaux qui vont rôder dehors la nuit aiment toujours contempler la lune.

Réponse :

$$\forall x\,(R(x) \rightarrow L(x))$$

Exercice 2 (2 points)

a) (**1 point**) Montrez que : $(P \rightarrow (Q \vee R)) \equiv ((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R))$

Réponse :

- Méthode 1 : Dérivons l'expression de gauche
  - $(P \rightarrow (Q \vee R)) \equiv (\neg P) \vee (Q \vee R)$ **Transformation de l'implication en disjonction**
  - $(P \rightarrow (Q \vee R)) \equiv (\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R)$ **Distributivité de V**
  - $(P \rightarrow (Q \vee R)) \equiv ((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R))$ **Transformation de la disjonction en implication**
  - **CQFD**

- Méthode 2 : Dérivons l'expression de droite
  - $((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)) \equiv (\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R)$ **Transformation des implications en disjonction**
  - $((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)) \equiv (\neg P \vee Q \vee (\neg P) \vee R)$ **Associativité de V**
  - $((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)) \equiv ((\neg P \vee (\neg P)) \vee (Q \vee R))$ **Associativité de V**
  - $((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)) \equiv (\neg P) \vee (Q \vee R)$ **Simplification de $(\neg P \vee (\neg P))$**
  - $((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)) \equiv P \rightarrow (Q \vee R)$ **Transformation de la disjonction en implication**
  - **CQFD**

- Méthode 3 : Table de vérité

P	Q	R	Q V R	P→Q	P→R	P→(QVR)	((P→Q) V (P→R))	((P→Q) V (P→R)) ↔ (P→(QVR))
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V

b) (**1 point**) Montrez que :

$$((P \land Q) \rightarrow R) \equiv ((P \rightarrow R) \lor (Q \rightarrow R))$$

Réponse :

- Méthode 1 : Dérivons l'expression de gauche

$((P \land Q) \rightarrow R) \equiv (\neg (P \land Q) \lor R)$	**Transformation de l'implication en disjonction**
$((P \land Q) \rightarrow R) \equiv (((\neg P) \lor (\neg Q)) \lor R)$	**Loi de De Morgan**
$((P \land Q) \rightarrow R) \equiv (\neg P \lor (\neg Q) \lor R)$	**Associativité de V**
$((P \land Q) \rightarrow R) \equiv ((\neg P \lor (\neg Q)) \lor R)$	**Associativité de V**
$((P \land Q) \rightarrow R) \equiv (\neg P \lor R) \lor ((\neg Q) \lor R)$	**Distributivité de V**
$((P \land Q) \rightarrow R) \equiv ((P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow R))$	**Transformation des disjonctions en implications**

CQFD

- Méthode 2 : Dérivons l'expression de droite

$((P \rightarrow R) \lor (Q \rightarrow R)) \equiv (\neg P \lor R) \lor (\neg Q \lor R)$	**Transformation des implications en disjonction**
$((P \rightarrow R) \lor (Q \rightarrow R)) \equiv (\neg P \lor R \lor (\neg Q) \lor R)$	**Associativité de V**
$((P \rightarrow R) \lor (Q \rightarrow R)) \equiv ((\neg P \lor (\neg Q)) \lor (R \lor R))$	**Associativité de V**
$((P \rightarrow R) \lor (Q \rightarrow R)) \equiv ((\neg P \lor (\neg Q)) \lor R)$	**Simplification de (R V R)**
$((P \rightarrow R) \lor (Q \rightarrow R)) \equiv (\neg (P \land Q) \lor R)$	**Loi de De Morgan**
$((P \rightarrow R) \lor (Q \rightarrow R)) \equiv (P \land Q) \rightarrow R$	**Transformation de la disjonction en implication**

CQFD

- Méthode 3 : Table de vérité

P	Q	R	$P \land Q$	$Q \rightarrow R$	$P \rightarrow R$	$(P \land Q) \rightarrow R$	$((P \rightarrow R) \lor (Q \rightarrow R))$	$((P \rightarrow Q) \lor (P \rightarrow R)) \leftrightarrow (P \rightarrow (Q \lor R))$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V

Exercice 3 (4 points)

On considère l'univers des humains.

Soit :

enfant(x) : x est un enfant
ange(x) : x est un ange

Traduisez en langage courant, en utilisant les fonctions propositionnelles ci-dessus, chacun des énoncés de logique des prédicats suivants :

a) (1.25 point) $\forall x\ (\text{ange}(x) \rightarrow (\neg\ \text{enfant}(x))$

Réponse :

Formulations équivalentes :

- Aucun ange n'est un enfant
- Un ange n'est pas un enfant

b) (1.25 point) $\neg (\forall x\ (enfant\ (x) \rightarrow ange(x)))$

Réponse :

Formulations équivalentes :

- Tout enfant n'est pas un ange
- Tous les enfants ne sont pas des anges
- Il y a au moins un enfant qui n'est pas un ange
- Il y existe au moins un enfant qui n'est pas un ange

c) (1.5 point) $\neg (\forall x\ (ange\ (x) \leftrightarrow (enfant\ (x))$

Réponse :

Formulations équivalentes :

- Un humain ne peut pas être à la fois un ange et un enfant.
- Un ange n'est pas toujours un enfant ou un enfant n'est pas toujours un ange.
- Un enfant n'est pas toujours un ange ou un ange n'est pas toujours un enfant.
- Il y a au moins un ange qui n'est pas un enfant ou il y a au moins un enfant qui n'est pas un ange
- Il existe au moins un ange qui n'est pas un enfant ou il existe au moins un enfant qui n'est pas un ange

Exercice 4 (3 points)

Soit x un réel. Montrez que si x^2 n'est pas un multiple entier de 16, alors x/2 n'est pas un entier pair.

Réponse :

- Méthode 1 : Preuve par contraposition (preuve indirecte)

La contraposée de « si x^2 n'est pas un multiple entier de 16, alors x/2 n'est pas un entier pair » est :

« si x/2 est un entier pair, alors x^2 est un multiple entier de 16»

Supposons que x/2 est un entier pair.

Il existe un entier k tel que x/2 =2k.

On a donc x = 4k et $x^2 = 16\ k^2$. Ce qui permet de dire que x^2 est un multiple entier de 16.

Par conséquent, la preuve « si x/2 est un entier pair, alors x^2 est un multiple entier de 16» est établie ainsi que sa contraposée « si x^2 n'est pas un multiple entier de 16, alors x/2 n'est pas un entier pair ».

- Méthode 2 : Preuve par contradiction (preuve par l'absurde)

Raisonnons par l'absurde. Supposons que x^2 n'est pas un multiple entier de 16 et x/2 n'est pas un entier pair.

x/2 est un entier pair, alors il existe un entier k tel que x/2 =2k.

x/2 est un entier pair, alors il existe un entier k tel que x = 4k.

x/2 est un entier pair, alors il existe un entier k tel que $x^2 = 16\ k^2$.

x^2 est donc un multiple entier de 16. Or par hypothèse x^2 n'est pas un multiple entier de 16. Il y a donc contradiction.

D'où « si x^2 n'est pas un multiple entier de 16, alors x/2 n'est pas un entier pair ».

Exercice 5 (2.5 points)
Soit A, B, E et F quatre ensembles. Montrez que

Si $((A \subset E) \wedge (B \subset F))$, alors $((A \times B) \subset (E \times F))$

Réponse :

- Méthode 1

Soit $x \in A$ et $y \in B$.
On a : $(x \in A \text{ et } y \in B) \equiv (x, y) \in A \times B$.
Si $(A \subset E)$ alors $((x \in A) \rightarrow (x \in E))$
Si $(B \subset F))$ alors $((y \in B) \rightarrow (y \in F))$

Si $((A \subset E) \wedge (B \subset F))$, alors $(((x \in A) \rightarrow (x \in E)) \wedge ((y \in B) \rightarrow (y \in F)))$
Or $[((x \in A) \rightarrow (x \in E)) \wedge ((y \in B) \rightarrow (y \in F))] \rightarrow [(x \in A \text{ et } y \in B) \rightarrow (x \in E \text{ et } y \in F)]$
Donc Si $((A \subset E) \wedge (B \subset F))$, alors $((x \in A \text{ et } y \in B) \rightarrow (x \in E \text{ et } y \in F))$
De plus, $(x \in A \text{ et } y \in B) \equiv (x, y) \in A \times B$. on a donc :
Si $((A \subset E) \wedge (B \subset F))$, alors $(((x, y) \in A \times B) \rightarrow (x \in E \text{ et } y \in F))$
Aussi, on a : $(x \in E \text{ et } y \in F) \equiv (x, y) \in E \times F$.
Donc, $(((x, y) \in A \times B) \rightarrow ((x, y) \in E \times F))$. On a :
Si $((A \subset E) \wedge (B \subset F))$, alors $[((x, y) \in A \times B) \rightarrow ((x, y) \in E \times F)]$
$[((x, y) \in A \times B) \rightarrow ((x, y) \in E \times F)]$ alors $((A \times B) \subset (E \times F))$
D'où Si $((A \subset E) \wedge (B \subset F))$, alors $((A \times B) \subset (E \times F))$

- Méthode 2

Supposons que $(A \subset E) \wedge (B \subset F)$.
Soit C le complémentaire de A dans E et D le complémentaire de B dans F.
On a : $E = A \cup C$ et $F = B \cup D$ et $A \cap C = \emptyset$ et $B \cap D = \emptyset$.
$E \times F = (A \cup C) \times (B \cup D)$
$E \times F = (A \times (B \cup D)) \cup (C \times (B \cup D))$, car $A \cap C = \emptyset$
$E \times F = ((A \times B) \cup (A \times D)) \cup ((C \times B) \cup (C \times D))$, car $B \cap D = \emptyset$
$E \times F = (A \times B) \cup (A \times D) \cup (C \times B) \cup (C \times D)$
On en déduit que $(A \times B) \subset (E \times F)$

Exercice 6 (3 points)
Soit la fonction f.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

La fonction *f* est-elle injective ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

Soit x_1 et x_2 deux réels tel que $f(x_1) = f(x_2)$.
$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow \frac{1}{1+x_1^2} = \frac{1}{1+x_2^2}$
$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow 1 + x_1^2 = 1 + x_2^2$
$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1^2 = x_2^2$
$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$ *ou* $x_1 = -x_2$
On a donc pas toujours $x_1 = x_2$.
En conclusion f n'est pas injective.

Exercice 7 (3.5 points)
Au sujet de la nouvelle amie qu'il vient de rencontrer, Jean fait les affirmations suivantes :

H1 : Si elle déteste le jazz, alors elle aime le tango ou la salsa.
H2 : Elle a les mêmes préférences pour le tango et la rumba.
H3 : Si elle déteste la salsa, alors elle aime le tango.
H4 : Elle déteste le jazz ou la salsa, ou les deux d'ailleurs.
H5 : Si elle aime la salsa et pas le jazz, alors elle aime la rumba.

Après de longue réflexion il conclut :

C : Elle déteste la rumba, la salsa et le tango

Josias n'est pas convaincu de la conclusion de son ami Jean. Il décide de mettre ses connaissances en logique mathématique à profit pour vérifier la conclusion de Jean. Dans un premier temps, il procède par des définitions et des traductions comme suit :

Définitions

J : Jazz
S : Salsa
R : Rumba
T : Tango
aime(x) : Elle aime x.
Il affirme que ne pas aimer un rythme musical, c'est le détester.

Traductions

H1 : (¬ aime(J)) → (aime(T) ∨ aime(S))
H2 : aime(T) ↔ aime(R)
H3 : (¬ aime(S)) → aime(T)
H4 : (¬ aime(J)) ∨ (¬ aime(S))
H5 : (aime(S) ∧ (¬ aime(J))) → aime(R)
C : (¬ aime(R)) ∧ (¬ aime(S)) ∧ (¬ aime(T))

À partir des travaux de Josias, montrez que la conclusion de Jean n'est pas valide.

Réponse :

1. (¬ aime(J)) ∨ (¬ aime(S))	Hypothèse H4
2. (¬ aime(S)) ∨ (¬ aime(J))	Étape 1 et commutativité de ∨
3. aime(S) → (¬ aime(J))	transformation de la disjonction en implication
4. (¬ aime(S)) → aime(T)	Hypothèse H3 :
5. (¬ aime(T)) → aime(S)	Contraposée de l'étape 4
6. (¬ aime(T)) → (¬ aime(J))	Étapes 3 et 5 et syllogisme par hypothèse
7. aime(J) → aime(T)	Contraposée de l'étape 6
8. (¬ aime(J)) → (aime(T) ∨ aime(S))	Hypothèse H1
9. ¬ (aime(T) ∨ aime(S)) → aime(J)	Contraposée de l'étape 8
10. ¬ (aime(T) ∨ aime(S)) → aime(T)	Étapes 7 et 9 et syllogisme par hypothèse
11. (aime(T) ∨ aime(S)) ∨ aime(T)	Étape 10 et transformation de l'implication en disjonction
12. aime(T) ∨ aime(S) ∨ aime(T)	Étape 11 et associativité de ∨
13. aime(T) ∨ aime(S)	Étape 12 et simplification
14. aime(T) ∨ aime(S) ∨ aime(R)	Étape 13 et règle de l'addition
15. aime(R) ∨ aime(S) ∨ aime(T)	Étape 14 et Commutativité de ∨
16. ¬(¬aime(R) ∧ (¬aime(S)) ∧ (¬aime(T)))	Étape 15 et Loi de De Morgan
17. ¬C	Étape 16 et C

La conclusion de Jean n'est donc pas valide.