POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 9 : **DÉNOMBREMENT**

É2022

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1. On lance un dé jusqu'à ce qu'on obtienne un même chiffre pour la deuxième fois. La suite des chiffres obtenus est appelée un résultat.

a. Quel est le nombre maximal de lancers ?

Réponse :

Le nombre maximal de lancer est atteint lorsqu'après 6 lancers chaque lancer donne une face différente. Il faudrait donc un 7ème lancer pour avoir l'un des chiffres se répéter. Le résultat recherché est **7**.

b. Combien y-a-t-il de résultats obtenus avec exactement quatre lancers ?

Réponse :

Le résultat des lancers est un arrangement (permutation) avec remise, car à chaque lancer les 6 faces du dé sont en jeu et l'ordre compte. En effet, l'énoncé parle de suite de chiffres. L'ordre dans lequel ces chiffres sont pris est donc important. Ainsi on pourrait constituer le résultat en notant le chiffre qui sort au premier lancer, au deuxième, etc.

- Au premier lancer, il y a ***P(6, 1)*** possibilités.
- Le chiffre sorti au premier lancer n'est pas réapparu au deuxième lancer. On a donc ***P(5, 1)*** possibilités pour le deuxième lancer.
- Les chiffres sortis au premier et deuxième lancer ne sont pas réapparus au troisième lancer puisqu'il faut 4 lancers. On a donc ***P(4, 1)*** possibilités pour le troisième lancer.
- Au quatrième et dernier lancer, le chiffre obtenu est soit celui du premier lancer, soit celui du deuxième lancer ou du troisième lancer. Il y a donc ***P(3, 1)*** possibilités pour ce quatrième lancer.

Le nombre de résultats obtenus avec exactement trois lancers est donc

$$P(6,1) \times P(5,1) \times P(4,1) \times P(3,1) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

c. Combien y-a-t-il de résultats possibles (pire scénario) ?

Réponse :

Le pire scénario est d'avoir la répétition au 7ème lancer. Chacun des 6 premiers lancers donne un résultat différent. Au 6ième lancer il n'y a qu'un choix. On a donc pour les 6 premiers lancers :

$$P(6,1) \times P(5,1) \times P(4,1) \times P(3,1) \times P(2,1) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 6! = 720$$

Au 7ième lancer, toutes les 6 faces sont éligibles comme au premier lancer. On a donc ***P(6, 1).***

Le nombre total de résultats est donc :

$$P(6,1) \times P(5,1) \times P(4,1) \times P(3,1) \times P(2,1) \times P(6,1) = 6! \times P(6,1) = 6! \times 6 = 4\,320$$

Exercice 2. Combien il y a-t-il de fonctions surjectives d'un ensemble A de 6 éléments à un ensemble B de 4 éléments ?

Réponse :

Le nombre total de fonctions surjectives d'un ensemble A à un ensemble B est le nombre de fonctions moins le nombre de fonctions non surjectives.

- Le nombre de fonctions d'un ensemble A à un ensemble B : $N = 4^6$.
- Le nombre de fonctions non surjectives :

  Soit P_i la propriété voulant qu'un élément b_i de B ne soit pas dans l'image.

  - Le nombre de fonctions qui ont la propriété P_i est le nombre $N(P_i)$ de fonctions d'un ensemble à 6 éléments dans un ensemble de 3 éléments. 1 élément sur 4 est exclu de l'image.

$$N(P_1) = N(P_2) = N(P_3) = N(P_4) = 3^6.$$

- Le nombre de fonctions qui ont deux propriétés P_i et P_j est le nombre $N(P_iP_j)$ de fonctions d'un ensemble à 6 éléments dans un ensemble de 2 éléments. 2 éléments sur 4 sont exclus de l'image.
$N(P_1P_2) = N(P_1P_3) = N(P_1P_4) = N(P_2P_3) = N(P_2P_4) = N(P_3P_4) = 2^6$.
- Le nombre de fonctions qui ont 3 propriétés P_i, P_j et P_k est le nombre $N(P_iP_jP_k)$ de fonctions d'un ensemble à 6 éléments dans un ensemble de 1 élément. 3 éléments sur 4 sont exclus de l'image.
$N(P_1P_2P_3) = N(P_1P_2P_4) = N(P_1P_3P_4) = N(P_2P_3P_4) = 1^6$.
- Le nombre de fonctions qui ont 34 propriétés P_i, P_j, P_k, et P_s est le nombre $N(P_iP_jP_kP_s)$ de fonctions d'un ensemble à 6 éléments dans un ensemble de 0 élément. Les 4 éléments sont exclus de l'image.
$N(P_1P_2 P_3P_4) = 0^6$.

Le nombre total de fonctions surjectives d'un ensemble A à un ensemble B est :

$N - [N(P_1) + N(P_2) + N(P_3) + N(P_4)] + [N(P_1P_2) + N(P_1P_3) + N(P_1P_4) + N(P_2P_3) + N(P_2P_4) + N(P_3P_4)] - [N(P_1P_2P_3) + N(P_1P_2P_4) + N(P_1P_3P_4) + N(P_2P_3P_4)] + [N(P_1P_2 P_3P_4)]$

$= 4^6 - (4 \times 3^6) + (6 \times 2^6) - (4 \times 1^6) + 0^6$

$= 1\,560$.

Exercice 3. Soit n un entier positif non nul. Prouvez en utilisant les manipulations algébriques que :

$$\sum_{k=1}^{n} k \times C(n,k) = n \times 2^{n-1}$$

Réponse :

En utilisant le théorème du binôme, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k \times C(n,k) = \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k \times C(n,k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k \times n(n-1)!}{k(k-1)! \times (n-k)!}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k \times C(n,k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(k-1)! \times (n-k)!}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k \times C(n,k) = \sum_{k=1}^{n} n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)! \times \big((n-1)-(k-1)\big)!}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k \times C(n,k) = \sum_{k=1}^{n} n \times C(n\text{-}1, k\text{-}1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k \times C(n,k) = n \times \sum_{k=1}^{n} C(n\text{-}1, k\text{-}1)$$

En posant p = k-1 :

- Lorsque k = 1, on a p = 0.

- Lorsque k = n, on a p = n-1 qui est la valeur maximale.

L'égalité devient :

$$\sum_{k=1}^{n} k \times C(n,k) = n \times \sum_{p=0}^{n-1} C(n\text{-}1,p)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k \times C(n,k) = n \times \sum_{p=0}^{n-1} C(n\text{-}1,p) \times 1^{p} \times 1^{n-1-p}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k \times C(n,k) = n \times (1+1)^{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k \times C(n,k) = n \times 2^{n-1}$$

CQFD.

Exercice 4. Résolvez la relation de récurrence :

$a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-3} + a_{n-4}$; avec $a_0 = 0$, $a_1 = -4$, $a_2 = 2$, $a_3 = 2$

<u>Réponse :</u>

La relation de récurrence linéaire homogène à coefficient constant **$a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-3} + a_{n-4}$** admet pour équation caractéristique **$r^4 - 2r^3 + 2r - 1 = 0$.**

L'équation peut se réécrire $(r + 1)(r - 1)^3 = 0$.

Elle admet donc une racine triple r = 1 et une deuxième racine r=-1.

La forme générale des solutions de l'équation de récurrence est alors $a_n = \alpha.1^n + \beta.n.1^n + \gamma.n^2.1^n + \delta.(-1)^n$, soit $a_n = \alpha + \beta.n + \gamma.n^2 + \delta\,(-1)^n$.

À partir de cette équation, on obtient :

a_0 $= \alpha + \beta.0 + \gamma.0^2 + \delta\,(-1)^0 = \alpha + \delta$

a_1 $= \alpha + \beta.1 + \gamma.1^2 + \delta(-1)^1 = \alpha + \beta + \gamma - \delta$

a_2 $= \alpha + \beta.2 + \gamma.2^2 + \delta\,(-1)^2 = \alpha + 2\beta + 4\gamma + \delta$

a_3 $= \alpha + \beta.3 + \gamma.3^2 + \delta\,(-1)^3 = \alpha + 3\beta + 9\gamma - \delta$

En considérant les conditions initiales **$a_0 = 0$, $a_1 = -4$, $a_2 = 2$, $a_3 = 2$,** on obtient les équations suivantes :

- $\alpha + \delta$ **$= 0$**
- $\alpha + \beta + \gamma - \delta$ **$= -4$,**
- $\alpha + 2\beta + 4\gamma + \delta$ **$= 2$**
- $\alpha + 3\beta + 9\gamma - \delta$ **$= 2$**

En résolvant ces équations on obtient :

α **$= -2$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$ et $\delta = 2$**

La solution de l'équation de récurrence linéaire homogène à coefficient constant est :

$$a_n = -2 - n + n^2 + 2(-1)^n$$

Exercice 5.
Vous décidez d'utiliser la technique de diviser pour régner pour résoudre un certain type de problèmes.

- Pour $n \geq 4$, vous pouvez obtenir la solution à un exemplaire de taille n en résolvant ***64*** sous-exemplaires de taille $\lceil n/4 \rceil$.
- Le temps requis pour la décomposition de l'exemplaire original en ***64*** sous-exemplaires est $\theta(n^2/\log n)$.
- Le temps requis pour la recombinaison des solutions est en $\theta(n^2)$.

En supposant que n est une puissance de ***4***, trouvez l'ordre de grandeur du temps d'exécution de la solution.

Réponse :
Soit $f(n)$ la fonction correspondant à la solution.
En considérant les temps des manipulations complémentaires $\theta(n^2/\log n)$ et $\theta(n^2)$, on obtient une fonction $g(n)$ qui est $\theta(max(n^2/\log n, n^2))$, ***soit*** $\theta(n^2)$.
Puisque $g(n)$ est $\theta(n^2)$, elle est aussi $O(n^2)$.
On peut donc écrire que :
$f(n) = 64f(\lceil n/4 \rceil) + n^2$
Elle est de la forme $f(n) = af(\lceil n/b \rceil) + c.n^d$, avec $a = 64$, $b=4$, $c=1$ et $d=2$.
Comparons $a = 64$ et $b^d = 16$. On a que $a > b^d$
$f(n) = O(n^{\log_b a}) = O(n^{\log_4 64}) = O(n^3)$
D'où $f(n) = = O(n^3)$

Exercice 6 (facultatif). De combien de façons une douzaine de livres peuvent-ils être placés sur quatre tablettes distinctes d'une étagère.

a) Si les livres sont des exemplaires indiscernables du même titre ?
Réponse :
Tout ce qui compte est le nombre de livres sur chaque tablette, donc la réponse est le nombre de solutions à $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$, où x_i est considéré comme le nombre de livres sur l'étagère i. La réponse est donc C (4 + 12 − 1, 12) = C (15, 12) = 455.
Note : Pour la formule utilisée, voir page 28 des notes de cours sur le dénombrement ou p.446 à 448 du livre de Rosen.

b) S'il n'y a pas deux livres identiques et que la position des livres sur les tablettes est importante ?
Réponse :
Sans perte de généralité, si l'on numérote les livres $b_1, b_2, \ldots, b_{12}$ et que l'on pense à placer le livre b_1, puis à placer b_2, et ainsi de suite. Il y a clairement 4 façons de placer b_1, puisque nous pouvons le mettre comme premier livre (pour l'instant) sur n'importe laquelle des tablettes. Une fois que b_1 est placé, il y a 5 façons de placer b_2, car il peut aller à droite de b_1 ou il peut s'agir du premier livre sur l'une des quatre tablettes. Nous continuons ainsi : il y a 6 façons de placer b_3 (à droite de b_1, à droite de b_2, ou comme premier livre sur l'une des étagères), 7 façons de placer b_4, ..., 15 façons de placer b_{12}. La réponse est donc le produit de ces nombres 4x5···15=217 945 728 000.