POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810
STRUCTURES DISCRÈTES

# CONTRÔLE PÉRIODIQUE 2
H2022

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 (6 points)

a) (**3 points**) Soit A l'ensemble de tous les mots binaires de longueur 3. On considère sur A la relation R. Montrez que *R* est une relation d'équivalence sur *A*.

$$Si\ x, y\ \in A, \quad xRy\ \Leftrightarrow x\ et\ y\ ont\ les\ \text{mêmes}\ deux\ derniers\ chiffres$$

**Réponse :**

**Méthode 1**

- **Réflexivité** (0.5 point)
  Soit x ∈ A, x=abc avec a ∈ {0, 1}, b ∈ {0, 1} et c ∈ {0, 1}. On a x *R* x et la relation est réflexive.
- **Symétrie** (1 point)
  Soit x ∈ A, y ∈ A, x *R* y
  Par définition, x R y → ∃ a ∈ {0, 1}, b ∈ {0, 1}, c ∈ {0, 1} et d ∈ {0, 1}, x = abc et y = dbc.
  Les deux derniers chiffres de y étant bc comme ceux de x, on a y *R* x. La relation est symétrique.
- **Transitivité** (1 point)
  Soit x ∈ A, y ∈ A, z ∈ A, x *R* y et y *R* z.
  Par définition, x R y et y *R* z → ∃ a ∈ {0, 1}, b ∈ {0, 1}, c ∈ {0, 1}, d ∈ {0, 1} et d ∈ {0, 1}, x = abc et y = dbc et z = ebc.
  Les deux derniers chiffres de z étant bc comme ceux de x, on a z *R* x. La relation est transitive.
- **Équivalence** (0.5 point)

R est à la fois réflexive, symétrique et transitive. Elle est donc une relation d'équivalence.

**Méthode 2**

***A*** = {000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111}
***R*** = {(000, 000), (000, 100), (100, 000), (100, 100), (001, 001), (001, 101), (101, 001), (101, 101), (010, 010), (010, 110), (110, 010), (110, 110), (011, 011), (011, 111), (111, 011), (111,111)}

- **Réflexivité** (0.5 point)
  (000, 000), (001, 001), (010, 010), (011, 011), (100, 100), (101, 101), (110, 110) appartiennent tous à R.
  D'où pour tout x ∈ A, on a (x, x) ∈ *R*. La relation est réflexive.
- **Symétrie** (1 point)
  - (000, 100) et (100, 000) appartiennent à ***R***
  - (001, 101) et (101, 001) appartiennent à ***R***
  - (010, 110) et (110, 010) appartiennent à ***R***
  - (011, 111) et (111, 011) appartiennent à ***R***
  - (000, 000) appartient à ***R***
  - (100, 100) appartient à ***R***
  - (001, 001) appartient à ***R***
  - (101, 101) appartient à ***R***
  - (010, 010) appartient à ***R***
  - (110, 110) appartient à ***R***
  - (011, 011) appartient à ***R***
  - (111,111) appartient à ***R***

  D'où pour tout (x, y) ∈ R, on a (y, x) ∈ *R*. La relation est symétrique.
- **Transitivité** (1 point)
  - (000, 000), (000, 100), (100, 100) et (100, 000) appartiennent à ***R***
  - (001, 001), (001, 101), (101, 101) et (101, 001) appartiennent à ***R***
  - (010, 010), (010, 110), (110, 110) et (110, 010) appartiennent à ***R***
  - (011, 011), (011, 111), (111,111) et (111, 011) appartiennent à ***R***

D'où pour tout (x, y) ∈ R et (y, z) ∈ *R*, on a (x, z) ∈ *R*. La relation est transitive.

- **Équivalence** (0.5 point)

R est à la fois réflexive, symétrique et transitive. Elle est donc une relation d'équivalence.

b) (**2 points**) On considère sur *B= {a, b, c, d}*, la relation $T_1$. Donnez la fermeture transitive $T_2$ de $T_1$.

$T_1$ = {(a, b), (b, a), (c, d), (d, c), (a, c), (d, b)}

**Réponse :**

$T_2$ = {(a, b), (b, a), (c, d), (d, c), (a, c), (d, b), **(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, d), (d, a), (b, c), (c, b), (c, a), (b, d)**}

c) (**1 point**) Soit l'ensemble des entiers. Montrez que la relation *R* est antisymétrique.

$$xRy \iff \exists\, k \in \mathbb{N}^*, \qquad y = x^k$$

Soit x et y deux entiers non nuls tel que ***x R y*** et ***y R x***.

Par définition :

$xRy \Leftrightarrow \exists k_1 \in N^*, y = x^{k_1}$

$yRx \Leftrightarrow \exists k_2 \in N^*, x = y^{k_2}$

En remplaçant q dans la 2ème égalité par son expression de la 1ère égalité, on obtient :

$\boldsymbol{x = x^{k_1 \times k_2}}$

Ainsi on a $\boldsymbol{k_1 \times k_2 = 1}$, soit $\boldsymbol{k_1 = k_2 = 1}$

D'où $\boldsymbol{x = y}$

R est donc antisymétrique.

**<u>Exercice 2</u>** (4 points)

Est-ce que :

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^{i} = O(1)\ ?$$

Justifiez votre réponse.

**<u>Réponse :</u>**

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^{i} = 3.\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

Pour tout $n \geq 0$, $-(2/3)^{n+1} \leq 0$

On peut donc écrire que pour tout $n \geq 0$, $1 - (2/3)^{n+1} \leq 1$

Et en déduire que pour tout $n \geq 0$, $3(1 - (2/3)^{n+1}) \leq 3$

L'expression est inférieure à une constante pour $n \geq 0$. Nous pouvons prendre k = 1 et c = 3.

D'où

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^{i} = O(1)$$

**Note :** Il suffit de considérer dans la formule générale du grand-O que g(n)=1. Il faut donc trouver un c et un k tel que pour $n \geq k$, $f(n) \leq c$.

<u>Exercice 3</u> (5 points)

Résolvez dans $\mathbb{Z}$ l'équation :

720 a + 27 b = 36

**<u>Réponse :</u>**

PGCD(720, 27) = 9

9 divise 36, alors l'équation 720 a + 27 b = 36 possède des solutions.

Si on divise le tout par 9, on obtient 80 a + 3 b = 4.

Il suffit donc de résoudre 80 x + 3 y = 1, puis multiplier les résultats obtenus par 4 pour trouver a et b.

Utilisons l'algorithme étendu d'Euclide pour trouver x et y.

[80, 1, 0] [3, 0, 1]

[2, 1, -26] [3, 0, 1]

[2, 1, -26] [1, -1, 27]

[1, 2, -53] [1, -1, 27]

Nous pouvons prendre x = -1 et y = 27 comme une des solutions de 80 x + 3 y = 1.

On en déduit que a = -4 et b = 108 constituent une solution particulière de l'équation80 a + 3 b = 4 et par conséquent, solution particulière de l'équation 720 a + 27 b = 36.

Les solutions recherchées sont donc de la forme **a = -4 - 3k** et **b = 108 + 80k**, avec k entier.

Exercice 4 (5 points)
En utilisant l'induction mathématique, démontrez pour tout entier positif non nul n que.

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

**Réponse :**

Posons S(n) = $\frac{1}{1\times3} + \frac{1}{3\times5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

Soit P(n) : $S(n) = \frac{n}{2n+1}$

S(1) = $\frac{1}{1\times3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{(2\times1)+1}$

P(1) est donc vraie.

Supposons pour un certain n positif non nul que P(n) est vraie, c'est-à-dire $S(n) = \frac{n}{2n+1}$

Montrons que P(n+1) est vraie.

$$S(n+1) = S(n) + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}$$

$$S(n+1) = S(n) + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

Par hypothèse d'induction, $S(n) = \frac{n}{2n+1}$

Alors,

$$S(n+1) = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

En simplifiant l'expression, on obtient :

$$S(n+1) = \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$S(n+1) = \frac{(n+1)}{(2n+3)}$$

$$S(n+1) = \frac{(n+1)}{2(n+1)+1}$$

P(n+1) est donc vraie.

Ainsi, pour un certain n positif non nul, lorsque P(n) est vraie, P(n+1) est vraie.

Conclusion

P(1) est vraie et pour tout n ≥ 1, P(n) →P(n+1) est vraie.

CQFD.