POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 10 : GRAPHES

A2022

Directives pour la remise :

- Répondez directement sur ce document papier.
- La remise est individuelle, mais le travail en équipe est encouragé.
- La remise se fait à la fin de la séance de TD.
- **Aucun retard ne sera accepté.**
- **Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.**

Identification

Veuillez inscrire votre section, nom, prénom et matricule ainsi que les noms des collègues avec lesquels vous avez collaboré pour le TD

Section :

Nom :

Prénom :

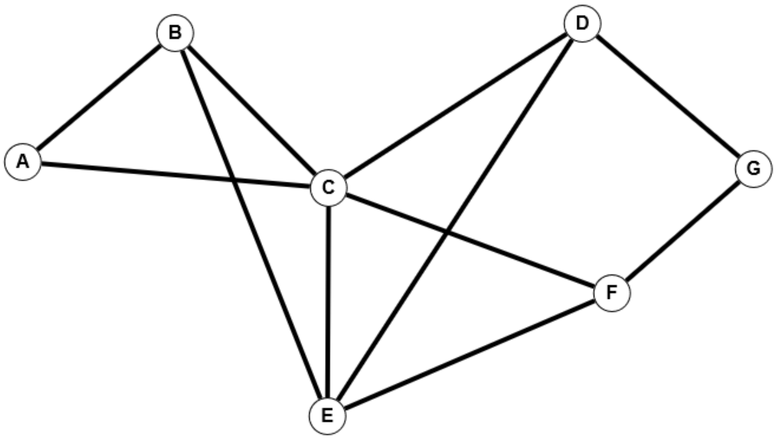
Matricule :

Collègues :

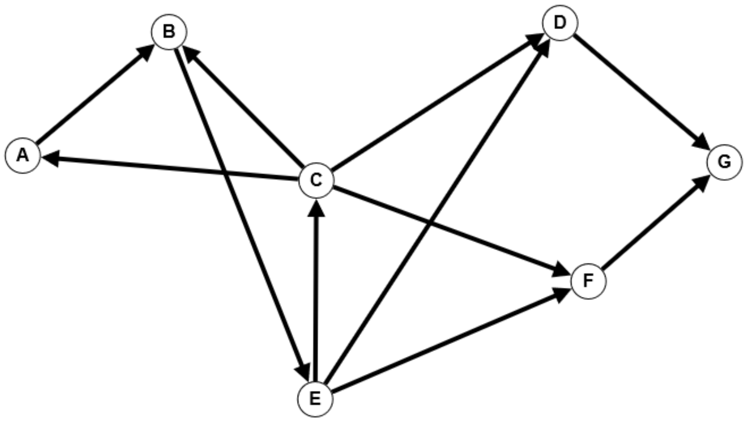
Exercice 1 :

Pour les graphes si dessous :

Graphe 1 :



Graphe 2 :



a. donner la liste d'adjacence des graphes 1 et 2.

Réponse :

graphe 1 :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Sommets adjacents	B,C	A,C,E	A,B,D,E,F	C,E,G	B,C,D,F	C,E,G	D,F

graphe 2 :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Sommets adjacents	B	E	A,B,D,F	G	C,D,F	G	

b. Donner les matrice d’adjacence des graphe 1 et 2.

Réponse :

Les lignes et les colonnes de chaque matrice sont respectivement étiquetées A,B,C,D,E,F,G.

Graphe 1 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

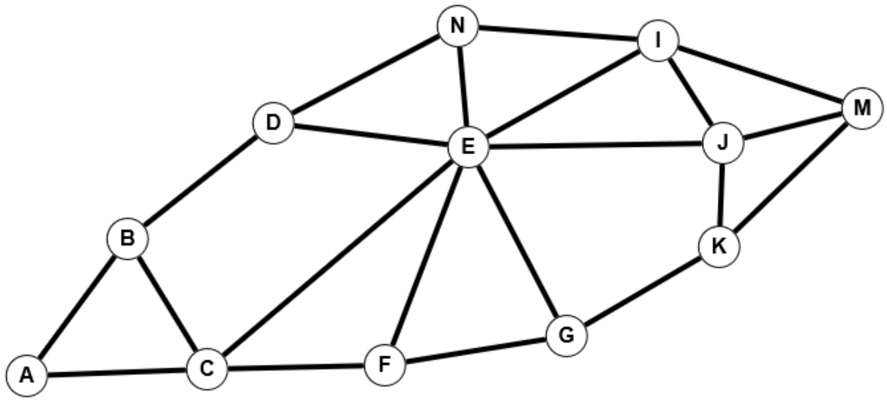
Graphe 2 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c. Le graphe 1 est-il connexe ?

Réponse :

oui

Exercice 2:
On considère le graphe suivant :



a. À partir du Sommet A, donnez un parcours en largeur du graphe.

Réponse : Plusieurs solutions possibles. Une solution est :

Sommet visité	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**N**
File des sommets à visiter	[B,C]	[C,D]	[D,E,F]	[E,F,N]	[F,N,I,J,G]	[N,I,J,G]	[I,J,G]

Sommet visité (suite)	**I**	J	G	M	K
File des sommets à visiter (suite)	[I,J,G,M]	[G,M,K]	[M,K]	[K]	[]

Un parcours en largeur possible est : A-B-C-D-E-F-N-I-J-G-M-K

b. À partir du sommet A, donnez un parcours en profondeur du graphe.

Réponse : Plusieurs solutions possibles. Une solution est :

On utilise la méthode de la pile.

Sommet visité	**A**	**B**	**D**	**N**	**I**	**M**	**K**
Pile des sommets à visiter	[B,C]	[D,C]	[N,E,C]	[I,E,C]	[M,J,E,C]	[K,J,E,C]	[G,J,E,C]

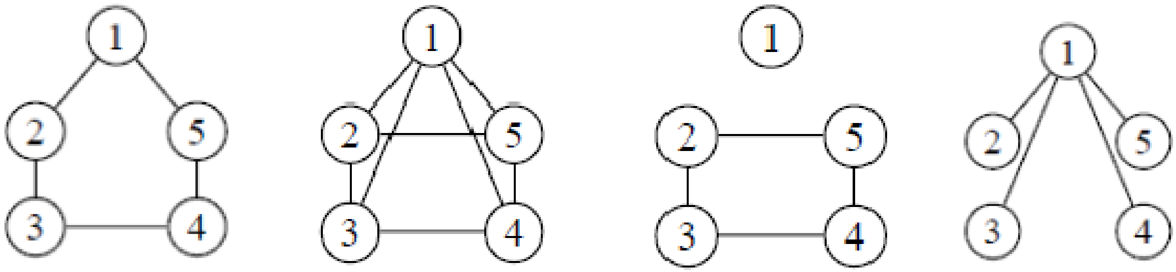
Sommet visité (suite)	**G**	**F**	**J**	**E**	**C**
File des sommets à visiter (suite)	[F,J,E,C]	[J,E,C]	[E,C]	[C]	[]

Un parcours en profondeur possible est : A-B-D-N-I-M-K-G-F-C-E-J

Exercice 3 :

On considère les graphes ci-dessous. Pour chacun, répondez à 2 questions :

- Le graphe admet-il un cycle hamiltonien ? Si oui, donnez un exemple.
- Le graphe admet-il un cycle eulérien ? Justifiez votre réponse.



Graphe 1 *Graphe 2* *Graphe 3* *Graphe 4*

a. Graphe 1

Réponse :

- Graphe hamiltonien. Existence de cycle hamiltonien : 1-2-3-4-5-1
- Graphe eulérien. Tous les sommets sont de degrés pairs.

b. Graphe 2

Réponse :

- Graphe hamiltonien. Existence de cycle hamiltonien : 1-2-3-4-5-1
- Graphe non eulérien. Existence de sommets de degrés impairs. Exemples : 2, 5, 3, 4.

c. Graphe 3

Réponse :

- Graphe non hamiltonien. Existence d'un sommet isolé : 1.
- Graphe eulérien. Tous les sommets sont de degrés pairs.

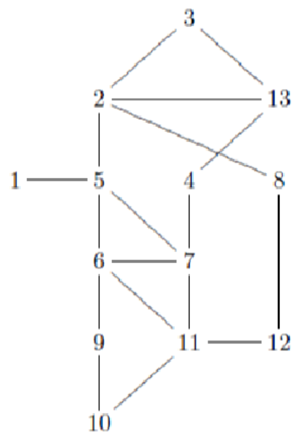
d. Graphe 4

Réponse :

- Graphe non hamiltonien. Existence d'un sommet de degré 1. Exemples : 2, 5, 3, 4
- Graphe non eulérien. Existence de sommets de degrés impairs. Exemples : 2, 5, 3, 4.

Exercice 4 :

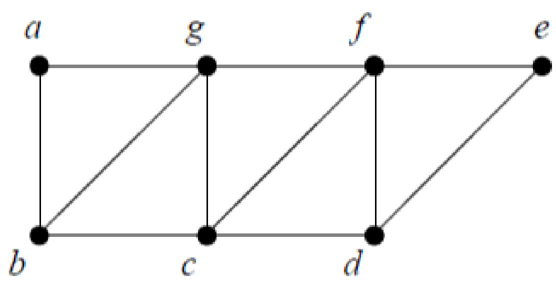
a. Le graphe ci-dessous admet-il une chaîne eulérienne ? Justifiez votre réponse et si oui, déterminez-en une.



Réponse :

- Oui. Le graphe admet une chaîne eulérienne. En effet, il contient exactement 2 sommets de degrés impairs, soit deg(13) = 3 et deg(1) = 1
- Exemple de chaîne eulérienne : 1-5-6-9-10-11-6-7-5-2-8-12-11-7-4-13-2-3-13

b. Le graphe ci-dessous admet-il une chaîne hamiltonienne ? Si oui,déterminez-en une.

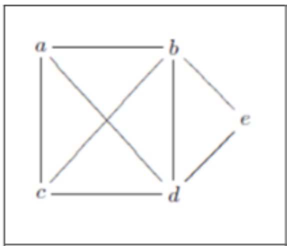


Réponse :

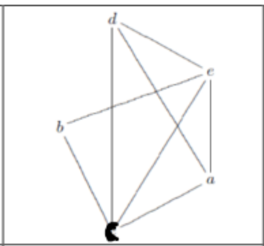
Oui, exemple : a-b-g-c-f-d-e

Exercice 5 :

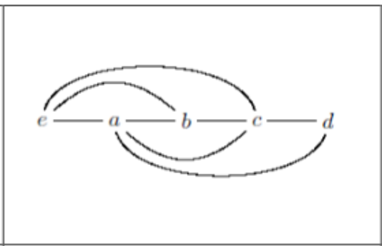
Parmi les graphes ci-dessous, lesquels sont isomorphes ? Justifiez vos réponses.



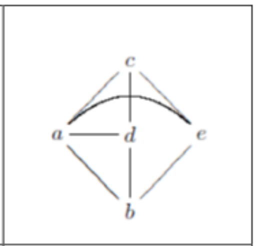
Grape 1



Graphe 2



Grape 3



Graphe 4

Réponse :

On a :

- Graphe 1 : deg(a) = 3, deg(b) = 4, deg(c) = 3, deg(d) = 4, deg(e) = 2
- Graphe 2 : deg(a) = 3, deg(b) = 2, deg(c) = 4, deg(d) = 3, deg(e) = 4
- Graphe 3 : deg(a) = 4, deg(b) = 3, deg(c) = 4, deg(d) = 2, deg(e) = 3
- Graphe 4 : deg(a) = 4, deg(b) = 3, deg(c) = 3, deg(d) = 3, deg(e) = 3

Les graphes 1 et 2 sont isomorphes. Le graphe 1 peut être transformé en graphe 2 à travers la fonction f suivante : f(a) = d, f(b) = e, f(c) = a, f(d) = c, f(e) = b.

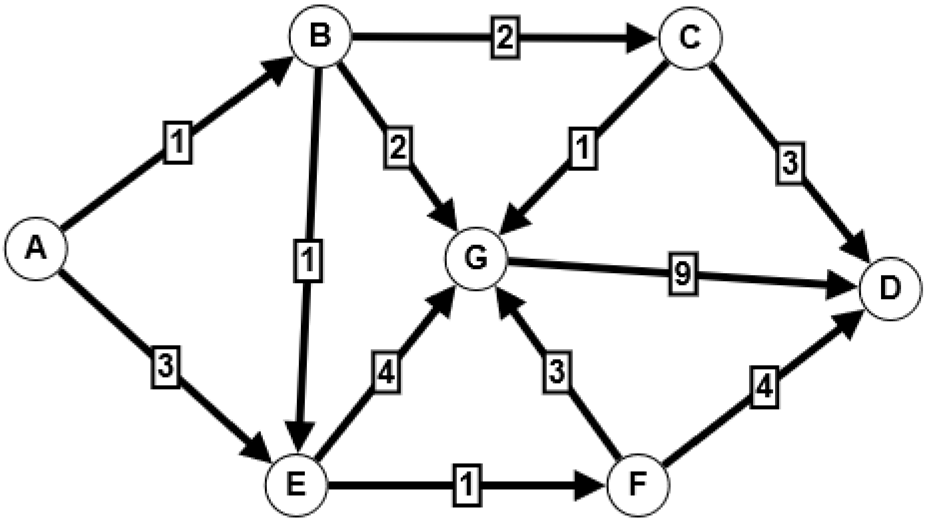
Les graphes 1 et 3 sont isomorphes. Le graphe 1 peut être transformé en graphe 3 à travers la fonction g suivante : g(a) = b, g(b) = a, g(c) = e, g(d) = c, g(e) = d.

Les graphes 2 et 3 sont isomorphes. Le graphe 2 peut être transformé en graphe 3 à travers la fonction h suivante : h(a) = e, h(b) = d, h(c) = c, h(d) = b, h(e) = a.

En vérifiant les propriétés de préservation des degrés, on a que le graphe 4 n'a aucun sommet de degré 2. De plus il a 4 sommets de degrés 3, ce qu'aucun autre graphe n'a. Il n'est donc isomorphe à aucun des graphes 1, 2 et 3.

Exercice 6 :

Utilisez l'algorithme de Dijkstra pour calculer les parcours les plus courts du sommet de départ unique A vers tous les autres sommets. Spécifiez chacun des parcours et la distance pour atteindre chacun des sommets.



Réponse :

Les étapes et les calculs sont consignés dans le tableau ci-dessous

Itération	S	A	B	C	D	E	F	G
0	Ø	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	{A}	-	1 (AB)	∞	∞	3 (AE)	∞	∞
2	{A, B}	-	-	3 (ABC)	∞	2 (ABE)	∞	3 (ABG)
3	{A, B, E}	-	-	3 (ABC)	∞	-	3 (ABEF)	3 (ABG)
4	{A, B, E, C}	-	-	-	6 (ABCD)	-	3 (ABEF)	3 (ABG)
5	{A, B, E, C, G}	-	-	-	6 (ABCD)	-	3 (ABEF)	-
6	{A, B, E, C, G, F}	-	-	-	6 (ABCD)	-	-	-
7	{A, B, E, C, G,F,D}	-	-	-	-	-	-	-
CONCLUSION		-	1 (AB)	3 (ABC)	6 (ABCD)	2 (ABE)	3 (ABEF)	3 (ABG)

Exercice 7:
Skynet est un réseau de 15 routeurs. Chaque routeur est directement connecté à au moins 7 autres routeurs. Est-ce qu'une information peut transiter d'un routeur à n'importe quel autre à travers le réseau ? Justifier votre réponse en modélisant le problème sous forme de graphe.

Réponse :
On modélise le réseau Skynet sous forme d'un graphe G :

- chaque routeur est représenté par un sommet,
- 2 routeurs sont reliés par une arête s'ils sont directement connectés.

Une information peut transiter d'un routeur à n'importe quel autre à travers le réseau si et seulement si G est connexe.

Montrons que G est connexe :
Soit A un sommet quelconque. A est lié à au moins 7 sommets (routeurs) différents. Nous avons donc un sous-graphe connexe de 8 sommets.
Soit un sommet B ne faisant pas partie de ce sous-graphe. Il est également connecté à au moins sept autres sommets ; il y a donc un nouveau sous-graphe connexe de 8 sommets.
Il doit y avoir un sommet partagé entre les 2 sous-graphes, car sinon le réseau aurait au moins 16 sommets. Les 2 sous-graphes connexes sont donc connectés, d'où G est connexe.

Conclusion : oui, une information peut transiter d'un routeur à n'importe quel autre à travers Skynet .