POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810
STRUCTURES DISCRÈTES

CONTRÔLE PÉRIODIQUE 1
E2024

SOLUTIONNAIRE

<u>Exercice 1</u> (**3 points)**

Considérez les propositions suivantes concernant un serveur donné.

P: Le serveur est fonctionnel.
Q: Le serveur est joignable par le réseau.
R: Le serveur est dans un état récupérable.

Traduisez les déclarations ci-dessous en logique propositionnelle.

a. (**1.5 point)** Le serveur n'est plus fonctionnel dès qu'il n'est plus joignable par le réseau.

<u>Réponse :</u> $\neg Q \rightarrow \neg P$

b. (**1.5 point)** Le serveur est dans un état récupérable si et seulement s'il est encore joignable par le réseau, mais qu'il est dans un état non fonctionnel.

<u>Réponse :</u> $R \leftrightarrow (Q \land \neg P)$

<u>Exercice 2</u> (**4 points)**

Soit les définitions suivantes :

- **U** : univers du discours, celui des études à Polytechnique Montréal.
- Aime(x, y) : x aime y
- Suivi(x, y) : x à suivi le cours y
- E(x) : x est une personne étudiante
- C(x) : x est un cours offert par Polytechnique Montréal
- m : Mathématiques

Exprimez les négations des propositions suivantes en utilisant des quantificateurs et les définitions ci-dessus.

a. (**1.75 point)** Toutes les personnes étudiantes aiment les mathématiques.

<u>Réponse :</u>

L'énoncé se traduit comme suit :

- $\forall x \in \mathbf{U}, E(x) \rightarrow Aime(x, m)$

Sa négation est donc :

- $\boldsymbol{\exists x \in U, E(x) \land \neg Aime(x, m)}$

<u>Note</u>

La traduction de l'énoncé se traduit comme suit n'est pas admise :

- $\forall x \in \mathbf{U}, E(x) \land Aime(x, m)$

Car sa négation ci-dessous ne traduit pas la négation de l'énoncé. :

- $\boldsymbol{\exists x \in U, \neg E(x) \lor \neg Aime(x, m)}$

c. **(2.25 points)** Il y a une personne étudiante qui a suivi tous les cours de mathématiques offerts par Polytechnique Montréal.

Réponse :

L'énoncé se traduit comme sous l'une des formes suivantes :

- $\exists x \in \mathbf{U}$, $E(x) \rightarrow [C(m) \land Suivi(x, m)]$

Sa négation est donc :

- $\forall x \in \mathbf{U}$, $E(x) \land [\neg C(y) \lor \neg\ Suivi(x, m)]$

Note

Les traductions suivantes sont tolérées.

- $\exists x \in \mathbf{U}$, $E(x) \land C(m) \land Suivi(x, m)]$
- $\exists x \in \mathbf{U}$, $E(x) \rightarrow [C(m) \rightarrow Suivi(x, m)\ ]$

Ainsi les négations respectives sont admises mais avec une partie de la note pour la première.

- $\forall x \in \mathbf{U}$, $[\neg E(x) \lor \neg C(m) \lor \neg Suivi(x, m)]$
- $\forall x \in \mathbf{U}$, $[(E(x) \land C(m)) \rightarrow \neg Suivi(x, m)]$
- $\forall x \in \mathbf{U}$, $[E(x) \land C(m) \land \neg\ Suivi(x, m)]$

Exercice 3 (**6 points)**

Une personne étudiante fait la déclaration suivante.

<<Fumer est nocif pour la santé. Boire sans modération aussi, d'ailleurs. Quand je ne fume pas, je bois sans modération. Ces habitudes mettent donc ma santé en danger.>>

En vous basant sur les définitions, les traductions ci-dessous, vos connaissances en logique ainsi que les règles d'inférence vu en cours, que dites-vous du raisonnement de cette personne ? Vous devez numéroter et justifier convenablement les étapes de votre raisonnement.

Définitions

F : Fumer
B : Boire sans modération
R : Existence d'un risque pour la santé

Traductions

Énoncé	Expression logique
Fumer est nocif pour la santé.	H1 : $F \rightarrow R$
Boire sans modération est nocif pour la santé.	H2 : $B \rightarrow R$
Quand je ne fume pas, je bois sans modération.	H3 : $\neg F \rightarrow B$
Ma santé en danger.	C : R

Réponse : Plusieurs solutions sont possibles.

Solution 1

1. $\neg F \rightarrow B$	H3
2. $\neg B \rightarrow \neg(\neg F)$	Ligne 1 et équivalence par contraposition
3. $\neg B \rightarrow F$	Ligne 2 et application de la loi de double négation
4. $F \rightarrow R$	H1
5. $\neg B \rightarrow R$	Lignes 3 et 4 et application de la règle du syllogisme par hypothèse
6. $\neg R \rightarrow \neg(\neg B)$	Ligne 5 et équivalence par contraposition
7. $\neg R \rightarrow B$	Ligne 6 et application de la loi de double négation
8. $B \rightarrow R$	H2
9. $\neg R \rightarrow R$	Lignes 7 et 8 et application de la règle du syllogisme par hypothèse
10. $\neg(\neg R) \vee R$	Ligne 9 et traduction de l'implication en disjonction
11. $R \vee R$	Ligne 10 et application de la loi de double négation
12. R	Ligne 11 et application de la loi d'idempotence
13. C	Ligne 12 et définition

Conclusion

Le raisonnement de la personne étudiante est bien valide.

Solution 2

1. $\neg F \rightarrow B$	H3
2. $\neg B \rightarrow \neg(\neg F)$	Ligne 1 et équivalence par contraposition
3. $\neg B \rightarrow F$	Ligne 2 et application de la loi de double négation
4. $F \rightarrow R$	H1
5. $\neg B \rightarrow R$	Lignes 3 et 4 et application de la règle du syllogisme par hypothèse
6. $\neg(\neg B) \vee R$	Ligne 5 et traduction de l'implication en disjonction
7. $B \vee R$	Ligne 6 et application de la loi de double négation
8. $B \rightarrow R$	H2
9. $\neg B \vee R$	Ligne 8 et traduction de l'implication en disjonction
10. $(R \vee R)$	Lignes 7 et 9 et application de la loi de la résolution
11. R	Ligne 10 et application de la loi d'idempotence
12. C	Ligne 11 et définition

Conclusion

Le raisonnement de la personne étudiante est bien valide.

Exercice 4 **(4.5 points)**

Soit ***g*** la fonction qui donne le reste de la division entière par 10.

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

a. **(1.5 point)** Si ***g*** est définie de $\mathbb{N}$ vers S, est-elle injective ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

On peut montrer que ***g*** n'est pas injective en utilisant un contre-exemple. En effet, $g(0) = 0$ et $g(10) = 0$. 0 et 10 ont la même image qui est 0.
D'où g n'est pas injective.

b. **(1.5 point)** Si ***g*** est définie de $\mathbb{N}$ vers S, est-elle surjective ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

On note que $\forall x \in \mathbb{N}, \boldsymbol{g}(x) \in \mathbf{S}$. En effet, tout reste de la division entière par 10 est inférieur à 10, donc compris entre 0 et 9. Tout reste de la division entière par 10 appartient donc à $\mathbf{S}$.

Ainsi, $\forall y \in \mathbf{S}, \exists x \in \mathbb{N}, \boldsymbol{g}(x) = y$

D'où g est surjective.

c. **(1.5 point)** Si ***g*** est définie de $\mathbf{S}$ vers $\mathbf{S}$, est-elle injective ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

On note que $\forall x \in \mathbf{S}, \boldsymbol{g}(x) = x$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbf{S}, [\boldsymbol{g}(x) = \boldsymbol{g}(y)] \rightarrow (x = y)$

D'où g est injective sur $\mathbf{S}$.

Exercice 5 **(2.5 points)**

Soit A, B et C trois ensembles. On a :

- $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x - 3| < 2 \}$
- $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \}$.

Déterminez $C = A \cap B$

Réponse :

On a : A = $]\,1, 5\,[$ et B = $]-\infty, 2[$

Ainsi C=]1,2[