POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810
STRUCTURES DISCRÈTES

TD 12 : MODÉLISATION COMPUTATIONNELLE

H2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1.

Soit la grammaire $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{P})$ avec $\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{go}, \boldsymbol{Habs}, !, \boldsymbol{S}\}$, $\boldsymbol{T} = \{\boldsymbol{go}, \boldsymbol{Habs}, !\}$. $\boldsymbol{S}$ est l'axiome et $\boldsymbol{P}$ l'ensemble des règles de production suivantes : $\boldsymbol{S \to S\,S \mid S\,! \mid S\,!\,S \mid go \mid Habs \mid \varepsilon}$

La phrase « $\boldsymbol{go}\,!\,\boldsymbol{Habs}\,!\,!\,\boldsymbol{go}\,!\,\boldsymbol{Habs}\,!\,\boldsymbol{go}\,!$ » est-elle reconnue par cette grammaire ? Dans l'affirmative, donnez l'arbre de dérivation (dérivation à gauche) correspondant.

Réponse :

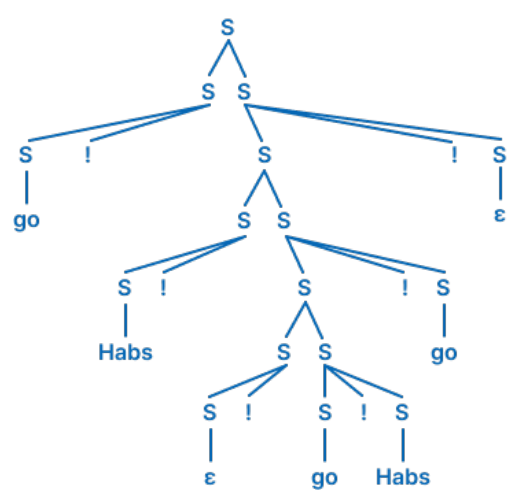
Oui, la phrase « $\boldsymbol{go}\,!\,\boldsymbol{Habs}\,!\,!\,\boldsymbol{go}\,!\,\boldsymbol{Habs}\,!\,\boldsymbol{go}\,!$ » est reconnue par cette grammaire.

Il est plus facile de construire l'arbre de dérivation à partir de la chaîne de dérivation car la chaîne fournit une séquence d'étapes claire et directe pour construire l'arbre étape par étape.

- La chaîne de dérivation

$\boldsymbol{S \to S\,S}$	
$\boldsymbol{S \to S\,!\,S}$	$(\boldsymbol{car\ S \to S\,!})$
$\boldsymbol{S \to go\,!\,S}$	$(\boldsymbol{car\ S \to go})$
$\boldsymbol{S \to go\,!\,S\,!\,S}$	$(\boldsymbol{car\ S \to S\,!\,S})$
$\boldsymbol{S \to go\,!\,S\,S\,!\,S}$	$(\boldsymbol{car\ S \to S\,S})$
$\boldsymbol{S \to go\,!\,S\,!\,S\,!\,S}$	$(\boldsymbol{car\ S \to S\,!})$
$\boldsymbol{S \to go\,!\,Habs\,!\,S\,!\,S}$	$(\boldsymbol{car\ S \to Habs})$
$\boldsymbol{S \to go\,!\,Habs\,!\,S\,!\,S\,!\,S}$	$(\boldsymbol{car\ S \to S\,!\,S})$
$\boldsymbol{S \to go\,!\,Habs\,!\,S\,S\,!\,S\,!\,S}$	$(\boldsymbol{car\ S \to S\,S})$
$\boldsymbol{S \to go\,!\,Habs\,!\,S\,!\,S\,!\,S\,!\,S}$	$(\boldsymbol{car\ S \to S\,!})$
$\boldsymbol{S \to go\,!\,Habs\,!\,!\,S\,!\,S\,!\,S}$	$(\boldsymbol{car\ S \to \varepsilon})$
$\boldsymbol{S \to go\,!\,Habs\,!\,!\,S\,!\,S\,!\,S\,!\,S}$	$(\boldsymbol{car\ S \to S\,!\,S})$
$\boldsymbol{S \to go\,!\,Habs\,!\,!\,go\,!\,S\,!\,S\,!\,S}$	$(\boldsymbol{car\ S \to go})$
$\boldsymbol{S \to go\,!\,Habs\,!\,!\,go\,!\,Habs\,!\,S\,!\,S}$	$(\boldsymbol{car\ S \to Habs})$
$\boldsymbol{S \to go\,!\,Habs\,!\,!\,go\,!\,Habs\,!\,go\,!\,S}$	$(\boldsymbol{car\ S \to go})$
$\boldsymbol{S \to go\,!\,Habs\,!\,!\,go\,!\,Habs\,!\,go\,!}$	$(\boldsymbol{car\ S \to \varepsilon})$

- L'arbre de dérivation

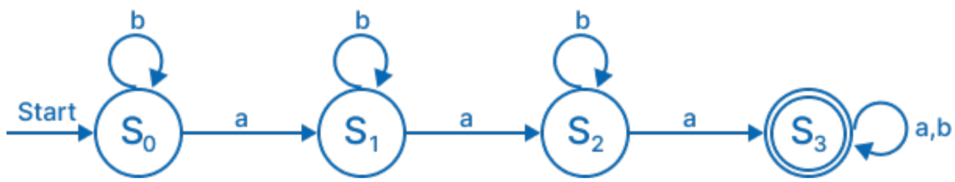


Exercice 2.

Pour chacun des langages suivants, construisez un automate fini déterministe reconnaissant le langage. Vous devez considérer l'ensemble des symboles terminaux $\boldsymbol{T} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$.

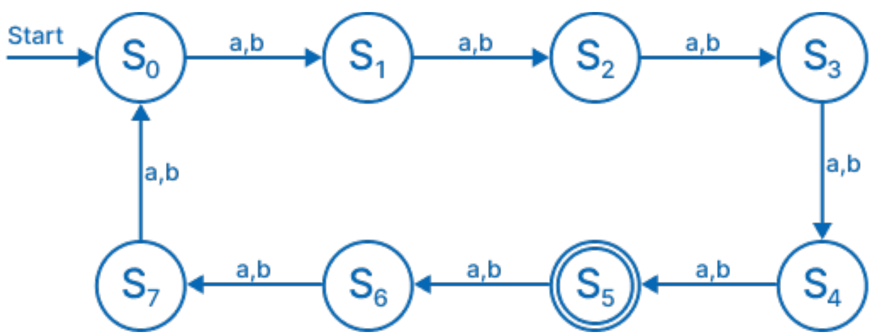
a) Le langage des mots contenant au moins trois fois la lettre $\mathbf{a}$.

Réponse :



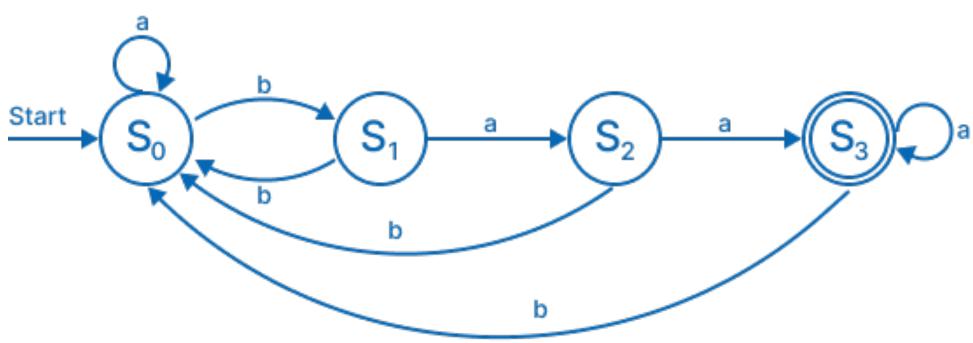
b) Le langage des mots formés des lettres $\mathbf{a}$ ou $\mathbf{b}$ dont la longueur l est congrue à 5 $modulo$ 8.

Réponse :



c) Le langage des mots finissant par au moins deux lettres $\mathbf{a}$ consécutives et qui comportent un nombre impair de lettres $\mathbf{b}$.

Réponse :



Exercice 3.
On considère l'alphabet $\boldsymbol{V} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$ et les langages $\boldsymbol{L_A}$ et $\boldsymbol{L_B}$.

$$\boldsymbol{L_A} = \{\mathbf{01}, \mathbf{101}\} \text{ et } \boldsymbol{L_B} = \{\mathbf{20000}, \mathbf{21110}, \mathbf{22220}\}$$

a) Donnez tous les mots de $\boldsymbol{V}^*$ de longueur inférieure à 3.

Réponse :

Mot de longueur 0 : ε
Mots de longueur 1 : 0, 1, 2
Mots de longueur 2 : 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22

L'ensemble de mots recherchés est donc : { ε, 0, 1, 2, 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22}

b) Déterminez $\boldsymbol{L_A}^{\mathbf{3}}$

Réponse :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L_A}^3 &= \{(01 + 101)^3\} \\ &= \{010101, 0110101, 1010101, 10110101, 0101101, 01101101, 10101101, 101101101\}\end{aligned}$$

c) Déterminez et simplifiez $\boldsymbol{L_B}^*$

Réponse :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L_B}^* &= \{\varepsilon, 20000, 21110, 22220, 2000020000, \dots\} \\ &= \{(20000 + 21110 + 22220)^*\} = \{[2(000 + 111 + 222)0]^*\} = \{[2(0^3 + 1^3 + 2^3)0]^*\}\end{aligned}$$

Exercice 4.
Soit le langage $\boldsymbol{L} = \{(\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{bbb})^*\boldsymbol{ba}^*(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\}$ construit sur l'alphabet $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$. Proposez une grammaire $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{P})$ qui engendre le langage $\boldsymbol{L}$. Vous devez préciser $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{P}$.

Réponse :

Note : Plusieurs solutions sont possibles. Celle qui est proposée ici n'est qu'une solution parmi tant d'autres.

- $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{P})$
- $\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}\}$
- $\boldsymbol{T} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$
- $\boldsymbol{P}$ est constitué des productions suivantes :

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{S} \to \boldsymbol{aA} \mid \boldsymbol{bB} \mid \boldsymbol{bD} \\ &\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{bS} \\ &\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{bC} \\ &\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{bS} \\ &\boldsymbol{D} \to \boldsymbol{aD} \mid \boldsymbol{aE} \mid \boldsymbol{bE} \mid \boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b} \\ &\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{\varepsilon}\end{aligned}$$

Exercice 5.

Soit la grammaire $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{P})$ où $\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}\}$, $\boldsymbol{T} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$. $\boldsymbol{S}$ est l'axiome et $\boldsymbol{P}$ l'ensemble des règles de production suivantes :

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{S \to ACaB}\\
&\boldsymbol{Ca \to aaC}\\
&\boldsymbol{CB \to DB \mid E}\\
&\boldsymbol{aD \to Da}\\
&\boldsymbol{AD \to AC}\\
&\boldsymbol{aE \to Ea}\\
&\boldsymbol{AE \to \varepsilon}
\end{aligned}
$$

Quel est le type de la grammaire $\boldsymbol{G}$? Justifiez votre réponse.

Réponse :

- Elle n'est pas de **type 3**, car aucune production de $\boldsymbol{P}$ n'est pas de la forme $\boldsymbol{w_1 \to a|aH}$ ou de la forme $S \to \boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{a}$ étant un symbole terminal et $\boldsymbol{H}$ un symbole non terminal.

- Elle n'est pas de **type 2** du fait de la présence de la production $\boldsymbol{Ca \to aaC}$ dont la partie gauche n'est pas symbole non terminal, mais un mot. Il en est de même pour :

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{CB \to DB|E}\\
&\boldsymbol{aD \to Da}\\
&\boldsymbol{AD \to AC}\\
&\boldsymbol{aE \to Ea}\\
&\boldsymbol{AE \to \varepsilon}
\end{aligned}
$$

- Elle n'est pas de **type 1**, car la production $\boldsymbol{CB \to E}$ est tel que $l(\boldsymbol{CB}) > \boldsymbol{l}(\boldsymbol{E})$.

- La grammaire $\boldsymbol{G}$ est donc de **type 0**.