POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 12 : MODÉLISATION COMPUTATIONNELLE

A2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1

Pour chacune des grammaires ci-dessous, déterminez leur type en justifiant vos réponses, en commençant par les grammaires de type 3 et en progressant vers celles moins restrictives.

a) Considérez la grammaire $G_1 = (V_1,\ T_1,\ S,\ P_1)$ où $V_1 = \{a,\ b,\ S,\ A,\ B\}$ et $T_1 = \{a,\ b\}$.
L'axiome est S, et l'ensemble des règles de production P_1 est le suivant :

$$\begin{aligned} S &\to aAB \\ aA &\to aAb \mid \epsilon \\ B &\to bBa \mid \epsilon \end{aligned}$$

Solution :

- Elle n'est pas de type 3. Aucune des productions n'est de la forme $w_1 \to a \mid aA$ ou de la forme $S \to \epsilon$, avec a étant un symbole terminal et A un symbole non terminal.
- Elle n'est pas de type 2 en raison de la production $aA \to aAb \mid \epsilon$, où la partie gauche n'est pas un symbole unique non terminal, mais un mot.
- Elle est de type 1, car dans toutes les productions, $l(w_1) \leq l(w_2)$ ou $w_1 \to \epsilon$.

Conclusion : G_1 est de type 1.

b) Considérez la grammaire $G_2 = (V_2,\ T_2,\ S,\ P_2)$ où $V_2 = \{c,\ d,\ S,\ C,\ D\}$ et $T_2 = \{c,\ d\}$.
L'axiome est S, et l'ensemble des règles de production P_2 est le suivant :

$$\begin{aligned} S &\to dC \mid \epsilon \\ C &\to ccc \mid cCD \\ CD &\to S \end{aligned}$$

Solution :

- Elle n'est pas de type 3 à cause de la règle de production $C \to ccc \mid cCD$, qui n'est pas de la forme $w_1 \to a \mid aA$ ou de la forme $S \to \epsilon$, avec a un symbole terminal et A un symbole non terminal.
- Elle n'est pas de type 2 en raison de la production $CD \to S$, où la partie gauche n'est pas un symbole unique non terminal, mais un mot.
- Elle n'est pas de type 1, car la production $CD \to S$ est tel que $l(CD) > l(S)$.
- Elle est donc de type 0.

Conclusion : G_2 est de type 0.

c) Considérez la grammaire $G_3 = (V_3,\ T_3,\ S,\ P_3)$ où $V_3 = \{e,\ +,\ -,\ *,\ /,\ S,\ E\}$ et $T_3 = \{e,\ +,\ -,\ *,\ /\}$. L'axiome est S, et l'ensemble des règles de production P_3 est le suivant :

$$S \ \rightarrow E \mid E + S \mid E - S$$
$$E \ \rightarrow e \mid e * E \mid e \ / \ E$$

Solution :

- Elle n'est pas de type 3 en raison de la production $S \rightarrow E \mid E + S \mid E - E$, qui ne suit pas la forme $w_1 \rightarrow a \mid aA$ ou de la forme $S \rightarrow \epsilon$, avec a un symbole terminal et A un symbole non terminal. Cette observation s'applique également à $E \rightarrow e * E$ et $E \rightarrow e \ / \ E$.
- Elle est de type 2, car tous les symboles à gauche dans les productions sont des symboles uniques non terminaux.

Conclusion : G_3 est de type 2.

Exercice 2

On considère l'alphabet $V = \{u, v, w\}$ et les langages suivants :

- $L_1 = \{uv,\ uwu\}$
- $L_2 = \{www\}$
- $L_3 = \{u,\ uv,\ vvw,\ wu\}$

a) Donnez tous les mots de V^* de longueur inférieure ou égale à 2.

Solution :

- Mot de longueur 0 : ϵ
- Mots de longueur 1 : $u,\ v,\ w$
- Mots de longueur 2 : $uu,\ uv,\ uw,\ vu,\ vv,\ vw,\ wu,\ wv,\ ww$

L'ensemble de mots recherchés est donc : $\{\epsilon,\ u,\ v,\ w,\ uu,\ uv,\ uw,\ vu,\ vv,\ vw,\ wu,\ wv,\ ww\}$.

b) Déterminez $L_2 \cdot L_1^2$

Solution :

$L_1{}^2 = \{(uv + uwu)^2\} = \{uvuv,\ \ uvuwu,\ \ uwuuv,\ \ uwuuwu\}$
$L_2 \cdot L_1^2 = \{www(uv + uwu)^2\} = \{wwwuvuv,\ \ wwwuvuwu,\ \ wwwuwuuv,\ \ wwwuwuuwu\}$

c) Déterminez $L_3{}^*$

Solution :

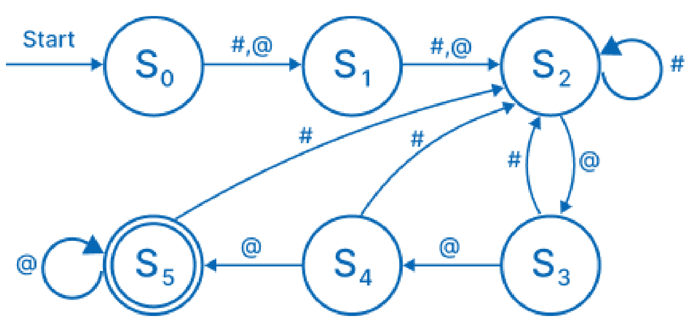
$L_3{}^* = \{(u\ +\ uv\ +\ vvw\ +\ wu)^*\} = \{\epsilon, u, uv, vvw, wu, uu, uuw, uvvw, uwu, uuu, \ldots\}$

Exercice 3

Pour chacun des langages suivants, construisez un automate fini **déterministe** le reconnaissant. Considérez l'ensemble des symboles terminaux $I = \{\#,\ @\}$.

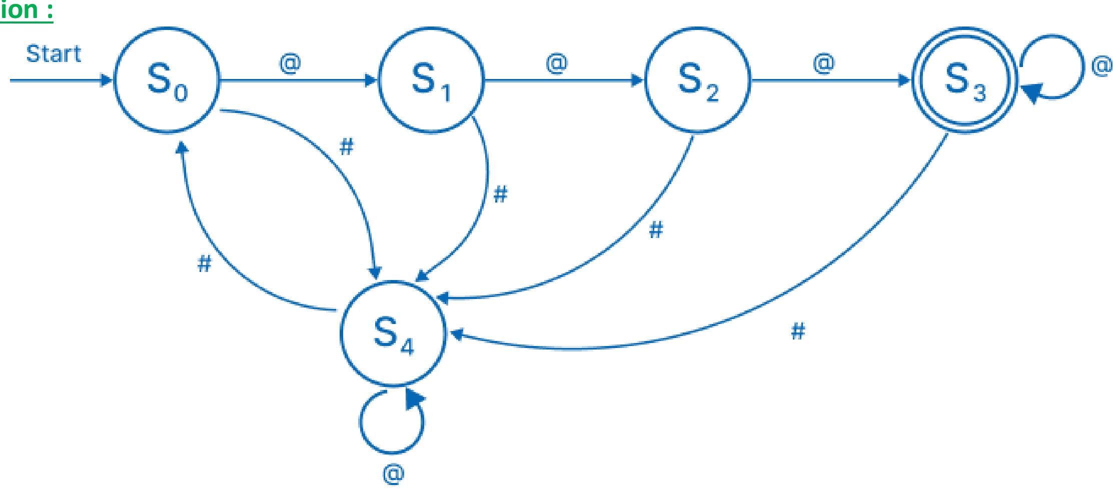
a) Le langage des mots composés d'au moins cinq symboles, se terminant par trois symboles « @ » ou plus.

Solution :



b) Le langage des mots se terminant par au moins trois symboles « @ » consécutifs et comportant un nombre pair de symboles « # ».

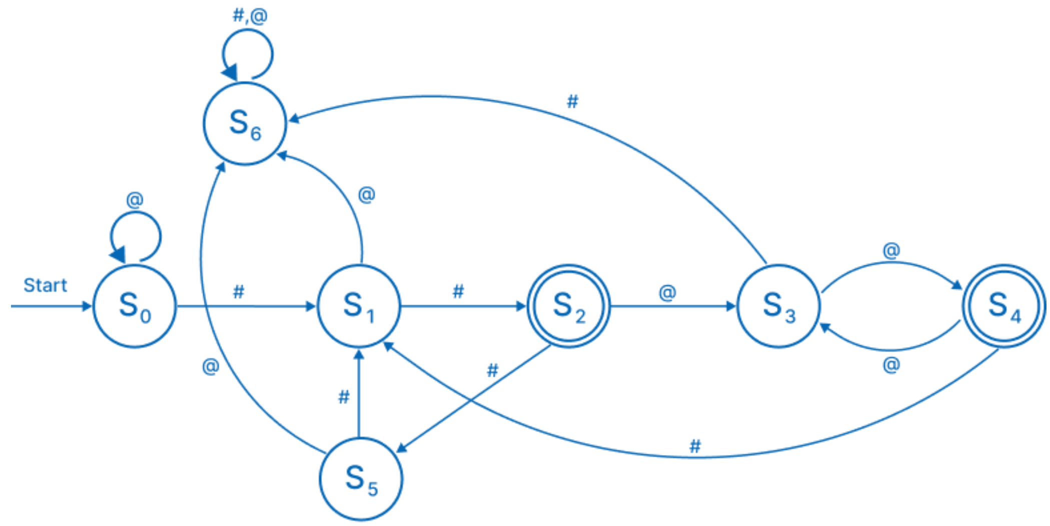
Solution :



c) Le langage des mots contenant au moins une séquence de symboles « # », où le nombre total de « # » consécutifs dans chaque séquence est congru à 2 $modulo$ 3, suivi d'un nombre pair de symboles « @ ».

<u>Exemple</u> : les mots « ##@@##@@ » et « ##### » appartiennent à ce langage.

Solution :



Exercice 4

Soit les grammaires suivantes où S est l'axiome :

- $G_A : V = \{0,\ 1,\ S\}\ ;\ T = \{0,\ 1\}\ ;\ P = \{S \rightarrow 0S1,\ S \rightarrow \epsilon\}$
- $G_B : V = \{0,\ 1,\ S\}\ ;\ T = \{0,\ 1\}\ ;\ P = \{S \rightarrow 0S1S,\ S \rightarrow \epsilon\}$
- $G_C : V = \{0,\ 1,\ S\}\ ;\ T = \{0,\ 1\}\ ;\ P = \{S \rightarrow 0SS,\ S \rightarrow 1\}$

Soit aussi les mots suivants :

- $w_x = 0^2 10101^3$
- $w_y = 0^2 1^2 01$
- $w_z = 0^3 1^3$

Indiquez quels mots sont générés par quelles grammaires. Donnez les arbres de dérivation (dérivation à gauche) correspondants.

Solution :

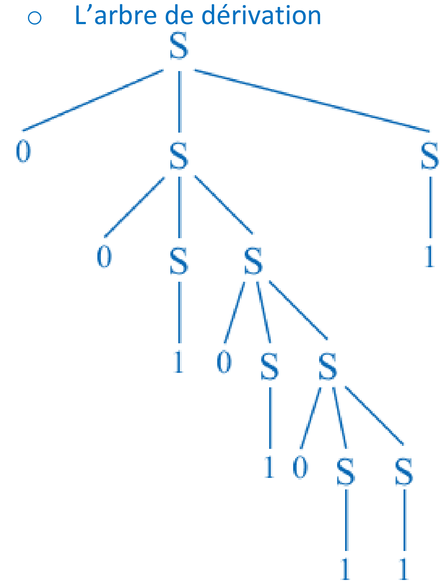
> **Note :** Il est plus facile de construire l'arbre de dérivation à partir de la chaîne de dérivation, car la chaîne fournit une séquence d'étapes claire et directe pour construire l'arbre étape par étape.

- Le mot $w_x = 0^2 10101^3 = 001010111$ est généré par la grammaire G_C.

- La chaîne de dérivation

$S \rightarrow 0SS$
$S \rightarrow 00SSS \qquad (S \rightarrow 0SS)$
$S \rightarrow 001SS \qquad (S \rightarrow 1)$
$S \rightarrow 0010SSS \qquad (S \rightarrow 0SS)$
$S \rightarrow 00101SS \qquad (S \rightarrow 1)$
$S \rightarrow 001010SSS \qquad (S \rightarrow 0SS)$
$S \rightarrow 0010101SS \qquad (S \rightarrow 1)$
$S \rightarrow 00101011S \qquad (S \rightarrow 1)$
$S \rightarrow 001010111 \qquad (S \rightarrow 1)$

- L'arbre de dérivation

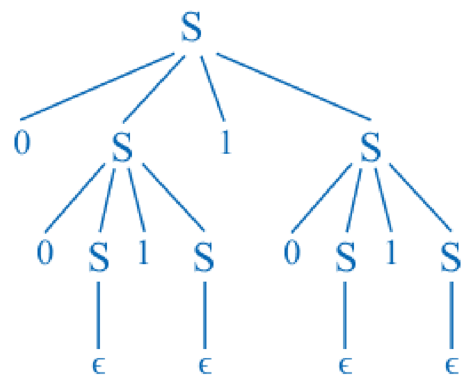


- Le mot $w_y = 0^2 1^2 01 = 001101$ est généré par la grammaire G_B.

  - La chaîne de dérivation

$S \rightarrow 0S1S$
$S \rightarrow 00S1S1S \qquad (S \rightarrow 0S1S)$
$S \rightarrow 001S1S \qquad (S \rightarrow \epsilon)$
$S \rightarrow 0011S \qquad (S \rightarrow \epsilon)$
$S \rightarrow 00110S1S \qquad (S \rightarrow 0S1S)$
$S \rightarrow 001101S \qquad (S \rightarrow \epsilon)$
$S \rightarrow 001101 \qquad (S \rightarrow \epsilon)$

  - L'arbre de dérivation

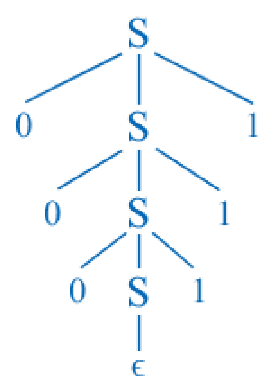


- Le mot $w_z = 0^3 1^3 = 000111$ est généré par les grammaires G_A et G_B.

  - La chaîne de dérivation G_A

$S \rightarrow 0S1$
$S \rightarrow 00S11 \qquad (S \rightarrow 0S1)$
$S \rightarrow 000S111 \qquad (S \rightarrow 0S1)$
$S \rightarrow 000111 \qquad (S \rightarrow \epsilon)$

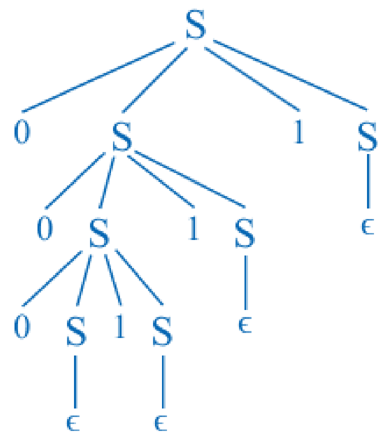
  - L'arbre de dérivation G_A



- La chaîne de dérivation G_B

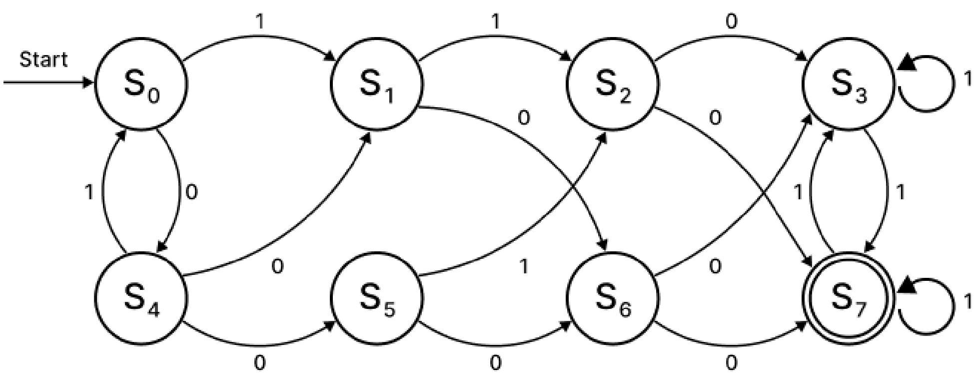
$S \rightarrow 0S1S$
$S \rightarrow 00S1S1S \quad (S \rightarrow 0S1S)$
$S \rightarrow 000S1S1S1S \quad (S \rightarrow 0S1S)$
$S \rightarrow 0001S1S1S \quad (S \rightarrow \epsilon)$
$S \rightarrow 00011S1S \quad (S \rightarrow \epsilon)$
$S \rightarrow 000111S \quad (S \rightarrow \epsilon)$
$S \rightarrow 000111 \quad (S \rightarrow \epsilon)$

- L'arbre de dérivation G_B



Exercice 5

Transformez en automate déterministe l'automate suivant. Donnez la table d'états-transition, précisez les états finaux ou acceptants et construisez l'automate déterministe que vous proposez.



Solution :

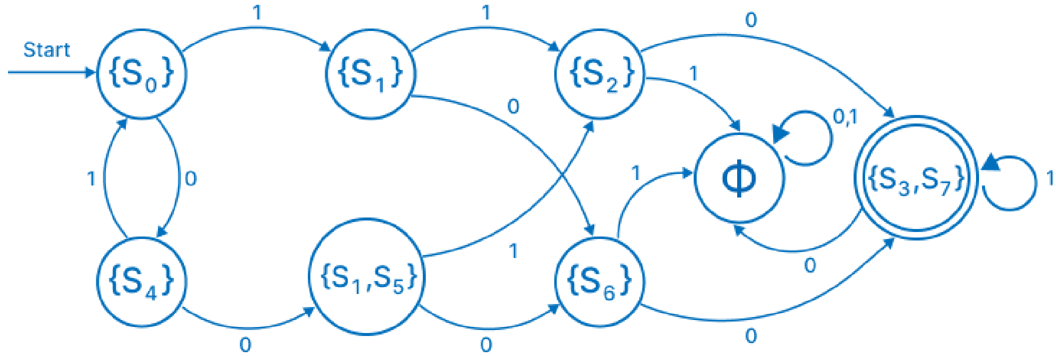
La table d'états-transition de l'automate initial est la suivante. Les états initiaux et finaux sont marqués des signes $\longrightarrow$ et $\longleftarrow$, respectivement.

États	Entrée	
	0	1
$\longrightarrow S_0$	$\{S_4\}$	$\{S_1\}$
S_1	$\{S_6\}$	$\{S_2\}$
S_2	$\{S_3, S_7\}$	$\emptyset$
S_3	$\emptyset$	$\{S_3, S_7\}$
S_4	$\{S_1, S_5\}$	$\{S_0\}$
S_5	$\{S_6\}$	$\{S_2\}$
S_6	$\{S_3, S_7\}$	$\emptyset$
$\longleftarrow S_7$	$\emptyset$	$\{S_3, S_7\}$

La table d'états-transition de l'automate déterministe émondé est la suivante. Les états initiaux et finaux sont marqués des signes $\longrightarrow$ et $\longleftarrow$, respectivement.

États	Entrée	
	0	1
$\longrightarrow \{S_0\}$	$\{S_4\}$	$\{S_1\}$
$\{S_4\}$	$\{S_1, S_5\}$	$\{S_0\}$
$\{S_1\}$	$\{S_6\}$	$\{S_2\}$
$\{S_1, S_5\}$	$\{S_6\}$	$\{S_2\}$
$\{S_6\}$	$\{S_3, S_7\}$	$\emptyset$
$\{S_2\}$	$\{S_3, S_7\}$	$\emptyset$
$\longleftarrow \{S_3, S_7\}$	$\emptyset$	$\{S_3, S_7\}$

L'automate est :



Exercice 6

Soit le langage $L = \{(a + b^{+}a)(b + ab^{*}a)ab^{*}\}$ construit sur l'alphabet $X = \{a,\ b\}$. Proposez une grammaire $G = (V, T, S, P)$ qui engendre le langage L. Vous devez préciser V, T, S et P.

Notez que l'exposant « + » indique une répétition d'une ou plusieurs occurrences du symbole auquel il est associé dans le langage L.

Solution :

Note : Plusieurs solutions sont possibles. Celle qui est proposée ici n'est qu'une solution parmi tant d'autres.

- $G = (V,\ T,\ S,\ P)$
- $V = \{a,\ b,\ S,\ A,\ B,\ C,\ D,\ E\}$
- $T = \{a,\ b\}$
- S est l'axiome
- P est constitué des productions suivantes :

  $S \rightarrow aA \mid bB$
  $A \rightarrow aC \mid bD$
  $B \rightarrow aA \mid bB$
  $C \rightarrow aD \mid bC$
  $D \rightarrow aE$
  $E \rightarrow bE \mid b$

Exercice 7

Soit le langage $L = \{ [^n \ a^m \ ]^n \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ construit sur l'alphabet $X = \{ [, \ ], \ a \}$.

a) Proposez une grammaire $G = (V, T, S, P)$ qui engendre le langage L. Vous devez préciser V, T, S et P.

Solution :

Note : Plusieurs solutions sont possibles. Celle qui est proposée ici n'est qu'une solution parmi tant d'autres.

- $G = (V, \ T, \ S, \ P)$
- $V = \{ [, \ ], \ a, \ S, \ A\}$
- $T = \{ [, \ ], \ a \}$
- S est l'axiome
- P est constitué des productions suivantes :

  $S \rightarrow [\ S\ ] \mid A \mid \epsilon$

  $A \rightarrow aA \mid a$

  Ou encore

  $S \rightarrow [\ S\ ] \mid A \mid a \mid \epsilon$

  $A \rightarrow aA \mid a$

b) Cette grammaire peut-elle être représentée par un automate fini déterministe ? Justifiez votre réponse.

Solution :

Cette grammaire est de type 2, car tous les termes à gauche sont des symboles uniques non terminaux. Cependant, la présence de la règle de production $S \rightarrow [\ S\ ]$ fait que ce n'est pas une grammaire de type 3. Étant donné que seules les grammaires régulières (de type 3) peuvent être représentées par un automate fini déterministe, cette grammaire ne peut pas l'être.