POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

CONTRÔLE PÉRIODIQUE 2

E2023

SOLUTIONNAIRE

<u>Exercice 1</u> (**2 points)**
Soit **R** la relation d'équivalence suivante dans l'ensemble E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
R = {(1, 1), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 6), (3, 2), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 1), (5, 5), (6, 2), (6, 3), (6, 6)}
Donnez les classes d'équivalence de **R**.

<u>Réponse :</u>
Les classes d'équivalence de **R** sont **:**

- **{1, 5}**
- **{2, 3, 6}**
- **{4}**

<u>Exercice 2</u> (**3 points)**
On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation ⊥ par :

$$(a, b) \perp (c, d) \iff [(ab = cd) \wedge (ac \geq 0)]$$

⊥ est-elle une relation antisymétrique ? Justifiez votre réponse.

<u>Réponse :</u>
Preuve par contre-exemple. Considérons (8, 2) et (4, 4) $\mathbb{R}^2$.
On a (8, 2) ⊥ (4, 4), car 8.2 = 4.4 = 16 et 8.4 = 32 et 32 ≥ 0.
De plus, (4, 4) ⊥ (8, 2). EN effet, car 4.4 = 8.2 = 16 et 4.8 = 32 et 32 ≥ 0.
$[(8, 2) \perp (4, 4)] \wedge [(4, 4) \perp (8, 2)] \wedge [(8, 2) \neq (4, 4)]$
⊥ n'est pas une relation antisymétrique.

<u>Exercice 3</u> (**3 points)**
Calculez :

$$3 \times 10^9 \bmod 97$$

Détaillez toutes les étapes de votre calcul.

Note : 810 = 8 x 97 + 34
<u>Réponse :</u>
Nous avons successivement :
$100 = 10^2$ donc $10^2 \equiv 3 \pmod{97}$
$10^9 = 10 \times 100^4$
$10^9 \equiv 10 \times 3^4 \pmod{97}$
$10^9 \equiv 10 \times 81 \pmod{97}$
D'après l'Énoncé, 810 = 8 x 97 + 34
Donc $10^9 \equiv 34 \pmod{97}$
$3 \times 10^9 \equiv 3 \times 34 \pmod{97}$
$3 \times 10^9 \equiv 102 \pmod{97}$
D'où $3 \times 10^9 \equiv 5 \pmod{97}$

Exercice 4 (**4.5 points)**
Déterminez l'ensemble des entiers x tel que :

$$(2x + 17) \equiv 15 \text{ mod } 18$$

Réponse :

$(2x + 17) \equiv 15$ mod 18
$(2x + 17) + 18y = 15$
$2x + 18y = -2$
$x + 9y = -1$

Résolvons l'équation x + 9y =1.
En utilisant l'algorithme d'Euclide étendu, nous avons les vecteurs [1, 1, 0][9, 0, 1].
Les opérations successives permettent d'obtenir [1, 1, 0][1, -8, 1]
(-8, 1) est une solution particulière de x + 9y =1.
Alors, (8, -1) est une solution particulière de x + 9y = -1.
X = 9k +8 avec k entier.

Exercice 5 (**3 points)**

Est-ce que n^3+2n^2 est Ω (n^3) ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

n^3+2n^2 et n^3 sont tous deux des polynômes de même degré. D'après la règle sur les polynômes, chacun est O de l'autre. Ainsi n^3 est $O(n^3+2n^2)$. Par conséquent, n^3+2n^2 est Ω (n^3).

Exercice 6 (**4.5 points)**
Montrez par récurrence que pour tout entier positif non nul **n**,

$5n^3$ + n est divisible par 6.

Réponse :
Soit la P(n) : **$5n^3$ + n** est divisible par 6, avec n un entier positif non nul.
Étape de base :
Prenons n = 1. On a **$5n^3$ + n** = 5+1 = 6.
6 est divisible par lui-même, donc la propriété est vrai à l'ordre n=1.
Étape inductive:
Supposons que P(n) est vrai pour un entier positif non nul n quelconque et montrons que P(n+1) est vrai c'est-à-dire que **$5(n+1)^3 + (n+1)$** est divisible par 6.
Développons l'expression **$5(n+1)^3 + (n+1)$**. On a :
$5(n+1)^3 + (n+1) = 5n^3+ n +15n^2 + 15n + 6$
Par hypothèse d'induction, **$5n^3$+ n** est divisible par 6. Donc **$5n^3$+ n** +6 est divisible par 6.
$15n^2 + 15n = 15n(n + 1) = 3 \times 5n(n+1)$
n(n+1) est le produit de deux entiers consécutifs dont l'un est pair. n(n+1) est alors divisible par 2 et par conséquent 3 x 5n(n+1) est divisible par 6.
Ainsi $5n^3+ n +15n^2 + 15n + 6 = 5(n+1)^3 + (n+1)$ est divisible par 6.
La propriété est donc vraie à l'ordre n+1.
Nous pouvons conclure à l'étape inductive que si P(n) est vrai alors P(n+1).
Conclusion générale
La propriété est vraie à l'ordre 1, Lorsqu'elle est vraie à l'ordre n, elle l'est à l'ordre n+1. D'où, pour tout n entier positif non nul, **$5n^3$ + n** est divisible par 6.