POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810
STRUCTURES DISCRÈTES

CONTRÔLE PÉRIODIQUE 1
H2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 (**2.5 points)**

Soit Q(x, y) l'énoncé : «**x a participé à un jeu télévisé y** ». Exprimez chacune des phrases suivantes en fonction de Q(x, y), de quantificateurs et de connecteurs logiques. L'univers du discours de x est l'ensemble ***P*** de tous les étudiants de Polytechnique Montréal et celui de y est l'ensemble ***J*** de tous les jeux télévisés.

a. **(1 point)** Tous les jeux télévisés ont eu un étudiant de Polytechnique Montréal comme participant.

Réponse :

- $\forall y \in \boldsymbol{J}, \exists x \in \boldsymbol{P}, Q(x, y)$

b. **(1.5 point)** Au moins deux étudiants de Polytechnique Montréal ont participé au jeu télévisé Génial.

Réponse :

Soit g : le jeu télévisé Génial :

- $\exists x, z \in \boldsymbol{P}, (x \neq z) \wedge Q(x, g) \wedge Q(z, g)$

Exercice 2 (**3.5 points)**

On considère l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Déterminez la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes. Justifiez vos réponses uniquement pour les questions a et b.

a. **(1 point)** $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 + y < 0$.

Réponse :

- VRAI. Il suffit de prendre n'importe quel y tel que $y < -x^2$.

b. **(1 point)** $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + y < 0$.

Réponse :

- FAUX. Aucun réel y n'est plus petit que tout autre réel négatif. En particulier, aucun réel y ne remplirait la condition d'être plus petit que l'opposé de tout carré de réel.

c. **(1.5 point)** $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, [(x > 0) \wedge (y > 0) \wedge (|z - 2| < y)] \rightarrow (|z^2 - 4| < x)$.

Réponse :

- VRAI. Il suffit de prendre n'importe quel y tel que $y^2 + 4y < x$
- Preuve détaillée (bien que n'étant pas demandée)

$(|z - 2| < y) \rightarrow - y < z - 2 < y$
$(|z - 2| < y) \rightarrow - y + 4 < z - 2 + 4 < y + 4$
$(|z - 2| < y) \rightarrow - y + 4 < z + 2 < y + 4$
$(|z - 2| < y) \rightarrow - y - 4 < - y + 4 < z + 2 < y + 4$
$(|z - 2| < y) \rightarrow - y - 4 < z + 2 < y + 4$
$(|z - 2| < y) \rightarrow (|z + 2| < y + 4)$.
$(|z - 2| < y) \rightarrow (|z + 2|.|z - 2| < y(y + 4))$.
$(|z - 2| < y) \rightarrow (|(z + 2).(z - 2)| < y(y + 4))$.
$(|z - 2| < y)] \rightarrow (|z^2 - 4| < y^2 + 4y)$.
Il suffit donc de prendre n'importe quel y tel que $y^2 + 4y < x$.

<u>Exercice 3</u> (**3 points**)

Soit E l'ensemble univers et A, B deux ensembles de cet univers. Montrez que :

$$\mathbf{E} = \overline{\overline{\mathbf{B}} \cap \left(\overline{\mathbf{A}} \cup \mathbf{B}\right)} \cup \overline{\mathbf{A}}$$

Justifiez toutes les étapes de votre preuve.

<u>Réponse :</u>

<u>Note</u> : La solution fournie ici est volontairement assez détaillée, pas à pas, pour des fins éducatives.

Transformons l'expression de droite.

$\overline{\overline{B} \cap \left(\overline{A} \cup B\right)} \cup \overline{A} = \left(\overline{\overline{B}} \cup \overline{\left(\overline{A} \cup B\right)}\right) \cup \overline{A}$	Loi de De Morgan
$\overline{\overline{B} \cap \left(\overline{A} \cup B\right)} \cup \overline{A} = \left(B \cup \overline{\left(\overline{A} \cup B\right)}\right) \cup \overline{A}$	Loi de complémentation
$\overline{\overline{B} \cap \left(\overline{A} \cup B\right)} \cup \overline{A} = \left(B \cup \left(\overline{\overline{A}} \cap \overline{B}\right)\right) \cup \overline{A}$	Loi de De Morgan
$\overline{\overline{B} \cap \left(\overline{A} \cup B\right)} \cup \overline{A} = \left(B \cup \left(A \cap \overline{B}\right)\right) \cup \overline{A}$	Loi de complémentation
$\overline{\overline{B} \cap \left(\overline{A} \cup B\right)} \cup \overline{A} = \left((B \cup A) \cap \left(B \cup \overline{B}\right)\right) \cup \overline{A}$	Distributivité
$\overline{\overline{B} \cap \left(\overline{A} \cup B\right)} \cup \overline{A} = \left((B \cup A) \cap E\right) \cup \overline{A}$	Loi du complémentaire
$\overline{\overline{B} \cap \left(\overline{A} \cup B\right)} \cup \overline{A} = (B \cup A) \cup \overline{A}$	Identité
$\overline{\overline{B} \cap \left(\overline{A} \cup B\right)} \cup \overline{A} = B \cup \left(A \cup \overline{A}\right)$	Associativité
$\overline{\overline{B} \cap \left(\overline{A} \cup B\right)} \cup \overline{A} = B \cup E$	Loi du complémentaire
$\overline{\overline{B} \cap \left(\overline{A} \cup B\right)} \cup \overline{A} = E$	Loi de domination

CQFD

<u>Exercice 4</u> (**3 points**)

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction : $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

La fonction est-elle injective ? Justifiez votre réponse.

<u>Note</u> : |x| est la valeur absolue de x.

<u>Réponse :</u>

Utilisons une preuve pas cas.

Si x est négatif, sa valeur absolue vaut -x. Alors la fonction s'écrit *:* $f(x) = \frac{x}{1-x}$

Si x est positif ou nul, sa valeur absolue vaut x. Alors la fonction s'écrit : $f(x) = \frac{x}{1+x}$

Nous allons donc considérer les 2 cas pour étudier l'injectivité de f.

- ✓ **Cas des valeurs négatives**

Supposons deux réels négatifs a et b tel que f(a)=f(b).

Si f(a)=f(b) alors a(1-b) = (1-a).b

On a donc a - ab = b -ab

Ainsi, si f(a)=f(b) alors a = b

f est donc injective sur $\mathbb{R}_{-}$.

- ✓ **Cas des valeurs positives ou nulles**

Supposons deux réels positifs ou nuls a et b tel que f(a)=f(b).

Si f(a)=f(b) alors a(1+b) = (1+a).b

On a donc a + ab = b +ab

Ainsi, si f(a)=f(b) alors a = b

F est donc injective sur $\mathbb{R}_+$.

✓ **Synthèse**

f est injective sur tout $\mathbb{R}$.

Exercice 5 (**3 points)**

En utilisant la preuve directe, montrez que pour tout entier **n** plus grand que 3 :

$$\mathbf{0 \leq n^2 - 7n + 12.}$$

Réponse :

✓ **Solution 1**

Si n > 3 alors n ≥ 4

Si n ≥ 4 alors n - 4 ≥ 0. De plus, $(n - 4)^2 \geq 0$, soit $n^2 - 8n + 16 \geq 0$.

En additionnant les deux inégalités $\mathbf{n^2 - 8n + 16 \geq 0}$ et **n - 4 ≥ 0**, on obtient :

$n^2 - 8n + n + 16 - 4 \geq 0$, soit $n^2 - 7n + 12 \geq 0$

CQFD

✓ **Solution 2**

Si n > 3 alors n ≥ 4

Si n ≥ 4 alors n - 3 ≥ 1 et n - 4 ≥ 0 (On peut ajouter l'étape suivante : Si n - 3 ≥ 1 alors n - 3 ≥ 0)

Si n ≥ 4 alors (n – 3)(n – 4) ≥ 0 (Comme produit de deux entiers positifs)

Si n ≥ 4 alors $n^2 - 7n + 12 \geq 0$

CQFD

Exercice 6 (**5 points)**

Bob un étudiant énonce ce qui suit :

H1 : Si je n'étudie pas, j'ai des remords.

H2 : Si je ne vis pas à fond ma jeunesse, j'ai aussi des remords.

H3 : Or je n'ai pas de remords.

Il conclut :

C : C'est donc que j'étudie tout en vivant à fond ma jeunesse.

Alice décide de mettre ses connaissances en logique mathématique à profit pour vérifier la validité de la conclusion. Dans un premier temps, elle procède par des définitions et des traductions comme suit :

Définitions	**Traductions**
E : J'étudie ;	**H1** : $\neg E \rightarrow R$
J : Je vis à fond ma jeunesse ;	**H2** : $\neg J \rightarrow R$
R : J'ai des remords.	**H3** : $\neg R$
	C : $E \wedge J$

À partir des travaux d'Alice et du raisonnement déductif, montrez que la conclusion de Bob est bien valide. Justifiez toutes les étapes de votre preuve.

Réponse :

1.	$\neg J \rightarrow R$	Hypothèse H2
2.	$\neg R \rightarrow J$	Étape 1 et Contraposée
3.	$\neg R$	Hypothèse H3
4.	J	Étapes 2 et 3 et Modus ponens
5.	$\neg E \rightarrow R$	Hypothèse H1
6.	$\neg R \rightarrow E$	Étape 5 et Contraposée
7.	E	Étapes 3 et 6 et Modus ponens
8.	$E \wedge J$	Étapes 4 et 7 et Loi de la conjonction

La conclusion est donc bien valide.