POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 5 : RELATIONS

H2023

SOLUTIONNAIRE

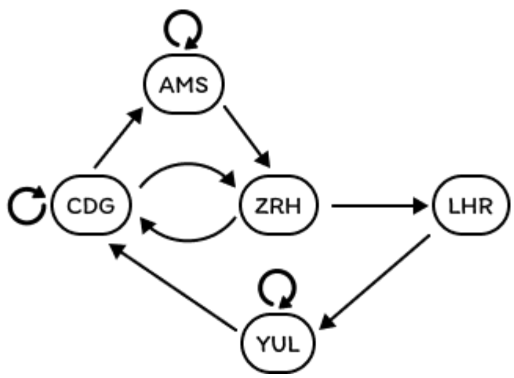
Exercice 1.

Soit les codes IATA des aéroports internationaux suivants :

- YUL (Pierre-Elliot Trudeau de Montréal, Canada)
- ZRH (Zurich, Suisse)
- CDG (Paris-Charles de Gaulle, France)
- LHR (London Heathrow, Royaume-Uni)
- AMS (Amsterdam, Pays-Bas)

En considérant l'ensemble d'aéroport ***A*** = {YUL, ZRH, CDG, LHR, AMS} et la relation ***R*** définie sur ***A*** par la disponibilité d'une liaison directe entre les aéroports, incluant une liaison directe entre un aéroport et lui-même pour les vols de test des équipages de cabine.

a) Déterminez si la relation ***R*** représentée par le graphe ci-dessous est réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive. Justifiez vos réponses.



<u>**Réponse :**</u>

- **Réflexivité** : La relation illustrée n'est pas réflexive puisqu'il existe des sommets tels que ZRH et LHR qui n'ont pas de boucle. Formellement, $\exists\, x \in \boldsymbol{A},\ (x, x) \notin \boldsymbol{R}$.

- **Symétrie** : La relation n'est pas symétrique, puisque par exemple, l'arête (CDG, AMS) est présente, mais pas l'arête (AMS, CDG). C'est à dire, **(CDG, AMS) ∈ *R* ∧ (AMS, CDG) ∉ *R***.
Formellement $\exists\, x, y \in \boldsymbol{A},\ [(x, y) \in \boldsymbol{R}] \wedge [(y, x) \notin \boldsymbol{R}]$.

- **Antisymétrie** : Elle n'est pas antisymétrique, puisque les deux arêtes (CDG, ZRH) et (ZRH, CDG) sont présentes et **CDG ≠ AMS**. Formellement $\exists\, x, y \in \boldsymbol{A},\ [(x, y) \in \boldsymbol{R}] \wedge [(y, x) \in \boldsymbol{R}] \wedge [x \neq y]$.

- **Transitivé** : Elle n'est pas transitive, puisque les deux arêtes (LHR, YUL) et (YUL, CDG) sont présentes, mais l'arête (LHR, CDG) n'est pas présente.
Formellement $\exists\, x, y, z \in \boldsymbol{A},\ [(x, y) \in \boldsymbol{R}] \wedge [(y, z) \in \boldsymbol{R}] \wedge [(x, z) \notin \boldsymbol{R}]$.

La relation ***R*** n'est ni réflexive, ni symétrique, ni antisymétrique, ni transitive.

b) Quelle est la fermeture transitive ***S*** de la relation **R** ?

Réponse :

R = {(YUL, YUL), (YUL, CDG),
(ZRH, CDG), (ZRH, LHR),
(CDG, ZRH), (CDG, CDG), (CDG, AMS),
(LHR, YUL),
(AMS, ZRH), (AMS, AMS)}

Soit ***S*** la fermeture transitive de ***R***.

S = {(YUL, YUL), (YUL, ZRH), (YUL, CDG), (YUL, LHR), (YUL, AMS),
(ZRH, YUL), (ZRH, ZRH), (ZRH, CDG), (ZRH, LHR), (ZRH, AMS),
(CDG, YUL), (CDG, ZRH), (CDG, CDG), (CDG, LHR), (CDG, AMS),
(LHR, YUL), (LHR, ZRH), (LHR, CDG), (LHR, LHR), (LHR, AMS),
(AMS, YUL), (AMS, ZRH), (AMS, CDG), (AMS, LHR), (AMS, AMS)}

Alternativement en calculant la fermeture transitive ***S*** via les matrices de puissance de relation,
Soit M la matrice de ***R***. On a donc :

$$M = \begin{array}{c} \\ YUL \\ ZRH \\ CDG \\ LHR \\ AMS \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} YUL & ZRH & CDG & LHR & AMS \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$M^{[2]} = M \odot M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^{[3]} = M^{[2]} \odot M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^{[4]} = M^{[3]} \odot M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^{[5]} = M^{[4]} \odot M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = M^{[4]}$$

La matrice de la fermeture transitive est $\boldsymbol{S} = M \vee M^{[2]} \vee M^{[3]} \vee M^{[4]} \vee M^{[5]}$

$$\boldsymbol{S} = \begin{array}{c} \\ YUL \\ ZRH \\ CDG \\ LHR \\ AMS \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} YUL & ZRH & CDG & LHR & AMS \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ainsi, ***S*** = {(YUL, YUL), (YUL, ZRH), (YUL, CDG), (YUL, LHR), (YUL, AMS),
(ZRH, YUL), (ZRH, ZRH), (ZRH, CDG), (ZRH, LHR), (ZRH, AMS),
(CDG, YUL), (CDG, ZRH), (CDG, CDG), (CDG, LHR), (CDG, AMS),
(LHR, YUL), (LHR, ZRH), (LHR, CDG), (LHR, LHR), (LHR, AMS),
(AMS, YUL), (AMS, ZRH), (AMS, CDG), (AMS, LHR), (AMS, AMS)}

Exercice 2.

On définit une relation $\boldsymbol{G}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$(x, y) \in \boldsymbol{G} \text{ si et seulement si } |x| \leq |y|.$$

$\boldsymbol{G}$ est-elle une relation d'ordre partiel ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

Pour vérifier si $\boldsymbol{G}$ est une relation d'ordre partiel, on va vérifier si elle est réflexive, transitive et antisymétrique.

- **Réflexivité :**

Soit x ∈ $\mathbb{R}$.
On a $|x| \leq |x|$.
Donc $(x, x) \in \boldsymbol{G}$.
La relation $\boldsymbol{G}$ est donc réflexive.

- **Transitivité :**

Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y) \in \boldsymbol{G}$ et $(y, z) \in \boldsymbol{G}$.
On a $|x| \leq |y|$ et $|y| \leq |z|$.
Donc, $|x| \leq |y| \leq |z|$.
On déduit, $|x| \leq |z|$.
Ainsi, $(x, z) \in \boldsymbol{G}$.
La relation $\boldsymbol{G}$ est donc transitive.

- **Antisymétrie :**

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y) \in \boldsymbol{G}$ et $(y, x) \in \boldsymbol{G}$.
On a $|x| \leq |y|$ et $|y| \leq |x|$.
On obtient, $|x| = |y|$
On déduit, x = y ou x = -y.
Donc, on n'a pas toujours x = y.
La relation $\boldsymbol{G}$ n'est donc pas antisymétrique.

En somme, $\boldsymbol{G}$ n'étant pas antisymétrique, elle ne peut être une relation d'ordre partiel.

Exercice 3.

Soit ***W*** l'ensemble de tous les mots binaires de longueur 3. On définit sur ***W*** la relation ***R***.
Montrez que ***R*** est une relation d'équivalence sur ***W***.

Si $(x, y) \in \boldsymbol{W}$, alors xRy si et seulement x et y ont les mêmes deux derniers chiffres.

Réponse :

Pour montrer que ***R*** est une relation d'équivalence, on va montrer qu'elle est, en effet, réflexive, symétrique et transitive.

- **Réflexivité :**

Soit x ∈ ***W***.
Et x=abc avec a ∈ {0, 1}, b ∈ {0, 1} et c ∈ {0, 1}.
On a x *R* x.
La relation ***R*** est donc réflexive.

- **Symétrie :**

Soit x, y ∈ ***W*** tel que x *R* y et y *R* x.
Par définition, si x *R* y, alors il existe a ∈ {0, 1}, b ∈ {0, 1}, c ∈ {0, 1} et d ∈ {0, 1} tel que x=abc et y = dbc.
Les deux derniers chiffres du mot y étant bc comme ceux de x.
Donc, on a y *R* x.
La relation ***R*** est donc symétrique.

- **Transitivité :**

Soit x, y, z ∈ ***W*** tel que x *R* y et y *R* z.
Par définition, si x R y et y *R* z, alors il existe a ∈ {0, 1}, b ∈ {0, 1}, c ∈ {0, 1}, d ∈ {0, 1} et e ∈ {0, 1} tel que x=abc et y = dbc et z = ebc.
Les deux derniers chiffres du mot x étant bc comme ceux de z.
Donc, on a x R z.
La relation ***R*** est donc transitive.

Ainsi, ***R*** est une relation d'équivalence sur ***W***, car elle est réflexive, symétrique et transitive.
CQFD

Exercice 4.

Soit E un ensemble et A une partie de E. On définit une relation R sur $P(E)$ par :

$$X \, R \, Y \text{ si et seulement si } X \cap A = Y \cap A.$$

Montrez que R est une relation d'équivalence sur $P(E)$.

Réponse :

Pour montrer que R est une relation d'équivalence, on va montrer qu'elle est, en effet, réflexive, symétrique et transitive.

- **Réflexivité :**

Soit $X \in P(E)$.
On a $X \cap A = X \cap A$.
Donc $X \, R \, X$.
La relation R est donc réflexive.

- **Symétrie :**

Soit $X, Y \in P(E)$ tel que $X \, R \, Y$.

$$\text{Donc } X \, R \, Y \quad \leftrightarrow X \cap A = Y \cap A$$
$$\leftrightarrow Y \cap A = X \cap A$$
$$\leftrightarrow Y \, R \, X$$

On a donc $X \, R \, Y \rightarrow Y \, R \, X$.
La relation R est donc symétrique.

- **Transitivité :**

Soit $X, Y, Z \in P(E)$ tel que $X \, R \, Y$ et $Y \, R \, Z$.
Donc $X \, R \, Y \leftrightarrow X \cap A = Y \cap A$.
Et $Y \, R \, Z \leftrightarrow Y \cap A = Z \cap A$.

$$\text{Donc, } (X \, R \, Y \text{ et } Y \, R \, Z) \quad \rightarrow X \cap A = Y \cap A = Z \cap A$$
$$\rightarrow X \cap A = Z \cap A$$
$$\leftrightarrow X \, R \, Z$$

On a donc $(X \, R \, Y$ et $Y \, R \, Z) \rightarrow X \, R \, Z$.
La relation R est donc transitive.

Ainsi, R est une relation d'équivalence sur $P(E)$, car elle est réflexive, symétrique et transitive.
CQFD

Exercice 5.
Soit l'ensemble $\mathbb{N}^*$. Montrez que ***R*** est une relation d'ordre partiel.

$$x \; R \; y \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } y = x^k.$$

Réponse :
Pour montrer que ***R*** est une relation d'ordre partiel, on va montrer qu'elle est, en effet, est réflexive, transitive et antisymétrique.

- **Réflexivité :**

Soit $x \in \mathbb{N}^*$.
On a $x = x^1$.
Donc, il existe un entier non nul k tel que $x = x^k$.
Donc $x \; R \; x$.
La relation ***R*** est donc réflexive.

- **Transitivité :**

Soit $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \; R \; y$ et $y \; R \; z$.
Par définition :
(1) $x \; R \; y \leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}^*, y = x^{k1}$.
(2) $y \; R \; z \leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}^*, z = y^{k2}$.
Par substitution de (1) dans (2), on obtient : $z = y^{k2}$
$= x^{k1.k2}$, car $y = x^{k1}$
$= x^k$ où $k = k1 \cdot k2$ entier
Donc, il existe un entier non nul k tel que $z = x^k$.
Donc, $x \; R \; z$.
La relation ***R*** est donc transitive.

- **Antisymétrie :**

Soit $x, y \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \; R \; y$ et $y \; R \; x$.
Par définition :
(2) $x \; R \; y \leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}^*, y = x^{k1}$.
(2) $y \; R \; x \leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}^*, x = y^{k2}$.
Par substitution de (1) dans (2), on obtient : $x = y^{k2}$
$= x^{k1.k2}$, car $y = x^{k1}$
$= x^k$ où où $k = k1 \cdot k2$ entier
$= x^1$ où $k1 \cdot k2 = 1$, soit $k1 = k2 = 1$
Donc $x = y$.
La relation ***R*** est donc antisymétrique.

Ainsi, ***R*** une relation d'ordre partiel, car elle est réflexive, transitive et antisymétrique.
CQFD

Exercice 6.

Soit ***Q*** = {3, 6, 9, 12, 15, 18} et une relation ***M*** sur cet ensemble tel que a *M* b ↔ a est un multiple de b.

a) Donnez l'ensemble des couples de cette relation ***M***.

Réponse :

M = {(3,3), (6,3), (6,6), (9,3), (9,9), (12,3), (12,6), (12,12), (15,3), (15,15), (18,3), (18,6), (18,9), (18,18)}.

b) Dites si ***M*** vérifie la propriété suivante : ∀ a, b ∈ ***Q***, [(a *M* b) ∨ (b *M* a)]. Justifiez votre réponse.

Réponse :

Contre-exemple : [(15,18) ∉ ***M***) ∧ (18,15) ∉ ***M***].

Donc, ***M*** ne vérifie donc pas la propriété ∀ a, b ∈ ***Q***, [(a *M* b) ∨ (b *M* a)].

c) À quoi correspond la propriété énoncée en b) ?

Réponse :

Une relation d'ordre total. Une relation d'ordre total est une relation d'ordre partiel qui a la propriété énoncée en b). Grâce à la propriété ∀ a, b ∈ ***Q***, [(a *M* b) ∨ (b *M* a)], on dit que les éléments de l'ensemble ***Q***, il existe une relation de comparaison définie entre eux.