POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810
STRUCTURES DISCRÈTES

TD 2 : LOGIQUE DES PRÉDICATS
É2022

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1. L'univers du discours est constitué de tous les textes en langue française.

- P(x) : « x est une explication claire »
- Q(x) : « x est satisfaisant »
- R(x) : « x est une excuse »

Exprimez les énoncés suivants à l'aide de quantificateurs, de connecteurs logiques et de P(x), Q(x), R(x).

a) Toutes les explications claires sont satisfaisantes.

Réponse : $\forall x\ P(x) \rightarrow Q(x)$

b) Certaines excuses sont insatisfaisantes.

Réponse : $\exists x\ R(x) \rightarrow \neg Q(x)$

c) Certaines excuses ne sont pas des explications claires.

Réponse : $\exists x\ R(x) \rightarrow \neg P(x)$

Exercice 2. On considère des objets de différentes couleurs. Chaque objet porte un numéro et possède une forme géométrique particulière. De plus, lorsqu'un numéro n'est pas pair, c'est qu'il est impair.
En utilisant les prédicats ci-dessous, formalisez les phrases suivantes en logique des prédicats.

- *Pair(x)* : « *x* porte un numéro pair »
- *Vert(x)* : « *x* est de couleur verte »
- *Sphere(x)* : « *x* est de forme sphérique »

a) Si un objet est sphérique, alors cet objet n'est pas vert ou porte un numéro impair.

Réponse : $\forall x\ Sphere(x) \rightarrow (\neg\ Vert(x) \vee \neg Pair(x))$

b) S'il existe un objet vert sphérique, alors il existe un objet vert portant un numéro impair.

Réponse : Deux solutions possibles, une en forme prénexe et l'autre non.

- $\exists x\ (Vert(x) \wedge Sphere(x)) \rightarrow (\exists y,\ (Vert(y) \wedge \neg Pair(y)))$
- $\exists x \exists y\ (Vert(x) \wedge Sphere(x)) \rightarrow (Vert(y) \wedge \neg Pair(y))$

Note : Une formule de la logique du premier ordre est en forme prénexe si tous ses quantificateurs apparaissent à gauche dans la formule.

c) Si tout objet vert porte un numéro impair, alors aucun objet sphérique n'est vert.

Réponse : Deux solutions possibles, une en forme prénexe et l'autre non.

- $\forall x\ (Vert(x) \wedge \neg Pair(x)) \rightarrow (\forall y,\ (Sphere(y) \rightarrow \neg Vert(y)))$
- $\forall x \forall y\ (Vert(x) \wedge \neg Pair(x)) \rightarrow (Sphere(y) \rightarrow \neg Vert(y))$

Exercice 3. On considère l'univers des personnes humaines. Soit :

- enfant(x) : x est un enfant
- ange(x) : x est un ange

Traduisez en langage courant, en utilisant les fonctions propositionnelles ci-dessus, chacun des énoncés de logique des prédicats suivants :

a) $\forall x$ enfant (x) → ange (x)

Réponse : Plusieurs réponses sont possibles.

- Tous les enfants sont des anges
- Tout enfant est un ange

b) $\forall x$ (ange(x)→ ¬enfant (x)) ∧ ($\exists x$ ¬ange (x) → enfant (x))

Réponse : : Plusieurs réponses sont possibles.

- Aucun ange n'est un enfant et il y a au moins un humain qui n'est pas un ange mais qui est un enfant
- Aucun ange n'est un enfant et s'il y a une personne qui n'est pas un ange, alors elle est un enfant

Exercice 4. On considère une fonction propositionnelle ***R(x, y)*** et les six propositions suivantes :

- $P_1 : \forall x \forall y R(x, y)$
- $P_2 : \exists x \exists y R(x, y)$
- $P_3 : \forall x \exists y R(x, y)$
- $P_4 : \exists x \forall y R(x, y)$
- $P_5 : \forall y \exists x R(x, y)$
- $P_6 : \exists y \forall x R(x, y)$

Remplissez le tableau ci-dessous en indiquant pour tout couple de propositions (P_i, P_j), avec i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, si la proposition composée $\mathbf{P_i \rightarrow P_j}$ est vraie ou fausse, peu importe la fonction propositionnelle *R(x, y)* et l'univers du discours (s'il était vide, ce serait toujours vrai).

Réponse :

j i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI
2	FAUX	VRAI	FAUX	FAUX	FAUX	FAUX
3	FAUX	VRAI	VRAI	FAUX	FAUX	FAUX
4	FAUX	VRAI	FAUX	VRAI	FAUX	FAUX
5	FAUX	VRAI	FAUX	FAUX	VRAI	FAUX
6	FAUX	VRAI	FAUX	FAUX	FAUX	VRAI

Exercice 5. Soit l'univers des équipes sportives et les fonctions propositionnelles suivantes :

- *J(x, y) : x* a joué un match contre y
- *G(x, y) : x* a gagné contre y

On considère les formules suivantes :

i. $\forall x \exists y ((J(x, y) \wedge \forall z(J(y, z) \rightarrow G(y, z))) \rightarrow \exists u\, G(x, u))$

ii. $\forall x (\exists y (J(x, y) \wedge \forall z(J(y, z) \rightarrow G(y, z))) \rightarrow \exists u\, G(x, u))$

iii. $\exists x (\forall y (J(x, y) \rightarrow G(x, y)) \rightarrow \forall z(J(x, z) \rightarrow \exists u\, G(x, u)))$

iv. $\forall x\ \forall y\ ((J(x, y) \land \forall z(J(y, z) \rightarrow G(y, z))) \rightarrow \exists u\ G(x, u))$

v. $\forall x\ (\forall y\ (J(x, y) \land \forall z(J(y, z) \rightarrow G(y, z))) \rightarrow \exists u\ G(x, u))$

a) Parmi les formules ci-dessus, lesquelles expriment la phrase : « **Tous ceux qui ont joué contre une équipe qui a gagné tous ses matchs, ont gagné au moins un match** » ?

Réponse :
Les formules i et ii expriment la phrase énoncée.

b) Parmi les formules ci-dessus, lesquelles sont équivalentes entre elles ?

Réponse :
- i et ii sont équivalentes.
- iv et v sont équivalentes.

c) Donnez la négation de chacune des formules i et iv.

Réponse :

Formule initiale	Négation de la formule
$\forall x\ \exists y\ ((J(x, y) \land \forall z(J(y, z) \rightarrow G(y, z))) \rightarrow \exists u\ G(x, u))$	$\exists x \forall y\ ((J(x, y) \land \forall z(J(y, z) \rightarrow G(y, z))) \land \forall u \neg G(x, u))$
$\forall x\ \forall y\ ((J(x, y) \land \forall z(J(y, z) \rightarrow G(y, z))) \rightarrow \exists u\ G(x, u))$	$\exists x\ \exists y\ ((J(x, y) \land \forall z(J(y, z) \rightarrow G(y, z))) \land \forall u \neg G(x, u))$

Exercice 6. Donnez un contre-exemple afin de démontrer que les expressions ci-dessous ne sont pas logiquement équivalentes.

$$(\exists x P(x)) \land (\exists x Q(x)) \text{ et } \exists x(P(x) \land Q(x))$$

Réponse :
Si P est le prédicat « être un éléphant » et Q le prédicat « être rose », alors la première expression nous dit que certains x sont des éléphants et que certains possiblement autres x sont roses tandis que la deuxième expression nous dit plus précisément qu'il y a des éléphants roses. Un univers qui contient des éléphants et des objets roses mais pas d'éléphant rose serait ainsi un contre-exemple.