POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 5 : RELATIONS

Solutionnaire

Exercice 1 :

Soit R la relation définie sur tous les sous-ensembles finis de $\mathbb{Z}$.

A R B si et seulement si |A| = |B|.

Parmi les cinq propriétés : réflexive, irréflexive, symétrique, antisymétrique, transitive, lesquelles R possède-t-elle ? Justifiez toutes vos réponses.

Solution :

1. R est réflexive : Vrai.

   Soit A un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}$. Comme $|A| = |A|$, nous avons $A\ R\ A$.

2. R est irréflexive : Faux.

   Contre-exemple. Clairement, tout ensemble fini a la même taille que lui-même, par exemple, $\{1,2\}\ R\ \{1,2\}$.

3. R est symétrique : Vrai.

   Soient A et B deux sous-ensembles finis de $\mathbb{Z}$. Supposons que $A\ R\ B$. Cela signifie que $|A| = |B|$, donc $|B| = |A|$. Par conséquent, $B\ R\ A$.

4. R est antisymétrique : Faux.

   Contre-exemple. Notez que $\{1,2\}\ R\ \{3,4\}$ et $\{3,4\}\ R\ \{1,2\}$, mais $\{1,2\} \neq \{3,4\}$.

5. R est transitive : Vrai.

   Soient A, B et C des ensembles finis d'entiers et supposons que $A\ R\ B$ et $B\ R\ C$. Cela signifie que $|A| = |B|$ et $|B| = |C|$. Par conséquent, $|A| = |C|$ et donc $A\ R\ C$. Ainsi, R est transitive.

Exercice 2 :

Parmi les relations suivantes, dites lesquelles sont des relations d'équivalence. Justifiez toutes vos réponses.

1. $R = \{(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2),\ (3,3)\}$ sur l'ensemble $\{1,2,3\}$.
2. $R = \{(1,2),\ (2,3),\ (3,1)\}$ sur l'ensemble $\{1,2,3\}$.
3. La relation | (divise) sur $\mathbb{Z}^*$.
4. La relation $\leq$ sur $\mathbb{Z}$.
5. $R = \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$ sur l'ensemble $\{1,2,3\}$.
6. $R = \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$ sur l'ensemble $\{1,2,3,4\}$.
7. La relation "est un anagramme de" sur l'ensemble des mots français. (Par exemple, Chien est un anagramme de Niche car on peut former l'un à partir de l'autre en réarrangeant les lettres.)

Solution :

1. Est-ce une relation d'équivalence ?
   Réponse : Oui, c'est une relation d'équivalence.
   - Réflexivité : Les paires $(1,1)$, $(2,2)$ et $(3,3)$ sont dans R, donc R est réflexive sur $\{1,2,3\}$.
   - Symétrie : Pour chaque $(a, b) \in R$, si $(b, a) \in R$, alors R est symétrique. Ici, $(1,2) \in R$ et $(2,1) \in R$, donc R est symétrique.
   - Transitivité : Vérifions que si $(a, b) \in R$ et $(b, c) \in R$, alors $(a, c) \in R$.
     - $(1,2) \in R$ et $(2,1) \in R$, donc $(1,1) \in R$.
     - $(1,2) \in R$ et $(2,2) \in R$, donc $(1,2) \in R$.
     - $(2,1) \in R$ et $(1,2) \in R$, donc $(2,2) \in R$.

     Ainsi, R est transitive.
2. Est-ce une relation d'équivalence ?
   Réponse : Non, ce n'est pas une relation d'équivalence.
   - Réflexivité : Les paires $(1,1)$, $(2,2)$ et $(3,3)$ ne sont pas dans R, donc R n'est pas réflexive.
   - Symétrie : $(1,2) \in R$ mais $(2,1) \notin R$, donc R n'est pas symétrique.
   - Transitivité : $(1,2) \in R$ et $(2,3) \in R$, mais $(1,3) \notin R$, donc R n'est pas transitive.

3. Est-ce une relation d'équivalence ?
   Réponse : Non, ce n'est pas une relation d'équivalence.

   – Réflexivité : Pour tout $a \in \mathbb{Z}^*$, $a \mid a$, donc la relation est réflexive.

   – Symétrie : Si $a \mid b$, il n'est pas forcément vrai que $b \mid a$. Par exemple, $2 \mid 4$ mais $4 \nmid 2$. Donc la relation n'est pas symétrique.

   – Transitivité : Si $a \mid b$ et $b \mid c$, alors $a \mid c$, donc la relation est transitive.

4. Est-ce une relation d'équivalence ?
   Réponse : Non, ce n'est pas une relation d'équivalence.

   – Réflexivité : Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a \leq a$, donc la relation est réflexive.

   – Symétrie : Si $a \leq b$, il n'est pas forcément vrai que $b \leq a$ (sauf si $a = b$). Donc la relation n'est pas symétrique.

   – Transitivité : Si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$, donc la relation est transitive.

5. Est-ce une relation d'équivalence ?
   Réponse : Oui, c'est une relation d'équivalence.

   – Réflexivité : Pour tout $a \in \{1,2,3\}$, $(a, a) \in R$ car $R = \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$.

   – Symétrie : Si $(a, b) \in R$, alors $(b, a) \in R$ puisque toutes les paires possibles sont dans R.

   – Transitivité : Si $(a, b) \in R$ et $(b, c) \in R$, alors $(a, c) \in R$ car toutes les combinaisons sont dans R.

6. Est-ce une relation d'équivalence ?
   Réponse : Non, ce n'est pas une relation d'équivalence.

   – $R = \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$ sur l'ensemble $\{1,2,3,4\}$.

   – Réflexivité : $(4,4) \notin R$, donc la relation n'est pas réflexive sur cet ensemble.

   – Symétrie : Pour les éléments de R, la symétrie est satisfaite, mais comme tous les éléments de A ne sont pas concernés, cela n'est pas suffisant.

   – Transitivité : Idem, la transitivité est satisfaite pour les éléments de R, mais pas pour tout A.

7. Est-ce une relation d'équivalence ?
   Réponse : Oui, c'est une relation d'équivalence.

   – Réflexivité : Tout mot est un anagramme de lui-même, donc la relation est réflexive.

- Symétrie : Si le mot A est un anagramme du mot B, alors B est un anagramme de A, donc la relation est symétrique.
- Transitivité : Si A est un anagramme de B et B est un anagramme de C, alors A est un anagramme de C, donc la relation est transitive.

Exercice 3 :

Isabelle, étudiante à Polytechnique se plaint de ne pas parfaitement comprendre la notion de classe d'équivalence d'une relation. Dans l'optique de lui venir en aide, vous vous proposez de résoudre l'exercice suivant, dont la résolution impactera la compréhension ou non qu'a Isabelle sur le sujet.
Rappel : On définit les classes d'équivalence d'une relation R définie sur un ensemble A comme étant les plus petits éléments de la partition de A qui génèrent la relation R.
On munit les ensembles E = R2 et F = {1, 2, 3, 4} respectivement des relations suivantes :

- R1 définie par (x,y) R1 (x',y') $\Leftrightarrow$ $\exists$ a>0 , $\exists$ b>0 | x' = ax et y' = by
- R2 = {(1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3), (4,4)}

a) Déterminez l'ensemble P(F) des partitions de F.

Solution :

P(F) = {Ø, {1}, {2}, {3}, {4}, {1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {3,4}, {1,2,3}, {1,2,4}, {1,3,4}, {2,3,4}, {1,2,3,4}}.

b) Déduisez les classes d'équivalence de R_2.

Solution :

Nous savons du rappel, que les classes d'équivalence de R_2 sont des éléments de l'ensemble P(F), on a ainsi :

- Classe de 1 : {1}
- Classe de 2 : {2,3} (Il est important de noter que la classe d'équivalence de 2 est la même que la classe d'équivalence de 3.
- Classe de 4 : {4}

c) Montrez que R_1 est une relation d'équivalence.

Solution :

R_1 est une relation d'équivalence si et seulement si elle est réflexive, symétrique et transitive.

a. Réflexivité :
Soit (x,y) $\in R^2$
On a en effet x = 1.x et y = 1.y $\rightarrow$ $\exists$ a>0 , $\exists$ b>0 | x' = ax et y' = by (a = b = 1).
$\rightarrow$ (x,y) R_1 (x,y)
$\rightarrow$ $\forall$ (x,y) $\in R^2$, (x,y) R_1 (x,y)
R_1 est donc réflexive.

b. Symétrie :

Soient (x,y) , (x',y') $\in R^2$, supposons que (x,y) R_1 (x',y')

(x,y) R_1 (x',y') → ∃ a>0 , ∃ b>0 | x' = ax et y' = by

→ $\frac{1}{a}$x' = x et $\frac{1}{b}$y' = y (car a ≠ 0 et b ≠ 0)

→ ∃ a'>0 , ∃ b'>0 | x = a'x' et y = b'y' (a' = $\frac{1}{a}$ et b' = $\frac{1}{b}$)

→ (x',y') R_1 (x,y)

→ ∀ (x,y), (x',y') $\in R^2$, (x,y) R_1 (x',y') → (x',y') R_1 (x,y)

R_1 est donc symétrique.

c. Transitivité :

Soient (x,y) , (x',y') , (x'',y'') $\in R^2$, supposons que (x,y) R_1 (x',y') et (x',y') R_1 (x'',y'')

(x,y) R_1 (x',y') → ∃ a>0 , ∃ b>0 | x' = ax et y' = by (L_1)

(x',y') R_1 (x'',y'') → ∃ a'>0 , ∃ b'>0 | x'' = a'x' et y'' = b'y' (L_2)

(L_1) dans (L_2) donne :

x'' = a'(ax) et y'' = b'(by) → x'' = (a'a)x et y'' = (b'b)y (L_3)

(L_3) → ∃ a''>0 , ∃ b''>0 | x'' = a''x et y'' = b''y (a'' = a'a et b'' = b'b)

→ (x,y) R_1 (x'',y'')

→ ∀ (x,y), (x',y'), (x'',y'') $\in R^2$,

[(x,y) R_1 (x',y') et (x',y') R_1 (x'',y'')] → (x,y) R_1 (x'',y'')

R_1 est donc transitive.

Étant donné que R_1 est une relation réflexive, symétrique et transitive, on déduit donc qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur E = R^2.

d) Donner la classe d'équivalence des éléments A = (1,0), B = (0,−1) et C = (1,1).

Solution :

Trouver les classes d'équivalences d'éléments (a,b) de R^2 revient à trouver les solutions (x,y) tel que (x,y) R_1 (a,b).

- (x,y) R_1 (1,0) → (1,0) R_1 (x,y) (car R_1 est symétrique)

  → ∃ a>0 , ∃ b>0 | x = a.1 et y = b.0

  → x = a et y = 0

  → La classe d'équivalence de (1,0) est $R^{*+} \times \{0\}$ (R^{*+} car a>0).

On déduit de ce point les autres classes d'équivalence

- La classe d'équivalence de (0, −1) est $\{0\} \times R^{*-}$.
- La classe d'équivalence de (1,1) est $R^{*+} \times R^{*+}$.

Exercice 4 :

En utilisant l'algorithme de multiplication pour la fermeture transitive, trouvez les fermetures transitives de cette relations sur $\{1,2,3,4\}$.

R = $\{(1,1),(1,4),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2),(3,4),(4,2)\}$

Solution :

Soit $R = \{(1,1),(1,4),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2),(3,4),(4,2)\}$ et $A = \{1,2,3,4\}$.

Déterminons d'abord la matrice qui représente la relation R :

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Première itération $i = 2$:

La matrice correspondant à la composée de deux relations est le produit booléen des matrices correspondant aux deux relations.

$$M_R^2 = M_R \times M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminons la disjonction de la matrice résultante et de la matrice M_R :

$$M_R{}' = M_R \vee M_R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Deuxième itération $i = 3$:

$$M_R^3 = M_R{}' \times M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminons la disjonction de la matrice résultante et de la matrice $M_R{}'$:

$$M_R{}'' = M_R{}' \vee M_R^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La fermeture transitive de R est représentée par la matrice $M_R{}''$. Nous nous arrêtons après la deuxième itération car la matrice est stable et ne change plus lors des itérations suivantes. Cela signifie que nous avons atteint la fermeture transitive complète de la relation R. Les itérations supplémentaires n'ajouteraient aucune nouvelle relation, indiquant que toutes les connexions possibles ont été établies.

Exercice 5 :

On définit une relation $\mathcal{B}$ sur $\mathbb{R}$ par : $(a, b) \in \mathcal{B}$ si et seulement si $a^2 \leq b^2$. $\mathcal{B}$ est-elle une relation d'ordre partiel ? Justifiez votre réponse.

Réponse

Pour vérifier si $\mathcal{B}$ est une relation d'ordre partiel, on va vérifier si elle est (I.) réflexive, (II.) transitive et (III.) antisymétrique.

1. Réflexivité :
   Soit $a \in \mathbb{R}$.
   On a $a^2 \leq a^2$.
   Donc $(a, a) \in \mathcal{B}$.
   La relation $\mathcal{B}$ est donc réflexive.

2. Transitivité :
   Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b) \in \mathcal{B}$ et $(b, c) \in \mathcal{B}$.
   On a $a^2 \leq b^2$ et $b^2 \leq c^2$.
   Donc, $a^2 \leq b^2 \leq c^2$.
   On déduit, $a^2 \leq c^2$.
   Ainsi, $(a, c) \in \mathcal{B}$.
   La relation $\mathcal{B}$ est donc transitive.

3. Antisymétrie :
   Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b) \in \mathcal{B}$ et $(b, a) \in \mathcal{B}$.
   On a $a^2 \leq b^2$ et $b^2 \leq a^2$.
   On obtient, $a^2 = b^2$.
   On déduit, $a = b$ ou $a = -b$.
   Donc, on n'a pas toujours $a = b$.
   La relation $\mathcal{B}$ n'est donc pas antisymétrique.

En somme, $\mathcal{B}$ n'étant pas antisymétrique, elle ne peut être une relation d'ordre partiel.