POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 2 : LOGIQUE DES PRÉDICATS

A2024

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 :

Soit les univers des étudiants $\boldsymbol{E}$, des cours $\boldsymbol{C}$ et des professeurs $\boldsymbol{P}$ de Polytechnique Montréal. Formalisez les affirmations suivantes en utilisant les fonctions propositionnelles indiquées.

- F(x) : x est un étudiant de première année.
- S(x,y) : x suit le cours y.
- R(x,y) : x a réussi le cours y.
- T(x) : x est un tuteur.
- P(x,y) : x est le professeur du cours y.

1. Tous les étudiants de première année suivent au moins un cours.

   Solution : $\forall x \in \boldsymbol{E}\ , F(x) \to \exists\ y \in \boldsymbol{C}\ [S(x,y)]$

2. Il existe un étudiant de première année qui a réussi tous les cours qu'il suit.

   Réponse : $\exists x \in \boldsymbol{E}, \Big(F(x) \wedge \forall y \in \boldsymbol{C}\big(S(x,y)\big)\Big) \to R(x,y)$

3. Il existe au moins un étudiant de première année qui suit un cours qu'il n'a pas encore réussi.

   Réponse : $\exists x \in \boldsymbol{E}, \exists y \in \boldsymbol{C}\ [F(x) \wedge S(x,y) \wedge \neg R(x,y)]$

4. Tous les tuteurs ont réussi au moins un cours.

   Réponse : $\forall x \in \boldsymbol{E}, T(x) \to \exists y \in \boldsymbol{C}[R(x,y)]$

5. Il existe un étudiant de première année qui est tuteur pour un cours qu'il a réussi.

   Réponse : $\exists x \in \boldsymbol{E}, \exists y \in \boldsymbol{C}[F(x) \wedge R(x,y) \wedge T(x)]$

6. Il existe un professeur qui enseigne un cours suivi par tous les étudiants de première année.

   Réponse : $\exists y \in \boldsymbol{C}, \exists z \in \boldsymbol{P}[P(z,y) \wedge \forall x \in \boldsymbol{E}\big(F(x) \to S(x,y)\big)]$

Exercice 2 :

Traduisez en langage courant (avec des phrases simples) chacune des propositions suivantes à partir des définitions suivantes :

- *E(x)* : x est un employé.
- *C(x,y)* : x est le collègue de y.
- *S(x,y)* : x est le supérieur hiérarchique de y.
- *R(x)* : x travaille à distance.
- *M(x)* : x est un manager.
- *P(x)* : x participe à une réunion.

1. $\forall x(E(x) \rightarrow \exists y(C(x,y) \wedge M(y)))$

   Réponse : Tous les employés ont au moins un collègue qui est manager.

2. $\exists x(E(x) \wedge \forall y(C(x,y) \rightarrow S(y,x)))$

   Réponse : Il existe un employé dont tous ses collègues sont ses supérieurs hiérarchiques.

3. $\forall x(M(x) \rightarrow \exists y(C(x,y) \wedge \neg R(y)))$

   Réponse : Tous les managers ont au moins un collègue qui ne travaille pas à distance.

4. $\exists x(M(x) \wedge \forall y(C(x,y) \rightarrow R(y)))$

   Réponse : Il existe un manager dont tous les collègues travaillent à distance.

5. $\forall x(E(x) \rightarrow \exists y(S(x,y) \wedge \neg P(y)))$

   Réponse : Tous les employés ont au moins un supérieur hiérarchique qui ne participe pas à des réunions.

Exercice 3 :

Déterminez la valeur de vérité de chaque proposition ci-dessous et justifiez votre réponse.

1. $\forall x \in R, \exists y \in R(x + y = 1)$

   Réponse : Vrai, pour tout x il existe un $y = 1 - x$ tel que $x + y = 1$.

2. $\exists x \in N^*, \forall y \in N(x + y = y)$

   Réponse : Faux, il n'existe pas de $x \in N^*$ tel que $x + y = y$, La seule valeur de x qui satisfait l'équation est 0 mais 0 n'est pas inclus dans l'univers N^*.

3. $\forall x \in Z, \exists y \in Z(x \cdot y = 0)$

   Réponse : Vrai, pour tout x on peut prendre $y = 0$, ce qui satisfait $x \cdot y = 0$.

4. $\forall x \in Z, (x^2 + 1 > x)$

   Réponse : Vrai, pour tout x entier, $x^2 + 1$ est toujours supérieur à x. Effectivement pour $x < 0$, $x^2 > 0$ donc $x^2 + 1 > x$ quand $x < 0$. Pour $x = 0$, $x^2 + 1 > x \rightarrow 1$ >0. Pour $x = 1, x^2 + 1 > x \rightarrow 2 > 1$. Finalement, pour $x > 1$, $x^2 > x$ donc $x^2 + 1 > 1$.

5. $\forall x\big((x^2 - 3x - 88 = 0) \rightarrow (x > 0)\big)$ où x est un réel.

   Réponse : faux

$$\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} - 88 = 0$$
$$(\mathrm{x} + 8)(\mathrm{x} - 11) = 0$$
$$\Rightarrow \ \mathrm{x} = 11 \text{ ou } \mathrm{x} = -8$$

   Ainsi, $x = -8 \ < 0$

Exercice 4 :

On considère l'univers des animaux. Énoncez en langage courant la négation des phrases suivantes. Vous n'avez pas besoin de donner la traduction en logique des prédicats.

1. Tous les animaux de la réserve sont carnivores.

   Réponse : Il existe au moins un animal de la réserve qui n'est pas carnivore.

2. Il existe un animal qui vole et qui ne vit pas dans les arbres.

   Réponse : Tous les animaux ne volent pas ou vivent dans un arbre.

3. Aucun oiseau ne chasse de petits mammifères.

   Réponse : Il existe au moins un oiseau qui chasse des petits mammifères.

4. Chaque mammifère de la réserve hiberne en hiver.

   Réponse : Il existe au moins un mammifère de la réserve qui n'hiberne pas en hiver.

5. Certains reptiles sont venimeux.

   Réponse : Aucun reptile n'est venimeux.

Exercice 5 :

Soit l'univers des employés d'une entreprise et les fonctions propositionnelles suivantes :

- *C(x,y)* : x est le collègue de y.
- *S(x,y)* : x a supervisé y.

On considère les propositions suivantes :

- (I) $\forall x \exists y(C(x,y) \land \forall z(C(y,z) \to S(y,z))) \to \exists u S(x,u)$
- (II) $\forall x(\exists y(C(x,y) \land \forall z(C(y,z) \to S(y,z)))) \to \exists u S(x,u)$
- (III) $\exists x(\forall y(C(x,y) \land \forall z(C(y,z) \to S(y,z)))) \to \exists u S(x,u)$
- (IV) $\forall x \forall y(C(x,y) \land \forall z(C(y,z) \to S(y,z))) \to \exists u S(x,u)$
- (V) $\forall x(\forall y(C(x,y) \land \forall z(C(y,z) \to S(y,z))) \to \exists u S(x,u))$

a) Parmi les propositions ci-dessus, lesquelles expriment la phrase suivante : « Tous ceux qui ont travaillé avec un collègue qui a supervisé tous ses subordonnés, ont supervisé au moins une personne » ?

Réponse : Les propositions (I) et (II) expriment la phrase énoncée.

b) Parmi les propositions ci-dessus, lesquelles sont équivalentes entre elles ?

Réponse : Les propositions (I) et (II) sont équivalentes. Les propositions (IV) et (V) sont aussi équivalentes.

c) Donnez la négation de chacune des propositions (I) et (IV).

Réponse :

(I) : $\exists x \forall y \left(C(x,y) \land \forall z\big(C(y,z) \to S(y,z)\big)\right) \land \forall u \neg S(x,u)$

(IV) : $\exists x \exists y \left(C(x,y) \land \forall z\big(C(y,z) \to S(y,z)\big)\right) \land \forall u \neg S(x,u)$

Exercice 6 :

a) Déterminez si l'équivalence suivante est valide :

$$\exists \mathrm{x}\big(\mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \ \mathrm{Q}(\mathrm{x})\big) \ ?\equiv?\ \big(\exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x})\big) \vee \ \big(\exists \mathrm{x}\ \mathrm{Q}(\mathrm{x})\big)$$

Justifiez votre réponse.

Réponse : L'équivalence est valide.

Posons :

A : $\exists x\big(P(x) \vee \ Q(x)\big)$ B : $\big(\exists x\ P(x)\big) \vee \ \big(\exists x\ Q(x)\big)$

Nous souhaitons montrer que $A \leftrightarrow B$ est une tautologie. Nous avons aussi que $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B)\ \wedge\ (B \rightarrow A)$.

Montrons d'abord $A \rightarrow B$:

Assumons A vrai. Alors pour un v donné, P(v) ou Q(v) est vrai. De cette façon, nous avons le 1er cas ou P(v) est vrai et Q(v) faux. Dans ce cas B est vrai car $\exists x\ P(x)$ est vrai. Nous avons un 2e cas ou P(v) est faux et Q(v) est vrai. Dans ce cas, B est aussi vrai car $\exists x\ Q(x)$ est vrai. Finalement, nous avons le 3e cas ou P(v) et Q(v) sont vrai. Dans ce cas B est vrai car $\exists x\ P(x)$ et $\exists x\ Q(x)$ sont vrais. Ainsi, si A est vrai alors B est vrai, nous obtenons bien $A \rightarrow B$.

Montrons ensuite $B \rightarrow A$:

Assumons B vrai. Alors pour un u et v donné, nous avons P(v) ou Q(u) vrai. Ainsi, comme précédemment, nous avons un 1er cas où P(v) est Q(u) faux. Dans ce cas-là, nous avons A vrai car P(v) ou Q(v) est vrai. Le 2e cas est celui ou Q(u) est vrai et P(v) est faux. Dans ce cas, A est aussi vrai car P(u) ou Q(u) est vrai. Finalement, nous avons le cas où P(v) et Q(u) sont vrais. Dans ce cas A est vrai car P(u) ou Q(u) est vrai ainsi que P(v) ou Q(v). De cette façon, si B est vrai alors A est vrai, nous obtenons bien $B \rightarrow A$.

Comme nous avons monté que $A \leftrightarrow B$ est une tautologie, nous avons montrer l'équivalence.

CQFD

b) Déterminez si l'équivalence suivante est valide :

$$\exists x\big(P(x) \wedge\ Q(x)\big) \,?\!\equiv\!?\, \big(\exists x\ P(x)\big) \wedge\ \big(\exists x\ Q(x)\big)$$

Justifiez votre réponse.

Réponse : L'équivalence n'est pas valide.

Il suffit de trouver un contre-exemple. Si nous choisissons l'univers des entiers ainsi que les fonctions propositionnelles suivantes :

- P(x) : x est pair
- Q(x) : x est impair

Nous avons : $\big(\exists x\ P(x)\big) \wedge\ \big(\exists x\ Q(x)\big)$ vrai. (Exemple : $\mathrm{P}(2) \wedge\ Q(3)$ est vrai)

Or nous avons aussi : $\exists x\big(P(x) \wedge\ Q(x)\big)$ faux. Effectivement, il n'existe pas d'entier à la foi pair est impair.

Ainsi, nous avons réfuté l'équivalence par un contre-exemple.

CQFD