POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810
STRUCTURES DISCRÈTES

TD 9 : DÉNOMBREMENT

H2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1.
Dans un département informatique, il y a une équipe de 10 développeurs et 15 développeuses.

a) De combien de façons peut-on former un comité de 6 membres, s'il doit avoir un nombre égal de développeurs masculins et féminins ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

Il faut choisir 3 développeurs parmi 10 et 3 développeuses parmi 15.

Donc un total de $\binom{10}{3}\binom{15}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} \cdot \frac{15!}{3!(15-3)!} = 120 \cdot 455 = 54\,600$ façons.

b) De combien de façons peut-on former un comité de 6 membres, s'il doit y avoir plus de développeuses que de développeurs ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

Il faut sommer les cas où le nombre de développeuses est de 4, de 5 ou de 6 (cas disjoints et règle de la somme) :

$$\begin{aligned}\binom{10}{2}\binom{15}{4} + \binom{10}{1}\binom{15}{5} + \binom{10}{0}\binom{15}{6} &= 45 \cdot 1\,365 + 10 \cdot 3003 + 1 \cdot 5005 \\ &= 61\,425 + 30\,030 + 5005 \\ &= 96\,460 \text{ façons.}\end{aligned}$$

c) De combien de façon peut-on former un comité de 6 personnes qui doit comporter au moins une développeuse ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

Le nombre total de façon de former un comité sans restriction est $\binom{10+15}{6} = \binom{25}{6} = \frac{25!}{6!(25-6)!} = 177\,100.$

Il suffit d'exclure de ce nombre les $\binom{10}{6} = \frac{10!}{6!(10-6)!} = 210$ comités sans développeuses,
ce qui donne 176 890 comités.

Alternativement,

Il faut sommer les cas où le nombre de développeuses est de 1 ou de 2 aux résultats obtenus en a) et b) :

$$\binom{10}{5}\binom{15}{1} + \binom{10}{4}\binom{15}{2} + \underbrace{54\,600}_{Résultat\ en\ a)} + \underbrace{96\,460}_{Résultat\ en\ b)} = 176\,890 \text{ comités.}$$

Exercice 2.

Un groupe de 10 astronautes de la NASA décide de partir pour une mission spatiale. Parmi ces astronautes, 3 sont spécialisés dans la recherche scientifique, 4 sont des pilotes expérimentés et 3 sont des médecins de bord. La mission nécessite que les astronautes soient assis sur la même rangée dans la navette spatiale. Les scientifiques souhaitent être assis côte à côte pour discuter de leur recherche, donc ils ont besoin de 3 sièges consécutifs. Les autres astronautes n'ont pas de préférence particulière pour leur emplacement. Combien y a-t-il de façons différentes pour les 10 astronautes de s'asseoir dans la navette spatiale ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

- Supposons que les 10 places soient numérotées de 1 à 10. Les 3 scientifiques qui veulent rester ensemble occupent les possibilités de places suivantes :

  1 à 3 ou 2 à 4 ou 3 à 5 ou 4 à 6 ou 5 à 7 ou 6 à 8 ou 7 à 9 ou 8 à 10. Ce qui fait en tout 8 possibilités.

- Avec les 3 places, les 3 scientifiques peuvent s'asseoir de 3! manières.
  C'est aussi classer 3 personnes sur 3 sièges soit P(3, 3).

- Les 7 autres astronautes se répartissent le reste des places, soit 7! ou encore P(7, 7).

Le nombre de façons différentes de s'assoir pour tout le groupe de 10 astronautes est donc :

$$8 \cdot 3! \cdot 7! = 241\ 920 \text{ possibilités}$$

Exercice 3.

Une entreprise doit organiser un voyage d'entreprise pour ses 4 employés. Elle dispose de 3 vans identiques (indiscernables) pour transporter les employés. Combien y a-t-il de façons de répartir les 4 employés dans les 3 vans sachant que chaque van peut contenir un nombre quelconque d'employés ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

Nous pouvons résoudre ce problème en énumérant toutes les façons dont ces employés peuvent être placés dans les vans. Représentons les quatre employés par A, B, C et D.

Tout d'abord, notons que nous pouvons distribuer les employés de telle sorte que

- Les quatre employés soient placés dans un seul van
- Trois employés soient placés dans un van et le quatrième est placé dans un deuxième van
- Deux employés soient placés dans un van et deux autres dans un deuxième van
- Deux employés soient placés dans un van et un employé chacun dans les deux autres vans

Chaque façon de distribuer ces employés dans ces vans peut être représentée par une façon de partitionner les éléments A, B, C et D en sous-ensembles disjoints.

Pour mettre les quatre employés dans un seul van, il y a une seule façon de le faire, représentée par

{{A, B, C, D}}

Pour mettre trois employés dans un van et un employé dans un autre van, il y a quatre façons de le faire, représentées par

{{A, B, C}, {D}}, {{A, B, D}, {C}}, {{A, C, D}, {B}} et {{B, C, D}, {A}}

Pour mettre deux employés dans un van et deux autres dans un deuxième van, il y a trois façons de le faire, représentées par

{{A, B}, {C, D}}, {{A, C}, {B, D}} et {{A, D}, {B, C}}

Et enfin, pour mettre deux employés dans un van et un employé chacun dans les deux autres vans, il y a six façons de le faire, représentées par

{{A, B}, {C}, {D}}, {{A, C}, {B}, {D}}, {{A, D}, {B}, {C}}, {{B, C}, {A}, {D}}, {{B, D}, {A}, {C}} et {{C, D}, {A}, {B}}

En comptant toutes les possibilités, nous trouvons qu'il y a 14 façons de placer quatre employés différents dans trois vans identiques.

Exercice 4.

Résolvez l’équation de récurrence :

$$a_{n+1} - 2a_{n-1} = -a_{n-3}$$

Avec $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 6 \; et \; a_3 = -1$

Réponse :

On sait que :

$$a_{n+1} - 2a_{n-1} + a_{n-3} = 0$$

On a donc :

$$a_n - 2a_{n-2} + a_{n-4} = 0$$

Cette relation de récurrence linéaire homogène à coefficient constant de degré 4 a pour équation caractéristique :

$$\begin{aligned} & r^4 - 2r^2 + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \; & (r^2 - 1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \; & [(r+1)(r-1)]^2 = 0 \end{aligned}$$

Les racines de cette équation sont $r = 1$ (racine double) et $r = -1$ (racine double).
La solution de la relation de récurrence est de la forme :

$$\begin{aligned} & a_n = (s + n \cdot t)(1^n) + (u + n \cdot v)((-1)^n) \\ \Leftrightarrow \; & a_n = (s + n \cdot t) + (u + n \cdot v)((-1)^n) \end{aligned}$$

Avec les cas de base, on obtient $s = 1$, $t = 1$, $u = -1$ et $v = 2$.

La solution est donc

$$a_n = (1 + n) + (-1 + 2n)((-1)^n)$$

Exercice 5.
Résolvez l'équation de récurrence :

$$\sqrt{a_n} = \sqrt{a_{n-1}} + 2\sqrt{a_{n-2}}$$

Avec $a_0 = 1 \; et \; a_1 = 1$

Réponse :

En faisant un changement de variable $b_n = \sqrt{a_n}$, on obtient la relation de récurrence linéaire homogène à coefficients constants de degré 2 suivant :

$$b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}$$

Avec $b_0 = \sqrt{a_0} = \sqrt{1} = 1$ et $b_1 = \sqrt{a_1} = \sqrt{1} = 1$

L'équation caractéristique est donc :

$$r^2 - r - 2 = 0$$

Les racines de cette équation sont : $r = -1$ et $r = 2$

La forme générale de la solution est :

$$b_n = \alpha((-1)^n) + \beta(2^n)$$

En considérant $b_0 = 1$ et $b_1 = 1$, on obtient $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{2}{3}$

Ainsi, on a :

$$b_n = \frac{1}{3}((-1)^n) + \frac{2}{3}(2^n)$$

Du changement de variable $b_n = \sqrt{a_n}$, on déduit $a_n = b_n^2$

D'où $a_n = \left[\frac{1}{3}((-1)^n) + \frac{2}{3}(2^n)\right]^2$

Exercice 6.

a) Donnez la complexité en grand-O de la fonction $\Lambda(n)$:

$$\Lambda(n) = 5^{1000} \cdot \Lambda\left(\frac{n}{3}\right) + 4 \cdot n^{1500}$$

Réponse :

L'équation $\Lambda(n) = 5^{1000} \cdot \Lambda\left(\frac{n}{3}\right) + 4 \cdot n^{1500}$ est de la forme L'équation $\Lambda(n) = a \cdot \Lambda\left(\frac{n}{b}\right) + c \cdot n^{d}$;
avec $a = 5^{1000}, b = 3$ et $d = 1500$.
Comparons a et b^d.

On a :

$$a = 5^{1000} = 5^{2 \cdot 500} = (5^2)^{500} = (25)^{500}$$

Et

$$b^d = 3^{1500} = 3^{3 \cdot 500} = (3^3)^{500} = (27)^{500}$$

Il s'en suit que $a < b^d$.

D'où $\Lambda(n) \in O(n^{1500})$.

b) Vous décidez d'utiliser la technique de diviser pour régner pour résoudre un certain type de problèmes.

- Pour $n \geq 4$, vous pouvez obtenir la solution à un exemplaire de taille n en résolvant 64 sous-exemplaires de taille $\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$.
- Le temps requis pour la décomposition de l'exemplaire original en 64 sous-exemplaires est $\theta\left(\frac{n^2}{\log n}\right)$.
- Le temps requis pour la recombinaison des solutions est en $\theta(n^2)$.

En supposant que n est une puissance de 4, trouvez l'ordre de grandeur du temps d'exécution de la solution.

Réponse :

Soit $f(n)$ la fonction correspondant à la solution.

En considérant les temps des manipulations complémentaires $\theta\left(\frac{n^2}{\log n}\right)$ et $\theta(n^2)$, on obtient une fonction $g(n)$ qui est $\theta\left(\max\left(\frac{n^2}{\log n}, n^2\right)\right)$, soit $\theta(n^2)$.

Et puisque $g(n)$ est $\theta(n^2)$, elle est aussi $O(n^2)$.

On peut donc écrire que :

$$f(n) = 64 \cdot f\left(\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil\right) + n^2$$

Elle est de la forme :

$$f(n) = a \cdot f\left(\left\lceil\frac{n}{b}\right\rceil\right) + c \cdot n^d$$

Avec $a = 64$, $b = 4$, $c = 1$ et $d = 2$.

Comparons $a = 64$ et $b^d = 4^2 = 16$.
On a que $a > b^d$.

Ainsi, $f(n) \in O\left(n^{\log_b a}\right)$
$\in O\left(n^{\log_4 64}\right)$
$\in O(n^3)$

D'où $f(n) \in O(n^3)$