POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 3 : INFÉRENCE ET TECHNIQUES DE PREUVES

H2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1.
Votre amie Océane a des troubles mnésiques et elle est sur le point de partir en vacances pour une semaine. Océane vérifie ses bagages pour vous assurer qu'elle n'a rien oublié, et réalise qu'elle n'a pas mis son appareil photo dans son sac à dos. En réfléchissant aux événements passés, elle fait les déclarations suivantes qui sont toutes vraies :

« Si mon appareil photo est sur la commode de ma chambre, alors je l'aurais vu hier soir en rangeant mes affaires. Je suis allée au cinéma hier soir ou je suis allée chez des amies. Si je suis allée au cinéma hier soir, alors j'ai laissé mon appareil photo sur la commode de ma chambre. Je n'ai pas vu mon appareil photo hier soir en rangeant mes affaires. Si je suis allée chez des amies hier soir, alors j'ai laissé mon appareil photo sur la table basse du salon et je suis allée me servir un verre ».

En vous basant sur vos connaissances en logique mathématique, vous traduisez ces déclarations comme suit.

Définitions :

- P : Mon appareil photo est sur la commode de ma chambre.
- Q : J'ai vu mon appareil photo hier soir en rangeant mes affaires.
- R : Je suis allée au cinéma hier soir.
- S : Je suis allée chez des amies hier soir.
- T : Mon appareil photo est sur la table basse du salon.
- U : Je suis allée me servir un verre.

Hypothèses :

- H1 : $P \rightarrow Q$
- H2 : $R \vee S$
- H3 : $R \rightarrow P$
- H4 : $\neg Q$
- H5 : $S \rightarrow (T \wedge U)$

En utilisant les règles d'inférence, pouvez-vous conclure que l'appareil photo d'Océane se trouve sur la table basse du salon ? Vous devez numéroter, écrire et justifier toutes les étapes de votre raisonnement.

Réponse :

1.	$R \rightarrow P$	H3
2.	$P \rightarrow Q$	H1
3.	$R \rightarrow Q$	Étapes 1 et 2 et syllogisme par hypothèse
4.	$\neg Q$	H4
5.	$\neg R$	Étapes 3 et 4 et modus tollens
6.	$R \vee S$	H2
7.	S	Étapes 5 et 6 et syllogisme disjonctif
8.	$S \rightarrow (T \wedge U)$	H5
9.	$(T \wedge U)$	Étapes 7 et 8 et modus ponens
10.	T	Étape 9 et règle de simplification

Alternativement,

1.	$P \rightarrow Q$	H1
2.	$\neg Q$	H4
3.	$\neg P$	Étapes 1 et 2 et modus tollens
4.	$R \rightarrow P$	H3
5.	$\neg R$	Étapes 3 et 4 et modus tollens
6.	$R \vee S$	H2
7.	S	Étapes 5 et 6 et syllogisme disjonctif
8.	$S \rightarrow (T \wedge U)$	H5
9.	$(T \wedge U)$	Étapes 7 et 8 et modus ponens
10.	T	Étape 9 et règle de simplification

On peut ainsi conclure que l'appareil photo d'Océane est sur la table basse du salon.

Exercice 2.

Il existe une île fort peu connue, appelée l'île de la Confusion, dont les habitants se comportent de la manière suivante :

- Chaque habitant de l'île est soit incorruptible, soit menteur ;
- Un incorruptible dit toujours la vérité ;
- Un menteur ne dit jamais la vérité.

En écoutant ce que disent les habitants de l'île, vous pouvez parfois tirer certaines conclusions.

a) Selon une rumeur, il y a un trésor sur cette île. Vous demandez à un habitant de l'île si cette rumeur est vraie. Il vous répond : « Il y a un trésor caché sur cette île si et seulement si je incorruptible ». En utilisant la preuve par cas, démontrez qu'il y a un trésor caché sur cette île.

Réponse :
Les deux cas sont :
Cas 1) On parle à un incorruptible.
Cas 2) On parle à un menteur.

Cas 1) On parle à un incorruptible.
Dans ce cas, l'incorruptible dit toujours la vérité, donc il y a un trésor caché sur l'île.

Cas 2) On parle à un menteur.
Dans ce cas, lorsque l'habitant est un menteur, il ment en disant qu'il y a un trésor caché sur l'île si et seulement s'il est incorruptible. Cela signifie qu'il y en a un, car l'habitant ment et la négation de sa déclaration est : « soit il y a un trésor caché sur l'île, soit je suis incorruptible ».

En utilisant la preuve par cas, on peut démontrer qu'il y a un trésor caché cette île, car dans les deux cas possibles l'habitant indique qu'il y en a un.
CQFD

b) En utilisant la preuve par l'absurde, démontrez pourquoi aucun habitant de cette île ne peut énoncer l'affirmation suivante : « Je mens ».

Réponse :
Supposons qu'il y a un habitant de l'île qui énonce : « Je mens ».

Les deux cas possibles sont :
Cas 1) L'habitant est incorruptible.
Cas 2) L'habitant est un menteur.

Cas 1) L'habitant est un incorruptible.
Si cet habitant est un incorruptible, alors il dit toujours la vérité, donc il ment en disant « Je mens ». Or, cela contredit la définition des habitants incorruptibles qui disent toujours la vérité.

Cas 2) L'habitant est un menteur.
Si cet habitant est un menteur, il ne dit jamais la vérité, donc il ment en disant « Je mens ». Or, cela signifie qu'il dit la vérité, ce qui contredit la définition des habitants menteurs qui ne disent jamais la vérité.

Dans les deux cas, l'affirmation « Je mens » est contradictoire avec les définitions des habitants de l'île, donc aucun habitant ne peut énoncer l'affirmation « Je mens ».
CQFD

Exercice 3.
En utilisant la preuve directe, démontrez que si a et b sont deux nombres réels distincts tels que $a < b$, alors la moyenne $m = \frac{a+b}{2}$ de ces deux nombres est telle que $a < m < b$.

Réponse :
Par hypothèse, il existe a et b réels distincts tels que a < b.
Et posons, $m = \frac{a+b}{2}$.

(I) En additionnant les deux côtés de (a < b) par b.
Donc, a < b ≡ a + b < b + b
≡ a + b < 2b
≡ $\frac{a+b}{2} < b$
≡ m < b où $m = \frac{a+b}{2}$

(II) En additionnant les deux côtés de (a < b) par a.
Donc, a < b ≡ a + a < b + a
≡ 2a < b + a
≡ $a < \frac{a+b}{2}$
≡ a < m où $m = \frac{a+b}{2}$

En combinant (I) et (II), on obtient a < m < b.
Ainsi, si a < b, alors la moyenne $m = \frac{a+b}{2}$ de ces deux nombres est telle que $a < m < b$.
CQFD

Exercice 4.
En utilisant la preuve par cas, démontrez que si n est un entier non divisible par 3, alors le reste de la division de n^2 par 3 est 1.

Réponse :
Un entier m n'est pas divisible par 3 si et seulement s'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que
$m = 3k + 1$ ou $m = 3k + 2$ (En fait, selon que le reste de la division par 3 donne 1 ou 2).

Les deux cas sont donc :
Cas 1) n est de la forme 3k+1.
Cas 2) n est de la forme 3k+2.

Cas 1) n est de la forme 3k+1.
On le fait avec une preuve directe :
Par hypothèse, il existe un entier k tel que n=3k+1.

$$
\begin{aligned}
\text{Donc, } n^2 &= (3k+1)^2 \\
&= (3k+1)(3k+1) \\
&= 9k^2 + 6k + 1 \\
&= 3\underbrace{(3k^2 + 2k)}_{k'} + 1 \\
&= 3k' \underbrace{+1}_{Reste} \quad \text{où } k' = 3k^2+2k \text{ est entier}
\end{aligned}
$$

Donc, il existe un entier k' tel que $n^2 = 3k'+1$.
Ainsi, le reste de la division de n^2 par 3 est 1.

Cas 2) n est de la forme 3k+2.
On le fait avec une preuve directe :
Par hypothèse, il existe un entier k tel que n = 3k+2.

$$
\begin{aligned}
\text{Donc, } n^2 &= (3k+2)^2 \\
&= (3k+2)(3k+2) \\
&= 9k^2 + 12k + 4 \\
&= 9k^2 + 12k + 3 + 1 \\
&= 3\underbrace{(3k^2 + 4k + 1)}_{k'} + 1 \\
&= 3k' \underbrace{+1}_{Reste} \quad \text{où } k' = 3k^2+4k+1 \text{ est entier}
\end{aligned}
$$

Donc, il existe un entier k' tel que $n^2 = 3k'+1$.
Ainsi, le reste de la division de n^2 par 3 est 1.

En somme, les deux cas mènent à la même conclusion, donc on peut affirmer que si n est un entier non divisible par 3, alors le reste de la division de n^2 par 3 est 1.
CQFD

Exercice 5.
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. En utilisant la preuve par contraposition (preuve indirecte), démontrez que si $a \cdot b$ est pair, alors au moins un des entiers a ou b est pair.

Réponse :
Puisqu'on suggère une preuve une preuve indirecte, on démontrera la contraposée :

Si a et b sont impairs tous les deux, alors a·b est impair.

Supposons donc par hypothèse que a et b sont impairs.
Donc, il existe k_1 et k_2 entiers tels que $a = 2k_1 + 1$ et $b = 2k_2 + 1$.

$$
\begin{aligned}
\text{Donc, } a \cdot b &= (2k_1 + 1)(2k_2 + 1) \\
&= 4k_1k_2 + 2k_1 + 2k_2 + 1 \\
&= 2\underbrace{(2k_1k_2 + k_1 + k_2)}_{k\prime} + 1 \\
&= \underbrace{2k' + 1}_{Impair} \text{ où } k' = 2k_1k_2 + k_1 + k_2 \text{ est entier}
\end{aligned}
$$

Donc, il existe un entier k' tel que a·b = 2k'+1.
Donc, a·b est impair.
Ainsi par contraposition, si a·b est pair, alors au moins un des entiers a ou b est pair.
CQFD

Exercice 6.
Soit $n \in \mathbb{Z}$. En utilisant la preuve par contradiction (preuve par l'absurde), démontrez que si $3n + 2$ est impair, alors n est impair.

Réponse :
Puisqu'on suggère une preuve par l'absurde, on doit supposer l'hypothèse vraie et la conclusion fausse pour arriver à une contradiction, donc que :

3n+2 est impair et n est pair.

Supposons donc par hypothèse que n est pair.
Donc, il existe un entier k tel que n = 2k.

$$
\begin{aligned}
\text{Donc, } 3n+2 &= 3(2k) + 2 \\
&= 6k+2 \\
&= 2\underbrace{(3k + 1)}_{k\prime} \\
&= \underbrace{2k'}_{Pair} \text{ où } k' = 3k+1 \text{ est entier}
\end{aligned}
$$

Donc, il existe un entier k' tel que 3n+2 = 2k'.
Donc, 3n+2 est pair.
Cela contredit l'hypothèse comme quoi 3n+2 est impair, ce qui est absurde.
Il faut donc, si 3n+2 est impair, que n soit impair.
CQFD

Exercice 7.
Soit a < b des nombres rationnels. En utilisant une preuve par contradiction (preuve par l'absurde), démontrez qu'il existe une infinité de nombres rationnels x satisfaisant a < x < b.

Réponse :
Puisqu'on suggère une preuve par l'absurde, on doit supposer l'hypothèse vraie et la conclusion fausse pour arriver à une contradiction, donc que :

a < b sont rationnels mais il existe seulement un nombre fini de nombres rationnels x satisfaisant a < x < b.

Supposons donc par hypothèse que a < b sont rationnels et qu'il existe seulement un nombre fini de nombres rationnels x tels que a < x < b.
Notons n la quantité de tous ces nombres x, et notons ces x en ordre croissant : $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$.
Donc, x_1 est le plus petit de tous les nombres rationnels x tels que a < x < b.
Soit $x' = \frac{a+x_1}{2}$ la moyenne des nombres rationnels a et x_1.
On a donc que x' est rationnel (car il est la moyenne de deux nombres rationnels), $a < x' < x_1$ (car la moyenne de deux nombres réels distincts est strictement comprise entre ces nombres) et donc $a < x' < x_1 < b$.
Cela contredit que x_1 est le plus petit des nombres rationnels x tels que a < x < b.
Il faut donc que, si a < b rationnels, qu'il existe une infinité de nombres rationnels x tels que a < x < b.
CQFD

Exercice 8. (Facultatif)
Soit m et n deux entiers. En utilisant la preuve par cas démontrez que :

$n \cdot m$ est pair ou n^2-m^2 est multiple de 8

Réponse :
Il existe 4 cas.

- Cas 1) (n est pair) et (m est impair).
- Cas 2) (n est impair) et (m est pair).
- Cas 3) n et m sont pairs.
- Cas 4) n et m sont impairs.

Cas 1 et 2) Sans perte de généralité (n est pair) et (m est impair).
On le fait avec une preuve directe :
Par hypothèse, il existe des entiers k et j tels que (n = 2k) et (m = 2j+1).

$$\begin{aligned} \text{Donc, } n \cdot m &= (2k)(2j+1) \\ &= (4kj+2k) \\ &= 2\,\underbrace{[k(2j+1)]}_{k'} \\ &= \underbrace{2k'}_{Pair} \text{ où } k' = k(2j+1) \text{ est entier} \end{aligned}$$

Donc, il existe un entier k' tel que $n \cdot m$ = 2k'.
Donc, $n \cdot m$ est pair.
Ainsi, nous n'avions pas besoins de vérifier si n^2-m^2 est multiple de 8, puisque par domination $n \cdot m$ est pair ou n^2-m^2 est multiple de 8 est toujours vraie.

Cas 3) Supposons que n et m sont pairs.
On le fait avec une preuve directe :
Par hypothèse, il existe des entiers k et j tels que (n = 2k) et (m = 2j).

Donc, $n \cdot m$ = (2k)(2j)
= 4kj
= $2 \cdot \underbrace{2kj}_{k\prime}$
= $\underbrace{2k'}_{Pair}$ où k' = 2kj est entier

Donc, il existe un entier k' tel que $n \cdot m$ = 2k'.
Donc, $n \cdot m$ est pair.
Ainsi, nous n'avions pas besoins de vérifier si n^2-m^2 est multiple de 8, puisque par domination $n \cdot m$ est pair ou n^2-m^2 est multiple de 8 est toujours vraie.

Cas 4) Supposons que n et m sont impairs.
On le fait avec une preuve directe :
Par hypothèse, il existe des entiers k et j tels que (n = 2k+1) et (m = 2j+1).

Donc, n^2-m^2 = $(2k+1)^2$ - $(2j+1)^2$
= [(2k+1)(2k+1)] - [(2j+1)(2j+1)]
= [$4k^2$+4k+1] - [$4j^2$+4j+1]
= $4k^2$+4k+1-$4j^2$-4j-1
= $4[\underbrace{(k^2 + k) - (j^2 + j)}_{2h\prime}]$, car (*) $(k^2 + k) - (j^2 + j)$ est pair, ∀k∀j entier.
= 4[2h']
= 8h'

Donc, il existe un entier h' tel que n^2-m^2 = 8h'.
Donc, n^2-m^2 est divisible par 8.
Ainsi, nous n'avions pas besoins de vérifier si $n \cdot m$ est pair, puisque par domination $n \cdot m$ est pair ou n^2-m^2 est multiple de 8 est toujours vraie.

Puisque tous les cas mènent à la conclusion, $n \cdot m$ est pair ou n^2-m^2 est multiple de 8 est démontré.
CQFD

(*) Preuve que $(k^2 + k) - (j^2 + j)$ est pair, ∀k∀j entier.
Procédons avec une preuve directe.
Sachant que les termes $(k^2 + k)$ et $(j^2 + j)$ sont pairs ∀k∀j entier.
Donc, il existe des entiers k_1 et k_2 tels que $(k^2 + k)$ = $2k_1$ et $(j^2 + j)$ = $2k_2$.

Donc, $(k^2 + k) - (j^2 + j)$ = $2k_1$ - $2k_2$
= $2\,\underbrace{(k_1 - k_2)}_{h'}$
= $\underbrace{2h'}_{pair}$ où h' =$k_1 - k_2$ est entier

Donc, il existe un entier h' tel que $(k^2 + k) - (j^2 + j)$ = 2h'.
Donc, $(k^2 + k) - (j^2 + j)$ est pair.
CQFD