POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 1 : LOGIQUE PROPOSITIONNELLE

SOLUTIONNAIRE

H2024

Exercice 1 :

Soit les propositions :
A : « Emma joue du piano »
B : « Emma écrit des poèmes »
C : « Emma voyage en Asie »
D : « Emma apprend le japonais »

Traduisez en langage courant (avec des phrases simples) chacune des propositions suivantes :

1. $A \wedge \neg D$

Réponse proposée :
- Emma joue du piano et n'apprend pas le japonais.

2. $(\neg A \vee B) \wedge D$

Réponses proposées :
- Emma ne joue pas du piano ou elle écrit des poèmes et Emma apprend le japonais.
- Si Emma joue du piano alors elle écrit des poèmes et Emma apprend le japonais.

3. $\neg(C \wedge D)$

Réponses proposées :
Emma ne voyage pas en Asie ou n'apprend pas le japonais.

4. $(\neg B \rightarrow C) \wedge (D \rightarrow \neg A)$

Réponses proposées :
- Si Emma n'écrit pas de poèmes, alors elle voyage en Asie,et si elle apprend le japonais, alors elle ne joue pas du piano.
- Emma voyage en Asie dès qu'elle n'écrit pas de poèmes et Emma ne joue pas du piano dès qu'elle apprend le japonais
- Emma voyage en Asie à moins qu'elle n'écrive des poèmes et Emma ne joue pas du piano à condition qu'elle apprenne le japonais.

- Une condition suffisante pour qu'Emma voyage en Asie est qu'elle n'écrive pas de poèmes et une condition suffisante pour qu'Emma ne joue pas du piano est qu'elle apprenne le japonais.

5. $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (C \leftrightarrow D)$

Réponses proposées :

- Si Emma joue du piano si et seulement si elle écrit des poèmes, alors elle voyage en Asie si et seulement si elle apprend le japonais.
- La condition pour qu'Emma voyage en Asie si et seulement si elle apprend le japonais est qu'elle joue du piano si et seulement si elle écrit des poèmes

Exercice 2 :

Soit P et Q les propositions suivantes :
- P : « Jean est fort en Mathématiques »
- Q : « Jean est fort en Algorithmique »

De plus, on suppose qu'être faible, c'est ne pas être fort.
Représentez les énoncés suivants en logique propositionnelle, à l'aide des symboles P Q ¬ ∧ ∨ → ↔

1. Jean est fort en Mathématiques mais faible en Algorithmique.
Réponse : $P \land \neg Q$

2. Jean n'est fort ni en Mathématiques ni en Algorithmique.
Réponse : $\neg P \land \neg Q$

3. Jean est fort en Mathématiques ou il est à la fois fort en Algorithmique et faible en Mathématiques.
Réponse : $P \lor (Q \land \neg P)$

4. Jean est fort en Mathématiques s'il est faible en Algorithmique.
Réponse : $\neg Q \rightarrow P$

5. Jean est fort en Algorithmique et en Mathématiques ou il est faible en Mathématiques et fort en Algorithmique.
Réponse : $(Q \land P) \lor (\neg P \land Q)$

6. Il suffit que Jean soit fort en Mathématiques pour être fort en Algorithmique.
Réponse : $P \rightarrow Q$

Exercice 3 :

Formulez la réciproque, la contraposée et l'inverse pour chacun de ces énoncés :

1. S'il pleut ce soir, alors je lis un livre.

Réponse :

Réciproque :
- Si je lis un livre, alors il pleut ce soir.
- La lecture d'un livre est une condition suffisante pour qu'il pleuve ce soir.

Contraposée :
- Si je ne lis pas un livre, alors il ne pleut pas ce soir.
- Je ne lis pas un livre dès qu'il ne pleut pas ce soir.

Inverse :
- S'il ne pleut pas ce soir, alors je ne lis pas un livre.

2. Je fais du jogging chaque fois qu'il fait frais le matin.

Réponse :

Réciproque :
- Si je fais du jogging, alors il fait frais le matin.
- Je fais du jogging seulement s'il fait frais le matin.

Contraposée :
- Si je ne fais pas de jogging, alors il ne fait pas frais le matin.
- Le fait que je ne fasse pas de jogging est suffisant pour qu'il ne fasse pas frais le matin

Inverse :
-S'il ne fait pas frais le matin alors je ne fais pas de jogging.

Exercice 4 :

En utilisant la technique de dérivation (Justifiez toutes les étapes de votre preuve), montrez que :

a) $((P \land Q) \rightarrow R) \equiv ((P \rightarrow R) \lor (Q \rightarrow R))$

Réponse :

$((P \land Q) \rightarrow R) \equiv (\neg (P \land Q) \lor R)$	Implication en disjonction
$\equiv (((\neg P) \lor (\neg Q)) \lor R)$	Loi de De Morgan
$\equiv (\neg P \lor (\neg Q) \lor R)$	Associativité
$\equiv ((\neg P \lor (\neg Q)) \lor R)$	Associativité
$\equiv (\neg P \lor R) \lor ((\neg Q) \lor R)$	Distributivité
$\equiv ((P \rightarrow R) \lor (Q \rightarrow R))$	Disjonctions en implications

CQFD

b) $[(P \land Q) \lor (\neg P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)] \equiv (P \rightarrow Q)$

Réponse :

Dérivons l'expression de gauche.

$((P \land Q) \lor (\neg P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q))$	
$\equiv (P \land Q) \lor [(\neg P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)]$	Associativité
$\equiv (P \land Q) \lor ([\neg P \lor (\neg P \land \neg Q)] \land [Q \lor (\neg P \land \neg Q)])$	Distributivité
$\equiv (P \land Q) \lor (\neg P \land [Q \lor (\neg P \land \neg Q)])$	Absorption
$\equiv (P \land Q) \lor (\neg P \land [(Q \lor \neg P) \land (Q \lor \neg Q)])$	Distributivité
$\equiv (P \land Q) \lor (\neg P \land [(Q \lor \neg P) \land VRAI])$	Loi de négation
$\equiv (P \land Q) \lor (\neg P \land (Q \lor \neg P))$	Loi d'identité
$\equiv (P \land Q) \lor (\neg P)$	Absorption
$\equiv (P \lor \neg P) \land (Q \lor \neg P)$	Distributivité
$\equiv VRAI \land (Q \lor \neg P)$	Loi de négation
$\equiv (Q \lor \neg P)$	Loi d'identité
$\equiv (\neg P \lor Q)$	Commutativité
$\equiv (P \rightarrow Q)$	Équivalence de l'implication

CQFD

Exercice 5 :

Soit les propositions suivantes, dites s'il s'agit d'une tautologie, contradiction ou contingence en justifiant votre réponse :

a) $(p \lor q) \land (r \lor \neg q) \rightarrow (p \lor r)$

Réponse :

Méthode 1 : table de vérité

La table de vérité pour la proposition est la suivante :

p	**q**	**r**	**p ∨ q**	**r ∨ ¬q**	**(p ∨ q) ∧ (r ∨ ¬q)**	**(p ∨ q) ∧ (r ∨ ¬q) → (p ∨ r)**
Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	**Vrai**
Vrai	Vrai	Faux	Vrai	Faux	Faux	**Vrai**
Vrai	Faux	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	**Vrai**
Vrai	Faux	Faux	Vrai	Vrai	Vrai	**Vrai**
Faux	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	**Vrai**
Faux	Vrai	Faux	Vrai	Faux	Faux	**Vrai**
Faux	Faux	Vrai	Faux	Vrai	Faux	**Vrai**
Faux	**Faux**	**Faux**	**Faux**	**Vrai**	**Faux**	**Vrai**

Peu importe les valeurs de vérité des variables individuelles, la formule globale est toujours vraie. C'est donc une tautologie.

Méthode 2 : Par dérivation

$(p \lor q) \land (r \lor \neg q) \rightarrow (p \lor r)$	
$\equiv \neg[(p \lor q) \land (r \lor \neg q)] \lor (p \lor r)$	Implication: $A \rightarrow B \equiv \neg A \lor B$
$\equiv [\neg(p \lor q) \lor \neg(r \lor \neg q)] \lor (p \lor r)$	Loi de De Morgan
$\equiv [(\neg p \land \neg q) \lor (\neg r \land q)] \lor (p \lor r)$	Négation d'une disjonction
$\equiv (\neg p \land \neg q) \lor (\neg r \land q) \lor (p \lor r)$	Associativité de $\lor$
$\equiv (\neg p \lor (p \lor r)) \land (\neg q \lor (p \lor r)) \lor (\neg r \land q)$	Distributivité de $\lor$ par rapport à $\land$
$\equiv \text{VRAI} \land (\neg q \lor (p \lor r)) \lor (\neg r \land q)$	Loi du tiers exclu : $A \lor \neg A \equiv \text{VRAI}$
$\equiv \neg q \lor (p \lor r) \lor (\neg r \land q)$	Identité : $\text{VRAI} \land A \equiv A$
$\equiv \neg q \lor p \lor r \lor (\neg r \land q)$	Associativité de $\lor$
$\equiv (\neg q \lor p \lor r) \lor (\neg r \land q)$	Associativité de $\lor$
$\equiv p \lor r \lor \neg q \lor (\neg r \land q)$	Commutativité de $\lor$
$\equiv p \lor r \lor (\neg q \lor (\neg r \land q))$	Associativité de $\lor$
$\equiv p \lor r \lor (\neg q \lor \neg r) \lor (\neg q \lor q)$	Distributivité de $\lor$ par rapport à $\land$
$\equiv p \lor r \lor (\neg q \lor \neg r) \lor \text{VRAI}$	
$\equiv \text{VRAI}$	Dominance: $A \lor \text{VRAI} \equiv \text{VRAI}$

C'est donc une tautologie.

b) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \land (r \rightarrow p)$

Table de vérité :

p	**q**	**r**	**q → r**	**p → (q → r)**	**r → p**	**[p → (q → r)] & (r → p)**
Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Vrai	Faux	Faux	Faux	Vrai	Faux
Vrai	Faux	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai
Faux	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux	Faux	Vrai	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Vrai	Vrai	Vrai	Faux	Faux
Faux	Faux	Faux	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai

La proposition n'est ni une tautologie (toujours vraie), ni une contradiction (toujours fausse). Elle est une contingence.