POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810
STRUCTURES DISCRÈTES

CONTRÔLE PÉRIODIQUE 2
E2024

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 (**4 points)**

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur l'ensemble E = {a. b. c. d} et dont la matrice est la suivante. L'ordre des éléments en ligne et en colonne dans la matrice est a, b, c et d, respectivement.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donnez la matrice de la fermeture transitive $\mathcal{S}$ de cette relation.

Réponse :

La matrice de la fermeture transitive $\mathcal{S}$ de la relation $\mathcal{R}$ est :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Démarche

Soit a, b, c et d les éléments correspondant dans l'ordre aux lignes et aux colonnes de la matrice. La relation contient donc les couples : (a, a), (a, c), (b, b), (b, d), (c, b), (c, c).

- La détermination de la fermeture transitive nous amène à ajouter dans un premier temps aux couples de $\mathcal{R}$, les couples suivants : (a, b), (c, d).
- Par la suite, les 2 couples précédemment identifiés nous permettent de trouver le couple (a, d).

La fermeture transitive $\mathcal{S}$ de $\mathcal{R}$ contient donc les couples (a, a), (a, c), (b, b), (b, d), (c, b), (c, c), (a, b), (c, d), (a, d). d'où la matrice présentée ci-dessus.

Exercice 2 (**5 points)**

Déterminez l'ensemble des entiers x et y vérifiant l'équation suivantes en utilisant l'algorithme d'Euclide étendu. Détaillez votre réponse.

$$216x + 92y = 8$$

Réponse :

L'équation initiale peut être ramenée à 54x + 23y = 2, car 4 divise 216, 92 et 8.

- Pour **résoudre** 54x + 23y = 2, nous allons considérer dans un premier temps l'équation 54x + 23y = 1.
- **Trouvons les solutions particulières de l'équation 54x + 23y = 1.**

En utilisant l'algorithme d'Euclide étendu, nous avons les vecteurs initiaux [54, 1, 0] [23, 0, 1].
Les opérations successives permettent d'obtenir :

[54, 1, 0] [23, 0, 1]

[8, 1, -2] [23, 0, 1]

[8, 1, -2] [7, -2, 5]

[1, 3, -7] [7, -2, 5]

[1, 3, -7] [1, -20, 47]

Les couples (3, -7) et (-20, 47) sont les solutions particulières de l'équation 54x + 23y = 1.

- **Résolvons l'équation 54x + 23y = 2.**

De ce qui précède, on déduit les solutions particulières de l'équation 54x + 23y = 2 qui sont : (6, -14) et (-40, 94).

- **Cas 1**
  - Lorsque la solution particulière considérée est (6, -14), on a x = 23k + 6 et y = -54k -14, avec k entier.
  - L'ensemble des couples d'entiers (x, y) tel que 54x + 23y = 2 sont (23k + 6, -54k -14), avec k entier.
- **Cas 2**
  - Lorsque la solution particulière considérée est (-40, 94), on a x = 23k - 40 et y = 54k + 94, avec k entier.
  - L'ensemble des couples d'entiers (x, y) tel que 54x + 23y = 2 sont (23k - 40, 54k + 94), avec k entier.

Conclusion

Les solutions de l'équation : 216x + 92y = 8 sont (23k + 6, -54k -14) ou (23k - 40, 54k + 94), avec k entier.

Exercice 3 (**5 points)**

On considère le code suivant :

```
1.      for(i = n/2;   i > 0; i--)
2.              j = 1
3.              c = n × n
4.              while(  j < c )
5.                      j = 2 × j
```

Montrez que sa complexité temporelle est $\mathcal{O}(n \ \log n)$? Détaillez votre réponse.

Note : Si vous formulez des hypothèses, veuillez les préciser dans votre réponse.

Réponse :

1. Ligne 1 est en $\mathcal{O}(n)$

   Explications : À chaque passage il y a:
   - Une initialisation (au premier passage) ou une décrémentation.
   - une comparaison

   Nous avons donc 2 opération qui se répète $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ fois. D'où $\mathcal{O}(n)$
2. Ligne 2 est $\mathcal{O}(1)$, mais comme la ligne est comprise dans la boucle de la ligne 1 on obtient $\mathcal{O}(n)$
3. Ligne 3 est $\mathcal{O}(1)$, mais comme la ligne est comprise dans la boucle de la ligne 1 on obtient $\mathcal{O}(n)$
4. Ligne 4 est $\mathcal{O}(\log n)$, mais sera répété $\lfloor n/2 \rfloor$+ 1 donc $\mathcal{O}(n \log n)$

   Explications :

   À chaque itération nous effectuons une comparaison de ***j*** avec ***c*** qui vaut n^2 .

   Il faut maintenant voir que ***j*** double à chaque itération de la boucle.

   Ainsi, j prend successivement les valeurs de toutes les puissances de 2 de 2^0 jusqu'à 2^{n^2}.

   Donc il faut $\mathcal{O}(\log(n^2))$ itérations qui revient à $\mathcal{O}(2\log(n))$ d'où $\mathcal{O}(\log n)$.

5. Ligne 5 est $\mathcal{O}(1)$, mais comme la ligne est comprise dans la boucle de la ligne 4 on obtient $\mathcal{O}(n \log n)$

Exercice 4 (**6 points)**

Montrez que n^4 est $\mathcal{O}(2^n)$

a) Trouvez les témoins C et k qui satisfont l'inéquation. Détaillez votre réponse.

Réponse :

Pour montrer que n^4 est $\mathcal{O}(2^n)$ on doit trouver $C > 0$ et $k \geq 0$ tel que $\forall\ n \geq k$, $n^4 \leq C \times 2^n$.

En prenant C = 1, on doit trouver k tel que $\forall\ n \geq k$, $n^4 \leq 2^n$

On sait que $\forall\ n \geq 16$, $\log n \geq \log 16$

Ce qui donne successivement

$\log n \geq \log 2^4$

$\log n \geq 4 \log 2$

Or $4 \log 2 \approx 1.2$ donc $\log n \geq 4 \log 2 \geq 1$

Et par suite $\log n \geq 1$

En l'inversant, on obtient $1 \leq 1/\log n$

Puis en multipliant par n, on a : $n \leq n/\log n$

De plus on sait que $4/\log 2 \approx 13.28$

Donc si $n \geq 16$ alors $n \geq 4/\log 2$ ou encore $4/\log 2 \leq n$

Des deux inégalités $4/\log 2 \leq n$ et $n \leq n/\log n$ on déduit que si $n \geq 16$ alors $4/\log 2 \leq n/\log n$

Cela permet d'écrire $4 \log n \leq n \log 2$

Ou encore $\log n^4 \leq \log 2^n$

C'est à dire $n^4 \leq 2^n$

Conclusion

En prenant C = 1 et k = 16, on a bien $n^4 \leq 2^n$

D'où que n^4 est $\mathcal{O}(2^n)$.

b) Prouver l'inéquation suivante : $2^n \geq n^4$. Détaillez votre réponse.

Réponse :

Étape de base

Il faut d'abord remarquer que lorsque $15 \geq n > 1$ la relation est fausse. Donc nous posons n=16 comme cas de base puisque.

$n^4 = 16^4 = 65536$

$2^n = 2^{16} = 65536$

$n^4 = 2^n$ lorsque n = 16. Donc $n^4 \leq 2^n$ lorsque n = 16.

L'inégalité est donc vraie à l'ordre n=16.

Étape inductive

Supposons pour n quelconque ($n \geq 16$) que $n^4 \leq 2^n$ et montrons que $(n+1)^4 \leq 2^{(n+1)}$.

On sait que $(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$.

On peut également établir les inégalités suivantes pour $n \geq 16$:

$1 \leq n^3$

$2 \leq n \rightarrow 2^2 \leq n^2$

$2 \leq n \rightarrow 4 \leq n^2$

$2 \leq n \rightarrow 4n \leq n^3$

$n^2 \leq n^3 \rightarrow 6n^2 \leq 6n^3$

En sommant membre à membre ces 3 inégalités on a : $6n^2 + 4n + 1 \leq n^3 + n^3 + 6n^3$

Soit $6n^2 + 4n + 1 \leq 8n^3$

En y ajoutant $4n^3$ de part et d'autre on a : $4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \leq 12n^3$

Or $n \geq 16$ donc $12 \leq n$ et $12n^3 \leq n^4$
On peut donc écrire $4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \leq n^4$
En y ajoutant n^4 de part et d'autre on a : $n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \leq n^4 + n^4$
Soit $n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \leq 2\ n^4$
Par hypothèse d'induction, $n^4 \leq 2^n$
Alors $2\ n^4 \leq 2\ 2^n$ soit $2\ n^4 \leq 2^{n+1}$
On en déduit que $n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \leq 2\ n^4 \leq 2^{n+1}$
Ainsi, $n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \leq 2^{n+1}$
Ou encore $(n + 1)^4 \leq 2^{(n+1)}$.
L'inégalité est donc vraie à l'ordre n+1.

Conclusion partielle

Lorsque $n \geq 16$, , $n^4 \leq 2^n$ implique que $(n + 1)^4 \leq 2^{(n+1)}$.

<u>Conclusion générale</u>

Pour $n = 16$, on a $n^4 \leq 2^{n.}$
Pour $n \geq 16$, $n^4 \leq 2^n \rightarrow (n + 1)^4 \leq 2^{(n+1)}$.
D'où $\forall\ n \geq 16$, $n^4 \leq 2^n$