



**POLYTECHNIQUE
MONTREAL**

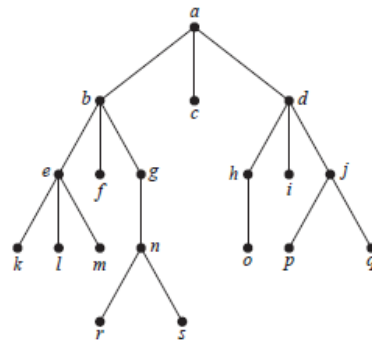
UNIVERSITÉ
D'INGÉNIERIE

LOG2810
STRUCTURES DISCRÈTES

TD 11 : ARBRE
É2022

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1. Soit l'arbre ci-dessous.



a. Donnez l'expression correspondant au parcours préfixe de l'arbre.

Réponse :

a-b-e-k-l-m-f-g-n-r-s-c-d-h-o-i-j-p-q

b. Donnez l'expression correspondant au parcours infixe de l'arbre.

Réponse :

k-e-l-m-b-f-r-n-s-g-a-c-o-h-d-i-p-j-q

c. Donnez l'expression correspondant au parcours postfixe de l'arbre.

Réponse :

K-l-m-e-f-r-s-n-g-b-c-o-h-i-p-q-j-d-a

Exercice 2. Quelles sont les valeurs des expressions postfixées ci-dessous ? Détaillez vos calculs. L'opérateur ^ est celui de l'exponentiation.

a. $9\ 3\ /\ 5\ +\ 7\ 2\ -\ *$

Réponse :

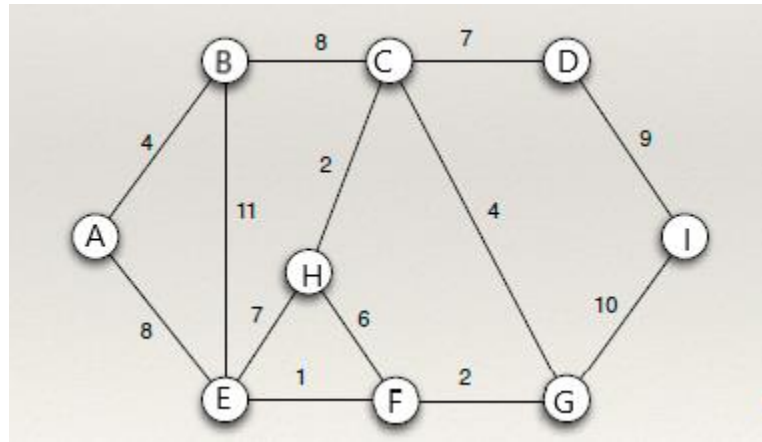
$$\begin{aligned}
 9\ 3\ /\ 5\ +\ 7\ 2\ -\ * &= (9\ 3\ /\)\ 5\ +\ 7\ 2\ -\ * \\
 &= 3\ 5\ +\ 7\ 2\ -\ * \\
 &= (3\ 5\ +\)\ 7\ 2\ -\ * \\
 &= 8\ 7\ 2\ -\ * \\
 &= 8\ (7\ 2\ -\)\ * \\
 &= 8\ 5\ * \\
 &= 40
 \end{aligned}$$

b. $3\ 2\ *\ 2\ ^\wedge\ 5\ 3\ -\ 8\ 4\ /\ *\ -$

Réponse :

$$\begin{aligned}
 3\ 2\ *\ 2\ ^\wedge\ 5\ 3\ -\ 8\ 4\ /\ *\ - &= (3\ 2\ *)\ 2\ ^\wedge\ 5\ 3\ -\ 8\ 4\ /\ *\ - \\
 &= (6\ 2\ ^\wedge)\ 5\ 3\ -\ 8\ 4\ /\ *\ - \\
 &= 36\ (5\ 3\ -)\ 8\ 4\ /\ *\ - \\
 &= 36\ 2\ (8\ 4\ /\)\ *\ - \\
 &= 36\ (2\ 2\ *)\ - \\
 &= (36\ 4\ -) \\
 &= 362
 \end{aligned}$$

Exercice 3. Soit le graphe ci-dessous. Construisez un arbre de poids minimum en appliquant l'algorithme de Kruskal. Détaillez toutes les étapes. Quel est son coût ?



Réponse :

✓ **Étape 1 :** trier les arcs en ordre croissant de leur poids

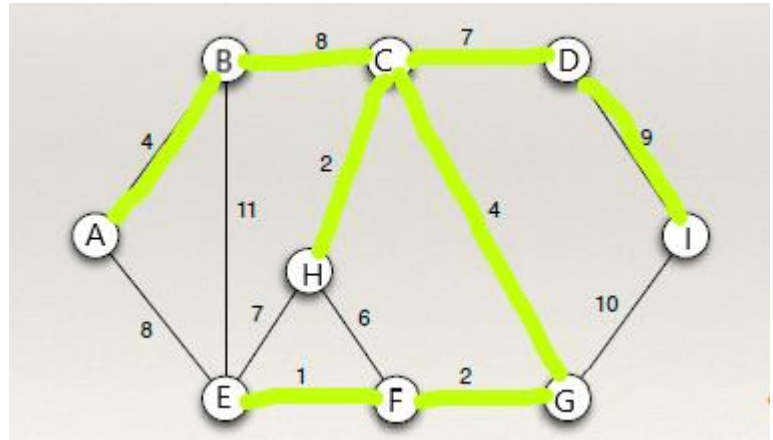
- EF 1
- FG 2
- CH 2
- CG 4
- AB 4
- FH 6
- EH 7
- CD 7
- BC 8
- AE 8
- DI 9
- IG 10
- BE 11

✓ **Étape 2 :** parcourir la liste triée des arcs, en commençant par le premier arc de poids minimum. Ajouter l'arc à l'arbre en construction, s'il ne forme pas de cycle.

À titre d'illustration, les arcs qui forment un cycle vont être barrés dans la liste.

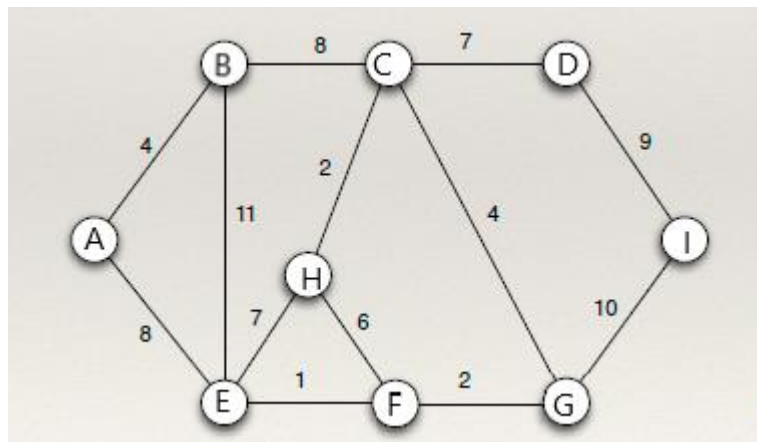
✓ **Étape 3 :** Arrêter l'algorithme lorsque que $(n-1)$ arcs ont été ajoutés à l'arbre en construction, n étant le nombre de sommets dans le graphe initial.

- EF 1
- FG 2
- CH 2
- CG 4
- AB 4
- FH 6
- EH 7
- CD 7
- BC 8
- AE 8
- DI 9
- IG 10
- BE 11



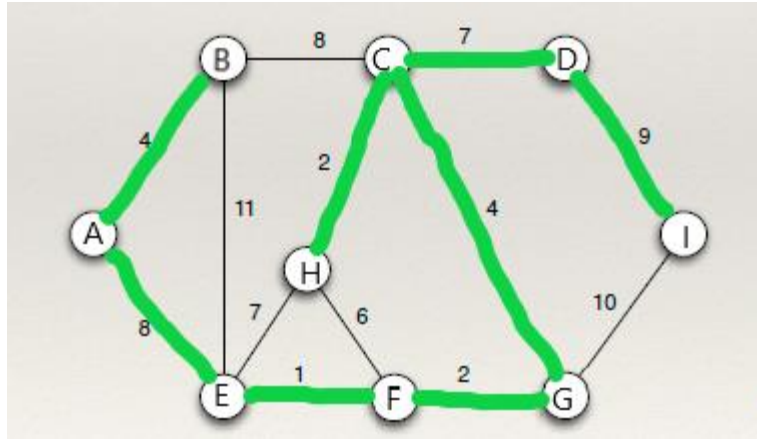
- Le coût de l'arbre est : $1 + 2 + 2 + 4 + 4 + 7 + 8 + 9 = 37$

Exercice 4. Soit le graphe ci-dessous. Construisez un arbre de poids minimum en appliquant l'algorithme de Prim. Détaillez toutes les étapes. Quel est son coût ?



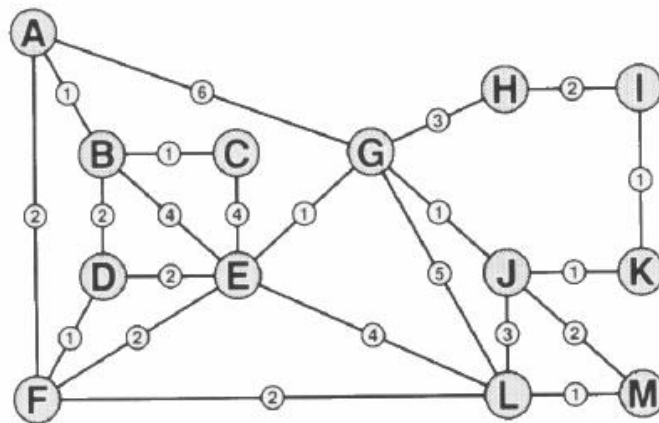
Réponse :

- Deux solutions sont proposées en fonction de la lecture des coûts sur les arcs AE et BC.
 - **Cas 1 :** Si vous considérez le coût de l'Arc AE
 Les arcs sont ajoutés dans l'ordre ci-après : EF – FG – CG – CH – CD – AE – AB - DI.
 - **Cas 2 :** Si vous considérez le coût de l'Arc BC
 Les arcs sont ajoutés dans l'ordre ci-après : EF – FG – CG – CH – CD – BC – AB - DI.



- Le coût de l'arbre est : $1 + 2 + 4 + 2 + 7 + 8 + 4 + 9 = 37$

Exercice 5. Soit le graphe ci-dessous. On désire construire un arbre de poids minimum dans lequel on impose la présence obligatoire des arcs BD, EL et GH. Construisez l'arbre souhaité en détaillant les étapes suivies.



Réponse :

- Pour le construire, l'arbre on apportera une modification à l'algorithme de Prim ou à l'algorithme de Kruskal. La modification consiste à initialiser les traitements avec les arcs BD, EL et GH. Les autres étapes des algorithmes sont maintenues. Les arcs BD, EL et GH seront donc considérés lors de l'évitement de cycle.

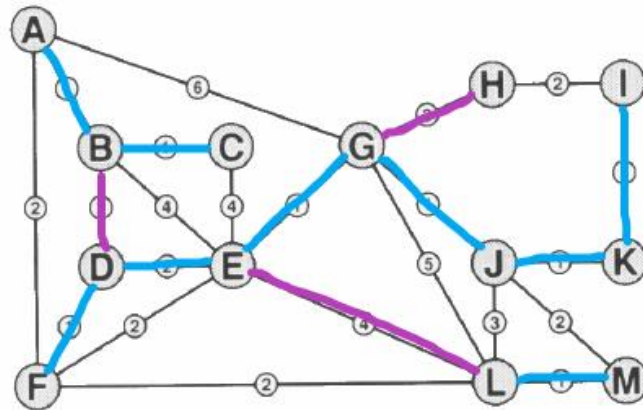
Notes : Plusieurs solutions sont possibles.

- Kruskal
 - ✓ **Étape 1 :** trier les arcs en ordre croissant de leur poids, à l'exception de les arcs BD, EL et GH.
 - AB 1
 - BC 1
 - FD 1
 - EG 1
 - GJ 1
 - JK 1

- LM 1
- IK 1
- AF 2
- DE 2
- FE 2
- FL 2
- JM 2
- IH 2
- JL 3
- BE 4
- CE 4
- GL 5
- AG 6

- ✓ **Étape 2** : Initialiser l'arbre avec les arcs BD, EL et GH
- ✓ **Étape 2** : Parcourir la liste triée des arcs, en commençant par le premier arc de poids minimum. Ajouter l'arc à l'arbre en construction, s'il ne forme pas de cycle.
À titre d'illustration, les arcs qui forment un cycle vont être barrés dans la liste.

- AB 1
- BC 1
- FD 1
- EG 1
- GJ 1
- JK 1
- LM 1
- IK 1
- ~~AF~~ 2
- ~~DE~~ 2
- ~~FE~~ 2
- ~~FL~~ 2
- ~~JM~~ 2
- ~~IH~~ 2
- ~~JL~~ 3
- ~~BE~~ 4
- ~~CE~~ 4
- ~~GL~~ 5
- ~~AG~~ 6



Exercice 6. Soit F une forêt à n sommets et m arêtes dont le nombre de composantes connexes est égal à k . Montrez que $m = n - k$.

Réponse :

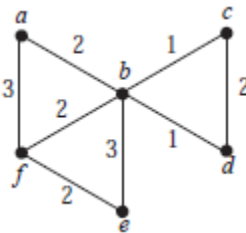
Soient F_1, \dots, F_k les composantes connexes de F . Chaque F_i est un arbre.

Soit n_i et m_i le nombre de sommets et d'arêtes d'un arbre F_i , avec $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

On a : $m_i = n_i - 1$. D'où

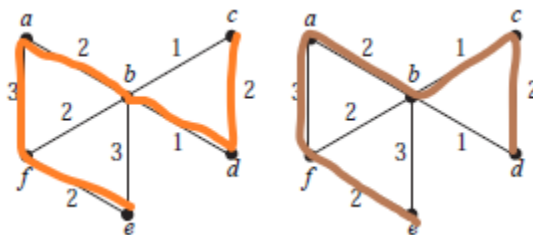
$$m = \sum_{i=1}^k m_i = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) = \left(\sum_{i=1}^k n_i \right) - \sum_{i=1}^k 1 = n - k$$

Exercice 7 (facultatif). Trouvez un arbre générateur de coût minimal pour le graphe ci-dessous, tel que le degré de chaque sommet dans l'arbre de recouvrement ne dépasse pas 2. Quel est son coût ?



Réponse :

Deux réponses sont possibles.



Coût : 10