POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 11 : **ARBRE**

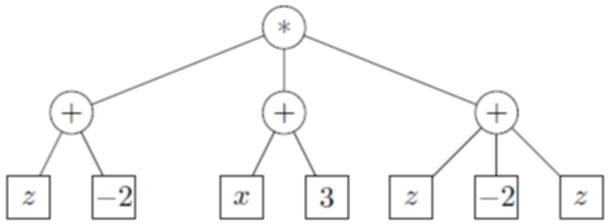
H2022

SOLUTIONNAIRE

Directives pour la remise :

- La remise est individuelle, mais le travail en équipe est encouragé.
- La remise est individuelle se fait à la fin de la séance de TD.
- Répondez directement sur ce document Word (docx). Dans l'intérêt de l'équité pour tous les étudiants, vous devez modifier le fichier Word. Modifiez le fichier **EXCLUT** le fait d'intégrer des scans de rédaction manuscrite ou d'y écrire avec un stylet.
- Lorsque vous avez terminé, générez un PDF avec le nom sous le format :
  Matricule-TDNuméro.pdf (exemple : 1234567-TD1.pdf).
- Téléversez votre fichier PDF dans la boîte de remise située dans la Zone TDs de la page Moodle du cours.
- Choisissez la boîte de remise qui correspond à votre section de TD.
- **Aucun retard et aucune remise par courriel ne seront acceptés.**
- **Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.**

Exercice 1. Soit l’arbre ci-dessous.



a. Donnez l’expression mathématique correspondant au parcours préfixe de l’arbre.

Réponse : * + z -2 + x 3 + z -2 z

b. Donnez l’expression mathématique correspondant au parcours infixe de l’arbre.

Réponse : z + -2 * x + 3 z + -2 z

c. Donnez l’expression mathématique correspondant au parcours postfixe de l’arbre.

Réponse : z -2 + x 3 + z -2 z + *

Exercice 2. Quelles sont les valeurs des expressions préfixées ci-dessous ? Détaillez vos calculs. L’opérateur ^ est celui de l’exponentiation.

a. + - ^ 3 2 ^ 2 3 / 6 – 4 2

Réponse :

+ - ^ 3 2 ^ 2 3 / 6 – 4 2 = + - ^ 3 2 ^ 2 3 / 6 (– 4 2)
= + - ^ 3 2 ^ 2 3 / 6 2
= + - ^ 3 2 ^ 2 3 (/ 6 2)
= + - ^ 3 2 ^ 2 3 3
= + - ^ 3 2 (^ 2 3) 3
= + - ^ 3 2 8 3
= + - (^ 3 2) 8 3
= + - 9 8 3
= + (- 9 8) 3
= + 1 3
= 4

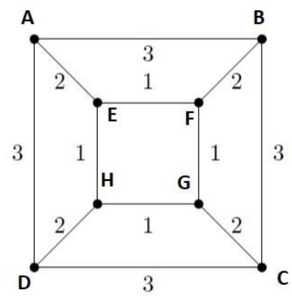
b. * + 3 + 3 ^ 3 + 3 3 3

Réponse :

* + 3 + 3 ^ 3 + 3 3 3 = * + 3 + 3 ^ 3 (+ 3 3) 3
= * + 3 + 3 ^ 3 6 3
= * + 3 + 3 (^ 3 6) 3
= * + 3 + 3 729 3
= * + 3 (+ 3 729) 3
= * + 3 732 3
= * (+ 3 732) 3

= * 735 3
= 2205

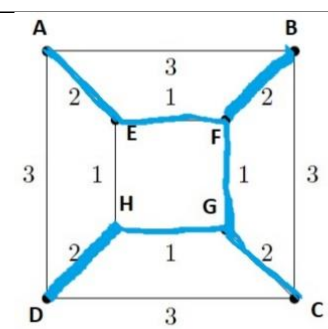
Exercice 3. Soit le graphe ci-dessous. Construire un arbre de poids minimum en appliquant l'algorithme de Kruskal.



Réponse :

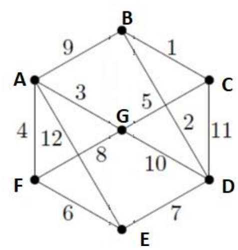
- ✓ **Étape 1** : trier les arcs en ordre croissant de leur poids
  - EF 1
  - FG 1
  - GH 1
  - EH 1
  - AE 2
  - BF 2
  - GC 2
  - DH 2
  - AB 3
  - BC 3
  - CD 3
  - AD 3

- ✓ **Étape 2** : parcourir la liste triée des arcs, en commençant par le premier arc de poids minimum. Ajouter l'arc à l'arbre en construction, s'il ne forme pas de cycle.
  À titre d'illustration, les arcs qui forment un cycle vont être barrés dans la liste.
- ✓ **Étape 3** : Arrêter l'algorithme lorsque que (n-1) arcs ont été ajoutés à l'arbre en construction, n étant le nombre de sommets dans le graphe initial.

○ EF 1 ○ FG 1 ○ GH 1 ~~○ EH 1~~ ○ AE 2 ○ BF 2 ○ GC 2 ○ DH 2	

○ ~~AB 3~~ ○ ~~BC 3~~ ○ ~~CD 3~~ ○ ~~AD 3~~	

Exercice 4. Soit le graphe ci-dessous. Construire un arbre de poids minimum en appliquant l'algorithme de Prim. Quel est son coût ?



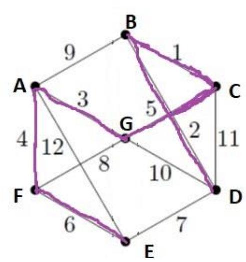
__Réponse :__

- Deux solutions sont proposées en fonction de la lecture des coûts sur les arcs BD et GC qui semblent ambigües.
    - **Cas 1** : Si vous considérez que le coût de l'Arc BD est 2 et celui de CG est 5

Les arcs sont ajoutés dans l'ordre ci-après : BC – BD – CG –AG – AF – EF.

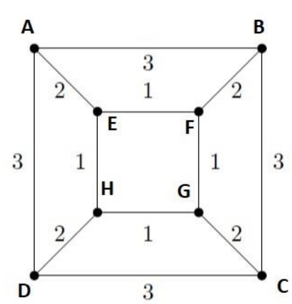
-
    - **Cas 2** : Si vous considérez que le coût de l'Arc BD est 5 et celui de CG est 2

Les arcs sont ajoutés dans l'ordre ci-après : BC – CG – AG – AF – BD – EF.



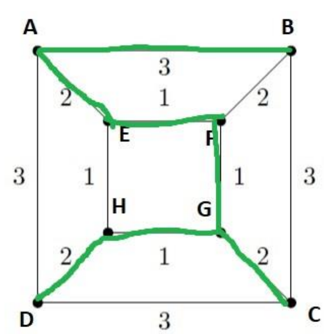
- Le coût de l'arbre est : 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21

Exercice 5. Soit le graphe ci-dessous. On désire construire un arbre de poids minimum dans lequel on impose la présence obligatoire de l'arc AB. Construisez l'arbre souhaité en détaillant les étapes suivies.

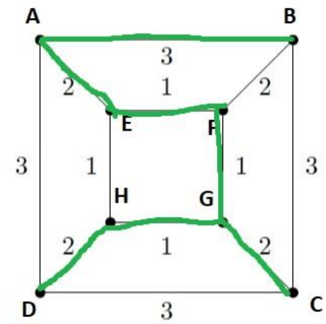


Réponse :

- Pour le construire, l'arbre on apportera une modification à l'algorithme de Prim ou à l'algorithme de Kruskal. La modification consiste à initialiser les traitements avec l'arc AB. Les autres étapes des algorithmes sont maintenues. L'arc AB sera donc considéré lors de l'évitement de cycle.
- Kruskal
  - ✓ **Étape 1** : trier les arcs en ordre croissant de leur poids, à l'exception de l'arc AB
    - EF 1
    - FG 1
    - GH 1
    - EH 1
    - AE 2
    - BF 2
    - GC 2
    - DH 2
    - BC 3
    - CD 3
    - AD 3
  - ✓ **Étape 2** : Initialiser l'arbre avec l'arc AB
  - ✓ **Étape 2** : Parcourir la liste triée des arcs, en commençant par le premier arc de poids minimum. Ajouter l'arc à l'arbre en construction, s'il ne forme pas de cycle.
    À titre d'illustration, les arcs qui forment un cycle vont être barrés dans la liste.

EF 1 FG 1 GH 1 ~~EH 1~~ AE 2 ~~BF 2~~ GC 2 DH 2 ~~BC 3~~ ~~CD 3~~ ~~AD 3~~	

- Prim
  On initialise l'arbre avec l'arc AB. On ajoute les arcs dans l'ordre ci-après.
  AB – AE – EF – FG – HG – HD - GC



Notes : Plusieurs solutions sont possibles.

Exercice 6. On désire installer au moindre coût un réseau de communication entre divers sites A, B, C, D, E, F, G et H. Les coûts des connexions inter-sites en milliers de dollars sont consignés dans le tableau suivant. Le coût de la connexion d'un site X à un site Y est le même que du site Y au site X.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	-							
B	5	-						
C	18	17	-					
D	9	11	27	-				
E	13	7	23	20	-			
F	11	10	15	15	15	-		
G	18	9	20	40	40	35	-	
H	22	15	25	5	20	10	25	-

a. Quel est le problème formel que l'énoncé cherche à résoudre ?

Réponse :

Il s'agit de construire un arbre de recouvrement de coût minimal.

b. Déterminez la solution optimale.

Réponse :

Pour répondre, on peut appliquer l'algorithme de Prim ou celui de Kruskal.

En utilisant, par exemple, l'algorithme de Kruskal on a les interconnexions suivantes.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	-							
B	**5**	-						
C	18	17	-					
D	**9**	11	27	-				
E	13	**7**	23	20	-			
F	11	**10**	**15**	15	15	-		

G	18	**9**	20	40	40	35	-	
H	22	15	25	**5**	20	10	25	-

- Les liaisons sont AB – DH – BE – AD – BG – BF – CF.
- Le coût correspondant est : 5 + 5 + 7 + 9 + 9 + 10 + 15 = 60

Notes : La réponse fournie ici ne détaille pas les étapes suivies. L'étudiant pourra construire le graphe initial puis l'utiliser pour répondre à la question.

Exercice 7. On considère le graphe ci-dessous. Il y a n pièces de monnaie numérotées 1, 2, …, n, parmi lesquelles une est fausse. La fausse pièce pèse légèrement moins que les pièces authentiques.

a. Si $n = 3$, quel est le nombre minimum de pesées nécessaires pour identifier (dans tous les cas) la fausse pièce ? Détaillez votre raisonnement.

Réponse : Une seule pesée.

Nous pouvons mettre la pièce 1 du côté droit et la pièce 2 du côté gauche. Si la pièce 1 est plus légère alors nous avons identifié la fausse pièce, si la pièce 2 est plus légère alors nous avons identifié la fausse pièce et si les deux pièces sont de même poids alors la troisième pièce est la fausse pièce.

b. Si $n = 4$, quel est le nombre minimum de pesées nécessaires pour identifier (dans tous les cas) la fausse pièce ? Détaillez votre raisonnement.

Réponse : Deux pesées sont nécessaires.
Nous pouvons mettre la pièce 1 et 2 du côté droit et la pièce 3 et 4 du côté gauche. Si la pièce 1 et 2 sont plus légères alors nous pouvons faire une seconde pesée avec la pièce 1 du côté gauche et la pièce 2 du côté droit afin de déterminer la fausse pièce qui sera plus légère. La même procédure peut être utilisé si ce sont les pièces 3 et 4 qui sont plus légères lors de la première pesée.

c. En vous servant des propriétés des arbres m-aires complets, donnez une borne inférieure au nombre de pesées nécessaires pour identifier (dans tous les cas) la fausse pièce parmi les n pièces de monnaie.

Réponse :
Puisqu'une pièce est fausse parmi les n, alors il existe n possibilités.
Suite à une pesée nous pouvons déterminer si la fausse pièce est à gauche, à droite ou n'est pas parmi les pièces sur la balance. Par conséquent, l'arbre de décision pour la séquence de pesées est un arbre 3-aire.
Il y a au moins n feuilles dans l'arbre de décision car il y a n résultats possibles et chaque résultat possible doit être représenté par au moins une feuille.
Dans le pire cas, le nombre de pesées nécessaires pour déterminer la pièce contrefaite est la hauteur de l'arbre de décision. L'arbre de décision ne peut pas être de hauteur plus petite que $\lceil \log_3 n \rceil$.
Nous pouvons donc donner la borne inférieure $\lceil \log_3 n \rceil$.