POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 10 : GRAPHE

Directives pour la remise:

- La remise est individuelle et se fait à la fin de la séance de TD.
- Répondez directement sur ce document Word (docx).
- Lorsque vous avez terminé, générez un PDF avec le nom sous le format: ***SectionDeTD-Matricule.pdf*** (exemple: *04-1234567.pdf*).
- Téléchargez votre fichier PDF dans la boîte de remise située dans la Zone TDs de la page Moodle du cours.
- Choisissez la boîte de remise qui correspond à votre section de TD.
- Aucun retard et aucune remise par courriel ne seront accepté.
- Dans l'intérêt de l'équité pour tous les étudiants, vous devez modifier le fichier Word (docx) fourni. Modifier le fichier EXCLUT le fait d'intégrer des scans de rédaction manuscrite ou d'y écrire avec un stylet.
- Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.

Objectifs du TD10

Exercice 1: S’exercer à exprimer différents graphes à l’aide de liste d’adjacence.

Exercice 2: Vérifier l’isomorphisme de deux graphes à l’aide d’une bijection.

Exercice 3: Résoudre des problèmes de parcours à l’aide de la théorie des graphes.

Exercice 4: Appliquer l’algorithme de Dijkstra afin de trouver tous les plus cours chemins entre un sommet donné et tous les autres sommets d’un graphe pondéré.

Exercice 5: S’initier à la notion de graphe biparti à l’aide de quelques définitions et appliquer un algorithme afin de déterminer si un graphe donné est un graphe biparti.

Exercice 6: Déterminer si un graphe biparti possède un couplage parfait.

La remise est individuelle mais le travail en équipe est encouragé. Veuillez inscrire votre nom, prénom et matricule ainsi que les noms des collègues avec lesquels vous avez collaboré pour le TD.

Nom:

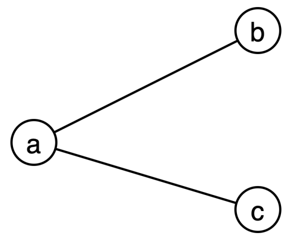
Prénom:

Matricule:

Collègues:

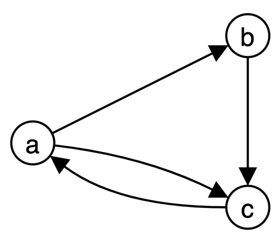
Exercice 1

Voici un exemple de listes d'adjacence pour chacun des sommets d'un graphe simple.



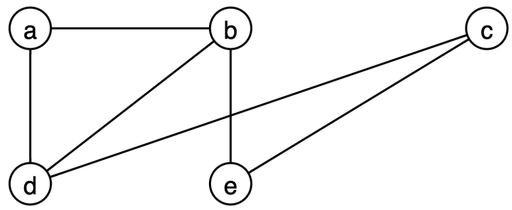
Sommet	Sommets adjacents
a	b, c
b	a
c	a

et un exemple de listes de sommets adjacents pour un graphe orienté.

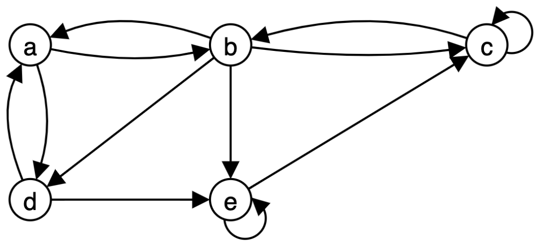


Sommet	Sommets adjacents
a	b, c
b	c
c	a

Pour les graphes ci-dessous:



Graphe 1.



Graphe 2.

a) Utilisez un tableau de listes d'adjacence pour représenter le graphe 1.

Réponse:

Sommet	Sommets adjacents
a	b, d
b	a, d, e
c	d, e
d	a, b, c
e	b, c

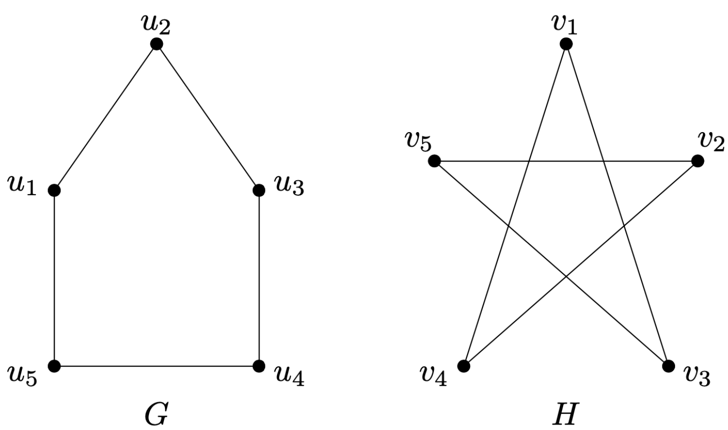
b) Utilisez un tableau de listes de sommets adjacents pour représenter le graphe 2.

Réponse:

Sommet	Sommets adjacents
a	b, d
b	a, c, d, e
c	b, c
d	a, e
e	c, e

Exercice 2

Est-ce que les graphes G et H ci-dessous sont isomorphiques? Si oui donnez la fonction bijective des sommets de G vers H.

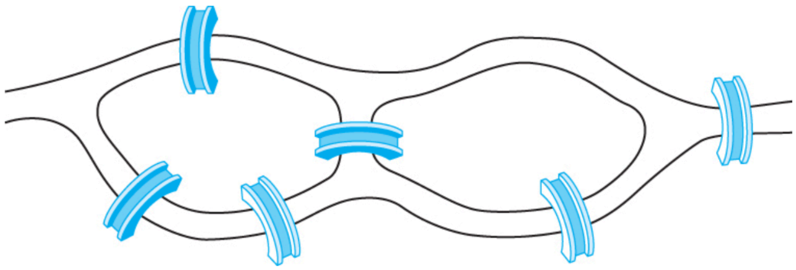


Réponse:

Les graphes G et H sont deux graphes isomorphiques. La fonction bijective est $f(u_1) = v_4, f(u_2) = v_1, f(u_3) = v_3, f(u_4) = v_5$ et $f(u_5) = v_2$.

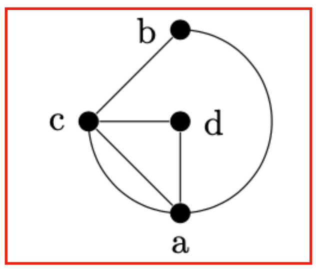
Exercice 3

Quelqu'un peut-il traverser les ponts indiqués sur ce schéma exactement une fois et revenir au point de départ ?



Réponse:

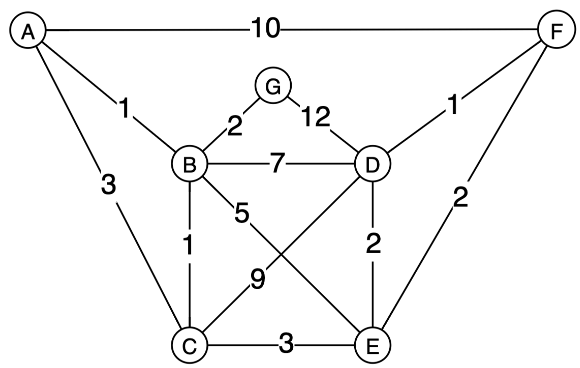
Le modèle sous forme de graphe de cet exercice est illustré ici.



Les sommets a et b sont les rives du fleuve, et les sommets c et d sont les îles. Chaque sommet a un degré pair, donc le graphe a un circuit eulérien, tel que a, c, b, a, d, c, a . Une promenade du type décrit est donc possible.

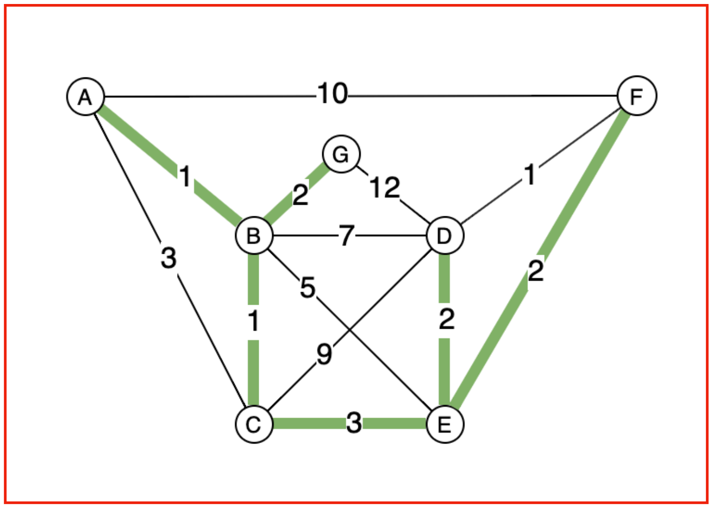
Exercice 4

Utilisez l'algorithme de Dijkstra pour calculer les parcours les plus courts du sommet de départ unique A vers tous les autres sommets. Spécifiez chacun des parcours et la distance totale pour atteindre chacun des sommets.



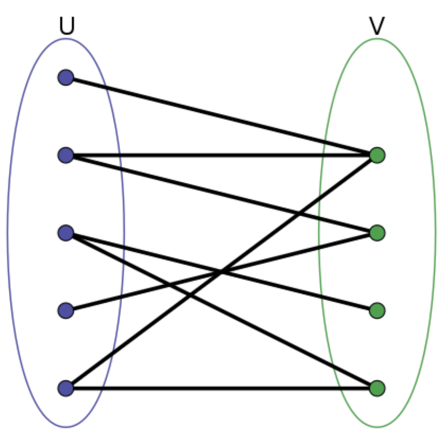
Réponse:

Sommet	Distance	Trajet
A	0	A
B	1	A, B
C	2	A, B, C
D	7	A, B, C, E, D
E	5	A, B, C, E
F	7	A, B, C, E, F
G	3	A, B, G



Exercice 5

Un graphe simple G est biparti si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux sous ensembles disjoints non vide U et V de telle façon que chaque arête du graphe relie un sommet de U à V. On peut aussi dire qu'il n'y a pas d'arête qui relie les sommets d'un même sous-ensemble.

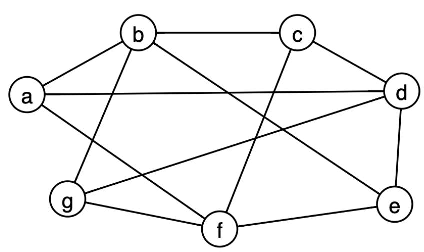


Exemple d'un graphe biparti.

Voici un algorithme simple pour savoir si un graphe donné est biparti ou non en utilisant la recherche en largeur (BFS).

1. Attribuez la couleur BLEUE au sommet source (en le mettant dans l'ensemble U).
2. Colorez tous les voisins avec la couleur VERTE (en mettant dans l'ensemble V).
3. Colorez tous les voisins des voisins avec la couleur BLEUE (en mettant dans l'ensemble U).
4. Attribuez ainsi une couleur à tous les sommets.
5. Si nous trouvons un voisin qui est coloré avec la même couleur que le sommet actuel, le graphe ne peut pas être biparti. Autrement le graphe est biparti et la partition a été obtenue.

Déterminez si le graphe suivant est biparti et si c'est le cas, donnez la partition des sommets U et V.



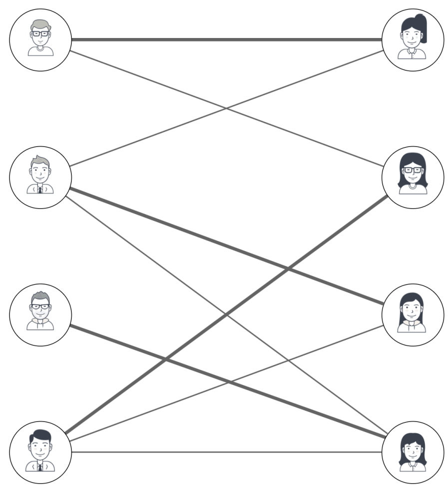
Réponse:

Le graphe est biparti et la partition est U = {a, c, e, g} et V = {b, d, f}.

Exercice 6

Théorème de Hall (ou lemme des mariages)

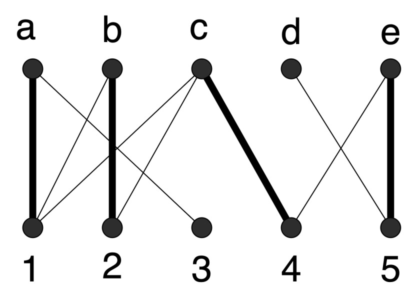
Un graphe biparti G = (U, V; E) admet un couplage parfait si et seulement si pour tout sous ensemble X de U, le nombre de sommets de V adjacents au sous-ensemble X est supérieur ou égal à la cardinalité de X.



Exemple de couplage parfait

Un graphe biparti qui n'a pas de couplage parfait peut quand même avoir un couplage partiel. Nous pouvons donc rechercher la plus grand couplage partiel.

Votre ami prétend qu'il a trouvé la plus grand couplage partiel pour le graphe ci-dessous (sa correspondance est en gras). Il explique qu'aucune autre arête ne peut être ajoutée, car toutes les arêtes non utilisées dans son couplage partiel sont connectées à des sommets déjà couplés. A-t-il raison ?



Justifiez votre réponse.

Réponse:

À première vu, le nombre des sommets adjacents est supérieur ou égal à la cardinalité pour tous les sous ensembles. Par exemple le sous ensemble a, b, c à comme sommets adjacents 1, 2, 3, 4. Ceci nous porte à croire qu'il doit y avoir un couplage parfait. En cherchant un peu nous pouvons trouver le couplage parfait (b,1), (a, 3), (c,2), (d, 5) et (e,4).