POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 11 : ARBRES

H2025

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 :

Une entreprise de télécommunications souhaite relier cinq centres de données situés dans différents quartiers de Montréal. L'objectif est de mettre en place un réseau de communication à coût minimal, garantissant ainsi une connectivité entre tous les centres pour favoriser des échanges efficients et écologiques.

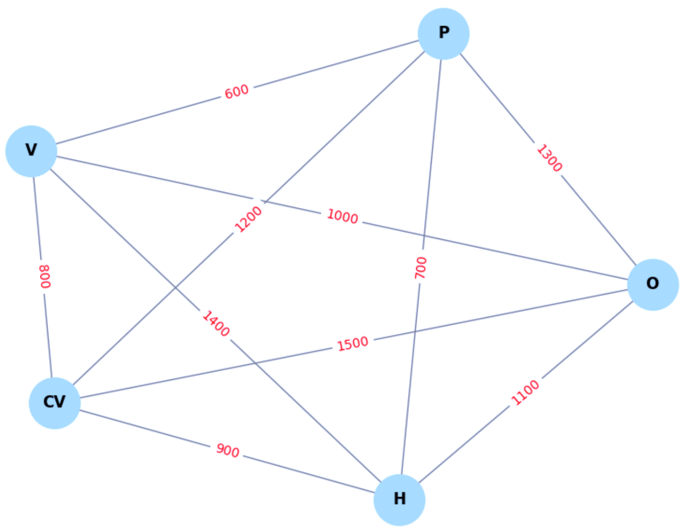
Les centres de données se trouvent dans les quartiers suivants :

- **CV** : Centre-Ville
- **P** : Plateau
- **H** : Hochelaga
- **O** : Outremont
- **V** : Villeray

Chaque paire de centres peut être reliée directement par une ligne dont le coût mensuel (en dollars) est indiqué dans le tableau ci-dessous. On peut modéliser le problème par un graphe pondéré non orienté.

Données du graphe :

Liaison	**Coût ($)**
CV – P	1200
CV – H	900
CV – O	1500
CV – V	800
P – H	700
P – O	1300
P – V	600
H – O	1100
H – V	1400
O – V	1000



a) Utilisez l'algorithme de Prim pour construire un arbre de poids minimum à partir du graphe et donnez son coût. Détaillez les étapes.

Solution :

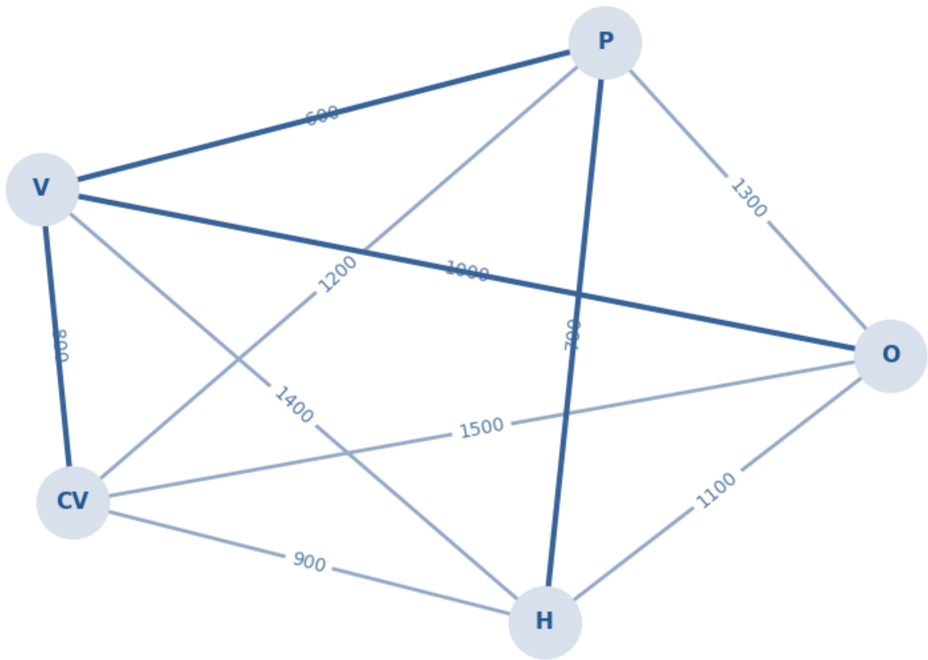
1. **Initialisation : CV** comme sommet de départ.
2. **Étape 1 :** Les arêtes incidentes à CV sont : CV–P (1200), CV–H (900), CV–O (1500), CV–V (800). Choix : l'arête CV–V (800).
   Arbre partiel : { CV, V }.
3. **Étape 2 :** Sommets dans l'arbre : { CV, V }. Arêtes candidates :
   - Depuis CV : CV–P (1200), CV–H (900), CV–O (1500).
   - Depuis V : V–P (600), V–H (1400), V–O (1000).

   Choix : l'arête V–P (600).
   Arbre partiel : { CV, V, P }.
4. **Étape 3 :** Sommets dans l'arbre : { CV, V, P }. Arêtes candidates :
   - Depuis CV : CV–H (900), CV–O (1500).
   - Depuis V : V–H (1400), V–O (1000).
   - Depuis P : P–H (700), P–O (1300).

   Choix : l'arête P–H (700).
   Arbre partiel : { CV, V, P, H }.
5. **Étape 4 :** Le seul sommet restant est O. Arêtes candidates reliant O aux sommets de l'arbre
   - CV–O (1500), V–O (1000), P–O (1300), H–O (1100).

   Choix : l'arête V–O (1000).
   Arbre final : { CV, V, P, H, O }.

Les arêtes sélectionnées par Prim sont donc : CV–V (800), V–P (600), P–H (700), V–O (1000) avec un coût total de : 800 + 600 + 700 + 1000 = 3100 dollars.



b) Utilisez l'algorithme de Kruskal pour construire un arbre de poids minimum à partir du graphe et donnez son coût. Détaillez les étapes.

Solution :

Étape 1 : Trier les arêtes par ordre croissant de poids

On commence par trier toutes les arêtes du graphe en fonction de leur poids. Dans cet exemple, les arêtes triées sont :

- **P–V (600)**
- **P–H (700)**
- **CV–V (800)**
- **CV–H (900)**
- **O–V (1000)**
- **H–O (1100)**
- **CV–P (1200)**
- **P–O (1300)**
- **H–V (1400)**
- **CV–O (1500)**

Étape 2 : Ajouter successivement les arêtes sans former de cycle

On parcourt la liste triée et on ajoute les arêtes une par une, en s'assurant qu'aucune arête ajoutée ne crée un cycle avec les arêtes déjà sélectionnées :

1. **Ajouter P–V (600)**
    - Ensemble formé : {P, V}.
2. **Ajouter P–H (700)**
    - Mise à jour de l'ensemble : {P, V, H}.
3. **Ajouter CV–V (800)**
    - Mise à jour de l'ensemble : {CV, P, V, H}.
4. **Vérifier CV–H (900)**
    - Cette arête est ignorée car son ajout formerait un cycle (CV et H sont déjà connectés via CV–V et P–H).
5. **Ajouter O–V (1000)**
    - Mise à jour finale de l'ensemble : {CV, P, V, H, O}.

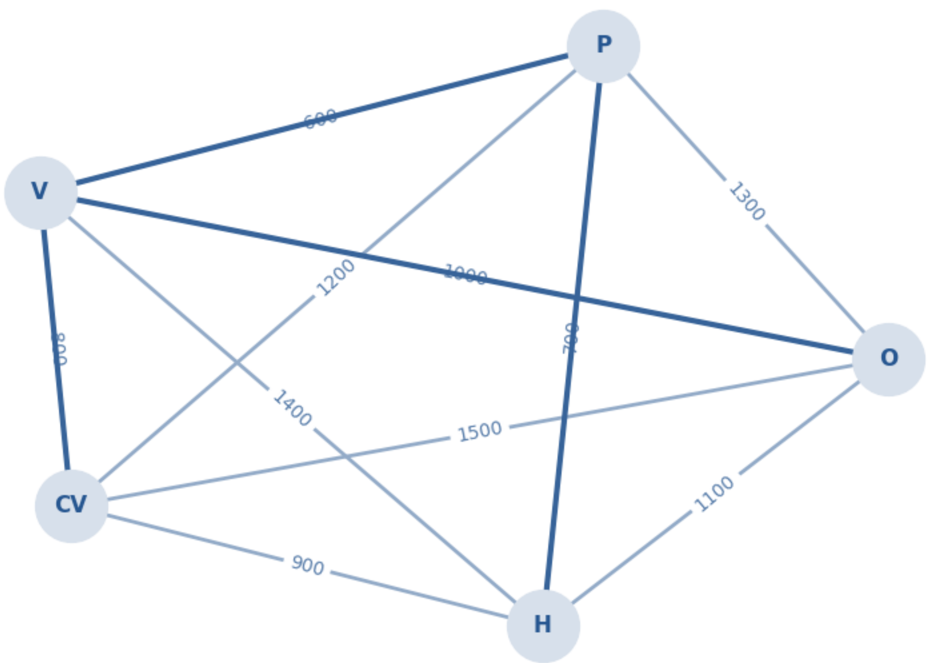
Étape 3 : Arrêter après que n−1 arêtes ont été sélectionnées

Dans ce graphe, il y a 5 sommets. Un arbre couvrant doit contenir 5−1=4 arêtes. Dès que nous avons sélectionné 4 arêtes, l'algorithme s'arrête. Les arêtes sélectionnées sont donc :

- **P–V (600)**
- **P–H (700)**
- **CV–V (800)**
- **O–V (1000)**

Le coût total de l'arbre couvrant minimal est :

600+700+800+1000=3100 dollars.



Exercice 2 :

On considère deux expressions arithmétiques données en **notation préfixe** :

Expression 1 : * + a 3 ^ 2 4

Expression 2 : - ^ a 2 / + 7 3 5

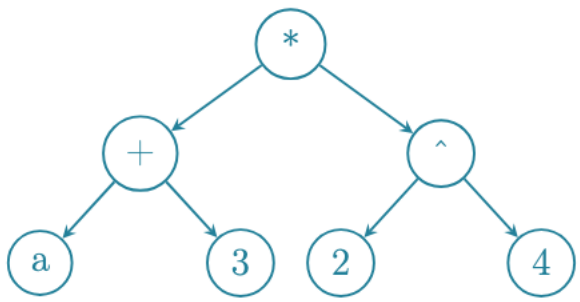
a) Construisez l'arbre binaire correspondant à chaque expression. (Chaque opérateur est un nœud interne ayant exactement deux enfants et chaque opérande est une feuille.)

b) Convertissez chaque expression en **notation infixe** en ajoutant toutes les parenthèses nécessaires.

Solution :

Expression 1 : * + a 3 ^ 2 4 :

Arbre binaire :

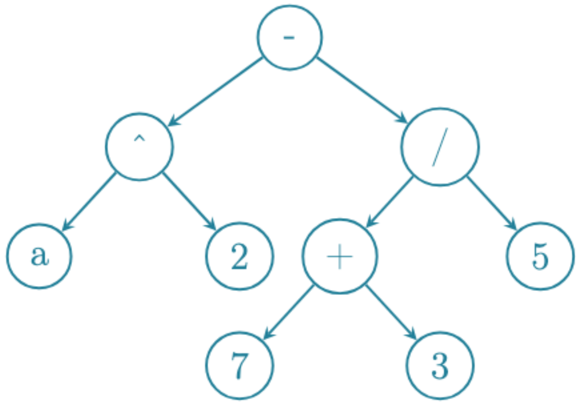


Notation infixe :

$$(a + 3) * (2\,\hat{}\,4)$$

Expression 2 : - ^ a 2 / + 7 3 5 :

Arbre binaire :

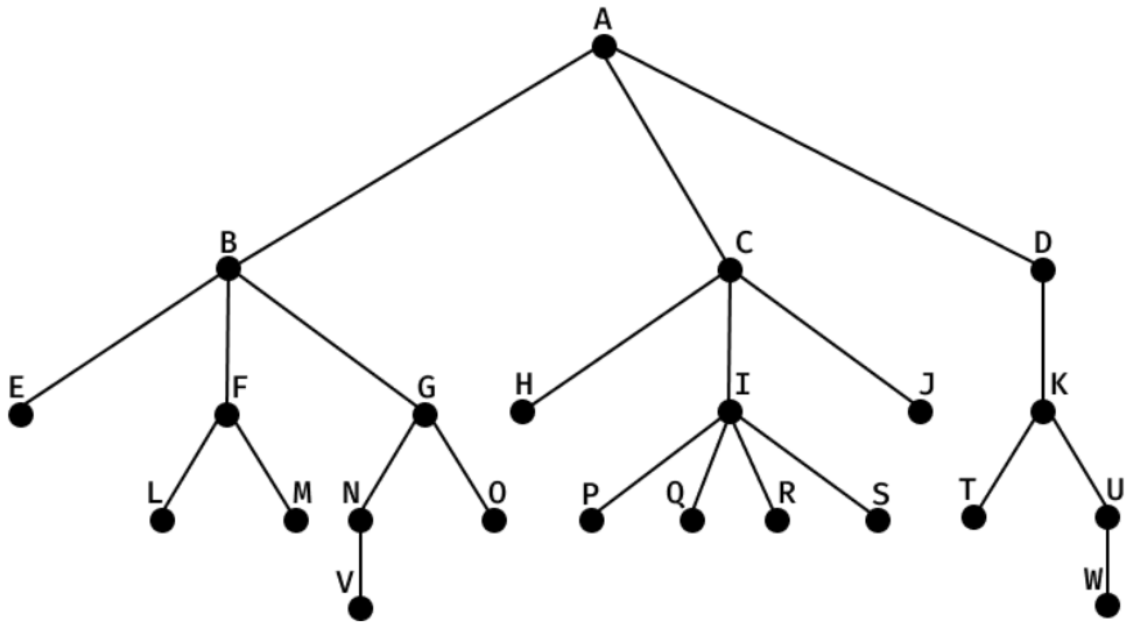


Notation infixe :

$$(a\,\hat{}\,2) - \big((7+3)/5\big)$$

Exercice 3 :

Soit l'arbre ci-dessous :



a) Donnez l’expression correspondant au parcours préfixe de l’arbre.

Solution : A--B--E--F--L--M--G--N--V--O--C--H--I--P--Q--R--S--J--D--K--T--U--W

b) Donnez l’expression correspondant au parcours infixe de l’arbre.

Solution : E--B--L--F--M--V--N--G--O--A--H--C--P--I--Q--R--S--J--T--K--W--U--D

c) Donnez l’expression correspondant au parcours postfixe de l’arbre.

Solution : E--L--M--F--V--N--O--G--B--H--P--Q--R--S--I--J--C--T--W--U--K--D--A

Exercice 4 :

Soit F une **forêt** (c'est-à-dire un graphe non orienté sans circuits, qui peut être non connexe) ayant :

- n sommets,
- m arêtes,
- k composantes connexes.

Démontrez que

$$m = n - k.$$

Indications :

- Chaque composante connexe de F est un **arbre**.
- Un arbre à n_i sommets possède exactement $n_i - 1$ arêtes.
- En notant $n_1, n_2, \dots, n_k$ le nombre de sommets dans chaque composante, on a

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n.$$

Solution :

Étape 1 : Décomposition en composantes

Comme F est une forêt, elle se décompose en k composantes connexes. Soit $\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2, \dots, \mathrm{n}_\mathrm{k}$ le nombre de sommets de chacune de ces composantes. Alors:

$$\mathrm{n}_1 + \mathrm{n}_2 + \cdots + \mathrm{n}_\mathrm{k} = \mathrm{n}.$$

Étape 2 : Chaque composante est un arbre

Chaque composante étant connexe et acyclique est un arbre. Un arbre ayant n_i sommets possède exactement $\mathrm{n}_\mathrm{i} - 1$ arêtes. En notant m_i le nombre d'arêtes de la i-ième composante, on a :

$$\mathrm{m}_\mathrm{i} = \mathrm{n}_\mathrm{i} - 1.$$

Étape 3 : Somme des arêtes

Le nombre total d'arêtes de F est :

$$\mathrm{m} = \mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2 + \cdots + \mathrm{m}_\mathrm{k} = (\mathrm{n}_1 - 1) + (\mathrm{n}_2 - 1) + \cdots + (\mathrm{n}_\mathrm{k} - 1).$$

En factorisant, on obtient :

$$m = (n_1 + n_2 + \cdots + n_k) - k = n - k.$$

Conclusion :

Ainsi, dans une forêt à n sommets et k composantes connexes, le nombre total d'arêtes est égal à $n - k$.

Exercices suggérés pour la semaine :

Rosen 8e Édition, Chapitre 11 : Arbres

Section 11.1 : Introduction aux arbres
Exercices : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20

Section 11.2 : Applications des arbres et arbres m-aires
Exercices : 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38

Section 11.3 : Propriétés avancées et arbres particuliers
Exercices : 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48