POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

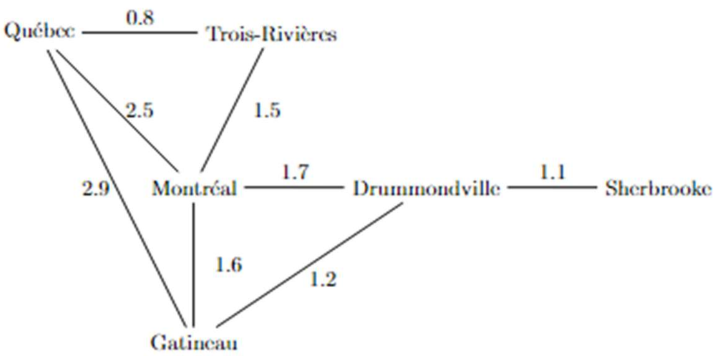
STRUCTURES DISCRÈTES

TD 11 : ARBRES

Solutionnaire

Exercice 1 :

Un pipeline doit être construit pour relier six villes du Québec. Le coût (en centaines de millions de dollars) pour construire chaque lien potentiel dépend de la distance et du terrain et est illustré dans le graphe pondéré ci-dessous.



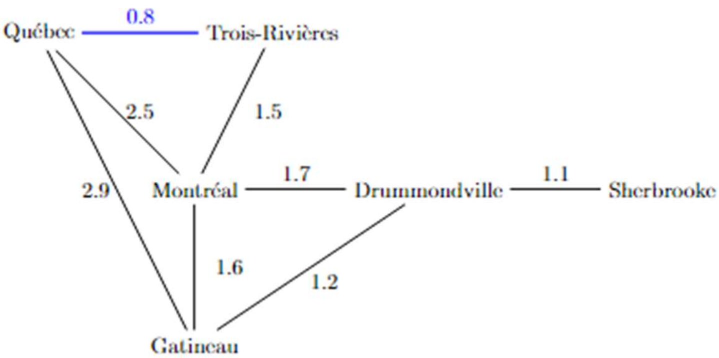
Trouvez un système de pipelines pour connecter toutes les villes et minimiser le coût total :

a) En utilisant l'algorithme de Prim

Solution :

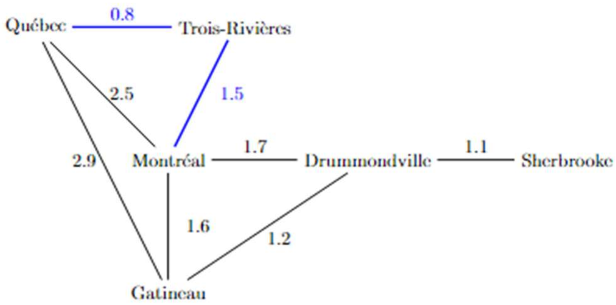
L'algorithme de Prim construit l'arbre couvrant minimal en commençant par un sommet initial et en ajoutant progressivement les arêtes de poids minimal qui connectent les sommets non visités.

Nous allons illustrer chaque étape avec un graphe mis à jour.
Étape 1 :
- Point de départ : Québec - Arbre actuel (T): {Québec} - Arêtes disponibles: - Québec – Trois-Rivières (0.8) - Québec – Montréal (2.5) - Québec – Gatineau (2.9) - Arête sélectionnée: Québec – Trois-Rivières (0.8) - Mise à jour de T: {Québec, Trois-Rivières}



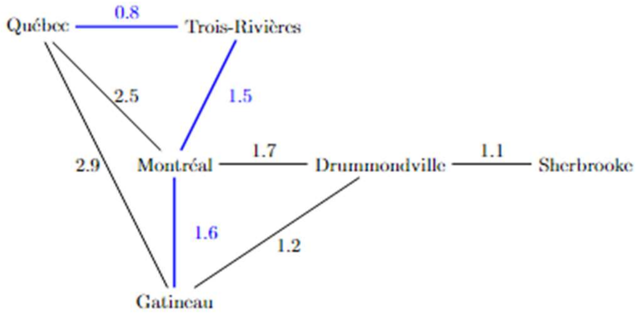
Étape 2:

- Arbre actuel (T) : {Québec, Trois-Rivières} - Arêtes disponibles: - Trois-Rivières – Montréal (1.5) - Québec – Montréal (2.5) - Québec – Gatineau (2.9) - Arête sélectionnée: Trois-Rivières – Montréal (1.5) - Mise à jour de T: {Québec, Trois-Rivières, Montréal}



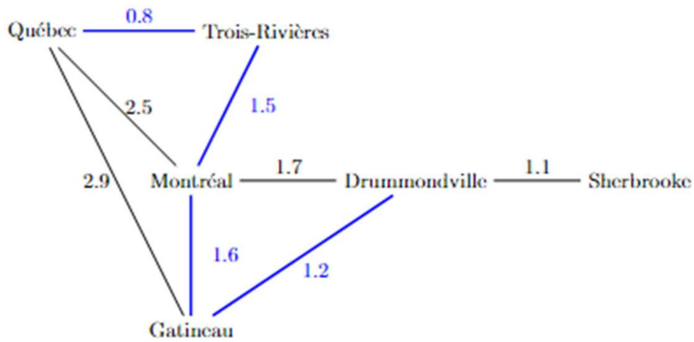
Étape 3 :

- Arbre actuel (T) : {Québec, Trois-Rivières, Montréal} - Arêtes disponibles: - Montréal – Gatineau (1.6) - Montréal – Drummondville (1.7) - Québec – Gatineau (2.9) - Arête sélectionnée: Montréal – Gatineau (1.6) - Mise à jour de T: {Québec, Trois-Rivières, Montréal, Gatineau}

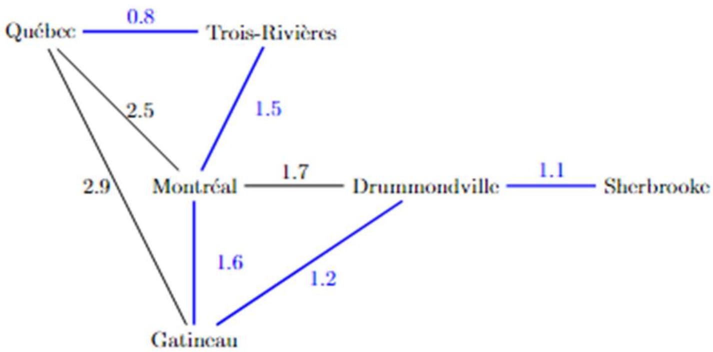


Étape 4 :

- Arbre actuel (T): {Québec, Trois-Rivières, Montréal, Gatineau} - Arêtes disponibles: - Gatineau – Drummondville (1.2) - Montréal – Drummondville (1.7) - Arête sélectionnée: Gatineau – Drummondville (1.2) - Mise à jour de T: {Québec, Trois-Rivières, Montréal, Gatineau, Drummondville}



Étape 5:
- Arbre actuel (T): {Québec, Trois-Rivières, Montréal, Gatineau, Drummondville} - Arête disponible: - Drummondville – Sherbrooke (1.1) - Arête sélectionnée: Drummondville – Sherbrooke (1.1) - Mise à jour de T: {Toutes les villes sont connectées}



Arêtes du pipeline sélectionnées avec Prim:
1. Québec – Trois-Rivières (0.8) 2. Trois-Rivières – Montréal (1.5) 3. Montréal – Gatineau (1.6) 4. Gatineau – Drummondville (1.2) 5. Drummondville – Sherbrooke (1.1)
Coût total: $0.8 + 1.5 + 1.6 + 1.2 + 1.1 = 6.2$ centaines de millions de dollars.

b) En utilisant l'algorithme de Kruskal

Solution :

L'algorithme de Kruskal construit l'arbre couvrant minimal en triant toutes les arêtes par poids croissant et en ajoutant les arêtes les moins coûteuses qui n'engendrent pas de cycles.

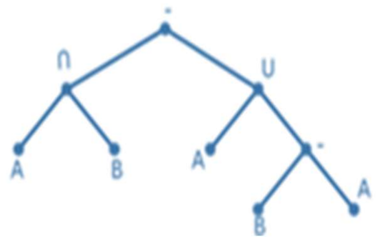
Étape 1:
- Tri des arêtes par poids croissant:
1. Québec – Trois-Rivières (0.8) 2. Drummondville – Sherbrooke (1.1) 3. Gatineau – Drummondville (1.2) 4. Trois-Rivières – Montréal (1.5) 5. Montréal – Gatineau (1.6) 6. Montréal – Drummondville (1.7) 7. Québec – Montréal (2.5) 8. Québec – Gatineau (2.9)
Étape 2:
- Initialisation: Chaque ville est un ensemble disjoint.

Étape 3:
- Ajout des arêtes sans créer de cycles:
1. Québec – Trois-Rivières (0.8) - Action: Relie Québec et Trois-Rivières. 2. Drummondville – Sherbrooke (1.1) - Action: Relie Drummondville et Sherbrooke. 3. Gatineau – Drummondville (1.2) - Action: Relie Gatineau au groupe {Drummondville, Sherbrooke}. 4. Trois-Rivières – Montréal (1.5) - Action : Relie Trois-Rivières et Montréal. 5. Montréal – Gatineau (1.6) - Action : Relie le groupe {Québec, Trois-Rivières, Montréal} au groupe {Gatineau, Drummondville, Sherbrooke}.
Arêtes du pipeline sélectionnées avec Kruskal :
1. Québec – Trois-Rivières (0.8) 2. Drummondville – Sherbrooke (1.1) 3. Gatineau – Drummondville (1.2) 4. Trois-Rivières – Montréal (1.5) 5. Montréal – Gatineau (1.6)
Coût total : $0.8 + 1.1 + 1.2 + 1.5 + 1.6 = 6.2$ centaines de millions de dollars.
Dans les deux cas, l'arbre couvrant minimal connecte toutes les villes avec un coût total minimal de 6.2 centaines de millions de dollars. Les pipelines à construire sont :
- Québec – Trois-Rivières - Trois-Rivières – Montréal - Montréal – Gatineau - Gatineau – Drummondville - Drummondville – Sherbrooke
Ce réseau assure la connexion de toutes les villes au coût le plus bas possible en utilisant les deux algorithmes.

Exercice 2 :

Représentez l'expression suivante $(A \cap B) - \big(A \cup (B - A)\big)$ en utilisant :

a) Un arbre enraciné ordonné :



b) La notation préfixe

La notation préfixe est obtenue en effectuant un parcours préordre de l'arbre. Nous visitons la racine, puis visitons récursivement chaque sous-arbre gauche, suivi du sous-arbre droit.

Notation Préfixe : $- \cap AB \cup A - BA$

c) La notation postfixe

La notation postfixe est obtenue en effectuant un parcours postordre de l'arbre. Nous visitons récursivement chaque sous-arbre gauche, puis chaque sous-arbre droit, et enfin la racine.

Notation Postfixe : $AB \cap ABA - \cup -$

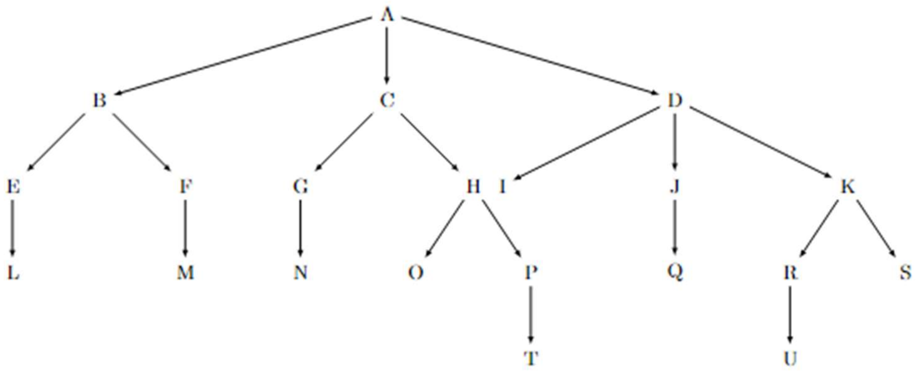
d) La notation infixe

La notation infixe est simplement l'expression donnée sous une forme complètement parenthésée :

((A∩B)-(A∪(B-A)))

Exercice 3 :

Considérez l'arbre suivant :



a) Effectuez un parcours préfixe de l'arbre.

A B E L F M C G N H O P T D I J Q K R U S

b) Effectuez un parcours infixe de l'arbre.

L E B M F A N G C O H T P I D Q J U R K S

c) Effectuez un parcours postfixe de l'arbre.

L E M F B N G O T P H C I Q J U R S K D A

Exercice 4 :

Un projet de parrainage est lancé dans une communauté. Chaque participant parraine quatre nouveaux membres pour participer à des activités locales. Certains des membres parrainés continuent à parrainer d'autres, tandis que d'autres arrêtent après leur participation.

a) Combien de personnes ont participé à ce projet, y compris l'initiateur, si personne n'a été parrainé plus d'une fois et si le projet s'est arrêté après que 301 participants ont participé mais n'ont pas parrainé d'autres membres ? Détaillez votre réponse.

Solution :

Le processus de parrainage peut être représenté par un arbre 4-aire enraciné, donc $m = 4$.

Sommets : Correspondent aux participants ayant rejoint le projet.

Feuilles : Correspondent aux participants qui n'ont pas parrainé d'autres membres.

Étant donné que 301 participants n'ont pas parrainé d'autres membres, le nombre de feuilles est $l = 301$.

Le nombre total de participants est donné par la formule pour un arbre m-aire enraciné complet :

$$n = \frac{m \times l - 1}{m - 1}$$

En remplaçant les valeurs :

$$\begin{aligned} n &= \frac{4 \times 301 - 1}{4 - 1} \\ &= \frac{1204 - 1}{3} \\ &= \frac{1203}{3} \\ &= 401 \end{aligned}$$

Donc, 401 personnes ont participé à ce projet.

b) Combien de participants ont parrainé d'autres membres ? Détaillez votre réponse.

Solution :

Les sommets internes de l'arbre représentent les participants qui ont parrainé d'autres membres.

Le nombre de sommets internes est donné par :

$$i = n - l$$

En remplaçant les valeurs :

$$i = 401 - 301 = 100$$

Donc, 100 participants ont parrainé d’autres membres.

Conclusion

a) Total des participants : 401

b) Participants ayant parrainé d’autres membres : 100

c) Participants n’ayant pas parrainé d’autres membres : 301

Exercice 5 :

Un arbre m-aire complet de niveau est un arbre m-aire complet dans lequel chaque feuille est au même niveau.

a) Combien de sommets et de feuilles possède un arbre m-aire complet de niveau de hauteur h ?

Solution :

Un arbre m-aire complet de niveau de hauteur h a un sommet au niveau 0, m sommets au niveau 1, $m \times m = m^2$ sommets au niveau 2, et ainsi de suite jusqu'au niveau h. Ainsi, le nombre de sommets au niveau k est m^k.

Le nombre total de sommets est donc :

$$n = \sum_{k=0}^{h} m^k = \frac{m^{h+1} - 1}{m - 1}.$$

Toutes les feuilles sont au niveau h, donc le nombre de feuilles est :

$$l = m^h.$$

b) Démontrer que la profondeur moyenne d'une feuille dans un arbre binaire avec nnn sommets est Ω(logn).

Solution :

Le fait que T soit un arbre binaire signifie que chaque sommet a 0, 1 ou 2 enfants.
Supposons que T ait une hauteur h. Nous cherchons à établir une borne inférieure pour la profondeur moyenne des feuilles.
Si des sommets internes à un niveau inférieur à $h - 1$ ont moins de 2 enfants, nous déplaçons l'une des feuilles à la position de l'enfant manquant.
Remarque : Cela ne fera que diminuer la profondeur moyenne des feuilles et n'affectera donc pas la borne inférieure.
Répétez ce processus jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de sommets internes à un niveau inférieur à $h - 1$ avec moins de 2 enfants.
Nous pouvons alors supposer que l'arbre résultant T' n'a que des feuilles aux niveaux h et $h - 1$.
Note : Si ce n'est pas le cas, nous redéfinissons la hauteur h comme la hauteur du nouvel arbre T'. Étant donné que les nouvelles et anciennes valeurs de h diffèrent d'une constante, cela n'affectera pas l'estimation en Ω.
Ensuite, nous supprimons tous les sommets au niveau h (ce qui ne fera que diminuer la profondeur moyenne de 1 et n'affectera donc pas l'estimation en Ω).
L'arbre résultant T'' est alors un arbre binaire complet de niveau. D'après la question précédente nous savons que T'' a $m^{h-1} = 2^{h-1}$ feuilles. De plus, ces 2^{h-1} feuilles sont toutes à

la profondeur $h-1$. Ainsi, la profondeur moyenne des feuilles est également $h-1$.
Par la question précédente, nous savons également que le nombre total de sommets est

$$n=\frac{m^h-1}{m-1}=\frac{2^h-1}{2-1}=2^h-1.$$

Résolvons l'équation $n=2^h-1$ pour h :

$$n+1=2^h \Longrightarrow h=\log_2(n+1).$$

Ainsi, la profondeur moyenne des feuilles est alors

$$h-1=\log_2(n+1)-1=\log_2\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

Puisque $\log_2\left(\frac{n+1}{2}\right)=\log_2(n+1)-1$, cela nous donne une profondeur moyenne de $\Omega(\log n)$.

CQFD.