POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

CONTRÔLE PÉRIODIQUE 2

É2025

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 (**3 points)**

Soit :

U : l'univers des étudiants de Polytechnique Montréal en 2025.

A : l'ensemble des étudiants de première année à Polytechnique Montréal en 2025.

B : l'ensemble des étudiants qui suivent le cours LOG1810, structures discrètes.

Exprimez chacun des ensembles suivants en fonction de **A** et **B**.

a. (**1 point)** L'ensemble des étudiants de première année à Polytechnique Montréal en 2025 qui ne suivent pas le cours LOG1810, structures discrètes.

Solution : $\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}}$ ou $\mathbf{A} - \mathbf{B}$

b. (**0.5 point)** L'ensemble des étudiants de première année à Polytechnique Montréal en 2025 qui suivent le cours LOG1810, structures discrètes.

Solution : $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$

c. (**1.5 point)** L'ensemble des étudiants de Polytechnique Montréal en 2025 qui ne sont pas en première année et qui ne suivent pas le cours LOG1810, structures discrètes.

Solution : $\overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}}$ ou $\overline{\mathbf{A}} - \mathbf{B}$

Exercice 2 **(5 points)**

On définit sur l'ensemble **E = {a, b, c, d, e}**, la relation $\mathcal{R}$ suivante :

$\mathcal{R}$ **= {(b, c), (b, e), (c, e), (d, a), (e, b), (e. c)}**

a. (**1.5 point)** Donnez la fermeture réflexive S_1 de cette relation.

Solution :

S_1 **= {(b, c), (b, e), (c, e), (d, a), (e, b), (e. c), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)}**

b. (**1.5 point)** Donnez la fermeture symétrique S_2 de cette relation.

Solution :

S_2 **= {(b, c), (b, e), (c, e), (d, a), (e, b), (e, c), (c, b), (a, d)}**

c. (2 **points)** Donnez la fermeture transitive S_3 de cette relation.

Solution :

S_3 **= {(b, c), (b, e), (c, e), (d, a), (e, b), (e, c), (b, b), (c, b), (c, c), (e, e)}**

Exercice 3 (**4 points**)

On définit sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$, la relation $\mathcal{T}$ suivante :

$$(a, b)\ \mathcal{T}\ (c, d) \equiv (a^2 - b^2 = c^2 - d^2)$$

Déterminez si $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence. Détaillez et justifiez chaque étape de votre démarche

Réponse :

Pour être une relation d'équivalence, elle doit être réflexive, symétrique et transitive.

- **Réflexivité**

Soit (a, b) un couple de $\mathbb{R}^2$. Vérifions si (a, b) $\mathcal{T}$ (a, b).

a et b étant des réels, $a^2 - b^2 = a^2 - b^2$.

On a bien (a, b) $\mathcal{T}$ (a, b).

Conclusion

$\mathcal{T}$ est réflexive.

- **Symétrie**

Soit (a, b) et (c, d) deux couples de $\mathbb{R}^2$ tel que [(a, b) $\mathcal{T}$ (c, d)].

Vérifions si [(c, d) $\mathcal{T}$ (a, b)].

Par définition, $a^2 - b^2 = c^2 - d^2$.

a, b, c et d étant des réels, $(a^2 - b^2 = c^2 - d^2) \rightarrow (c^2 - d^2 = a^2 - b^2)$.

On a donc [(a, b) $\mathcal{T}$ (c, d)] $\rightarrow$ [$(c^2 - d^2 = a^2 - b^2)$].

Par suite [(a, b) $\mathcal{T}$ (c, d)] $\rightarrow$ [(c, d) $\mathcal{T}$ (a, b)].

Conclusion

$\mathcal{T}$ est symétrique.

- **Transitivité**

Soit (a, b), (c, d) et (e, f) trois couples de $\mathbb{R}^2$ tel que [(a, b) $\mathcal{T}$ (c, d)] et [(c, d) $\mathcal{T}$ (e, f)].

Vérifions si [(a, b) $\mathcal{T}$ (e, f)].

Par définition, $a^2 - b^2 = c^2 - d^2$ et $c^2 - d^2 = e^2 - f^2$.

a, b, c, d, e et f étant des réels, $(a^2 - b^2 = c^2 - d^2) \land (c^2 - d^2 = e^2 - f^2) \rightarrow (a^2 - b^2 = e^2 - f^2)$.

On a donc [(a, b) $\mathcal{T}$ (c, d)] $\land$ [(c, d) $\mathcal{T}$ (e, f)]. $\rightarrow$ $(a^2 - b^2 = e^2 - f^2)$.

Par suite [(a, b) $\mathcal{T}$ (c, d)] $\land$ [(c, d) $\mathcal{T}$ (e, f)] $\rightarrow$ [(a, b) $\mathcal{T}$ (e, f)].

Conclusion

$\mathcal{T}$ est transitive.

- **Conclusion générale**

$\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 4(**4 points)**
On définit sur l'ensemble des réels, la fonction suivante. Déterminez Si elle est bijective. Détaillez et justifiez votre réponse.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$$

Solution 1 :
Pour que la fonction soit bijective, elle doit être injective et surjective.

- **Injectivité**

Soit a, b deux réels tel que $f(a) = f(b)$. On a :

$$\mathrm{f}(a) = \mathrm{f}(b) \rightarrow \frac{a^2+1}{a^2+2} = \frac{b^2+1}{b^2+2}$$

$$\mathrm{f}(a) = \mathrm{f}(b) \rightarrow (a^2+1)(b^2+2) = (a^2+2)(b^2+1)$$

$$\mathrm{f}(a) = \mathrm{f}(b) \rightarrow (a^2 = b^2)$$

$$\mathrm{f}(a) = \mathrm{f}(b) \rightarrow (a = b \; ou \; a = -b)$$

La fonction n'est donc pas injective car a peut valoir -b.

Conclusion
La fonction ne peut être bijective

Solution 2 :
Pour que la fonction soit bijective, elle doit être injective et surjective.

- **Injectivité**

Soit a, b deux réels tel que $f(a) = f(b)$. On a :

$$\mathrm{f}(2) = \frac{2^2+1}{2^2+2} = \frac{5}{6}$$

$$\mathrm{f}(-2) = \frac{(-2)^2+1}{(-2)^2+2} = \frac{5}{6}$$

2 et -2 ont la même image. La fonction n'est donc pas injective.

Conclusion
La fonction ne peut être bijective

<u>Exercice 5</u> (**4 points)**

Montrez que la fonction suivante est en grand-O de 1. Détaillez et justifiez chaque étape de votre réponse.

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$$

<u>Solution :</u>

On peut réécrire la fonction comme suit.

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2 - 1}{x^2 + 2}$$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x^2 + 2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{x^2 + 2} > 0$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - \frac{1}{x^2+2} < 1$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) < 1$$

En posant *k* = 0 et c = 1, on a bien

$$\forall x > k, \quad f(x) < 1 * 1$$

D'où la fonction en $\mathcal{O}(1)$.