Solutionnaire

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Contrôle périodique 2

LOG2810

Sigle du cours

Sigle et titre du cours	*Groupe*	*Trimestre*
LOG2810 **Structures discrètes**	**Tous**	**Été 2022**

Professeur	*Local*	*Téléphone*
Aurel Randolph, Chargé de cours **Lévis Thériault, Coordonnateur**	**A-416**	

Jour	*Date*	*Durée*	*Heures*
Samedi	**4 juin 2022**	**1h**	**10h30-11h30**

Question 1 (**5 points)**

Sur $\mathbb{R}^2$ on définit la relation ***R*** par :

(x, y) ***R*** (x', y') si et seulement si (x = y) ou (y ≤ y')

R est-elle une relation d'ordre ? Justifiez votre réponse.,

Réponse :

R est-elle une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Note : Inutile de démontrer toutes les propriétés pour conclure, dès lors qu'une des propriétés n'est pas vérifiée. Néanmoins, pour des fins pédagogiques, elles vont toutes être étudiées ici.

- Réflexivité
  Soit (x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$. On a x = x. Aussi y ≤ y. Alors, (x, y) ***R*** (x, y).
  R est donc réflexive.
- Antisymétrie
  Soit (x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$ et (x', y') ∈ $\mathbb{R}^2$ tel que (x, y) ***R*** (x', y') et (x', y') ***R*** (x, y).
  (x, y) ***R*** (x', y') alors, x = x' ou y ≤ y'
  (x', y') ***R*** (x, y) alors, x' = x ou y' ≤ y
  On a donc (x = x' et x' = x) ou (x = x' et y' ≤ y) ou (x' = x et y ≤ y') ou (y ≤ y'et y' ≤ y)
  Or (x = x' et x' = x) se réduit à x = x'.
  Donc, (x = x' et x' = x) ou (x = x' et y' ≤ y) devient (x = x') ou (x = x' et y' ≤ y) ce qui donne (x = x').
  (x = x' et x' = x) ou (x = x' et y' ≤ y) ou (x' = x et y ≤ y') devient (x = x') ou (x' = x et y ≤ y') ce qui donne (x = x').
  De plus, (y ≤ y'et y' ≤ y) se réduit à y = y'.
  Donc, l'expression (x = x' et x' = x) ou (x = x' et y' ≤ y) ou (x' = x et y ≤ y') ou (y ≤ y'et y' ≤ y) devient :
  (x = x') ou (y = y').
  L'antisymétrie n'est pas vérifiée, car on aurait dû avoir (x = x') **et** (y = y').
- Transitivité
  Soit (x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$, (x', y') ∈ $\mathbb{R}^2$ et (a, b) ∈ $\mathbb{R}^2$ tel que (x, y) ***R*** (x', y') et (x', y') ***R*** (a, b).
  (x, y) ***R*** (x', y') alors, x = x' ou y ≤ y'
  (x', y') ***R*** (a, b) alors, x' = a ou y' ≤ b
  On a donc (x = x' et x' = a) ou (x = x' et y' ≤ b) ou (x' = a et y ≤ y') ou (y ≤ y'et y' ≤ b)
  (x = x' = a) ou (x = x' et y' ≤ b) ou (x' = a et y ≤ y') ou (y ≤ y' ≤ b)
  (x = a) ou (x = x' et y' ≤ b) ou (x' = a et y ≤ y') ou (y ≤ b)
  La transitivité n'est pas vérifiée.

Question 2 (**2 points)**

Donnez une définition récursive de la suite (a_n), où n est un entier naturel.

$$a_n = 2^{2^n}$$

Réponse :

$a_0 = 2; a_{n+1} = a_n^2$

Question 3 (**4 points)**
En utilisant vos connaissances en théorie des nombres, montrez que **7** divise **$2222^{5555} + 5555^{2222}$**. Vous devez présenter toutes les étapes de votre réponse.

Réponse :

- En appliquant le petit théorème de Fermat, $2222^6 \equiv 1 \pmod 7$.
  Or 5555 = 6 x 925 + 5, donc $2222^{5555} \equiv 1^{925} \times 2222^5 \pmod 7$.
  $2222^{5555} \equiv 2222^5 \pmod 7$.
  Or 2222 = 7 x 317 + 3, donc $2222 \equiv 3 \pmod 7$.
  Ainsi, $2222^5 \equiv 3^5 \pmod 7$, soit $2222^5 \equiv 5 \pmod 7$.
  D'où $2222^{5555} \equiv 5 \pmod 7$.
- En appliquant le petit théorème de Fermat, $5555^6 \equiv 1 \pmod 7$.
  Or 2222 = 6 x 370 + 2, donc $5555^{2222} \equiv 1^{370} \times 5555^2 \pmod 7$.
  $5555^{2222} \equiv 5555^2 \pmod 7$.
  Or 5555 = 7 x 793 + 4, donc $5555 \equiv 4 \pmod 7$.
  Ainsi, $5555^2 \equiv 4^2 \pmod 7$, soit $5555^2 \equiv 2 \pmod 7$.
  D'où $5555^{2222} \equiv 2 \pmod 7$.
- Conclusion
  $2222^{5555} \equiv 5 \pmod 7$ et $5555^{2222} \equiv 2 \pmod 7$.
  Alors, $2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv (5 + 2) \pmod 7$.
  Soit $2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 0 \pmod 7$. CQFD

Note : Ici, les exposants ont été simplifiés en premier, puis les bases. On aurait pu simplifier aussi les bases en premier avant de simplifier les exposants.

Question 4 (**5 points)**
Montrez en utilisant le principe d'induction que pour tout entier naturel n :

$n^5 - n$ est divisible par 5

Réponse :
Soit P(n) : $n^5 - n$ est divisible par 5.
Pour n=0, on a :
$0^5 - 0 = 0 - 0 = 0$
0 est divisible par 5.
P(0) est donc vrai.
Supposons pour un certain $n \geq 0$ que P(n) est vrai et montrons que P(n+1) est vrai, c'est-à dire que $(n+1)^5 - (n+1)$ est divisible par 5.
$(n+1)^5 - (n+1) = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 4n$
$(n+1)^5 - (n+1) = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n - n$
$(n+1)^5 - (n+1) = (n^5 - n) + (5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n)$
$(n+1)^5 - (n+1) = (n^5 - n) + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)$
Par hypothèse d'induction, $n^5 - n$ est divisible par 5. De plus, $5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)$ est divisible par 5.
Donc $(n^5 - n) + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)$ est divisible par 5, en étant la somme de 2 entiers tous deux divisibles par 5.
Il s'en suit que $(n+1)^5 - (n+1)$ est divisible par 5 et que P(n+1) est vrai.

P(0) est vrai et $\forall n \geq 0$ $P(n) \rightarrow P(n+1)$ est vrai
On peut alors conclure que pour tout entier naturel n, $n^5 - n$ est divisible par 5.

Question 5 (**4 points)**

Donnez une évaluation de la complexité en **θ** de $\mathbf{2^{n+2} + 3^{n-1}}$. Justifiez votre réponse.

Réponse :

$2^{n+2} + 3^{n-1} \in \boldsymbol{\theta}(3^n)$

- Montrons que $2^{n+2} + 3^{n-1} \in \mathbf{O}(3^n)$

  $2^{n+2} \in \mathbf{O}(2^n)$

  $3^{n-1} \in \mathbf{O}(3^n)$

  $2^{n+2} + 3^{n-1} \in \mathbf{O}(\max(2^n, 3^n))$

  $2^{n+2} + 3^{n-1} \in \mathbf{O}(3^n)$

- Montrons que $3^n \in \mathbf{O}(2^{n+2} + 3^{n-1})$

  Cherchons c et k tel que $3^n \leq c(2^{n+2} + 3^{n-1})$ pour $n \geq k$

  En prenant c=3, on a :

  $c(2^{n+2} + 3^{n-1}) = 3(2^{n+2} + 3^{n-1}) = 3 \text{ x } 2^{n+2} + 3^n$

  On a donc $3^n \leq 3 \text{ x } 2^{n+2} + 3^n$ pour tout entier positif n. À gauche et à droite de l'inégalité on a bien 3^n. Celui de droite est augmenté de $3 \text{ x } 2^{n+2}$, ce qui explique le sens de l'inégalité.

  C'est à dire $3^n \leq c(2^{n+2} + 3^{n-1})$ pour $n \geq 0$.

  En prenant k = 1, on a bien $3^n \leq c(2^{n+2} + 3^{n-1})$

  Ce qui permet de conclure que $3^n \in \mathbf{O}(2^{n+2} + 3^{n-1})$