POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

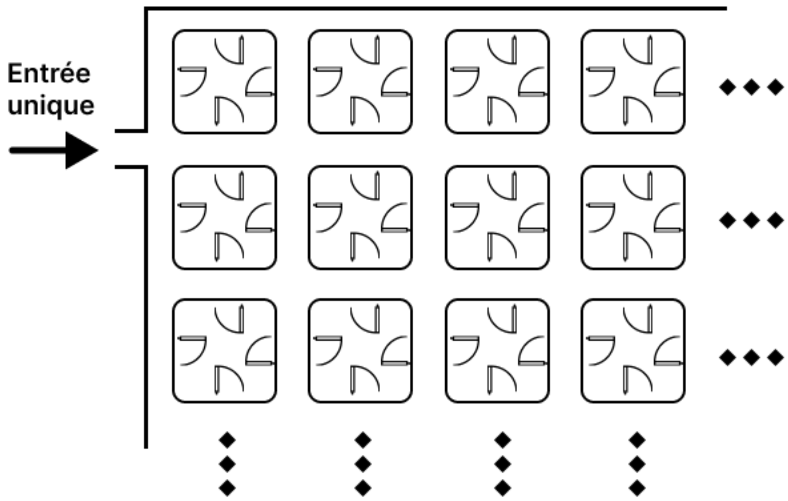
TD 10 : GRAPHE

H2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1.

La ville fermée de Ville-Grand-Carreaux est constituée de blocs carrés de 10 par 10 (voir l'image partielle ci-dessous). Caroline est une ancienne ingénieure informaticienne chez Amazon qui s'est reconvertie en livreuse de colis Amazon. Chaque jour, elle entre dans Ville-Grand-Carreaux par son entrée unique et livre des colis à tous les résidents.

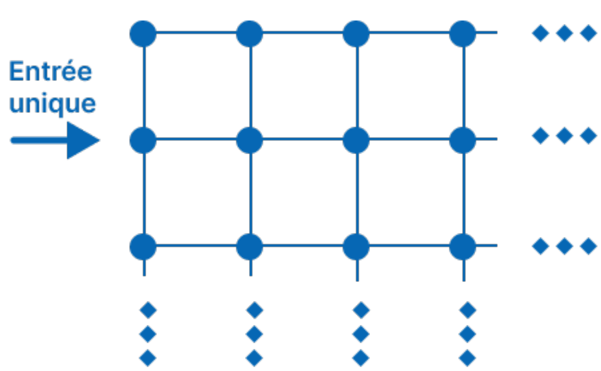


Étant une employée consciencieuse, Caroline veut optimiser son temps et réduire les trajets inutiles ; elle cherche un moyen de livrer chaque colis sans avoir à revenir sur ses pas. Supposons que, dès que Caroline passe devant une maison (de chaque côté de la rue), elle peut y livrer un colis.

Caroline peut-elle livrer les colis à tous les résidents de Ville-Grand-Carreaux sans faire demi-tour ni refaire une partie de son parcours ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

Nous pouvons modéliser la ville fermée de Ville-Grand-Carreaux par un graphe non orienté dans lequel les intersections des rues sont des sommets, et les rues elles-mêmes sont des arêtes.

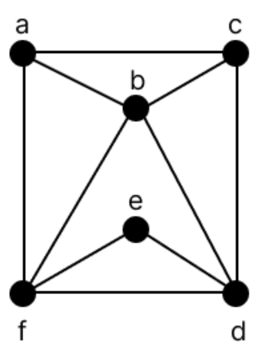


Si Caroline livre ses colis sans faire demi-tour ni refaire une partie de son parcours, un tel itinéraire doit correspondre à un chemin d'Euler, car cela nécessite de traverser chaque arête exactement une fois. Cependant, nous savons qu'un graphe non orienté avec plus de deux sommets de degré impair ne peut pas avoir de chemin d'Euler. Sur la carte de Ville-Grand-Carreaux, tous les sommets sur le bord de la carte, sauf les coins, ont un degré impair, et donc aucun chemin d'Euler n'est possible.

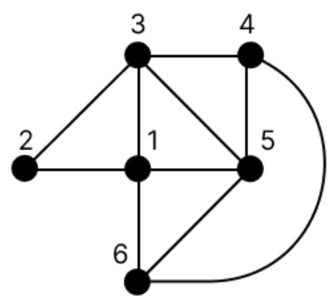
Caroline ne peut donc pas livrer ses colis sans faire demi-tour ni refaire une partie de son parcours.

Exercice 2.

Les circuits électroniques sont modélisés par des graphes pour être conçus, vérifiés et protégés contre le vol de propriété intellectuelle. Les puces modernes sont des exemples de circuits électroniques miniaturisés complexes conçus à l'aide d'outils d'automatisation sophistiqués. L'isomorphisme de graphes est utilisé pour vérifier que la disposition de la puce correspond à la conception originale et pour détecter les violations de propriété intellectuelle entre les fournisseurs. Vérifiez s'il y a violation de propriété intellectuelle, en considérant les circuits des fournisseurs A et B. Justifiez votre réponse.



Fournisseur A



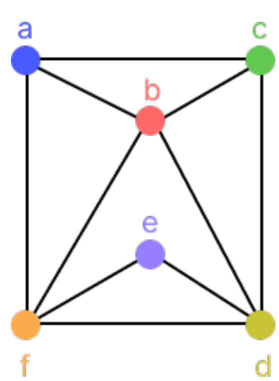
Fournisseur B

Réponse :

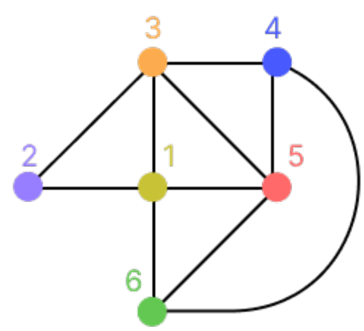
Il y a violation de propriété intellectuelle, puisque les deux graphes sont bien isomorphes.

Soit h la fonction bijective qui transforme le graphe du fournisseur A en celui du fournisseur B.
On a :

- $h(a) = 4$
- $h(b) = 5$
- $h(c) = 6$
- $h(d) = 1$
- $h(e) = 2$
- $h(f) = 3$

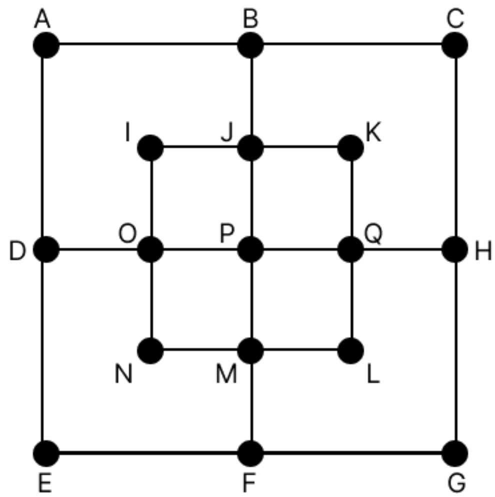


Fournisseur A



Fournisseur B

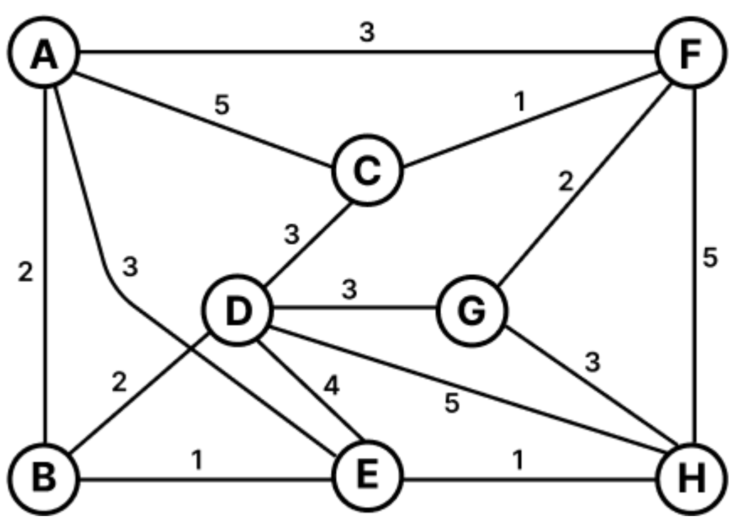
Exercice 3.
Pour le graphe ci-dessous, déterminez s'il contient un circuit Hamiltonien. Dans l'affirmative décrivez-en un.



Réponse :

Ce graphe n'a pas de circuit Hamiltonien.
Si cela était le cas, alors le circuit devrait contenir les arêtes {D, A} et {A, B} étant donné que ce sont les seules arêtes incidentes au sommet A. Par le même raisonnement, le circuit devrait aussi contenir les six autres arêtes autour de la figure i.e. {B, C}, {C, H}, {H, G}, {G, F}, {F, E} et {E, D}. Cependant, ces huit arêtes forment déjà un circuit, et ce circuit omet les neuf sommets à l'intérieur. Par conséquent, il n'y a pas de circuit Hamiltonien.

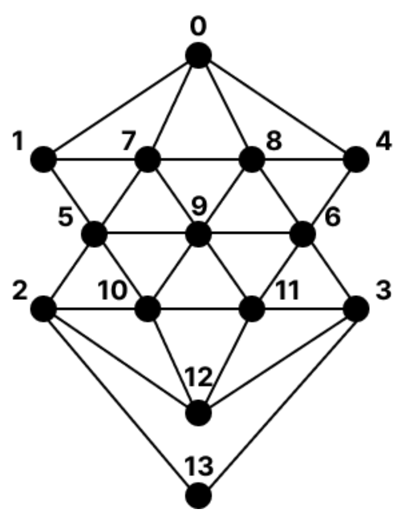
Exercice 4.
En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminez le plus court chemin, du sommet B vers tous les autres sommets. Montrez toutes les étapes de votre réponse.



Réponse :

i	S	B	A	C	D	E	F	G	H
0	-	0	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )
1	{B}	-	2 (B-A)	∞ ( )	2 (B-D)	1 (B-E)	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )
2	{B, E}	-	2 (B-A)	∞ ( )	2 (B-D)	-	∞ ( )	∞ ( )	2 (B-E-H)
3	{B, E, A}	-	-	7 (B-A-C)	2 (B-D)	-	5 (B-A-F)	∞ ( )	2 (B-E-H)
4	{B, E, A, D}	-	-	5 (B-D-C)	-	-	5 (B-A-F)	5 (B-D-G)	2 (B-E-H)
5	{B, E, A, D, H}	-	-	5 (B-D-C)	-	-	5 (B-A-F)	5 (B-D-G)	-
6	{B, E, A, D, H, C}	-	-	-	-	-	5 (B-A-F)	5 (B-D-G)	-
7	{B, E, A, D, H, C, F}	-	-	-	-	-	-	5 (B-D-G)	-
8	{B, E, A, D, H, C, F, G}	0	2 (B-A)	5 (B-D-C)	2 (B-D)	1 (B-E)	5 (B-A-F)	5 (B-D-G)	2 (B-E-H)

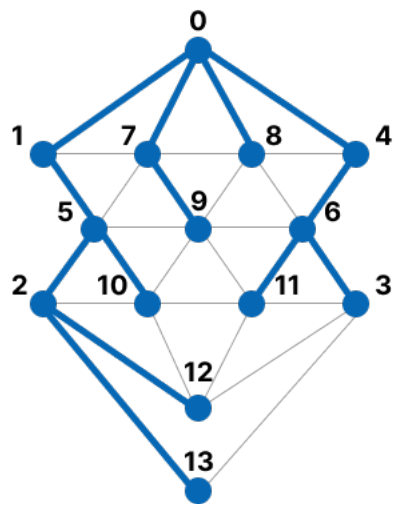
Exercice 5.
On considère le graphe suivant :



a) À partir du sommet 0, donnez un parcours en largeur du graphe. Les sommets doivent être considérés dans l'ordre croissant de leur numéro.

Réponse :

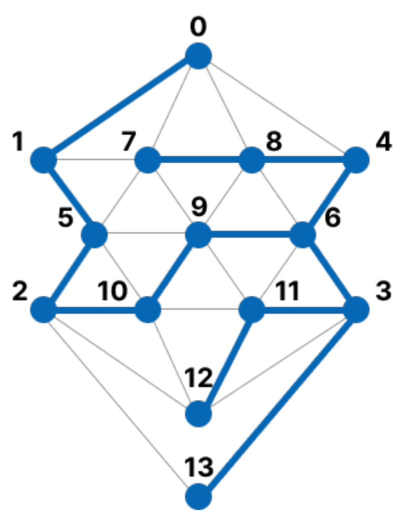
0 – 1 – 4 – 7 – 8 – 5 – 6 – 9 – 2 – 10 – 3 – 11 – 12 – 13



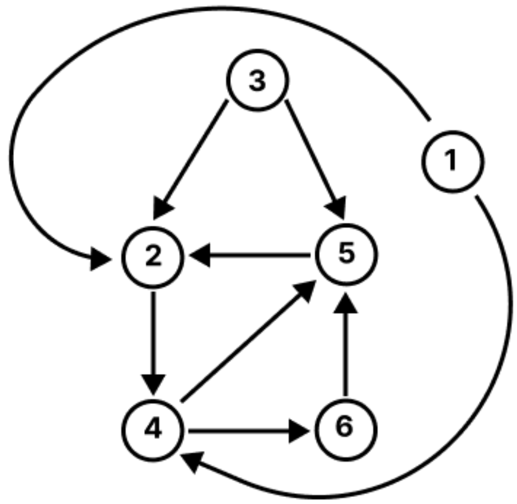
b) À partir du sommet 0, donnez un parcours en profondeur du graphe. Les sommets doivent être considérés dans l'ordre croissant de leur numéro.

Réponse :

0 – 1 – 5 – 2 – 10 – 9 – 6 – 3 – 11 – 12 – 13 – 4 – 8 – 7



Exercice 6.
On considère le graphe ci-dessous :



a) Donnez la représentation du graphe sous forme de liste d’adjacence. Montrez toutes les étapes de votre réponse.

Réponse :
La liste d'adjacence ci-dessous spécifie les sommets adjacents à chaque sommet du graphe.

Sommet	Sommets adjacents
1	2, 4
2	4
3	2, 5
4	5, 6
5	2
6	5

b) Donnez la représentation du graphe sous forme de matrice d’adjacence. Montrez toutes les étapes de votre réponse.

Réponse :
Notez que la matrice d'adjacence d'un graphe est basée sur l'ordre choisi pour les sommets. Différents étiquetages des sommets mènent à des matrices d'adjacence différentes. Ici, les lignes et les colonnes de la matrice sont étiquetées 1, 2, 3, 4, 5 et 6, respectivement.

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{array} \\
\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

c) Le graphe est-il connexe ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

Le graphe n'est pas connexe.
Par exemple, il n'y a pas de chemin reliant le sommet 4 au sommet 1.

Exercice 7.
Un groupe de 17 personnes se propose de constituer un réseautage particulier de sorte que chaque membre du groupe ait dans ses contacts le numéro de téléphone d'exactement 3 autres personnes du groupe. Ces échanges de numéros doivent être mutuels, c'est-à-dire que chaque personne doit avoir donné son numéro à 3 autres personnes qui, en retour, ont donné leur propre numéro à cette personne. Est-il possible de constituer ce réseautage ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

Non, il n'est pas possible de constituer un tel réseautage.
On peut constituer un graphe dont les sommets sont les 17 personnes. Chaque numéro de téléphone échangé permet d'établir un arc du graphe. Chaque sommet du graphe est donc de degré 3.
D'après le théorème des poignées de mains 3 x 17 = 51 qui est la somme des degrés des sommets du graphe doit être égale à 2 fois le nombre d'arcs. Il devrait donc être pair et non impair (51).