POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 9 : DÉNOMBREMENT

Solutionnaire

Exercice 1 :

Prouvez que:

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\binom{n}{2}\binom{n}{n-2}+\cdots+\binom{n}{n-1}\binom{n}{1}+\binom{n}{n}\binom{n}{0}=\binom{2n}{n}$$

Solution :

D'après le théorème binomial, nous avons $(1+x)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k$. Le coefficient de x^n est donc $\binom{2n}{n}$.
Maintenant, $(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$, et $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. Par conséquent :

$$(1+x)^n(1+x)^n=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j\right)$$

Développons :

$$(1+x)^n(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{j}x^{k+j}$$

Les coefficients de x^n seront donc :

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\cdots+\binom{n}{n-1}\binom{n}{1}+\binom{n}{n}\binom{n}{0}$$

Puisque les coefficients de x^n dans $(1+x)^{2n}$ doivent être les mêmes dans toutes les représentations, nous devons avoir :

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\cdots+\binom{n}{n-1}\binom{n}{1}+\binom{n}{n}\binom{n}{0}=\binom{2n}{n}$$

Exercice 2 :

Dans un parking, il y a 51 voitures qui doivent être garées dans des places numérotées de 1 à 100, inclusivement. Chaque voiture doit être garée dans une place unique. Montrez qu'au moins deux voitures seront garées dans des places avec des numéros consécutifs.

Solution :

Preuve par l'absurde :

Supposons que deux voitures ne soient jamais garées dans des places aux numéros consécutifs. Cela signifie qu'entre chaque place occupée, il doit y avoir au moins une place inoccupée pour éviter des numéros consécutifs.

- Nombre total de places disponibles : 100 (numérotées de 1 à 100).
- Nombre maximal de voitures pouvant être garées sans occuper des places consécutives : Puisque chaque voiture garée nécessite au moins une place vide à côté, on ne peut utiliser au maximum qu'une place sur deux.

$$\text{Nombre maximal de voitures} = \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor = 50$$

Cependant, il y a 51 voitures qui nécessitent des places de parking.

Contradiction : Nous ne pouvons pas garer 51 voitures dans seulement 50 places sans qu'au moins deux voitures ne soient garées dans des places aux numéros consécutifs.

Par le principe des tiroirs (ou principe des "pigeonniers"), il est impossible de garer toutes les 51 voitures sans qu'au moins deux d'entre elles soient dans des places aux numéros consécutifs. Ainsi, au moins deux voitures devront être garées dans des places ayant des numéros consécutifs.

Exercise 3:

Résolvez la relation de récurrence suivante :

$$a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}, \quad n \geq 3$$

$$a_0 = 5$$

$$a_1 = -9$$

$$a_2 = 15$$

Solution :

Posons $a_n = r^3$, $a_{n-1} = r^2$, $a_{n-2} = r$ et $a_{n-3} = 1$.
L'équation caractéristique devient donc :

$$r^3 = -3r^2 - 3r - 1$$

En réarrangeant, on obtient :

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$$

On peut factoriser ceci comme suit :

$$(r + 1)^3 = 0$$

Ce qui nous donne la racine :

$$r = -1 \quad \text{avec une multiplicité de 3}$$

La solution de la relation de récurrence est de la forme :

$$a_n = \alpha_1 \cdot (-1)^n + \alpha_2 \cdot n \cdot (-1)^n + \alpha_3 \cdot n^2 \cdot (-1)^n$$

1. $a_0 = 5 \Rightarrow 5 = \alpha_1$ 2. $a_1 = -9 \Rightarrow -9 = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$ 3. $a_2 = 15 \Rightarrow 15 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3$
En utilisant $\alpha_1 = 5$ dans les deux autres équations :

$$-9 = -5 - \alpha_2 - \alpha_3$$

$$15 = 5 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3$$

Simplifions la première équation :

$$-4 = -\alpha_2 - \alpha_3$$

Simplifions la deuxième équation :

$$10 = 2\alpha_2 + 4\alpha_3$$

Multiplions la première équation par 2 :

$$-8 = -2\alpha_2 - 2\alpha_3$$

$$10 = 2\alpha_2 + 4\alpha_3$$

En ajoutant les deux équations :

$$2 = 2\alpha_3$$

$$\alpha_3 = 1$$

Déterminons α_2 à partir de $-4 = -\alpha_2 - \alpha_3$ et $\alpha_3 = 1$:

$$\alpha_2 = 4 - \alpha_3 = 4 - 1 = 3$$

Ainsi, la solution de la relation de récurrence est :

$$a_n = 5 \cdot (-1)^n + 3n \cdot (-1)^n + n^2 \cdot (-1)^n = 5 \cdot (-1)^n + 3n \cdot (-1)^n + n^2 \cdot (-1)^n$$

Exercice 4 :

Supposons que la fonction f satisfait la relation de récurrence suivante :

$$f(n) = 2f(\sqrt{n}) + \log n$$

Pour tout n étant un carré parfait supérieur à 1, et $f(2) = 1$.

Trouvez une estimation de $f(n)$ en utilisant la notation O.

Indication : Utilisez la substitution $m = \log n$.

Solution :

Nous utilisons la substitution suggérée et posons $m = \log n$, ce qui implique $2^m = n$.
Nous pouvons alors réécrire $f(n) = f(2^m)$ comme suit :

$$f(2^m) = 2f\left(\sqrt{2^m}\right) + \log(2^m) = 2f\left(2^{m/2}\right) + m$$

Nous réécrivons la fonction pour plus de clarté en posant $g(m) = f(2^m)$.

Ainsi, nous obtenons la relation de récurrence suivante pour g :

$$g(m) = 2g(m/2) + m$$

En appliquant le théorème maître avec $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$, et $d = 1$, nous obtenons :

$$g(m) = O(m\log m)$$

Par conséquent,

$$f(n) = O(\log n \log\log n)$$

Exercice 5:

Déterminez le nombre de chaînes de six lettres minuscules de l'alphabet qui ont les caractéristiques suivantes:

a) Contiennent la lettre a :

Solution :

Nombre total de chaînes possibles

Pour chacune des 6 positions dans la chaîne, il y a 26 choix possibles (une pour chaque lettre).

En utilisant la règle du produit :

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^6 = 308{,}915{,}776$$

Chaînes possibles ne contenant pas a :

Si la lettre a est exclue, alors pour chacune des 6 positions, il y a 25 choix possibles.

En utilisant la règle du produit :

$$25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 = 25^6 = 244{,}140{,}625$$

Chaînes possibles contenant a :

Le nombre de chaînes possibles contenant a est donc le nombre total de chaînes moins le nombre de chaînes ne contenant pas a :

$$26^6 - 25^6 = 308{,}915{,}776 - 244{,}140{,}625 = 64{,}775{,}151$$

b) Contiennent les lettres a et b

Solution :

Chaînes possibles ne contenant pas b :

Si b est exclue, alors pour chacune des 6 positions, il y a 25 choix possibles.

En utilisant la règle du produit :

$$25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 = 25^6 = 244{,}140{,}625$$

Chaînes possibles ne contenant ni a ni b :

Si a et b sont exclues, alors pour chacune des 6 positions, il y a 24 choix possibles.

En utilisant la règle du produit :

$$24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 = 24^6 = 191{,}102{,}976$$

Chaînes possibles contenant soit a soit b :

En utilisant le principe d'inclusion-exclusion :

$$25^6 + 25^6 - 24^6 = 2 \cdot 25^6 - 24^6 = 297{,}178{,}274$$

Chaînes possibles contenant à la fois a et b :

Le nombre de chaînes possibles contenant à la fois a et b est donc le nombre total de chaînes moins le nombre de chaînes ne contenant ni a ni b :

$$26^6 - (2 \cdot 25^6 - 24^6) = 308{,}915{,}776 - 297{,}178{,}274 = 11{,}737{,}502$$

c) Chaînes où a et b sont consécutives, avec a précédant b, et toutes les lettres sont distinctes :

Solution :

Positions possibles pour ab

Puisque ab doit apparaître dans des positions consécutives, les chaînes possibles sont de la forme :

$$\mathrm{abx_1x_2x_3x_4}, \quad \mathrm{x_1abx_2x_3x_4}, \quad \mathrm{x_1x_2abx_3x_4}, \quad \mathrm{x_1x_2x_3abx_4}, \quad \mathrm{x_1x_2x_3x_4ab}$$

Ainsi, il y a 5 positions possibles pour ab.

Chaînes possibles des lettres restantes

Puisque toutes les lettres doivent être distinctes, nous devons choisir 4 lettres parmi les 24 restantes (en excluant a et b). L'ordre des lettres est important, donc nous utilisons une permutation :

$$P(24,4) = \frac{24!}{(24-4)!} = 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = 255{,}024$$

Chaînes possibles contenant ab avec toutes les lettres distinctes

En utilisant la règle du produit :

$$5 \cdot 255{,}024 = 1{,}275{,}120$$

d) Chaînes où a est quelque part à gauche de b dans la chaîne, avec toutes les lettres distinctes :

Solution :

Positions possibles pour a et b

Nous devons choisir 2 positions parmi les 6 possibles pour a et b.

En utilisant une permutation :

$$P(6,2) = 6 \cdot 5 = 30$$

Positions où a précède b

La moitié des arrangements auront a précédant b, tandis que l'autre moitié auront b précédant a.

Par conséquent :

$$\frac{30}{2} = 15$$

Chaînes possibles des lettres restantes

Puisque toutes les lettres doivent être distinctes, nous devons choisir 4 lettres parmi les 24 restantes. En utilisant une permutation :

$$\mathrm{P}(24,4) = 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = 255{,}024$$

Chaînes possibles contenant a précédant b avec toutes les lettres distinctes

En utilisant la règle du produit :

$$15 \cdot 255{,}024 = 3{,}825{,}360$$

Exercice 6 :

Une main de poker est composée de 5 cartes choisies parmi un jeu standard de 52 cartes.

Il existe une variété de mains spéciales qui peuvent être distribuées au poker. Pour chacun des types de mains suivants, comptez le nombre de mains possibles.

1. Carré : La main contient quatre cartes de la même valeur numérique (par exemple, quatre valets) et une autre carte.
2. Brelan : La main contient trois cartes de la même valeur numérique et deux autres cartes de valeurs numériques différentes.
3. Couleur : La main contient cinq cartes de la même couleur.
4. Full : La main contient trois cartes d'une valeur et deux cartes d'une autre valeur.
5. Quinte : Les cinq cartes ont des valeurs numériques consécutives, comme 7-8-9-10-Valet. Considérez que l'as est plus grand que le roi mais pas plus petit que 2. Les couleurs des cartes n'ont pas d'importance.
6. Quinte flush : La main est à la fois une quinte et une couleur.

Solution:

(a) Carré (Four of a kind)

L'ordre des cartes dans la main n'a pas d'importance, donc nous utilisons les coefficients binomiaux.

Pour obtenir un carré, nous avons besoin de quatre cartes de la même valeur et d'une autre carte.

- Premièrement, nous choisissons l'une des 13 valeurs pour le carré, ce qui peut se faire de $\binom{13}{1}$ façons.
- Ensuite, nous sélectionnons les 4 cartes de cette valeur choisie pour le carré, ce qui peut se faire de $\binom{4}{4}$ façons.
- Ensuite, nous choisissons l'une des 12 valeurs restantes pour la carte supplémentaire, ce qui peut se faire de $\binom{12}{1}$ façons.
- Enfin, nous sélectionnons l'une des 4 cartes pour cette valeur supplémentaire, ce qui peut se faire de $\binom{4}{1}$ façons.

Le nombre total de façons est donc le produit des façons pour chaque étape de sélection du carré :

$$\binom{13}{1} \cdot \binom{4}{4} \cdot \binom{12}{1} \cdot \binom{4}{1} = 13 \cdot 1 \cdot 12 \cdot 4 = 624$$

Ainsi, il y a 624 mains différentes résultant en un carré.

—

(b) Brelan (Three of a kind)

Pour obtenir un brelan, nous avons besoin de trois cartes de la même valeur et de deux autres cartes de valeurs différentes.

- Premièrement, nous choisissons l'une des 13 valeurs pour le brelan, ce qui peut se faire de $\binom{13}{1}$ façons.
- Ensuite, nous sélectionnons 3 des 4 cartes pour cette valeur choisie, ce qui peut se faire de $\binom{4}{3}$ façons.
- Ensuite, nous choisissons 2 des 12 valeurs restantes pour les deux autres cartes, ce qui peut se faire de $\binom{12}{2}$ façons.
- Ensuite, nous sélectionnons 1 des 4 cartes pour la première valeur choisie des cartes restantes, ce qui peut se faire de $\binom{4}{1}$ façons.
- Enfin, nous sélectionnons 1 des 4 cartes pour la deuxième valeur choisie des cartes restantes, ce qui peut se faire de $\binom{4}{1}$ façons.

Le nombre total de façons est donc le produit des façons pour chaque étape de sélection du brelan :

$$\binom{13}{1} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{12}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} = 13 \cdot 4 \cdot 66 \cdot 4 \cdot 4 = 54{,}912$$

Ainsi, il y a 54,912 mains différentes résultant en un brelan.

—

(c) Couleur (Flush)

Pour obtenir une couleur, nous avons besoin de cinq cartes de la même couleur.

- Premièrement, nous choisissons l'une des 4 couleurs, ce qui peut se faire de $\binom{4}{1}$ façons.
- Ensuite, nous sélectionnons 5 des 13 cartes pour cette couleur choisie, ce qui peut se faire de $\binom{13}{5}$ façons.

Le nombre total de façons est donc le produit des façons pour chaque étape de sélection de la couleur :

$$\binom{4}{1} \cdot \binom{13}{5} = 4 \cdot 1287 = 5148$$

Ainsi, il y a 5148 mains différentes résultant en une couleur. Si nous excluons les 4 quintes royales et les 36 quintes flush, il reste 5108 couleurs qui ne sont ni des quintes royales ni des quintes flush.

—

(d) Full (Full house)

Pour obtenir un full, nous avons besoin de trois cartes d'une même valeur et de deux cartes d'une autre valeur.

- Premièrement, nous choisissons l'une des 13 valeurs pour le brelan, ce qui peut se faire de $\binom{13}{1}$ façons.
- Ensuite, nous sélectionnons 3 des 4 cartes pour cette valeur choisie, ce qui peut se faire de $\binom{4}{3}$ façons.
- Ensuite, nous choisissons l'une des 12 valeurs restantes pour la paire, ce qui peut se faire de $\binom{12}{1}$ façons.
- Enfin, nous sélectionnons 2 des 4 cartes pour cette deuxième valeur, ce qui peut se faire de $\binom{4}{2}$ façons.

Le nombre total de façons est donc le produit des façons pour chaque étape de sélection du full :

$$\binom{13}{1} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{12}{1} \cdot \binom{4}{2} = 13 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 6 = 3744$$

Ainsi, il y a 3744 mains différentes résultant en un full.

—

(e) Quinte (Straight)

Pour obtenir une quinte, nous avons besoin de cinq cartes avec des valeurs consécutives.

- Premièrement, nous choisissons l'une des 10 séquences possibles de cinq valeurs consécutives (2-3-4-5-6, 3-4-5-6-7, etc.), ce qui peut se faire de $\binom{10}{1}$ façons.
- Ensuite, pour chacune des cinq valeurs, nous choisissons 1 des 4 couleurs.

Le nombre total de façons est donc :

$$\binom{10}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} = 10 \cdot 4^5 = 10 \cdot 1024 = 10{,}240$$

Il y a donc 10,240 quintes possibles. En excluant les 4 quintes royales et les 36 quintes flush, il reste 10,200 quintes qui ne sont ni des quintes royales ni des quintes flush.

—

(f) Quinte flush (Straight flush)

Pour obtenir une quinte flush, nous avons besoin d'une quinte et d'une couleur (toutes les cartes en ordre consécutif et de la même couleur).

- Premièrement, nous choisissons l'une des 4 couleurs pour la couleur, ce qui peut se faire de $\binom{4}{1}$ façons.
- Ensuite, nous choisissons l'une des 9 séquences possibles de cinq valeurs consécutives, ce qui peut se faire de $\binom{9}{1}$ façons.

Le nombre total de façons est :

$$\binom{4}{1} \cdot \binom{9}{1} = 4 \cdot 9 = 36$$

Ainsi, il y a 36 mains différentes résultant en une quinte flush. En excluant les 4 quintes royales, il reste 32 quintes flush qui ne sont pas des quintes royales.