POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 3 : LES FONDEMENTS : PREUVES

SOLUTIONNAIRE

H2024

Exercice 1 :

Parmi les 8 règles d’inférences vues dans les notes de cours, dites lesquelles sont utilisées dans les phrases suivantes :

1. J'ai un crayon et un papier. Donc, j'ai un crayon.
Réponse : Simplification

2. J'ai un livre. J'ai aussi un stylo. Donc, j'ai un livre et un stylo.
Réponse : Conjonction

3. Si je réussis mon examen, alors je passerai le cours. Je réussis mon examen. Donc, je passerai le cours.
Réponse : Modus ponens

4. J'ai un parapluie. Donc, j'ai un parapluie ou je porte un chapeau.
Réponse : Addition

5. Il pleut, ou je prends le bus. Il ne pleut pas. Donc, je prends le bus.
Réponse : Syllogisme disjonctif

6. Si la lumière est allumée, alors quelqu'un est à la maison. Personne n’est à la maison. Donc la lumière n’est pas allumée.
Réponse : Modus tollens

7. Si je travaille tous les jours, alors je terminerai mon projet à temps. Si je termine mon projet à temps, alors je pourrai prendre des vacances. Donc, si je travaille tous les jours, je pourrai prendre des vacances.
Réponse : Syllogisme hypothétique

8. Je prends le train, ou je conduis. Je ne prendrai pas le train ou je n'arriverai pas en retard. Donc, je conduis ou je n'arriverai pas en retard.
Réponse : Résolution

Exercice 2 :

Pour chacun de ces arguments, déterminez si l'argument est correct ou incorrect et expliquez pourquoi.

a) Tous les ingénieurs connaissent la programmation. Sarah est ingénieure. Donc, Sarah connaît la programmation.

Réponse : Correct, utilisant l'instanciation universelle et le modus ponens.

b) Chaque étudiant qui suit le cours d'algèbre linéaire est en première année. Lucas est en première année. Donc, Lucas suit le cours d'algèbre linéaire.

Réponse : Incorrect; c'est une erreur logique de tirer une conclusion générale à partir d'un cas spécifique (erreur de généralisation hâtive).

c) Tous les chats aiment le poisson. L'animal de compagnie de Julien n'est pas un chat. Donc, l'animal de compagnie de Julien n'aime pas le poisson.

Réponse : Incorrect; un exemple fallacieux de nier l'hypothèse. Le fait que l'animal de compagnie de Julien ne soit pas un chat ne signifie pas qu'il n'aime pas le poisson.

d) Toute personne qui fait de l'exercice régulièrement est en bonne santé. Marc n'est pas en bonne santé. Donc, Marc ne fait pas d'exercice régulièrement.

Réponse : Correct, en utilisant l'instanciation universelle et le modus tollens.

Exercice 3 :

Michel-Ange est un célèbre peintre italien qui a vécu au XVIe siècle. Il est connu pour ses fresques à la chapelle Sixtine. En se préparant pour une nouvelle œuvre d'art, Michel-Ange essaie de se rappeler les couleurs de peinture qu'il a emportées. Il se souvient que :

(I.) Il n'a pas de blanc
(II.) Il a toujours du jaune lorsqu'il n'a pas de vert
(III.) S'il a du rouge, alors il n'a ni marron ni noir
(IV.) Des trois couleurs : vert, blanc et rouge, il en a au moins deux
(V.) Des deux couleurs : noir et gris, il en a exactement une

On suppose qu'il n'a jamais d'autres couleurs que celles citées. Quelle(s) couleur(s) a-t-il emportée(s) avec **certitude** ? Qu'en est-il des autres couleurs ? Montrez toutes les étapes de votre réponse.

Solution :

Pour résoudre ce problème, nous allons définir les propositions suivantes :

B : Michel-Ange a du blanc
J : Michel-Ange a du jaune
V : Michel-Ange a du vert
R : Michel-Ange a du rouge
M : Michel-Ange a du marron
N : Michel-Ange a du noir
G : Michel-Ange a du gris

Ensuite, nous pouvons traduire les énoncés en utilisant ces propositions.

$H1 : \neg B$
$H2 : \neg V \rightarrow J$
$H3 : R \rightarrow (\neg M \wedge \neg N)$
$H4 : (V \wedge B) \vee (V \wedge R) \vee (B \wedge R)$
$H5 : N \oplus G$

Maintenant, nous allons utiliser les règles d'inférence pour déduire les couleurs de peinture que Michel-Ange a emportées avec certitude. Le raisonnement est le suivant :

1. $\neg B$	$H1$
2. $(V \wedge B) \vee (V \wedge R) \vee (B \wedge R)$	$H4$
3. $(V \wedge R)$	Étapes 1 et 2 et résolution
4. R	Étape 3 et règle de la simplification
5. $R \rightarrow (\neg M \wedge \neg N)$	$H3$
6. $(\neg M \wedge \neg N)$	Étapes 4 et 5 et règle du modus ponens
7. $\neg N$	Étape 6 et règle de la simplification
8. $\neg M$	Étape 6 et règle de la simplification

À partir des étapes 1, 7 et 8, nous pouvons affirmer avec certitude qu'il y n'y a pas de blanc, de noir ou de marron. Résumons à partir de l'étape 8 pour en déduire les informations sur les autres couleurs :

9. $N \oplus G$	$H5$
10. G	Étapes 7 et 9 et définition de $\oplus$
11. $(V \wedge R \wedge G)$	Étapes 3 et 10 et règle de la conjonction

Nous pouvons ainsi conclure que Michel-Ange a les couleurs de peinture suivantes avec certitude : vert, rouge et gris. Et enfin :

12. V	Étape 11 et règle de la simplification
13. $\neg J \rightarrow V$	Contraposée de $H2$

Cependant, nous ne pouvons pas déduire jaune, car avec les étapes 11 et 12, $([V \wedge (\neg J \rightarrow V)] \rightarrow \neg J)$ n'est pas une tautologie. Cela correspond à un sophisme et en particulier à l'affirmation du conséquent, ce qui n'est pas une règle d'inférence valide.

En somme, nous pouvons conclure avec certitude que Michel-Ange a les couleurs de peinture suivantes :

vert, rouge et gris. De plus, nous pouvons affirmer avec certitude qu'il n'y a pas de blanc, de marron ou de noir. Cependant, nous ne pouvons pas conclure que Michel-Ange a emporté la couleur jaune.

Exercice 4 :

Soit n un entier positif, prouvez que si n^2 est divisible par 4, alors n est pair :

a) En utilisant une preuve par cas :

Solution :

Cas 1 : n est pair.
Soit n un nombre pair. Il existe donc un entier k tel que $n = 2k$. En élevant cette expression au carré, on obtient $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$. Ce résultat est un multiple de 4, donc n^2 est divisible par 4.

Cas 2 : n est impair.
Soit n un nombre impair. Il existe donc un entier k tel que $n = 2k + 1$. En élevant cette expression au carré, on obtient $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$. Ici, $4k^2 + 4k$ est divisible par 4, mais l'ajout de 1 fait que n^2 n'est pas divisible par 4.

En conclusion, si n^2 est divisible par 4, le cas où n est impair est exclu, car dans ce cas, n^2 n'est pas divisible par 4. Ainsi, n doit être pair.

b) en utilisant une preuve par contradiction :

Solution :

Supposons que n^2 soit divisible par 4, mais que n soit impair. Si n est impair, il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. En élevant cette expression au carré, on obtient $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$. Le terme $4k^2 + 4k$ est divisible par 4, mais l'ajout de 1 rend n^2 non divisible par 4. Cela contredit notre hypothèse selon laquelle n^2 est divisible par 4, nous amenant à conclure que notre hypothèse initiale que n est impair est fausse. Par conséquent, si n^2 est divisible par 4, alors n doit être pair.

Exercice 5 :

Soient $a, b \epsilon$ à $\mathbb{Z}$. En utilisant la preuve par contraposition (preuve indirecte), démontrez que si a · b est pair, alors au moins un des entiers a ou b est pair.

Solution :

Puisqu'on suggère une preuve indirecte, on démontrera la contraposée :

Si a et b sont tous deux impairs, alors a * b est impair.

Supposons donc par hypothèse que a et b sont impairs.

Donc, il existe k1 et k2 entiers tels que a = 2k1 + 1 et b = 2k2 + 1.

Donc, a * b = (2k1 + 1)(2k2 + 1)
= 4k1k2 + 2k1 + 2k2 + 1
= 2(2k1k2 + k1 + k2) + 1

Donc, il existe un entier k' tel que a * b = 2k' + 1 où k' = 2k1k2 + k1 + k2 est un entier.

Donc, a * b est impair.

Ainsi, par contraposition, si a * b est pair, alors au moins un des entiers a ou b est pair.

CQFD

Exercice 6 :

Soit n un entier positif. En utilisant la preuve directe, démontrez que :
n est impair si et seulement si 5n + 2 est impair

Solution :

Il s'agit de démontrer une biconditionnelle. Il nous faut donc démontrer 2 implications :

- Si 5n + 2 est impair, alors n est impair
- Si n est impair, alors 5n + 2 est impair

Démontrons l'implication si n est impair, alors 5n+2 est impair, en utilisant la preuve directe.
Supposons que n est impair. Il existe un entier k tel que n = 2k+1.
Ainsi, 5n+2 =10k +5+ 2 = 10k+6+1=2(5k + 3) +1
5n+2 est donc impair.
L'implication si n est impair alors 5n + 2 est impair est ainsi prouvée.

Démontrons l'implication si 5n+2 est impair alors n est impair, en utilisant la preuve directe.
Supposons que 5n + 2 est impair.
2 étant pair et 5n+2 impair, on a 5n est impair.
5 étant impair et 5n impair, il s'en suit que n est impair.
L'implication si 5n+2 est impair alors n est pair est ainsi prouvée.

Les deux implications étant prouvées, nous pouvons conclure que n est impair si et seulement si 5n+2 est impair.

Exercice 7 :

En utilisant une preuve par cas, démontrez que si n est la somme de deux carrés, alors le reste de la division euclidienne de n par 4 est toujours différent de 3

Solution :

On écrit $n = a^2 + b^2$, et on raisonne par cas suivant la parité de a et de b :

Cas 1 :

Si a et b sont tous les deux pairs, alors $a = 2k$ et $b = 2\ell$, $n = 4(k^2 + \ell^2)$ est divisible par 4 : la propriété est vraie.

Cas 2 :

Si a est pair et b est impair, alors $a = 2k$ et $b = 2\ell + 1$. Alors $n = 4k^2 + 4\ell^2 + 4\ell + 1 = 4(k^2 + \ell^2 + \ell) + 1$. Le reste de la division de n par 4 sera égal à 1. La propriété est vraie dans ce cas. Le cas a impair et b pair est symétrique.

Cas 3 :

Si a est impair et b est impair, alors $a = 2k + 1$, $b = 2\ell + 1$ et $n = 4k^2 + 4k + 1 + 4\ell^2 + 4\ell + 1 = 4(k^2 + k + \ell^2 + \ell) + 2$. Le reste de la division de n par 4 sera égal à 2. La propriété est vraie dans ce cas.

Ainsi, dans tous les cas, la propriété est vraie.

CQFD

Exercice Supplémentaire (Exercice 15, Chapitre 1, Page 118)

Supposons que sur une île, il y ait trois types de personnes : les chevaliers, les menteurs et les normaux (également connus sous le nom d'espions). Les chevaliers disent toujours la vérité, les menteurs mentent toujours, et les normaux mentent parfois et disent parfois la vérité. Des détectives ont interrogé trois habitants de l'île - Amy, Brenda et Claire - dans le cadre de l'enquête sur un crime. Les détectives savaient que l'une des trois avait commis le crime, mais ignoraient laquelle. Ils savaient également que le criminel était un chevalier, et que les deux autres ne l'étaient pas. De plus, les détectives ont enregistré ces déclarations : Amy : "Je suis innocente." Brenda : "Ce qu'Amy dit est vrai." Claire : "Brenda n'est pas une normale." Après avoir analysé leurs informations, les détectives ont positivement identifié le coupable. Qui était-ce ?

Solution :

Nous devons analyser les affirmations faites par Amy, Brenda et Claire, en tenant compte des règles des chevaliers, des menteurs et des personnes normales (ou espions). Voici le résumé de la situation :

Un des trois, Amy, Brenda ou Claire, est le criminel.

Le criminel est un chevalier (toujours dire la vérité).

Les deux autres ne sont pas des chevaliers.

Les déclarations :

Amy : « Je suis innocente. »

Brenda : « Ce qu'Amy dit est vrai. »

Claire : « Brenda n'est pas une normale. »

Analysons les déclarations une par une :

Si Amy était le criminel (donc un chevalier), sa déclaration « Je suis innocente » serait un mensonge, ce qui contredit le fait qu'elle serait un chevalier. Donc, Amy ne peut pas être le criminel.

Si Brenda était le criminel (donc un chevalier), sa déclaration « Ce qu'Amy dit est vrai » serait vraie, ce qui signifie qu'Amy serait innocente. Cela ne crée pas de contradiction, donc Brenda pourrait être le criminel.

Si Claire était le criminel (donc un chevalier), sa déclaration « Brenda n'est pas une normale » serait vraie, ce qui signifie que Brenda est soit un chevalier soit un menteur. Cependant, puisque nous savons que le criminel est le seul chevalier, Brenda ne peut être qu'un menteur si Claire est le criminel. Mais cela créerait une contradiction, car un menteur (Brenda) ne peut pas dire la vérité (« Ce qu'Amy dit est vrai »). Donc, Claire ne peut pas être le criminel.

En conclusion, la seule personne qui pourrait être le criminel sans créer de contradiction est Brenda.

Feuille supplémentaire