POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 1 : LOGIQUE PROPOSITIONELLE

H2025

Solutionnaire

Exercice 1 :

Considérez les propositions suivantes concernant les récentes déclarations de Donald Trump sur l'annexion du Canada et la question du Québec :

- T : Donald Trump déclare que le Canada devrait devenir le 51e État des États-Unis.
- R : Les politiciens canadiens rejettent fermement l'idée de rejoindre les États-Unis.
- Q : Le Québec menace de demander son indépendance si l'idée d'annexion est discutée.
- C : Le Canada impose des contre-mesures économiques aux États-Unis.
- M : Les citoyens canadiens manifestent leur attachement à leur souveraineté.
- E : Les relations économiques entre les deux pays se dégradent.
- L : Les politiciens québécois profitent des tensions pour renforcer leur discours indépendantiste.

Utilisez les propositions ci-dessus pour écrire des expressions logiques basées sur les énoncés suivants :

1. Dès que Donald Trump déclare que le Canada devrait devenir le 51 État, les politiciens canadiens rejettent fermement cette idée.

Réponse : $T \rightarrow R$

2. Le Québec menacera de demander son indépendance seulement si Donald Trump déclare que le Canada devrait devenir le 51e État.

Réponse : $Q \rightarrow T$

3. Les citoyens canadiens manifestent leur attachement à leur souveraineté, mais les relations économiques entre les deux pays se dégradent.

Réponse : $M \land E$

4. Il n'est pas vrai que les politiciens québécois profitent des tensions pour renforcer leur discours indépendantiste.

Réponse : $\neg L$

5. Si le Canada impose des contre-mesures économiques aux États-Unis, alors les relations économiques entre les deux pays se dégraderont et le Québec pourrait menacer de demander son indépendance.

Réponse : $C \rightarrow (E \land Q)$

Exercice 2 :

Formulez la réciproque, la contraposée et l'inverse pour chacun de ces énoncés :

1. Si un feu de forêt se propage rapidement, alors le vent est fort.

Réponse :

Réciproque :
- Si le vent est fort, alors un feu de forêt se propage rapidement.
- Le vent est fort seulement si un feu de forêt se propage rapidement.

Contraposée :
- Si le vent n'est pas fort, alors un feu de forêt ne se propage pas rapidement.
- Le vent n'est pas fort seulement si un feu de forêt ne se propage pas rapidement.

Inverse :
- Si un feu de forêt ne se propage pas rapidement, alors le vent n'est pas fort.
- Un feu de forêt qui ne se propage pas est suffisant pour que le vent ne soit pas fort.

2. Si la forêt n'est pas entretenue, alors le risque d'incendie augmente.

Réponse :

Réciproque :
- Si le risque d'incendie augmente, alors la forêt n'est pas entretenue.
- La forêt n'est pas entretenue si le risque d'incendie augmente.

Contraposée :
- Si le risque d'incendie n'augmente pas, alors la forêt est entretenue.
- Le fait que la forêt soit entretenue est nécessaire pour que le risque d'incendie n'augmente pas.

Inverse :
- Si la forêt est entretenue, alors le risque d'incendie n'augmente pas.
- Le risque d'incendie n'augmente pas dès que la forêt est entretenue.

3. Si un incendie se déclare, alors les pompiers interviennent rapidement.

Réponse :

Réciproque :
-Les pompiers interviennent rapidement seulement si un incendie se déclare.

- Si les pompiers interviennent rapidement, alors un incendie s'est déclaré.

Contraposée :

- Si les pompiers n'interviennent pas rapidement, alors aucun incendie ne s'est déclaré.
- Aucun incendie ne se déclare si les pompiers n'interviennent pas rapidement.

Inverse :

- Si aucun incendie ne se déclare, alors les pompiers n'interviennent pas rapidement.
- Le fait qu'aucun incendie ne se déclare est suffisant pour que les pompiers n'interviennent pas rapidement.

Exercice 3 :

Soit la proposition suivante, en utilisant deux méthodes différentes, par table de vérité et par dérivations, dites s'il s'agit d'une tautologie, contradiction ou contingence en justifiant votre réponse :

$$(p \vee q) \wedge (r \vee \neg q) \rightarrow (p \vee r)$$

Pour la preuve par dérivations, utilisez une seule règle par transformation et précisez le nom de chaque règle utilisée.

Réponse :
Méthode 1 : Table de vérité

La table de vérité pour la proposition est la suivante :

p	q	r	p ∨ q	r ∨ ¬q	(p ∨ q) ∧ (r ∨ ¬q)	(p ∨ q) ∧ (r ∨ ¬q) → (p ∨ r)
VRAI	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI
VRAI	VRAI	FAUX	VRAI	FAUX	FAUX	VRAI
VRAI	FAUX	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI
VRAI	FAUX	FAUX	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI
FAUX	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI
FAUX	VRAI	FAUX	VRAI	FAUX	FAUX	VRAI
FAUX	FAUX	VRAI	FAUX	VRAI	FAUX	VRAI
FAUX	FAUX	FAUX	FAUX	VRAI	FAUX	VRAI

Peu importe les valeurs de vérité des variables individuelles, la formule globale est toujours vraie.
Conclusion : C'est donc une **tautologie.**

Méthode 2 : Par dérivation

$(p \lor q) \land (r \lor \neg q) \to (p \lor r) \equiv \neg[(p \lor q) \land (r \lor \neg q)] \lor (p \lor r)$	(Implication : $A \to B \equiv \neg A \lor B$)
$(p \lor q) \land (r \lor \neg q) \to (p \lor r) \equiv [\neg(p \lor q) \lor \neg(r \lor \neg q)] \lor (p \lor r)$	(Loi de De Morgan)
$(p \lor q) \land (r \lor \neg q) \to (p \lor r) \equiv \big[(\neg p \land \neg q) \lor \big(\neg r \land \neg(\neg q)\big)\big] \lor (p \lor r)$	(Négation d'une disjonction)
$(p \lor q) \land (r \lor \neg q) \to (p \lor r) \equiv [(\neg p \land \neg q) \lor (\neg r \land q)] \lor (p \lor r)$	(Négation double)
$(p \lor q) \land (r \lor \neg q) \to (p \lor r) \equiv (\neg p \land \neg q) \lor (\neg r \land q) \lor (p \lor r)$	(Associativité de $\lor$)
$(p \lor q) \land (r \lor \neg q) \to (p \lor r) \equiv (\neg p \land \neg q) \lor (p \lor r) \lor (\neg r \land q)$	(Commutativité de $\lor$)
$(p \lor q) \land (r \lor \neg q) \to (p \lor r) \equiv ((\neg p \land \neg q) \lor (p \lor r)) \lor (\neg r \land q)$	(Associativité de $\lor$)
$(p \lor q) \land (r \lor \neg q) \to (p \lor r) \equiv \big(\neg p \lor (p \lor r)\big) \land \big(\neg q \lor (p \lor r)\big) \lor (\neg r \land q)$	(Distributivité de $\lor$ par rapport à $\land$)
$(p \lor q) \land (r \lor \neg q) \to (p \lor r) \equiv ((\neg p \lor p) \lor r)) \land \big(\neg q \lor (p \lor r)\big) \lor (\neg r \land q)$	(Associativité de $\lor$)
$(p \lor q) \land (r \lor \neg q) \to (p \lor r) \equiv ((VRAI) \lor r)) \land \big(\neg q \lor (p \lor r)\big) \lor (\neg r \land q)$	(Loi de la négation)
$(p \lor q) \land (r \lor \neg q) \to (p \lor r) \equiv \text{VRAI} \land \big(\neg q \lor (p \lor r)\big) \lor (\neg r \land q)$	(Dominance)
$(p \lor q) \land (r \lor \neg q) \to (p \lor r) \equiv \neg q \lor (p \lor r) \lor (\neg r \land q)$	(Identité : $\text{VRAI} \land A \equiv A$)
$(p \lor q) \land (r \lor \neg q) \to (p \lor r) \equiv (\neg q \lor p \lor r) \lor (\neg r \land q)$	(Associativité de $\lor$)
$(p \lor q) \land (r \lor \neg q) \to (p \lor r) \equiv ((p \lor r) \lor \neg q) \lor (\neg r \land q)$	(Commutativité de $\lor$)
$(p \lor q) \land (r \lor \neg q) \to (p \lor r) \equiv p \lor r \lor \big(\neg q \lor (\neg r \land q)\big)$	(Associativité de $\lor$)
$(p \lor q) \land (r \lor \neg q) \to (p \lor r) \equiv p \lor r \lor (\neg q \lor \neg r) \lor (\neg q \lor q)$	(Distributivité de $\lor$ par rapport à $\land$)
$(p \lor q) \land (r \lor \neg q) \to (p \lor r) \equiv p \lor r \lor (\neg q \lor \neg r) \lor \text{VRAI}$	($A \lor \neg A \equiv \text{VRAI}$)
$(p \lor q) \land (r \lor \neg q) \to (p \lor r) \equiv \text{VRAI}$	(Dominance : $A \lor \text{VRAI} \equiv \text{VRAI}$)

Conclusion : La formule est donc une **tautologie.**

Exercice 4 :

Trois boîtes sont enfouies dans votre jardin, contenant potentiellement un trésor. Seule une des boîtes contient le trésor, et les autres sont vides. Chaque boîte a une inscription, mais seulement une de ces inscriptions est vraie.
Boîte 1 : L'inscription dit "Le trésor n'est pas ici."
Boîte 2 : L'inscription dit "Le trésor est dans la Boîte 1."
Boîte 3 : L'inscription dit "Le trésor n'est pas dans la Boîte 2."

Un sage du village, qui ne ment jamais, vous dit que parmi les inscriptions des trois boîtes, seule une est vraie. Vous devez utiliser cette information pour déduire où se trouve le trésor.

Dans quelle boîte se trouve le trésor ? Justifiez votre réponse en utilisant la logique propositionnelle.

Réponse :
Soit pi la proposition que le trésor se trouve dans la boîte i, pour i = 1,2,3.

La boîte 1 dit que le trésor n'est pas ici, donc l'inscription est $\neg p1$.
La boîte 2 dit que le trésor est dans la Boîte 1, donc l'inscription est $p1$.
La boîte 3 dit que le trésor n'est pas dans la Boîte 2, donc l'inscription est $\neg p2$.

Ainsi, la déclaration du sage selon laquelle une seule des inscriptions est vraie peut être traduite en :

$[(\neg p1 \land \neg (p1) \land \neg (\neg p2))] \lor [(\neg (\neg p1) \land p1 \land \neg (\neg p2))] \lor [(\neg (\neg p1) \land \neg (p1) \land (\neg p2))]$

En utilisant les règles de la logique propositionnelle, on déduit :

$[\neg p1 \land \neg (p1) \land \neg (\neg p2)] \lor [\neg (\neg p1) \land p1 \land \neg (\neg p2)] \lor [\neg (\neg p1) \land \neg (p1) \land (\neg p2)]$
$[\neg p1 \land \neg p1 \land p2] \lor [p1 \land p1 \land p2] \lor [p1 \land \neg p1 \land \neg p2]$ (Double négation)
$\equiv [(\neg p1 \land \neg p1) \land p2] \lor [(p1 \land p1) \land p2] \lor [(p1 \land \neg p1) \land \neg p2]$ (Associativité de $\land$)
$\equiv [\neg p1 \land p2] \lor [p1 \land p2] \lor [(p1 \land \neg p1) \land \neg p2)]$ (Idempotence)
$\equiv [(\neg p1 \lor p1) \land p2] \lor [(p1 \land \neg p1) \land \neg p2)]$ (Distributivité de $\land$ par rapport à $\lor$)
$\equiv$ [VRAI $\land p2$] $\lor$ [FAUX $\land \neg p2$)] (Négation)
$\equiv$ [VRAI $\land p2$] $\lor$ FAUX (Loi de domination)
$\equiv p2 \lor$ FAUX (Loi d'identité)
$\equiv p2$ (Loi d'identité)
Ainsi, le trésor est dans la Boîte 2 (c'est-à-dire que $p2$ est vraie), et $p1$ et $p3$ sont fausses

Exercices suggérés pour la semaine :

Rosen **8e Edition**, chapitre 1 :
Section 1.1 : 1.1.6, 1.1.7, 1.1.14, 1.1.17, 1.1.18, 1.1.19, 1.1.28, 1.1.30.
Section 1.2 : 1.2.8, 1.2.17, 1.2.27, 1.2.28, 1.2.29, 1.2.30, 1.2.30, 1.2.31, 1.2.32, 1.2.32, 1.2.34, 1.2.35.
Section 1.3 : 1.3.8, 1.3.12, 1.3.14, 1.3.26, 1.3.29.