POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 9 : DÉNOMBREMENT

H2024

Directives pour la remise :

- Répondez directement sur ce document papier.
- La remise est individuelle, mais le travail en équipe est encouragé.
- La remise se fait à la fin de la séance de TD.
- **Aucun retard ne sera accepté.**
- **Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.**

Identification

Veuillez inscrire votre section, nom, prénom et matricule ainsi que les noms des collègues avec lesquels vous avez collaboré pour le TD

Section :

Nom :

Prénom :

Matricule :

Collègues :

Exercice 1 :

Soit $1 \leq p \leq n$. On considère n boules et deux boîtes A et B. Un échantillon est constitué d'une boule dans la boîte A et de $p-1$ boules dans la boîte B. En dénombrant de deux façons différentes ces échantillons, établir la formule

$$n\binom{n-1}{p-1} = p\binom{n}{p}.$$

Retrouvez cette formule par le calcul.

Solution

Voici deux façons de compter le nombre d'échantillons.

1. On choisit d'abord une boule à mettre dans la boîte A : il y a n choix possibles. Puis on choisit $p-1$ boules parmi les $n-1$ boules restantes pour mettre dans la boîte B. Il y a donc $n \times \binom{n-1}{p-1}$ échantillons.
2. On choisit d'abord les p boules parmi n qui seront dans les deux boîtes : il y a $\binom{n}{p}$ choix possibles. Puis on choisit parmi ces p boules celle à mettre dans la boîte A : il y a p choix possibles, et donc le nombre d'échantillons recherché est $p \times \binom{n}{p}$.

Puisqu'on compte de deux façons différentes le même nombre d'échantillons, on obtient bien le résultat escompté. Par le calcul, on a

$$n\binom{n-1}{p-1} = n \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!\left((n-1)-(p-1)\right)!} = p \times \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = p\binom{n}{p}.$$

Exercice 2 :

Pour chacune des récurrences suivantes, donnez une expression pour le temps d'exécution $T(n)$ si la récurrence peut être résolue avec le Théorème Maître. Sinon, indiquez que le théorème maître ne s'applique pas.

1. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$:
   $a = 2, b = 2, d = 2.$
   On calcule ensuite $\log_b(a)$, qui est $\log_2(2) = 1.$
   Dans notre cas, $a = 2$ et $b^d = 2^2 = 4$. Puisque $a < b^d$, on se trouve dans le premier cas.
   Donc, la complexité de $T(n)$ selon le théorème maître est $O(n^d)$, c'est-à-dire $O(n^2)$.

2. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \sqrt{n}$:
   On peut examiner directement si $f(n)$ est en $O(n^d)$ pour $d < \log_b(a)$. Pour la récurrence $T(n) = 2T(n/2) + \sqrt{n}$, nous avons $a = 2$, $b = 2$, et $f(n) = \sqrt{n}$. Ici, $\log_b(a) = 1$ puisque $\log_2(2) = 1$.
   Nous devons vérifier si $f(n)$ est en $O(n^d)$ pour $d < 1$. Étant donné que $f(n) = \sqrt{n} = n^{0.5}$, et $0.5 < 1$, on voit que $f(n)$ est en effet en $O(n^d)$ où $d = 0.5$.
   Selon le cas 1 du Théorème Maître, si $f(n)$ est en $O(n^d)$ pour $d < \log_b(a)$, alors $T(n)$ est en $O(n^{\log_b(a)})$. Ainsi, la complexité de $T(n)$ est en $O(n)$ puisque $\log_b(a) = 1$.

3. $T(n) = 5T\left(\frac{n}{5}\right) + n\log(n)$:
   On a :
   $a = 5$, $b = 5$, $c = 1$, $d = 1$ (car $\log(n)$ est $O(n^d)$ avec $d = 1$).
   Puisque $a = 5$ et $b^d = 5^1 = 5$, nous avons $a = b^d$. Selon le cas 2 du théorème maître, la complexité de la fonction sera :
   $$O\left(n^d \log(n)\right)$$
   Donc :
   $$O(n\log(n))$$

4. $T(n) = 2^n T\left(\frac{n}{2}\right) + n^n$:
   Ici, $a = 2^n$ (ce qui n'est pas constant et varie avec n), donc les prémisses de base du Théorème Maître ne sont pas remplies. Le Théorème Maître s'applique à des récurrences de la forme $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ où a et b sont des constantes.
   Solution: Le Théorème Maître ne s'applique pas.

Exercice 3 :

Résolvez l'équation de récurrence :

$$\sqrt{a_n} = \sqrt{a_{n-1}} + 2\sqrt{a_{n-2}}$$

Avec $a_0 = 1$ et $a_1 = 1$

Solution :

En faisant un changement de variable $b_n = \sqrt{a_n}$, on obtient la relation de récurrence linéaire homogène à coefficients constants de degré 2 suivante :

$$b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}$$

Avec $b_0 = \sqrt{a_0} = 1$ et $b_1 = \sqrt{a_1} = 1$

L'équation caractéristique est donc :

$$r^2 - r - 2 = 0$$

Les racines de cette équation sont : $r = -1$ et $r = 2$

La solution générale de la récurrence est :

$$b_n = \alpha \cdot (-1)^n + \beta \cdot 2^n$$

En utilisant les conditions initiales $b_0 = 1$ et $b_1 = 1$, on trouve $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{2}{3}$.

D'où :

$$b_n = \frac{1}{3} \cdot (-1)^n + \frac{2}{3} \cdot 2^n$$

Finalement, $a_n = (b_n)^2$ donne :

$$a_n = \left(\frac{1}{3} \cdot (-1)^n + \frac{2}{3} \cdot 2^n\right)^2$$

Exercice 4 :

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir :

1. sans imposer de contraintes sur les cartes.
2. contenant 5 carreaux ou 5 piques.
3. contenant 2 carreaux et 3 piques.
4. contenant au moins un roi.
5. contenant au plus un roi.
6. contenant exactement 2 rois et exactement 3 piques.

1. Il n'y a pas d'ordre et pas de répétition sur les cartes : un tirage est donc une combinaison de 5 cartes parmi 32. Il y a : $\binom{32}{5} = 201376$ tirages différents.
2. Pour obtenir 5 carreaux, il faut choisir 5 cartes parmi 8 : il y a $\binom{8}{5}$ tels tirages. De même pour obtenir 5 piques. Comme les deux cas sont disjoints, il y a $2 \times \binom{8}{5} = 112$ tels tirages différents.
3. Il y a $\binom{8}{2}$ façons de choisir 2 carreaux parmi 8 puis, pour chacune de ces façons, il y a $\binom{8}{3}$ façons de choisir 3 piques. Le nombre de tirages recherché est donc : $\binom{8}{2} \times \binom{8}{3} = 1568.$
4. On compte le complémentaire, c'est-à-dire les tirages sans rois : il faut alors choisir 5 cartes parmi 28, il y a $\binom{28}{5}$ tels tirages. Le nombre de tirages recherché est donc : $\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 103096.$
5. On a déjà compté les tirages sans roi. Pour les tirages comprenant exactement un roi, il y a 4 façons de choisir le roi, puis, pour chacune de ces façons, $\binom{28}{4}$ façons de choisir les autres cartes. On en déduit qu'il y a $\left(\binom{5}{1} + 4\binom{4}{1}\right) = 180180$ tels tirages.
6. On sépare les tirages contenant le roi de pique et ceux ne contenant pas le roi de pique.

   – si le tirage ne contient pas le roi de pique, il y a $\binom{3}{2}$ choix différents de 2 rois parmi 3, puis $\binom{7}{3}$ choix de 3 piques parmi 7 (tous sauf le roi de pique).

   – si le tirage contient le roi de pique, il reste 3 choix pour le roi différent du roi de pique, puis $\binom{7}{2}$ choix pour les deux autres piques. Cela faisant, on n'a tiré que 4 cartes. Il reste une carte à choisir qui n'est ni un roi, ni un pique, et donc $32 - (4 + 7) = 21$ choix (attention à ne pas compter à nouveau deux fois le roi de pique!).

   Finalement, le nombre de tirages possibles est :

$$3 \times \binom{7}{2} \times 21 + \binom{3}{2} \times \binom{7}{3} = 1428.$$

Exercice 5 :

Un réseau informatique est composé de six ordinateurs. Chaque ordinateur est directement connecté à au moins un des autres ordinateurs. Démontrez qu'il existe au moins deux ordinateurs dans le réseau qui sont directement connectés au même nombre d'autres ordinateurs.

Solution

Pour démontrer cette affirmation, nous allons utiliser le principe du pigeonnier (ou tiroirs)

Dans un réseau de six ordinateurs, chaque ordinateur peut être connecté à un nombre minimal de 1 autre ordinateur et à un nombre maximal de 5 autres ordinateurs (puisqu'il ne peut pas se connecter à lui-même). Cela signifie qu'il existe 5 possibilités différentes pour le nombre de connexions directes qu'un ordinateur peut avoir dans ce réseau (1, 2, 3, 4, ou 5 connexions).

Si nous appliquons le principe du pigeonnier à cette situation, en considérant chaque ordinateur comme un "objet" et le nombre de connexions directes comme des "catégories", nous avons 6 objets (ordinateurs) à répartir dans 5 catégories (1-5 connexions). Selon le principe, puisque nous avons plus d'objets (ordinateurs) que de catégories (possibilités de connexions), au moins deux ordinateurs doivent appartenir à la même catégorie, c'est-à-dire qu'ils doivent être connectés au même nombre d'autres ordinateurs dans le réseau.

Une nuance importante ici est que si un ordinateur est connecté à seulement un autre ordinateur, un autre ordinateur ne peut pas être connecté à tous les cinq autres ordinateurs, car cela signifierait que l'ordinateur avec une seule connexion est également connecté à celui qui est connecté à cinq, violant sa condition de connexion unique. Cela réduit effectivement le nombre de catégories utilisables à 4 dans ce scénario spécifique (1, 2, 3, ou 4 connexions), renforçant davantage le principe du pigeonnier dans ce cas.

En conclusion, par le principe du pigeonnier, dans un réseau de six ordinateurs où chaque ordinateur est directement connecté à au moins un autre ordinateur, il doit exister au moins deux ordinateurs dans le réseau qui sont directement connectés au même nombre d'autres ordinateurs.