POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810
STRUCTURES DISCRÈTES

CONTRÔLE PÉRIODIQUE 1
É2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 (**2.5 points)**

Soit les propositions suivantes :

- P : il pleut
- B : il bruine
- O: il y a un vent d'Ouest
- E : il y a un vent d'Est

Traduisez les énoncés suivants :

a. (**1.5 point)** Si le vent d'Ouest apporte la pluie, on n'a jamais vu qu'un vent d'Est soit porteur de pluie.

Réponse :

- $(O \rightarrow P) \wedge (E \rightarrow \neg P)$

b. (**1 point)** La bruine est une forme de pluie.

Réponse :

- $B \rightarrow P$

Exercice 2 (**4 points)**

Soit U l'univers des athlètes. Soit les fonctions propositionnelles et la constante suivantes :

- D(x) : x se dope
- G(x) : x gagne des épreuves
- P(x): x est pris pour dopage
- C(x) : x est un super coureur
- r : Richard

Traduisez les énoncés suivants :

a. (**1.5 point)** Si tu te dopes, tu peux soit gagner, soit être pris.

Réponse :

- $\forall x \in U, D(x) \rightarrow [G(x) \oplus P(x)]$

b. **(1.5 point)** Si tu es un super coureur, tu peux gagner que tu sois dopé ou non.

Réponse :

- $\forall x \in U, C(x) \rightarrow G(x)$
- $\forall x \in U, [C(x) \wedge (D(x) \vee \neg D(x))] \rightarrow G(x)$

c. **(1 point)** Richard, qui n'est pas un super coureur, gagne des épreuves

Réponse :

- $\neg C(r) \wedge G(r)$

Exercice 3 (**4.5 points)**

Soit E l'ensemble univers et A, B, C trois ensembles de cet univers. En utilisant la technique de la dérivation et en appliquant les lois usuelles sur les ensembles, montrez que :

$$\overline{\overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \overline{\mathbf{C}}} \cup \overline{\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B}}} = \emptyset$$

Justifiez toutes les étapes de votre réponse.

Réponse :

Note : La solution fournie ici est volontairement assez détaillée, pas à pas, pour des fins éducatives.

Transformons l'expression de droite.

$\overline{\overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \overline{\mathbf{C}}} \cup \overline{\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B}}} = \overline{\overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \overline{\mathbf{C}}}} \cap \overline{\overline{\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B}}}$ Loi de De Morgan

$\overline{\overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \overline{\mathbf{C}}} \cup \overline{\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B}}} = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \overline{\mathbf{C}}) \cap (\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B})$ Loi de complémentation

$\overline{\overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \overline{\mathbf{C}}} \cup \overline{\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B}}} = \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \overline{\mathbf{C}} \cap \overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B}$ Loi d'associativité

$\overline{\overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \overline{\mathbf{C}}} \cup \overline{\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B}}} = (\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{A}}) \cap \overline{\mathbf{C}} \cap (\mathbf{B} \cap \mathbf{B})$ Loi d'associativité

$\overline{\overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \overline{\mathbf{C}}} \cup \overline{\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B}}} = \emptyset \cap \overline{\mathbf{C}} \cap (\mathbf{B} \cap \mathbf{B})$ Loi du complément

$\overline{\overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \overline{\mathbf{C}}} \cup \overline{\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B}}} = \emptyset \cap \overline{\mathbf{C}} \cap \mathbf{B}$ Loi d'idempotence

$\overline{\overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \overline{\mathbf{C}}} \cup \overline{\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B}}} = \emptyset \cap (\overline{\mathbf{C}} \cap \mathbf{B})$ Loi d'associativité

$\overline{\overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \overline{\mathbf{C}}} \cup \overline{\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B}}} = \emptyset$ Loi de domination

CQFD

Exercice 4 (**5 points)**

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la fonction :

$$f(x,\ y) = (x + y, x + 2y)$$

a. **(2.5 points)** La fonction est-elle injective ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

Soit (a, b) et (c, d) appartenant à $\mathbb{R}^2$ tel que f(a, b) = f(c, d).

Par définition, on a : (a+b, a+2b) = (c+d, c+2d)

Alors a+b = c+ d et a+2b = c+2d

En résolvant ces 2 équations on obtient b =d et a=c. Par suite, (a, b) = (c, d)

f est donc injective.

b. **(2.5 points)** La fonction est-elle surjective ? Justifiez votre réponse.

On sait que ∀ a ∈ $\mathbb{R}$, ∃ x, y ∈$\mathbb{R}$, a = x + y et que ∀ b ∈ $\mathbb{R}$, ∃ x, y ∈$\mathbb{R}$, b = x+2y.

Ainsi ∀ (a, b) ∈ $\mathbb{R}^2$, ∃ x, y ∈$\mathbb{R}$, a = x + y et b = x+2y

Donc ∀ (a, b) ∈ $\mathbb{R}^2$, ∃ x, y ∈$\mathbb{R}$, x = 2a - b et y = b-a

Ou encore ∀ (a, b) ∈ $\mathbb{R}^2$, ∃ (x, y) ∈$\mathbb{R}^2$, f(x, y) =(a, b), avec x = 2a - b et y = b-a

f est donc surjective.

Exercice 5 (**4 points)**

Soit x et y deux nombres réels. En utilisant la preuve par cas, montrez que :

$$\max(-x, -y) = -\min(x, y)$$

Note : max(a, b) et min(a, b) désignent le maximum et le minimum de a et b, respectivement.

Réponse :

✓ **Cas 1 : $x < y$**

Si $x < y$ alors $-x > -y$.

Ainsi **max**$(-x, -y) = -x$ et **min**$(x, y) = x$. Donc **max**$(-x, -y) = -$**min**(x, y).

✓ **Cas 2 : $x \geq y$**

Si $x \geq y$ alors $-x \leq -y$

Ainsi **max**$(-x, -y) = -y$ et **min**$(x, y) = y$. Donc **max**$(-x, -y) = -$**min**(x, y).

Synthèse

Dans les deux cas **max**$(-x, -y) = -$**min**(x, y).

Conclusion

Pour deux nombres réels x et y, **max**$(-x, -y) = -$**min**(x, y).