POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810
STRUCTURES DISCRÈTES

TD 2 : LOGIQUE DES PRÉDICATS

H2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1.

L'univers du discours est l'ensemble des entiers naturels. Soit les prédicats suivants et leur signification :

Prédicat	**Signification**
Pair(*x*)	*x* est un entier pair
Prem(*x*)	*x* est un nombre premier
Div(*x*,*y*)	*x* divise *y*
Mult(*x*,*y*)	*x* est un multiple de *y*
DivP(*x*,*y*)	*x* est un diviseur propre de *y*
Egal(*x*,*y*)	*x* est égal à *y*
PPE(*x*,*y*)	*x* est plus petit ou égal à *y*
PPS(*x*,*y*)	*x* est strictement plus petit que *y*
SDP(*x*,*y*)	*x* est la somme des diviseurs propres de *y*

Également, soit les définitions suivantes :

- *a* est un diviseur propre de *b* si a est un diviseur de *b* et que *a* est différent de *b*.
- *a* est un nombre premier s'il possède exactement un diviseur propre.
- Un nombre est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs propres.
- Deux nombres *a* et *b* sont amicaux si la somme des diviseurs propres de *a* est égale à *b* et que la somme des diviseurs propres de *b* est égale à *a*.

Exprimez les propositions suivantes de la façon la plus courte possible en utilisant seulement les prédicats présentés ci-dessus, mais les combinant si nécessaire avec des opérateurs logiques et/ou en les quantifiant et/ou en donnant des valeurs aux sujets. On ne vous demande pas de statuer sur la valeur de vérité des énoncés.

Exemple : « 2 est un nombre pair et premier » donnerait comme réponse « Pair(2) ∧ Prem(2) »

a) 7 est impair.

Réponse : ¬Pair(7)

b) 2 est différent de 3.

Réponse : ¬Egal(2,3)

c) 5 ou 6 est un nombre premier, mais pas les deux.

Réponse : Prem(5) ⊕ Prem(6)

d) Tout entier divise le nombre 0.

Réponse : ∀*x* Div(*x*,0)

e) Il existe un unique nombre premier qui soit pair.

Réponse : $\exists!\, x\ (Prem(x) \wedge Pair(x))$

f) Il existe des nombres premiers strictement plus grands que 2.

Réponse : $\exists x\ [Prem(x) \wedge \neg PPE(x,2)]$ ou bien $\exists x\ [Prem(x) \wedge PPS(2,x)]$

g) Chaque nombre possède au moins un diviseur propre.

Réponse : $\forall y\ \exists x\ DivP(x,y)$

h) Il existe un nombre sans aucun diviseur propre.

Réponse : $\exists x\ \forall y\ \neg DivP(y,x)$

i) Tout diviseur d'un nombre doit être égal ou inférieur.

Réponse : $\forall x\ \forall y\ [Div(x,y) \rightarrow PPE(x,y)]$

j) Tout nombre est un multiple de chaque nombre qui le divise.

Réponse : $\forall x\ \forall y\ [Div(x,y) \rightarrow Mult(x,y)]$

k) *x* est un nombre parfait.

Réponse : $SDP(x,x)$

l) *m* et *n* sont des nombres amicaux.

Réponse : $SDP(n,m) \wedge SDP(m,n)$

m) *a, b, c* sont des nombres distincts.

Réponse : $\neg Egal(a,b) \wedge \neg Egal(b,c) \wedge \neg Egal(a,c)$

Exercice 2.

Soit les propositions suivantes :

- P : « Tous les hommes sont mortels » [1](Socrate).
- Q : « Il n'y a pas un jour sans pluie ».
- R : « Un de ces ordinateurs ne fonctionne pas ».

a) En considérant P.

i. Déterminez l'univers du discours U et M(x), notations qui serviront à formaliser P.

Réponse :

U : l'ensemble des humains. Ou bien, U : l'ensemble des hommes.

Et M(x) : x est mortel.

ii. Formalisez P à l'aide de i. et d'un quantificateur.

Réponse :

$\forall x\ M(x)$ ou bien $\forall x \in U, M(x)$

iii. Énoncez ¬P en langage courant.

Réponse :

Il existe au moins un homme qui ne soit pas mortel.

b) En considérant Q.

iv. Déterminez l'univers du discours V et P(x), notations qui serviront à formaliser Q.

Réponse :

V : l'ensemble des jours et P(x) : il pleut le jour x.

v. Formalisez Q à l'aide de iv. et d'un quantificateur.

Réponse :

$\forall x\ P(x)$ ou bien $\forall x \in V, P(x)$

vi. Énoncez ¬Q en langage courant.

Réponse :

Il y a au moins un jour sans pluie.

c) En considérant R.

vii. Déterminez l'univers du discours W et F(x), notations qui serviront à formaliser R.

Réponse :

W : l'ensemble des ordinateurs et F(x) : x fonctionne.

viii. Formalisez R à l'aide de vii. et d'un quantificateur.

Réponse :

$\exists x\ \neg F(x)$ ou bien $\exists x \in W, \neg F(x)$

ix. Énoncez ¬R en langage courant.

Réponse :

Tous les ordinateurs fonctionnent.

[1] « homme » est pris dans le sens de « humain »

Exercice 3. Soit les propositions suivantes pour l'univers des nombres entiers :

- $P(x) : x^2 - 7x + 10 = 0$
- $Q(x) : x^2 - 2x – 3 = 0$
- $R(x) : x < 0$

Déterminez la valeur de vérité des propositions suivantes et justifiez votre réponse. Donnez un contre-exemple si l'énoncé est faux.

a) $\forall x\ [P(x) \rightarrow \neg R(x)]$

Réponse :

$$\begin{aligned}\forall x\ [P(x) \rightarrow \neg R(x)] &\equiv \forall x\ [(x^2 - 7x + 10 = 0) \rightarrow \neg(x < 0)]\\ &\equiv \forall x\ [((x - 2)(x - 5) = 0) \rightarrow (x \geq 0)]\\ &\equiv \forall x\ [(x = 2) \vee (x = 5) \rightarrow (x \geq 0)]\\ &\equiv \text{VRAI}\end{aligned}$$

b) $\forall x\ [Q(x) \rightarrow R(x)]$

Réponse :

$$\begin{aligned}\forall x\ [Q(x) \rightarrow R(x)] &\equiv \forall x\ [(x^2 - 2x - 3 = 0) \rightarrow (x < 0)]\\ &\equiv \forall x\ [((x + 1)(x - 3) = 0) \rightarrow (x < 0)]\\ &\equiv \forall x\ [(x = -1) \vee (x = 3) \rightarrow (x < 0)]\\ &\equiv \text{FAUX}\end{aligned}$$

Pour le contre-exemple, il suffit de prendre $x = 3$.

c) $\exists x\ [Q(x) \rightarrow R(x)]$

Réponse :

$$\begin{aligned}\exists x\ [Q(x) \rightarrow R(x)] &\equiv \exists x\ [(x^2 - 2x - 3 = 0) \rightarrow (x < 0)]\\ &\equiv \exists x\ [((x + 1)(x - 3) = 0) \rightarrow (x < 0)]\\ &\equiv \exists x\ [(x = -1) \vee (x = 3) \rightarrow (x < 0)]\\ &\equiv \text{VRAI}\end{aligned}$$

Il suffit de prendre $x = -1$.

d) $\exists x\ [P(x) \rightarrow R(x)]$

Réponse :

$$\begin{aligned}\exists x\ [P(x) \rightarrow R(x)] &\equiv \exists x\ [(x^2 - 7x + 10 = 0) \rightarrow (x < 0)]\\ &\equiv \exists x\ [((x - 2)(x - 5) = 0) \rightarrow (x < 0)]\\ &\equiv \exists x\ [(x = 2) \vee (x = 5) \rightarrow (x < 0)]\\ &\equiv \text{VRAI}\end{aligned}$$

Il suffit de trouver un cas où la prémisse est fausse et la conclusion est vraie.
Par exemple, en choisissant $x = -1$.

Exercice 4.
Soit les fonctions propositionnelles suivantes :

- P(x) : « x a un portable »
- M(x) : « x est Manon »

Où le domaine pour x se compose de tous les étudiants de la classe.
Pour exprimer le fait que « tous les étudiants de la classe sauf Manon a un portable » nous pouvons écrire :
A : $\forall x\ [(\neg M(x) \wedge P(x)) \vee (M(x) \wedge \neg P(x))]$
De plus, la négation de l'expression A peut s'écrire :
B : $\exists x\ [(M(x) \wedge P(x)) \vee (\neg M(x) \wedge \neg P(x))]$

a) Démontrez que $\neg A \equiv B$ (indice : utilisez la distributivité ou les équivalences de la bidirectionnelle). Justifiez toutes les étapes par le nom de la propriété utilisée.

Réponse :

$\neg A \equiv \exists x\ \neg[(\neg M(x) \wedge P(x)) \vee (M(x) \wedge \neg P(x))]$	De Morgan
$\equiv \exists x\ [\neg(\neg M(x) \wedge P(x)) \wedge \neg(M(x) \wedge \neg P(x))]$	De Morgan
$\equiv \exists x\ [(\neg(\neg M(x)) \vee \neg P(x)) \wedge (\neg M(x) \vee \neg(\neg P(x)))]$	De Morgan
$\equiv \exists x\ [(M(x) \vee \neg P(x)) \wedge (\neg M(x) \vee P(x))]$	Double négation
$\equiv \exists x\ [(M(x) \wedge \neg M(x)) \vee (M(x) \wedge P(x)) \vee (\neg P(x) \wedge \neg M(x)) \vee (\neg P(x) \wedge P(x))]$	Distributivité
$\equiv \exists x\ [\text{FAUX} \vee (M(x) \wedge P(x)) \vee (\neg P(x) \wedge \neg M(x)) \vee \text{FAUX}]$	Négation
$\equiv \exists x\ [(M(x) \wedge P(x)) \vee (\neg P(x) \wedge \neg M(x))]$	Identité
$\equiv B$	Définition

CQFD

Alternativement,

$\neg A \equiv \exists x\ \neg[(\neg M(x) \wedge P(x)) \vee (M(x) \wedge \neg P(x))]$	De Morgan
$\equiv \exists x\ [\neg(\neg M(x) \wedge P(x)) \wedge \neg(M(x) \wedge \neg P(x))]$	De Morgan
$\equiv \exists x\ [(\neg(\neg M(x)) \vee \neg P(x)) \wedge (\neg M(x) \vee \neg(\neg P(x)))]$	De Morgan
$\equiv \exists x\ [(P(x) \rightarrow M(x)) \wedge (M(x) \rightarrow P(x))]$	Équivalence de l'implication
$\equiv \exists x\ [P(x) \leftrightarrow M(x)]$	Équivalence de la bidirectionnelle
$\equiv \exists x\ [(M(x) \wedge P(x)) \vee (\neg P(x) \wedge \neg M(x))]$	Équivalence de la bidirectionnelle
$\equiv B$	Définition

CQFD

b) Traduisez en français l'expression B.

Réponse :
Manon a un portable ou il existe un étudiant autre que Manon qui n'a pas de portable.

Exercice 5. Pour une proposition de la forme $\exists x\ [P(x) \rightarrow Q(x)]$, peut-on démontrer que cette proposition est fausse par un contre-exemple ?

Réponse :
Non, car il faut montrer que $P(x) \rightarrow Q(x)$ est fausse pour tout x, un exemple où l'implication est fausse n'est donc pas suffisant (excepté le cas trivial où l'ensemble des x à considérer dans l'univers du discours contient un seul élément, bien évidement).