POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

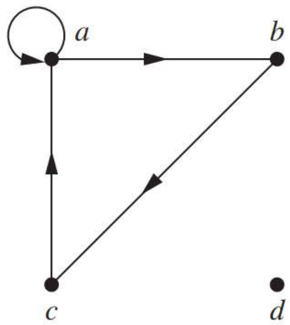
TD 5 : RELATIONS

H2025

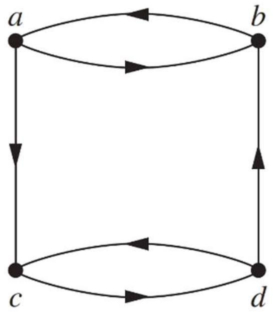
Solutionnaire

Exercice 1 :

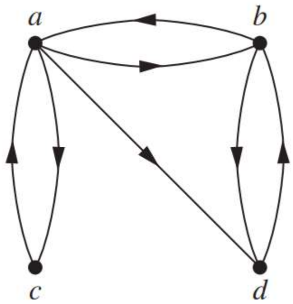
Considérez les graphes suivants :



Graphe 1

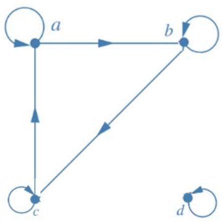


Graphe 2

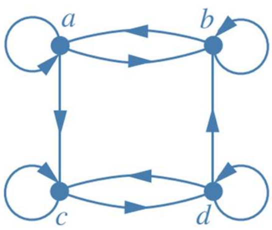


Graphe 3

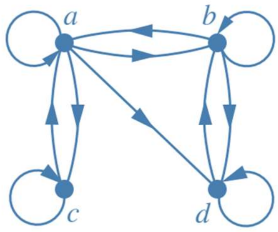
a) Donnez la fermeture symétrique des trois graphes.



Fermeture réflexive du graphe 1

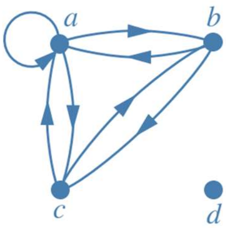


Fermeture réflexive du graphe 2

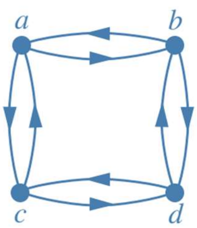


Fermeture réflexive du graphe 3

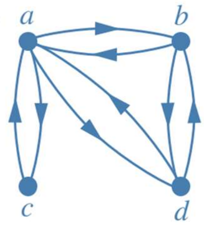
b) Donnez la fermeture transitive des trois graphes.



Fermeture transitive du graphe 1



Fermeture transitive du graphe 2



Fermeture transitive du graphe 3

Exercice 2

Soit $\Gamma = \{1,2,3\}$. On définit une relation $\mathcal{A}$ sur Γ^2 par :

$$(a, b)\ \mathcal{A}\ (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad \big((a - c) \text{ est pair}\big) \text{ et } \big((b - d) \text{ est divisible par } 3\big).$$

Donnez la représentation matricielle de $\mathcal{A}$.

Réponse :

	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
(1,1)	1	0	0	0	0	0	1	0	0
(1,2)	0	1	0	0	0	0	0	1	0
(1,3)	0	0	1	0	0	0	0	0	1
(2,1)	0	0	0	1	0	0	0	0	0
(2,2)	0	0	0	0	1	0	0	0	0
(2,3)	0	0	0	0	0	1	0	0	0
(3,1)	1	0	0	0	0	0	1	0	0
(3,2)	0	1	0	0	0	0	0	1	0
(3,3)	0	0	1	0	0	0	0	0	1

Exercice 3 :

Soit la relation R définie sur $\mathbb{R}^2$par :

$$(x, y)\ R\ (x', y') \Leftrightarrow (\exists\ a > 0,\ \exists\ b > 0, x' = a\,x \text{ et } y' = b\,y).$$

a) Montrez que c'est une relation d'équivalence. Justifiez votre réponse

Réponse :

Pour qu'une relation soit une relation d'équivalence, elle doit être *réflexive*, *symétrique* et *transitive*.

Réflexivité : Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, en choisissant $a = 1$ et $b = 1$ (puisque $1 > 0$), on a

$$x = 1 \cdot x \quad \text{et} \quad y = 1 \cdot y.$$

Ainsi, $(x, y)\ R\ (x, y)$. La relation est réflexive (1).

Symétrie : Supposons que $(x, y)\ R\ (x', y')$, c'est-à-dire qu'il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que

$$x' = a\,x \quad \text{et} \quad y' = b\,y.$$

Si x et y sont non nuls, alors

$$x = \frac{1}{a}\,x' \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{b}\,y',$$

avec $\frac{1}{a} > 0$ et $\frac{1}{b} > 0$.

Si $x = 0$ (ou $y = 0$), alors $x' = 0$ (ou $y' = 0$) et la symétrie se vérifie.

Ainsi, $(x', y')\ R\ (x, y)$. La relation est symétrique (2).

Transitivité : Soient (x, y), (x', y') et (x'', y'') dans $\mathbb{R}^2$ tels que

$$(x, y)\ R\ (x', y') \quad \text{et} \quad (x', y')\ R\ (x'', y'').$$

Alors, il existe $a > 0$, $b > 0$ avec

$$x' = a\,x \quad \text{et} \quad y' = b\,y,$$

et $c > 0$, $d > 0$ tels que

$$x'' = c\,x' \quad \text{et} \quad y'' = d\,y'.$$

En substituant, on obtient

$$x'' = (c\,a)x \quad \text{et} \quad y'' = (d\,b)y.$$

Puisque $ca > 0$ et $db > 0$, on a bien $(x, y)\ R\ (x'', y'')$. La relation est transitive (3).

De (1) et (2) et (3), La relation est une relation d'équivalence.

b) Donner les classes d'équivalence des éléments suivants : $A = (1,0)$, $B = (0,-1)$, $C = (1,1)$.

Réponse :

Pour tout $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, la classe d'équivalence de P est notée :

$$[P] = \{(x',y') \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y)\, R\, (x',y')\}.$$

- Pour $A = (1,0)$:
  Soit $(x,y) \in [A]$. Alors,
  $$\exists\, a > 0,\ \exists\, b > 0 \quad \text{tels que} \quad x = a \cdot 1 = a \quad \text{et} \quad y = b \cdot 0 = 0.$$
  Donc, $x > 0$ et $y = 0$, ce qui donne
  $$[A] = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}.$$
- Pour $B = (0,-1)$:
  Soit $(x,y) \in [B]$. Alors,
  $$\exists\, a > 0,\ \exists\, b > 0 \quad \text{tels que} \quad x = a \cdot 0 = 0 \quad \text{et} \quad y = b \cdot (-1) = -b.$$
  Comme $b > 0$, on obtient $y = -b < 0$ et
  $$[B] = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}.$$
- Pour $C = (1,1)$:
  Soit $(x,y) \in [C]$. Alors,
  $$\exists\, a > 0,\ \exists\, b > 0 \quad \text{tels que} \quad x = a \cdot 1 = a \quad \text{et} \quad y = b \cdot 1 = b.$$
  Avec $a > 0$ et $b > 0$, on a $x > 0$ et $y > 0$, donc
  $$[C] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y > 0\}.$$

Conclusion : La relation R définie par

$$(x,y)\, R\, (x',y') \Leftrightarrow (\exists\, a > 0,\ \exists\, b > 0 : x' = a\,x \text{ et } y' = b\,y)$$

est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$ et ses classes d'équivalence sont

$$[A] = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}, \quad [B] = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}, \quad [C] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y > 0\}.$$

Exercice 4 :

Dites si les relations suivantes sont des relations d'ordre partiel. Justifiez vos réponses.

a) La relation R sur un ensemble à trois éléments, représentée par la matrice suivante :

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Réponse :

Réflexivité : Les éléments diagonaux sont $m_{11} = 1$, $m_{22} = 1$ et $m_{33} = 1$. La relation est donc réflexive.

Antisymétrie : On observe que $m_{12} = 1$ et $m_{21} = 1$ pour des indices différents, ce qui montre que la relation n'est pas antisymétrique.

Transitivité : En calculant $M_R^2 = M_R \times M_R$ et en comparant les coefficients obtenus avec ceux de M_R, on constate que la propriété de transitivité n'est pas respectée pour tous les couples.

La relation représentée par la matrice M_R n'est pas un ordre partiel, du fait du défaut d'antisymétrie ou de transitivité.

b) La relation $\ll$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$(x, y) \ll (x', y') \quad \Leftrightarrow \quad [x < x'] \quad \text{ou} \quad [x = x' \text{ et } y \leq y'].$$

Réponse :

1. $(x = x \text{ et } y \leq y)$ donc $(x, y) \ll (x, y)$.

$\ll$ est réflexive.

$$\begin{cases}(x,y) \ll (x',y') \\ (x',y') \ll (x,y)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y') \\ x' < x \text{ ou } (x' = x \text{ et } y' \leq y)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x < x' \\ x' < x\end{cases} \text{ou} \begin{cases}x < x' \\ x' = x \text{ et } y' \leq y\end{cases} \text{ou} \begin{cases}x = x' \text{ et } y \leq y' \\ x' < x\end{cases} \text{ou} \begin{cases}x = x' \text{ et } y \leq y' \\ x' = x \text{ et } y' \leq y\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x = x' \text{ et } y \leq y' \\ x' = x \text{ et } y' \leq y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = x' \\ y = y'\end{cases} \Rightarrow (x,y) = (x',y')$$

$\ll$ est antisymétrique.

$$\begin{cases}(x,y) \ll (x',y') \\ (x',y') \ll (x'',y'')\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y') \\ x' < x'' \text{ ou } (x' = x'' \text{ et } y' \leq y'')\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x < x' \\ x' < x''\end{cases} \text{ou} \begin{cases}x < x' \\ x' = x'' \text{ et } y' \leq y''\end{cases} \text{ou} \begin{cases}x = x' \text{ et } y \leq y' \\ x' < x''\end{cases} \text{ou} \begin{cases}x = x' \text{ et } y \leq y' \\ x' = x'' \text{ et } y' \leq y''\end{cases}$$

$$\Rightarrow (x < x'') \text{ ou } (x < x'' \; et \; y' < y'') \text{ ou } (x < x'' \; et \; y' < y'') \text{ ou } (x = x'' \; et \; y \leq y'')$$

$$\Rightarrow (x < x'') \text{ ou } (x = x'' \; et \; y \leq y'') \Rightarrow (x,y) \ll (x'',y'')$$

$\ll$ est transitive.

Conclusion : la relation << est un ordre partiel.

Exercices suggérés pour la semaine :

Rosen **8e Edition**, chapitre 9 :
Section 9.1 : 9.1.3, 9.1.4, 9.1.6, 9.1.7.
Section 9.3 : 9.3.4, 9.3.23-9.3.28.
Section 9.4 : 9.4.5-9.4.7, 9.4.9, 9.4.12, 9.4.13, 9.4.25.
Section 9.5 : 9.5.1, 9.5.2, 9.5.3, 9.5.21-9.5.23, 9.5.24, 9.5.26, 9.5.27, 9.5.28.
Section 9.6 : 9.6.1, 9.6.2, 9.6.3, 9.6.4, 9.5.7, 9.5.9.