



**POLYTECHNIQUE
MONTREAL**

UNIVERSITÉ
D'INGÉNIERIE

LOG2810

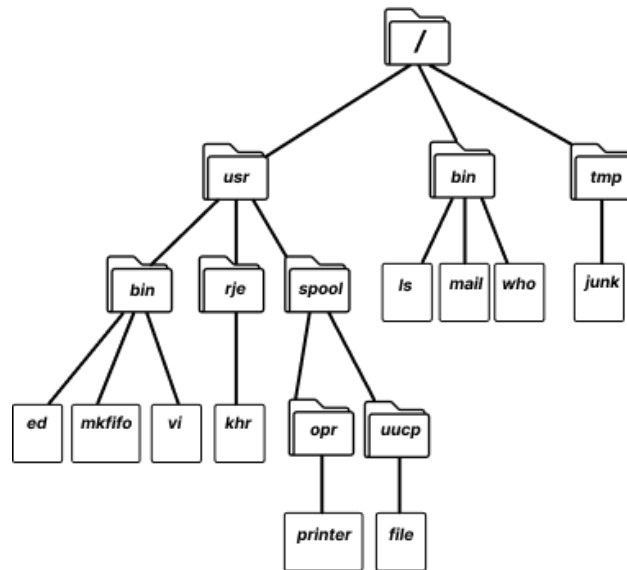
STRUCTURES DISCRÈTES

TD 11 : ARBRE H2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1.

Dans un système Linux, les fichiers en mémoire peuvent être organisés en répertoires. Un répertoire peut contenir à la fois des fichiers et des sous-répertoires. Le répertoire racine est représenté par le symbole « / ». Ainsi, le système de fichiers entier peut être représenté par un arbre enraciné, où la racine est le répertoire racine « / », les nœuds internes représentent les sous-répertoires et les feuilles représentent des fichiers ordinaires ou des répertoires vides. Cette structure est couramment appelée la structure de répertoires du système de fichiers Linux. Soit la structure de répertoires du système de fichiers Linux ci-dessous.



a) Donnez l'expression correspondant au parcours préfixe de cette structure de répertoires.

Réponse :

`/--usr--bin--ed--mkfifo--vi--rje--khr--spool--opr--printer--uucp--file--bin--ls--mail--who--tmp--junk`

b) Donnez l'expression correspondant au parcours infixé de cette structure de répertoires.

Réponse :

`ed--bin--mkfifo--vi--usr--khr--rje--printer--opr--spool--file--uucp--/--ls--bin--mail--who--junk--tmp`

c) Donnez l'expression correspondant au parcours postfixé de cette structure de répertoires.

Réponse :

`ed--mkfifo--vi--bin--khr--rje--printer--opr--file--uucp--spool--usr--ls--mail--who--bin--junk--tmp--/`

Exercice 2.

Supposons qu'une personne envoie une chaîne de lettres à plusieurs destinataires, en demandant à chacun d'entre eux de la transmettre à six autres personnes. Certains des destinataires respectent cette demande, tandis que d'autres ne la transmettent pas.

- a) Combien de personnes ont eu connaissance de cette lettre, y compris la personne initiale, si personne ne reçoit plus d'une lettre et si la chaîne de lettres se termine après qu'il y a eu 1001 personnes qui l'ont lue mais ne l'ont pas envoyée ? Détaillez votre réponse.

Réponse :

La chaîne de lettres peut être représentée à l'aide d'un arbre 6-aire, donc $m = 6$.

Les sommets correspondent aux personnes ayant eu connaissance de la lettre et les feuilles correspondent aux personnes ne l'ayant pas envoyée. Comme 1001 personnes n'ont pas envoyé la lettre, le nombre de feuilles dans cet arbre enraciné est $l = 1001$. Par conséquent, le nombre de personnes ayant eu connaissance de la lettre est $n = \frac{(m \cdot l - 1)}{(m - 1)} = \frac{(6 \cdot 1001 - 1)}{(6 - 1)} = 1201$

- b) Combien de personnes ont envoyé la lettre ? Détaillez votre réponse.

Réponse :

Les sommets internes correspondent aux personnes ayant envoyé la lettre.

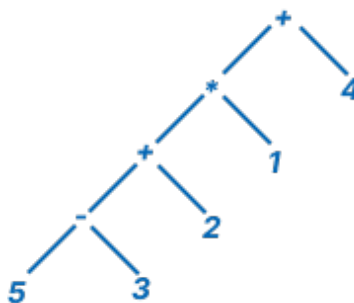
Par conséquent, $i = n - l = 1201 - 1001 = 200$, donc 200 personnes ont envoyé la lettre.

Exercice 3.

Dessinez l'arbre binaire correspondant à chacune des expressions arithmétiques écrites en notation polonaise ci-dessous. Ensuite, écrivez chaque expression en utilisant la notation infixée.

- a) $+ * + - 5 3 2 1 4$

Réponse :



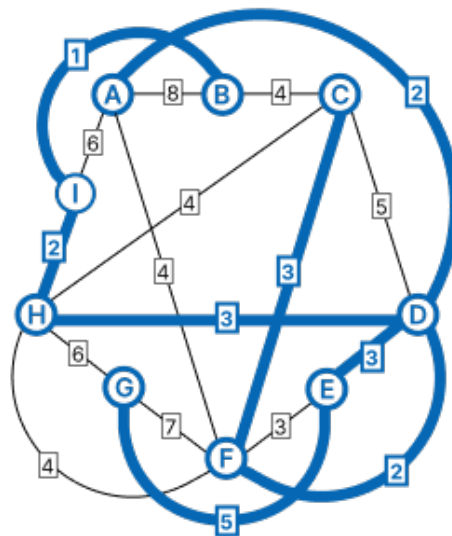
En notation infixée, l'expression $+ * + - 5 3 2 1 4$ devient : $((((5 - 3) + 2) * 1) + 4)$

- BI 1
- AD 2
- DF 2
- HI 2
- CF 3
- DE 3
- DH 3
- EF 3
- AF 4
- BC 4
- CH 4
- FH 4
- CD 5
- EG 5
- AI 6
- GH 6
- FG 7
- AB 8

✓**Étape 2 :** Parcourir la liste triée des arcs, en commençant par le premier arc de poids minimum. Ajouter l'arc à l'arbre en construction, s'il ne forme pas de cycle. À titre d'illustration, les arcs qui forment un cycle vont être barrés dans la liste.

✓**Étape 3 :** Arrêter l'algorithme lorsque $(n - 1)$ arcs ont été ajoutés à l'arbre en construction, n étant le nom de sommets dans le graphe initial.

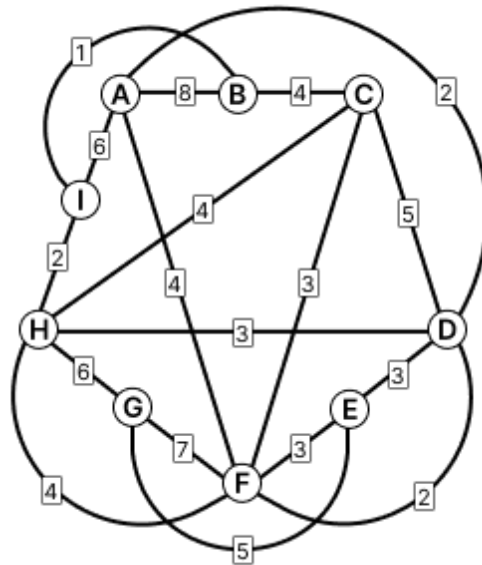
- **BI** 1
- **AD** 2
- **DF** 2
- **HI** 2
- **CF** 3
- **DE** 3
- **DH** 3
- EF 3
- AF 4
- BC 4
- CH 4
- FH 4
- CD 5
- **EG** 5
- AI 6
- GH 6
- FG 7
- AB 8



Le coût de l'arbre est : $1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 5 = 21$

Exercice 5.

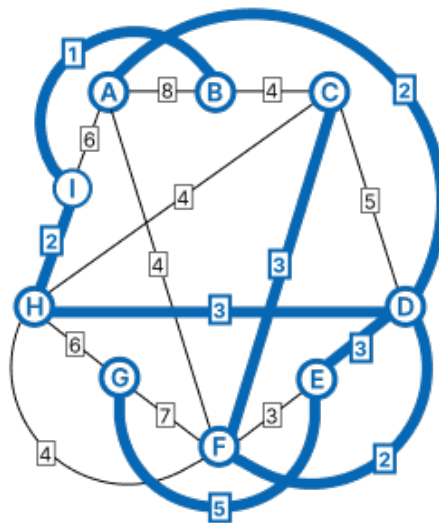
Soit le graphe ci-dessous. Construisez un arbre de poids minimum en appliquant l'algorithme de Prim. Détaillez toutes les étapes. Quel est son coût ?

**Réponse :**

Deux solutions sont proposées en fonction de la lecture des arcs DE et EF.

Cas 1 : Si vous considérez l'arc DE

Les arcs sont ajoutés dans l'ordre suivant : BI – HI – DH – AD – DF – DE – CF – EG



Cas 2 : Si vous considérez l'arc EF

Les arcs sont ajoutés dans l'ordre suivant : BI – HI – DH – AD – DF – EF – CF – EG

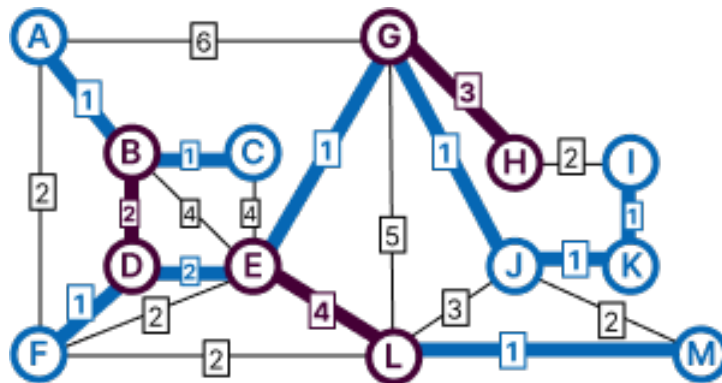
- AB 1
- BC 1
- DF 1
- EG 1
- GJ 1
- IK 1
- JK 1
- LM 1
- AF 2
- DE 2
- EF 2
- FL 2
- HI 2
- JM 2
- JL 3
- BE 4
- CE 3
- GL 5
- AG 6

✓ **Étape 2 :** Initialiser l'arbre avec les arcs BD, EL et GH.

✓ **Étape 3 :** Parcourir la liste triée des arcs, en commençant par le premier arc de poids minimum. Ajouter l'arc à l'arbre en construction, s'il ne forme pas de cycle. À titre d'illustration, les arcs qui forment un cycle vont être barrés dans la liste.

✓ **Étape 4 :** Arrêter l'algorithme lorsque $(n - 1)$ arcs ont été ajoutés à l'arbre en construction, n étant le nom de sommets dans le graphe initial.

- **AB** 1
- **BC** 1
- **DF** 1
- **EG** 1
- **GJ** 1
- **IK** 1
- **JK** 1
- **LM** 1
- ~~AF~~ 2
- **DE** 2
- ~~EF~~ 2
- ~~FL~~ 2
- ~~HI~~ 2
- ~~JM~~ 2
- ~~JL~~ 3
- ~~BE~~ 4
- ~~CE~~ 3
- ~~GL~~ 5
- ~~AG~~ 6



Exercice 7.

Combien de sommets et combien de feuilles possède au maximum un arbre m -aire complet de hauteur h ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

Cet arbre a 1 sommet au niveau 0, m sommets au niveau 1, m^2 sommets au niveau 2, ..., m^h sommets au niveau h .

Il y a donc : $1 + m + m^2 + \dots + m^h = \frac{m^{h+1}-1}{m-1}$ sommets en tout.

Les sommets au niveau h sont les seules feuilles, et donc il y a m^h feuilles.