POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810
STRUCTURES DISCRÈTES

TD 12 : MODÉLISATION COMPUTATIONNELLE

Directives pour la remise:

- La remise est individuelle et se fait à la fin de la séance de TD.
- Répondez directement sur ce document Word (docx).
- Lorsque vous avez terminé, générez un PDF avec le nom sous le format: ***SectionDeTD-Matricule.pdf*** (exemple: *04-1234567.pdf*).
- Téléchargez votre fichier PDF dans la boîte de remise située dans la Zone TDs de la page Moodle du cours.
- Choisissez la boîte de remise qui correspond à votre section de TD.
- Aucun retard et aucune remise par courriel ne seront accepté.
- Dans l'intérêt de l'équité pour tous les étudiants, vous devez modifier le fichier Word (docx) fourni. Modifier le fichier EXCLUT le fait d'intégrer des scans de rédaction manuscrite ou d'y écrire avec un stylet.
- Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.

Objectifs du TD12

Exercice 1: Dériver l'ensemble des mots d'un langage défini par une grammaire.

Exercice 2: Trouver une grammaire pour un langage donné.

Exercice 3: Décrire le langage reconnu par une machine à états non déterministe.

Exercice 4: Exprimer le langage reconnu par une machine à états à l'aide d'une grammaire.

Exercice 5: Trouver une grammaire pour un langage donné et discuter du type de grammaire obtenu.

Exercice 6: Dériver une expression avec une grammaire de type 2 sous la forme de Backus-Naur.

La remise est individuelle mais le travail en équipe est encouragé. Veuillez inscrire votre nom, prénom et matricule ainsi que les noms des collègues avec lesquels vous avez collaboré pour le TD.

Nom:

Prénom:

Matricule:

Collègues:

Exercice 1

Soit $G = (V, T, S, P)$ la grammaire syntaxique avec $V = \{S, A, B, a, b\}$, $T = \{a, b\}$. Trouvez le langage généré par la grammaire lorsque l'ensemble P de productions est constitué de :

a) $S \to AB$, $A \to ab$ et $B \to bb$

Réponse:

Il n'y a qu'une seule chaîne terminale possible ici, soit la chaîne abbb. Par conséquent, la langue est {abbb}.

b) $S \to AB$, $S \to aA$, $A \to a$ et $B \to ba$

Réponse:

Cette fois, il n'y a que deux chaînes possibles, donc la réponse est {aba,aa}.

c) $S \to AB$, $S \to AA$, $A \to aB$, $A \to ab$ et $B \to b$

Réponse:

Notez que A doit éventuellement se transformer en ab. La réponse est donc {abb,abab}.

d) $S \to AA$, $S \to B$, $A \to aaA$, $A \to aa$, $B \to bB$ et $B \to b$

Réponse:

Si la règle $S \to AA$ est appliquée en premier, alors la chaîne qui en résulte doit être N a, où N est un nombre pair supérieur ou égal à 4, puisque chaque A devient un nombre pair de a. Si la règle $S \to B$ est appliquée en premier, alors une chaîne d'un ou plusieurs b. Le langage est donc $\{a^{2n} | n \geq 2\} \cup \{b^n | n \geq 1\}$.

e) $S \to AB$, $A \to aAb$, $B \to bBa$, $A \to \lambda$ et $B \to \lambda$

Réponse:

Les règles impliquent que la chaîne se composera de certains a, suivis de quelques b, suivis d'autres a ("certains" pourraient être aucun, cependant). De plus, le nombre total de a est égal au nombre total de b. Ainsi, nous pouvons écrire la réponse comme$\{a^n b^{n+m} a^m | m, n \geq 0\}$.

Exercice 2

Trouvez une grammaire syntaxique pour chacun des langages suivants:

a) L'ensemble constitué des chaînes de bits 10, 01 et 101.

Réponse:

Pour cet ensemble fini de chaînes, nous pouvons simplement avoir S → 10, S → 01 et S → 101.

b) L'ensemble des chaînes de bits qui commencent par 00 et se terminent par un ou plusieurs 1.

Réponse:

Pour commencer, nous pouvons avoir $S \rightarrow 00A$; cela nous donne les deux 0 au début de chaque chaîne dans la langue. Après cela, nous pouvons avoir tout ce que nous voulons au milieu, nous voulons donc $A \rightarrow 0A$ et $A \rightarrow 1A$. Enfin nous insistons pour terminer par 1, donc avoir $A \rightarrow 1$.

c) L'ensemble de chaînes de bits composées d'un nombre pair de 1 suivi d'un 0 à la fin.

Réponse:

Le nombre pair de 1 peut être produit avec $S \rightarrow 11S$, et le 0 final avec $S \rightarrow 0$ comme seule autre production. Notez que zéro est un nombre pair, donc la chaîne 0 est dans le langage.

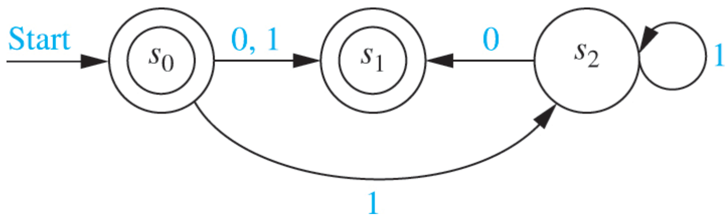
d) L'ensemble des chaînes de bits qui n'ont ni deux 0 consécutifs ni deux 1 consécutifs.

Réponse:

S'il n'y a pas deux 0 consécutifs ou deux 1 consécutifs, les symboles doivent alterner. Nous pouvons y parvenir en ayant un 0 facultatif pour commencer, puis un nombre quelconque de répétitions de 10, puis un 1 facultatif à la fin. Une façon de le faire est avec ces productions : $S \rightarrow ABC$, $A \rightarrow 0$, $A \rightarrow \lambda$, $B \rightarrow 10B$, $B \rightarrow \lambda$, $C \rightarrow 1$, $C \rightarrow \lambda$.

Exercice 3

Trouvez le langage reconnu par la machine à états finis non déterministe suivante.

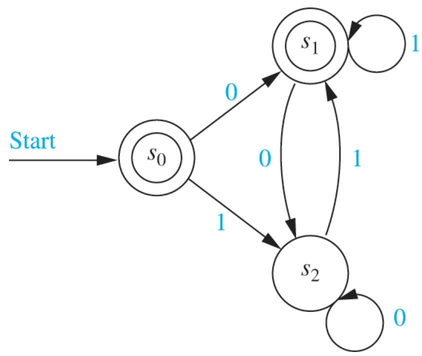


Réponse:

La chaîne vide est acceptée, puisque l'état de départ est final. Aucune autre chaîne ne conduit la machine à l'état s_0 , donc les seules autres chaînes acceptées sont celles qui peuvent conduire la machine à l'état s_1 . Il est clair que les chaînes 0 et 1 le font. De plus, chaque chaîne d'un ou plusieurs 1 peut conduire la machine à l'état s_2 , après quoi un 0 l'amènera à l'état s_1 . Par conséquent, toutes les chaînes de la forme 1^n0 pour $n \geq 1$ sont également acceptées. La réponse est donc $\{\lambda,0,1\} \cup \{1^n0 \mid n \geq 1\}$. Cela peut aussi s'écrire comme $\{\lambda,1\} \cup \{1^n0 \mid n \geq 0\}$, puisque $0 = 1^00$.

Exercice 4

Donnez une grammaire régulière $G = (V, T, S, P)$ qui génère le langage reconnu par la machine à états finis ci-dessous.



Réponse:

Assignons le symbole S à s_0, A à s_1 et B à s_2.

Les transitions entre états obligent à inscrire les règles $S \to 0A$, $S \to 1B$, $A \to 0B$, $A \to 1A$, $B \to 0B$ et $B \to 1A$. Les transitions vers les états finaux nous amènent à ajouter les règles $S \to 0$, $A \to 1$ et $B \to 1$. Enfin, puisque s_0 est un état final, nous ajoutons la règle $S \to \lambda$.

Exercice 5

Construisez des grammaires syntaxiques pour générer chacun de ces ensembles. Pour chacune des grammaires obtenues, discutez s'il s'agit d'une grammaire de type 0, 1, 2, ou 3.

a) $\{01^{2n} \mid n \geq 0\}$

Réponse:

Nous voulons exactement un 0 et un nombre pair de 1 à sa droite. Ainsi nous pouvons utiliser les règles S → 0A, A→11A, et A→λ.
Une grammaire équivalente est : S → 0A, A→1B, B→1A et A→λ.

Il s'agit d'une grammaire de type 3 puisque dans le terme de gauche nous retrouvons toujours un seul symbol non terminal et que dans le terme de droite, lorsque nous retrouvons un symbole terminal il est unique et complètement à droite.

b) $\{0^n1^{2n} \mid n \geq 0\}$

Réponse:

Nous pouvons ajouter les nouveaux symboles à partir du centre, en utilisant les règles S → 0S11 et S → λ.

Il s'agit d'une grammaire de type 2 puisque les termes à gauche sont des symboles uniques non terminaux. Il ne s'agit pas d'une grammaire de type 3 puisque dans le terme de droite nous retrouvons un symbole non-terminal entre deux symbols terminaux.

c) $\{0^n1^m0^n \mid m \geq 0, n \geq 0\}$

Réponse:

Nous pouvons ajouter les 0 à partir du centre, puis faire en sorte que le centre se transforme en une machine à fabriquer des 1.
Les règles que nous proposons sont $S \rightarrow 0S0$, $S \rightarrow A$, $A \rightarrow 1A$ et $A \rightarrow \lambda$.

Il s'agit d'un grammaire de type 2 pour les mêmes raisons qu'en b).

Exercice 6

Soit la grammaire de type 2 suivante exprimée sous la forme de Backus-Naur.

<expression> :: = <expression> + <expression>
<expression> :: = <expression> − <expression>
<expression> :: = <expression> × <expression>
<expression> :: = (<expression>)
<expression> :: = <constante>
<constante> :: = <chiffre>
<constante> :: = <constante> <chiffre>
<chiffre> :: = 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

Trouvez une dérivation de l'expression $(1 + 3) \times 4$ selon cette grammaire.

Réponse:

<expression> → <expression> × <expression>
→ (<expression>) × <expression>
→ (<expression> + <expression>) × <expression>
→ (<constate> + <constante>) × <constante>
→ (<chiffre> + <chiffre>) × <chiffre>
→ (1 + 3) × 4