POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Solutionnaire

Contrôle périodique 3

LOG2810

Sigle du cours

Sigle et titre du cours	*Groupe*	*Trimestre*
LOG2810 Structures discrètes	Tous	Automne 2022

Professeur	*Local*	*Téléphone*
Aurel Randolph, Chargé de cours Lévis Thériault, Coordonnateur	-	-

Jour	*Date*	*Durée*	*Heures*
Samedi	26 novembre 2022	1h	10h30-11h30

Documentation	*Calculatrice*	
☐ Aucune ☒ Toute ☒ Voir directives particulières	☐ Aucune ☐ Toutes ☒ Non programmable (AEP)	Les appareils électroniques personnels sont interdits.

Question 1 (**5 points)**
Soit la relation de récurrence :

$$a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n \; ; avec \; a_0 = 3, a_1 = 6, a_2 = 14$$

En considérant que **1** est une racine évidente de l'équation caractéristique, résolvez la relation de récurrence. Détaillez votre réponse.

Réponse :
On a: $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11\, a_{n+1} - 6a_{n+2} = 0$.
La relation de récurrence linéaire homogène à coefficient constant de degré 3 a pour équation caractéristique : $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$.
D'après l'énoncé, 1 est une racine évidente de l'équation caractéristique. Elle se réécrit alors :
$(r-1)(r^2 - 5r + 6) = 0$
Les racines de $r^2 - 5r + 6 = 0$ sont 2 et 3. Donc les racines de l'équation caractéristique sont :

r = 1, r=2 et r = 3.

La solution de la relation de récurrence est de la forme :

a_n = x(1)^n + y.(2)^n + z(3)^n

a_n = x + y.2^n + z.3^n avec x, y et z réels.

Avec les cas de base on obtient x = 1, y = 1 et z = 1. D'où

a_n = 1 + 2^n + 3^n.

Question 2 (**2 points)**
Un groupe de 12 étudiant.e.s de Polytechnique Montréal décident d'aller au cinéma pendant la période des fêtes. Parmi ces personnes, 5 sont de génie informatique et génie logiciel, 4 de génie civil et 3 de génie électrique. Les 12 places sont supposées être sur la même rangée dans la salle. Les étudiant.e.s de génie informatique et génie logiciel préfèrent rester ensemble et ainsi être assis.e.s côte à côte. Calculez le nombre de façons différentes de s'assoir pour tout le groupe de 12 personnes. Justifiez votre réponse.

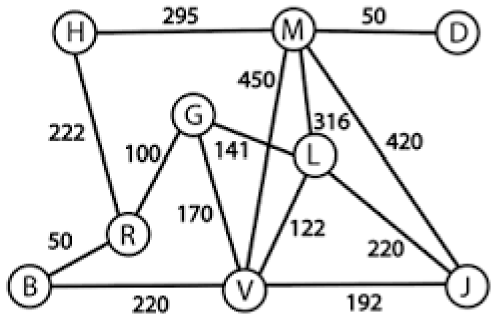
Réponse :

- Supposons que les 12 places sont numérotées de 1 à 12. Les 5 personnes qui veulent rester ensemble occuperont les possibilités de places suivantes : 1 à 5 ou 2 à 6 ou 3 à 7 ou 4 à 8 ou 5 à 9 ou 6 à 10 ou 7 à 11 ou 8 à 12. Ce qui fait 8 possibilités.
- Avec les 5 places, les 5 personnes peuvent s'asseoir de 5! manières. C'est aussi classer 5 personnes sur 5 sièges soit P(5, 5).
- Les 7 autres personnes se répartissent le reste des places, soit 7! ou encore P(7, 7).

Le nombre de façons différentes de s'assoir pour tout le groupe de 12 personnes est donc :

8.5!.7! = 4 838 400 possibilités

Question 3 (**5 points)**
Soit le graphe suivant. Trouvez l'arbre de recouvrement de poids minimal. Vous devez préciser la méthode utilisée et présenter toutes les étapes de votre réponse.

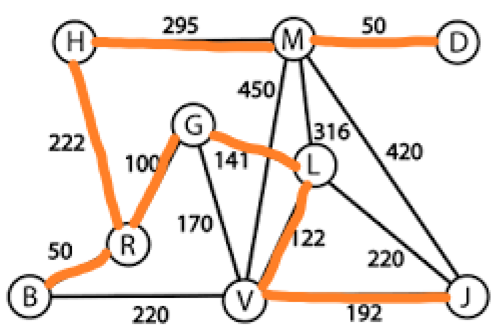


Réponse :

- **Méthode** : Kruskal

Démarche

1. Tri les arcs en ordre croissant de coût : BR 50 DM 50 GR 100 LV 122 GL 141 GV 170 JV 192 BV 220 LJ 220 HR 222 HM 295 LM 316 MJ 420 MV 450	2. Construction de l'arbre par ajout itératif d'arcs. À cet effet, il faut parcourir la liste triée du haut vers le bas en ne sélectionnant que les arcs qui n'ajoutent pas de cycle dans l'arbre en construction. Arrêter après l'ajout de (n-1) = 8 arcs, avec n = 9 le nombre de sommets dans le graphe initial.	À titre illustratif, les arcs non retenus sont barrés. BR 50 DM 50 GR 100 LV 122 GL 141 ~~GV 170~~ JV 192 ~~BV 220~~ ~~LJ 220~~ HR 222 HM 295 ~~LM 316~~ ~~MJ 420~~ ~~MV 450~~



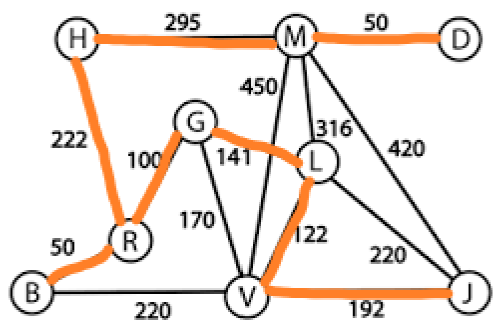
- **Méthode** : Prim

Démarche

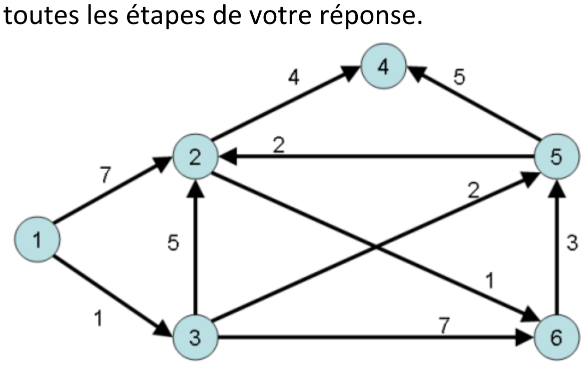
- Choisir un arc de coût minimal et l'ajouter à l'arbre en construction.
- Ajouter de manière itérative des arcs à l'arbre en construction, lorsque
  - ils sont incidents à un sommet déjà présent dans l'arbre en construction,
  - présente un coût minimal parmi les arcs incidents à un sommet déjà présent dans l'arbre en construction
  - ils n'ajoutent pas de cycle.
- Arrêter après l'ajout de (n-1) = 8 arcs, avec n = 9 le nombre de sommets dans le graphe initial.

Exemple d'ordre d'ajout des arcs.

BR 50
GR 100
GL 141
LV 122
JV 192
HR 222
HM 295
DM 50



<u>Question 4</u> (5 points)
En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminez le plus court chemin, du sommet **1** vers tous les autres sommets. Montrez toutes les étapes de votre réponse.

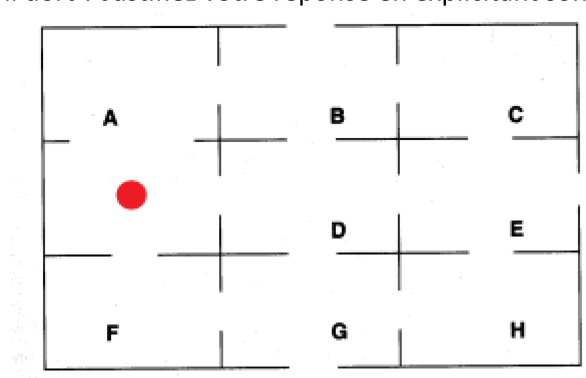


Réponse :

Sommets / Choix	1	2	3	4	5	6
Initialisation	L = 0	L = ∞	L = ∞	L = ∞	L = ∞	L = ∞
1	-	L = 7 (1-2)	L = 1 (1-3)	L = ∞	L = ∞	L = ∞
3	-	L = 6 (1-3-2)	-	L = ∞	L = 3 (1-3-5)	L = 8 (1-3-6)
5	-	L = 5 (1-3-5-2)	-	L = 8 (1-3-5-4)	-	L = 8 (1-3-6)
2	-	-	-	L = 8 (1-3-5-4)	-	L = 6 (1-3-5-2-6)
6	-	-	-	L = 8 (1-3-5-4)	-	-
4	-	-	-	-	-	-
Coût et chemins	-	L = 5 (1-3-5-2)	L = 1 (1-3)	L = 8 (1-3-5-4)	L = 3 (1-3-5)	L = 6 (1-3-5-2-6)

Les séquences de chiffres entre les parenthèses indiquent les chemins trouvés à chaque itération. L indique le coût correspondant.

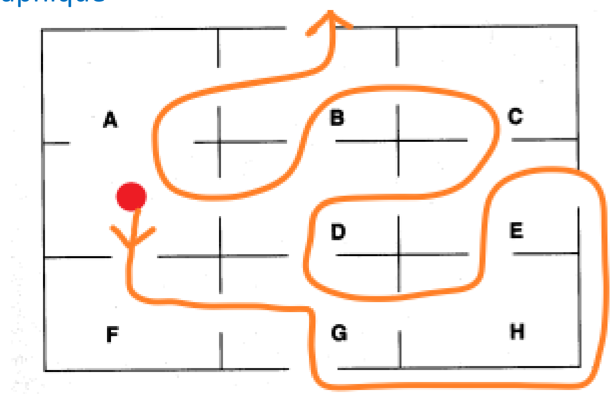
<u>Question 5</u> **(3 points)**
On considère ci-dessous le plan de la maison de Pierre. Les lignes représentent les murs. Les espaces vides entre les murs représentent les portes. Pierre se trouve présentement dans la pièce située entre A et F, marquée par le cercle. Il désire fermer à clé toute les portes de la maison avant de dormir, traversant chacune d'elles avant de la verrouiller. Il peut sortir à l'extérieur et revenir dans la maison par une autre porte. De plus, lors de sa tournée, il ne souhaite pas ouvrir une porte déjà fermée. Pouvez-vous indiquer où il dort ? Justifiez votre réponse en explicitant son parcours.



Réponse :
Il dort à l'extérieur de la maison. Plusieurs parcours sont possibles.

- Approche essai-erreur

Exemple de solution graphique



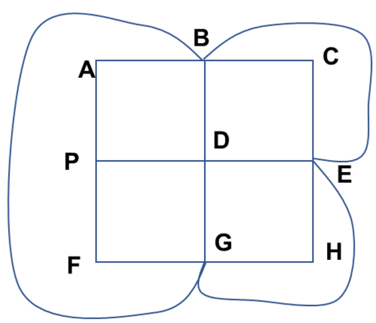
- Approche de formalisation du problème

Le problème peut être modélisé en considérant chaque pièce comme un sommet d'un graphe dont les arêtes sont les portes qui permettent de quitter un sommet (une pièce) pour un autre (une autre pièce). Ainsi passer par l'extérieur c'est emprunter aussi un arc entre la pièce (sommet) de la porte de sortie et la pièce (sommet) d la porte d'entrée. Il existe donc un arc entre B et E, B et G, G et E.

Franchir une porte et la fermer revient à utiliser 2 arcs (soit 2 degrés) au niveau du sommet considéré. On calcule alors le degré de chaque sommet et on vérifie si le graphe admet une chaîne eulérienne. Dans ce cas Pierre dors dans la maison.

Soit P la pièce de départ. Nous avons :

Deg(A) = 2 ; deg(B) = 5; deg(C) = 2; deg(P) = 3 ; deg(D) = 4 ; deg(E) = 5 ; deg(F) = 2 ; deg(G) = 5 ; deg(H) = 2.



Le graphe admet donc plus de 2 sommets de degré impair (B, E, G, P). Il ne contient donc pas de chaîne eulérienne. Pierre ne dort donc pas dans la maison.

Autre explication.

Pour dormir dans la maison, il doit sortir au moins une fois et rentrer dans la maison car il ferme la porte après l'avoir franchi. Il emprunte donc l'un des arcs BE, EG ou BG. Ce qui induit la fermeture de ces portes. La prochaine qu'il va sortir par l'une des 3 portes restante, il ne pourra pas revenir dans la maison après l'avoir fermé. Il y a donc des degrés du graphe qui ne seront pas utilisés, notamment au niveau des sommets B, E ou G. S'il doit dormir dans la maison, au moins une porte restera ouverte, ce qui est contraire au but visé.