



**POLYTECHNIQUE  
MONTREAL**

UNIVERSITÉ  
D'INGÉNIERIE

# LOG1810

## STRUCTURES DISCRÈTES

### **TD 11 : ARBRE** E2023

## **SOLUTIONNAIRE**

**Exercice 1**

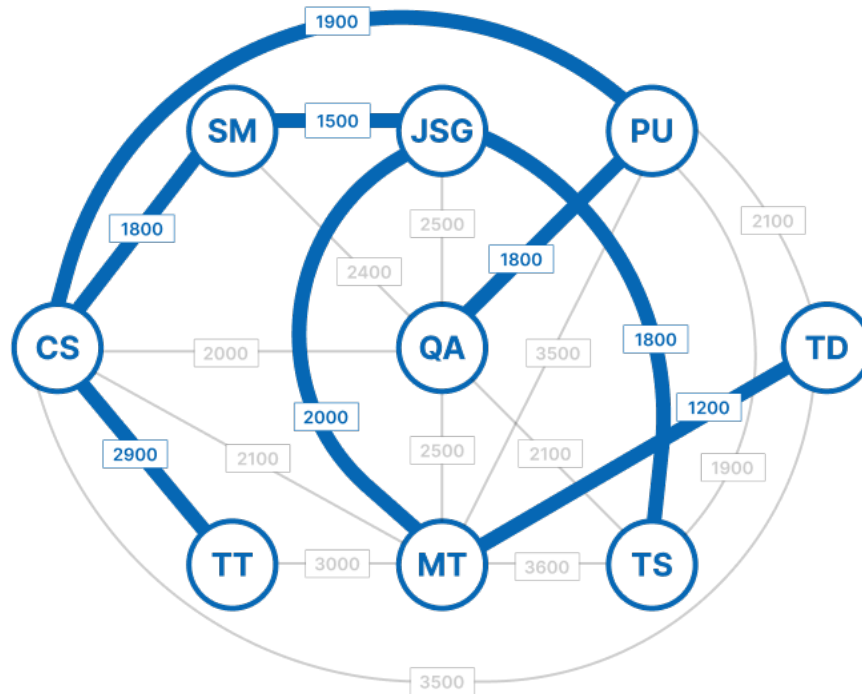
Iris, une exploratrice passionnée par les voyages et la culture, a été engagée pour aider une agence de voyage à Tokyo, au Japon, à optimiser leurs itinéraires touristiques afin de maximiser leur rentabilité. Tokyo étant une ville réputée pour son coût de vie élevé par rapport à de nombreuses destinations voisines, ce qui nécessite des itinéraires optimisés offrant une expérience unique tout en respectant les contraintes budgétaires des voyageurs. En considérant les coûts des trajets entre différentes attractions touristiques suivantes :

Point de départ	Destination	Coût (en yen)
Carrefour de Shibuya	Tour de Tokyo	2 900
Carrefour de Shibuya	Sanctuaire Meiji	1 800
Sanctuaire Meiji	Quartier d'Akihabara	2 400
Sanctuaire Meiji	Jardin de Shinjuku Gyoen	1 500
Quartier d'Akihabara	Carrefour de Shibuya	2 000
Quartier d'Akihabara	Marché aux poissons de Tsukiji	2 500
Quartier d'Akihabara	Jardin de Shinjuku Gyoen	2 500
Jardin de Shinjuku Gyoen	Marché aux poissons de Tsukiji	2 000
Temple Sensō-ji	Jardin de Shinjuku Gyoen	1 800
Temple Sensō-ji	Quartier d'Akihabara	2 100
Temple Sensō-ji	Marché aux poissons de Tsukiji	3 600
Temple Sensō-ji	Parc Ueno	1 900
Parc Ueno	Carrefour de Shibuya	1 900
Parc Ueno	Quartier d'Akihabara	1 800
Parc Ueno	Marché aux poissons de Tsukiji	3 500
Marché aux poissons de Tsukiji	Tour de Tokyo	3 000
Marché aux poissons de Tsukiji	Carrefour de Shibuya	2 100
Tokyo Disneyland	Carrefour de Shibuya	3 500
Tokyo Disneyland	Parc Ueno	2 100
Tokyo Disneyland	Marché aux poissons de Tsukiji	1 200

En considérant la liste des sommets des attractions touristiques sous leur forme abrégée :

- **CS** : Carrefour de Shibuya
- **TT** : Tour de Tokyo
- **SM** : Sanctuaire Meiji
- **MT** : Marché aux poissons de Tsukiji
- **QA** : Quartier d'Akihabara
- **JSG** : Jardin de Shinjuku Gyoen
- **TS** : Temple Sensō-ji
- **PU** : Parc Ueno
- **TD** : Tokyo Disneyland



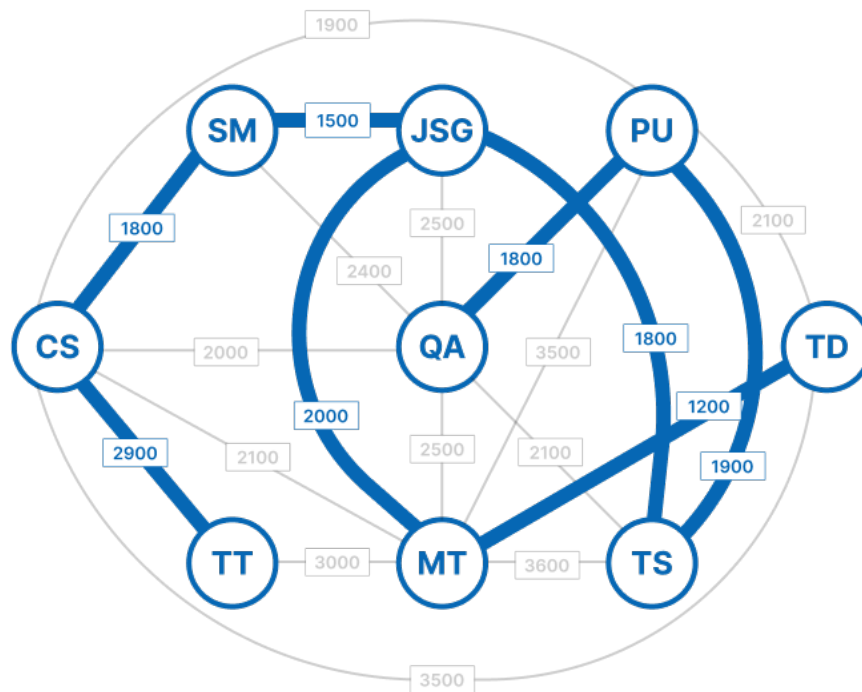


**Solution (II.)** : Si vous avez considéré l'arc  $\{TS, PU\}$ .

Les arcs sont ajoutés dans l'ordre suivant :

$\{TD, MT\} - \{JSG, MT\} - \{SM, JSG\} - \{CS, SM\} - \{TS, JSG\} - \{PU, CS\} - \{PU, QA\} - \{CS, TT\}$

Le coût de l'arbre est donc :  $1200 + 1500 + 1800 + 1800 + 1800 + 1900 + 2000 + 2900 = 14\,900$  yen.



- c) À partir de votre graphe construit en a), construisez un parcours qui minimise les coûts pour le touriste sans qu'il ait à revisiter le même site deux fois en utilisant l'algorithme de **Kruskal**. Détaillez toutes les étapes de cet algorithme. Et enfin déterminez le coût de cet itinéraire.

**Solution :**

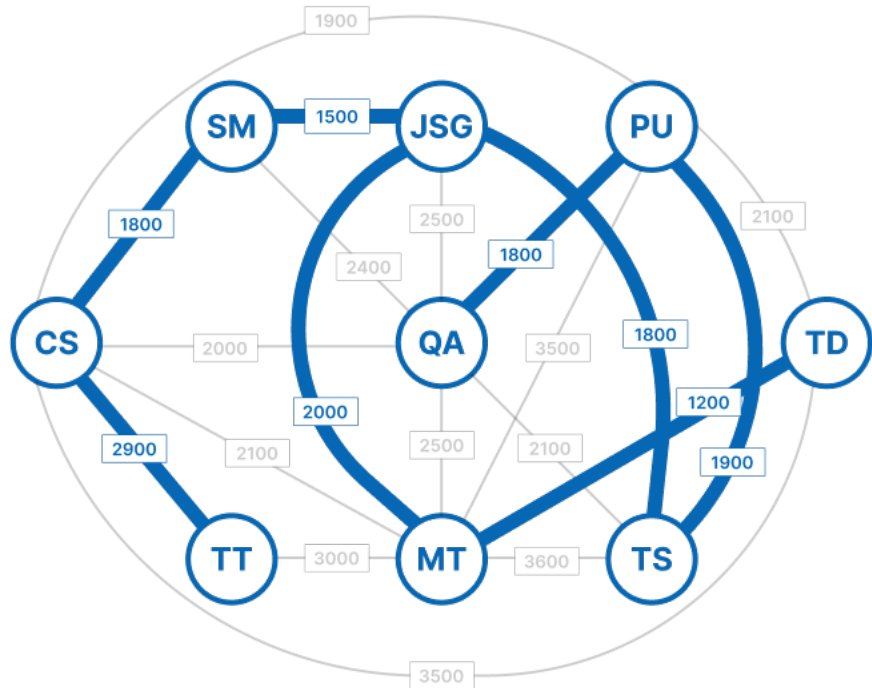
✓**Étape 1 :** Trier les arcs en ordre croissant de leur poids

○ {TD, MT}	1200
○ {SM, JSG}	1500
○ {CS, SM}	1800
○ {TS, JSG}	1800
○ {PU, QA}	1800
○ {TS, PU}	1900
○ {PU, CS}	1900
○ {QA, CS}	2000
○ {JSG, MT}	2000
○ {TS, QA}	2100
○ {MT, CS}	2100
○ {TD, PU}	2100
○ {SM, QA}	2400
○ {QA, MT}	2500
○ {QA, JSG}	2500
○ {CS, TT}	2900
○ {MT, TT}	3000
○ {PU, MT}	3500
○ {TD, CS}	3500
○ {TS, MT}	3600

✓**Étape 2 :** Parcourir la liste triée des arcs, en commençant par le premier arc de poids minimum. Ajouter l'arc à l'arbre en construction, s'il ne forme pas de cycle. À titre d'illustration, les arcs qui forment un cycle vont être barrés dans la liste.

✓**Étape 3 :** Arrêter l'algorithme lorsque  $(n - 1)$  arcs ont été ajoutés à l'arbre en construction,  $n$  étant le nom de sommets dans le graphe initial.

○ {TD, MT}	1200
○ {SM, JSG}	1500
○ {CS, SM}	1800
○ {TS, JSG}	1800
○ {PU, QA}	1800
○ {TS, PU}	1900
⊖ {PU, CS}	1900
⊖ {QA, CS}	2000
○ {JSG, MT}	2000
⊖ {TS, QA}	2100
⊖ {MT, CS}	2100
⊖ {TD, PU}	2100
⊖ {SM, QA}	2400
⊖ {QA, MT}	2500
⊖ {QA, JSG}	2500
○ {CS, TT}	2900
⊖ {MT, TT}	3000
⊖ {PU, MT}	3500
⊖ {TD, CS}	3500
⊖ {TS, MT}	3600



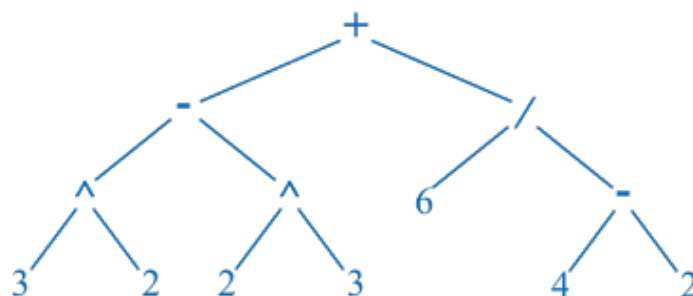
Le coût de l'arbre est :  $1200 + 1500 + 1800 + 1800 + 1800 + 1900 + 2000 + 2900 = 14\,900$  yen.

### Exercice 2

Dessinez l'arbre binaire correspondant à chacune des expressions arithmétiques écrites en notation polonaise ci-dessous. Ensuite, écrivez chaque expression en utilisant la notation infixée. L'opérateur « ^ » est celui de l'exponentiation.

a)  $+ \ - \ ^ \ 3 \ 2 \ ^ \ 2 \ 3 \ / \ 6 \ - \ 4 \ 2$

**Solution :**

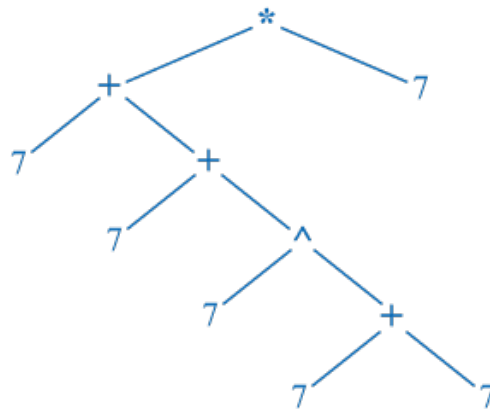


En notation infixée l'expression  $+ \ - \ ^ \ 3 \ 2 \ ^ \ 2 \ 3 \ / \ 6 \ - \ 4 \ 2$  devient :

$$[ [(3^2) - (2^3)] + [6 / (4 - 2)] ]$$

b)  $* + 7 + 7^7 + 777$

**Solution :**

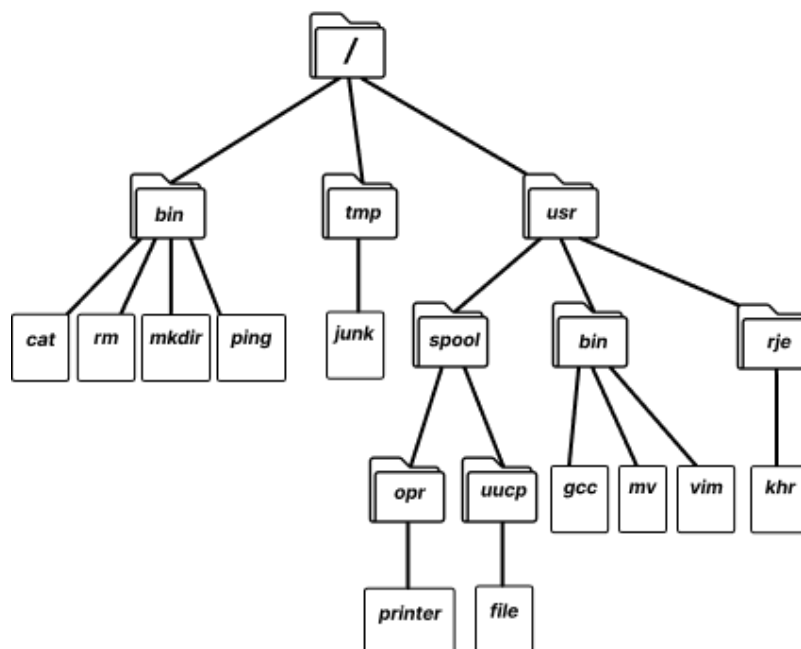


En notation infixe l'expression  $* + 7 + 7^7 + 777$  devient :

$[[7 + [7 + [7^7 (7 + 7)]]] * 7]$

### Exercice 3

Dans un système Linux, les fichiers en mémoire peuvent être organisés en répertoires. Un répertoire peut contenir à la fois des fichiers et des sous-répertoires. Le répertoire racine est représenté par le symbole « / ». Ainsi, le système de fichiers entier peut être représenté par un arbre enraciné, où la racine est le répertoire racine « / », les nœuds internes représentent les sous-répertoires et les feuilles représentent des fichiers ordinaires ou des répertoires vides. Cette structure est couramment appelée la structure de répertoires du système de fichiers Linux. Soit la structure de répertoires du système de fichiers Linux ci-dessous.



a) Donnez l'expression correspondant au parcours préfixe de cette structure de répertoires.

**Solution :**

`/--bin--cat--rm--mkdir--ping--tmp--junk--usr--pool--opr--printer--ucp--file--bin--gcc--mv--vim--rje--khr`

b) Donnez l'expression correspondant au parcours infixé de cette structure de répertoires.

**Solution :**

`cat--bin--rm--mkdir--ping--/--junk--tmp--printer--opr--pool--file--ucp--usr--gcc--bin--mv--vim--khr--rje`

c) Donnez l'expression correspondant au parcours postfixé de cette structure de répertoires.

**Solution :**

`cat--rm--mkdir--ping--bin--junk--tmp--printer--opr--file--ucp--pool--gcc--mv--vim--bin--khr--rje--usr--/`

#### Exercice 4

Supposons qu'une personne envoie une chaîne de lettres à six destinataires, en demandant à chacun d'entre eux de la transmettre à six autres personnes. Certains des destinataires respectent cette demande, tandis que d'autres ne la transmettent pas.

a) Combien de personnes ont eu connaissance de cette lettre, y compris la personne initiale, si personne ne reçoit plus d'une lettre et si la chaîne de lettres se termine après qu'il y a eu 1001 personnes qui l'ont lue mais ne l'ont pas envoyée ? Justifiez votre réponse.

**Solution :**

La chaîne de lettres peut être représentée à l'aide d'un arbre 6-aire, donc  $m = 6$ .

Les sommets correspondent aux personnes ayant eu connaissance de la lettre et les feuilles correspondent aux personnes ne l'ayant pas envoyée. Comme 1001 personnes n'ont pas envoyé la lettre, le nombre de feuilles dans cet arbre enraciné est  $l = 1001$ . Par conséquent, le nombre de personnes ayant eu connaissance de la lettre est  $n = \frac{(m \cdot l - 1)}{(m - 1)} = \frac{(6 \cdot 1001 - 1)}{(6 - 1)} = 1201$

b) Combien de personnes ont envoyé la lettre ? Justifiez votre réponse.

**Solution :**

Les sommets internes correspondent aux personnes ayant envoyé la lettre.

Par conséquent,  $i = n - l = 1201 - 1001 = 200$ , donc 200 personnes ont envoyé la lettre.



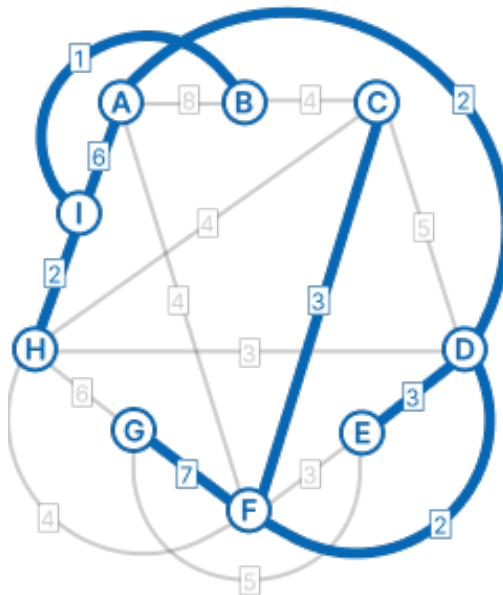


- BI 1
- AD 2
- DF 2
- HI 2
- CF 3
- DE 3
- DH 3
- EF 3
- AF 4
- BC 4
- CH 4
- FH 4
- CD 5
- EG 5
- GH 6
- AB 8

✓**Étape 2** : Parcourir la liste triée des arcs, en commençant par le premier arc de poids minimum. Ajouter l'arc à l'arbre en construction, s'il ne forme pas de cycle. À titre d'illustration, les arcs qui forment un cycle vont être barrés dans la liste.

✓**Étape 3** : Arrêter l'algorithme lorsque  $(n - 1)$  arcs ont été ajoutés à l'arbre en construction,  $n$  étant le nom de sommets dans le graphe initial.

- BI 1
- AD 2
- DF 2
- HI 2
- CF 3
- DE 3
- ⊖ DH 3
- ⊖ EF 3
- ⊖ AF 4
- ⊖ BC 4
- ⊖ CH 4
- ⊖ FH 4
- ⊖ CD 5
- ⊖ EG 5
- ⊖ GH 6
- ⊖ AB 8



Le coût de l'arbre est :  $7 + 6 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 = 26$