POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

Questionnaire examen final

LOG2810

Sigle du cours

Identification de l'étudiant(e)		
Nom :	**Prénom :**	
Signature :	**Matricule :**	**Groupe :**

Sigle et titre du cours	*Groupe*	*Trimestre*
LOG 2810 : Structures discrètes	**Tous**	**20201**
Professeur	*Local*	*Téléphone*
John Mullins		**3278**

Jour	*Date*	*Durée*	*Heures*
Vendredi	**24 avril 2020**	**2h30**	**9h30 à 12h00**

Documentation	*Calculatrice*	
☐ Aucune ☒ Toute ☐ Voir directives particulières	☐ Aucune ☒ Toutes ☐ Non programmable (AEP)	**Les cellulaires, agendas électroniques ou téléavertisseurs sont interdits.**

Directives particulières

Important

La pondération de cet examen est de $\boxed{50}$ %

Vous devez remettre le questionnaire : Remise sur Moodle

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

***** En cas de doute sur le sens d'une question, énoncez clairement dans votre réponse toutes les suppositions que vous faites. Nous ne répondrons pas aux questions.**

LOG 2810 : Structures discrètes
Examen final

Prof. John Mullins, poste 3278

24 avril 2020
Durée: 2h30

Nom :
Matricule :
Signature :

Directives

- Veuillez indiquer votre nom, votre matricule et votre signature.
- Toute documentation est permise.
- La durée de l'épreuve est de **2 heures 30 minutes**.
- Vous devez scanner vos réponses ainsi que cette page et déposer en **un seul fichier PDF** sur le site Moodle.
- Prévoyez au moins 30 minutes pour compléter la procédure de dépôt.
- Le site de dépôt ferme à 12h30
- Assurez-vous de la lisibilité de votre copie numérisée .
- Ce contrôle est calculé sur 40 points.

Engagement sur l'honneur à remettre

Sur mon honneur, je déclare avoir complété cet examen par moi-même, sans communication avec personne, et en conformité avec les directives identifiées sur la première page de l'énoncé.

Signature :

Question 1

a. **(3 points)** Soit R, une relation d'équivalence sur E et S, une relation d'équivalence sur F telles que $E \cap F = \emptyset$. La relation $R \cup S$ est-elle aussi une relation d'équivalence sur $E \cup F$? Dans l'affirmative, prouvez-le. Dans la négative, donnez un contre-exemple.

b. **(4 points)** Soit R, une relation sur E. La fermeture symétrique de la fermeture réflexive de la fermeture transitive de R est-elle une relation d'équivalence sur E ? Dans l'affirmative, prouvez-le. Dans la négative, donnez un contre-exemple.

Question 2

a. **(3 points)** Prouvez la validité ou l'invalidité de l'argument suivant :

$$\begin{array}{ll} 1. & u \rightarrow r \\ 2. & (r \wedge s) \rightarrow (p \vee t) \\ 3. & q \rightarrow (u \wedge s) \\ 4. & \neg t \\ 5. & q \\ \hline & \therefore \; p \end{array}$$

b. **(4 points)** Montrez par induction que pour tout entier positif, $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ est divisible par 21

c. **(3 points)** Un **palindrome** est une chaîne qui peut être lue de gauche à droite ou de droite à gauche en donnant le même résultat. Autrement dit, c'est une chaîne w où $w = w^R$, où w^R est l'inverse de la chaîne w. Donnez une définition récursive de l'ensemble des chaînes binaires qui sont des palindromes.

Question 3

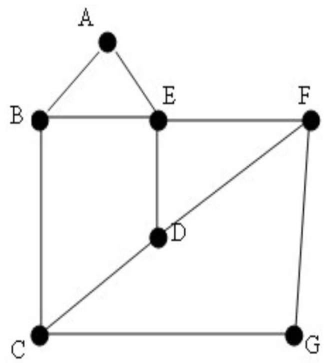
a. **(3 points)** Combien de chaînes binaires de longueur 10 contiennent soit cinq 0 consécutifs, soit cinq 1 consécutifs ?

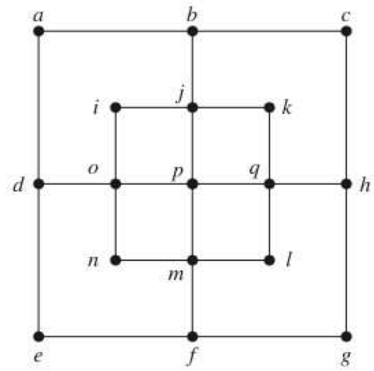
b. **(4 points)** Soit une fonction f sur un ensemble A. Un élément $a \in A$ est appelé un *point fixe* de f si $f(a) = a$. Pour $|A| = 7$, combien y-a-il de fonctions $f : A \rightarrow A$ injectives et sans point fixe ?

Question 4

a. **(3 points)** Énumérez tous les graphes simples non isomorphes ayant 4 sommets et 4 arcs.

b. **(4 points)** Pour chacun des deux graphes déterminez s'il contient un cycle Hamilonien. Dans l'affirmative, décrivez-en un et dans la négative, prouvez-le.





Question 5

Considérez l'automate $\mathcal{A}$ de la figure 1

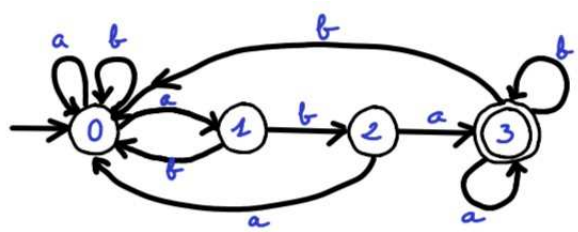


FIGURE 1 – L'automate $\mathcal{A}$ de la question 5.

a. **(3 points)** Construisez un automate fini déterministe équivalent à l'automate $\mathcal{A}$.

b. **(3 points)** Trouvez le langage reconnu par l'automate $\mathcal{A}$ en résolvant le système d'équations linéaires associé.

c. **(3 points)** Soit L, le langage reconnu par l'automate $\mathcal{A}$ de la figure 1, construisez deux automates non-déterministes qui reconnaissent $L \cdot L$ et L^* respectivement..

Question 1 :

a.) Démontrons qu'il s'agit d'une relation d'équivalence

- Réflexivité : Soit $a \in E \cup F$.

$a \in E$ ou $a \in F$

$a R a$ ou $a S a$ car R et S sont des relations d'équivalence

Donc $a (R \cup S) a$ ✓

Elle est donc réflexive

- Symétrie :

Soit $a, b \in E \cup F$ / $a R\cup S b$

Comme E et F sont disjoints, on a que $a R b$ ou $a S b$

$\Rightarrow$ $b R a$ ou $b S a$

(R et S sont symétriques

D'où $b R\cup S a$ ✓

La relation est symétrique.

Q1 suite

Transitivité : Soit a, b et $c \in E \cup F$ |

$a \, R \cup S \, b$ et $b \, R \cup S \, c$

Comme $E \cap F = \emptyset$ aRb ou aSb et bRc ou bSc

$\hookrightarrow$ on a $\begin{cases} aRb \text{ et } bRc \\ \text{ou} \\ aSb \text{ et } bSc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aRc \\ \text{ou} \\ aSc \end{cases}$ car R et S sont transitives

$\mathcal{D}$ onc $a \, R \cup S \, c \Rightarrow R \cup S$ est transitive

$R \cup S$ est donc une relation d'équivalence sur $E \cup F$ ✓

b-) Prenons une relation quelconque R sur E.

1-) * La fermeture transitive de R est transitive

Posons R_1 cette relation.

2-) * Soit R_2 la plus petite relation telle que $R_1 \cup R_2$ est réflexive. $R_1 \cup R_2$ est la fermeture réflexive de R_1

* $R_1 \cup R_2$ est réflexive évidemment.

* Prouvons qu'elle est toujours transitive.

On sait que R_2 est constitué que de couple

Q1 Suite

de la forme (a,a) [car c'est la fermeture la plus petite]

D'où R_2 est transitive car aR_2a et bR_2b

cR_2c ......

et on a si aR_2a et aR_2a

$\Rightarrow aR_2a$ (~~car réflexive~~)

Comme R_1 est transitive et R_2 est transitive.

alors $R_1 \cup R_2$ l'est aussi (voir démonstration 1-)a-1)

Donc la fermeture réflexive de la fermeture transitive $(R_1 \cup R_2)$

est réflexive et transitive. Posons $R_3 = R_1 \cup R_2$ cette relation.

3-) La question qui se pose : Est-ce que la fermeture symétrique de R_3 donne une relation d'équivalence ?

Comme la fermeture symétrique est la plus petite (soit R_4 la plus petite relation telle que $R_3 \cup R_4$ est symétrique

$$R_4 = \{(b,a) \mid (a,b) \in R_3 \text{ et } (b,a) \notin R_3\}$$

Donc $R_3 \cup R_4$ reste toujours réflexive.

On a aussi que R_3 est transitive et R_4 l'est aussi

D'où $R_3 \cup R_4$ aussi

On a donc $R_3 \cup R_4$ est réflexive, transitive et symétrique (trivial) : Donc la fermeture symétrique

de la fermeture réflexive de la fermeture transitive est EQUIVALENCE

Question 2

a) l'argument est valide. Démonstration :

De (5) et (3) : on a $u \wedge s$ (Modus Ponens)

De $u \wedge s$ on a : u et s (simplification)

On a u et (1) : r (Modus Ponens)

On a : r et s donc $r \wedge s$ (Conjonction)

On a : De $r \wedge s$ et (2) : $p \vee t$ (Modus Ponens)

On a : De $p \vee t$ et $\neg t$: p (Syllogisme disjonctif).

D'où p ✓

b) Soit $P(n)$: " 21 divise $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ "

Étape de base : posons $n = 1$ on a $4^{1+1} + 5^{2\times1-1} = 21 = 1\times21$

D'où $P(1)$ vraie

Hérédité : Soit un $k > 0$ tel que $P(k)$ est vraie

Montrons que $P(k+1)$ l'est aussi

On a que $4^{k+2} + 5^{2(k+1)-1} = 4^{k+2} + 5^{2k-1+2}$

$= 4 \times 4^{k+1} + 25 \times 5^{2k-1}$

Q2 Suite

$$4^{k+2} + 5^{2k+1} = 4 \times 4^{k+1} + (21+4)\, 5^{2k-1}$$
$$= 4\left(4^{k+1} + 5^{2k-1}\right) + 21 \times 5^{2k-1}$$

Comme $P(k)$ vraie alors $4^{k+1} + 5^{2k-1} = 21\, t$ avec t un entier

D'où $4^{k+2} + 5^{2k+1} = 4 \times 21 t + 21 \times 5^{2k-1}$
$$= 21\,\underbrace{\left(4t + 5^{2k-1}\right)}_{\text{un entier}}$$

donc 21 divise $4^{k+2} + 5^{2k+1} \Rightarrow P(k+1)$ est Vraie

Conclusion : $\forall n > 0 \quad 21 \mid 4^{n+1} + 5^{2n-1}$ ✓

c-) • Étape de Base : ϵ, '0', '1' sont des palindromes

• Étape Inductive : si w est un palindrome alors "0w0" et "1w1" sont des palindromes

✓

Question 3

a.) Soit une chaîne de longueur 10 avec ~~5~~ 5 0 consécutifs.

Il y'a 6 cas $(10-5+1)$:

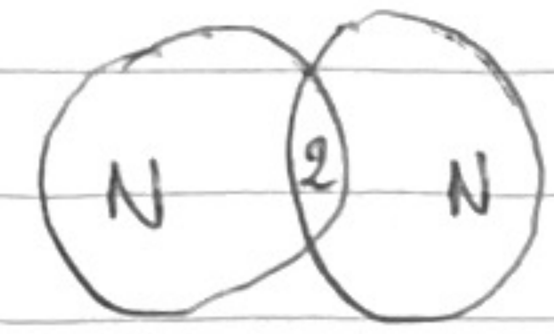
le premier 0 des "000 00" qui apparaissent les premiers dans la chaînes est soit à la première position, $2^{ème}$, $3^{ème}$, $4^{ème}$, $5^{ème}$, $6^{ème}$.

Premier	"000 00 x x x x x"
Deuxième	"100000 x x x x"
$3^{ème}$	"~~x~~ 1 00000 x x x"
$4^{ème}$	"x x 100000 x x"
$5^{ème}$	"x x x 100000 x"
$6^{ème}$	"x x x x 100000"

* Il y'a donc $2^5 + 2^4 \times 5$ chaîne binaires de longueur 10 avec 5 "0" consécutifs.
* Même chose pour 5 "1" consécutifs.
* Il y'a 2 chaînes avec 5 "0" consécutifs et 5 "1" consécutifs ("0000011111" et "1111100000")

Q3 Suite

Le nombre de chaînes qui contiennent soit soit



est $(2^5 + 2^4 \times 5 - 2) \times 2 = \underline{220}$

b.) On peut voir cette question d'une autre façon on a : les chiffres 1 2 3 4 5 6 7

Combien y'a-t-il de permutations qui ne laissent aucun élément invariant : il s'agit de la définition du dérangement : Notre réponse est donc D_7

On a que $n! = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times D_k$ avec $D_0 = 1$

et $D_1 = 0$

$D_2 = 1$

$D_3 = 2$

$D_4 = 9$

$D_5 = 44$

$D_6 = 265$

~~Il a~~

Il y'a une formule directe

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$D_7 = 7!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!}\right)$$

$\boxed{D_7 = 1854}$ ou on aurait pu déduire D_7 des D_i avec $i = 0, 1, 2 \dots 6$.

Question 4

a.) un graphe simple et avec 4 sommets et 4 arcs est forcément connexe (Nid de poule et le fait qu'il n'y a pas de boucle ni deux arcs pour deux paires).

il y'a alors deux types de "squelettes"

On rajoute 1 arc.

et

D'où

a.)

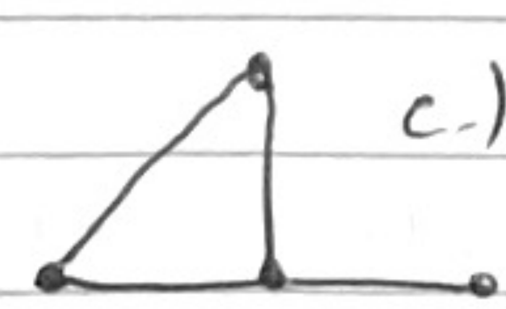
et

b.)

le reste est isomorphique avec a et b

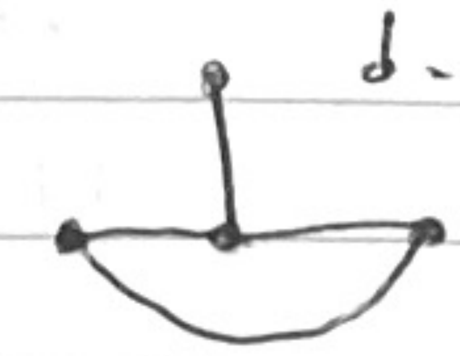
et

c.)



et

d.)



le reste et isomorphique avec c et d

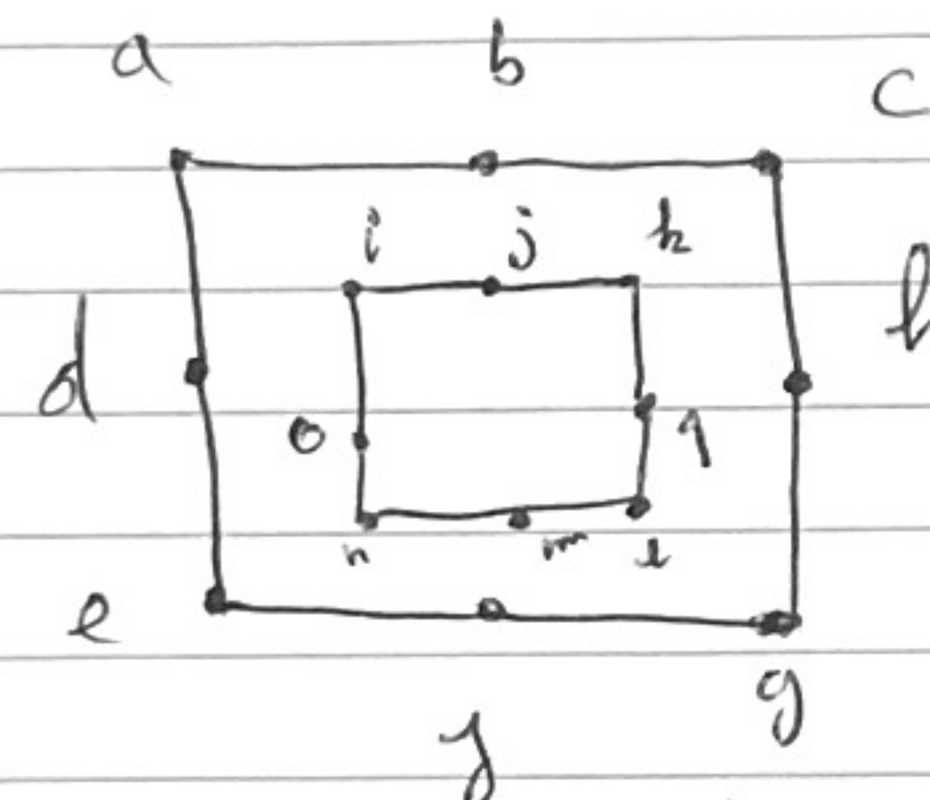
Il y'a donc 4 qui sont les a.) b.) c.) d.)

Q4 suite

1-) b-) * Le premier est CLAIREMENT un cycle hamiltonien :

A E D F G C B A ✓

2-) Absurde * Comme les sommets a, c, e, g, i, k, l, n sont de degré 2 alors tous les arcs qui leur sont incidents doivent faire partie du cycle hamiltonien d'où



h est dans le cycle

* Ces arcs doivent forcément être dans le cycle hamiltonien.

* De plus pour lier les deux composantes connexes (on est obligé sinon il n'y aura pas de cycle qui passe par tous les sommets).

* il faut soit parcourir avec b — j h — q f — m ou d — o

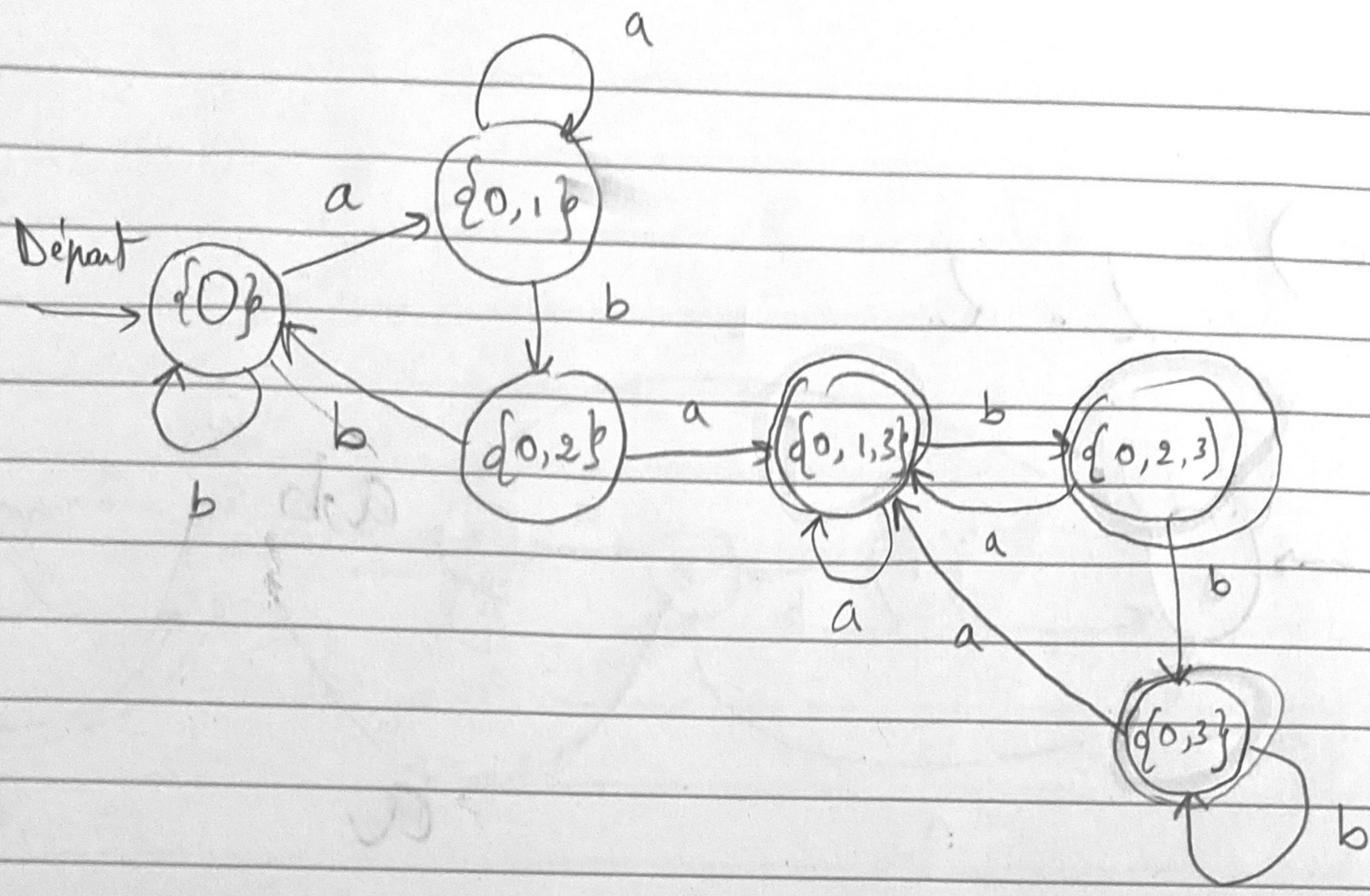
on ne peut pas avoir 3 arcs incidents pour n'importe quel sommet : il y'a contradiction

Donc le graphe 2 n'a pas de cycle hamiltonien (on peut pas avoir de cycle hamiltonien quand on est sûr que 3 arcs incidents à un sommet en feront partie ils en parcourra 2 fois !!)

Question 5

a-)

S	δ a	δ b
0	{0,1}	0
{0,1}	{0,1}	{0,2}
{0,2}	{0,1,3}	0
{0,1,3}	{0,1,3}	{0,2,3}
{0,2,3}	{0,1,3}	{0,3}
{0,3}	{0,1,3}	{0,3}



Départ
{0}
{0,1}
{0,2}
{0,1,3}
{0,2,3}
{0,3}
a
b

On sait que le langage des automates est le même

b.)

$$\begin{cases} Y_0 = aY_1 + bY_0 \\ Y_1 = aY_1 + bY_2 \\ Y_2 = bY_0 + aY_3 \\ Y_3 = aY_3 + bY_4 + \epsilon \\ Y_4 = aY_3 + bY_5 + \epsilon \\ Y_5 = bY_5 + aY_3 + \epsilon \end{cases}$$

je prends le déterminisé.

$$Y_3 = aY_3 + baY_3 + bbY_5$$

et $Y_5 = b^* a Y_3$

$$= aY_3 + baY_3 + bbb^*aY_3$$

$$Y_3 = (a + ba + bbb^*a)^*$$

$$Y_1 = aY_1 + bbY_0 + baY_3$$

$$Y_1 = a^*(bbY_0 + baY_3)$$

$$Y_0 = aa^*(bbY_0 + baY_3) + bY_0$$

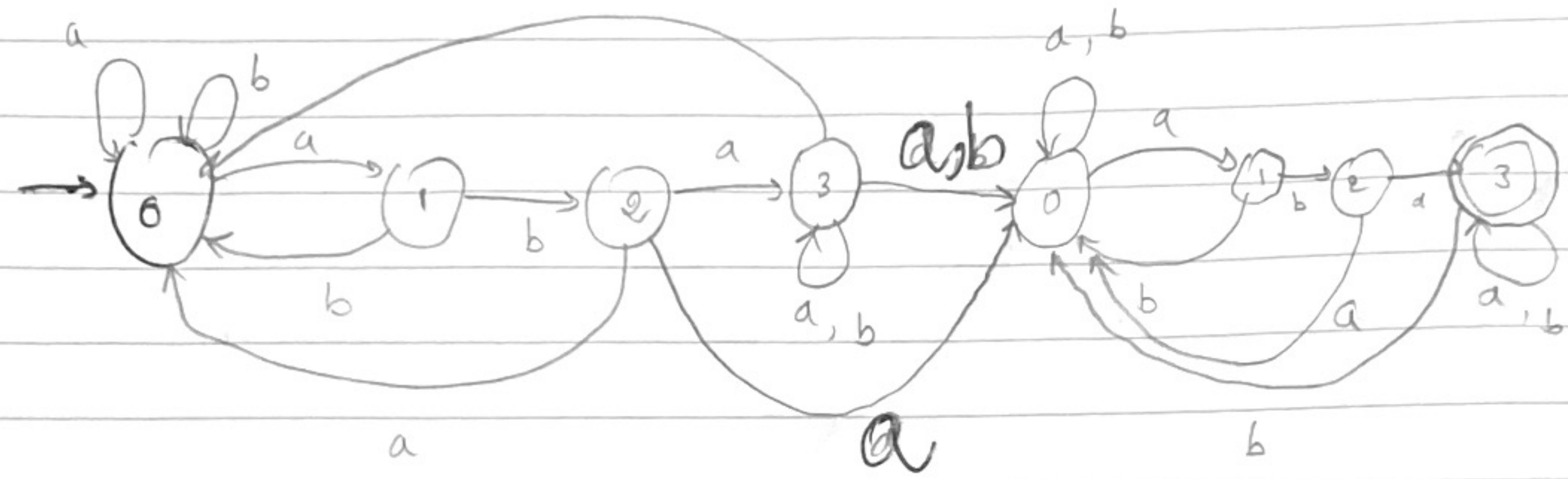
$$= aa^*bbY_0 + aa^*baY_3 + bY_0$$

$$Y_0 = (aa^*bb + b)^* \; aa^*baY_3$$

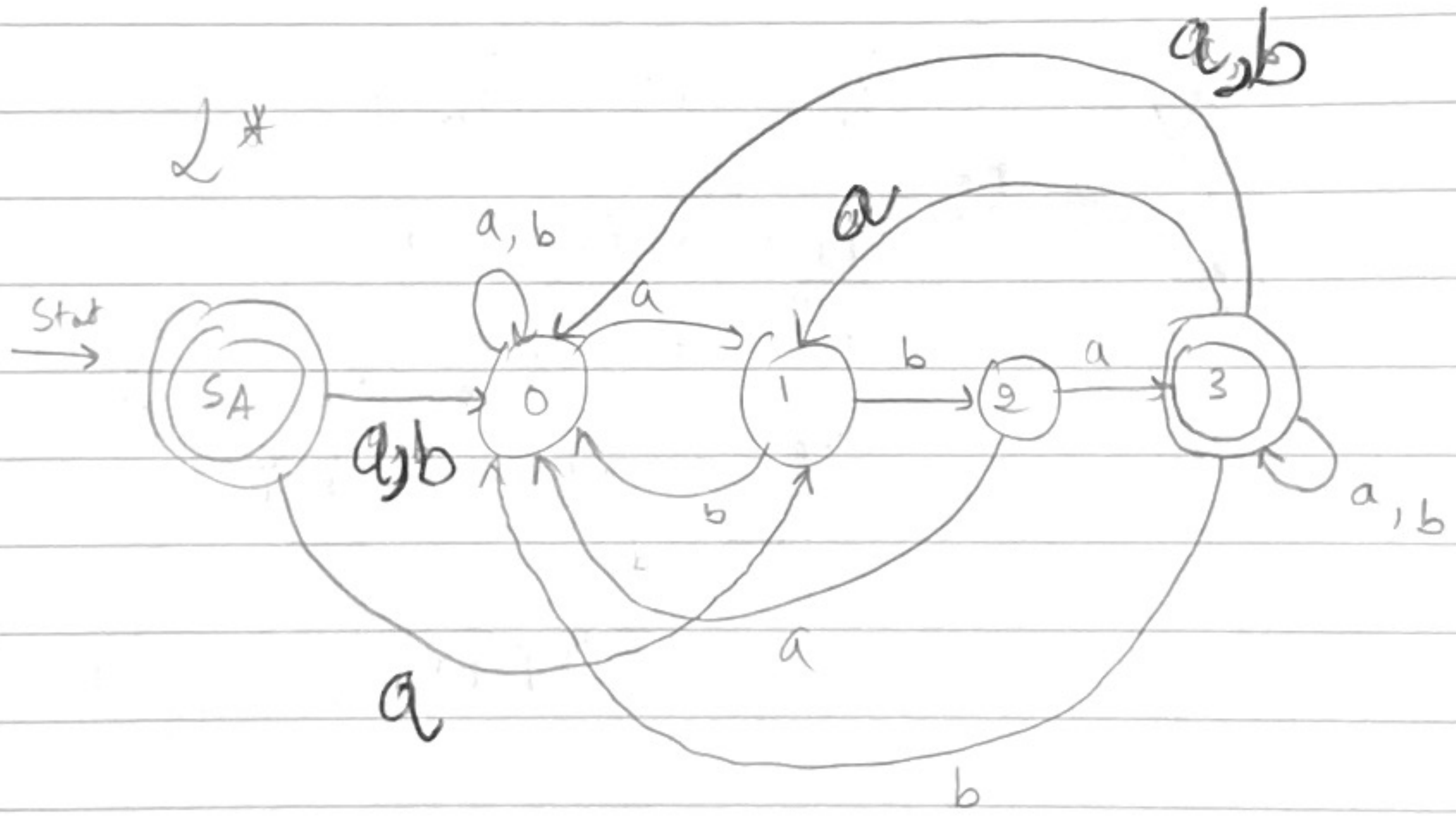
D'où $Y_0 = (aa^*bb + b)^* \; aa^*ba \, (a + ba + bbb^*a)^*$

c)

$L \cdot L$



L^*



- Pour $L \cdot L$ les transitions de l'état de départ jusqu'à l'état S_0 de la deuxième machine ne sont pas nécessaires ici car l'automate ne reconnaît pas la chaîne vide !!

FIN.