POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 2 : LOGIQUE DES PRÉDICATS

Directives pour la remise:

- La remise est individuelle et se fait à la fin de la séance de TD.
- Répondez directement sur ce document Word (docx).
- Lorsque vous avez terminé, générez un PDF avec le nom sous le format: ***SectionDeTD-Matricule.pdf*** (exemple: *04-1234567.pdf*).
- Téléchargez votre fichier PDF dans la boîte de remise située dans la Zone TDs de la page Moodle du cours.
- Choisissez la boîte de remise qui correspond à votre section de TD.
- Aucun retard et aucune remise par courriel ne seront accepté.
- Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.

La remise est individuelle mais le travail en équipe est encouragé. Veuillez inscrire votre nom, prénom et matricule ainsi que les noms des collègues avec lesquels vous avez collaboré pour le TD.

Nom:

Prénom:

Matricule:

Collègues:

Exercice 1

Traduisez ces spécifications de système en français, où la fonction propositionnelle S(x, y) est « x est dans l'état y » et où le domaine pour x et y se compose de tous les systèmes et de tous les états possibles, respectivement.

a) $\exists x S(x, fonctionne)$
Réponse:
Un système fonctionne.

b) $\forall x (S(x, fonctionne) \vee S(x, diagnostique))$
Réponse:

Chaque système est soit fonctionnel, soit dans un état diagnostique.

c) $\exists x S(x, fonctionne) \vee \exists x S(x, diagnostique)$
Réponse:

Un système fonctionne ou un système est dans un état diagnostique.

d) $\exists x \neg S(x, disponible)$
Réponse:

Certains systèmes ne sont pas disponibles.

e) $\forall x \neg S(x, fonctionne)$
Réponse:

Aucun système ne fonctionne. (Nous pourrions également dire « Tous les systèmes ne fonctionnent pas », tant que nous comprenons que cela est différent de « Ce ne sont pas tous les systèmes qui fonctionne. »)

Exercice 2

Exprimer la négation de chacun de ces énoncés en termes de quantificateurs sans utiliser le symbole de la négation.

a) $\forall x(-2 < x < 3)$
Réponse:

$\exists x((x \leq -2) \vee (x \geq 3))$

b) $\forall x(0 \leq x < 5)$
Réponse:

$\exists x((x < 0) \vee (x \geq 5))$

c) $\exists x(-4 \leq x \leq 1)$
Réponse:

$\forall x((x < -4) \vee (x > 1))$

d) $\exists x(-5 < x < -1)$
Réponse:

$\forall x((x \leq -5) \vee (x \geq -1))$

Exercice 3

Soit E(x) la fonction propositionnelle « x est un étudiant », P(x) la fonction propositionnelle « x est un membre du corps professoral » et Q(x, y) la fonction propositionnelle « x a posé une question à y » où le domaine se compose de toutes personnes associées à votre école. Utilisez un quantificateur pour exprimer chacun de ces énoncés.

a) Louise a posé une question au professeur Robert.
Réponse:

$Q(Louise, professeur\ Robert)$

b) Chaque étudiant a posé une question au professeur Michel.
Réponse:

$\forall x(E(x) \rightarrow Q(x, professeur\ Michel))$

c) Chaque membre du corps professoral a posé une question au professeur Michel ou s'est vu poser une question par le professeur Robert.
Réponse:

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x, professeur\ Michel) \vee Q(professeur\ Robert, x))$

d) Il y a un membre du corps professoral qui a interrogé aucun étudiant.
Réponse:

$\exists x(P(x) \wedge \forall y(E(y) \rightarrow \neg Q(x, y))$

f) Au moins un étudiant a posé une question à chaque membre du corps professoral.
Réponse:

$\exists x \forall y(P(y) \to (E(x) \land Q(x, y)))$

h) Tous les étudiants ont été interrogés par au moins un membre du corps professoral.
Réponse:

$\forall x(E(x) \to \exists y(P(y) \land Q(y, x)))$

Exercice 4

Soit les fonctions propositionnelles P(x) « x a un portable » et B(x) « x est Benoît » où le domaine pour x se compose de tous les étudiants de la classe.

Pour exprimer le fait que « tous les étudiants de la classe sauf Benoît a un portable » non pouvons écrire:
A: $\forall x((\neg B(x) \wedge P(x)) \vee (B(x) \wedge \neg P(x)))$
(Lire: Je ne suis pas Benoît ET j'ai un portable, OU, je suis Benoît ET je n'ai pas de portable.)

La négation de l'expression A peut s'écrire:
B: $\exists x((B(x) \wedge P(x)) \vee (\neg B(x) \wedge \neg P(x)))$

a) Démontrez que $\neg A \equiv B$ (indice: utilisez entre autres la distributivité)

Réponse:

$\neg A \equiv \neg\forall x((\neg B(x) \wedge P(x)) \vee (B(x) \wedge \neg P(x)))$
$\equiv \exists x \neg((\neg B(x) \wedge P(x)) \vee (B(x) \wedge \neg P(x)))$ par loi de De Morgan
$\equiv \exists x(\neg(\neg B(x) \wedge P(x)) \wedge \neg(B(x) \wedge \neg P(x)))$ par loi de De Morgan
$\equiv \exists x((B(x) \vee \neg P(x)) \wedge (\neg B(x) \vee P(x)))$ par loi de De Morgan
$\equiv \exists x((B(x) \wedge \neg B(x)) \vee (B(x) \wedge P(x)) \vee (\neg P(x) \wedge \neg B(x)) \vee (\neg P(x)) \wedge P(x)))$
par lois de distributivité
$\equiv \exists x(F \vee (B(x) \wedge P(x)) \vee (\neg B(x) \wedge \neg P(x)) \vee F)$ par la loi de négation
$\equiv \exists x((B(x) \wedge P(x)) \vee (\neg B(x) \wedge \neg P(x)))$ par la loi d'identité

b) Exprimez en français l'expression B.
Réponse:

Benoît a un portable ou il existe un étudiant autre que Benoît qui n'a pas de portable .

Exercice 5.

Trouvez un contre-exemple, si possible, à ces déclarations quantifiées universellement, où le domaine de toutes les variables se compose de tous les entiers.

a) $\forall x \exists y (x = 1/y)$
Réponse:

Il existe de nombreux contre-exemples. Si x = 2, alors il n'y a pas de y parmi les entiers tels que 2 = 1 / y, puisque la seule solution de cette équation est y = 1/2. Même si nous travaillions dans le domaine des nombres réels, x = 0 fournirait un contre-exemple, puisque 0 = 1 / y pour aucun nombre réel y.

b) $\forall x \exists y (y^2 - x < 100)$
Réponse:

Nous pouvons réécrire $y^2 - x < 100$ comme $y^2 < 100 + x$. Puisque les carrés ne peuvent jamais être négatifs, un tel y n'existe pas si x est, disons, -200. Ce x fournit un contre-exemple.

b) $\forall x \forall y (x^2 \neq y^3)$
Réponse:

Ce n'est pas vrai, puisque les sixièmes puissances sont à la fois des carrés et des cubes. Les contre-exemples triviaux incluraient x = y = 0 et x = y = 1, mais on peut aussi prendre quelque chose comme x = 27 et y = 9, puisque $3^6 = 27^2 = 9^3$

Exercice 6.

Donnez un contre-exemple afin de démontrer que $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ et $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ ne sont pas logiquement équivalents.

Si P est le prédicat « être un éléphant » et Q le prédicat d' « être rose », alors la première expression nous dit que certains x sont des éléphants et que certains possiblement autres x sont roses tandis que la deuxième expression nous dit plus précisément qu'il y a des éléphants roses. Un univers qui contient des éléphants et des objets roses mais pas d'éléphant rose serait ainsi un contre-exemple.

Exercice supplémentaire intéressant

Démontrez l'équivalence:

$\exists x P(x) \wedge \exists y Q(y) \equiv \exists x \exists y (P(x) \wedge Q(y))$