POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 8 : INDUCTION ET RÉCURSIVITÉ

A2022

Directives pour la remise :

- Répondez directement sur ce document papier.
- La remise est individuelle, mais le travail en équipe est encouragé.
- La remise se fait à la fin de la séance de TD.
- **Aucun retard ne sera accepté.**
- **Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.**

Identification

Veuillez inscrire votre section, nom, prénom et matricule ainsi que les noms des collègues avec lesquels vous avez collaboré pour le TD

Section :

Nom :

Prénom :

Matricule :

Collègues :

Exercice 1 :
Supposons que P(n) soit une fonction propositionnelle. Déterminez pour quels entiers $n \in \mathbb{N}$ la proposition P(n) doit être vraie si:

a) P(0) est vraie. Pour tous les entiers $n \in \mathbb{N}$, si P(n) est vraie, alors P(n+2) est vraie.

Réponse:

Ces conditions nous disent que P(n) est vraie pour les valeurs paires de n, à savoir 0, 2, 4, 6, 8, ... De plus, il n'y a aucun moyen d'être sûr que P(n) est vraie pour les autres valeurs de n.

b) P(0) est vraie. Pour tous les entiers $n \in \mathbb{N}$, si P(n) est vraie, alors P(n+3) est vraie.

Réponse:

Ces conditions nous disent que P(n) est vraie pour les valeurs de n qui sont des multiples de 3, à savoir 0, 3, 6, 9, 12, ... De plus, il n'y a pas manière d'être sûr que P(n) est vraie pour les autres valeurs de n.

c) P(0) et P(1) sont vraies. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, si P(n) et P(n+1) sont vraies, alors P(n+2) est vraie.

Réponse:

Ces conditions suffisent à prouver par induction que P(n) est vraie pour tout entier non négatif n.

d) P(0) est vraie. Pour tous les entiers $n \in \mathbb{N}$, si P(n) est vraie, alors P(n+2) et P(n+3) sont vraies.

Réponse:

Nous savons immédiatement que P(0), P(2) et P(3) sont vraies, et il n'y a aucun moyen d'être sûr que P(1) est vraie. Une fois que nous avons P(2) et P(3), le pas inductif $P(n) \rightarrow P(n + 2)$ nous donne la vérité de P(n) pour tout $n \geq 2$.

Exercice 2 :
Prouver par récurrence que $n^3 - n$ est divisible par 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Réponse:

Pour $n = 0$
$n^3 - n = 0-0 = 0$
0 est divisible par 3, donc $n^3 - n$ est divisible par 3.

Soit $n \in N$, supposons que $n^3 - n$ est divisible par 3.
$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1$
$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n - n$
$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 - n + 3(n^2 + n)$
$n^3 - n$ est divisible par 3 par hypothèse, et $3(n^2 + n)$ est divisible par 3 car un de ses facteurs est 3.
Donc $(n+1)^3 - (n+1)$ est divisible par 3.

$n^3 - n$ est divisible par 3 pour $n=0$ et si elle l'est pour n, alors elle l'est pour $n+1$.
Donc par récurrence, $n^3 - n$ est divisible par 3 pour tout $n \in N$.

Exercice 3 :

Prouver par induction que pour tout n ∈ ℕ, la propriété P(n) suivante est vraie :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{(n+1)} - 1$$

Réponse:

Pour n = 0 :

$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^0 = 1$

Et $2^{(n+1)} - 1 = 2^1 - 1 = 1$

Donc P(0) est vraie.

Supposons que pour un n quelconque, P(n) est vraie, et montrons que P(n+1) est vraie.

Autrement dit, on suppose $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{(n+1)} - 1$

Et on va montrer que $\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{(n+2)} - 1$

On a $\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = (\sum_{k=0}^{n} 2^k) + 2^{n+1}$

Or, par hypothèse d'induction : $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{(n+1)} - 1$

Donc on a $\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{(n+1)} - 1 + 2^{n+1}$

$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2.2^{(n+1)} - 1$

$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{(n+1)+1} - 1$

$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{(n+2)} - 1$

On vient de prouver que P(n) -> P(n+1)

Par induction, puisque P(0) et P(n) -> P(n+1), P(n) est vrai pour tout n.

Exercice 4 :

On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_1 = -1 \\ \forall n \in N. U_{n+2} = 5U_{n+1} - 6U_n \end{cases}$$

À l'aide du 1c), démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = 3^n - 2^{n+1}$.

Réponse:

On note P(n) la propriété « $U_n = 3^n - 2^{n+1}$ » .

Pour n = 0 :

$U_0 = 3^0 - 2^{0+1} = 1 - 2 = -1$ P(0) est vraie

Pour n = 1 :

$U_1 = 3^1 - 2^{1+1} = 3 - 4 = -1$ P(1) est vraie

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que P(n) et P(n+1) est vraie.

Montrons que P(n+2) est vrai.

$U_{n+2} = 5U_{n+1} - 6U_n$

Or P(n) et P(n+1) sont vraies. Donc on peut Réécrire U_{n+2} :

$U_{n+2} = 5(3^{n+1} - 2^{n+2}) - 6\ (3^n - 2^{n+1})$

$U_{n+2} = 5.3^{n+1} - 5.2^{n+2} - 6.3^n - 6.(-2^{n+1})$

$U_{n+2} = 5.3.3^n - 5.2.2^{n+1} - 6.3^n - 6.(-2^{n+1})$

$U_{n+2} = 3^n\ (5.3 - 6) - .2^{n+1}\ (5.2 - 6)$

$U_{n+2} = 3^n\ (15 - 6) - .2^{n+1}\ (10 - 6)$

$U_{n+2} = 3^n\ (9) - .2^{n+1}\ (4)$

$U_{n+2} = 3^n\ (3^2) - .2^{n+1}\ (2^2)$

$U_{n+2} = 3^{n+2} - .2^{(n+2)+1}$

Donc P(n) $\wedge P(n+1) \rightarrow$ P(n+2)

Par induction, puisque P(0) et P(1) sont vraies, et que P(n) $\wedge P(n+1) \rightarrow$ P(n+2), P(n) est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 :

On définit une fonction f sur l'ensemble des entiers naturels non nuls comme suit :

- $f(1) = 1$
- $f(n) = 2n – 1 + f(n-1)$ pour $n > 1$

a) Établissez une conjecture pour une formule explicite pour f(n), en l'exprimant uniquement en fonction de n.

Réponse :

$f(1) = 1$

$f(2) = 2.2 – 1 + f(1) = 4-1+1 = 4$

$f(3) = 2.3 – 1 + f(2) = 6-1+4 = 9$

$f(4) = 2.4 – 1 + f(3) = 8-1+9 = 16$

$f(5) = 2.5 – 1 + f(4) = 10-1+16 = 25$

Les résultats précédents nous permettent de conjecturer que $f(n) = n^2$.

b) Prouvez la conjecture par induction.

Réponse :

On procède par récurrence forte.

Pour $n = 1$:

$f(1) = 1$

$f(1) = 1^2 = 1$

La formule est vérifiée pour $n = 1$.

Supposons jusqu'au rang $n \geq 1$ que $f(n) = n^2$ et montrons que $f(n+1) = (n+1)^2$.

Par définition, $f(n) = 2n – 1 + f(n-1)$

$f(n+1) = 2(n+1) – 1 + f(n+1-1)$,

$f(n+1) = 2n+1 + f(n)$

$f(n+1) = 2n+1 + n^2$

$f(n+1) = (n+1)^2$

On a $f(1) = 1^2$

De plus, (Soit $n \in \mathbb{N}$, $\forall$ k tel que $1 \leq k \leq n$, $f(k) = k^2$) implique $f(n+1) = (n+1)^2$

D'où pour tout $n \geq 1$, $f(n) = n^2$

Exercice 6 :

Proposez un algorithme récursif de calcul de la puissance n-ième ($n \in \mathbb{N}$) d'un nombre réel positif non nul a en supposant que les seules opérations de base dont vous disposez sont :

- le produit de deux réels a et b : a x b
- le retrait de 1 à un entier a : a -1
- la comparaison à 0 d'un entier a : a = 0

Réponse :

Exemple de pseudo-code d'algorithme.

```
Puissance (a : réel positif non nul, n : entier)
        Si n=0, alors retourner 1
        Sinon retourner (a x Puissance(a, n-1));
```