POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 5 : RELATIONS

E2023

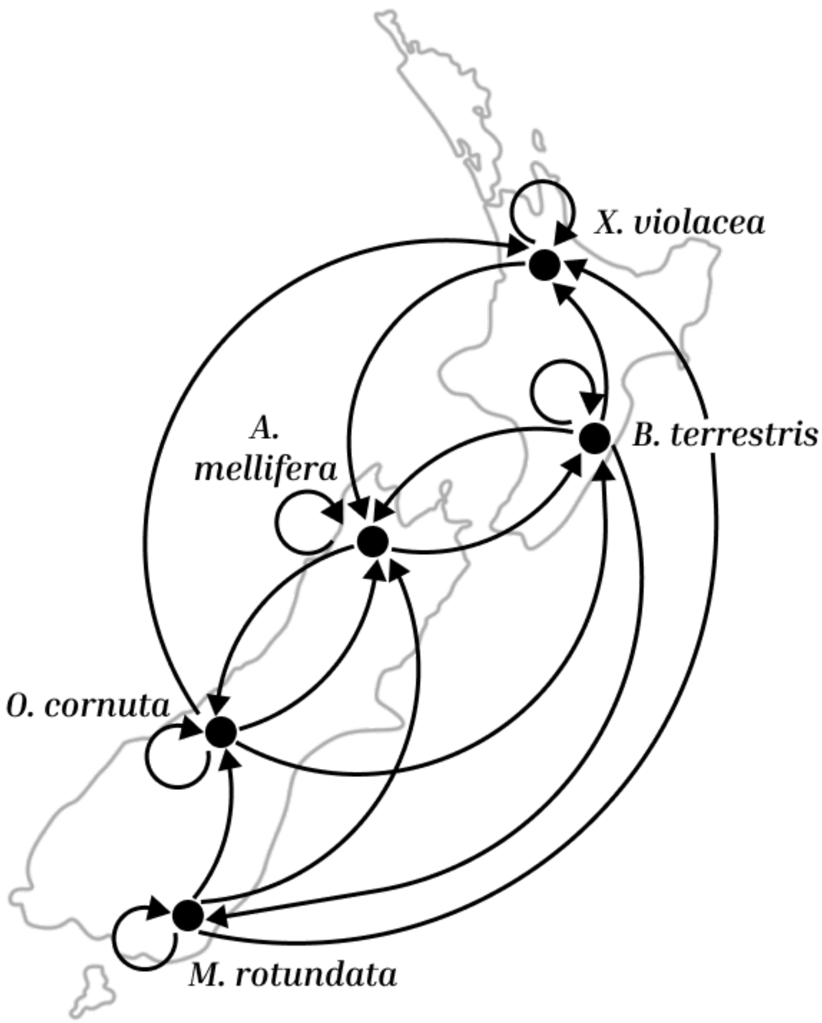
SOLUTIONNAIRE

Exercice 1

En Nouvelle-Zélande, on trouve une grande diversité d'espèces d'abeilles qui jouent un rôle essentiel dans la pollinisation des plantes indigènes et des cultures agricoles. Parmi les espèces d'abeilles présentes dans le pays, nous pouvons citer :

- $A.mellifera$ (Abeille domestique)
- $B.terrestris$ (Bourdon terrestre)
- $X.violacea$ (Xylocope violet)
- $O.cornuta$ (Osmie cornue)
- $M.rotundata$ (Abeille découpeuse)

La compréhension de leurs relations de pollinisation est essentielle pour préserver leur rôle crucial dans l'équilibre écologique de la Nouvelle-Zélande. En prenant en compte l'ensemble d'espèces d'abeilles $\boldsymbol{E} = \{A.mellifera,\ B.terrestris,\ X.violacea,\ O.cornuta,\ M.rotundata\}$ et la relation $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ définie sur $\boldsymbol{E}$ par la présence d'une relation de pollinisation entre les espèces d'abeilles basée sur les fleurs qu'elles pollinisent. Par exemple, $\boldsymbol{a\ \mathcal{F}\ b}$ signifie que $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ pollinisent un même type de fleur.



$\boldsymbol{Fig.\,1.}$ Graphe des relations de pollinisation entre les espèces d'abeilles en Nouvelle-Zélande basé sur les fleurs qu'elles pollinisent.

Déterminez si la relation $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ représentée par le graphe ($\boldsymbol{Fig.1}$.) est (I.) réflexive, (II.) symétrique, (III.) antisymétrique, (IV.) transitive. Justifiez vos réponses pour chacune des propriétés.

Solution :

(I.) **Réflexivité** : La relation illustrée est réflexive puisque ∀ **x ∈ *E*, (x, x) ∈ $\mathcal{F}$** ou encore ∀ **x ∈ *E*, x $\mathcal{F}$ x**.

(II.) **Symétrie** : La relation n'est pas symétrique, puisque par exemple, l'arête $(M.rotundata, O.cornuta)$ est présente, mais pas l'arête $(O.cornuta, M.rotundata)$.
C'est à dire, **$[(\boldsymbol{M.rotundata, O.cornuta}) \in \mathcal{F}] \land [(\boldsymbol{O.cornuta, M.rotundata}) \notin \mathcal{F}]$**.
Formellement **∃ x, y ∈ *E*, [(x, y) ∈ $\mathcal{F}$] ∧ [(y, x) ∉ $\mathcal{F}$]**.

(III.) **Antisymétrie** : Elle n'est pas antisymétrique, puisque les deux arêtes $(A.mellifera, O.cornuta)$ et $(O.cornuta, A.mellifera)$ sont présentes et $\boldsymbol{A.mellifera \neq O.cornuta}$.
Formellement **∃ x, y ∈ *E*, [(x, y) ∈ $\mathcal{F}$] ∧ [(y, x) ∈ $\mathcal{F}$] ∧ [x ≠ y]**.

(IV.) **Transitivé** : Elle n'est pas transitive, puisque les deux arêtes $(X.violacea, A.mellifera)$ et $(A.mellifera, O.cornuta)$ sont présentes, mais l'arête $(X.violacea, O.cornuta)$ n'est pas présente.
Formellement **∃ x, y, z ∈ *E*, [(x, y) ∈ $\mathcal{F}$] ∧ [(y, z) ∈ $\mathcal{F}$] ∧ [(x, z) ∉ $\mathcal{F}$]**.

En somme, la relation $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ est réflexive, mais elle n'est ni symétrique, ni antisymétrique, ni transitive.

Exercice 2

Soit $\boldsymbol{C}$ un ensemble de chaînes de bits et $\boldsymbol{T}$ une relation définie sur $\boldsymbol{C}$.
La relation $\boldsymbol{T}$ est telle que pour deux chaînes de bits α et β, $(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{T}$ si et seulement si $\alpha = \beta$ ou α et β ont au moins trois bits en commun dans leurs trois premiers bits.

Quelles sont les classes d'équivalence de $\boldsymbol{T}$? Justifiez vos réponses.

Solution :

Pour les chaînes de bits de longueur strictement inférieure à trois, il est trivial qu'elle soit équivalente à elle-même. Cela signifie que chaque chaîne individuelle est une classe d'équivalence distincte. Ainsi, les classes d'équivalence correspondantes pour les chaînes de bits de longueur strictement inférieure à trois sont les suivantes :

- **Classe 1** : { λ } où λ est la chaîne vide
- **Classe 2** : { 0 }
- **Classe 3** : { 1 }
- **Classe 4** : { 00 }

- **Classe 5** : { 01 }
- **Classe 6** : { 10 }
- **Classe 7** : { 11 }

De même, pour les chaînes de bits de longueur trois ou plus, elles sont équivalentes à l'une des huit chaînes de bits suivantes : 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 et 111. Voici un exemple pour illustrer la relation $\boldsymbol{T}$:

Prenons les chaînes de bits $u = 0110010$ et $v = 0110101$. Ces deux chaînes ont la séquence '011' en commun dans leurs trois premiers bits. Donc, u et v appartiennent à la même classe d'équivalence des chaînes ayant la séquence '011' en commun dans leurs trois premiers bits.

Ainsi, nous pouvons définir les classes d'équivalence pour les chaînes de bits de longueur trois ou plus comme suit :

- **Classe 8** : { 000, 0000, 0001, 00000, 00001, 00010, 00011, … }
- **Classe 9** : { 001, 0010, 0011, 00100, 00101, 00110, 00111, … }
- **Classe 10 :** {010, 0100, 0101, 01000, 01001, 01010, 01011, ...}
- **Classe 11** : {011, 0110, 0111, 01100, 01101, 01110, 01111, ...}
- **Classe 12** : {011, 0110, 0111, 01100, 01101, 01110, 01111, ...}
- **Classe 13** : { 100, 1000, 1001, 10000, 10001, 10010, 10011, … }
- **Classe 14** : { 110, 1100, 1001, 11000, 11001, 11010, 11011, … }
- **Classe 15** : { 111, 1110, 1111, 11100, 11101, 11110, 11111, … }

Exercice 3

On considère dans l'ensemble des entiers plus grands que 1, la relation $\mathcal{L}$ définie par :

$$s \,\mathcal{L}\, t \leftrightarrow s^t \leq t^s$$

La relation est-elle transitive? Justifiez votre réponse.

Solution :

Soit s, t et u trois entiers plus grands que 1 tel que $s\,\mathcal{L}\,t$ et $t\,\mathcal{L}\,u$.

$s\,\mathcal{L}\,t$ et $t\,\mathcal{L}\,u$, alors $s^t \leq t^s$ et $t^u \leq u^t$
$s\,\mathcal{L}\,t$ et $t\,\mathcal{L}\,u$, alors $t\log(s) \leq s\log(t)$ et $u\log(t) \leq t\log(u)$
$s\,\mathcal{L}\,t$ et $t\,\mathcal{L}\,u$, alors $t \cdot u\log(s) \leq s \cdot u\log(t)$ et $s \cdot u\log(t) \leq s \cdot t\log(u)$
$s\,\mathcal{L}\,t$ et $t\,\mathcal{L}\,u$, alors $t \cdot u\log(s) \leq s \cdot u\log(t) \leq s \cdot t\log(u)$
$s\,\mathcal{L}\,t$ et $t\,\mathcal{L}\,u$, alors $t \cdot u\log(s) \leq s \cdot t\log(u)$
$s\,\mathcal{L}\,t$ et $t\,\mathcal{L}\,u$, alors $u\log(s) \leq s\log(u)$, car t est non nul et positif
$s\,\mathcal{L}\,t$ et $t\,\mathcal{L}\,u$, alors $s^u \leq u^s$
$s\,\mathcal{L}\,t$ et $t\,\mathcal{L}\,u$, alors $s\,\mathcal{L}\,u$

On conclut que $\mathcal{L}$ est transitive.

Exercice 4 (Facultatif)

Soit $\mathcal{M}$ un ensemble et $\mathcal{N}$ une partie de $\mathcal{M}$. On définit une relation $\mathcal{I}$ sur $P(\mathcal{M})$ par :

$$X\,\mathcal{I}\,Y \leftrightarrow X \cap \mathcal{N} = Y \cap \mathcal{N}$$

Montrez que $\mathcal{I}$ est une relation d'équivalence sur $P(\mathcal{M})$.

Solution :

Pour montrer que $\mathcal{I}$ est une relation d'équivalence, on va montrer qu'elle est (I.) réflexive, (II.) symétrique et (III.) transitive.

(I.) Réflexivité :

Soit $X \in P(\mathcal{M})$.
On a $X \cap \mathcal{N} = X \cap \mathcal{N}$.
Donc $X\,\mathcal{I}\,X$.
La relation $\mathcal{I}$ est donc réflexive.

(II.) Symétrie :

Soit $X, Y \in P(\mathcal{M})$ tel que $X\,\mathcal{I}\,Y$.
Donc $X\,\mathcal{I}\,Y$ $\leftrightarrow X \cap \mathcal{N} = Y \cap \mathcal{N}$
$\leftrightarrow Y \cap \mathcal{N} = X \cap \mathcal{N}$
$\leftrightarrow Y\,\mathcal{I}\,X$
On a donc $X\,\mathcal{I}\,Y \rightarrow Y\,\mathcal{I}\,X$.
La relation $\mathcal{I}$ est donc symétrique.

(III.) Transitivité :

Soit **X, Y, Z** $\in \boldsymbol{P}(\mathcal{M})$ tel que $\boldsymbol{X \,\mathcal{J}\, Y}$ et $\boldsymbol{Y \,\mathcal{J}\, Z}$.

Donc $\boldsymbol{X \,\mathcal{J}\, Y} \leftrightarrow \boldsymbol{X \cap \mathcal{N} = Y \cap \mathcal{N}}$.

Et $\boldsymbol{Y \,\mathcal{J}\, Z} \leftrightarrow \boldsymbol{Y \cap \mathcal{N} = Z \cap \mathcal{N}}$.

Donc, $(\boldsymbol{X \,\mathcal{J}\, Y}$ et $\boldsymbol{Y \,\mathcal{J}\, Z})$ $\rightarrow \boldsymbol{X \cap \mathcal{N} = Y \cap \mathcal{N} = Z \cap \mathcal{N}}$

$\rightarrow \boldsymbol{X \cap \mathcal{N} = Z \cap \mathcal{N}}$

$\leftrightarrow \boldsymbol{X \,R\, Z}$

On a donc $(\boldsymbol{X \,\mathcal{J}\, Y}$ et $\boldsymbol{Y \,\mathcal{J}\, Z}) \rightarrow \boldsymbol{X \,\mathcal{J}\, Z}$.

La relation $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ est donc transitive.

Ainsi, $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ est une relation d'équivalence sur $\boldsymbol{P}(\mathcal{M})$, car elle est réflexive, symétrique et transitive.
CQFD

Exercice 5 (Facultatif)

On définit une relation Å sur $\mathbb{R}$ par :

$$(x, y) \in \text{Å si et seulement si } |x| \leq |y|$$

Å est-elle une relation d'ordre partiel ? Justifiez votre réponse.

Solution :

Pour vérifier si Å est une relation d'ordre partiel, on va vérifier si elle est (I.) réflexive, (II.) transitive et (III.) antisymétrique.

(I.) Réflexivité :

Soit x $\in \mathbb{R}$.

On a $|x| \leq |x|$.

Donc $(x, x) \in$ Å.

La relation Å est donc réflexive.

(II.) Transitivité :

Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y) \in$ Å et $(y, z) \in$ Å.

On a $|x| \leq |y|$ et $|y| \leq |z|$.

Donc, $|x| \leq |y| \leq |z|$.

On déduit, $|x| \leq |z|$.

Ainsi, $(x, z) \in$ Å.

La relation Å est donc transitive.

(III.) Antisymétrie

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y) \in Å$ et $(y, x) \in Å$.
On a $|x| \leq |y|$ et $|y| \leq |x|$.
On obtient, $|x| = |y|$
On déduit, x = y ou x = -y.
Donc, on n'a pas toujours x = y.
La relation Å n'est donc pas antisymétrique.

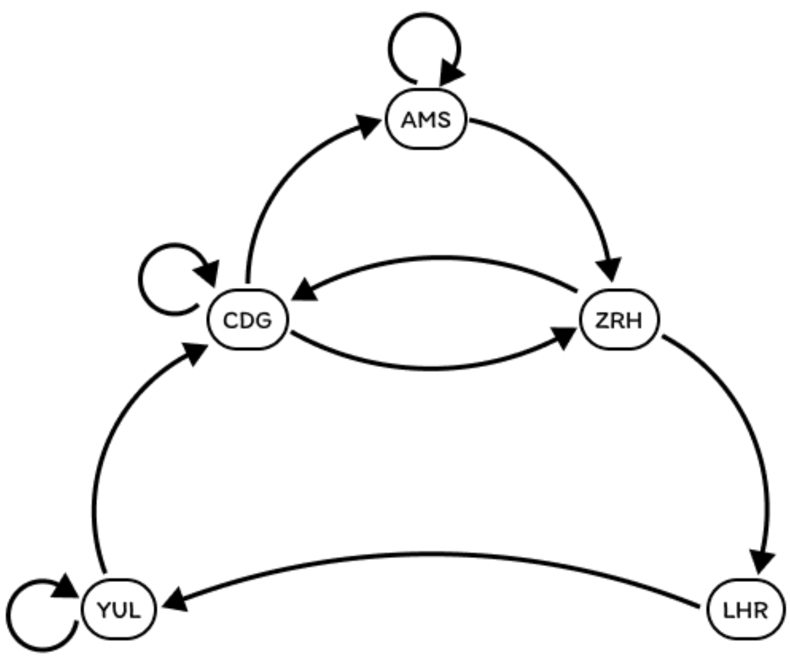
En somme, Å n'étant pas antisymétrique, elle ne peut être une relation d'ordre partiel.

Exercice 6 (Facultatif)

Soit les codes IATA des aéroports internationaux suivants :

- YUL (Pierre-Elliot Trudeau de Montréal, Canada)
- ZRH (Zurich, Suisse)
- CDG (Paris-Charles de Gaulle, France)
- LHR (London Heathrow, Royaume-Uni)
- AMS (Amsterdam, Pays-Bas)

En considérant l'ensemble d'aéroports $\boldsymbol{A}$ = {YUL, ZRH, CDG, LHR, AMS} et la relation $\boldsymbol{V}$ définie sur $\boldsymbol{A}$ par la disponibilité d'une liaison directe entre les aéroports, incluant une liaison directe entre un aéroport et lui-même pour les vols de test des équipages de cabine.



$\boldsymbol{Fig.2.}$ Graphe des liaisons directes entre les codes IATA des aéroports internationaux.

Quelle est la fermeture transitive $\boldsymbol{S}$ de la relation $\boldsymbol{V}$ représentée dans $\boldsymbol{Fig.2.}$?

Solution :

$\boldsymbol{V}$ = {(YUL, YUL), (YUL, CDG),
(ZRH, CDG), (ZRH, LHR),
(CDG, ZRH), (CDG, CDG), (CDG, AMS),
(LHR, YUL),
(AMS, ZRH), (AMS, AMS)}

Soit $\boldsymbol{S}$ la fermeture transitive de $\boldsymbol{V}$.
$\boldsymbol{S}$ = {(YUL, YUL), (YUL, ZRH), (YUL, CDG), (YUL, LHR), (YUL, AMS),
(ZRH, YUL), (ZRH, ZRH), (ZRH, CDG), (ZRH, LHR), (ZRH, AMS),
(CDG, YUL), (CDG, ZRH), (CDG, CDG), (CDG, LHR), (CDG, AMS),
(LHR, YUL), (LHR, ZRH), (LHR, CDG), (LHR, LHR), (LHR, AMS),
(AMS, YUL), (AMS, ZRH), (AMS, CDG), (AMS, LHR), (AMS, AMS)}

Alternativement en calculant la fermeture transitive $\boldsymbol{S}$ via les matrices de puissance de relation,
Soit M la matrice de $\boldsymbol{V}$. On a donc :

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} YUL & ZRH & CDG & LHR & AMS \end{array} \\ \begin{array}{c} YUL \\ ZRH \\ CDG \\ LHR \\ AMS \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$M^{[2]} = M \odot M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^{[3]} = M^{[2]} \odot M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^{[4]} = M^{[3]} \odot M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^{[5]} = M^{[4]} \odot M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = M^{[4]}$$

La matrice de la fermeture transitive est $\boldsymbol{S} = M \vee M^{[2]} \vee M^{[3]} \vee M^{[4]} \vee M^{[5]}$

$$\boldsymbol{S} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} YUL & ZRH & CDG & LHR & AMS \end{array} \\ \begin{array}{c} YUL \\ ZRH \\ CDG \\ LHR \\ AMS \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ainsi, $\boldsymbol{S}$ = {(YUL, YUL), (YUL, ZRH), (YUL, CDG), (YUL, LHR), (YUL, AMS),
(ZRH, YUL), (ZRH, ZRH), (ZRH, CDG), (ZRH, LHR), (ZRH, AMS),
(CDG, YUL), (CDG, ZRH), (CDG, CDG), (CDG, LHR), (CDG, AMS),
(LHR, YUL), (LHR, ZRH), (LHR, CDG), (LHR, LHR), (LHR, AMS),
(AMS, YUL), (AMS, ZRH), (AMS, CDG), (AMS, LHR), (AMS, AMS)}