POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 2 : LOGIQUE DES PRÉDICATS

H2025

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 :

Dans un manoir isolé, un meurtre mystérieux a été commis. La police, en quête de résoudre cette énigme, utilise un logiciel avancé basé sur la logique des prédicats. Votre mission est de collaborer avec les enquêteurs en traduisant des informations importantes en langage logique formel et en validant les affirmations déjà enregistrées. Le logiciel utilise l'univers des entités (objets, personnes, etc.). Vous avez à votre disposition les fonctions propositionnelles suivantes :

- Invité(x) : x est une personne invitée au manoir.
- Manoir(x) : x est une personne présente au manoir au moment du crime.
- Cuisine(x) : x se trouve dans la cuisine du manoir.
- Objet(x) : x est un objet.
- Alibi(x) : x est une personne avec est alibi.
- FauxAlibi(x) : x est une personne avec un faux alibi.
- Coupable(x) : x est une personne coupable.
- Suspect(x) : x est une personne suspecte.
- Innocent(x) : x est une personne innocente.

De plus, considérez la variable A qui représente l'arme du crime

Partie A : Traduction du langage naturel en logique des prédicats.

Les enquêteurs vous fournissent plusieurs déclarations en français décrivant des observations, des relations entre les suspects et des indices retrouvés dans le manoir. Traduisez chacune de ces phrases en logique des prédicats.

1. Tous les invités étaient présents dans le manoir au moment du crime.

   Réponse : $\forall x \, , Invité(x) \rightarrow \; Manoir(x)$

2. L'arme du crime est un objet trouvé dans la cuisine.

   Réponse : $Objet(A) \; \wedge \; Cuisine \; (A)$

3. Le coupable n'a pas d'Alibi.

   Réponses possibles :
   - $\exists x, Coupable(x) \; \wedge \; \neg \, Alibi(x)$
   - $\forall x \; \text{Coupable} \rightarrow \neg \, Alibi(x)$

4. Il existe exactement une seule personne coupable.

   Réponses possibles :
   - $\exists x\big(Coupable(x) \wedge \forall y(Coupable(y) \rightarrow y = x)\big)$
   - $\exists! \, x \; Coupable(x)$

Partie B : Traduction de la logique des prédicats en langage naturel.

Le logiciel contient déjà plusieurs expressions en logique des prédicats que vous devez interpréter. Traduisez chacune de ces expressions en langage courant en français.

1. $\exists x, \neg Suspect(x)$

   Réponses possibles :
   - Il existe une personne qui n'est pas suspecte.
   - Il y a une personne qui n'est pas suspecte.

2. $\forall x, Innocent(x) \rightarrow Alibi(x)$

   Réponses possibles :
   - Tous les innocents ont un alibi.
   - Toutes les personnes innocentes ont un alibi.
   - Toute personne innocente a un alibi.

3. $\forall x\big(Suspect(x) \rightarrow Alibi(x)\big) \land \exists y\big(Suspect(y) \land FauxAlibi(y)\big)$

   Réponses possibles :
   - Tous les suspects ont un alibi mais certains suspects ont de faux alibis.
   - Tous les suspects ont un alibi mais certains de ces alibis sont faux.

Exercice 2

Considérons les deux fonctions propositionnelles suivantes et l'univers des supporteurs de soccer :

- B(x) : x supporte le FC Barcelone.
- R(x) : x supporte le Real de Madrid.

De plus, considérons les deux propositions suivantes :

- A : $\forall x \left(\left(\neg B(x) \land R(x) \right) \lor \left(B(x) \land \neg R(x) \right) \right)$
- B : $\exists x \left(\left(B(x) \land R(x) \right) \lor \left(\neg B(x) \land \neg R(x) \right) \right)$

1. Traduisez la proposition A en langage courant en français :

   Réponse :

   Tous les supporters soutiennent exclusivement une seule des équipes entre le FC Barcelone et le Réal de Madrid.

2. Traduisez la proposition B en langage courant en français :

   Réponse :

   Il existe un supporter qui soutient à la fois le FC Barcelone et le Réal de Madrid ou un supporter qui ne supporte aucune des deux équipes.

3. Montrez que la proposition B est la négation de la proposition A. Justifiez chacune des étapes de votre raisonnement.

Réponse :

$$
\begin{aligned}
\neg A &\equiv \neg\Big(\forall x \left(\left(\neg B(x) \land R(x)\right) \lor \left(B(x) \land \neg R(x)\right)\right)\Big) \\
&\equiv \exists\, x\, \neg\left(\left(\neg B(x) \land R(x)\right) \lor \left(B(x) \land \neg R(x)\right)\right) && \text{Loi de De Morgan} \\
&\equiv \exists\, x\, \left(\neg\left(\neg B(x) \land R(x)\right) \land \neg \left(B(x) \land \neg R(x)\right)\right) && \text{Loi de De Morgan} \\
&\equiv \exists\, x\, \left(\left(\neg\neg B(x) \lor \neg R(x)\right) \land \left(\neg B(x) \lor \neg\neg R(x)\right)\right) && \text{Loi de De Morgan} \\
&\equiv \exists\, x\, \left(\left(B(x) \lor \neg R(x)\right) \land \left(\neg B(x) \lor R(x)\right)\right) && \text{Loi de la double négation} \\
&\equiv \exists\, x\, \Big(\left(\left(B(x) \lor \neg R(x)\right) \land \neg B(x)\right) && \text{Distributivité} \\
&\qquad\quad \lor \left(\left(B(x) \lor \neg R(x)\right) \land R(x)\right)\Big) \\
&\equiv \exists\, x\, \Big(\left(B(x) \land \neg B(x)\right) \lor \left(B(x) \land R(x)\right) && \text{Distributivité} \\
&\qquad\quad \lor \left(\neg R(x) \land \neg B(x)\right) \lor \left(\neg R(x) \land R(x)\right)\Big) \\
&\equiv \exists\, x\, \Big(Faux \lor \left(B(x) \land R(x)\right) \lor \left(\neg R(x) \land \neg B(x)\right) && \text{Loi de négation} \\
&\qquad\quad \lor\ Faux\Big) && \text{Loi d'identité} \\
&\equiv \exists\, x\, \left(\left(B(x) \land R(x)\right) \lor \left(\neg R(x) \land \neg B(x)\right)\right)
\end{aligned}
$$

Exercice 3

Déterminez la valeur de vérité de chaque proposition ci-dessous et justifiez votre réponse.

Partie A

Considérez l'ensemble $D = \{2,3,4,5\}$.

1. $\forall x \in D, x^2 \geq x$

   Réponse : Vrai, pour tout $x \in D = \{2,3,4,5\}, x^2 \geq x$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$

   Réponse : Faux, nous avons par exemple $x = \frac{1}{2}$ où $\frac{1}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

3. $\exists x \in D, x^2 = x$

   Réponse : Faux, il n'existe aucuns éléments ensemble de D qui valide la proposition.

4. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = x$

   Réponse : Vrai, nous avons $x = 1$ et $x = 0$ pour lesquelles la proposition est vraie.

5. $\exists x \in \mathbb{Z}, \left((x^2 - x - 6 = 0) \rightarrow (x < 0)\right)$

   Réponse : Vrai

$$\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} - 6 = 0$$
$$(\mathrm{x} + 2)(\mathrm{x} - 3) = 0$$
$$\Rightarrow \mathrm{x} = -2 \text{ ou } \mathrm{x} = 3$$

   Ainsi, $(x = -2) \rightarrow (x < 0)$

Partie B

Soit les fonctions propositionnelles suivantes pour l'univers des nombres entiers naturel :

- A(x) : x est divisible par 2.
- B(x) : x est divisible par 4.
- C(x,y) : $x + y$ est divisible par 4.
- D(x,y) : $x^2 + y^2 = 5^2$.
- E(x) : x est un nombre premier.

1. Déterminez la valeur de vérité de la proposition suivante ainsi que sa réciproque : $\forall \mathrm{x}(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \rightarrow \mathrm{B}(\mathrm{x}))$.

   Réponse :

   Faux pour la proposition car un nombre divisible par 2 n'est pas forcément divisible par 4. Par exemple, 6 est divisible par 2 mais non par 4.

   La réciproque $\forall x(B(x) \rightarrow A(x))$ est vraie. Effectivement, si un nombre est divisible par 4 il est divisible par 2 car 4 (2x2) est divisible par 2.

2. $\forall x(A(x) \rightarrow \neg C(x, x+1))$.

   Réponse : Vrai

   Effectivement, si $A(x)$ est vraie, alors nous pouvons écrire $x = 2k$ pour un certain entier k. Ainsi, nous avons $x + (x + 1) = 4k + 1$. Ainsi, nous remarquons que la somme $x + (x + 1)$ ne pourra jamais être divisible par 4 si x est divisible par 2.

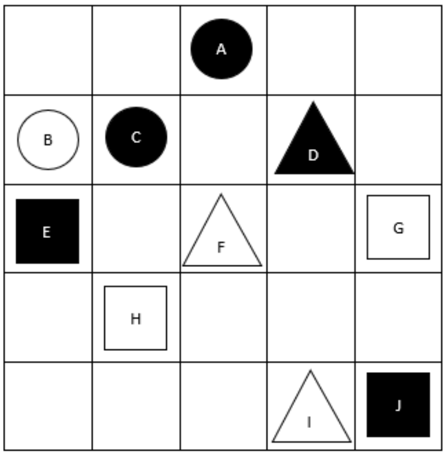
3. $\exists \mathrm{x}, \mathrm{y}(\mathrm{D}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \wedge E(x) \wedge \neg E(y))$.

   Réponse : Vrai

   Effectivement, les seules solutions à l'équation $x^2 + y^2 = 5^2$ sont les couples $(3,4)$ et $(4,3)$. En prenant le premier couple, la proposition est vraie car 3 est premier et 4 n'est pas premier.

Exercice 4 :

Le monde de Tarski est un univers simplifié et abstrait conçu pour illustrer les concepts fondamentaux de la logique des prédicats. Il sert souvent d'outil pédagogique pour explorer la manière dont les relations logiques et les propriétés des objets peuvent être exprimées, analysées et vérifiées. Dans cet univers, nous avons un nombre limité d'objets géométriques simples (comme des carrés, des cercles et des triangles) qui possèdent des propriétés spécifiques (comme leur couleur et leur position relative). Voici une configuration possible :



Répondez aux questions suivantes en justifiant chacune de vos réponses. Lorsque demandé, c'est à vous de définir vos propres fonctions propositionnelles. L'univers est l'ensemble des objets géométriques simples présents dans ce monde de Tarski.

1. Traduisez en français et déterminez la valeur de vérité de l'expression suivante : $\forall t, Triangle(t) \rightarrow Noir(t)$. Les fonctions $Triangle(x)$ et $Noir(x)$ signifient respectivement que x est un triangle et x est de couleur noir.

   Réponse :

   Traduction : Tous les triangles de ce monde de Tarski sont noirs.

   Valeur de vérité : Fausse, nous avons les triangles F et I qui sont blancs.

2. Traduisez en français et déterminez la valeur de vérité de l'expression suivante : $\exists y, Carré(y) \wedge DroiteDe(D, y)$. La fonction $DroiteDe(x,\ y)$ signifie que y est à droite de x et la fonction $Carré(x)$ signifie que x est un carré.

   Réponse :

   Traduction : Il existe un carré à la droite de du triangle D.

   Valeur de vérité : Vrai, les carrées G et J sont à droite du triangle D.

3. Montrez que pour chaque triangle x, il existe un carré y tel que x et y ont la même couleur. Traduisez ensuite cette expression en logique des prédicats, veillez à bien définir les fonctions propositionnelles nécessaires.

   Réponse :

   Valeur de vérité : L'expression est vraie, effectivement, chaque triangle est soit noir soit blanc et le monde de Tarski étudié contient des carrés noirs et blancs, il sera ainsi toujours possible de trouver un carré de la même couleur pour chaque triangle.

   Traduction : Définissons la fonction propositionnelle suivante (les autres étant définis plus haut) :

   - MêmeCouleur(x,y) : x et y sont de la même couleur.

   On peut donc traduire l'expression par :

$$\forall t \left(Triangle(t) \rightarrow \exists c\big(Carré(c) \ \wedge MêmeCouleur(t,c)\big)\right)$$

4. Donnez la négation de l'expression suivante en logique des prédicats et en langage naturel et déterminez si elle est vraie : Tous les carrés ont un cercle de la même couleur. Veillez à bien définir les fonctions propositionnelles nécessaires.

   Réponse :

   L'expression est la même que celle de la question précédente à l'exception des formes utilisées (ici carré et cercle à la place de triangle et carré). On définit donc une nouvelle fonction propositionnelle, Cercle(x) : x est un cercle. Nous avons donc :

$$
\begin{aligned}
&\neg\left(\forall c\left(Carré(c) \rightarrow \exists y\big(Cercle(y) \land MêmeCouleur(c,y)\big)\right)\right)\\
&\equiv \exists c \neg\left(\neg Carré(c)\ \lor\ \exists y\big(Cercle(y) \land MêmeCouleur(c,y)\big)\right)\\
&\equiv \exists c\left(\neg\neg Carré(c) \land \neg\left(\exists y\big(Cercle(y) \land MêmeCouleur(c,y)\big)\right)\right)\\
&\equiv \exists c\left(Carré(c) \lor \neg\left(\exists y\big(Cercle(y) \land MêmeCouleur(c,y)\big)\right)\right)\\
&\equiv \exists c\left(Carré(c)\ \land\ \forall y\ \neg\big(Cercle(y) \land MêmeCouleur(c,y)\big)\right)\\
&\equiv \exists c\left(Carré(c)\ \land\ \forall y\ \big(\neg Cercle(y) \lor \neg MêmeCouleur(c,y)\big)\right)\\
&\equiv \exists c\left(Carré(c)\ \land\ \forall y\ \big(Cercle(y) \rightarrow \neg MêmeCouleur(c,y)\big)\right)
\end{aligned}
$$

   L'expression se traduit par : Il existe un carré pour lequel aucun cercle n'est de la même couleur.

   L'expression est fausse, il existe des cercles de chaque couleur, donc chaque carré peut être associé à un cercle de la même couleur.