POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 2 : LOGIQUE DES PRÉDICATS

H2024

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 :

Soit l'univers des humains. Formalisez les affirmations suivantes en utilisant les fonctions propositionnelles indiquées.

- L(x) : x est un ingénieur logiciel
- M(x) : x est un mathématicien
- P(x) : x est paresseux
- A(x,y) : x aime y

1. Tous les ingénieurs logiciels sont paresseux.

   Réponse : $\forall x\big(L(x) \to P(x)\big)$ (suggérée)
   $\forall x\big(L(x) \wedge P(x)\big)$ (acceptée)

2. Les personnes paresseuses sont des ingénieurs logiciels.

   Réponse : $\forall x\big(P(x) \to L(x)\big)$

3. Les ingénieurs logiciels sont les seules personnes paresseuses.

   Réponse : $\forall x\big(P(x) \leftrightarrow L(x)\big)$

4. Il existe des ingénieurs logiciels paresseux.

   Réponse : $\exists x\big(P(x) \wedge L(x)\big)$

5. Il n'existe pas d'ingénieur logiciel paresseux.

   Réponse : $\forall \mathrm{x}\,\big(\mathrm{P(x)} \to \neg \mathrm{L(x)}\big)$

6. Il existe un ingénieur logiciel paresseux qui aime tous les mathématiciens.

   Réponse : $\exists \mathrm{x}\,[(\mathrm{L(x)} \wedge \mathrm{P(x)}) \wedge \forall \mathrm{y}\,(\mathrm{M(y)} \to \mathrm{A(x,y)})]$

Exercice 2 :

L'univers du discours est l'ensemble des entiers naturels. Formalisez les affirmations suivantes en utilisant les fonctions propositionnelles indiquées.

Prédicat	Signification
Pair(x)	x est un entier pair
Prem(x)	x est un nombre premier
Div(x,y)	x divise y
Egal(x,y)	x est égal à y
PP(x,y)	x est plus petit que y

1. 15 est impair.

   Réponse : $\neg \mathrm{Pair}(15)$

2. Il existe un nombre premier et pair

   Réponse : $\exists x\big(Prem(x) \wedge Pair(x)\big)$

3. Seuls les nombres pairs sont divisibles par deux.

   Réponse : $\forall x\big(Div(2,x) \leftrightarrow Pair(x)\big)$

4. Tout diviseur d'un nombre doit lui être égal ou inférieur.

   Réponse : $\forall x \forall y\big[Div(x,y) \rightarrow \big(Egal(x,y) \ \vee \ PP(x,y)\big)\big]$

5. a, b, c sont des nombres distincts.

   Réponse : $\neg Egal(a,b) \ \wedge \neg Egal(a,c) \wedge \ \neg Egal(c,b)$

Exercice 3 :

Traduisez en langage courant (avec des phrases simples) chacune des propositions suivantes à partir des définitions suivantes :

- Chat(x) : x est un chat
- Chien (x) : x est un chien
- Oiseau(x) : x est un oiseau
- Perroquet(x) : x est un perroquet
- Vole(x) : x sait voler
- Connait(x,y) : x et y se connaissent
- Aime(x,y) : x aime y

1. $\forall x\, (Chat(x) \rightarrow \exists y\, (Chien(y) \wedge Connait(x,y) \wedge \neg Aime(y,x)))$

   Réponse :
   - Chaque chat connait un chien qui le déteste.
   - Tous les chats connaissent un chien qui ne les aiment pas.

2. $\forall x\, ((Oiseau(x) \wedge \neg Perroquet(x)) \rightarrow \forall y\, (Chat(y) \rightarrow Aime(x,y)))$

   Réponse :
   - Tous les oiseaux sauf les perroquets aiment les chats.
   - Tous les oiseaux qui ne sont pas des perroquets aiment les chats

3. $\neg\, (\forall x\, (Oiseau\,(x) \rightarrow Vole(x)))$

   Réponse :
   - Tout oiseau ne sait pas voler
   - Il existe au moins un oiseau qui ne sait pas voler

Exercice 4 :

a) Soit les domaines et fonctions propositionnelles ci-dessous. Quelle est la valeur de vérité de chaque proposition ? Justifiez votre réponse.

1. $\forall x \exists y\ (x \cdot y = 1)$ où x et y sont des nombres réels.

   Réponse : Faux
   Pour x=0, nous avons : $x \cdot y \ = 0$ pour tout y

2. $\forall x \exists y\ (x + y = 0)$ où x et y sont des nombres naturels.

   Réponse : Faux
   Pour x > 0 , y < 0 pour satisfaire l'équation, or y doit être un naturel

3. $\forall x \exists y\ (x - y = 19)$ où x et y sont des entiers.

   Réponse : Vrai
   Pour tout x, y=x-19 satisfait l'équation.

4. $\exists x \exists y\ \exists z\ (x^2 + y^2 = z^2)$ où x, y et z sont des entiers différents de 0.

   Réponse : Vrai
   Exemple, x=3, y=4 et z=5.

5. $\forall x\big((x^2 + 3x - 10 = 0) \rightarrow (x > 0)\big)$ où x est un réel.

   Réponse : Faux
   $\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} - 10 = 0$
   $(\mathrm{x} + 5)(\mathrm{x} - 2) = 0$
   $\Rightarrow\ \mathrm{x} = 2 \text{ ou } \mathrm{x} = -5$
   Ainsi, $x = -5\ < 0$

b) Soit P(x, y) une fonction propositionnelle pour laquelle les valeurs possibles de x et y sont : 1, 2, 3, 4. Le tableau suivant indique la valeur de vérité de P(x, y) pour chaque valeur x et y.

y/x	1	2	3	4
1	F	V	V	V
2	F	V	F	F
3	F	V	F	F
4	F	V	V	F

Utilisez le tableau pour déterminer sur la vérité de chacun des énoncés suivants. Justifiez votre réponse.

1. $\forall x \exists y P(x, y)$

   Réponse : Faux
   Nous avons P(1,y) faux pour toutes les valeurs de y.

2. $\forall y \exists x P(x, y)$

   Réponse : Vrai
   Pour chaque y (ligne), nous avons au moins une valeur de x (colonne) vrai.

3. $\forall y\ \neg P(1, y)$

   Réponse : Vrai
   Nous avons $\neg P(1, y)$ vrai pour toutes les valeurs de y.

4. $\forall y\ P(1, y)\ \rightarrow\ \forall x\ P(x, 2)$

   Réponse : Vrai
   Nous avons $P(1, y)$ faux pour toutes les valeurs de y, donc l'implication est toujours vraie.

Exercice 5 :

Soit les fonctions propositionnelles suivantes :

- $P(x)$: « x a un portable »
- $M(x)$: « x est Manon »

Où le domaine pour x se compose de tous les étudiants de la classe.
Pour exprimer le fait que « tous les étudiants de la classe sauf Manon a un portable» nous pouvons écrire :
A : $\forall x\, [(\neg M(x) \wedge P(x)) \vee (M(x) \wedge \neg P(x))]$
De plus, la négation de l'expression A peut s'écrire :
B : $\exists x\, [(M(x) \wedge P(x)) \vee (\neg M(x) \wedge \neg P(x))]$

a) Démontrez que $\neg A \equiv B$ (indice : utilisez la distributivité ou les équivalences de la bidirectionnelle). Justifiez toutes les étapes par le nom de la propriété utilisée.

Réponse :

$\neg A \equiv \exists x\, \neg[(\neg M(x) \wedge P(x)) \vee (M(x) \wedge \neg P(x))]$	De Morgan
$\equiv \exists x\, [\neg(\neg M(x) \wedge P(x)) \wedge \neg(M(x) \wedge \neg P(x))]$	De Morgan
$\equiv \exists x\, [(\neg(\neg M(x)) \vee \neg P(x)) \wedge (\neg M(x) \vee \neg(\neg P(x)))]$	De Morgan
$\equiv \exists x\, [(M(x) \vee \neg P(x)) \wedge (\neg M(x) \vee P(x))]$	Double négation
$\equiv \exists x\, [(M(x) \wedge \neg M(x)) \vee (M(x) \wedge P(x)) \vee (\neg P(x) \wedge \neg M(x)) \vee (\neg P(x) \wedge P(x))]$	Distributivité
$\equiv \exists x\, [\text{FAUX} \vee (M(x) \wedge P(x)) \vee (\neg P(x) \wedge \neg M(x)) \vee \text{FAUX}]$	Négation
$\equiv \exists x\, [(M(x) \wedge P(x)) \vee (\neg P(x) \wedge \neg M(x))]$	Identité
$\equiv B$	Définition

CQFD

b) Traduisez en français l'expression B

Réponse :
Manon a un portable ou il existe un étudiant autre que Manon qui n'a pas de portable.

Exercice 6 :

a) Déterminez si l'équivalence suivante est valide :

$$\exists x\big(P(x) \vee Q(x)\big) \equiv \big(\exists x\, P(x)\big) \vee \big(\exists x\, Q(x)\big)$$

Justifiez votre réponse.

Réponse : L'équivalence est valide.

Posons :

A : $\exists x\big(P(x) \vee Q(x)\big)$ B : $\big(\exists x\, P(x)\big) \vee \big(\exists x\, Q(x)\big)$

Nous souhaitons montrer que $A \leftrightarrow B$ est une tautologie. Nous avons aussi que $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

Montrons d'abord $A \rightarrow B$:

Assumons A vrai. Alors pour un v donné, P(v) ou Q(v) est vrai. De cette façon, nous avons le 1er cas ou P(v) est vrai et Q(v) faux. Dans ce cas B est vrai car $\exists x\, P(x)$ est vrai. Nous avons un 2^{e} cas ou P(v) est faux et Q(v) est vrai. Dans ce cas, B est aussi vrai car $\exists x\, Q(x)$ est vrai. Finalement, nous avons le 3^{e} cas ou P(v) et Q(v) sont vrai. Dans ce cas B est vrai car $\exists x\, P(x)$ et $\exists x\, Q(x)$ sont vrais. Ainsi, si A est vrai alors B est vrai, nous obtenons bien $A \rightarrow B$.

Montrons ensuite $B \rightarrow A$:

Assumons B vrai. Alors pour un u et v donné, nous avons P(v) ou Q(u) vrai. Ainsi, comme précédemment, nous avons un 1er cas où P(v) est Q(u) faux. Dans ce cas-là, nous avons A vrai car P(v) ou Q(v) est vrai. Le 2^{e} cas est celui ou Q(u) est vrai et P(v) est faux. Dans ce cas, A est aussi vrai car P(u) ou Q(u) est vrai. Finalement, nous avons le cas où P(v) et Q(u) sont vrais. Dans ce cas A est vrai car P(u) ou Q(u) est vrai ainsi que P(v) ou Q(v). De cette façon, si B est vrai alors A est vrai, nous obtenons bien $B \rightarrow A$.

Comme nous avons monté que $A \leftrightarrow B$ est une tautologie, nous avons montrer l'équivalence.

CQFD

b) Déterminez si l'équivalence suivante est valide quelle que soit les fonctions propositionnelles P(x) et Q(x):

$$\exists x\big(P(x) \wedge \ Q(x)\big) \ \equiv \big(\exists x\ P(x)\big) \wedge \ \big(\exists x\ Q(x)\big)$$

Justifiez votre réponse.

Réponse : L'équivalence n'est pas valide.

Il suffit de trouver un contre-exemple. Si nous choisissons l'univers des entiers ainsi que les fonctions propositionnelles suivantes :

- P(x) : x est pair
- Q(x) : x est impair

Posons :

A : $\exists x\big(P(x) \wedge \ Q(x)\big)$ B : $\big(\exists x\ P(x)\big) \wedge \ \big(\exists x\ Q(x)\big)$

Pour que l'équivalence soit valide il faut que $A \leftrightarrow B$ soit une tautologie. Nous avons aussi que $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B)\ \wedge\ (B \rightarrow A)$.

D'abord, nous remarquons que A est toujours faux. Effectivement, il n'existe pas d'entier à la fois pair et impair. Ainsi, $(A \rightarrow B)$ est toujours vrai. Cependant, il est possible de montrer que $(B \rightarrow A)$ est faux. Effectivement, B est vrai (Exemple : $\mathrm{P}(2) \wedge \ Q(3)$ est vrai), or comme expliqué précédemment A est faux ce qui implique que $(B \rightarrow A)$ est faux. Nous montrons donc que $A \leftrightarrow B$ n'est pas une tautologie.

Ainsi, l'équivalence n'est pas valide.

CQFD