

# Examen final H25

## Question 1 : Répartition de ressources

Une entreprise fournit trois types de matériel informatique à ses clients :

Les demandes sont les suivantes :

- 130 clients veulent un processeur ou une carte réseau (ou les deux).
- 120 clients veulent une carte réseau ou une carte sans fil (ou les deux).
- 110 clients veulent un processeur ou une carte sans fil (ou les deux).
- 50 clients veulent à la fois un processeur et une carte réseau.
- 40 clients veulent à la fois une carte réseau et une carte sans fil.
- 35 clients veulent à la fois un processeur et une carte sans fil.
- 25 clients veulent les trois types de matériel.
- 10 clients ne veulent aucun matériel.

**Question :** Peut-on satisfaire tous les clients qui veulent du matériel si l'entreprise a en stock 120 processeurs, 110 cartes réseau, 100 cartes sans fils pour 240 clients.

## Question 2 : Divisibilité

En sachant que  $n \in \mathbb{N}$  et que :

$$5^{n+2} - 1 \text{ est divisible par } 4,$$

démontrer que l'expression suivante est divisible par 16 :

$$3^{2n+6} - 5^{n+2} - 4n$$

### Question 3 : Fonction bijective

**Question a)** Soit la fonction  $g(n) = 7n \bmod 10$ . Déterminer si cette fonction est **bijective** sur l'ensemble suivant :

$$A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

**Question b)** Trouver une fonction  $h$  telle que :

$$h(g(n)) = n$$

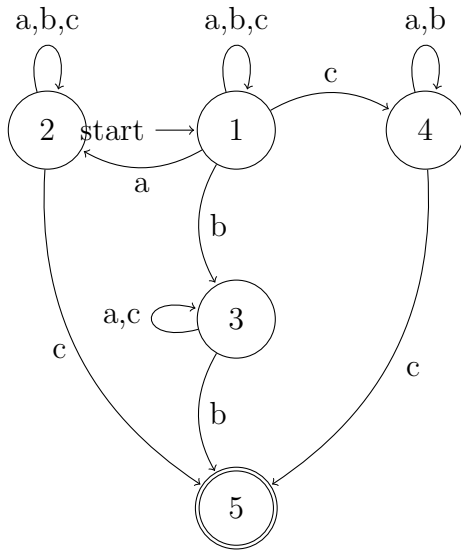
### Exercice : Analyse de complexité – Diviser pour régner

Un algorithme, nommé **AlgoSuperSplit**, est conçu pour résoudre un problème de taille  $n$  selon le paradigme de la méthode "diviser pour régner". Lorsqu'on lui fournit une instance de taille  $n$ , l'algorithme procède comme suit : si  $n < 3$ , il résout directement le problème à l'aide d'une méthode brute, en un nombre constant d'opérations (par exemple en  $\Theta(1)$ ). Si  $n \geq 3$ , il divise le problème en 10 sous-problèmes de taille  $n/3$  chacun. Pour simplifier l'analyse, on suppose que  $n$  est toujours une puissance exacte de 3. L'algorithme s'appelle récursivement sur chacun des 10 sous-problèmes. Une fois les sous-problèmes résolus, leurs solutions sont combinées pour produire la solution finale. Cette étape de combinaison requiert un temps en  $\Theta(n)$ .

**Question a)** Établissez une relation de récurrence qui décrit le nombre d'opérations effectuées par **AlgoSuperSplit** sur une entrée de taille  $n$ , et déterminez la complexité asymptotique (en notation grand-O).

### Question 6 : Déterminisation d'un AFN

Voici un automate fini non déterministe (AFN) défini sur l'alphabet  $\Sigma = \{a, b, c\}$ . L'état initial est 1, l'état final est 5.



**Objectif :** Déterminer cet automate, c'est-à-dire construire un AFD équivalent.