POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 10 : GRAPHES

H2024

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 :

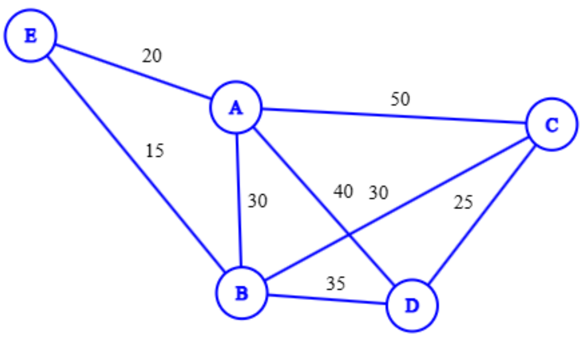
Une troupe de cirque itinérante souhaite organiser sa tournée pour visiter plusieurs villes. Le but est de trouver le circuit optimal afin de passer exactement une fois dans chaque ville tout en minimisant la durée totale du voyage. Les durées des trajets entre chaque paire de villes sont :

- Ville A-B : 30 minutes
- Ville A-C : 50 minutes
- Ville A-D : 40 minutes
- Ville A-E : 20 minutes
- Ville B-C : 30 minutes
- Ville C-D : 25 minutes
- Ville D-B : 35 minutes
- Ville E-B : 15 minutes

a) Représentez le problème à l'aide d'un graphe, d'une liste d'adjacence (tuple sommet adjacent/durée) et d'une matrice d'adjacence.

Solution

Graphe :



Liste d'adjacence :

Villes	A	B	C	D	E
Villes adjacentes	(B,30), (C,50), (D,40), (E,20)	(A, 30), (C,30), (D,35), (E,15)	(A,50), (B,30), (D,25)	(A,40), (B,35), (C,25)	(A,20), (B,15)

Matrice d'adjacence :
Les lignes et les colonnes de la matrice sont respectivement étiquetées A, B, C, D, E.

$$\begin{pmatrix} 0 & 30 & 50 & 40 & 20 \\ 30 & 0 & 30 & 35 & 15 \\ 50 & 30 & 0 & 25 & 0 \\ 40 & 35 & 25 & 0 & 0 \\ 20 & 15 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Listez tous les circuits possibles (circuits hamiltoniens) partant et terminant de la ville A. Donnez ensuite le circuit optimal.

Solution

Route	**Durée (minutes)**
A-E-B-C-D-A	20+15+30+25+40=130
A-E-B-D-C-A	20+15+35+25+50=145
A-D-C-B-E-A	40+25+30+15+20=130
A-C-D-B-E-A	50+25+35+15+20=145

Il y a donc deux parcours qui donnent une durée de déplacement minimale de 130 minutes. Les parcours A-E-B-C-D-A et A-E-B-C-D-A (qui est le même parcours dans les deux sens).

c) Est-il possible de trouver un circuit qui traverse toutes les routes une seule fois ? Si oui, donnez un exemple. Dans le cas contraire, est-il au moins possible de trouver un parcours qui passe par chaque route une seule fois? Si oui, donnez un exemple. Justifiez vos réponses.

Solution

Les villes C et D sont de degré impair. Ainsi, le graphe n'admet pas de circuits eulériens car il contient des sommets de degré impair. Cependant, comme le graphe contient exactement deux sommets de degré impair, alors le graphe admet un parcours eulérien. Il est donc possible de trouver un parcours qui traverse chaque route une seule fois. Exemple :

D-B-E-A-C-B-A-D-C

Exercice 2 :

Dessinez tous les graphes qui respectent les propriétés suivantes, ou expliquez pourquoi il est impossible de construire un tel graphe.

a) Un graphe avec quatre sommets de degrés 1, 1, 2 et 3.

Solution

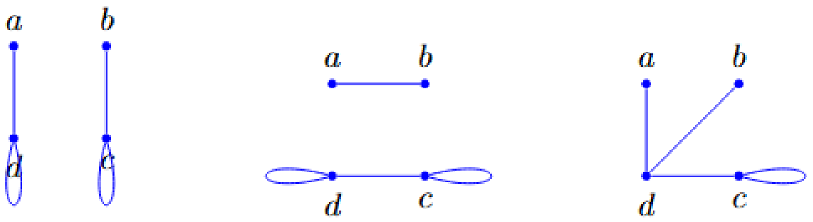
Il n'est pas possible de construire un graphe qui respecte ces propriétés. Effectivement, selon la propriété des poignées de main, la somme des degrés des sommets d'un graphe doit être paire. Or ici, nous avons :

$$\sum deg(v) = 1 + 1 + 2 + 3 = 7$$

b) Un graphe avec quatre sommets de degrés 1, 1, 3 et 3.

Solution

Les quatre graphes possibles respectant les propriétés de l'énoncé sont les suivants :



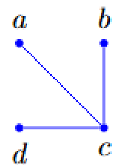
c) Un graphe simple* avec quatre sommets de degrés 1, 1, 3 et 3.

**Un graphe simple est un graphe dans lequel chaque paire de sommets est reliée par au plus une arête et aucun sommet ne possède de boucle*

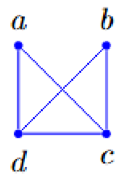
Solution

Utilisons une preuve par l'absurde. Supposons qu'il existe un graphe simple $\boldsymbol{G}$ avec quatre sommets de degrés 1, 1, 3 et 3. Appelons a et b les sommets de degré 1, et c et d les sommets de degré 3.

Puisque $deg(c) = 3$ et que $\boldsymbol{G}$ n'a ni boucles ni arêtes parallèles (car il est simple), il doit y avoir des arêtes qui relient c à a, b et d.



Par le même raisonnement, il doit y avoir des arêtes reliant d à a, b et c.

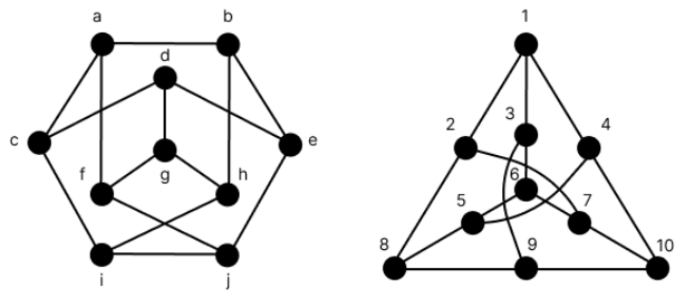


Mais alors, $deg(a) \geq 2$ et $deg(b) \geq 2$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle ces sommets ont un degré de 1. Par conséquent, l'hypothèse est fausse, il n'existe donc pas de graphe simple avec quatre sommets de degrés 1, 1, 3 et 3.

Exercice 3 :

Les graphes A et B représentent deux ensembles de cours avec des conflits d'horaire : chaque sommet représente un cours, et chaque arrête indique un conflit (deux cours qui ne peuvent pas être programmés en même temps).

Un horaire a déjà été trouvé pour le graphe A. Est-il possible d'utiliser le même horaire pour le graphe B ? Si oui, donnez l'équivalence entre les cours des graphes A et B.

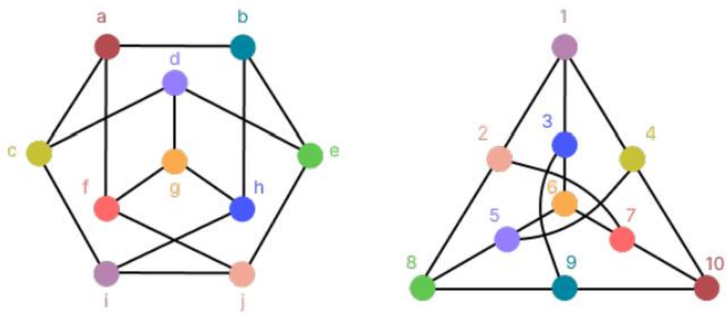


Graphe A Graphe B

Solution

Les deux graphes sont isomorphes, il est donc possible de réutiliser le même horaire pour les deux graphes. Soit h la fonction bijective qui transforme le graphe **A** en celui de **B** (qui donne l'équivalence entre les cours du graphe **A** et du graphe **B**). Plusieurs réponses sont possibles. On a par exemple :

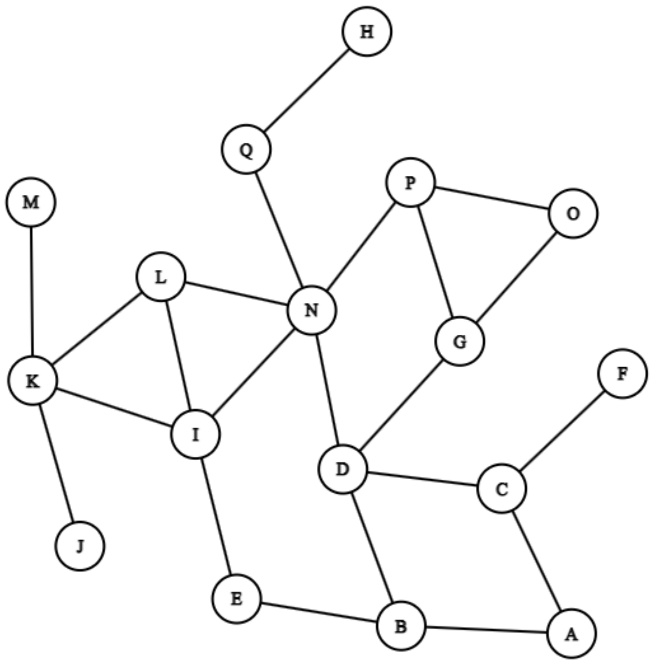
- h(a)=10
- h(b)=9
- h(c)=4
- h(d)=5
- h(e)=8
- h(f)=7
- h(g)=6
- h(h)=3
- h(i)=1
- h(j)=2



Graphe A Graphe B

Exercice 4 :

On considère le graphe suivant :



a) À partir du sommet A, donnez un parcours en largeur du graphe. Les sommets doivent être considérés dans l'ordre alphabétique.

Solution

Sommet visité	A	B	C	D	E	F	G	N
File	[B,C]	[C,D,E]	[D,E,F]	[E,F,G,N]	[F,G,N,I]	[G,N,I]	[N,I,O,P]	[I,O,P,L,Q]
Sommets visités*	{A,B,C}	{A,…,E}	{A,…,F}	{A,…,G,N}	{A,…,I}	{A,…}	{A,…O,P}	{A,…,L,Q}

I	O	P	L	Q	K	H	J	M
[O,P,L,Q,K]	[P,L,Q,K]	[L,Q,K]	[Q,K]	[K,H]	[H,J,M]	[J,M]	[J]	[]
{A,…,K}	{A,…}	{A,…}	{A,…}	{A,…,H}	{A,…,J,M}	{A,…}	{A,…}	{A,…}

*On note seulement les nouveaux sommets ajoutés aux sommets visités pour faciliter la lisibilité.

Ainsi : A-B-C-D-E-F-G-N-I-O-P-L-Q-K-H-J-M

b) À partir du sommet A, donnez un parcours en profondeur du graphe. Les sommets doivent être considérés dans l'ordre alphabétique.

Solution

Sommet visité	A	B	D	C	F	G	O	P
Pile	[B,C]	[D,E,C]	[C,G,N,E,C]	[F,G,N,E,C]	[G,N,E,C]	[O,P,N,E,C]	[P,P,N,E,C]	[N,P,N,E,C]
Sommets visités*	{A}	{A,B}	{A,B,D}	{A,…,C}	{A,…,F}	{A,…,G}	{A,…,O}	{A,…,P}

N	I	E	K	J	L	M	Q	H
[I,L,QP,N,E,C]	[E,K,L,L,Q,P,N,E,C]	[K,L,L,Q,P,N,E,C]	[J,L,M,L,L,Q,P,N,E,C]	[L,M,L,L,Q,P,N,E,C]	[M,L,L,Q,P,N,E,C]	[~~L~~,~~L~~,Q,P,N,E,C]	[H,P,N,E,C]	[~~P~~,~~N~~,~~E~~,~~C~~]
{A,…,N}	{A,…,I}	{A,…,E}	{A,…,K}	{A,…,J}	{A,…,L}	{A,…,M}	{A,…,Q}	{A,…H}

*On note seulement les nouveaux sommets ajoutés aux sommets visités pour faciliter la lisibilité.

Ainsi : A-B-D-C-F-G-O-P-N-I-E-K-J-L-M-Q-H

Exercice 5 :

Une école organise des échanges linguistiques entre ses étudiants. Chaque étudiant doit correspondre avec un certain nombre d'autres étudiants, dans le but de pratiquer la langue étrangère qu'il apprend. La classe est composée de 55 étudiants.

a) Est-il possible pour chaque étudiant du programme d’avoir 6 correspondants? Si oui, combien de correspondances existent dans le programme? Justifiez votre réponse.

Solution

On peut représenter cette situation comme un graphe où chaque étudiant est un sommet et chaque amitié un arc du graphe. Ainsi, chaque sommet du graphe est de degré 6.

Oui, il est possible que chaque étudiant ait 6 correspondants. Effectivement, la somme des degrés des sommets du graphe est égale à $6 \cdot 55 = 330$, qui est pair, le graphe existe. Ainsi, le nombre de correspondances correspond tout simplement au nombre d’arcs dans le graphe. Selon le lemme des poignées de main :

$$2e = \sum deg(v) = 330$$
$$\Rightarrow \ e = 165$$

Ainsi, il existe 165 correspondances dans le programme.

b) Est-il possible pour chaque étudiant du programme d’avoir 5 correspondants? Justifiez votre réponse.

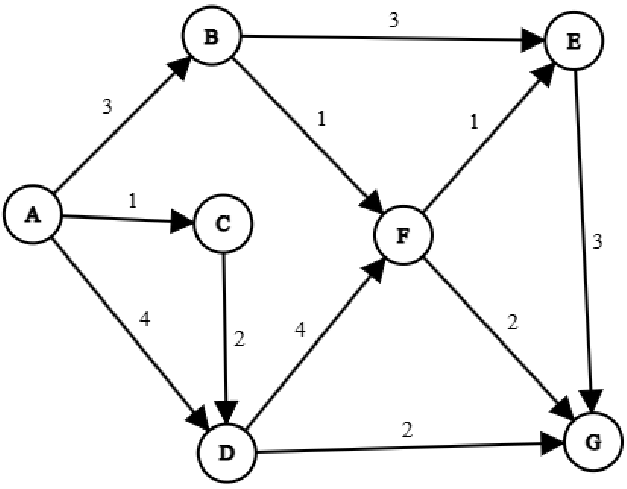
Solution

Non, il n’est pas possible que chaque étudiant ait 5 correspondants dans le programme. Chaque sommet du graphe est de degré 5.

Ainsi, selon le lemme des poignées de main, $5 \ \cdot 55 = 275$, qui correspond à la somme des degrés des sommets du graphe, devrait être pair car il devrait être égal au double du nombre d’arcs. Ainsi, comme la somme des degrés des sommets du graphe est impair, alors le graphe ne peut pas exister.

Exercice 6 :

En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminez le plus court chemin, du sommet A vers tous les autres sommets. Montrez toutes les étapes de votre réponse, en détaillant la longueur des chemins à chaque itération du processus.

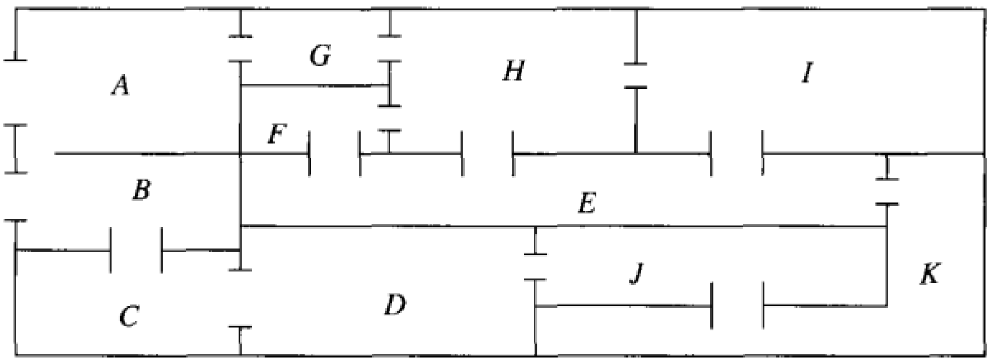


Solution

Itération	S	A	B	C	D	E	F	G
0	{}	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	{A}	-	3 (AB)	1 (AC)	4 (AD)	∞	∞	∞
2	{A, C}	-	3 (AB)	-	3 (ACD)	∞	∞	∞
3	{A, B, C}	-	-	-	3 (ACD)	6 (ABE)	4 (ABF)	∞
4	{A, B, C, D}	-	-	-	-	6 (ABE)	4 (ABF)	5 (ACDG)
5	{A, B, C, D, F}	-	-	-	-	5 (ABFE)	-	5 (ACDG)
6	{A, B, C, D, F,E}	-	-	-	-	-	-	5 (ACDG)
7	{A, B, C, D, F,G}	-	-	-	-	-	-	-
Conclusion :		0 (A)	3 (AB)	1 (AC)	3 (ACD)	5 (ABFE)	4 (ABF)	5 (ACDG)

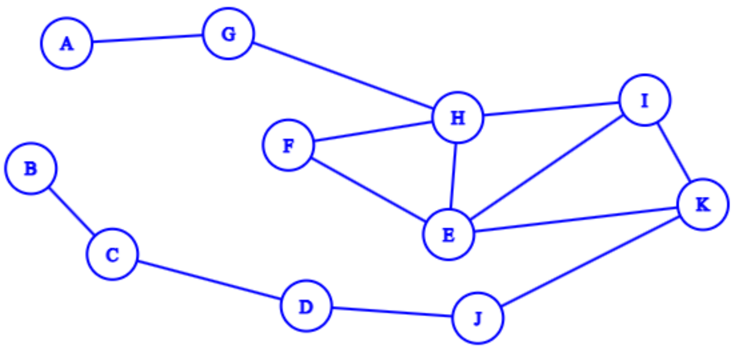
Exercice 7 :

Le plan ci-dessous représente une maison en visite libre. Est-il possible de trouver un chemin qui commence dans la pièce A, se termine dans la pièce B, et passe par chaque porte intérieure de la maison exactement une fois ? Si oui, trouvez un tel chemin.



Solution

La situation peut être représentée à l'aide d'un graphe. Les sommets représentent les pièces de la maison et les arrêtes les portes. Voici le graphe :



On remarque que tous les sommets sont de degré pair à l'exception du sommet de départ A et du sommet d'arrivé B. Comme le graphe contient exactement deux sommets de degré impair, alors le graphe admet un parcours eulérien. De plus, un parcours eulérien doit commencer et se terminer sur un nœud de degré impair. Ainsi, comme on commence au nœud A (de degré impair), on termine le parcours au nœud B (seul autre nœud de degré impair). Un exemple de parcours est :

A-G-H-F-E-I-H-E-K-J-D-C-B