POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 8 : **INDUCTION ET RÉCURSIVITÉ**

É2022

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1. Soit a un entier. Montrez par récurrence que pour tout entier naturel n,

$a(a^{2n} - 1)$ est divisible par 6.

Réponse :

Pour n = 0, on a : $a(a^{2n} - 1) = a(a^{2.0} - 1) = a(a^0 - 1) = a(1 - 1) = a.0 = 0$

0 est divisible par 6, donc pour n=0, $a(a^{2n} - 1)$ est divisible par 6.

Supposons pour n quelconque, avec $n \geq 0$, que $a(a^{2n} - 1)$ est divisible par 6.

Montrons que $a(a^{2(n+1)} - 1)$ est divisible par 6.

$a(a^{2(n+1)} - 1) = a(a^{2n+2} - 1) = a^{2n+3} - a = a^2.a^{2n+1} - a$

Par hypothèse d'induction, $a(a^{2n} - 1)$ est divisible par 6. Il existe donc un k entier tel que $a(a^{2n} - 1) = 6k$, soit $a^{2n+1} - a = 6k$, ou encore En remplaçant a^{2n+1} par a + 6k dans $a^2.a^{2n+1} - a$, on a :

$a(a^{2(n+1)} - 1) = a^2.a^{2n+1} - a = a^2(a + 6k) - a$

$a(a^{2(n+1)} - 1) = a^3 + 6k.a^2 - a = (a^3 - a) + 6k.a^2$

$a(a^{2(n+1)} - 1) = a(a^2 - 1) + 6k.a^2 = a(a - 1)(a+1) + 6k.a^2$

Dans l'expression $a(a - 1)(a+1) + 6k.a^2$, $6k.a^2$ est divisible par 6.

Il reste donc à prouver que $a(a - 1)(a+1)$ est divisible par 6.

a étant un entier, $a(a - 1)(a+1)$ est le produit de 3 entiers consécutifs. L'un de ces entiers consécutifs est forcément pair. Donc $a(a - 1)(a+1)$ est divisible par 2.

Aussi, l'un des 3 entiers consécutifs a, $(a - 1)$ et $(a+1)$ est multiple de 3. Donc $a(a - 1)(a+1)$ est divisible par 3.

Donc $a(a - 1)(a+1)$ étant à la fois divisible par 2 et par 3, il est donc divisible par 6.

De tout ce qui précède, on déduit que $a(a^{2(n+1)} - 1)$ est divisible par 6.

$a(a^{2n} - 1)$ est divisible par 6 pour n = 0 et lorsque pour n quelconque $a(a^{2n} - 1)$ est divisible par 6, il l'est pour n+1. On peut donc conclure que $a(a^{2n} - 1)$ est divisible par 6 pour tout n entier.

Exercice 2. Montrez par induction que pour tout entier naturel n, on a :

$2^{3n+3} - 7n - 8$ est divisible par 49

Réponse :

Soit la propriété $2^{3n+3} - 7n - 8$ est divisible par 49.

Calculons $2^{3n+3} - 7n - 8$ pour n = 0.

On a : $2^{3.0+3} - 7.0 - 8 = 2^3 - 8 = 8 - 8 = 0$

0 est divisible part 49.

La propriété est donc vraie à l'ordre 0.

Supposons jusqu'à l'ordre n que $2^{3n+3} - 7n - 8$ est divisible par 49.

Montrons qu'à l'ordre n+1 que $2^{3(n+1)+3} - 7(n+1) - 8$ est divisible par 49.

$2^{3(n+1)+3} - 7(n+1) - 8 = 2^{3n+3+3} - 7n - 7 - 8$

$2^{3(n+1)+3} - 7(n+1) - 8 = 2^3\, 2^{3n+3} - 7n - 15$

$2^{3(n+1)+3} - 7(n+1) - 8 = 8\, 2^{3n+3} - 7n - 15$

$2^{3(n+1)+3} - 7(n+1) - 8 = 8\, 2^{3n+3} - (56n - 49n) - (64 - 49)$

$2^{3(n+1)+3} - 7(n+1) - 8 = (8\, 2^{3n+3} - 56n - 64) + (49n + 49)$

$2^{3(n+1)+3} - 7(n+1) - 8 = 8\,(2^{3n+3} - 7n - 8) + 49\,(n + 1)$

Par hypothèse d'induction $2^{3n+3} - 7n - 8$ est divisible par 49. De plus, $49\,(n + 1)$ est divisible par 49.

On en déduit que $2^{3(n+1)+3} - 7(n+1) - 8$ est divisible par 49 et que la propriété est vraie à l'ordre n+1.

Nous avons montré que la propriété est vraie à l'ordre 0 et que si elle est vraie jusqu'à l'ordre n, alors elle est vraie à l'ordre n+1. On peut donc conclure que la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 3. Montrez en utilisant le principe d'induction que pour tout n entier naturel plus grand que 1 :

$n! < n^n$

Réponse :

Soit P(n) : $n! < n^n$
Pour n = 2, on a :
$2^2 = 4$ et $2! = 2$
On a bien $2! < 2^2$, car $2 < 4$.
P(2) est donc vrai.
Supposons pour un certain $n \geq 2$ que P(n) est vrai.
Montrons que P(n+1) est vraie, soit $(n+1)! < (n+1)^{n+1}$.
Par hypothèse d'induction, $n! < n^n$ pour $n \geq 2$.
En multipliant les deux termes de l'inégalité par n+1, on a : $(n+1)n! < (n+1)\ n^n$, soit $(n+1)! < (n+1)\ n^n$
De plus, puisque $n < n+1$, on a $n^n < (n+1)^n$.
En multipliant les deux termes de cette dernière inégalité par n+1, on a : $(n+1)\ n^n < (n+1)(n+1)^n$, soit : $(n+1)\ n^n < (n+1)^{n+1}$.
À partir de l'inégalité obtenue à la ligne 9 et celle de la ligne précédente, on obtient la double inégalité $(n+1)! < (n+1)\ n^n < (n+1)^{n+1}$ de laquelle on déduit que $(n+1)! < (n+1)^{n+1}$.
P(n+1) est donc vraie.

P(2) est vrai et $\forall n \geq 2$ P(n) → P(n+1) est vraie
On peut alors conclure que pour tout n entier naturel plus grand que 1, $n! < n^n$.

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, donnez une définition récursive de la suite (a_n), où n est un entier naturel.

a) $a_n = 6n$

Réponse :

$a_0 = 6.0 = 0$.
$a_{n+1} = 6\ (n+1) = 6n + 6 = a_n + 6$
La définition récursive de la suite $a_n = 6n$ est donc : $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n + 6$

b) $a_n = 1 + (-1)^n$

Réponse :

$a_0 = 1 + (-1)^0 = 2$.
$a_n = 1 + (-1)^n$, alors $a_n - 1 = (-1)^n$
$a_{n+1} = 1 + (-1)^{n+1} = 1 + (-1)(a_n - 1) = 2 - a_n$
La définition récursive de la suite $a_n = 1 + (-1)^n$ est donc : $a_0 = 2$ et $a_{n+1} = -a_n + 2$

c) $a_n = \sum_{i=1}^{n} 10^{i-1}$

Réponse :

$a_1 = \sum_{i=1}^{1} 10^{1-1}$
$a_1 = 1$

$a_n = \sum_{i=1}^{n} 10^{i-1}$
$a_n = 10^{-1}(\sum_{i=1}^{n} 10^{i})$
$a_n = 10^{(-1)} \times 10 \times \frac{10^n-1}{10-1}$
$a_n = \frac{10^n-1}{9}$
$9a_n + 1 = 10^n$
$9a_{n+1} + 1 = 10^{n+1}$
$9a_{n+1} + 1 = 10(9a_n + 1)$
$9a_{n+1} + 1 = 90a_n + 10$
$9a_{n+1} = 90a_n + 9$
$a_{n+1} = 10a_n + 1$
La définition récursive de la suite est donc : $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = 10a_n + 1$

Exercice 5. On définit une fonction f sur l'ensemble des entiers naturels non nuls comme suit :

- f(1) = 1
- f(n) = 2n – 1 + f(n-1) pour n > 1

a) Établissez une conjecture pour une formule explicite pour f(n), en l'exprimant uniquement en fonction de n.

Réponse :
f(1) = 1
f(2) = 2.2 – 1 + f(1) = 4-1+1 = 4
f(3) = 2.3 – 1 + f(2) = 6-1+4 = 9
f(4) = 2.4 – 1 + f(3) = 8-1+9 = 16
f(5) = 2.5 – 1 + f(4) = 10-1+16 = 25
Les résultats précédents nous permettent de conjecturer que $f(n) = n^2$.

b) Prouvez la conjecture par induction.

Réponse :
f(1) = 1
$f(1) = 1^2$
La formule est vérifiée pour n = 1.
Supposons jusqu'au rang n ≥ 1 que $f(n) = n^2$ et montrons que $f(n+1) = (n+1)^2$.
Par définition, f(n) = 2n – 1 + f(n-1)
f(n+1) = 2(n+1) – 1 + f(n+1-1),
f(n+1) = 2n+1 + f(n)
$f(n+1) = 2n+1 + n^2$
$f(n+1) = (n+1)^2$

$f(1) = 1^2$
De plus, ($f(2) = 2^2$ et $f(3) = 3^2$ et $f(4) = 4^2$ et $f(5) = 5^2$ … $f(n) = n^2$) implique $f(n+1) = (n+1)^2$
D'où pour tout n ≥ 1, $f(n) = n^2$.