POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Contrôle périodique 1

LOG1810

Sigle du cours

SOLUTIONNAIRE

Sigle et titre du cours	*Groupe*	*Trimestre*
LOG1810 Structures discrètes	Tous	Été 2025

Professeur	*Local*	*Téléphone*
Aurel Randolph, Chargé de cours	A-410	

Jour	*Date*	*Durée*	*Heures*
Samedi	17/05/2025	1h	10h30-11h30

.

Exercice 1 (**4 points**) Déterminez la valeur de vérité des propositions suivantes. Aucune justification n'est requise.

a. **(1 pt)** *Il n'est pas vrai que « 11 est un nombre premier ou 11 est pair ».*

☐ VRAI ☐ FAUX

Réponse : FAUX

Explication : 11 est premier, donc la proposition interne « 11 est premier ou 11 est pair» est vraie. La négation est donc fausse.

b. **(1 pt)** *Si 0 > 1 alors 1 > 0.*

☐ VRAI ☐ FAUX

Réponse :VRAI

Explication : L'antécédent 0 > 1 est faux, donc l'implication est vraie.

c. **(1pt)** *(3^2 = 9) implique que 7 est divisible par 2.*

☐ VRAI ☐ FAUX

Réponse : FAUX

Explication : Premisse vraie, conséquence fausse → implication fausse.

d. **(1pt)** *S'il neige à Montréal alors il neige à Montréal.*

☐ VRAI ☐ FAUX

Réponse : VRAI

Explication : Forme P → P , toujours vraie.

Exercice 2 (**4 points**) Traduisez les énoncés suivants à l'aide des prédicats proposés.
Soit U l'univers des voitures et les définitions suivantes :
C(x) : « x est une voiture »
E(x) : « x est électrique »
V (x) : « x possède la recharge rapide »
a : la voiture Audi Sedan

a. **(1 pt)** *Toutes les voitures électriques possèdent la recharge rapide.*
Réponse : $\forall x, (C(x) \wedge E(x)) \rightarrow V(x)$

b. **(1,5 pt)** *Il existe au moins une voiture qui n'est pas électrique.*
Réponse : $\exists x, (C(x) \wedge \neg E(x))$

c. **(1,5 pt)** *La Audi Sedan est une voiture électrique qui ne possède pas la recharge rapide*.
Réponse : $(C(a) \wedge E(a) \wedge \neg V(a))$

Exercice 3 (**4 points**) Prouvez les propositions suivantes en choisissant la méthode la plus appropriée parmi : preuve directe, preuve par contraposée ou preuve par cas.

a. **(1 pt)** $(p \land (p \to q)) \to q$

Réponse:

Prouvons l'implication par la technique de la preuve directe.

Solution 1

Supposons que $(p \land (p \to q))$ est vrai, c'est à dire $(p \land (p \to q)) \equiv$ VRAI

Dérivons dans un premier temps $(p \land (p \to q))$.

$p \land (p \to q) \equiv p \land (\neg p \lor q)$	Traductuction de l'implication en disjonction
$p \land (p \to q) \equiv (p \land \neg p) \lor (p \land q)$	Loi de distributivité
$(p \land (p \to q)) \equiv \text{FAUX} \lor (p \land q)$	Loi de négation
$(p \land (p \to q)) \equiv (p \land q)$	Loi d'identité

En considérant l'hypothèse initiale, on a : $(p \land q) \equiv$ VRAI

Par conséquent, en appliquant la loi de simplification, nous obtenons : $q \equiv$ VRAI.

Conclusion : $[(p \land (p \to q)) \to q]$ est vrai

Solution 2

Supposons que $(p \land (p \to q))$ est vrai, c'est à dire $(p \land (p \to q)) \equiv$ VRAI

$[(p \land (p \to q)) \equiv \text{VRAI}] \to [(p \land (\neg p \lor q)) \equiv \text{VRAI}]$	Traductuction de l'implication en disjonction
$[(p \land (p \to q)) \equiv \text{VRAI}] \to [(p \land \neg p) \lor (p \land q) \equiv \text{VRAI}]$	Loi de distributivité
$[(p \land (p \to q)) \equiv \text{VRAI}] \to [\text{FAUX} \lor (p \land q) \equiv \text{VRAI}]$	Loi de négation
$[(p \land (p \to q)) \equiv \text{VRAI}] \to [(p \land q) \equiv \text{VRAI}]$	Loi d'identité
$[(p \land (p \to q)) \equiv \text{VRAI}] \to (q \equiv \text{VRAI})$	Règle de simplification

Conclusion : $[(p \land (p \to q)) \to q]$ est vrai

b. **(1 pt)** $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

Réponse:

Utilisons la technique de la preuve directe.

$(p \to q) \equiv (\neg p \lor q)$	Traductuction de l'implication en disjonction
$(p \to q) \equiv (q \lor \neg p)$	Commutativité
$(p \to q) \equiv (\neg(\neg q) \lor \neg p)$	Loi de double négation
$(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$	Traductuction de la disjonction en implication

Donc $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ est une tautologie. Elle est ainsi vraie.

CQFD

c. **(1 pt)** $[(p \lor r) \land (p \to q) \land (r \to s)] \to (q \lor s)$

Réponse:

Prouvons l'implication en combinant la technique de la preuve directe et la technique de la preuve par cas.
Supposons que $[(p \lor r) \land (p \to q) \land (r \to s)]$ est Vrai.
D'après la règle de la simplification, $(p \lor r)$ est Vrai et $(p \to q)$ est vrai et $(r \to s)$ est vrai

Cas 1 : $(p \equiv \text{VRAI})$ (respectivement, $r \equiv \text{VRAI}$)

$[(p \equiv \text{VRAI}) \land ((p \to q) \equiv \text{VRAI})] \to (q \equiv \text{VRAI})$ Règle du Modus Ponens

$(q \equiv \text{VRAI}) \to ((q \lor s) \equiv \text{VRAI})$ Règle de l'addition

Donc $[(p \lor r) \land (p \to q) \land (r \to s)] \to (q \lor s)$

Cas 2 : $(p \equiv \text{FAUXI})$ (respectivement, $r \equiv \text{FAUX}$)

$[(p \equiv \text{FAUX}) \land ((p \lor r) \equiv \text{VRAI})] \to [(\neg p \equiv \text{VRAI}) \land ((p \lor r) \equiv \text{VRAI})]$

$[(\neg p \equiv \text{VRAI}) \land ((p \lor r) \equiv \text{VRAI})] \to (r \equiv \text{VRAI})$ Syllogisme disjonctif

$[(p \equiv \text{FAUX}) \land ((p \lor r) \equiv \text{VRAI})] \to (r \equiv \text{VRAI})$ Syllogisme par hypothèse avec les 2 lignes ci-dessus

$[(r \equiv \text{VRAI}) \land ((r \to s) \equiv \text{VRAI})] \to (s \equiv \text{VRAI})$ Règle du Modus Ponens

$(s \equiv \text{VRAI}) \to ((q \lor s) \equiv \text{VRAI})$ Règle de l'addition

Donc $[(p \lor r) \land (p \to q) \land (r \to s)] \to (q \lor s)$

Conclusion : $[(p \lor r) \land (p \to q) \land (r \to s)] \to (q \lor s)$

d. **(1 pt)** $\neg(p \land q) \leftrightarrow (\neg p \lor \neg q)$

Réponse:

Utilisons la technique de la preuve par cas pour les valeurs de verité de p et q. Cela revient à établir une table de vérité.

p	q	¬p	¬q	p ∧ q	¬(p ∧ q)	¬p ∨ ¬q	¬(p ∧ q) ↔ (¬p ∨ ¬q)
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V

Conclusion : La table de vérité indique que $\neg(p \land q) \leftrightarrow (\neg p \lor \neg q)$ est une tautologie. Ce qui prouve sa validité.

Exercice 4 (**3 points**)
Pour chaque proposition suivante :
(i) donnez sa négation,
(ii) donnez sa réciproque,
(iii) donnez sa contraposée,
(iv) et, pour chacune de ces trois formes, vérifiez sa validité à l'aide d'une table de vérité (justifiez votre démarche).

a. **(1,5 pt)** $p \rightarrow (q \wedge r)$

Réponse

(i) **Négation** : $p \wedge (\neg q \vee \neg r)$ **ou** $p \wedge (q \rightarrow \neg r)$
(ii) **Réciproque** : $(q \wedge r) \rightarrow p$ ou $\neg (q \wedge r) \vee p$ **ou** $(\neg q \vee \neg r \vee p)$
(iii) **Contraposée** : $(\neg q \vee \neg r) \rightarrow \neg p$ **ou** $\neg (\neg q \vee \neg r) \vee \neg p$ **ou** $(q \wedge r) \vee \neg p$
(iv) **Table de vérité**

								Négation	Réciproque	Contraposée
p	**q**	**r**	¬q	¬r	¬q ∨ ¬r	q ∧ r	¬p	p ∧ (¬q ∨ ¬r)	(q ∧ r) → p	(¬q ∨ ¬r) → ¬p
V	V	V	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**
V	V	F	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**
V	F	V	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**
V	F	F	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**
F	V	V	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**
F	V	F	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**
F	F	V	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**
F	F	F	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**

b. **(1,5 pt)** $(p \vee q) \rightarrow r$

Réponse

(i) **Négation** : $(p \vee q) \wedge \neg r$
(ii) **Réciproque** : $r \rightarrow (p \vee q)$ **ou** $(\neg r \vee p \vee q)$
(iii) **Contraposée** : $\neg r \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ **ou** $r \vee (\neg p \wedge \neg q)$ **ou** $r \vee \neg (p \vee q)$
(iv) **Table de vérité**

								Négation	Réciproque	Contraposée
p	**q**	**r**	¬q	¬r	p ∨ q	¬p	¬p ∧ ¬q	(p ∨ q) ∧ ¬r	r → (p ∨ q)	¬r→ (¬p ∧ ¬q)
V	V	V	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**
V	V	F	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**
V	F	V	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**
V	F	F	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**
F	V	V	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**
F	V	F	F	V	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**
F	F	V	V	F	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**
F	F	F	V	V	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**

Exercice 5 (**5 points**)

Utilisez les règles d'inférence du calcul des prédicats pour démontrer :

$\exists x\,(R(x) \land \neg L(x))$, à partir de :

- H1 : $\exists x(C(x) \land \neg L(x))$
- H2 : $\forall x(C(x) \rightarrow R(x))$

Réponse :

	Justification
1. $\exists x(C(x) \land \neg L(x))$	H1
2. $C(a) \land \neg L(a)$	Instanciation existentielle de l'étape 1
3. $C(a)$	Simplification de l'étape 2
4. $\forall x(C(x) \rightarrow R(x))$	H2
5. $C(a) \rightarrow R(a)$	Instanciation universelle de l'étape 4
6. $R(a)$	Modus ponens & étapes 3 & 5
7. $\neg L(a)$	Simplification de l'étape 2
8. $R(a) \land \neg L(a)$	Conjonction des étapes 6 & 7
9. $\exists x(R(x) \land \neg L(x))$	Généralisation existentielle de l'étape 8

CQFD