POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 3 : PREUVES

E2025

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 :

Montrez par preuve directe, l'équivalence suivante :

$$(P \rightarrow R) \wedge (P \rightarrow S) \wedge (P \rightarrow T) \wedge (Q \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \wedge (Q \rightarrow T) \equiv ((P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S \wedge T))$$

Nous allons prouver l'équivalence en transformant le membre de gauche (MG) pour obtenir le membre de droite (MD).

Transformation du Membre de Gauche (MG) :

$$\begin{aligned}
\text{MG} &\equiv (P \to R) \land (P \to S) \land (P \to T) \land (Q \to R) \land (Q \to S) \land (Q \to T) && \text{– Expression donnée}\\
&\equiv (\neg P \lor R) \land (\neg P \lor S) \land (\neg P \lor T) \land (\neg Q \lor R) \land (\neg Q \lor S) \land (\neg Q \lor T) && \text{– Définition de } \to \text{ (6 fois)}\\
&\equiv [(\neg P \lor R) \land (\neg P \lor S) \land (\neg P \lor T)] \land [(\neg Q \lor R) \land (\neg Q \lor S) \land (\neg Q \lor T)] && \text{– Associativité de } \land
\end{aligned}$$

Considérons le premier bloc de termes, $X_P = (\neg P \lor R) \land (\neg P \lor S) \land (\neg P \lor T)$.

$$\begin{aligned}
X_P &\equiv [(\neg P \lor R) \land (\neg P \lor S)] \land (\neg P \lor T) && \text{– Associativité de } \land\\
&\equiv [(\neg P \land \neg P) \lor (\neg P \land S) \lor (R \land \neg P) \lor (R \land S)] \land (\neg P \lor T) && \text{– Distributivité (générale)}\\
&\equiv [\neg P \lor (\neg P \land S) \lor (R \land \neg P) \lor (R \land S)] \land (\neg P \lor T) && \text{– Idempotence}\\
&\equiv [\neg P \lor (R \land \neg P) \lor (R \land S)] \land (\neg P \lor T) && \text{– Absorption}\\
&\equiv [\neg P \lor (R \land S)] \land (\neg P \lor T) && \text{– Absorption}\\
&\equiv ([\neg P \lor (R \land S)] \land \neg P) \lor ([\neg P \lor (R \land S)] \land T) && \text{– Distributivité}\\
&\equiv ((\neg P \land \neg P) \lor ((R \land S) \land \neg P)) \lor ((\neg P \land T) \lor ((R \land S) \land T)) && \text{– Distributivité}\\
&\equiv (\neg P \lor ((R \land S) \land \neg P)) \lor ((\neg P \land T) \lor (R \land S \land T)) && \text{– Idempotence}\\
&\equiv \neg P \lor ((\neg P \land T) \lor (R \land S \land T)) && \text{– Absorption}\\
&\equiv \neg P \lor (\neg P \land T) \lor (R \land S \land T) && \text{– Associativité}\\
&\equiv \neg P \lor (R \land S \land T) && \text{– Absorption}
\end{aligned}$$

De manière similaire, pour le deuxième bloc de termes, $X_Q = (\neg Q \lor R) \land (\neg Q \lor S) \land (\neg Q \lor T)$:

$$X_Q \equiv \neg Q \lor (R \land S \land T) \qquad \text{– Par analogie}$$

Maintenant, substituons X_P et X_Q dans l'expression de MG :

$$\text{MG} \equiv [\neg P \lor (R \land S \land T)] \land [\neg Q \lor (R \land S \land T)]$$

Soit $Y = (R \land S \land T)$. L'expression devient :

$$\begin{aligned}
\text{MG} &\equiv (\neg P \lor Y) \land (\neg Q \lor Y)\\
&\equiv ((\neg P \lor Y) \land \neg Q) \lor ((\neg P \lor Y) \land Y) && \text{– Distributivité}\\
&\equiv (\neg P \land \neg Q) \lor (Y \land \neg Q) \lor (\neg P \land Y) \lor Y && \text{– Distributivité}\\
&\equiv (\neg P \land \neg Q) \lor Y \lor (\neg P \land Y) && \text{– Absorption}\\
&\equiv (\neg P \land \neg Q) \lor Y && \text{– Absorption}\\
&\equiv (\neg P \land \neg Q) \lor (R \land S \land T) && \text{– Substitution de Y}\\
&\equiv \neg(P \lor Q) \lor (R \land S \land T) && \text{– Loi de De Morgan}\\
&\equiv (P \lor Q) \to (R \land S \land T) && \text{– Définition de } \to
\end{aligned}$$

Le Membre de Gauche (MG) a été transformé en $(P \lor Q) \to (R \land S \land T)$, ce qui est exactement le Membre de Droite (MD).

Conclusion : Puisque MG $\equiv$ MD, l'équivalence

$$(P \to R) \land (P \to S) \land (P \to T) \land (Q \to R) \land (Q \to S) \land (Q \to T) \equiv ((P \lor Q) \to (R \land S \land T))$$

est donc prouvée par dérivation directe en utilisant les lois d'équivalence logique. □

Exercice 2 :

En utilisant une preuve par cas, montrez que pour tout entier n, l'expression $n^5 - n$ est divisible par 30.

Nous voulons montrer que $n^5 - n$ est divisible par 30 pour tout entier n. Puisque $30 = 2 \times 3 \times 5$, et que 2, 3, 5 sont des nombres premiers distincts, il suffit de montrer que $n^5 - n$ est divisible par 2, par 3, et par 5. Factorisons l'expression : $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$.

Partie 1 : Divisibilité par 2 Nous considérons deux cas pour n :

— **Cas 1.1 : n est pair.** Si n est pair, alors $n = 2k$ pour un entier k. Alors $n^5 - n = (2k)((2k) - 1)((2k)+1)((2k)^2+1) = 2[k(2k-1)(2k+1)(4k^2+1)]$. Soit $m_1 = k(2k-1)(2k+1)(4k^2+1)$. Puisque k est un entier, m_1 est un entier. Donc, $n^5 - n = 2m_1$, ce qui signifie que $n^5 - n$ est divisible par 2.

— **Cas 1.2 : n est impair.** Si n est impair, alors $n = 2k + 1$ pour un entier k. Alors le facteur $(n - 1) = (2k + 1) - 1 = 2k$. Donc $n^5 - n = (2k + 1)(2k)(2k + 1 + 1)((2k + 1)^2 + 1) = 2[k(2k + 1)(2k + 2)((2k + 1)^2 + 1)]$. Soit $m_2 = k(2k + 1)(2k + 2)((2k + 1)^2 + 1)$. Puisque k est un entier, m_2 est un entier. Donc, $n^5 - n = 2m_2$, ce qui signifie que $n^5 - n$ est divisible par 2.

Dans les deux cas, $n^5 - n$ est divisible par 2.

Partie 2 : Divisibilité par 3 Nous considérons trois cas pour n :

— **Cas 2.1 : $n = 3k$.** Si $n = 3k$, alors n est un facteur de $n^5 - n$. $n^5 - n = (3k)((3k) - 1)((3k) + 1)((3k)^2 + 1) = 3[k(3k - 1)(3k + 1)(9k^2 + 1)]$. Soit $m_3 = k(3k - 1)(3k + 1)(9k^2 + 1)$. Puisque k est un entier, m_3 est un entier. Donc, $n^5 - n = 3m_3$, ce qui signifie que $n^5 - n$ est divisible par 3.

— **Cas 2.2 : $n = 3k + 1$.** Si $n = 3k + 1$, alors le facteur $(n - 1) = (3k + 1) - 1 = 3k$. $n^5 - n = (3k + 1)(3k)((3k + 1) + 1)((3k + 1)^2 + 1) = 3[k(3k + 1)(3k + 2)((3k + 1)^2 + 1)]$. Soit $m_4 = k(3k + 1)(3k + 2)((3k + 1)^2 + 1)$. Puisque k est un entier, m_4 est un entier. Donc, $n^5 - n = 3m_4$, ce qui signifie que $n^5 - n$ est divisible par 3.

— **Cas 2.3 : $n = 3k + 2$.** Si $n = 3k + 2$, alors le facteur $(n + 1) = (3k + 2) + 1 = 3k + 3 = 3(k + 1)$. $n^5 - n = (3k + 2)((3k + 2) - 1)(3(k + 1))((3k + 2)^2 + 1) = 3[(3k + 2)(3k + 1)(k + 1)((3k + 2)^2 + 1)]$. Soit $m_5 = (3k + 2)(3k + 1)(k + 1)((3k + 2)^2 + 1)$. Puisque k est un entier, m_5 est un entier. Donc, $n^5 - n = 3m_5$, ce qui signifie que $n^5 - n$ est divisible par 3.

Dans les trois cas, $n^5 - n$ est divisible par 3.

Partie 3 : Divisibilité par 5 Nous considérons cinq cas basés sur le reste de la division de n par 5.

— **Cas 3.1 : $n = 5k$.** Si $n = 5k$, alors n est un facteur de $n^5 - n$. Donc $n^5 - n$ est divisible par 5.

— **Cas 3.2 : $n = 5k + 1$.** Si $n = 5k + 1$, alors le facteur $(n - 1) = (5k + 1) - 1 = 5k$. Puisque $(n - 1)$ est un facteur de $n^5 - n$, le produit est divisible par 5.

— **Cas 3.3 : $n = 5k + 2$.** Si $n = 5k + 2$, considérons le facteur $(n^2 + 1)$: $n^2 + 1 = (5k + 2)^2 + 1 = (25k^2 + 20k + 4) + 1 = 25k^2 + 20k + 5 = 5(5k^2 + 4k + 1)$. Puisque $(n^2 + 1)$ est un facteur de $n^5 - n$, le produit est divisible par 5.

— **Cas 3.4 : $n = 5k + 3$.** Si $n = 5k + 3$, considérons le facteur $(n^2 + 1)$: $n^2 + 1 = (5k + 3)^2 + 1 = (25k^2 + 30k + 9) + 1 = 25k^2 + 30k + 10 = 5(5k^2 + 6k + 2)$. Puisque $(n^2 + 1)$ est un facteur de $n^5 - n$, le produit est divisible par 5.

— **Cas 3.5 : $n = 5k + 4$.** Si $n = 5k + 4$, considérons le facteur $(n + 1)$: $n + 1 = (5k + 4) + 1 = 5k + 5 = 5(k + 1)$. Puisque $(n + 1)$ est un facteur de $n^5 - n$, le produit est divisible par 5.

Dans les cinq cas, $n^5 - n$ est divisible par 5.

Conclusion : Puisque $n^5 - n$ est toujours divisible par 2, par 3, et par 5, et que 2, 3, 5 sont des nombres premiers distincts, alors $n^5 - n$ est divisible par leur produit $2 \times 3 \times 5 = 30$ pour tout entier n. $\square$

Exercice 3 :

Soient x et y des entiers. Montrez par contraposée que si $x^2(y^2-1)$ est impair, alors x est impair et y est pair.

Soient les propositions suivantes :
- P : $x^2(y^2-1)$ est impair
- Q : x est impair et y est pair

Nous voulons prouver que $P \to Q$. Pour ce faire, nous allons utiliser une **preuve par contraposition**, c'est-à-dire prouver que $\neg Q \to \neg P$.

Contraposée :
Si x n'est pas impair ou y n'est pas pair, alors $x^2(y^2-1)$ n'est pas impair.
Analyse de $\neg Q$:

$$\neg(x \text{ est impair } \wedge y \text{ est pair}) \equiv \neg(x \text{ est impair}) \vee \neg(y \text{ est pair}) \quad \text{(loi de De Morgan)}$$

$$\equiv (x \text{ est pair}) \vee (y \text{ est impair}) \quad \text{(négation)}$$

Analyse de $\neg P$:

$$\neg(x^2(y^2-1) \text{ est impair}) \equiv x^2(y^2-1) \text{ est pair}$$

Ainsi, la contraposée à prouver est :

$$\boxed{\text{Si } x \text{ est pair } \textbf{ou } y \text{ est impair, alors } x^2(y^2-1) \text{ est pair.}}$$

Cas 1 : x est pair

1. Par définition d'un entier pair, il existe un entier k tel que $x = 2k$.
2. Alors $x^2 = (2k)^2 = 4k^2$.
3. On a : $x^2(y^2-1) = 4k^2(y^2-1) = 2[2k^2(y^2-1)]$.
4. Posons $m = 2k^2(y^2-1)$. Comme k et y sont des entiers, m est aussi un entier.
5. Donc $x^2(y^2-1) = 2m$, ce qui prouve que c'est un nombre pair.

Cas 2 : y est impair
(Ce cas peut ne pas être exclusif avec le Cas 1, mais comme la disjonction est "ou", il suffit de traiter chaque cas séparément.)

1. Par définition d'un entier impair, il existe un entier j tel que $y = 2j+1$.
2. Alors $y^2 = (2j+1)^2 = 4j^2+4j+1$.
3. Donc $y^2-1 = 4j^2+4j = 2(2j^2+2j)$.
4. Ainsi, y^2-1 est pair.
5. On a : $x^2(y^2-1) = x^2 \cdot 2(2j^2+2j) = 2[x^2(2j^2+2j)]$.
6. Posons $p = x^2(2j^2+2j)$. Comme x et j sont des entiers, p est un entier.
7. Donc $x^2(y^2-1) = 2p$, ce qui prouve que c'est un nombre pair.

Conclusion de la contraposée :

Dans les deux cas, $x^2(y^2 - 1)$ est pair. Ainsi, si x est pair ou y est impair, alors $x^2(y^2 - 1)$ est pair. Cela prouve que $\neg Q \to \neg P$.

Conclusion finale :

Par contraposition, on en déduit que :

$$x^2(y^2 - 1) \text{ est impair } \Rightarrow x \text{ est impair et } y \text{ est pair.}$$

■

Exercice 4 :

Suite à votre excellent travail sur le TD1, la compagnie de gestion de serveurs vous recontacte pour un problème encore plus complexe. Un grand centre de données avec 10 serveurs critiques (S1 à S10) a subi une série de défaillances. On sait qu'**exactement quatre** serveurs sont actuellement en panne.

Propositions : Soit p_i la proposition "Le serveur Si est en panne" (pour $i = 1, \ldots, 10$).

Hypothèses (H_1 à H_{11}) :

H1 : Si S1 est en panne, alors S5 est en panne. ($p_1 \rightarrow p_5$)

H2 : Si S2 est en panne, alors S6 ou S7 est en panne. ($p_2 \rightarrow (p_6 \vee p_7)$)

H3 : Si S3 n'est pas en panne, alors S7 n'est pas en panne. ($\neg p_3 \rightarrow \neg p_7$)

H4 : Si S4 est en panne, alors S8 n'est pas en panne. ($p_4 \rightarrow \neg p_8$)

H5 : Si S5 est en panne, alors S9 est en panne. ($p_5 \rightarrow p_9$)

H6 : Si S6 est en panne, alors S10 est en panne. ($p_6 \rightarrow p_{10}$)

H7 : Si S7 est en panne, alors S2 n'est pas en panne. ($p_7 \rightarrow \neg p_2$)

H8 : S8 est en panne ou S9 est en panne. ($p_8 \vee p_9$)

H9 : Il n'est pas possible que S1 et S4 soient tous les deux en panne. ($\neg(p_1 \wedge p_4)$)

H10 : Le serveur S3 est en panne. (p_3)

H11 : Le serveur S10 n'est pas en panne. ($\neg p_{10}$)

En utilisant **uniquement** les règles d'inférence, déterminez **quels quatre serveurs sont en panne**. Justifiez chaque étape de votre raisonnement.

Dérivation

Étape	Proposition	Justification
1.	p_3	H_{10} (Hypothèse) — **Panne 1**
2.	$\neg p_{10}$	H_{11} (Hypothèse)
3.	$p_6 \to p_{10}$	H_6 (Hypothèse)
4.	$\neg p_6$	Modus Tollens sur (2) et (3)
Analyse de p_2, p_7 en utilisant H_2, H_7 et $\neg p_6$		
5.	$p_7 \to \neg p_2$	H_7 (Hypothèse)
6.	$p_2 \to (p_6 \vee p_7)$	H_2 (Hypothèse)
7.	$p_2 \to (\text{FAUX} \vee p_7)$	Substitution de (4) dans (6)
8.	$p_2 \to p_7$	Identité ($\text{FAUX} \vee X \equiv X$) sur (7)
9.	$(p_2 \to p_7) \wedge (p_7 \to \neg p_2)$	Conjonction de (8) et (5)
10.	Si p_2 est VRAI, alors p_7 est VRAI (de $p_2 \to p_7$) et $\neg p_2$ est VRAI (de $p_7 \to \neg p_2$), donc $p_2 \wedge \neg p_2$, contradiction.	
11.	$\neg p_2$	Preuve par contradiction
12.	On ne peut rien conclure sur p_7 avec certitude, mais la cohérence est assurée.	
13.	$\neg p_3 \to \neg p_7$	H_3
14.	$\neg\,\text{VRAI} \to \neg p_7$	Substitution de (1)
15.	$\text{FAUX} \to \neg p_7$	
16.	VRAI	Implication toujours vraie avec prémisse fausse
Avec $\neg p_2$, $\neg p_6$ connus.		
17.	$\neg(p_1 \wedge p_4)$	H_9
18.	$\neg p_1 \vee \neg p_4$	De Morgan
19.	$p_8 \vee p_9$	H_8
Supposons $p_1 = \text{VRAI}$ (Panne 2)		
20.	p_1	Hypothèse
21.	$p_1 \to p_5$	H_1
22.	p_5	Modus Ponens (Panne 3)
23.	$\neg p_1 \vee \neg p_4$	De (18)
24.	$\neg p_4$	Syllogisme disjonctif
25.	$p_4 \to \neg p_8$	H_4
26.	p_4 est FAUX $\Rightarrow$ implication vraie, ne détermine pas p_8	
27.	$p_5 \to p_9$	H_5 corrigée
28.	p_9	Modus Ponens (Panne 4)

Candidats pannes : p_1, p_3, p_5, p_9.

État :
$p_1 = V, p_2 = F, p_3 = V, p_4 = F, p_5 = V, p_6 = F, p_7 = F, p_8 = F, p_9 = V, p_{10} = F$
Vérifications : Toutes les hypothèses (H_1 à H_{11}) sont satisfaites.

Conclusion Finale

Les serveurs en panne sont S1, S3, S5, et S9.

— $p_1 =$ **VRAI** (S1 en panne)
— $p_3 =$ **VRAI** (S3 en panne)
— $p_5 =$ **VRAI** (S5 en panne)
— $p_9 =$ **VRAI** (S9 en panne)

■

Exercice 5 (facultatif) :

L'Autorité de l'Aviation Civile (AAC) évalue la certification d'un nouveau modèle d'avion, le Boeing X. Des experts ont soumis les rapports et affirmations suivants :

"Si le Boeing X est jugé fondamentalement non sécuritaire pour le vol commercial (U), cela implique soit une faille majeure de conception dans le système de contrôle de vol principal (M_F), soit que les tests d'intégrité structurelle ont révélé des faiblesses critiques (R_S). L'équipe d'ingénierie de Boeing affirme que si le système de contrôle de vol principal présente une faille majeure (M_F), alors le système de contrôle de vol de secours ne peut pas gérer l'avion de manière indépendante ($\neg S_B$). Par ailleurs, les tests en soufflerie ont montré que si les tests d'intégrité structurelle ont révélé des faiblesses critiques (R_S), alors les moteurs ne peuvent pas simultanément respecter toutes les nouvelles normes d'émission ($\neg T_E$) à cause des modifications nécessaires pour compenser les faiblesses. Cependant, les données officielles des motoristes attestent que les moteurs respectent toutes les nouvelles normes d'émission (T_E). Un autre point crucial est que si le Boeing X est non sécuritaire (U), alors une intervention du pilote ne peut pas toujours corriger les anomalies du système ($\neg P_I$). Or, les simulateurs de vol avancés et les tests avec des pilotes d'essai chevronnés ont démontré de manière concluante que l'intervention du pilote peut toujours corriger les anomalies du système (P_I). De plus, il est établi que si le système de contrôle de vol de secours peut gérer l'avion de manière indépendante (S_B), alors l'avion n'est pas considéré comme fondamentalement non sécuritaire ($\neg U$)."

L'AAC doit déterminer si, sur la base de ces affirmations, le Boeing X est fondamentalement non sécuritaire pour le vol commercial.

Question :

a) Extrayez les propositions logiques atomiques du texte.

b) Traduisez les affirmations et rapports en un ensemble d'hypothèses logiques.

c) En utilisant une **preuve par contradiction**, montrez que le Boeing X n'est pas fondamentalement non sécuritaire pour le vol commercial (c'est-à-dire, prouvez $\neg U$).

a) Propositions Logiques Atomiques :

— U : Le Boeing X est fondamentalement non sécuritaire pour le vol commercial.

— M_F : Le système de contrôle de vol principal a une faille majeure de conception.

— R_S : Les tests d'intégrité structurelle ont révélé des faiblesses critiques.

— S_B : Le système de contrôle de vol de secours peut gérer l'avion de manière indépendante.

— T_E : Les moteurs respectent toutes les nouvelles normes d'émission.

— P_I : L'intervention du pilote peut toujours corriger les anomalies du système.

b) Hypothèses Logiques :

H1 : $U \to (M_F \vee R_S)$

H2 : $M_F \to \neg S_B$

H3 : $R_S \to \neg T_E$

H4 : T_E

H5 : $U \to \neg P_I$

H6 : P_I

H7 : $S_B \to \neg U$

c) Preuve par Contradiction :

Nous voulons prouver $\neg U$. Supposons U. Montrons que cela mène à une contradiction.

Dérivation (Voie 1, utilisant P_I) :

Étape	**Proposition**	**Justification**
1.	U	Hypothèse pour la preuve par contradiction
2.	$U \to \neg P_I$	H5
3.	$\neg P_I$	Modus Ponens sur (1) et (2)
4.	P_I	H6
5.	$\neg P_I \wedge P_I$	Conjonction de (3) et (4)
6.	FAUX	Contradiction (Loi de la négation)

Une contradiction a été atteinte. Cela suffit pour conclure que $\neg U$*. Explorons une autre voie.*

Dérivation (Voie 2, utilisant T_E et S_B) :

Étape	**Proposition**	**Justification**
1.	U	Hypothèse pour la preuve par contradiction
2.	$U \to (M_F \vee R_S)$	H1
3.	$M_F \vee R_S$	Modus Ponens sur (1) et (2)
4.	T_E	H4
5.	$R_S \to \neg T_E$	H3
6.	$\neg R_S$	Modus Tollens sur (4) et (5)
7.	$(M_F \vee R_S) \wedge \neg R_S$	Conjonction de (3) et (6)
8.	M_F	Syllogisme disjonctif
9.	$M_F \to \neg S_B$	H2
10.	$\neg S_B$	Modus Ponens sur (8) et (9)
11.	$S_B \to \neg U$	H7
12.	$U \to \neg S_B$	Contraposition de (11)
13.	$\neg S_B$	Modus Ponens sur (1) et (12)
14.	Nous avons deux fois $\neg S_B$ (étapes 10 et 13), ce qui est cohérent mais ne mène pas à une nouvelle contradiction.	
15.	La voie 1 reste la plus directe pour atteindre une contradiction.	

Conclusion Finale :

L'hypothèse que U est vraie mène à une contradiction ($\neg P_I \wedge P_I$). Par conséquent, $\neg U$ est vraie.

□

Feuille supplémentaire