POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 8 : **INDUCTION ET RÉCURSIVITÉ**

H2022

SOLUTIONNAIRE

Directives pour la remise :

- La remise est individuelle, mais le travail en équipe est encouragé.
- La remise est individuelle se fait à la fin de la séance de TD.
- Répondez directement sur ce document Word (docx). Dans l'intérêt de l'équité pour tous les étudiants, vous devez modifier le fichier Word. Modifiez le fichier **EXCLUT** le fait d'intégrer des scans de rédaction manuscrite ou d'y écrire avec un stylet.
- Lorsque vous avez terminé, générez un PDF avec le nom sous le format :
  Matricule-TDNuméro.pdf (exemple : 1234567-TD1.pdf).
- Téléversez votre fichier PDF dans la boîte de remise située dans la Zone TDs de la page Moodle du cours.
- Choisissez la boîte de remise qui correspond à votre section de TD.
- **Aucun retard et aucune remise par courriel ne seront acceptés.**
- **Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.**

Exercice 1. Montrez par récurrence que pour $n \geq 1$, on a :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (n^2(n+1)^2)/4$$

Réponse :

Pour n=1, on a : $(n^2(n + 1)^2)/4 = (1^2(1 + 1)^2)/4 = (1.2^2)/4 = 4/4 = 1$

$1^3 = 1$

L'égalité est donc établie pour n = 1.

Supposons pour n quelconque, avec $n \geq 1$, que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (n^2(n + 1)^2)/4$ et montrons que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = [(n+1)^2((n + 1)+1)^2]/4$.

Partons de l'expression de gauche.

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) + (n + 1)^3$

$= (n^2(n + 1)^2)/4 + (n + 1)^3$ car par hypothèse d'induction, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (n^2(n + 1)^2)/4$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n + 1)^3 = [n^2(n + 1)^2 + 4(n + 1)^3]/4$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n + 1)^3 = [(n + 1)^2 (n^2+ 4(n + 1))]/4$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n + 1)^3 = [(n + 1)^2 (n^2+ 4n + 4)]/4$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n + 1)^3 = [(n + 1)^2 (n+ 2)^2]/4$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n + 1)^3 = [(n+1)^2((n + 1) + 1)^2]/4.$

L'égalité est donc vraie pour n+1.

L'égalité est vraie pour n = 1. De plus, lorsque l'égalité est vraie pour n quelconque, elle est vrai pour n+1. On peut donc conclure que $n \geq 1$, on a : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (n^2(n+1)^2)/4$

Exercice 2. Montrez par induction que pour tout entier naturel n, on a :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = [n(n + 1)(2n + 1)]/6$$

Réponse :

Soit P(n) : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = [n(n + 1)(2n + 1)]/6$

Pour n=1, on a : $[n(n + 1)(2n + 1)]/6 = [1(1 + 1)(2+1)]/6 = (1.2.3)/6 = 6/6 = 1$

$1^2= 1$

P(1) est vraie.

Supposons pour un certain n que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = [n(n + 1)(2n + 1)]/6$ et montrons que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n + 1)^2= [(n + 1)((n + 1) + 1)(2(n + 1) + 1)]/6$.

Par hypothèse d'induction on a : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = [n(n + 1)(2n + 1)]/6$

En ajoutant $(n + 1)^2$ à chaque membre de l'égalité, on obtient :

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n + 1)^2 = [n(n + 1)(2n + 1)]/6 + (n + 1)^2$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n + 1)^2 = [n(n + 1)(2n + 1) + 6(n + 1)^2]/6$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n + 1)^2 = [(n + 1)(n(2n+1)+ 6(n + 1))]/6$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n + 1)^2 = [(n + 1)(2n^2+ n + 6n + 6)]/6$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n + 1)^2 = [(n + 1)(2n^2+ 7n + 6)]/6$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n + 1)^2 = [(n + 1)(n + 2)(2n + 3)]/6.$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n + 1)^2 = [(n + 1)((n + 1) + 1)(2n + 2 + 1)]/6.$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n + 1)^2 = [(n + 1)((n + 1) + 1)(2(n + 1) + 1)]/6.$

P(n+1) est donc vraie.

P(1) est vraie et pour $n \geq 0$, si P(n) est vrai, alors P(n+1) est vrai. On peut donc conclure que pour tout $n \geq 0$, on a : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = [n(n + 1)(2n + 1)]/6$

Exercice 3. Soit x un réel positif. Montrez en utilisant le principe d'induction que pour tout entier naturel n :

$$(1 + x)^n \geq 1 + n.x$$

Réponse :
Soit P(n) : $(1 + x)^n \geq 1 + n.x$
Pour n=0, on a :
$(1 + x)^0 = 1$ et $(1 + 0.x) = 1$
On a bien $(1 + x)^0 \geq 1 + 0.x$, car $1 \geq 1$. P(0) est donc vrai.
Supposons pour un certain $n \geq 0$ que P(n) est vrai.
Ainsi, par hypothèse d'induction, $(1 + x)^n \geq 1 + n.x$
x étant un réel positif, (1 + x) est positif. On peut donc multiplier les deux membres de l'inégalité par (1+x). Ce qui donne successivement :
$(1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + n.x)$
$(1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + n.x + x + n.x^2)$
$(1 + x)^{(n+1)} \geq (1 + n.x + x + n.x^2)$, car $(1 + x)(1 + x)^n = (1 + x)^{(n+1)}$
$(1 + x)^{(n+1)} \geq [1 + (n+1)x + n.x^2]$
Or $[1 + (n+1).x + n.x^2] \geq [1 + (n+1).x]$
Donc $(1 + x)^{(n+1)} \geq [1 + (n+1).x]$
P(n+1) est vraie.

P(0) est vrai et $\forall n \geq 0$ $P(n) \rightarrow P(n+1)$ est vraie
On peut alors conclure que pour tout entier naturel n, $(1 + x)^n \geq 1 + n.x$.

Exercice 4. La fonction d'Ackermann est définie comme suit :

$$\boldsymbol{A(m,n) = \begin{cases} 2n, & si\ m = 0 \\ 0, & si\ m \geq 1\ et\ n = 0 \\ 2, & si\ m \geq 1\ et\ n = 1 \\ A(m-1, A(m, n-1)), & si\ m \geq 1\ et\ n \geq 2 \end{cases}}$$

Où m et n sont des entiers naturels.

a) Calculez A(1, 0)

Réponse :
Calculer A(1, 0) revient à considérer que m = 1 et n = 0.
Par définition, lorsque $m \geq 1$ et n = 0, on a A(m, n) = 0.
D'où **A(1, 0) = 0**.

b) Calculez A(0, 1)

Réponse :

Calculer A(0, 1) revient à considérer que m = 0 et n = 1.

Par définition, lorsque m = 0, on a A(m, n) = 2n.

Ainsi A(0, 1) = 2.1 =2

D'où **A(0, 1) = 2**.

c) Calculez A(1, 1)

Réponse :

Calculer A(1, 1) revient à considérer que m = 1 et n = 1.

Par définition, lorsque m ≥ 1 et n = 1, on a A(m, n) = 2.

D'où **A(1, 1) = 2**.

d) Calculez A(2, 2)

Réponse :

Calculer A(2, 2) revient à considérer que m = 2 et n = 2.

Par définition, lorsque m ≥ 1 et n ≥ 2, on a A(m, n) = A(m-1, A(m, n-1)).

Ainsi, A(2, 2) = A(1, A(2, 1))

Déterminons d'abord A(2, 1).

Par définition, lorsque m ≥ 1 et n = 1, on a A(m, n) = 2.

Donc **A(2, 1) = 2**.

Remplaçons A(2, 1) dans l'expression de A(2, 2).

On a : A(2,2) = A(1, A(2, 1)) = A(1, 2).

Par définition, lorsque m ≥ 1 et n ≥ 2, on a A(m, n) = A(m-1, A(m, n-1)).

Alors, A(1, 2) = A(0, A(1, 1)).

Or A(1, 1) = 2, donc A(1, 2) = A(0, A(1, 1)) = A(0, 2).

Cela revient à dire que A(2,2) = A(0, 2).

On sait par définition que, lorsque m = 0, on a A(m, n) = 2n.

On en déduit que A(0, 2) = 2.2 = 4

D'où **A(2, 2) = 4**.

e) En utilisant le principe d'induction forte, montrez que A(m, 2) = 4 lorsque m ≥ 1.

Réponse :

Considérons m = 1. L'expression A(m, 2) = A(1, 2).

Nous savons d'après le calcul précédent que A(1, 2) = A(0, 2) = A(2,2) =4. L'égalité est donc vérifiée pour

Supposons jusqu'à l'ordre m que A(k, 2) = 4 pour k ≤ m. Montrons que A(m+1, 2) = 4.

A(m+1, 2) = A(m, A(m+1, 1))

Or par définition, lorsque m ≥ 1 et n = 1, on a A(m, n) = 2.

Donc A(m+1, 1) = 2. En remplaçant dans A(m+1, 2) on a :

$A(m+1, 2) = A(m, A(m+1, 1)) = A(m, 2)$
Par hypothèse d'induction, $A(m, 2) = 4$.
Donc $A(m+1, 2) = 4$.

On a $A(1, 2) = 4$ et jusqu'à un certain ordre m, $(A(m, 2) \rightarrow A(m+1, 2))$ est vrai.
D'où $\forall m \geq 1$, $A(m, 2) = 4$.

f) En utilisant le principe d'induction forte, montrez que $A(1, n) = 2^n$ lorsque $n \geq 1$.

Réponse :

Considérons $n = 1$. L'expression $A(1, n) = A(1, 1)$.
Nous savons d'après le calcul de la question c) que $A(1, 1) = 2$.
Puis que $2 = 2^1$, on a $A(1, 1) = 2^1$. L'égalité est donc vérifiée pour $n = 1$.
Supposons jusqu'au rang n que $A(1, n) = 2^n$.
Montrons que $A(1, n+1) = 2^{(n+1)}$.
$A(1, n+1) = A(0, A(1, n))$
Or par hypothèse, $A(1, n) = 2^n$.
Donc $A(1, n+1) = A(0, 2^n)$
Par définition, lorsque $m = 0$, on a : $A(m, n) = 2n$.
Donc $A(0, 2^n) = 2.\ 2^n$.
En remplaçant dans $A(1, n+1)$ on a :
$A(1, n+1) = A(0, 2^n) = 2.\ 2^n$
Donc $A(1, n+1) = 2^{(n+1)}$.

On a $A(1, 1) = 2$ et jusqu'à un certain rang n, si $A(1, n)$ est vrai, alors $A(1, n+1)$ est vrai.
D'où $\forall n \geq 1$, $A(1, n) = 2^n$.

Exercice 5. Proposez un algorithme récursif de calcul de la puissance n-ième ($n \in \mathbb{N}$) d'un nombre réel positif non nul a en supposant que les seules opérations de base dont vous disposez sont :

- le produit de deux réels a et b : a x b
- le retrait de 1 à un entier a : a -1
- la comparaison à 0 d'un entier a : a = 0

Réponse :

Exemple de pseudo-code d'algorithme.

```
Puissance (a : réel positif non nul, n : entier)
        Si n=0, alors retourner 1
        Sinon retourner (a x Puissance(a, n-1));
```