POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 6 : ALGORITHMES ET ANALYSE DE COMPLEXITÉ

A2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1.
Donnez une évaluation du comportement asymptotique de chacune des fonctions suivantes, en utilisant le $\boldsymbol{O}$. Justifiez votre réponse.

a) $[n^4 + 2^4][n^3 + 2^3]$

Solution :

D'une part, $[n^4 + 2^4]$ est $O(n^4)$.
D'autre part, $[n^3 + 2^3]$ est $O(n^3)$.
$[n^4 + 2^4][n^3 + 2^3]$ est donc $O(n^7)$.

b) $\left[n \log\left(n^{(n^2)}\right) + n^3\right][n^2 + 1]$

Solution :

$n \log\left(n^{(n^2)}\right) = n \cdot n^2 \log n = n^3 \log n.$
Alors, $\left[n\, log\left(n^{(n^2)}\right) + n^3\right]$ est $O(n^3 \log n)$.
Et $[n^2 + 1]$ est $O(n^2)$.
Ainsi, $\left[n\, log\left(n^{(n^2)}\right) + n^3\right][n^2 + 1]$ est $O(n^5 \log n)$.

c) $[2^n + n!][\log(n^2 + 1) + n^3]$

Solution :

D'une part, $[2^n + n!]$ est $O(n!)$.
D'autre part, $[log(n^2 + 1) + n^3]$ est $O(n^3)$.
$[2^n + n!][log(n^2 + 1) + n^3]$ est donc $O(n^3 n!)$.

d) $[\log n + 2][n^3 + n^2 \log n] + [6^8 \log n + 8^6][n^3 + 1]$

Solution :

Dans un premier temps,
On a $[\log n + 2] \in O(\log n)$.
Aussi, $[n^3 + n^2\, log\, n] \in O(n^3)$.
Alors, $[\log n + 2][n^3 + n^2\, log\, n] \in O(n^3 \log n)$.

Dans un deuxième temps,
On a $[6^8\, log\, n + 8^6] \in O(\log n)$.
Et $[n^3 + 1] \in O(n^3)$.
Alors, $[6^8\, log\, n + 8^6][n^3 + 1] \in O(n^3 \log n)$.

Ainsi, $[\log n + 2][n^3 + n^2\, log\, n] + [6^8\, log\, n + 8^6][n^3 + 1]$ est donc $O(n^3 \log n)$.

e) $[n! + 5^n][5^n + n\,3^n + n^n]$

Solution :

D'une part, $[n! + 5^n]$ est $O(n!)$.
D'autre part, $[5^n + n\,3^n + n^n]$est $O(n^n)$.
$[n! + 5^n][5^n + n\,3^n + n^n]$ est donc $O(n^n n!)$.

Exercice 2

Soit $n \geq 1$. Montrez que n^3 n'est pas $O(n^2 + 4n + 17)$.

Solution :

Raisonnons par l'absurde.
Supposons que n^3 est $O(n^2 + 4n + 17)$.
Par définition, il existe donc des constantes c et k telles que $n > k$ et $n^3 \leq c(n^2 + 4n + 17)$.
Si on divise les deux côtés de l'inégalité par n^3(puisque n^3 est positif pour $n \geq 1$), on obtient :

$$1 \leq c\left(\frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{17}{n^3}\right)$$

De plus lorsque $n \geq 1$, $\frac{4}{n^2} \leq \frac{4}{n}$ et $\frac{17}{n^3} \leq \frac{17}{n}$.

On peut déduire que :

$$1 \leq c\left(\frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{17}{n^3}\right) \leq c\left(\frac{1}{n} + \frac{4}{n} + \frac{17}{n}\right) \leq c \cdot \frac{22}{n}$$

Or lorsque $n = 23c$, l'inégalité devient :

$$1 \leq c \cdot \frac{22}{23c} \leq \frac{22}{23} \quad \text{, car c} > 0$$

Cependant, on obtient $1 \leq \frac{22}{23}$ ce qui est absurde puisque cette inégalité est fausse.
Ainsi, il y a une contradiction. Il faut donc, n^3 n'est pas $O(n^2 + 4n + 17)$.
CQFD

Exercice 3

Soit $k, m \in \{n \mid (n \in \mathbb{N}) \wedge (n \geq 3)\}$. Montrez que

$$\sum_{i=3}^{m} i^k \in O(m^{k+1})$$

Solution :

Pour $m \geq 3$, on a :

$$3^k \leq m^k$$
$$4^k \leq m^k$$
$$5^k \leq m^k$$
$$\dots$$
$$\dots$$
$$\dots$$
$$(m-1)^k \leq m^k$$
$$m^k \leq m^k$$

En sommant membre à membre les m inégalités, on obtient :

$$3^k + 4^k + 5^k + \dots + (m-1)^k + m^k \leq \underbrace{m^k + m^k + m^k + \dots + m^k + m^k}_{(m-2)\ fois}$$

Ainsi, m^k étant sommés $(m-2)$ fois dans la partie droite de l'inégalité, on peut réécrire l'inégalité comme suit :

$$3^k + 4^k + 5^k + \dots + (m-1)^k + m^k \leq (m-2) \cdot m^k$$
$$\Leftrightarrow 3^k + 4^k + 5^k + \dots + (m-1)^k + m^k \leq m^{k+1} - 2\, m^k$$
$$\Leftrightarrow 3^k + 4^k + 5^k + \dots + (m-1)^k + m^k \leq m^{k+1}$$

En posant $c = 1$, on a :

$$3^k + 4^k + 5^k + \dots + (m-1)^k + m^k \leq c \cdot m^{k+1}$$

Rappelons que cette inégalité est établie pour $m \geq 3$.
En considérant les témoins $k = 3$ et $c = 1$, on a donc :

$$\text{Pour } m \geq k \text{ et } c = 1, \quad 3^k + 4^k + 5^k + \dots + (m-1)^k + m^k \leq c \cdot m^{k+1}$$

D'où

$$\sum_{i=3}^{m} i^k \in O\left(m^{k+1}\right)$$

CQFD

Exercice 4

Démontrez que $\log_2(n^2 + 1) \in \Theta(\log_2(\mathrm{n}))$.

Solution :

Il faut trouver c_1, c_2 et k tel que :

$$c_1 \log_2(n) \leq \log_2(n^2+1) \leq c_2 \log_2(n) \quad \text{pour } n > k$$

On a

$$\log_2(n) \leq \log_2(n^2+1)$$

Nous pouvons donc choisir $c_1 = 1$ pour tout $n > 0$.

Ensuite, on a

$$\log_2(n^2+1) \leq \log_2(2\,n^2) \qquad \text{lorsque } n > 2$$

Alors,

$$\log_2(n^2+1) \leq 1 + 2\log_2(n) \qquad \text{lorsque } n > 2$$

Or,

$$\log_2(n^2+1) \leq 1 + 2\log_2(n) \leq 3\log_2(n) \qquad \text{lorsque } n > 2$$

Soit,

$$\log_2(n^2+1) \leq 3\log_2(n) \qquad \text{lorsque } n > 2$$

Nous pouvons donc choisir $c_2 = 3$ et $k = 2$.

Ainsi, en choisissant par exemple $c_1 = 1, c_2 = 3$ et $k = 2$, on a :

$$\log_2(n^2+1) \in \Theta(\log_2(\mathrm{n}))$$

CQFD

Exercice 5

La double sommation, également appelée somme double, est couramment utilisée en mathématiques, en informatique et dans nombreux autres domaines pour calculer des sommes de valeurs dans une matrice ou un tableau de données bidimensionnel.

Soit $n \geq 1$. Montrez que

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} 3i}{n+1} \in O(n^2)$$

Solution :

Commençons par simplifier l'expression $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i$.

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} 3i = 3\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} i\right) = 3\sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2} = \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{n}(j^2+j) = \frac{3}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j^2 + \sum_{j=1}^{n} j\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{6}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{n(n+1)\big((2n+1)+3\big)}{6}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{n(n+1)\cdot 2(n+2)}{6}\right)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{2}$$

$$= \frac{n^3+3n^2+2n}{2}$$

On a donc que :

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} 3i}{n+1} = \frac{n^3+3n^2+2n}{2n+2}$$

<u>Approche $(\mathbf{I.})$: Recherche de témoins</u>

Par définition, si $\frac{n^3+3n^2+2n}{2n+2}$ est $O(n^2)$, alors il existe des constantes c et k telles que $n > k$ et $\frac{n^3+3n^2+2n}{2n+2} \leq c \cdot n^2$

Supposons que l'inégalité est vérifiée et trouvons les valeurs c et k.
On sait que pour $n > 0,\ \ 2n+2 > 0$. On peut donc écrire successivement :

$$\begin{aligned}\frac{n^3+3n^2+2n}{2n+2} \leq c\cdot n^2 &\Leftrightarrow n^3+3n^2+2n \leq c\cdot(2n+2)n^2 \\ &\Leftrightarrow n^3+3n^2+2n \leq 2c\cdot n^3 + 2c\cdot n^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq (2c-1)n^3 + (2c-3)n^2 - 2n\end{aligned}$$

En posant $c = 1$, on a :

$$\begin{aligned}0 \leq (2c-1)n^3 + 3(2c-1)n^2 - 2n &\Leftrightarrow 0 \leq n^3 - n^2 - 2n \\ &\Leftrightarrow 0 \leq n(n^2-n-2) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \underbrace{n}_{\text{(i.)}}\underbrace{(n+1)}_{\text{(ii.)}}\underbrace{(n-2)}_{\text{(iii.)}}\end{aligned}$$

i. Lorsque $n \geq 2$, on peut déduire que $n \geq 0$.
ii. Lorsque $n \geq 2$, on a $(n+1) \geq 3$ et on déduit que $(n+1) \geq 0$.
iii. Lorsque $n \geq 2$, on a $(n-2) \geq 0$.

Ainsi lorsque $n \geq 2$, $0 \leq n(n+1)(n-2)$ est vérifiée.

On peut donc considérer que lorsque $c = 1$ et $k = 1$, on a pour $n > k$:

$$\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{2n + 2} \leq c \cdot n^2$$

Approche $(\mathbf{II.})$: Utilisation des combinaisons de fonctions en grand-O

Alternativement, selon le théorème sur les combinaisons de fonctions en Grand-O, on peut manipuler l'expression $\frac{n^3+3n^2+2n}{2n+2}$ en utilisant la propriété $O\left(\frac{h}{f}\right) = \frac{O(h)}{O(f)}$. Nous avons un polynôme de degré 3 au numérateur ($n^3 + 3n^2 + 2n$) et un polynôme de degré 1 au dénominateur ($2n + 2$). Le rapport des deux polynômes nous donne $O(n^2)$.

D'où

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} 3i}{n+1} \in O(n^2)$$

CQFD

Exercice 6

En vous basant sur les définitions des notations de Landau que sont : $\boldsymbol{O}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Theta}$, dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Il n'est pas nécessaire de justifier vos réponses pour cette question.

a) $[\log(n)]^3 \in \Theta(\sqrt{n} \log n)$

Solution :

L'affirmation est **fausse**.
$(\log n)^3 \in \Omega(\sqrt{n} \log n)$, mais $(\log n)^3 \notin O(\sqrt{n} \log n)$.

b) $\frac{7}{11} n^{\frac{11}{7}} \in \Theta\left(\mathrm{n}^{\frac{11}{7}}\right)$

Solution :

L'affirmation est **vraie**.
$\frac{7}{11} n^{\frac{11}{7}} \in O\left(n^{\frac{11}{7}}\right)$, et $\frac{7}{11} n^{\frac{11}{7}} \in \Omega(n^{\frac{11}{7}})$.

c) $[n! + 6^n][8! \log(\log(n^n)) + 48] \in O(n! \log n)$

Solution :

L'affirmation est **vraie**.
D'une part, $[n! + 6^n] \in O(n!)$.
D'autre part, $8!\, log(log(n^n)) = 8! \log(n \log n) = 8! \log n + 8! \log(\log n)$.
Alors, $[8!\, log(log(n^n)) + 48] \in O(\log n)$.
Et donc, $[n! + 6^n][8!\, log(log(n^n)) + 48] \in O(n! \log n)$.

d) $[n^n + n\, 2^n + 7^n][n^4 + 7^4] \in \Omega(n^{n+4})$

Solution :

L'affirmation est **vraie**.
D'une part, $[n^n + n \cdot 2^n + 7^n] \in \Omega(n^n)$.
D'autre part, $[n^4 + 7^4] \in \Omega(n^4)$.
Ainsi, $[n^n + n \cdot 2^n + 7^n][n^4 + 7^4] \in \Omega(n^{n+4})$.

e) $[2n^2 - 7] \in \Omega(n^2)$

Solution :

L'affirmation est **vraie**.
$n^2 < [2n^2 - 7]$ pour $n > k$ avec $k = 3$.

Exercice 7

Donnez une évaluation de la complexité en $\boldsymbol{\Theta}$ de $2^{n+5} + 5^{n-1}$. Justifiez votre réponse.

Solution :

Évaluation de la complexité en Θ :
$2^{n+5} + 5^{n-1} \in \Theta(5^n)$.

Justification :
D'une part, montrons que $2^{n+5} + 5^{n-1} \in O(5^n)$.
Soit, $2^{n+5} \in O(2^n)$.
Soit aussi, $5^{n-1} \in O(5^n)$.
Alors, $2^{n+5} + 5^{n-1} \in O(\max(2^n, 5^n))$.
Donc, $2^{n+5} + 5^{n-1} \in O(5^n)$.

D'autre part, montrons que $5^n \in O(2^{n+5} + 5^{n-1})$.
Cherchons c et k tel que $5^n \leq c\,(2^{n+5} + 5^{n-1})$ pour $n \geq k$.

En prenant $c = 5$, on a :
$c \cdot (2^{n+5} + 5^{n-1}) = 5 \cdot (2^{n+5} + 5^{n-1})$
$= 5 \cdot 2^{n+5} + 5^{n}$
On a donc $5^n \leq 5 \cdot 2^{n+5} + 5^n$ pour tout entier positif n.
À gauche et à droite de l'inégalité, on a bien 5^n.
Celui de droite est augmenté de $5 \cdot 2^{n+5}$, ce qui explique le sens de l'inégalité.
C'est-à-dire $5^n \leq c \cdot (2^{n+5} + 5^{n-1})$ pour $n \geq 0$.
En prenant $k = 1$ et $c = 5$, on a bien $5^n \leq c \cdot (2^{n+5} + 5^{n-1})$.
Ce qui permet de conclure que $5^n \in O(2^{n+5} + 5^{n-1})$.