POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810
STRUCTURES DISCRÈTES

TD 4 : ENSEMBLES ET FONCTIONS

E2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1
Soit l'ensemble $\mathcal{B} = \{0, 1\}$. Définissez par énumération l'ensemble $P(P(\mathcal{B}))$.

Solution :

$P(\mathcal{B}) = \{\phi, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$

Donc, $P(P(\mathcal{B})) = \{ \ \phi,$
$\{\phi\},\ \{\{0\}\},\ \{\{1\}\},\ \{\{0,1\}\}$
$\{\phi,\ \{0\}\},\ \{\phi,\ \{1\}\},\ \{\phi,\ \{0,1\}\},\ \{\{0\},\ \{1\}\},\ \{\{0\},\ \{0,1\}\},\ \{\{1\},\ \{0,1\}\},$
$\{\phi,\ \{0\},\ \{1\}\},\ \{\phi,\ \{0\},\ \{0,1\}\},\ \{\phi,\ \{1\},\ \{0,1\}\},\ \{\{0\},\ \{1\},\ \{0,1\}\},$
$\{\phi,\ \{0\},\ \{1\},\ \{0,1\}\} \ \}$

Exercice 2
Soit deux ensembles Ω et Ψ. Montrez que $(P(\Omega) \cup P(\Psi)) \subseteq P(\Omega \cup \Psi)$.

Solution :

Soit $A \in (P(\Omega) \cup P(\Psi))$

Montrons que $A \in (\Omega \cup \Psi)$.
On sait que,
$$[A \in (P(\Omega) \cup P(\Psi))] \rightarrow [A \in P(\Omega) \vee A \in P(\Psi)] \qquad (1)$$

De plus,
$$[A \in P(\Omega)] \rightarrow [A \in P(\Omega \cup \Psi)]$$

Et similairement,
$$[A \in P(\Psi)] \rightarrow [A \in P(\Omega \cup \Psi)]$$

Par suite,
$$[A \in P(\Omega) \vee A \in P(\Psi)] \rightarrow [A \in P(\Omega \cup \Psi)] \qquad (2)$$

Ainsi par (1) et (2), on obtient
$$[A \in (P(\Omega) \cup P(\Psi))] \rightarrow [A \in P(\Omega \cup \Psi)]$$

CQFD

Exercice 3

Soit E l'ensemble univers et A, B deux ensembles de cet univers. Simplifiez l'expression :

$$\overline{\bar{A} \cap (A \cup \bar{B})} \cap \bar{B}$$

Justifiez toutes les étapes de votre réponse.

Solution :

$$\begin{aligned}
\overline{\bar{A} \cap (A \cup \bar{B})} \cap \bar{B} \quad & = \left(\bar{\bar{A}} \cup \overline{(A \cup \bar{B})}\right) \cap \bar{B} && \text{Loi de De Morgan} \\
& = \left(A \cup \overline{(A \cup \bar{B})}\right) \cap \bar{B} && \text{Loi de complémentation} \\
& = \left(A \cup (\bar{A} \cap \bar{\bar{B}})\right) \cap \bar{B} && \text{Loi de De Morgan} \\
& = \left(A \cup (\bar{A} \cap B)\right) \cap \bar{B} && \text{Loi de complémentation} \\
& = \left((A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B)\right) \cap \bar{B} && \text{Distributivité} \\
& = \left(E \cap (A \cup B)\right) \cap \bar{B} && \text{Loi du complémentaire} \\
& = (A \cup B) \cap \bar{B} && \text{Identité} \\
& = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{B}) && \text{Distributivité} \\
& = (A \cap \bar{B}) \cup \phi && \text{Loi du complémentaire} \\
& = (A \cap \bar{B}) && \text{Identité}
\end{aligned}$$

Exercice 4

Soient les ensembles de notes de musique sous la notation solfège :

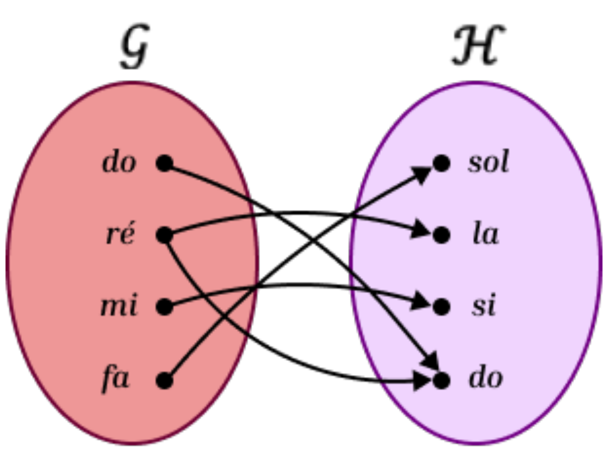
- $\mathcal{G} = \{do, ré, mi, fa\}$
- $\mathcal{H} = \{sol, la, si, do\}$

Et une fonction $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$.

Dans chaque cas, précisez si ψ telle que définie est (I.) une fonction, (II.) une fonction injective, (III.) une fonction surjective ou (IV.) une fonction bijective. Justifiez vos réponses pour chacune des propriétés.

a) $\psi(do) = do, \;\; \psi(ré) = do, \;\; \psi(mi) = si, \;\; \psi(ré) = la, \;\; \psi(fa) = sol$

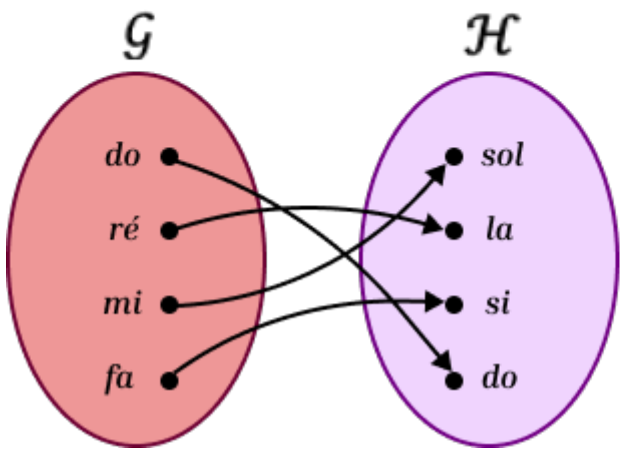
Solution :



(I.) ψ n'est pas une fonction, car l'élément $ré$ de $\mathcal{G}$ est associé à deux éléments de $\mathcal{H}$: do et la.
(II.) ψ n'est pas une fonction injective puisqu'elle n'est pas une fonction.
(III.) ψ n'est pas une fonction surjective puisqu'elle n'est pas une fonction.
(IV.) ψ n'est pas une fonction bijective puisqu'elle n'est pas une fonction.

b) $\psi(do) = do,\ \ \psi(ré) = la,\ \ \psi(mi) = sol,\ \ \psi(fa) = si$

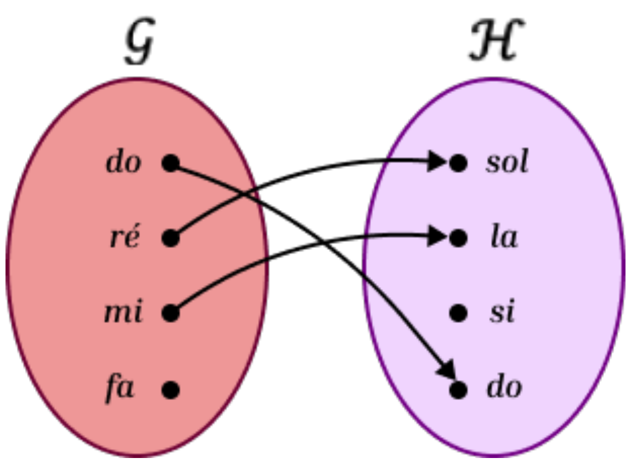
Solution :



(I.) ψ est une fonction, car les éléments $do, ré, mi$, et fa de $\mathcal{G}$ sont associés chacun à exactement un élément de $\mathcal{H}$.
(II.) ψ est une fonction injective puisque chaque élément de $\mathcal{G}$ a une image distincte de celle des autres éléments de $\mathcal{G}$
(III.) ψ est une fonction surjective puisque chaque élément de $\mathcal{H}$ au moins un antécédent dans de $\mathcal{G}$.
(IV.) ψ est une fonction bijective puisqu'elle est à la fois injective et surjective.

c) $\psi(do) = do,\ \ \psi(ré) = sol,\ \ \psi(mi) = la$

Solution :



(I.) ψ est une fonction, car les éléments $do, ré$ et mi de $\mathcal{G}$ sont associés chacun à exactement un élément de $\mathcal{H}$. L'élément fa de $\mathcal{G}$ quant à lui n'est associé à aucun élément de $\mathcal{H}$.
(II.) ψ n'est pas une fonction injective puisque l'élément fa de $\mathcal{G}$ n'a pas d'image.
(III.) ψ n'est pas une fonction surjective puisque l'élément si n'a pas d'antécédent dans de $\mathcal{G}$.
(IV.) ψ n'est pas une fonction bijective puisqu'elle est ni injective, ni surjective.

Exercice 5

On définit une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ tel que :

$$h(x) = \frac{x}{|x| + 1}$$

La fonction est-elle injective ? Justifiez votre réponse.

Solution :

Procédons avec une preuve par cas.
Si x est négatif, sa valeur absolue vaut $-x$. Alors la fonction s'écrit comme suit : $h(x) = \frac{x}{1-x}$
Si x est positif ou nul, sa valeur absolue vaut x. Alors la fonction s'écrit comme suit : $h(x) = \frac{x}{1+x}$

Les deux sont donc :
Cas 1 : x est négatif.
Cas 2 : x est positif ou nul.

Cas 1 : x est négatif.
On le fait avec une preuve directe.
Supposons deux réels négatifs a et b tel que $h(a) = h(b)$.
Si $h(a) = h(b)$, alors $a(1 - b) = b(1 - a)$
On a donc $a - ab = b - ab$
Si $h(a) = h(b)$, alors $a = b$
h est donc injective sur $\mathbb{R}_-$.

Cas 2 : x est positif ou nul.
On le fait avec une preuve directe.
Supposons deux réels positifs ou nuls a et b tel que $h(a) = h(b)$.
Si $h(a) = h(b)$, alors $a(1 - b) = b(1 - a)$
On a donc $a + ab = b + ab$
Si $h(a) = h(b)$, alors $a = b$
h est donc injective sur $\mathbb{R}_+$.

Synthèse
Dans les deux cas, nous avons montré que h est injective.
Par conséquent, h est injective sur tout $\mathbb{R}$.

Exercice 6

On définit une fonction de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que :

$$\vartheta(x) = (x, (x-1)^3)$$

La fonction est-elle surjective ? Justifiez votre réponse.

Solution :

Nous pouvons constater que l'image (0,0) n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{Z}$.
La fonction ϑ n'est donc pas surjective.

Exercice 7

Soit A et B deux ensembles. Montrez que :

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

Solution :

$$\begin{aligned}
x \in (A - B) \cup (B - A) &\Leftrightarrow [x \in (A - B)] \lor [x \in (B - A)] \\
&\Leftrightarrow [x \in A \land x \notin B] \lor [x \in B \land x \notin A] \\
&\Leftrightarrow [x \in A \lor (x \in B \land x \notin A)] \land [x \notin B \lor (x \in B \land x \notin A)] \\
&\Leftrightarrow [(x \in A \lor x \in B) \land (x \in A \lor x \notin A)] \land [(x \notin B \lor x \in B) \land (x \notin B \lor x \notin A)] \\
&\Leftrightarrow [x \in A \lor x \in B] \land [x \notin B \lor x \notin A] \\
&\Leftrightarrow [x \in A \lor x \in B] \land [\neg x \in B \lor \neg x \in A] \\
&\Leftrightarrow [x \in A \lor x \in B] \land \neg[x \in B \land x \in A] \\
&\Leftrightarrow [x \in (A \cup B)] \land \neg[x \in (B \cap A)] \\
&\Leftrightarrow x \in [(A \cup B) - (A \cap B)]
\end{aligned}$$

Ainsi, $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.
CQFD

Exercice 8

Soit $(V_n)_{n \epsilon \mathbb{N}^*}$ une suite tel que :

$$V_n = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}{(\log_4(6))^{n+3}}$$

a) Montrez que $(V_n)_{n \epsilon \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique.

Solution :

$$V_1 = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{1+1}}{(\log_4(6))^{1+3}} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2}}{(\log_4(6))^{4}} = \frac{2}{(\log_4(6))^{4}}$$

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{(n+1)+1}}{(\log_4(6))^{(n+1)+3}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1+1}}{(\log_4(6))^{n+3+1}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{2}\right)}{\log_4(6)} \cdot \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}{(\log_4(6))^{n+3}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{2}\right)}{\log_4(6)} \cdot V_n \end{aligned}$$

Ainsi, $(V_n)_{n \epsilon \mathbb{N}^*}$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{\left(\sqrt{2}\right)}{\log_4(6)}$ et de premier terme $V_1 = \frac{2}{(\log_4(6))^4}$.

b) Calculez la somme des cent premiers termes de $(V_n)_{n \epsilon \mathbb{N}^*}$. Montrez toutes les étapes de votre réponse.

Solution :

Soit S_{100} la somme des cent premiers termes de $(V_n)_{n \epsilon \mathbb{N}^*}$.

Donc,

$$\begin{aligned} S_{100} &= V_1 + V_2 + \cdots + V_{99} + V_{100} \\ &= \sum_{k=1}^{100} V_k \\ &= \sum_{k=1}^{100} \frac{2}{(\log_4(6))^4} \left(\frac{\left(\sqrt{2}\right)}{\log_4(6)}\right)^k \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{99} \frac{2}{(\log_4(6))^4} \left(\frac{(\sqrt{2})}{\log_4(6)}\right)^{k+1}$$, par glissement d'indice

$$= \frac{2}{(\log_4(6))^4} \cdot \frac{(\sqrt{2})}{\log_4(6)} \sum_{k=0}^{99} \left(\frac{(\sqrt{2})}{\log_4(6)}\right)^{k}$$

$$= \frac{2(\sqrt{2})}{(\log_4(6))^5} \sum_{k=0}^{99} \left(\frac{(\sqrt{2})}{\log_4(6)}\right)^{k}$$

$$= \frac{2(\sqrt{2})}{(\log_4(6))^5} \left(\frac{1 - \left(\frac{(\sqrt{2})}{\log_4(6)}\right)^{99+1}}{1 - \frac{(\sqrt{2})}{\log_4(6)}}\right)$$

$$= \frac{2(\sqrt{2})}{(\log_4(6))^5} \left(\frac{1 - \left(\frac{(\sqrt{2})}{\log_4(6)}\right)^{100}}{1 - \frac{(\sqrt{2})}{\log_4(6)}}\right)$$