POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 4 : ENSEMBLES ET FONCTIONS

H2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice1.

Dans chacun des cas, dites si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et expliquez brièvement pourquoi le domaine de définition de f n'est pas $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

Réponse :

f est bien une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, car à chaque élément de l'ensemble départ, on associe 0 ou 1 image. Cependant, le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^*$, car x n'a pas d'image lorsque x est nulle.

b) $f(x) = \sqrt{x}$

Réponse :

f est bien une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, car à chaque élément de l'ensemble départ, on associe 0 ou 1 image. Cependant, le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^+$, car x n'est pas d'image lorsque x est négative.

c) $f(x) = \pm\sqrt{1 + x^2}$

Réponse :

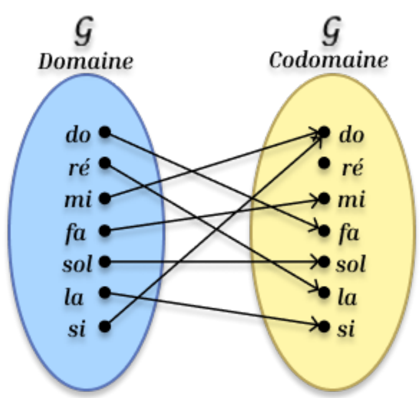
Ici, la fonction n'est pas bien définie, car on assigne plus d'une image à des éléments du domaine.

Exercice 2.

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble de notes de musique sous la notation solfège, défini comme
$\mathcal{G}$ = {*do, ré, mi, fa, sol, la, si*} et une fonction $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$.
Déterminez, dans chacun des cas suivants, si ψ telle que définie est une fonction, une fonction injective, une fonction surjective ou une fonction bijective. Justifiez votre réponse.

a) $\psi(do) = fa,\ \ \psi(ré) = la,\ \ \psi(mi) = do,\ \ \psi(fa) = mi,\ \ \psi(sol) = sol,\ \ \psi(la) = si,\ \ \psi(si) = do$

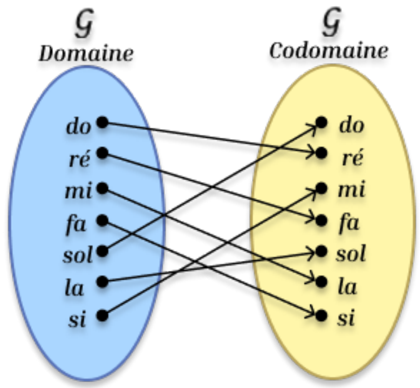
Réponse :



- ψ est fonction, car au plus un élément du codomaine est affecté à chaque élément du domaine.
- ψ n'est pas injective, car $\psi(mi) = \psi(si) = do$, sauf que $mi \neq si$.
- ψ n'est pas surjective, car *ré* n'a pas d'antécédant.
- ψ n'est pas bijective, car elle n'est ni injective, ni surjective.

b) $\psi(do) = ré,\ \ \psi(ré) = fa,\ \ \psi(mi) = la,\ \ \psi(fa) = si,\ \ \psi(sol) = do,\ \ \psi(la) = sol,\ \ \psi(si) = mi$

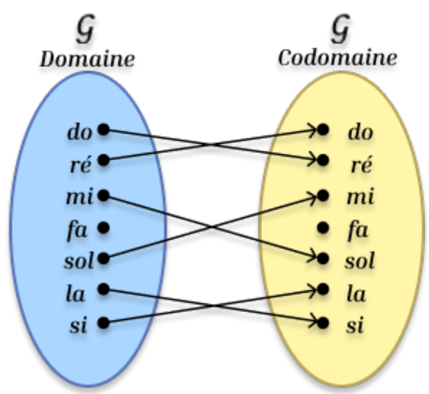
Réponse :



- ψ est fonction, car au plus un élément du codomaine est affecté à chaque élément du domaine.
- ψ est injective, car chaque image a un antécédent distinct.
- ψ est surjective, car chaque image a un antécédent.
- ψ est bijective, car elle est à la fois injective et surjective.

c) $\psi(do) = ré,\ \ \psi(ré) = do,\ \ \psi(mi) = sol,\ \ \psi(sol) = mi,\ \ \psi(la) = si,\ \ \psi(si) = la$

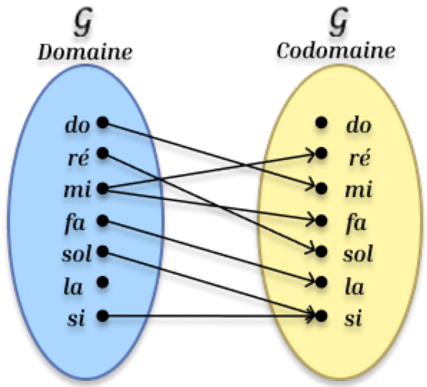
Réponse :



- ψ est fonction, car au plus un élément du codomaine est affecté à chaque élément du domaine.
- ψ n'est pas injective, car *fa* n'a pas d'image.
- ψ n'est pas surjective, car *fa* n'a pas d'antécédant.
- ψ n'est pas bijective, car elle n'est pas surjective

d) $\psi(do) = mi,\ \psi(ré) = sol,\ \psi(mi) = ré,\ \psi(fa) = la,\ \psi(sol) = si,\ \psi(mi) = fa,\ \psi(si) = si$

Réponse :



- ψ n'est pas une fonction, car plus d'un élément du codomaine sont affectés à *mi*, notamment les deux images *ré* et *fa*.

Exercice 3.

Soit A, B, C et D quatre ensembles. Montrez que

Si [(A ⊆ C) ∧ (B ⊆ D)], alors [(A × B) ⊆ (C × D)]

Réponse :

Soit x ∈ A et y ∈ B.
Si (A ⊆ C), alors [(x ∈ A)→(x ∈ C)].
Et si (B ⊆ D), alors [(y ∈ B)→(y ∈ D)].

Donc, si [(A ⊆ C) ∧ (B ⊆ D)], alors [[(x ∈ A)→(x ∈ C)] ∧ [(y ∈ B)→(y ∈ D)]].
Et si [(x ∈ A)→(x ∈ C)] ∧ [(y ∈ B)→(y ∈ D)], alors [(x ∈ A et y ∈ B)→(x ∈ C et y ∈ D)].
Et [x ∈ A et y ∈ B] ≡ (x,y) ∈ A × B.
Et [x ∈ C et y ∈ D] ≡ (x,y) ∈ C × D.
Donc, si [(x ∈ A)→(x ∈ C)] ∧ [(y ∈ B)→(y ∈ D)], alors[[(x,y) ∈ A × B]→[(x,y) ∈ C × D]].
Donc, si [(A ⊆ C) ∧ (B ⊆ D)], alors [[(x,y) ∈ A × B]→[(x,y) ∈ C × D]].
Et si [[(x,y) ∈ A × B]→[(x, y) ∈ C × D]], alors [(A × B) ⊆ (C × D)].
Ainsi, si [(A ⊆ C) ∧ (B ⊆ D)], alors [(A × B) ⊆ (C × D)].
CQFD

Alternativement,
Supposons que [(A ⊆ C) ∧ (B ⊆ D)].
Soit E le complémentaire de A dans C et F le complémentaire de B dans D.
On a donc C = A U E et A ∩ E = ∅.
Et aussi, D = B U F et B ∩ F = ∅.

Donc, C × D	= (A U E) × (B U F)	
	= [A × (B U F)] U [E × (B U F)]	, car A ∩ E = ∅
	= [(A × B) U (A × F)] U [(E × B) U (E × F)]	, car B ∩ F = ∅
	= (A × B) U (A × F) U (E × B) U (E × F)	

On en déduit que (A × B) ⊆ (C × D).
Ainsi, si [(A ⊆ C) ∧ (B ⊆ D)], alors [(A × B) ⊆ (C × D)].
CQFD

Exercice 4.
Soit la fonction h

$$h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$h(x,y) = \begin{cases} x \cdot y, & x \leq y \\ x - y, & x > y \end{cases}$$

a) Déterminez si h telle que définie est injective. Justifiez votre réponse.
Réponse :
Non injective, car par exemple pour $(x_1,y_1) = (2,5)$ et $(x_2,y_2) = (1,10)$

$$x_1 \leq y_1 \text{ , donc } h(x_1,y_1) = 2 \cdot 5 = 10$$
$$\text{et } x_2 \leq y_2 \text{ , donc } h(x_2,y_2) = 1 \cdot 10 = 10$$

Il existe donc deux éléments distincts (x_1,y_1) et (x_2,y_2) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ qui ont pour images $h(x_1,y_1)$, $h(x_2,y_2)$ de valeurs identiques. Ainsi, la fonction h n'est pas injective lorsque $x \leq y$.

Et par exemple pour $(x_1,y_1) = (20,10)$ et $(x_2,y_2) = (40,30)$

$$x_1 > y_1 \text{ , donc } h(x_1,y_1) = 20 - 10 = 10$$
$$\text{et } x_2 > y_2 \text{ , donc } h(x_2,y_2) = 40 - 30 = 10$$

Il existe donc deux éléments distincts (x_1,y_1) et (x_2,y_2) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ qui ont pour images $h(x_1,y_1)$, $h(x_2,y_2)$ de valeurs identiques. Ainsi, la fonction h n'est pas injective lorsque $x > y$.

Ainsi, la fonction h n'est donc pas injective.

b) Déterminez si h telle que définie est surjective. Justifiez votre réponse.
Réponse :
Lorsque $x \leq y$,
$\forall z \in \mathbb{Z}, \exists (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, z = x \cdot y = h(x,y)$
Pour z = 20, il est possible de trouver plusieurs couples (x,y) tel que z = x.y = h(x,y).
Par exemple, (1, 20), (2, 10) et (4, 5).
Donc, h est surjective lorsque $x \leq y$.

Lorsque $x > y$,
$\forall z \in \mathbb{Z}, \exists (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, z = x - y = h(x,y)$
Pour z = 5, il est possible de trouver plusieurs couples (x,y) tel que z = x - y = h(x,y).
Par exemple, (5, 0), (10, 5), (15, 10) et etc.
Donc, h est surjective lorsque $x > y$.

Ainsi, la fonction h est surjective.

Exercice 5.
Soit A et B deux ensembles. Montrez que

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

Réponse :

$x \in (A - B) \cup (B - A) \quad \Leftrightarrow [x \in (A - B)] \vee [x \in (B - A)]$

$\Leftrightarrow [x \in A \wedge x \notin B] \vee [x \in B \wedge x \notin A]$

$\Leftrightarrow [x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin A)] \wedge [x \notin B \vee (x \in B \wedge x \notin A)]$

$\Leftrightarrow [(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A)] \wedge [(x \notin B \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \notin A)]$

$\Leftrightarrow [x \in A \vee x \in B] \wedge [x \notin B \vee x \notin A]$

$\Leftrightarrow [x \in A \vee x \in B] \wedge [\neg x \in B \vee \neg x \in A]$

$\Leftrightarrow [x \in A \vee x \in B] \wedge \neg[x \in B \wedge x \in A]$

$\Leftrightarrow [x \in (A \cup B)] \wedge \neg[x \in (B \cap A)]$

$\Leftrightarrow x \in [(A \cup B) - (A \cap B)]$

Ainsi, $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.
CQFD

Exercice 6.
Montrez que

$$\overline{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$$

Réponse :

$$\begin{aligned}
\overline{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})} &= \overline{(A \cap \overline{B})} \cap \overline{(B \cap \overline{A})} \\
&= (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{B} \cup A) \\
&= [\overline{A} \cap (\overline{B} \cup A)] \cup [B \cap (\overline{B} \cup A)] \\
&= [(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap A)] \cup [(B \cap \overline{B}) \cup (B \cap A)] \\
&= [(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup \emptyset] \cup [\emptyset \cup (B \cap A)] \\
&= (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (B \cap A) \\
&= (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)
\end{aligned}$$

CQFD

Exercice 7.
Soit une suite géométrique d'intervalles musicaux $(V_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$, où le premier terme est une quinte juste (3/2) et la raison est un quart de ton (16/15).

a) Trouvez les trois termes suivants de cette séquence.

Réponse :
Soit la formule générale d'une suite géométrique : $u_n = a \cdot r^n$ où a est le premier terme, r est la raison et n est l'indice du terme.

Nous avons donc la suite géométrique d'intervalles musicaux $(V_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ telle que $V_n = \frac{3}{2}\left(\frac{16}{15}\right)^n$

On peut donc trouver les trois termes suivants de la séquence.

- 2ème terme : $V_2 = \frac{3}{2}\left(\frac{16}{15}\right)^2 = \frac{128}{75}$
- 3ème terme : $V_3 = \frac{3}{2}\left(\frac{16}{15}\right)^3 = \frac{6\,144}{3\,375}$
- 4ème terme : $V_4 = \frac{3}{2}\left(\frac{16}{15}\right)^4 = \frac{98\,304}{50\,625}$

Ainsi, les trois termes suivants sont $\frac{128}{75}, \frac{6144}{3375}$ et $\frac{98\,304}{50\,625}$

b) Calculez la somme des vingt premiers termes de $(V_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$
Réponse :
Soit S_{20} la somme des vingt premiers termes de $(V_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$
Donc, S_{20} $= V_1 + V_2 + \cdots + V_{19} + V_{20}$

$$= \sum_{k=1}^{20} V_k$$

$$= \sum_{k=1}^{20} \frac{3}{2}\left(\frac{16}{15}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{19} \frac{3}{2}\left(\frac{16}{15}\right)^{k+1} \quad , par\ glissement\ d'indice$$

$$= \frac{16}{15} \cdot \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{19} \left(\frac{16}{15}\right)^k$$

$$= \frac{8}{5} \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{16}{15}\right)^{20}}{1 - \left(\frac{16}{15}\right)}\right)$$