POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 9 : DÉNOMBREMENT

A2022

Directives pour la remise :

- Répondez directement sur ce document papier.
- La remise est individuelle, mais le travail en équipe est encouragé.
- La remise se fait à la fin de la séance de TD.
- **Aucun retard ne sera accepté.**
- **Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.**

Identification

Veuillez inscrire votre section, nom, prénom et matricule ainsi que les noms des collègues avec lesquels vous avez collaboré pour le TD

Section :

Nom :

Prénom :

Matricule :

Collègues :

Exercice 1 :
On lance un dé à **8 faces** jusqu'à ce qu'on obtienne un même chiffre pour la deuxième fois. La suite des chiffres obtenus est appelée un résultat.

a. Quel est le nombre maximal de lancers ?

Réponse :
Le nombre maximal de lancer est atteint lorsqu'après 8 lancers chaque lancer donne une face différente. Il faudrait donc un 9ème lancer pour avoir l'un des chiffres se répéter. Le résultat recherché est 9.

b. Combien y-a-t-il de résultats obtenus avec exactement cinq lancers ?

Réponse :
Le résultat des lancers est un arrangement (permutation) avec remise, car à chaque lancer les 8 faces du dé sont en jeu et l'ordre compte. En effet, l'énoncé parle de suite de chiffres. L'ordre dans lequel ces chiffres sont pris est donc important. Ainsi on pourrait constituer le résultat en notant le chiffre qui sort au premier lancer, au deuxième, etc.

- Au premier lancer, il y a P(8, 1) possibilités.
- Le chiffre sorti au premier lancer n'est pas réapparu au deuxième lancer. On a donc P(7, 1) possibilités pour le deuxième lancer.
- Les chiffres sortis au premier et deuxième lancer ne sont pas réapparus au troisième lancer puisqu'il faut 5 lancers. On a donc P(6, 1) possibilités pour le troisième lancer.
- Les chiffres sortis au premier deuxième et troisième lancer ne sont pas réapparus au quatrième lancer puisqu'il faut 5 lancers. On a donc P(5, 1) possibilités pour le troisième lancer.
- Au cinquième et dernier lancer, le chiffre obtenu est un des quatre chiffres précédemment obtenus. Il y a donc P(4, 1) possibilités pour ce cinquième lancer.

  Le nombre de résultats obtenus avec exactement trois lancers est donc P(8, 1) x P(7, 1) x P(6, 1) x P(5, 1) x P(4, 1) = 8 x 7 x 6 x 5 x 4 = 6720

c. Combien y-a-t-il de résultats possibles (pire scénario) ?

Réponse :

Le pire scénario est d'avoir la répétition au 9ème lancer. Chacun des 8 premiers lancers donne un résultat différent. Au 8ième lancer il n'y a qu'un choix. On a donc pour les 8 premiers lancers :

P(8, 1) x P(7, 1) x P(6, 1) x P(5, 1) x P(4, 1) x P(3, 1) x P(2, 1) = 6 x 5 x 4 x 3 x 2 = 8! = 40 320

Au 9ième lancer, toutes les 8 faces sont éligibles comme au premier lancer. On a donc P(8, 1).

Le nombre total de résultats est donc :

P(8, 1) x P(7, 1) x P(6, 1) x P(5, 1) x P(4, 1) x P(3, 1) x P(2, 1) x P(8, 1)

= 8! x P(8, 1)

= 8! x 8

= 322 560

Exercice 2 :

Soit n$\in \mathbb{N}$. On considère un ensemble E de n+1 entiers dont la valeur est comprise dans {1,…,2n}. Chaque entier est distinct.

Démontrer que parmi les éléments de E, on peut toujours trouver 2 entiers dont la somme fait 2n+1.

Réponse :

On considère les paires d'entiers dont la somme fait 2n+1 :

{1,2n}, {2,2n-1}, {3,2n-2}, … {n,n+ 1}.

C'est-à-dire l'ensemble des couples { {k, 2n+1-k} ¦ k $\in \mathbb{N}$ et $1 \leq k \leq n$ }

De façon évidente, cet ensemble est composé de n couples.

On considère n+1 entiers, donc d'après le principe des tiroirs, il y a nécessairement au moins 2 entiers de E qui appartiennent au même couple.

Donc on peut trouver dans E 2 entiers dont la somme fait 2n+1.

Exercice 3 :
Soit n$\in \mathbb{N}^*$.

a. Montrer que, pour tout k $\in [\![1, n]\!]$ $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

Réponse :

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$\binom{n}{k} = \frac{n.(n-1)!}{k(k-1)!\,(n-k+1-1)!}$

$\binom{n}{k} = \frac{n.(n-1)!}{k(k-1)!\,(n-1-(k-1))!}$

$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

b. En déduire l'égalité suivante : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k.\binom{n}{k} = 0$

Réponse :

$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k.\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k.k.\binom{n}{k}$ car 0.x = 0

$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k.\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k.k.\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ d'après a)

$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k.\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k.n.\binom{n-1}{k-1}$

$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k.\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n}(-1)^k.\binom{n-1}{k-1}$

$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k.\binom{n}{k} = n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}.\binom{n-1}{k}.1^{n-1-k}$ par décalage d'indice de la somme

$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k.\binom{n}{k} = (-1).n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k.\binom{n-1}{k}$

$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k.\binom{n}{k} = -n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k.\binom{n-1}{k}.1^{n-1-k}$

$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k.\binom{n}{k} = -n(1-1)^{n-1}$

$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k.\binom{n}{k} = 0$

Exercice 4 :

Résolvez la relation de récurrence :

$$a_n = -a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \text{ ; avec } a_0 = 3,\ a_1 = -1,\ a_2 = 2,$$

Réponse :

La relation de récurrence linéaire homogène à coefficient constant

$a_n = -a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ admet pour équation caractéristique $r^3 + r^2 - r - 1 = 0$.

1 est solution évidente, donc on peut réécrire l'équation : $(r-1)(r^2 + 2.r + 1) = 0$

Et en refactorisant : $(r-1)(r + 1)^2 = 0$

Elle admet donc une racine simple $r_2 = 1$ et une racine double $r_1 = -1$.

La forme générale des solutions de l'équation de récurrence est alors

$a_n = \alpha.(r_1)^n + \beta.n.(r_1)^n + \gamma.(r_2)^n$

À partir de cette équation, on obtient :

$a_0 = (\alpha + \beta.0 + \gamma) = \alpha + \gamma$

$a_1 = ((-1).\alpha + (-1).\beta.1 + \gamma(1)) = -\alpha - \beta + \gamma$

$a_2 = ((1).\alpha + (1).\beta.2 + \gamma.(1)) = \alpha + 2\beta + \gamma$

En considérant les conditions initiales $a_0 = 3$, $a_1 = -1$, $a_2 = 2$, on obtient les équations suivantes :

- $\alpha + \gamma = 3$
- $-\alpha - \beta + \gamma = -1$,
- $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$

En résolvant ces équations on obtient :

$\alpha = 9/4$, $\beta = -1/2$ et $\gamma = 3/4$

La solution de l'équation de récurrence linéaire homogène à coefficient constant est :

$a_n = 9/4.(-1)^n - 1/2.n.(-1)^n + 3/4.1^n$

$a_n = (9/4 - 1/2n)(-1)^n + 3/4$

Exercice 5 :

a) Résolvez l'équation de récurrence suivante : $T(n) = 3T(n/4) + cn^2$, avec c une constante.

Réponse :

L'équation $T(n) = 3T(n/4) + cn^2$ est de la forme $T(n) = aT(n/b) + cn^d$; avec $a = 3$, $b = 4$ et $d = 2$.

Comparons a et b^d.

On a $b^2 = 4^2 = 16$. Il s'en suit que $a < b^d$

D'Où $T(n) = O(n^2)$.

b) Pour un problème donné, on a une solution directe en $\Theta(n^3)$. On a aussi trouvé deux solutions de type diviser pour régner comme suit :

- Découper le problème de taille n en 2 sous-problèmes de taille n/2, et les recombiner en temps $\Theta(n^2)$.
- Découper le problème de taille n en 4 sous-problèmes de taille n/3 et les recombiner en temps $\Theta(\sqrt{n})$.

  Parmi les trois solutions, laquelle choisir ?

Réponse :

• Soit f la fonction représentant la solution directe. D'après l'énoncé, f(n) = $\Theta(n^3)$.

• Soit g la solution qui consiste à découper le problème de taille n en 2 sous-problèmes de taille n/2, et les recombiner en temps $\Theta(n^2)$. On a :

g(n) = 2 × g(n/2) + n^2

g est de la forme $g(n) = a.g(n/b) + cn^d$; avec a = 2, b = 2, c= 1 et d = 2.

Puis que $b^d = 4$ et $2 < 4$, on déduit que $a < b^d$. Ainsi, $g(n) = O(n^2)$.

• Soit T la solution qui consiste à découper le problème de taille n en 4 sous-problèmes de taille n/3 et les recombiner en temps $\Theta(\sqrt{n})$. On a :

$T(n)= 4.T(n/3) + n^{1/2}$

T est de la forme $T(n) = = a.T(n/b) + cn^d$; avec a = 4, b = 3, c= 1 et d = 1/2.

Puis que bd = $3^{1/2}$ et $4 > 3^{1/2}$, on déduit que $a > b^d$. Ainsi, T(n) = $O(n^{log_3 4})$

Pour répondre à la question, il faut comparer $\Theta(n^3)$, $O(n^2)$ et $O(n^{log_3 4})$et retenir le moins coûteux, soit T(n).

Conclusion :

Il faut choisir de découper le problème de taille n en 4 sous-problèmes de taille n/3 et les recombiner en temps $\Theta(\sqrt{n})$.

Exercice 6 (facultatif) :

De combien de façons une douzaine de livres peuvent-ils être placés sur quatre tablettes distinctes d'une étagère.

a) Si les livres sont des exemplaires indiscernables du même titre ?

Réponse :

Tout ce qui compte est le nombre de livres sur chaque tablette, donc la réponse est le nombre de solutions à $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$, où x_i est considéré comme le nombre de livres sur l'étagère i. La réponse est donc $C(4 + 12 - 1, 12) = C(15, 12) = 455$.

Note : Pour la formule utilisée, voir page 28 des notes de cours sur le dénombrement ou p.446 à 448 du livre de Rosen.

b) S'il n'y a pas deux livres identiques et que la position des livres sur les tablettes est importante ?

Réponse :

Sans perte de généralité, si l'on numérote les livres $b_1, b_2, \ldots, b_{12}$ et que l'on pense à placer le livre b_1, puis à placer b_2, et ainsi de suite. Il y a clairement 4 façons de placer b_1, puisque nous pouvons le mettre comme premier livre (pour l'instant) sur n'importe laquelle des tablettes. Une fois que b_1 est placé, il y a 5 façons de placer b_2, car il peut aller à droite de b_1 ou il peut s'agir du premier livre sur l'une des quatre tablettes. Nous continuons ainsi : il y a 6 façons de placer b_3 (à droite de b_1, à droite de b_2, ou comme premier livre sur l'une des étagères), 7 façons de placer b_4, ..., 15 façons de placer b_{12}. La réponse est donc le produit de ces nombres $4 \times 5 \cdots 15 = 217\,945\,728\,000$.