



POLYTECHNIQUE  
MONTRÉAL

## Questionnaire examen final

**LOG2810**

Sigle du cours

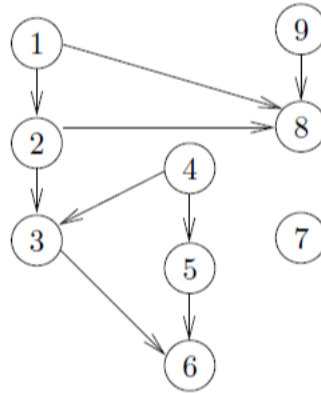
<i>Identification de l'étudiant(e)</i>		
Nom :	Prénom :	
Signature :	Matricule :	Groupe :

<i>Sigle et titre du cours</i>			
LOG2810 - Structures discrètes			
<i>Professeur</i>		<i>Groupe</i>	<i>Trimestre</i>
Aurel Randolph, Chargé de cours Lévis Thériault, Coordonnateur		Tous	Été 2021
<i>Jour</i>	<i>Date</i>	<i>Durée</i>	<i>Heures</i>
Mardi	22 juin 2021	2 h 30	9 h 30 - 12 h 00
<i>Documentation</i>		<i>Calculatrice</i>	<i>Outils électroniques</i>
<input type="checkbox"/> Aucune <input checked="" type="checkbox"/> Toute <input checked="" type="checkbox"/> Voir directives particulières		<input checked="" type="checkbox"/> Aucune <input type="checkbox"/> Toutes	Les appareils électroniques personnels sont interdits.
<i>Directives particulières</i>			
<ul style="list-style-type: none"><li>Le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question pour diverses raisons, veuillez le justifier puis passer à la question suivante.</li><li><b>IMPORTANT</b> : inscrire votre matricule sur toutes les pages numérotées.</li></ul>			
Cet examen contient <b>8</b> questions sur un total de <b>18</b> pages (incluant cette page).			

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

**Exercice 1** (2 points)

Proposez un tri topologique à partir du graphe suivant.



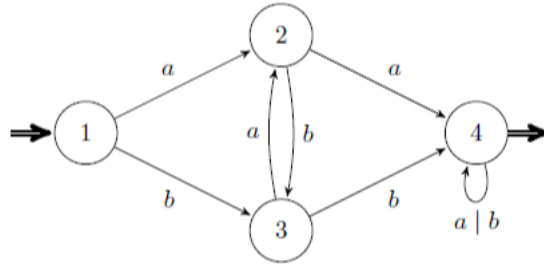
**Réponse :**

Le Tri Topologique de ce graphe est le suivant.

[1; 9; 2; 7; 8; 4; 3; 5; 6]

**Exercice 2** (2.5 points)

Soit l'automate ci-dessous. Quel est le langage reconnu par cet automate ?

**Réponse :**

Passons : État 1:  $X_1$  ; État 2:  $X_2$  ; État 3:  $X_3$  ; État 4:  $X_4$

Posons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad X_1 &= aX_2 + bX_3 \\ X_2 &= bX_3 + aX_4 \\ X_3 &= aX_2 + bX_4 \\ X_4 &= aX_4 + bX_4 + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 = aX_2 + bX_3 \\ X_2 = bX_3 + aX_4 \\ X_3 = aX_2 + bX_4 \\ X_4 = (a+b)X_4 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X_4 &= (a+b)^* \\ \text{Lemme d'Arden} \\ X &= AX \cup B \\ X &= AX + B \\ X &= A^* B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \text{ dans } (2) \\ (4) \text{ dans } (3) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = aX_2 + bX_3 \\ X_2 = bX_3 + a(a+b)^* \\ X_3 = aX_2 + b(a+b)^* \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ dans } (1) \\ (2) \text{ dans } (3) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = a[bX_3 + a(a+b)^*] + bX_3 \\ X_3 = a[bX_3 + a(a+b)^*] + b(a+b)^* \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 = abX_3 + aa(a+b)^* + bX_3 \\ X_3 = ab^*(aa(a+b)^* + b(a+b)^*) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = (ab+b)X_3 + aa(a+b)^* \\ X_3 = ab^*((aa+b)(a+b)^*) \end{cases}$$

$$(3) \text{ dans } (1): X_1 = (ab+b)ab^*(aa+b)(a+b)^* + aa(a+b)^*$$

$$\Rightarrow X_1 = ((ab+b)ab^*(aa+b) + aa)(a+b)^*$$

**Exercice 3** (2.5 points)

Soit  $V$  l'alphabet contenant les symboles (, 1, et ). Montrez que le langage  $L$  n'est pas régulier.

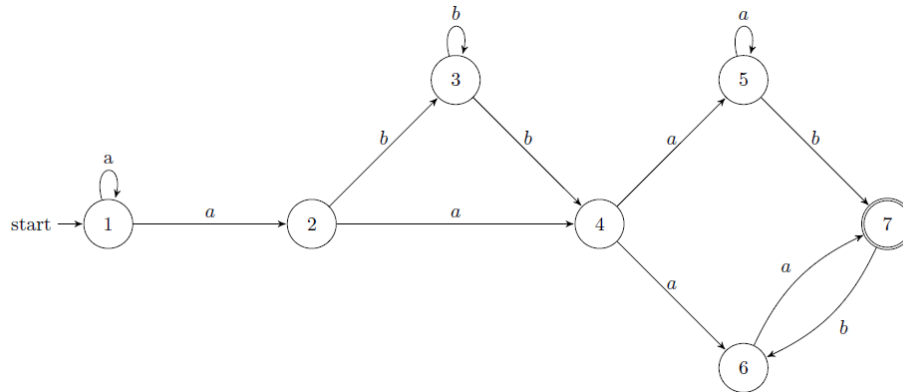
$$L = \{ ({}^n 1) {}^n, n \geq 0 \}$$

**Réponse :**

Rais

**Exercice 4** (2.5 points)

Soit l'automate fini non-déterministe (AFN) suivant.



a) (2 points) Donnez la table d'états d'un automate fini déterministe correspondant à cet AFN.

**Réponse :**1) Table d'états Transition

État	États suivants	
	Entrée	
	a	b
→ S <sub>1</sub>	{S <sub>1</sub> ; S <sub>2</sub> }	∅
S <sub>2</sub>	{S <sub>4</sub> }	{S <sub>3</sub> }
S <sub>3</sub>	∅	{S <sub>3</sub> ; S <sub>4</sub> }
S <sub>4</sub>	{S <sub>5</sub> ; S <sub>6</sub> }	∅
S <sub>5</sub>	{S <sub>5</sub> }	{S <sub>7</sub> }
S <sub>6</sub>	{S <sub>7</sub> }	∅
← S <sub>7</sub>	∅	{S <sub>6</sub> }

2) Table d'état Transition de l'AFD émondé

État	États suivants	
	Entrée	
	a	b
→ S <sub>1</sub>	{S <sub>1</sub> ; S <sub>2</sub> }	∅
{S <sub>1</sub> ; S <sub>2</sub> }	{S <sub>1</sub> ; S <sub>2</sub> ; S <sub>4</sub> }	{S <sub>3</sub> }
{S <sub>1</sub> ; S <sub>2</sub> ; S <sub>4</sub> }	{S <sub>1</sub> ; S <sub>2</sub> ; S <sub>4</sub> ; S <sub>5</sub> ; S <sub>6</sub> }	{S <sub>3</sub> }
{S <sub>3</sub> }	∅	{S <sub>3</sub> ; S <sub>4</sub> }
{S <sub>1</sub> ; S <sub>2</sub> ; S <sub>4</sub> ; S <sub>5</sub> ; S <sub>6</sub> }	{S <sub>1</sub> ; S <sub>2</sub> ; S <sub>4</sub> ; S <sub>5</sub> ; S <sub>6</sub> ; S <sub>7</sub> }	{S <sub>3</sub> ; S <sub>7</sub> }
{S <sub>3</sub> ; S <sub>4</sub> }	{S <sub>5</sub> ; S <sub>6</sub> }	{S <sub>3</sub> ; S <sub>4</sub> }
← {S <sub>1</sub> ; S <sub>2</sub> ; S <sub>4</sub> ; S <sub>5</sub> ; S <sub>6</sub> ; S <sub>7</sub> }	{S <sub>1</sub> ; S <sub>2</sub> ; S <sub>4</sub> ; S <sub>5</sub> ; S <sub>6</sub> ; S <sub>7</sub> }	{S <sub>3</sub> ; S <sub>6</sub> ; S <sub>7</sub> }
← {S <sub>3</sub> ; S <sub>7</sub> }	∅	{S <sub>3</sub> ; S <sub>4</sub> ; S <sub>6</sub> }
{S <sub>5</sub> ; S <sub>6</sub> }	{S <sub>5</sub> ; S <sub>7</sub> }	{S <sub>7</sub> }

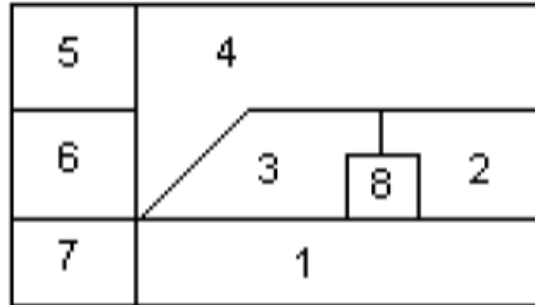
**Réponse (suite) :**

- b) **(0. 5 point)** Donnez la liste des états finaux de l'automate fini déterministe correspondant à l'AFN.

**Réponse :**

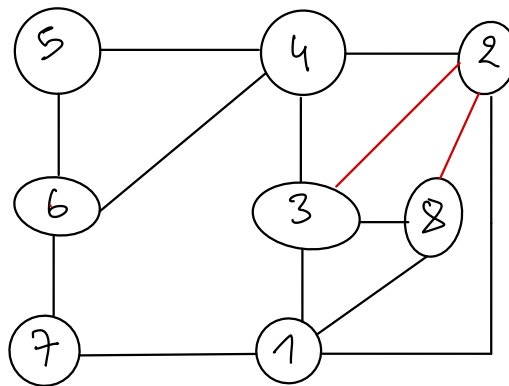
**Exercice 5** (3 points)

Huit pays sont représentés ci-dessous avec leurs frontières. Deux pays qui ont en commun une partie des frontières sont dits adjacents. Cependant, deux pays dont les frontières n'ont qu'un nombre fini de points en commun ne sont pas considérés comme étant adjacents.



- a. (0.75 point) Représentez le graphe d'adjacence.

**Réponse :**





b. **(0.75 point)** Le graphe est-il complet ? Justifiez votre réponse.

**Réponse :**

Non, ce graphe n'est pas complet car tous les sommets du graphe ne sont pas adjacents 2 à 2.

- c. **(1.5 point)** Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir après avoir franchi chaque frontière une et une seule fois ? Justifiez votre réponse.

**Réponse :**

**Exercice 6** (2.5 points)

Lors d'une soirée festive un code vestimentaire est imposé et respecté par tous :

- être habillé en pantalon ou en short ;
- le haut (chemise, chandail, etc.) est de la même couleur que le bas (short ou pantalon) ;
- les couleurs admises sont le bleu et le blanc.

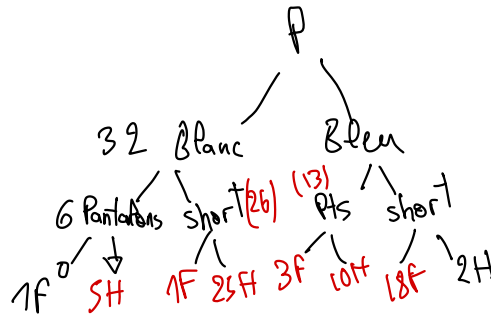
Parmi les invités, on note la présence de :

- 23 femmes ; 23 F
- 32 personnes habillées en blanc ; 32 Blc
- 2 hommes habillés en short bleu ; 2 sh  $\wedge$  Blc
- 4 femmes en pantalons ; 4 F  $\wedge$  P
- 6 personnes en blanc portant des pantalons ; 6 Blc  $\wedge$  Pts
- 27 hommes en short ; 27 H  $\wedge$  sh
- 19 personnes en pantalons ; 19 Pts
- 1 femme en pantalon blanc. 1 F  $\wedge$  Pts  $\wedge$  Blc

Combien y-a-t-il de personnes ? Justifiez votre réponse.

**Réponse :**

23 F



Il y'a donc 1 femme et 5 H en pantalon blanc,

1F et 25 Hommes en short blanc, 3F et 10 H en Pts bleu, et 18F et 2H en short bleu.

Il y'a donc 23F et  $5+25+10+2=42H$

Soit:  $23 + 42 = 65$  Personnes.

**Réponse (Suite) :**

**Exercice 7** (2.5 points)

Soit  $x$  et  $y$  deux réels positifs ou nuls. En utilisant la preuve par l'absurde, montrez que :

$$\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x} \rightarrow x = y$$

**Réponse :**

**Réponse (Suite) :**

**Exercice 8** (2.5 points)

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et une fonction  $f$  définie de  $E$  vers  $F$ . Démontrez que

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

**Réponse :**

01:49 Dimanche 17 décembre

ChatGPT 3.5

Pour démontrer cette égalité, commençons par montrer l'inclusion  $\subseteq$ . Soient  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ . Alors, pour tout  $x \in f(A \cup B)$ , il existe  $y \in A \cup B$  tel que  $f(y) = x$ .

Maintenant, il y a deux cas à considérer :

1. Si  $y \in A$ , alors  $y \in f(A)$ , et donc  $y \in f(A) \cup f(B)$ .
2. Si  $y \in B$ , alors  $y \in f(B)$ , et encore  $y \in f(A) \cup f(B)$ .

Dans les deux cas,  $y \in f(A) \cup f(B)$ , donc  $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$ .

Maintenant, montrons l'inclusion inverse  $\supseteq$ . Soit  $z \in f(A) \cup f(B)$ . Cela signifie que  $z \in f(A)$  ou  $z \in f(B)$ .

Supposons d'abord que  $z \in f(A)$ . Alors, il existe  $u \in A$  tel que  $f(u) = z$ . Puisque  $u \in A \subseteq A \cup B$ , nous avons  $z \in f(A \cup B)$ .

De manière similaire, supposons maintenant que  $z \in f(B)$ . Il existe  $v \in B$  tel que  $f(v) = z$ . Comme  $v \in B \subseteq A \cup B$ , nous avons à nouveau  $z \in f(A \cup B)$ .

Dans les deux cas,  $z \in f(A \cup B)$ , donc  $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$ .

Ainsi, en combinant les deux inclusions, nous avons démontré que  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$  pour tous  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ .

Message

**Réponse (Suite) :**



**Feuille supplémentaire**

**Feuille supplémentaire**