POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 8 : INDUCTION ET RÉCURSIVITÉ

H2024

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 :

a) En utilisant l'induction mathématique, montrez que pour tout $n \geq 5$,

$$4n < 2^n$$

Solution

Soit

$$P(n): 4n < 2^n$$

Étape de base : Pour $n = 5$, nous avons :

$$4 \cdot 5 = 20 < 2^5 = 32$$

On a donc $P(5)$ vraie.

Étape inductive : Supposons que pour un certain $m \geq 5$, $P(m)$ est vraie i.e.

$$4m < 2^m \qquad \text{(Hypothèse d'induction, H.I.)}$$

On veut arriver à montrer que $P(m+1)$ est vraie i.e.

$$4(m+1) < 2^{(m+1)} \qquad \text{(Objectif)}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} 4(m+1) &= 4m + 4 \\ &< 2^m + 4 \qquad \text{(H.I.)} \\ &< 2^m + 2^m \\ &= 2^{m+1} \end{aligned}$$

Il s'en suit que $P(m+1)$ est vraie et que $P(m) \rightarrow P(m+1)$ est vraie

Conclusion :

Ainsi, $P(5)$ est vraie et $\forall m \geq 5$, $P(m) \rightarrow P(m+1)$ est vraie. En utilisant l'induction mathématique, nous avons démontré que pour tout $n \geq 5$,

$$4\mathrm{n} < 2^{\mathrm{n}}$$

CQFD

b) Soit x un réel positif. En utilisant l'induction mathématique, montrez que pour tout entier positif n,

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Solution

Soit $x \in \mathbb{R}^+$:

$$P(n): (1+x)^n \geq 1+nx$$

Étape de base : Pour $n = 0$, nous avons :

$$(1+x)^0 = 1 \geq (1+0 \cdot x) = 1$$

On a donc $P(0)$ vraie.

Étape inductive : Supposons que pour un certain $m \geq 0$, $P(m)$ est vraie i.e.

$$(1+x)^m \geq 1+mx \qquad \text{(Hypothèse d'induction, H.I.)}$$

On veut arriver à montrer que $P(m+1)$ est vraie i.e.

$$(1+x)^{m+1} \geq 1+(m+1)x \qquad \text{(Objectif)}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
(1+x)^{m+1} &= (1+x)(1+x)^m \\
&\geq (1+x)(1+mx) && \text{(H.I.)} \\
&= 1+x+mx+mx^2 \\
&\geq 1+x+mx && \text{(x>0)} \\
&= 1+(m+1)x
\end{aligned}$$

Il s'en suit que $P(m+1)$ est vraie et que $P(m) \to P(m+1)$ est vraie

Conclusion :

Ainsi, $P(0)$ est vraie et $\forall m \geq 0$, $P(m) \to P(m+1)$ est vraie.
En utilisant l'induction mathématique, nous avons démontré que pour tout réel positif x et tout entier naturel n,

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

CQFD

Exercice 2 :

Soit la matrice $\boldsymbol{A}$ suivante :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En utilisant l'induction mathématique, montrez que pour tout entier positif non nul n,

$$\boldsymbol{A}^n = \begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{bmatrix}$$

Solution

Étape de base : Pour $n = 1$, nous avons :

$$\boldsymbol{A}^1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & -1 \\ 1 & -1+1 \end{bmatrix}$$

L'égalité est donc établie pour $n = 1$.

Étape inductive : Supposons que pour un certain $m \geq 1$, $l'égalité$ est vraie i.e.

$$\boldsymbol{A}^m = \begin{bmatrix} m+1 & -m \\ m & -m+1 \end{bmatrix} \text{ (Hypothèse d'induction, H.I.)}$$

On veut arriver à montrer que :

$$\boldsymbol{A}^{m+1} = \begin{bmatrix} (m+1)+1 & -(m+1) \\ (m+1) & -(m+1)+1 \end{bmatrix} \qquad \text{(Objectif)}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^{m+1} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^m \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m+1 & -m \\ m & -m+1 \end{bmatrix} \qquad \text{(par H.I.)} \\
&= \begin{bmatrix} 2(m+1)-m & -2m+m-1 \\ m+1 & -m \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} m+2 & -m-1 \\ m+1 & -m \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (m+1)+1 & -(m+1) \\ (m+1) & -(m+1)+1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Donc, l'égalité est établie pour $m+1$

Conclusion :

Ainsi, l'égalité est vraie pour $m = 1$. De plus, lorsque l'égalité est établie pour un m ≥ 1 quelconque, elle l'est également pour (m + 1). Donc on a pu démontrer, en utilisant l'induction mathématique, que pour tout entier positif non nul n

$$\boldsymbol{A}^n = \begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{bmatrix}$$

CQFD

Exercice 3 :

a) En utilisant l'induction mathématique, montrez que pour tout entier naturel n,

$n^3 - n$ est divisible par 6

Solution

Soit : $P(n)$: $n^3 - n$ est divisible par 6

Étape de base : Pour $n = 0$, nous avons :

$$0^3 - 0 = 0$$

0 est bien divisible par 6, on a donc $P(0)$ vraie.

Étape inductive : Supposons que pour un certain $m \geq 0$, $P(m)$ est vraie i.e.

$m^3 - m$ est divisible par 6 (Hypothèse d'induction, H.I.)

On veut arriver à montrer que $P(m+1)$ est vraie i.e.

$(m+1)^3 - (m+1)$ est divisible par 6 (Objectif)

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}(m+1)^3 - (m+1) &= \mathrm{m}^3 + 3\mathrm{m}^2 + 2\mathrm{m} \\ &= (m^3 - m) + 3m^2 + 3m\end{aligned}$$

Par notre hypothèse d'induction, nous avons $m^3 - m$ qui est divisible par 6. Il nous reste à montrer que $3m^2 + 3m$ est divisible par 6. Tout d'abord, nous avons $3m^2 + 3m = 3(m^2 + m)$ qui est divisible par 3. Pour qu'un nombre soit divisible par 6, il faut qu'il soit divisible par 3 et 2. Ainsi, il nous reste à montrer que $m^2 + m$ est paire. Procédons à une preuve par cas :

Cas 1 : m est pair, c'est-à-dire qu'il peut s'écrire comme m=2k où k est un entier. Nous avons :

$$m^2 + m = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$$

Donc, quand m est paire, $m^2 + m$ est paire.

Cas 2 : m est impaire, c'est-à-dire qu'il peut s'écrire comme m=2k+1 où k est un entier. Nous avons :

$$m^2 + m = (2k+1)\text{^}2 + 2k + 1 = 2(2k^2 + 3k + 1)$$

Donc, quand m est impaire, $m^2 + m$ est paire.

Ainsi, $m^2 + m$ est toujours paire, il en suit donc que $3m^2 + 3m$ est divisible par 6.

De cette façon, nous avons $(m^3 - m) + 3m^2 + 3m$ divisible par 6.

Il s'en suit que $P(m+1)$ est vraie et que $P(m) \rightarrow P(m+1)$ est vraie

Conclusion :

Ainsi, $P(0)$ est vraie et $\forall m \geq 0$, $P(m) \rightarrow P(m+1)$ est vraie.
En utilisant l'induction mathématique, nous avons démontré que pour tout entier naturel n, $n^3 - n$ est divisible par 6
CQFD

b) En utilisant l'induction mathématique, montrez que pour tout entier naturel n,

$$2^{n+2} + 3^{2n+1} \text{ est divisible par } 7$$

Solution
Soit : $P(n)$: $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ est divisible par 7

Étape de base : Pour $n = 0$, nous avons :

$$2^{0+2} + 3^{2(0)+1} = 7$$

7 est bien divisible par 7, on a donc $P(0)$ vraie.

Étape inductive : Supposons que pour un certain $m \geq 0$, $P(m)$ est vraie i.e.

$$2^{m+2} + 3^{2m+1} \text{ est divisible par } 7 \qquad \text{(Hypothèse d'induction, H.I.)}$$

On veut arriver à montrer que $P(m+1)$ est vraie i.e.

$$2^{(m+1)+2} + 3^{2(m+1)+1} \text{ est divisible par } 7 \qquad \text{(Objectif)}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} 2^{(m+1)+2} + 3^{2(m+1)+1} &= 2^{m+3} + 3^{2m+3} \\ &= 2 \cdot 2^{m+2} + 3^2 \cdot 3^{2m+1} \\ &= 2 \cdot (7k - 3^{2m+1}) + 9 \cdot 3^{2m+1} \qquad \text{(Par H.I.)} \\ &= 14k + (-2+9) \cdot 3^{2m+1} \\ &= 14k + 7 \cdot 3^{2m+1} \\ &= 7(2k + 3^{2m+1}) \end{aligned}$$

Donc, $2^{(m+1)+2} + 3^{2(m+1)+1}$ est divisible par 7.
Il s'en suit que $P(m+1)$ est vraie et que $P(m) \rightarrow P(m+1)$ est vraie

Conclusion :
Ainsi, $P(0)$ est vraie et $\forall m \geq 0$, $P(m) \rightarrow P(m+1)$ est vraie.
En utilisant l'induction mathématique, nous avons démontré que pour tout entier naturel n, $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ est divisible par 7.
CQFD

Exercice 4 :

Démontrez l'affirmation suivante :

Un groupe de 12 personnes et plus peut être séparé dans des groupes de 4 ou 5 personnes.

Solution

Pour ce problème, nous devons utiliser l'induction forte.

Soit : $P(n)$: *Un groupe de n personnes et plus peut être séparé dans des groupes de 4 ou 5 personnes.*

Étape de base : On doit d'abord montrer que $P(n)$ est vraie pour $n = 12,13,14,15$:

$$\begin{aligned}12 &= 4 + 4 + 4\\ 13 &= 4 + 4 + 5\\ 14 &= 4 + 5 + 5\\ 15 &= 5 + 5 + 5\end{aligned}$$

Étape inductive :

Nous devons montrer que $P(12), \ldots, P(n)$ implique $P(n+1)$ pour tout $n \geq 15$. Supposons que $P(12), \ldots, P(n)$ sont tous vraies (Hypothèse d'induction forte). Nous avons donc :

$$n + 1 = 4 + (n - 3)$$

Ainsi, nous formons un premier groupe de 4, le reste du groupe $(n-3)$ peut être divisé selon des groupes de 4 ou 5 selon notre hypothèse d'induction forte. Effectivement, $n \geq 15$, donc $n - 3 \geq 12$ ce qui demeure dans notre hypothèse $P(12), \ldots, P(n)$ sont tous vraies. Donc nous avons bien :

$$P(12) \wedge \ldots \wedge P(n) \to P(n+1) \text{ pour tout } n \geq 15$$

Conclusion :

Par induction forte, puisque $P(12), P(13), P(14)\ et\ P(15)$ sont vraies et que $P(12) \wedge \ldots \wedge P(n) \to P(n+1)$ pour tout $n \geq 15$, un groupe de 12 personnes et plus peut être séparé dans des groupes de 4 ou 5 personnes.

CQFD

Exercice 5 :

a) Calculez les 6 premiers termes de la suite définie récursivement par :

$$\boldsymbol{a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}} \text{ pour } \boldsymbol{n \geq 2}$$

Solution

$a_0 = 1$
$a_1 = 3$
$a_2 = 2a_1 - a_0 = 5$
$a_3 = 2a_2 - a_1 = 7$
$a_4 = 2a_3 - a_2 = 9$
$a_5 = 2a_4 - a_3 = 11$

b) Déduisez une formule explicite pour a_n, en l'exprimant uniquement en fonction de n, puis démontrez là par induction.

Solution

La suite correspond aux nombres impairs. On a donc la formule explicite suivante : $a_n = 2n + 1$, pour $n \geq 0$.

Pour ce problème, nous devons utiliser l'induction forte.

Soit : $P(n)$: *La suite* $a_n = 2n + 1$

Étape de base : On doit considère les cas de bases $n = 0$ et $n = 1$

P(0) : $a_0 = 1 = 2(0) + 1 \rightarrow Vraie$
P(1) : $a_1 = 3 = 2(1) + 1 \rightarrow Vraie$

Étape inductive :
Nous devons montrer que $P(0), \ldots, P(n)$ implique $P(n+1)$ pour tout $n \geq 1$. Supposons que $P(0), \ldots, P(n)$ sont tous vraies (Hypothèse d'induction forte). Nous avons donc :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n - a_{n-1} \\ &= 2(2n+1) - (2(n-1)+1) \qquad \text{(Par H.I.F)} \\ &= 4n + 2 - 2n + 2 - 1 \\ &= 2n + 3 \\ &= 2(n+1) + 1 \end{aligned}$$

Donc nous avons bien :

$$P(0) \land ... \land P(n) \to P(n+1) \text{ pour tout } n \geq 1$$

Conclusion :

Par induction forte, puisque $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies et que $P(0) \land ... \land P(n) \to P(n+1)$ pour tout $n \geq 1$, alors $a_n = 2n + 1$, pour $n \geq 0$.

CQFD

Exercice 6 :

Le théorème fondamental de l'arithmétique stipule que tout nombre entier supérieur à 1 peut être représenté de manière unique comme un produit de nombres premiers, à l'ordre près des facteurs.

On vous demande de démontrer une partie du théorème. Montrez que tout entier positif $n \geq 2$ peut s'exprimer comme le produit de nombres premiers.

Solution

Pour ce problème, nous devons utiliser l'induction forte.

Soit : $P(n)$: *n peut être exprimé comme le produit de nombres premiers.*

Étape de base : On doit considère le cas de base $n = 2$

$$2 = 2$$

Ainsi P(2) est vraie car 2 est lui-même premier.

Étape inductive :

Nous devons montrer que $P(2), \ldots, P(n)$ implique $P(n+1)$ pour tout $n \geq 2$. Supposons que $P(2), \ldots, P(n)$ sont tous vraies (Hypothèse d'induction forte). Nous avons deux cas possibles. Le premier cas est si $n+1$ est lui-même premier, il est alors trivial que P(n+1) est vraie dans ce cas. Le deuxième cas est le cas où $n+1$ n'est pas premier. Ainsi, n+1 peut s'exprimer comme le produit de deux nombres s et r :

$$n + 1 = rs$$

Où $2 \leq r < n$ et $2 \leq s < n$

Ainsi, selon notre hypothèse d'induction forte, r et s peuvent tout deux s'exprimer comme le produit de nombres premiers et donc n+1 aussi. Ainsi, comme dans les deux cas n+1 peut s'exprimer comme le produit de nombres premiers, nous avons bien :

$$P(2) \wedge \ldots \wedge P(n) \rightarrow P(n+1) \text{ pour tout } n \geq 2$$

Conclusion :

Par induction forte, puisque $P(2)$ est vraie et que $P(2) \wedge \ldots \wedge P(n) \rightarrow P(n+1)$ pour tout $n \geq 2$, alors tout entier positif $n \geq 2$ peut s'exprimer comme le produit de nombres premiers.

CQFD