POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810
STRUCTURES DISCRÈTES

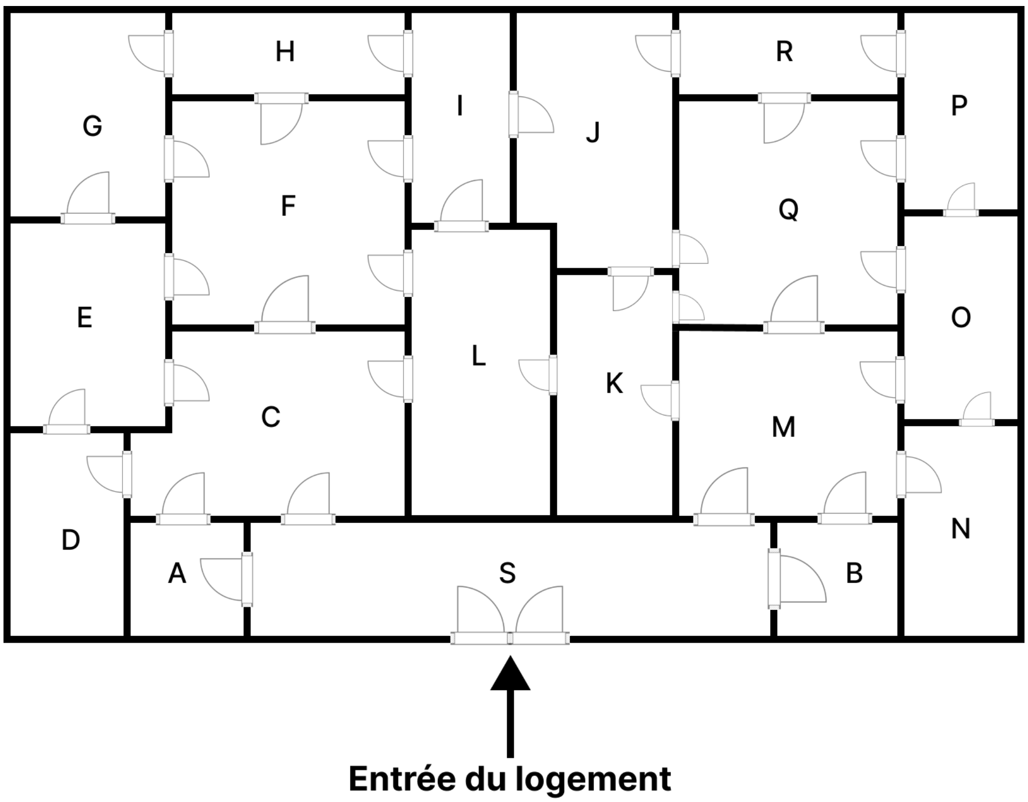
TD 10 : GRAPHE

E2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1

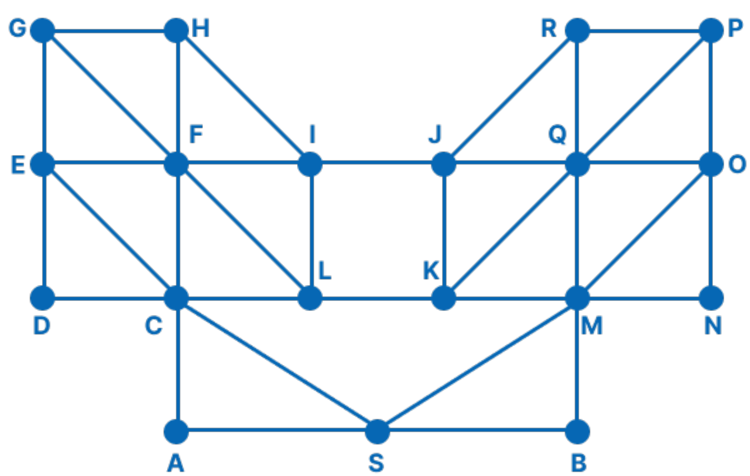
Une personne responsable de l'entretien ménager est engagée pour nettoyer une grande maison qui comprend plusieurs chambres. Les chambres de la maison sont reliées par des portes accessibles des deux côtés. Son objectif est de passer dans chaque chambre pour effectuer les tâches de nettoyage nécessaires.



a) En utilisant vos connaissances en graphes, modélisez le plan du logement par un graphe. Précisez ensuite ce que représentent les sommets et les arêtes dans votre graphe.

Solution :

Nous pouvons modéliser le plan du logement par un graphe non orienté. Dans cette modélisation, chaque chambre est représentée par un sommet du graphe, tandis que les portes reliant les chambres sont représentées par les arêtes du graphe.



b) Donnez la représentation de votre graphe sous forme de liste d'adjacence.

Solution :

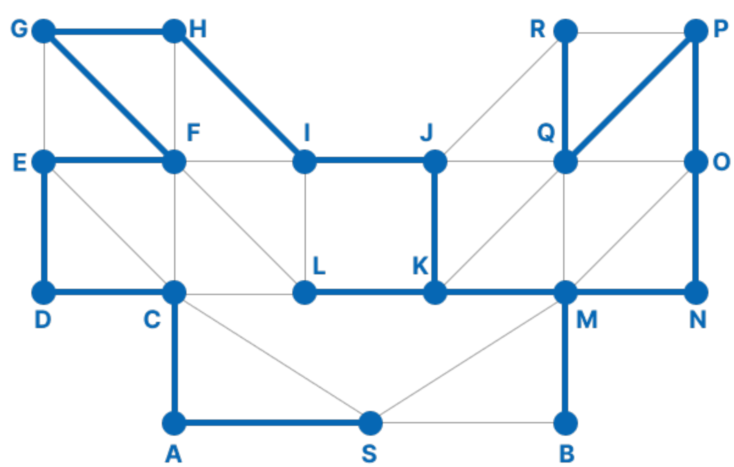
La liste d'adjacence ci-dessous spécifie les sommets adjacents à chaque sommet du graphe.

Sommet	Sommets adjacents
S	A, B, C, M
A	C, S
B	M, S
C	A, D, E, F, L, S
D	C, E
E	C, D, F, G
F	C, E, G, H, I, L
G	E, F, H
H	F, G, I
I	F, H, J, L
J	I, K, Q, R
K	J, L, M, Q
L	C, F, I, K
M	B, K, N, O, S
N	M, O
O	M, N, P, Q
P	O, Q, R
Q	J, K, M, O, P, R
R	J, P, Q

c) À partir de l'entrée **S**, donnez la séquence des chambres nettoyées en utilisant le parcours en profondeur. Les chambres doivent être considérés dans l'ordre alphabétique de leurs noms.

Solution :

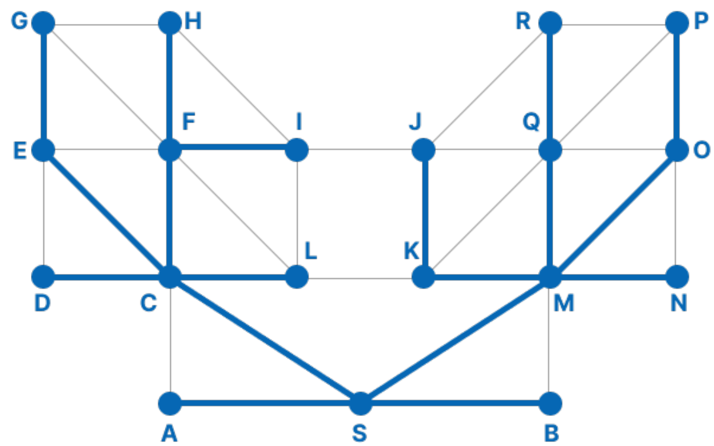
S – A – C – D – E – F – G – H – I – J – K – L – M – B – N – O – P – Q – R



d) À partir de l'entrée **S**, donnez la séquence des chambres nettoyées en utilisant le parcours en largeur. Les chambres doivent être considérés dans l'ordre alphabétique de leurs noms.

Solution :

S – A – B – C – M – D – E – F – L -K – N – O – Q – G – H – I – J – P – R



e) Le propriétaire du logement a demandé à la personne responsable de l'entretien ménager de fermer à clé toutes les portes de la maison en passant par chacune d'entre elles avant de les verrouiller. Peut-elle accomplir cette tâche sans faire demi-tour ni revisiter une partie de son parcours ? Justifiez votre réponse.

Solution :

Si la personne responsable de l'entretien ménager doit accomplir cette tâche sans faire demi-tour ni revisiter une partie de son parcours, cela nécessiterait un chemin Eulérien où chaque arête est traversée exactement une fois.

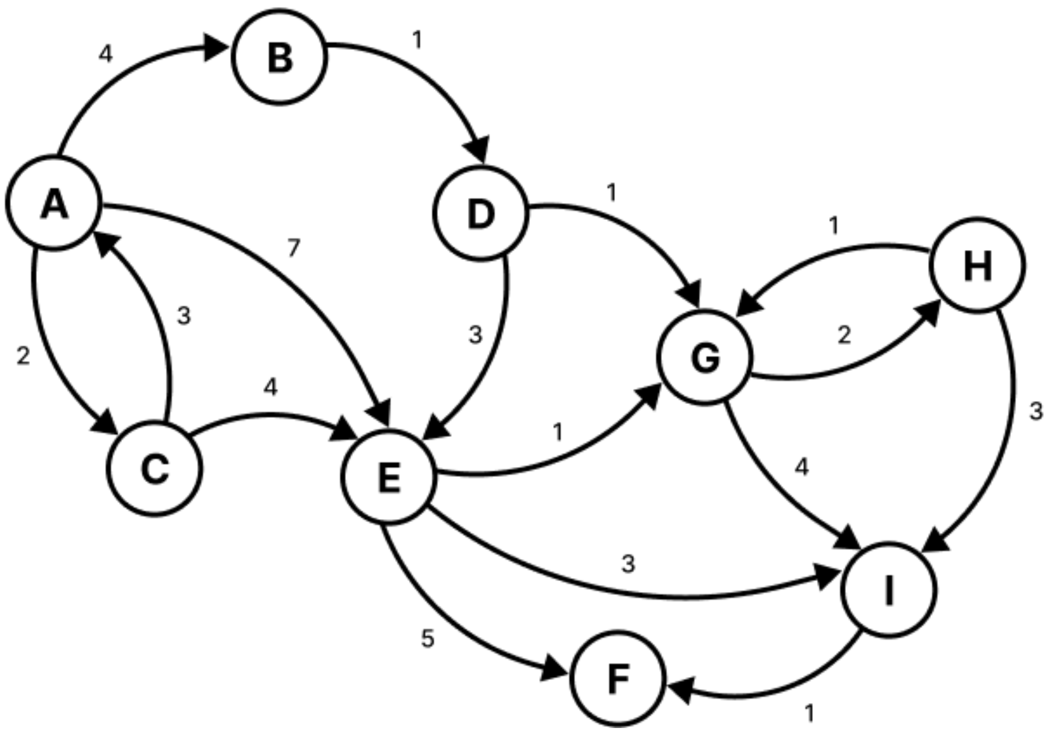
Cependant, nous constatons que dans le plan du logement, les sommets **G**, **H**, **P** et **R** ont tous un degré de 3, ce qui signifie qu'ils ont un nombre impair d'arêtes incidentes.

Et selon le théorème d'Euler, un graphe orienté avec plus de deux sommets de degré impair ne peut pas avoir de chemin Eulérien.

Par conséquent, la personne responsable de l'entretien ménager ne peut pas accomplir cette tâche sans faire demi-tour ni revisiter une partie de son parcours.

Exercice 2

En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminez le plus court chemin, du sommet **A** vers tous les autres sommets. Montrez toutes les étapes de votre réponse.

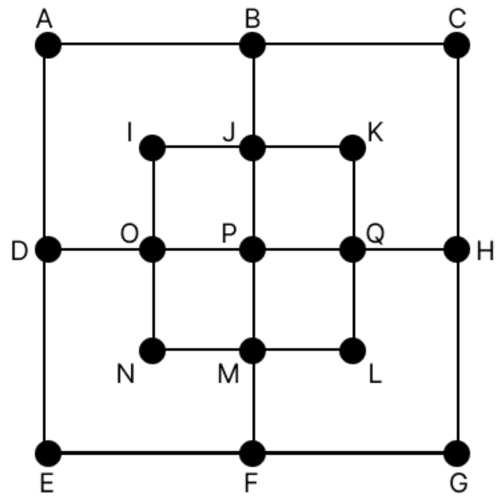


Solution :

Sommet it.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	Choix
0	0	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	-
1	-	4(A-B)	2(A-C)	∞ ( )	7(A-E)	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	A
2	-	4(A-B)	-	∞ ( )	6(A-C-E)	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	C
3	-	-	-	5(A-B-D)	6(A-C-E)	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	B
4	-	-	-	-	6(A-C-E)	∞ ( )	6(A-B-D-G)	∞ ( )	∞ ( )	D
5	-	-	-	-	-	11(A-C-E-F)	6(A-B-D-G)	∞ ( )	9(A-C-E-I)	E
6	-	-	-	-	-	11(A-C-E-F)	-	8(A-B-D-G-H)	9(A-C-E-I)	G
7	-	-	-	-	-	11(A-C-E-F)	-	-	9(A-C-E-I)	H
8	-	-	-	-	-	10(A-C-E-F)	-	-	-	I
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	F
Résultat	0	4(A-B)	2(A-C)	5(A-B-D)	6(A-C-E)	10(A-C-E-F)	6(A-B-D-G)	8(A-B-D-G-H)	9(A-C-E-I)	

Exercice 3

Pour le graphe ci-dessous, déterminez s'il contient un circuit Hamiltonien. Dans l'affirmative décrivez-en un.

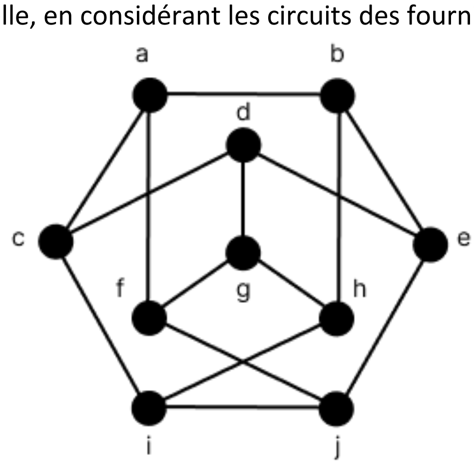


Solution :

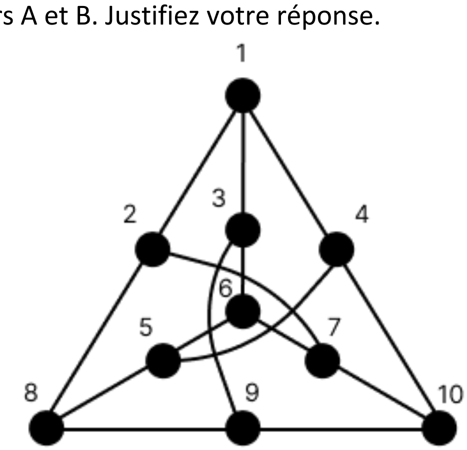
Ce graphe n'a pas de circuit Hamiltonien.
Si cela était le cas, alors le circuit devrait contenir les arêtes {D, A} et {A, B} étant donné que ce sont les seules arêtes incidentes au sommet A. Par le même raisonnement, le circuit devrait aussi contenir les six autres arêtes autour de la figure i.e. {B, C}, {C, H}, {H, G}, {G, F}, {F, E} et {E, D}. Cependant, ces huit arêtes forment déjà un circuit, et ce circuit omet les neuf sommets à l'intérieur. Par conséquent, il n'y a pas de circuit Hamiltonien.

Exercice 4

Les circuits électroniques sont modélisés par des graphes pour être conçus, vérifiés et protégés contre le vol de propriété intellectuelle. Les puces modernes sont des exemples de circuits électroniques miniaturisés complexes conçus à l'aide d'outils d'automatisation sophistiqués. L'isomorphisme de graphes est utilisé pour vérifier que la disposition de la puce correspond à la conception originale et pour détecter les violations de propriété intellectuelle entre les fournisseurs. Vérifiez s'il y a violation de propriété intellectuelle, en considérant les circuits des fournisseurs A et B. Justifiez votre réponse.



Fournisseur A



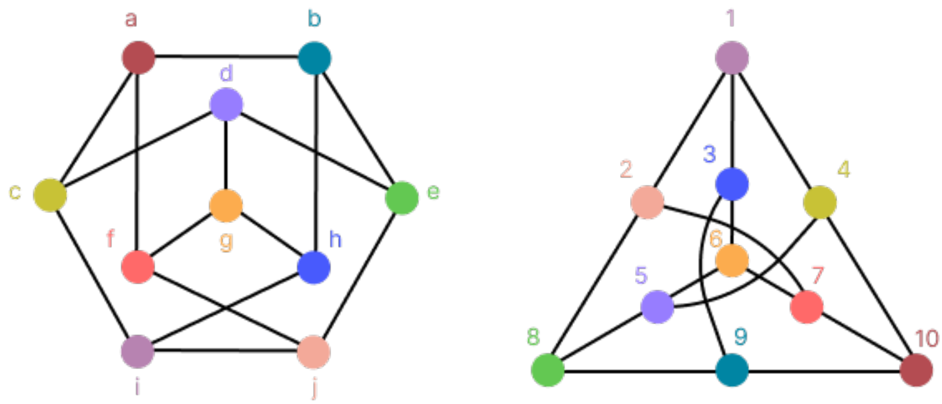
Fournisseur B

Solution :

Il y a violation de propriété intellectuelle, puisque les deux graphes sont bien isomorphes.

Soit la fonction bijective qui transforme le graphe du fournisseur A en celui du fournisseur B.
Plusieurs réponses sont possibles. On a par exemple :

- $v(a) = 10$
- $v(b) = 9$
- $v(c) = 4$
- $v(d) = 5$
- $v(e) = 8$
- $v(f) = 7$
- $v(g) = 6$
- $v(h) = 3$
- $v(i) = 1$
- $v(j) = 2$



Fournisseur A Fournisseur B

Exercice 5

Un groupe de 17 personnes se propose de constituer un réseautage particulier de sorte que chaque membre du groupe ait dans ses contacts le numéro de téléphone d'exactement 3 autres personnes du groupe. Ces échanges de numéros doivent être mutuels, c'est-à-dire que chaque personne doit avoir donné son numéro à 3 autres personnes qui, en retour, ont donné leur propre numéro à cette personne. Est-il possible de constituer ce réseautage ? Justifiez votre réponse.

Solution :

Non, il n'est pas possible de constituer un tel réseautage.
On peut constituer un graphe dont les sommets sont les 17 personnes. Chaque numéro de téléphone échangé permet d'établir un arc du graphe. Chaque sommet du graphe est donc de degré 3.
D'après le théorème des poignées de mains 3 x 17 = 51 qui est la somme des degrés des sommets du graphe doit être égale à 2 fois le nombre d'arcs. Il devrait donc être pair et non impair (51).