Solutionnaire

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Contrôle périodique 3

LOG2810

Sigle du cours

Sigle et titre du cours	*Groupe*	*Trimestre*
LOG2810 Structures discrètes	Tous	Hiver 2023
Professeur	***Local***	***Téléphone***
Aurel Randolph, Chargé de cours Lévis Thériault, Coordonnateur		

Jour	*Date*	*Durée*	*Heures*
Samedi	1er avril 2023	1h	10h30-11h30

Documentation	*Calculatrice*	
☐ Aucune	☐ Aucune	Les appareils électroniques personnels sont interdits.
☒ Toute	☐ Toutes	
☒ Voir directives particulières	☒ Non programmable (AEP)	

Question 1 **(2.5 points)**
Soit la relation de récurrence :

$$a_{n+3} = 8a_{n+2} - 22a_{n+1} + 24a_n - 9a_{n-1}$$

En considérant que **1** et **3** sont des racines évidentes de l'équation caractéristique, donnez la solution générale de la relation de récurrence. Détaillez votre réponse.

Réponse :

On a: $a_{n+3} - 8a_{n+2} + 22a_{n+1} - 24a_n + 9a_{n-1} = 0$.

La relation de récurrence linéaire homogène à coefficient constant de degré 4 a pour équation caractéristique : $r^4 - 8r^3 + 22r^2 - 24r + 9 = 0$.

D'après l'énoncé 1 et 3 sont des racines évidentes de l'équation caractéristique. Elle se réécrit alors :

$(r-1)(r-3)(r^2 - 4r + 3) = 0$

Les racines de $r^2 - 4r + 3 = 0$ sont 1 et 3. Donc les racines de l'équation sont r = 1 et r = 3, toutes deux des racines doubles.

La solution générale de la relation de récurrence est de la forme $a_n = x(1)^n + y.n.(1)^n + u(3)^n + z.n.(3)^n$.

D'où $\boldsymbol{a_n = x + y.n + u.3^n + z.n.3^n}$ avec x, y, u et z réels.

$\boldsymbol{a_n = (x + u.3^n) + n.(y + z.3^n)}$

Question 2 **(2.5 points)**
Un clavier de 9 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble. Le code est constitué d'une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres. Combien y a-t-il de codes comportant au moins 2 chiffres identiques. Justifiez votre réponse.

1	**2**	**3**
4	**5**	**6**
A	**B**	**C**

Réponse :

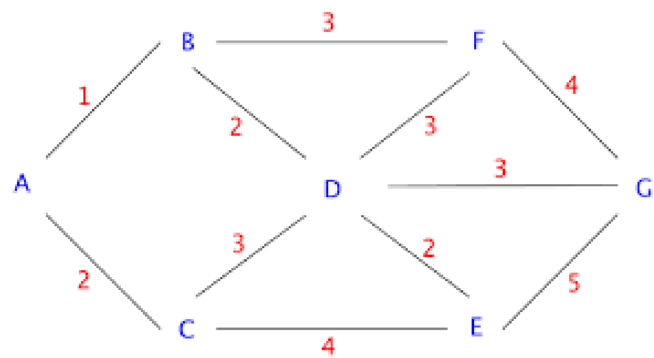
- Choix d'une lettre parmi 3 : P(3, 1).
- Choix du chiffre qui se répète : C(6, 1).
- Choix du chiffre qui ne se répète pas lorsqu'un chiffre est répété 2 fois : C(5, 1).
- Placement du chiffre qui ne se répète pas lorsqu'un chiffre est répété 2 fois : P(3, 1).

✓ Le nombre de codes comportant exactement 2 chiffres identiques est donc :
P(3, 1).C(6, 1).C(5, 1).P(3, 1) = **3.6.5.3 = 270 possibilités**

✓ Le nombre de codes comportant exactement 3 chiffres identiques est donc :
P(3, 1).C(6, 1) = **3 .6 = 18 possibilités**

✓ Le nombre de codes comportant au moins 2 chiffres identiques est donc :
P(3, 1).C(6, 1).C(5, 1).P(3, 1) + P(3, 1).C(6, 1) = **270 + 18 = 288 possibilités**

Question 3 (**4 points)**
Soit le graphe suivant. Trouvez l'arbre de recouvrement de poids minimal en appliquant l'algorithme de Prim. Vous devez présenter toutes les étapes de votre réponse.



Réponse :

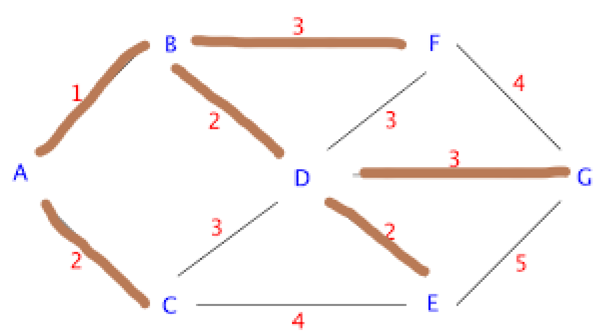
- **Méthode** : Prim

Démarche

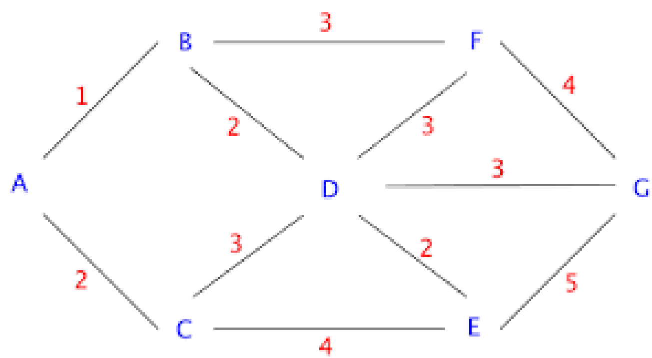
- Choisir un arc de coût minimal et l'ajouter à l'arbre en construction.
- Ajouter de manière itérative des arcs à l'arbre en construction, lorsque
  - ils sont incidents à un sommet déjà présent dans l'arbre en construction ;
  - présente un coût minimal parmi les arcs incidents à un sommet déjà présent dans l'arbre en construction ;
  - ils n'ajoutent pas de cycle.
- Arrêter après l'ajout de (n-1) = 8 arcs, avec n = 9 le nombre de sommets dans le graphe initial.

Exemple d'ordre d'ajout des arcs.

AB	1
AC	2
BD	2
DE	2
BF	3
DG	3



<u>Question 4</u> **(3.5 points)**
Soit le graphe suivant. Trouvez l'arbre de recouvrement de poids minimal en appliquant l'algorithme de Kruskal. Vous devez présenter toutes les étapes de votre réponse.

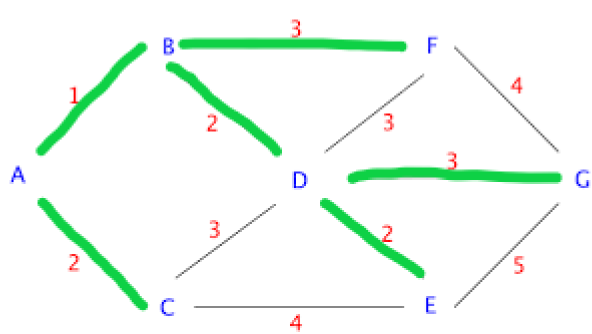


Réponse :

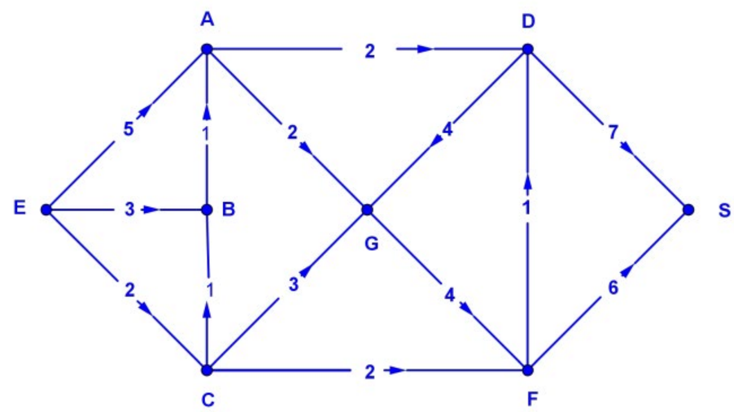
- **Méthode** : Kruskal

Démarche

1. Tri les arcs en ordre croissant de coût : AB 1 AC 2 BD 2 DE 2 CD 3 BF 3 DF 3 DG 3 CE 4 FG 4 EG 5	2. Construction de l'arbre par ajout itératif d'arcs. À cet effet, il faut parcourir la liste triée du haut vers le bas en ne sélectionnant que les arcs qui n'ajoutent pas de cycle dans l'arbre en construction. Arrêter après l'ajout de (n-1) = 6 arcs, avec n = 7 le nombre de sommets dans le graphe initial.	À titre illustratif, les arcs non retenus sont barrés. AB 1 AC 2 BD 2 DE 2 ~~CD 3~~ BF 3 ~~DF 3~~ DG 3 ~~CE 4~~ ~~FG 4~~ ~~EG 5~~



Question 5 (**5.5 points)**
En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminez le plus court chemin, du sommet **E** vers tous les autres sommets. Montrez toutes les étapes de votre réponse.



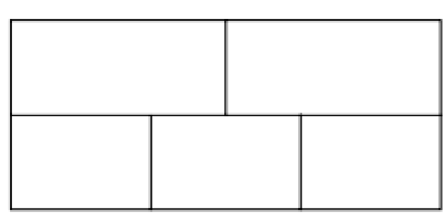
Réponse :

Sommets → it.	A	B	C	D	E	F	G	S	Choix
0	∞	∞	∞	∞	0 (-)	∞	∞	∞	-
1	5 (E-A)	3 (E-B)	2 (E-C)	∞	-	∞	∞	∞	E
2	5 (E-A)	3 (E-B)	-	∞	-	4 (E-C-F)	5 (E-C-G)	∞	C
3	4 (E-B-A)	-	-	∞	-	4 (E-C-F)	5 (E-C-G)	∞	B
4	-	-	-	6 (E-B-A-D)	-	4 (E-C-F)	5 (E-C-G)	∞	A
5	-	-	-	5 (E-C-F-D)	-	-	5 (E-C-G)	10 (E-C-F-S)	F
6	-	-	-	-	-	-	5 (E-C-G)	10 (E-C-F-S)	D
7	-	-	-	-	-	-	-	10 (E-C-F-S)	G
8	-	-	-	-	-	-	-	-	S
Résultat	**4 (E-B-A)**	**3 (E-B)**	**2 (E-C)**	**5 (E-C-F-D)**	**0 (-)**	**4 (E-C-F)**	**5 (E-C-G)**	**10 (E-C-F-S)**	

Le chiffre entre parenthèses indique le sommet de provenance. Ex. 7 (1) signifie un coût de 7 en provenance du sommet 1.

Question 6 (**2 points)**
Est-il possible de tracer une courbe, sans lever le crayon, qui coupe une et une seule fois chacun des 16 segments de la figure suivante ? Justifiez votre réponse.

Note : Faire un tracé n'est pas une justification à la question posée. Aussi, vous devez reproduire la figure pour réaliser votre tracé dans votre réponse.

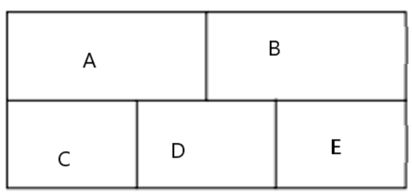


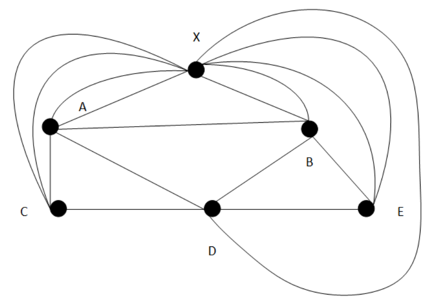
Réponse :

- On peut faire une approche essai-erreur et se rendre compte que ce n'est pas possible. Mais trouver la justification ne sera pas chose évidente. Cette solution n'est donc pas recommandée car une justification est requise.
- Approche de formalisation du problème

Le problème peut être modélisé en considérant que la figure est constituée de 5 pièces, 2 en haut et 3 en bas. À ces 5 pièces, on ajoutera l'extérieur de la figure. Chaque pièce est considérée comme le sommet d'un graphe dont les arêtes sont les segments qu'il faut couper. Ainsi couper un segment, c'est comme franchir une porte invisible ou un pont pour se rendre dans une autre pièce ou à l'extérieur, soit se rendre à un autre sommet. Passer par l'extérieur c'est emprunter aussi un arc entre la pièce (sommet) et l'extérieur (sommet). Il en est de même de passer de l'extérieur à l'intérieur d'une pièce.

Le nombre de segments autour d'une pièce de vient donc le nombre d'arcs incidents au sommet qu'il représente, soit son degré.





Tracer une courbe, sans lever le crayon, qui coupe chacun des 16 segments de la figure, c'est donc parcourir tous les arcs du graphe. Ce qui revient à chercher une chaîne eulérienne. Cela n'est possible que lorsque le graphe contient exactement 2 sommets de degré impair. Or nous avons au moins 3 pièces de degrés (nombre de segments ou arcs incidents) impairs. Les 2 pièces du haut et celle du milieu en bas en ont 5 chacune. Il n'est donc pas possible de trouver une chaîne eulérienne.

Nous avons : deg(A) = 5 ; deg(B) = 5; deg(C) = 4; deg(D) = 5 ; deg(E) = 4 ; deg(X) = 9.