POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810
STRUCTURES DISCRÈTES

TD 9 : DÉNOMBREMENT

Directives pour la remise:

- La remise est individuelle et se fait à la fin de la séance de TD.
- Répondez directement sur ce document Word (docx).
- Lorsque vous avez terminé, générez un PDF avec le nom sous le format: ***SectionDeTD-Matricule.pdf*** (exemple: *04-1234567.pdf*).
- Téléchargez votre fichier PDF dans la boîte de remise située dans la Zone TDs de la page Moodle du cours.
- Choisissez la boîte de remise qui correspond à votre section de TD.
- Aucun retard et aucune remise par courriel ne seront accepté.
- Dans l'intérêt de l'équité pour tous les étudiants, vous devez modifier le fichier Word (docx) fourni. Modifier le fichier EXCLUT le fait d'intégrer des scans de rédaction manuscrite ou d'y écrire avec un stylet.
- Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.

Objectifs du TD9

Exercice 1 et 2: Appliquer les techniques de dénombrement afin de résoudre des problèmes combinatoires.

Exercice 3: Analyser un algorithme qui utilise le principe de diviser pour régner.

Exercice 4: Appliquer le théorème maître afin d'évaluer la complexité algorithmique.

Exercice 5: Résoudre des relations de récurrence linéaire homogène à l'aide de l'équation caractéristique.

Exercice 6: Résoudre des relations de récurrence à l'aide des fonctions génératrices

La remise est individuelle mais le travail en équipe est encouragé. Veuillez inscrire votre nom, prénom et matricule ainsi que les noms des collègues avec lesquels vous avez collaboré pour le TD.

Nom:

Prénom:

Matricule:

Collègues:

Exercice 1

De combien de façons une douzaine de livres peuvent-ils être placés sur quatre tablettes distinctes d'une étagère.

a) Si les livres sont des exemplaires indiscernables du même titre ?

Réponse:

Tout ce qui compte est le nombre de livres sur chaque tablette, donc la réponse est le nombre de solutions à $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$, où x_i est considéré comme le nombre de livres sur l'étagère i. La réponse est donc $C(4 + 12 - 1, 12) = C(15, 12) = 455$ (voir page 28 des notes de cours sur le dénombrement ou p.446 à 448 du livre de Rosen).

b) S'il n'y a pas deux livres identiques et que la position des livres sur les tablettes est importante ?

Réponse:

Sans perte de généralité si l'on numérote les livres $b_1, b_2, \ldots, b_{12}$ et que l'on pense à placer le livre b_1, puis à placer b_2, et ainsi de suite. Il y a clairement 4 façons de placer b_1, puisque nous pouvons le mettre comme premier livre (pour l'instant) sur n'importe laquelle des tablettes. Une fois que b1 est placé, il y a 5 façons de placer b_2, car il peut aller à droite de b_1 ou il peut s'agir du premier livre sur l'une des quatre tablettes. Nous continuons ainsi : il y a 6 façons de placer b_3 (à droite de b_1, à droite de b_2, ou comme premier livre sur l'une des étagères), 7 façons de placer b_4, ..., 15 façons de placer b_{12}. La réponse est donc le produit de ces nombres $4 \text{x} 5 \cdots 15 = 217\,945\,728\,000$.

Exercice 2

Une tablette contient 12 livres un à la suite de l'autre. Combien y a-t-il de manières de choisir cinq livres de manière à ne pas choisir deux livres adjacents ?

Indice: Représentez les livres choisis par des barres verticales et les livres non choisis par les étoiles. Par exemple |**|*|*|**|*. Comptez le nombre de séquences de cinq barres et sept étoiles afin qu'aucune barre ne soit adjacente.

Réponse:

Il y a 5 barres (livres choisis), et donc il y a 6 endroits où les 7 étoiles (livres non choisis) peuvent tenir (avant la première barre, entre la première et la deuxième barre, ..., après la cinquième barre). Chacun des deuxième à cinquième de ces emplacements doit contenir au moins une étoile, afin que les livres adjacents ne soient pas choisis. Une fois que nous avons placé ces 4 étoiles, il reste 3 étoiles à placer dans 6 emplacements et il est possible de mettre plus qu'une étoile dans un emplacement. Le nombre de façons de le faire est donc $C(6+3-1,3)=C(8,3)=56$.

Exercice 3

La recherche binaire ou dichotomique (en anglais : binary search) est un algorithme de recherche pour trouver la position d'un élément dans un tableau trié. L'algorithme est probablement l'exemple le plus simple d'application du principe de diviser pour régner. Le problème de recherche est résolu en le divisant en deux sous-problèmes, chacun représentant environ la moitié de l'original.

Algorithme 1.

```
recherche(élément, tableau, début, fin)
   if (début <= fin)
      m = (début + fin) / 2
      if tableau[m] = élément
         return m
      else if tableau[m] > élément
         return recherche(élément, tableau, début, m)
      else
         return recherche(élément, tableau, m+1, fin)
   else
      return none
```

La complexité algorithmique est:

$$T(n) = T(n/2) + O(1)$$

Dans le pire scénario, combien d'appels récursifs afin de subdiviser le problème sont nécessaires pour trouver la position d'un élément? Expliquez votre raisonnement.

a) Pour un tableau ordonné de taille 8

Réponse:

Le tableau de départ est de longueur 8 éléments. Le premier appel récursif recevra un tableau de longueur maximale de 4 éléments. Le deuxième appel récursif recevra un tableau de longueur maximale de 2 éléments. Le troisième appel récursif recevra un tableau de longueur maximale de 1 élément.

Ainsi au maximum il faut 3 appels récursifs pour trouver un élément dans un tableau ordonné qui contient 8 éléments.

b) Pour un tableau ordonné de taille $n = 2^d$.

Réponse:

Il faut $\log_2 n$ subdivision du problème pour réduire le tableau à 1 élément.

Exercice 4

La complexité d'exécution d'un algorithme qui applique le principe de diviser pour régner est typiquement de la forme:

$$T(n) = aT(n/b) + g(n)$$

En particulier lorsque $g(n) = O(n^d)$

- a est le nombre d'appel récursif impliqué lorsque le problème est subdivisé
- b est la vitesse à laquelle la taille du sous-problème diminue
- d représente la complexité d'exécution de la partie non récursive

Lorsque a, b et d sont connus alors une application du théorème maître permet d'obtenir la complexité asymptotique de l'algorithme.

Théorème maître pour : $T(n) = aT(n/b) + O(n^d)$

Cas 1 Si $a < b^d$, alors $T(n) = O(n^d)$
Cas 2 Si $a = b^d$, alors $T(n) = O(n^d \log n)$
Cas 3 Si $a > b^d$, alors $T(n) = O(n^{\log_b a})$

Utilisez le théorème maître afin d'évaluer les complexités algorithmiques suivantes. Détaillez votre raisonnement.

a) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$

Réponse:

$a = 2, b = 2, d = 1$
$a = b^d$
Cas 2 : $T(n) = O(n \log n)$

b) $T(n) = 9T(n/3) + O(n)$

Réponse:

$a = 9, b = 3, d = 1$
$a > b^d$
Cas 3 : $T(n) = O(n^2)$

c) $T(n) = 7T(n/3) + O(n^3)$

Réponse:

$a = 7, b = 3, d = 3$
$a < b^d$
Cas 1 : $T(n) = O(n^2)$

d) $T(n) = T(n/2) + O(1)$

Réponse:

$a = 1, b = 2, d = 0$
$a = b^d$
Cas 2 : $T(n) = O(\log n)$

Exercice 5

Pour les cas particuliers de récurrence linéaire et homogène $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ nous pouvons utiliser le théorème suivant.

Théorème

Soient c_1 et c_2 des nombres réels. Supposons que $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ ait deux racines distinctes $r_1$et r_2. Alors la suite $\{a_n\}$ est une solution de la relation de récurrence $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ si et seulement si $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ pour $n = 0,1,2,\ldots$ où α_1 et α_2 sont des constantes.

a) Trouver les racines caractéristiques de la relation de récurrence linéaire homogène $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$.

Réponse:

L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$, dont les racines sont, par la formule quadratique, 2 et -1.

b) Trouver la solution de la relation de récurrence dans la partie a) avec $a_0 = 1$ et $a_1 = 1$.

Réponse:

La solution générale est, par la partie a), $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(-1)^n$.

Utiliser les conditions initiales donne $1 = \alpha_1 + \alpha_2$ et $1 = 2\alpha_1 - \alpha_2$.

La résolution de ces équations linéaires donne $\alpha_1 = \dfrac{2}{3}$ et $\alpha_2 = \dfrac{1}{3}$.

Alors la solution est :

$$a_n = \frac{2}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n$$

Exercice 6

Herbert S. Wilf présente les fonctions génératrices comme une corde à linge sur laquelle on accroche une séquence de nombres à afficher (https://www2.math.upenn.edu/~wilf/gfologyLinked2.pdf).

Par exemple la relation de récurrence $a_k = 3a_{k-1}$ pour $k \geq 1$ et $a_0 = 1$, produit la série 1, 3, 9, 27, … et la fonction génératrice est:

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \cdots$$

Plutôt que de chercher directement une formule de forme fermée qui permet d'évaluer les a_k, la technique consiste à chercher une fonction génératrice $G(x)$ qui contient les a_k. Voici un exemple:

Vous pouvez facilement vérifier que $G(x) - 3xG(x) = 1$. Alors

$$G(x) = \frac{1}{1 - 3x}$$

En utilisant l'identité $\sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k = \frac{1}{1 - ax}$ nous pouvons déduire que les $a_k = 3^k$.

a) Utilisez la technique de la fonction génératrice afin de trouver une formule de forme fermée pour la relation de récurrence $a_k = 7a_{k-1}$ avec la condition initiale $a_0 = 5$.

Réponse:

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 5 + 5 \times 7^2 x + 5 \times 7^3 x^2 + 5 \times 7^4 x^3 + \cdots$$

$$G(x) - 7xG(x) = 5$$

$$G(x) = \frac{5}{1 - 7x}$$

En utilisant l'identité $\sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k = \frac{1}{1 - ax}$ nous pouvons déduire que les $a_k = 5 \times 7^k$.

b) Utilisez la technique de la fonction génératrice afin de trouver une formule de forme fermée pour la relation de récurrence $a_k = 3a_{k-1} + 2$ avec la condition initiale $a_0 = 1$.

Indice : Utilisez vers la fin du développement la décomposition en fraction partielle.

Réponse:

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$xG(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k$$

$$G(x) - 3xG(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 3a_{k-1}x^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - 3a_{k-1})x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2x^k$$

$$G(x) - 3xG(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2x^k = 1 + 2x\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + \frac{2x}{1-x} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$G(x) = \frac{1+x}{(1-x)(1-3x)} = \frac{a}{(1-x)} + \frac{b}{(1-3x)} = \frac{a(1-3x) + b(1-x)}{(1-x)(1-3x)}$$

$$1 + x = a(1-3x) + b(1-x) = a + b + x(-3a - b)$$

$a + b = 1$
$-3a - b = 1$
Il faut résoudre un système linéaire. La solution est $a = -1$ et $b = 2$.

$$G(x) = \frac{1+x}{(1-x)(1-3x)} = \frac{-1}{(1-x)} + \frac{2}{(1-3x)}$$

$$G(x) = -1\sum_{k=0}^{\infty} x^k + 2\sum_{k=0}^{\infty} (3)^k x^k$$

$$a_k = 2 \times 3^k - 1$$