POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810
STRUCTURES DISCRÈTES

# TD 4 : **ENSEMBLES ET FONCTIONS**

É2022

# SOLUTIONNAIRE

**Exercice 1**. Soit A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Simplifier chacune des expressions.

a) $\overline{A \cup B} \cap \overline{C \cup \overline{A}}$

Réponse :

$$\overline{A \cup B} \cap \overline{C \cup \overline{A}} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap (\overline{C} \cap \mathrm{A})$$

$$\overline{A \cup B} \cap \overline{C \cup \overline{A}} = (\overline{A} \cap \mathrm{A}) \cap (\overline{B} \cap \overline{C})$$

$$\overline{A \cup B} \cap \overline{C \cup \overline{A}} = \emptyset \cap (\overline{B} \cap \overline{C})$$

$$\overline{A \cup B} \cap \overline{C \cup \overline{A}} = \emptyset$$

b) $\overline{A \cap B} \cup \overline{C \cap \overline{A}}$

Réponse :

$$\overline{A \cap B} \cup \overline{C \cap \overline{A}} = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cup (\overline{C} \cup \mathrm{A})$$

$$\overline{A \cap B} \cup \overline{C \cap \overline{A}} = (\overline{A} \cup \mathrm{A}) \cup (\overline{B} \cup \overline{C})$$

$$\overline{A \cap B} \cup \overline{C \cap \overline{A}} = \mathrm{E} \cup (\overline{B} \cup \overline{C})$$

$$\overline{A \cap B} \cup \overline{C \cap \overline{A}} = \mathrm{E}$$

c) $(A \cap B) \cap \overline{A \cap C}$

Réponse :

$$(A \cap B) \cap \overline{A \cap C} = (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})$$

$$(A \cap B) \cap \overline{A \cap C} = [(A \cap B) \cap \overline{A}] \cup [(A \cap B) \cap \overline{C}]$$

$$(A \cap B) \cap \overline{A \cap C} = (A \cap \overline{A} \cap B) \cup [(A \cap B) \cap \overline{C}]$$

$$(A \cap B) \cap \overline{A \cap C} = \emptyset \cup [(A \cap B) \cap \overline{C}]$$

$$(A \cap B) \cap \overline{A \cap C} = (A \cap B) \cap \overline{C}$$

$$(A \cap B) \cap \overline{A \cap C} = A \cap B \cap \overline{C}$$

**Exercice 2.** Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On pose :

$$\mathbf{A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)}$$

Montrez que A Δ B = $\overline{A}\ \Delta\ \overline{B}$

**Réponse :**

Soit x un élément de E.

$x \in \overline{A} \,\Delta\, \overline{B} \Leftrightarrow (x \in (\overline{A} - \overline{B})) \vee (x \in (\overline{B} - \overline{A}))$

$\Leftrightarrow [(x \in \overline{A}) \wedge (x \notin \overline{B})] \vee [(x \in \overline{B}) \wedge (x \notin \overline{A})]$

$\Leftrightarrow [(x \notin A) \wedge (x \in B)] \vee [(x \notin B) \wedge (x \in A)]$

$\Leftrightarrow [(x \in B) \wedge (x \notin A)] \vee [(x \in A) \wedge (x \notin B)]$

$\Leftrightarrow (x \in (B - A)) \vee (x \in (A - B))$

$\Leftrightarrow x \in ((B - A) \cup (A - B))$

$\Leftrightarrow x \in ((A - B) \cup (B - A))$

$\Leftrightarrow x \in A \,\Delta\, B$

D'où $A \,\Delta\, B = \overline{A} \,\Delta\, \overline{B}$

**Exercice 3**. Soit les ensembles E = {a, b, c, d, e} et F = {1, 2, 3, 4, 5}.
Dans chacun des cas, dites s'il s'agit d'une fonction, d'une fonction injective, d'une fonction surjective ou d'une fonction bijective. Justifiez votre réponse.

a) {(a, 3), (b, 3), (a, 5), (c, 4), (e, 1)}

**Réponse :**

- f n'est pas une fonction, car plus d'un élément de F sont affectés à a, notamment les deux images 3 et 5.

b) {(a, 3), (b, 3), (d, 5), (c, 4), (e, 1)}

**Réponse :**

- f est une fonction, car au plus un élément de F est affecté à chaque élément de E.
- f n'est pas injective car 3 = f(a) = f(b) et a ≠ b.
- f n'est pas surjective car 2 n'a pas d'antécédent.
- f n'est pas bijective car n'étant ni injective, ni surjective.

c) {(a, 3), (b, 5), (c, 4), (e, 1)}

**Réponse :**

- f est une fonction, car au plus un élément de F est affecté à chaque élément de E.
- f est injective car chaque image a un antécédent distinct.
- f n'est pas surjective car 2 n'a pas d'antécédent.
- f n'est pas bijective car n'étant pas surjective.

d) {(d, 2), (a, 3), (b, 5), (c, 4), (e, 1)}

**Réponse :**

- f est une fonction, car au plus un élément de F est affecté à chaque élément de E.
- f est injective car chaque image a un antécédent distinct.
- f est surjective car chaque image a un antécédent.
- f est bijective car étant à la fois injective et surjective.

e) {(d, 2), (a, 3), (b, 5), (c, 4), (e, 2)}

**Réponse :**

- f est une fonction, car au plus un élément de F est affecté à chaque élément de E.
- f n'est pas injective car 2 = f(d) = f(e) et d ≠ e.
- f n'est pas surjective car 1 n'a pas d'antécédent.
- f n'est pas bijective car n'étant ni injective, ni surjective.

**Exercice 4**. On considère la fonction ***f***

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

a) ***f*** est-elle injective ? Justifiez votre réponse.

**Réponse :**

- Méthode 1 :

Soit $x_1$ et $x_2$ deux entiers tel que $x_1 \neq -2$, $x_1 \neq 2$, $x_2 \neq -2$ et $x_2 \neq 2$.
Si f est injective, alors $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$.
Supposons que $f(x_1) = f(x_2)$.
$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow (x_1^2 - 4 = x_2^2 - 4)$
$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow (x_1^2 = x_2^2)$
$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow (x_1 = x_2 \text{ ou } x_1 = - x_2)$
$x_1$ n'est pas toujours égal à $x_2$. f n'est donc pas injective.

- Méthode 2 :

La preuve par contre-exemple peut être utilisée. f(-3) = f(3)= 1/5 et -3 ≠3.

b) ***f*** est-elle surjective ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

Soit y un réel. Existe-t-il un entier x tel que y = f(x) ?
Lorsque y = 0, aucun entier x ne vérifie l'équation y = f(x).
O n'ayant donc pas d'antécédent, f n'est pas surjective.

c) ***f*** est-elle bijective ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

f n'est pas bijective car elle n'est ni injective, ni surjective.

**Exercice 5.** Soit n un entier positif ou nul et $(V_n)$ une suite tel que :

$$V_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$$

a) Montez que $(V_n)$ est une suite géométrique.

**Réponse**

$V_0 = \frac{3^0}{2^{0+1}} = \frac{3}{2}$

$V_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$

$V_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+1+1}}$
$V_{n+1} = \frac{3}{2} \times \frac{3^n}{2^{n+1}}$
$V_{n+1} = \frac{3}{2} \times V_n$

$(V_n)$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme $V_0 = \frac{3}{2}$

b) Calculez la somme des vingt premiers termes de $(V_n)$.

**Réponse**

Soit $S_{19}$ cette somme. On a :

$S_{19} = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_{19}$

$$S_{19} = V_0 \times \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{19-0+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} = V_0 \times \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{20} - 1}{\frac{1}{2}}$$

$$S_{19} = 3 \times \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{20} - 1\right)$$

**Exercice 6 (facultatif)**. Soit x un réel. Montrez que :

$$\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

**Réponse**

x étant un réel, il existe un entier positif n et un réel k tel x = n + k, avec k ∈ ]0, 1[.
Utilisons une preuve pas cas.

- Cas k ∈ ]0, ½ [
  $\lfloor x \rfloor = \lfloor n + k \rfloor = n$
  $\lfloor x + ½ \rfloor = \lfloor n + k + ½ \rfloor = n$, car $½ < k + ½ < 1$
  Ainsi $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + ½ \rfloor = 2n$
  De plus, $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor 2n + 2k \rfloor = 2n$, car $0 < 2k < 1$
  D'où $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + ½ \rfloor$
- Cas k ∈ ] ½, 1[
  $\lfloor x \rfloor = \lfloor n + k \rfloor = n$
  $\lfloor x + ½ \rfloor = \lfloor n + k + ½ \rfloor = n+1$, car $1 < k + ½ < 1+½$
  Ainsi $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + ½ \rfloor = 2n + 1$
  De plus, $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor 2n + 2k \rfloor = 2n + 1$, car $1 < 2k < 2$
  D'où $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + ½ \rfloor$
  - Cas k = ½
    $\lfloor x \rfloor = \lfloor n + k \rfloor = n$
    $\lfloor x + ½ \rfloor = \lfloor n + k + ½ \rfloor = \lfloor n + 1 \rfloor = n + 1$
    Ainsi $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + ½ \rfloor = 2n + 1$
    De plus, $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor 2n + 2k \rfloor = = \lfloor 2n + 1 \rfloor = 2n + 1$
    D'où $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + ½ \rfloor$

CQFD