POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 1 : LOGIQUE PROPOSITIONNELLE

A2022

Directives pour la remise :

- Répondez directement sur ce document papier.
- La remise est individuelle, mais le travail en équipe est encouragé.
- La remise se fait à la fin de la séance de TD.
- **Aucun retard ne sera accepté.**
- **Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.**

Identification

Veuillez inscrire votre section, nom, prénom et matricule ainsi que les noms des collègues avec lesquels vous avez collaboré pour le TD

Section :

Nom :

Prénom :

Matricule :

Collègues :

Exercice 1 :

Traduisez ces spécifications de système en français, où la fonction propositionnelle S(x, y) est « x est dans l'état y ». Le domaine pour x se compose de tous les systèmes possibles, le domaine de y se compose de tous les états possibles.

a) $\exists x$ S(x, fonctionne)
Réponse:
Il existe un système qui fonctionne.

b) $\forall x$(S(x, fonctionne) $\vee$ S(x, diagnostique))
Réponse:

Tout système est dans un état fonctionnel ou diagnostique
tous les systèmes sont dans un état fonctionnel ou diagnostique

c) $\exists x$ $\neg$S(x, disponible)
Réponse:

Il existe au moins un système qui n'est pas disponible
Certains systèmes ne sont pas disponibles.

d) $\forall x$ $\neg$S(x, fonctionne)
Réponse:
Aucun système ne fonctionne.

Attention ! Cela est différent de « Ce ne sont pas tous les systèmes qui fonctionnent »

Exercice 2 :

Soit P(x, y) une fonction propositionnelle pour laquelle les valeurs possibles de x et y sont : 1, 2, 3, 4. Le tableau suivant indique la valeur de vérité de P(x, y) pour chaque valeur x (ligne) et y (colonne).

	1	2	3	4
1	V	F	F	F
2	F	V	V	F
3	V	V	F	F
4	F	F	F	F

Utilisez le tableau pour déterminer sur la vérité de chacun des énoncés suivants.

a) $\forall x\ \exists y\ P(x, y)$
Réponse : Faux.
$\forall y\ \neg P(4,y)$

b) $\forall y\ \exists x\ P(x, y)$
Réponse : Faux.
$\forall x\ \neg\ P(x,4)$

c) $\forall y\ \neg P(4, y) \rightarrow \forall x\ P(x, 4)$
Réponse : Faux.
$\forall y\ \neg P(4, y)$ est Vrai et $\forall x\ P(x,4)$ est Faux. L'implication est donc fausse.

Exercice 3 :

On considère des objets de différentes couleurs. Chaque objet porte un numéro et possède une forme géométrique particulière. De plus, lorsqu'un numéro n'est pas pair, c'est qu'il est impair. En utilisant les prédicats ci-dessous, formalisez les phrases suivantes en logique des prédicats.

- Pair(x) : « x porte un numéro pair »
- Vert(x) : « x est de couleur verte »
- Sphere(x) : « x est de forme sphérique »

a) Tous les objets sphériques sont verts

Réponse : ∀x Sphere(x) → Vert(x)

b) si un objet est vert, il ne porte pas de numéro pair

Réponse : ∃x , Vert(x) → ¬Pair(x)

Attention! ∃x , Vert(x) ∧ ¬Pair(x) est faux car la phrase ne garantit pas l'existence, dans l'ensemble des objets, d'un objet qui est vert.

c) Si un objet est sphérique, alors cet objet n'est pas vert ou porte un numéro impair.

Réponse : ∀x Sphere(x) → (¬ Vert(x) ∨ ¬Pair(x))

d) S'il existe un objet vert sphérique, alors il existe un objet vert portant un numéro impair.

Réponse : Deux solutions possibles, une en forme prénexe et l'autre non.

- ∃x (Vert(x) ∧ Sphere(x)) → (∃y, (Vert(y) ∧ ¬Pair(y)))
- ∃x ∃y (Vert(x) ∧ Sphere(x)) → (Vert(y) ∧ ¬Pair(y))

Note : Une formule de la logique du premier ordre est en forme prénexe si tous ses quantificateurs apparaissent à gauche dans la formule.

e) Si tout objet vert porte un numéro impair, alors aucun objet sphérique n’est vert.

Réponse : Deux solutions possibles, une en forme prénexe et l’autre non.

- $\forall x\ (Vert(x) \rightarrow \neg Pair(x)) \rightarrow (\forall y, (Sphere(y) \rightarrow \neg Vert(y)))$
- $\forall x\ \forall y\ (Vert(x) \rightarrow \neg Pair(x)) \rightarrow (Sphere(y) \rightarrow \neg Vert(y))$

ou

- $\forall x\ (Vert(x) \wedge \neg Pair(x)) \rightarrow (\forall y, (Sphere(y) \rightarrow \neg Vert(y)))$
- $\forall x\ \forall y\ (Vert(x) \wedge \neg Pair(x)) \rightarrow (Sphere(y) \rightarrow \neg Vert(y))$

Exercice 4 :

Dans cet exercice, on considère l’ensemble des entiers pour x et y. Pour chaque des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

a) $\exists x, \exists y, x+y > 0$

réponse : Vrai, car il suffit de prendre $x=1$ et $y=2$.

b) $\forall x, \exists y, x+y > 0$

réponse : Vrai, car pour un x donné, il suffit de prendre $y = \text{valeurAbsolue}(x) + 1$

c) $\exists x, \forall y, x+y > 0$

réponse : Faux, car pour n’importe quel x, il suffit de prendre $y= -x$ pour obtenir $x+y =0$, ce qui n’est pas strictement positif.

d) $\forall x, \forall y, x+y > 0$

réponse : faux, on peut prendre comme contre-exemple $x = -1$ et $y = -1$

Exercice 5 :

Dans cet exercice, le domaine de x se compose de l'ensemble des supporters se rendant au prochain match des Canadiens de Montréal. On considère les fonctions propositionnelles suivantes :

- $H(x)$: x soutient les Canadiens
- $L(x)$: x soutient les Maple Leafs

On considère les propositions :

A : $\forall x((\neg H(x) \land L(x)) \lor (H(x) \land \neg L(x)))$

B : $\exists x((H(x) \land L(x)) \lor (\neg H(x) \land \neg L(x)))$

a) Traduisez la proposition A en français

Réponse : plusieurs réponses possibles, par exemple :

- Pour tout supporter, il ne soutient pas les canadiens et soutient les Maple Leaf, ou soutient les Canadiens et pas les Maples leaf
- Tous les supporters soutiennent exclusivement soient les Canadiens, soit les Maple Leaf

b) traduisez la proposition B en français

Réponse : la encore, plusieurs réponses sont possible, tant qu'elles sont équivalentes à : « il existe au moins un supporter qui soutient les Maple Leaf et les Canadiens, ou aucune des deux équipes. »

c) montrez que B est la négation de A, c'est-à-dire que $\neg A \equiv B$.

Indice : il faut un moment utiliser la distributivité, ou les différentes traductions de A <-> B

Réponse :

$\neg A \equiv \neg\, \forall x\, ((\neg H(x) \land L(x)) \lor (H(x) \land \neg L(x)))$	
$\equiv \exists x\, \neg((\neg H(x) \land L(x)) \lor (H(x) \land \neg L(x)))$	par loi de De Morgan
$\equiv \exists x\, (\neg(\neg H(x) \land L(x)) \land \neg(H(x) \land \neg L(x)))$	par loi de De Morgan
$\equiv \exists x\, ((H(x) \lor \neg L(x)) \land (\neg H(x) \lor L(x)))$	par loi de De Morgan
$\equiv \exists x\, ((H(x) \land \neg H(x)) \lor (H(x) \land L(x)) \lor$	
$(\neg L(x) \land \neg L(x)) \lor (\neg L(x)) \land L(x)))$	par distributivité
$\equiv \exists x\, (F \lor (H(x) \land L(x)) \lor (\neg H(x) \land \neg L(x)) \lor F)$	par loi de négation
$\equiv \exists x\, ((H(x) \land L(x)) \lor (\neg H(x) \land \neg L(x)))$	par loi d'identité

Alternative :

$\neg A \equiv \neg\, \forall x\, ((\neg H(x) \land L(x)) \lor (H(x) \land \neg L(x)))$	
$\equiv \exists x\, \neg((\neg H(x) \land L(x)) \lor (H(x) \land \neg L(x)))$	par loi de De Morgan
$\equiv \exists x\, (\neg(\neg H(x) \land L(x)) \land \neg(H(x) \land \neg L(x)))$	par loi de De Morgan
$\equiv \exists x\, ((H(x) \lor \neg L(x)) \land (\neg H(x) \lor L(x)))$	par loi de De Morgan
$\equiv \exists x\, ((L(x) \rightarrow H(x)) \land (H(x) \rightarrow L(x)))$	par traduction de l'implication
$\equiv \exists\, ((L(x) \leftrightarrow H(x))$	par traduction de la bidirectionnelle
$\equiv \exists x\, ((H(x) \land L(x)) \lor (\neg H(x) \land \neg L(x)))$	par traduction de la bidirectionnelle

Exercice 6 :

Donnez un contre-exemple afin de démontrer que les expressions ci-dessous ne sont pas logiquement équivalentes.
$(\exists x P(x)) \land (\exists x Q(x))$ et $\exists x (P(x) \land Q(x))$.

Réponse :
Si P est le prédicat « être un éléphant » et Q le prédicat « être rose », alors la première expression nous dit que certains x sont des éléphants et que certains possiblement autres x sont roses tandis que la deuxième expression nous dit plus précisément qu'il y a des éléphants roses. Un univers qui contient des éléphants et des objets roses mais pas d'éléphant rose serait ainsi un contre-exemple.