POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

# LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

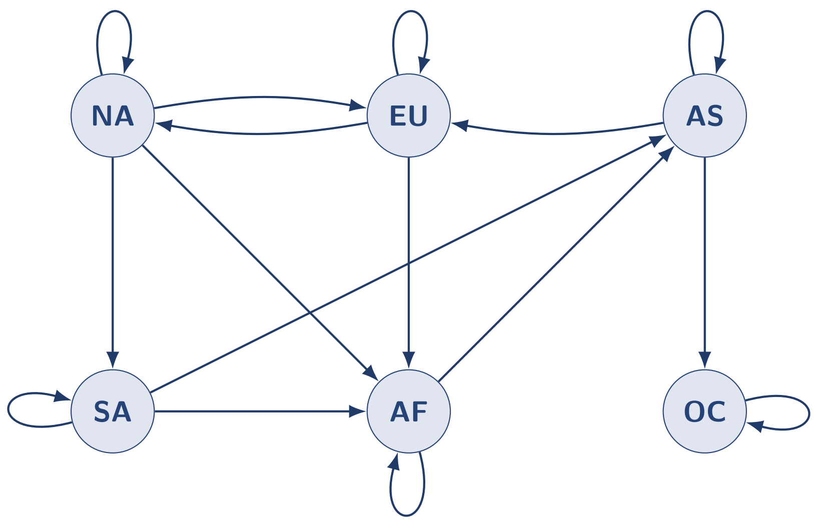
## TD 5 : RELATIONS

E2025

# SOLUTIONNAIRE

## Exercice 1 :

Soit l'ensemble $S = \{NA, EU, AF, AS, SA, OC\}$ représentant six continents/régions géographiques : Amérique du Nord (NA), Europe (EU), Afrique (AF), Asie (AS), Amérique du Sud (SA), Océanie (OC). Une relation $\mathcal{R}_1$ sur $S$ décrit les routes migratoires directes observées pour une espèce d'oiseau. Le graphe de $\mathcal{R}_1$ est le suivant :




a) La relation $\mathcal{R}_1$ est-elle une relation d'équivalence ? Justifiez votre réponse.

Paires ordonnées de $\mathcal{R}_1$ (déduites du graphe) : $\mathcal{R}_1 = \{(\text{NA}, \text{NA}), (\text{EU}, \text{EU}), (\text{AS}, \text{AS}), (\text{AF}, \text{AF}), (\text{SA}, \text{SA}), (\text{OC}, \text{OC}), (\text{NA}, \text{EU}), (\text{EU}, \text{NA}), (\text{EU}, \text{AF}), (\text{AF}, \text{AS}), (\text{AS}, \text{EU}), (\text{NA}, \text{SA}), (\text{SA}, \text{AF}), (\text{SA}, \text{AS}), (\text{NA}, \text{AF}), (\text{AS}, \text{OC})\}$.

Vérification des propriétés pour $\mathcal{R}_1$ :

— **Réflexive :** Oui, car tous les nœuds ont une boucle : $(\text{X}, \text{X}) \in \mathcal{R}_1$ pour tout $\text{X} \in S$.

— **Symétrique :** Non. Exemples : $(\text{EU}, \text{AF}) \in \mathcal{R}_1$ mais $(\text{AF}, \text{EU}) \notin \mathcal{R}_1$. $(\text{AF}, \text{AS}) \in \mathcal{R}_1$ mais $(\text{AS}, \text{AF}) \notin \mathcal{R}_1$. $(\text{NA}, \text{SA}) \in \mathcal{R}_1$ mais $(\text{SA}, \text{NA}) \notin \mathcal{R}_1$. $(\text{SA}, \text{AS}) \in \mathcal{R}_1$ mais $(\text{AS}, \text{SA}) \notin \mathcal{R}_1$. $(\text{NA}, \text{AF}) \in \mathcal{R}_1$ mais $(\text{AF}, \text{NA}) \notin \mathcal{R}_1$. $(\text{AS}, \text{OC}) \in \mathcal{R}_1$ mais $(\text{OC}, \text{AS}) \notin \mathcal{R}_1$.

— **Transitive :** Non. Exemple 1 : $(\text{NA}, \text{SA}) \in \mathcal{R}_1$ et $(\text{SA}, \text{AS}) \in \mathcal{R}_1$. Pour la transitivité, il faudrait $(\text{NA}, \text{AS}) \in \mathcal{R}_1$. Or, $(\text{NA}, \text{AS}) \notin \mathcal{R}_1$. Exemple 2 : $(\text{AF}, \text{AS}) \in \mathcal{R}_1$ et $(\text{AS}, \text{EU}) \in \mathcal{R}_1$. Pour la transitivité, il faudrait $(\text{AF}, \text{EU}) \in \mathcal{R}_1$. Or, $(\text{AF}, \text{EU}) \notin \mathcal{R}_1$.

Conclusion : $\mathcal{R}_1$ n'est pas une relation d'équivalence car elle n'est ni symétrique ni transitive

b) Si $\mathcal{R}_1$ n'est pas une relation d'équivalence, quel est le nombre minimum d'arêtes qu'il faut ajouter pour qu'elle le devienne ?

Pour que $\mathcal{R}_1$ devienne une relation d'équivalence, elle doit être réflexive, symétrique et transitive. Elle est déjà réflexive. Considérons la connectivité si la relation était rendue symétrique et transitive. Les liens (en ignorant l'orientation pour l'instant) sont : NA-EU, EU-AF, AF-AS, AS-EU, NA-SA, SA-AF, SA-AS, NA-AF, AS-OC. Ces liens connectent tous les 6 continents en une seule composante connexe. Par exemple : NA-EU-AF-AS-OC. Et NA-SA-AF. Donc, si $\mathcal{R}_1$ devient une relation d'équivalence, il n'y aura qu'une seule classe d'équivalence contenant tous les 6 continents. Pour qu'un ensemble de 6 éléments forme une unique classe d'équivalence, la relation doit être $S \times S$, ce qui contient $6 \times 6 = 36$ paires. $\mathcal{R}_1$ contient actuellement 16 paires. Le nombre d'arêtes à ajouter est $36 - 16 = 20$.

## Exercice 2 :

Soit l'ensemble $D = \{k, l, m, n, o\}$. Une relation $\mathcal{R}_2$ sur $D$ est définie par la matrice suivante (l'ordre des éléments pour les lignes/colonnes est $k, l, m, n, o$) :

$$M_{\mathcal{R}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) La relation $\mathcal{R}_2$ est-elle un ordre partiel ? Justifiez votre réponse.

- **Réflexive :** Oui. Tous les éléments de la diagonale principale de $M_{\mathcal{R}_2}$ sont 1.
- **Antisymétrique :** Oui. Vérifions si $m_{ij} = 1$ et $m_{ji} = 1 \implies i = j$. $m_{13} = 1 \implies m_{31} = 0$ (OK). $m_{15} = 1 \implies m_{51} = 0$ (OK). $m_{23} = 1 \implies m_{32} = 0$ (OK). $m_{24} = 1 \implies m_{42} = 0$ (OK). $m_{35} = 1 \implies m_{53} = 0$ (OK). La relation est antisymétrique.
- **Transitive :** Non. - $(k, m) \in \mathcal{R}_2$ et $(m, o) \in \mathcal{R}_2$. Il faudrait $(k, o) \in \mathcal{R}_2$. $m_{15} = 1$. Ceci est OK. - $(l, m) \in \mathcal{R}_2$ et $(m, o) \in \mathcal{R}_2$. Il faudrait $(l, o) \in \mathcal{R}_2$. $m_{25} = 0$. Donc $(l, o) \notin \mathcal{R}_2$. La relation n'est pas transitive.

Conclusion : $\mathcal{R}_2$ n'est pas un ordre partiel car elle n'est pas transitive.

b) Si $\mathcal{R}2$ n'est pas un ordre partiel, est-il possible de la transformer en un ordre partiel en modifiant la valeur d'au plus deux cellules de sa matrice d'adjacence (en remplaçant un 0 par un 1 ou un 1 par un 0) ? Si oui, donnez une telle matrice modifiée $M'_{\mathcal{R}_2}$. Sinon, justifiez rigoureusement pourquoi cela est impossible avec seulement deux modifications.

La seule propriété manquante est la transitivité. Une paire manquante pour la transitivité est $(l, o)$ car $(l, m) \in \mathcal{R}_2$ et $(m, o) \in \mathcal{R}_2$. Changeons $m_{25} = 0 \to 1$. (1 changement) $M'_{\mathcal{R}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Vérifions la transitivité pour $M'_{\mathcal{R}_2}$ : $\mathcal{R}'_2 = \mathcal{R}_2 \cup \{(l, o)\}$. Les propriétés de réflexivité et d'antisymétrie sont conservées (l'ajout d'une arête ne peut pas enlever la réflexivité ; pour l'antisymétrie, on a ajouté $(l, o)$, il faut vérifier $(o, l)$ qui est $m_{52} = 0$, donc OK). Transitivité : - $(k, m), (m, o) \implies (k, o)$. $(k, o)$ est dans $\mathcal{R}'_2$ ($m'_{15} = 1$). OK. - $(l, m), (m, o) \implies (l, o)$. $(l, o)$ est maintenant dans $\mathcal{R}'_2$ ($m'_{25} = 1$). OK. Y a-t-il d'autres manques de transitivité ? Les chemins de longueur 2 dans $\mathcal{R}_2$ originale qui manquaient une arête directe : $l \to m \to o$. L'arête $(l, o)$ a été ajoutée. Vérifions tous les chemins de longueur 2 dans $\mathcal{R}'_2$ : - $k \to m \to o \implies k \to o$ (OK, $m'_{15} = 1$) - $l \to m \to o \implies l \to o$ (OK, $m'_{25} = 1$) La relation $\mathcal{R}'_2$ est maintenant réflexive, antisymétrique et transitive. Donc $M'_{\mathcal{R}_2}$ représente un ordre partiel. Ce fut possible avec un seul changement.

# Exercice 3 :

## Partie 1 : Relation d'Équivalence $\mathcal{R}_A$

Soit $E = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. On définit $(a, b)\mathcal{R}_A(c, d) \iff \exists\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ tel que $c = \lambda a$ et $d = \lambda b$. Montrez que $\mathcal{R}_A$ est une relation d'équivalence.

$E = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. $(a, b)\mathcal{R}_A(c, d) \iff \exists\lambda > 0, c = \lambda a, d = \lambda b$.

- **Réflexive :** Soit $(a, b) \in E$. Choisissons $\lambda = 1$ $(1 > 0)$. Alors $a = 1 \cdot a$ et $b = 1 \cdot b$. Donc $((a, b)\mathcal{R}_A(a, b))$.
- **Symétrique :** Supposons $(a, b)\mathcal{R}_A(c, d)$. Alors $\exists\lambda > 0, c = \lambda a, d = \lambda b$. Puisque $a, b, c, d \neq 0$ et $\lambda > 0$, on a $a = (1/\lambda)c$ et $b = (1/\lambda)d$. Soit $\mu = 1/\lambda$. Puisque $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Donc $\exists\mu > 0, a = \mu c, b = \mu d$. Ainsi $((c, d)\mathcal{R}_A(a, b))$.
- **Transitive :** Supposons $(a, b)\mathcal{R}_A(c, d)$ et $(c, d)\mathcal{R}_A(e, f)$. Alors $\exists\lambda_1 > 0, c = \lambda_1 a, d = \lambda_1 b$. Et $\exists\lambda_2 > 0, e = \lambda_2 c, f = \lambda_2 d$. Substituons : $e = \lambda_2(\lambda_1 a) = (\lambda_1\lambda_2)a$. $f = \lambda_2(\lambda_1 b) = (\lambda_1\lambda_2)b$. Soit $\lambda_3 = \lambda_1\lambda_2$. Puisque $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, alors $\lambda_3 > 0$. Donc $\exists\lambda_3 > 0, e = \lambda_3 a, f = \lambda_3 b$. Ainsi $((a, b)\mathcal{R}_A(e, f))$.

$\mathcal{R}_A$ est une relation d'équivalence.

**Partie 2 : Relation d'Ordre Partiel $\mathcal{R}_B$**

Soit $S = \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$. Pour $X, Y \in S$, on définit

$$X\mathcal{R}_B Y \iff (X \subseteq Y \text{ ET } ((|Y| - |X|) \text{ est un multiple de 2 OU } Y \setminus X \subseteq \{1,3\})).$$

a) Donnez deux ensembles $X_1, X_2 \in S$ ($X_1 \neq X_2$) tels que $X_1 \mathcal{R}_B X_2$.

Soit $X_1 = \{2\}$ et $X_2 = \{1,2,3\}$. $X_1 \subseteq X_2$. $|X_2| - |X_1| = 3 - 1 = 2$ (pair). Donc $X_1 \mathcal{R}_B X_2$.

b) Donnez deux ensembles $X_3, X_4 \in S$ qui ne sont pas comparables par $\mathcal{R}_B$.

Soit $X_3 = \{1,2\}$ et $X_4 = \{3,4\}$. $X_3 \not\subseteq X_4$ et $X_4 \not\subseteq X_3$. Donc non comparables car la condition $X \subseteq Y$ (ou $Y \subseteq X$) n'est pas remplie.

c) La relation $\mathcal{R}_B$ est-elle un ordre partiel sur $S$ ? Justifiez.

- **Réflexive :** Soit $X \in S$. On a $X \subseteq X$. $|X| - |X| = 0$, qui est pair. Donc la condition $(|X| - |X|)$ est pair OU $X \setminus X \subseteq \{1,3\}$) est (Vrai OU Vrai) = Vrai (car $X \setminus X = \emptyset \subseteq \{1,3\}$). Donc $X\mathcal{R}_B X$. Elle est réflexive.
- **Antisymétrique :** Supposons $X\mathcal{R}_B Y$ et $Y\mathcal{R}_B X$. De $X\mathcal{R}_B Y$, on a $X \subseteq Y$. De $Y\mathcal{R}_B X$, on a $Y \subseteq X$. De $X \subseteq Y$ et $Y \subseteq X$, on conclut $X = Y$. Elle est antisymétrique.
- **Transitive :** Considérons

$$X = \varnothing, \qquad Y = \{2,4\}, \qquad Z = \{1,2,4\}.$$

  - $X \subseteq Y$ et $|Y| - |X| = 2$ est pair, donc $X \,\mathcal{R}_B\, Y$.
  - $Y \subseteq Z$ et $Z \setminus Y = \{1\} \subseteq \{1,3\}$, donc $Y \,\mathcal{R}_B\, Z$.
  - $X \subseteq Z$, mais $|Z| - |X| = 3$ est impair et $Z \setminus X = \{1,2,4\} \not\subseteq \{1,3\}$, donc $X \not\mathcal{R}_B Z$.

.

Non, $\mathcal{R}_B$ n'est pas un ordre partiel car elle n'est pas transitive.

## Exercice 4 :

Pour chaque relation $\mathcal{R}$ définie ci-dessous sur un ensemble $S$ :

— Déterminez si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive.

— Indiquez si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, un ordre partiel, ou aucun des deux.

— Si c'est une relation d'équivalence, décrivez le nombre de classes d'équivalence distinctes et donnez un exemple de deux classes distinctes non triviales (si possible).

Justifiez chaque propriété.

a) $S = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. $(a, b)\mathcal{R}_a(c, d) \iff \text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(c, d)$.

— R : Oui, $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a, b)$.

— S : Oui, si $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(c, d)$, alors $\text{pgcd}(c, d) = \text{pgcd}(a, b)$.

— A : Non. $(2, 4)\mathcal{R}_a(2, 6)$ car $\text{pgcd}(2, 4) = 2$ et $\text{pgcd}(2, 6) = 2$. Mais $(2, 4) \neq (2, 6)$. (Note : $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$).

— T : Oui, si $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(c, d)$ et $\text{pgcd}(c, d) = \text{pgcd}(e, f)$, alors $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(e, f)$.

Type : Relation d'équivalence. Nombre de classes : Infini (chaque $k \in \mathbb{N}^*$ peut être un pgcd). Exemples de classes : $[(1, 1)]$ (pgcd=1, e.g., $(1, 2), (3, 5)$), $[(2, 2)]$ (pgcd=2, e.g., $(2, 4), (6, 10)$).

b) $S = \mathbb{Z}$. $x\mathcal{R}_by \iff (x|y \text{ et } y|x \text{ et } x \cdot y > 0) \vee x = y = 0$.

$S = \mathbb{Z}$. $x\mathcal{R}_dy \iff (x|y \text{ et } y|x \text{ et } x \cdot y > 0) \vee x = y = 0$. $x|y$ et $y|x \iff |x| = |y|$. Donc $x\mathcal{R}_dy \iff (|x| = |y| \text{ et } x \cdot y > 0) \vee x = y = 0$. Si $x \cdot y > 0$, $x$ et $y$ ont même signe. Si $|x| = |y|$ et même signe, alors $x = y$. Donc $x\mathcal{R}_dy \iff (x = y \text{ et } x \neq 0) \vee x = y = 0 \iff x = y$.

— R : Oui, $x = x$.

— S : Oui, si $x = y \implies y = x$.

— A : Oui, si $x = y$ et $y = x \implies x = y$.

— T : Oui, si $x = y$ et $y = z \implies x = z$.

Type : C'est à la fois une relation d'équivalence et un ordre partiel. Classes d'équivalence : $[x] = \{x\}$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$. Nombre infini de classes. Deux classes distinctes : $[1] = \{1\}$, $[2] = \{2\}$.

c) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$. $(x_1, y_1)\mathcal{R}_c(x_2, y_2) \iff y_1 \leq y_2$ et si $y_1 = y_2$ alors $x_1 \leq x_2$.

— R : Oui. $y_1 \leq y_1$. Si $y_1 = y_1$, alors $x_1 \leq x_1$.

— S : Non. Soit $P_1 = (1, 1), P_2 = (2, 4)$. $y_1 = 1, y_2 = 4$. $y_1 \leq y_2$. Donc $P_1\mathcal{R}_eP_2$. Mais $y_2 \not\leq y_1$.

— A : Oui. Si $P_1\mathcal{R}_eP_2$ et $P_2\mathcal{R}_eP_1$. ($y_1 \leq y_2$ et si $y_1 = y_2$ alors $x_1 \leq x_2$) ET ($y_2 \leq y_1$ et si $y_2 = y_1$ alors $x_2 \leq x_1$). De $y_1 \leq y_2$ et $y_2 \leq y_1 \implies y_1 = y_2$. Alors les conditions deviennent $x_1 \leq x_2$ et $x_2 \leq x_1 \implies x_1 = x_2$. Donc $y_1 = y_2$ et $x_1 = x_2 \implies P_1 = P_2$.

— T : Oui. Soient trois points de $S$ tels que

$$(x_1, y_1)\,\mathcal{R}_c\,(x_2, y_2) \quad \text{et} \quad (x_2, y_2)\,\mathcal{R}_c\,(x_3, y_3).$$

(a) On a $y_1 \leq y_2$ et $y_2 \leq y_3$, donc $y_1 \leq y_3$.

(b) S'il arrive que $y_1 = y_3$, alors nécessairement $y_1 = y_2 = y_3$. Les deux hypothèses donnent alors $x_1 \leq x_2$ et $x_2 \leq x_3$, d'où $x_1 \leq x_3$.

Par définition, on obtient $(x_1, y_1)\,\mathcal{R}_c\,(x_3, y_3)$.

Type : Ordre partiel.

## Exercice 5 (facultatif) :

a) Soit $A = \{p, q, r, s\}$ et la relation $\mathcal{R}_a$ sur $A$ définie par : $\mathcal{R}_a = \{(p, q), (q, r), (p, r), (r, s), (s, p)\}$. Donnez la fermeture transitive $\mathcal{R}_a^+$ de $\mathcal{R}_a$. Donnez la matrice de $\mathcal{R}_a$ et la matrice de $\mathcal{R}_a^+$

$\mathcal{R}_{10}^+ = A \times A = \{(x, y) \mid x, y \in \{p, q, r, s\}\}$.
Matrice de $\mathcal{R}_{10}$ (ordre $p, q, r, s$) :

$$M_{\mathcal{R}_{10}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice de $\mathcal{R}_{10}^+$ :

$$M_{\mathcal{R}_{10}^+} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Soit $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Soit $\mathcal{R}_b$ la relation dont la matrice est : $M_{\mathcal{R}_b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculez $M_{\mathcal{R}_b}^*$ (fermeture réflexive et transitive) en utilisant l'algorithme de multiplication pour la fermeture transitive.
La relation $\mathcal{R}_b^*$ est-elle une relation d'équivalence ? Un ordre partiel ?

$$M = M_{\mathcal{R}_{11}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M^1 = M$$

$$M^2 = M \odot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M^2 \odot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = M^3 \odot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M^{+}_{\mathcal{R}_{11}} = M \vee M^2 \vee M^3 \vee M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{M^{*}_{\mathcal{R}_{11}} = M^{+}_{\mathcal{R}_{11}} \vee I_4 = M^{+}_{\mathcal{R}_{11}}}$$

La relation $\mathcal{R}^*_{11}$ est la *relation universelle* $B \times B$ :

— **Réflexive** : Oui (tous les éléments diagonaux valent 1).
— **Symétrique** : Oui (la matrice est symétrique).
— **Antisymétrique** : Non — Par exemple. $(1, 2)$ et $(2, 1)$ sont présents avec $1 \neq 2$.
— **Transitive** : Oui (toutes les paires sont reliées).

$\mathcal{R}^*_{11}$ est une relation d'équivalence.
$\mathcal{R}^*_{11}$ n'est pas un ordre partiel car elle n'est pas antisymétrique.

## Feuille supplémentaire