POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810
STRUCTURES DISCRÈTES

TD 1 : LOGIQUE PROPOSITIONNELLE
É2022

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1. On considère les propositions P, Q, R et S définies comme suit :

P : « Vincent est régulier aux cours »
R : « Vincent est régulier aux séances de TD »
Q : « Vincent étudie pour le cours »
S : « Vincent réussit le cours »

Énoncez des phrases simples (en langage courant) qui traduisent chacune des propositions suivantes.

a. $\neg R$

Réponse : Vincent n'est pas régulier aux séances de TD.

b. $\neg P \vee Q$

Réponse : Plusieurs formulations possibles.

- Vincent n'est pas régulier aux cours ou il étudie pour le cours.
- Si Vincent est régulier aux cours, alors il étudie pour le cours.
- Vincent est régulier aux cours seulement s'il étudie pour le cours.
- Vincent étudie pour le cours dès qu'il est régulier aux cours.
- Vincent étudie pour le cours s'il est régulier aux cours.
- Il est suffisant que Vincent soit régulier aux cours pour qu'il étudie pour le cours.
- Il est nécessaire que Vincent étudie pour le cours pour qu'il soit régulier aux cours.

c. $R \rightarrow (P \vee Q)$

Réponse : Plusieurs formulations possibles, en basant sur les formulations vues en cours. Seul un exemple est donné ici. La liste n'est donc pas exhaustive.

- Si Vincent est aux séances de TD, alors il est régulier aux cours ou il étudie pour le cours.

d. $S \rightarrow (P \leftrightarrow Q \leftrightarrow R)$

Réponse : Plusieurs formulations possibles, en basant sur les formulations vues en cours. Seul un exemple est donné ici. La liste n'est donc pas exhaustive.

- Vincent réussit le cours seulement s'il est régulier aux cours si et seulement s'il est régulier aux séances de TD si et seulement s'il étudie pour le cours.

Exercice 2. Soit P et Q les propositions suivantes :

- P : « Jean est fort en Mathématiques »
- Q : « Jean est fort en Algorithmique »

De plus, on suppose qu'être faible, c'est ne pas être fort.
Représentez les énoncés suivants en logique propositionnelle.

a) Jean est fort en Mathématiques mais faible en Algorithmique.

Réponse : $P \wedge \neg Q$

b) Jean n'est fort ni en Mathématiques ni en Algorithmique.

Réponse : $\neg P \wedge \neg Q$

c) Jean est fort en Mathématiques ou il est à la fois fort en Algorithmique et faible en Mathématiques.

Réponse : $P \vee (Q \wedge \neg P)$

d) Jean est fort en Mathématiques s'il est faible en Algorithmique.
Réponse : $\neg Q \rightarrow P$

e) Jean est fort en Algorithmique et en Mathématiques ou il est faible en Mathématiques et fort en Algorithmique.
Réponse : $(Q \wedge P) \vee (\neg P \wedge Q)$

f) Il suffit que Jean soit fort en Mathématiques pour être fort en Algorithmique.
Réponse : $P \rightarrow Q$

Exercice 3. Soit les propositions :

- P : « Tu perds »
- G : « Tu gagnes »

a) Traduisez en logique propositionnelle en utilisant les propositions P et G, l'énoncé « **Si tu ne perds pas, tu n'as pas forcément gagné, et si tu gagnes, tu n'as pas perdu** ».
Réponse :
$((\neg P \rightarrow G) \vee (\neg P \rightarrow (\neg G))) \wedge (G \rightarrow (\neg P))$
$(\neg P \rightarrow (G \vee \neg G)) \wedge (G \rightarrow (\neg P))$

b) Donnez en langage courant, la négation de l'énoncé « **Si tu ne perds pas, tu n'as pas forcément gagné, et si tu gagnes, tu n'as pas perdu** »
Réponse : Plusieurs formulations sont possibles.

- « Tu ne perds pas et tu as forcément gagné ou tu gagnes et tu as perdu »
- « Tu ne perds pas et tu as forcément gagné ou tu gagnes et tu perds »

c) Donnez en langage courant la réciproque de « **Si tu ne perds pas, tu n'as pas forcément gagné** »
Réponse : Plusieurs formulations sont possibles.

- « Si tu n'as pas forcément gagné, alors tu ne perds pas »
- « Si tu n'as pas forcément gagné, alors tu n'as pas perdu »

d) Donnez en langage courant l'inverse de « **Si tu ne perds pas, tu n'as pas forcément gagné** »
Réponse : Plusieurs formulations sont possibles.

- « Si tu perds, alors tu as forcément gagné. »
- « Si tu perds, tu as forcément gagné. »
- « Si tu perds, tu as gagné. »
- « Si tu perds, tu gagnes. »
- « Tu perds, tu gagnes. »

e) Donnez en langage courant la contraposée de « **Si tu ne perds pas, tu n'as pas forcément gagné** »
Réponse : Plusieurs formulations sont possibles.

- « Si tu as forcément gagné, alors tu perds. »
- « Si tu as forcément gagné, tu perds. »
- « Si tu as forcément gagné, tu as perdu. »
- « Si tu as gagné, tu as perdu. »

- « Si tu as gagné, tu perds. »
- « Si tu gagnes, tu perds. »
- « Tu gagnes, tu perds. »
- « Tu as gagné, tu as perdu. »

Exercice 4. Soit la proposition suivante : $(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$
En dérivant la proposition, dites s'il s'agit d'une tautologie, d'une contradiction ou d'une contingence. Justifiez chaque étape de votre réponse.

Réponse :

$(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R)) \equiv (P \to Q) \to (\neg(Q \to R) \lor (P \to R))$	car $(A \to B) \equiv (\neg A \lor B)$
$\equiv (P \to Q) \to (\neg(\neg Q \lor R) \lor (\neg P \lor R))$	car $(A \to B) \equiv (\neg A \lor B)$
$\equiv (P \to Q) \to ((Q \land \neg R) \lor (\neg P \lor R))$	De Morgan
$\equiv (P \to Q) \to ((Q \land (\neg R)) \lor (R \lor (\neg P)))$	Commutativité
$\equiv (P \to Q) \to [((Q \land (\neg R)) \lor R) \lor (\neg P)]$	Associativité de $\lor$
$\equiv (P \to Q) \to [((Q \lor R) \land (\neg R \lor R)) \lor (\neg P)]$	Distributivité de $\lor$ par rapport à $\land$
$\equiv (P \to Q) \to [((Q \lor R) \land \text{VRAI}) \lor (\neg P)]$	Loi de négation
$\equiv (P \to Q) \to [(Q \lor R) \lor (\neg P)]$	Loi d'identité
$\equiv \neg (P \to Q) \lor [(Q \lor R) \lor (\neg P)]$	car $(A \to B) \equiv (\neg A \lor B)$
$\equiv \neg (\neg P \lor Q) \lor [(Q \lor R) \lor (\neg P)]$	car $(A \to B) \equiv (\neg A \lor B)$
$\equiv (P \land \neg Q) \lor [(Q \lor R) \lor (\neg P)]$	De Morgan
$\equiv (P \land \neg Q) \lor (Q \lor R \lor (\neg P))$	Associativité de $\lor$
$\equiv [P \lor (Q \lor R \lor (\neg P))] \land [\neg Q \lor (Q \lor R \lor (\neg P))]$	Distributivité de $\lor$ par rapport à $\land$
$\equiv [P \lor Q \lor R \lor (\neg P)] \land [\neg Q \lor Q \lor R \lor (\neg P)]$	Associativité de $\lor$
$\equiv [(P \lor (\neg P)) \lor Q \lor R] \land [(\neg Q \lor Q) \lor R \lor (\neg P)]$	Associativité de $\lor$
$\equiv [\text{VRAI} \lor Q \lor R] \land [\text{VRAI} \lor R \lor (\neg P)]$	Loi de négation
$\equiv [\text{VRAI}] \land [\text{VRA})]$	Loi de domination
$\equiv \text{VRAI}$	Loi de domination

C'est donc une tautologie.