POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 10 : GRAPHES

E2025

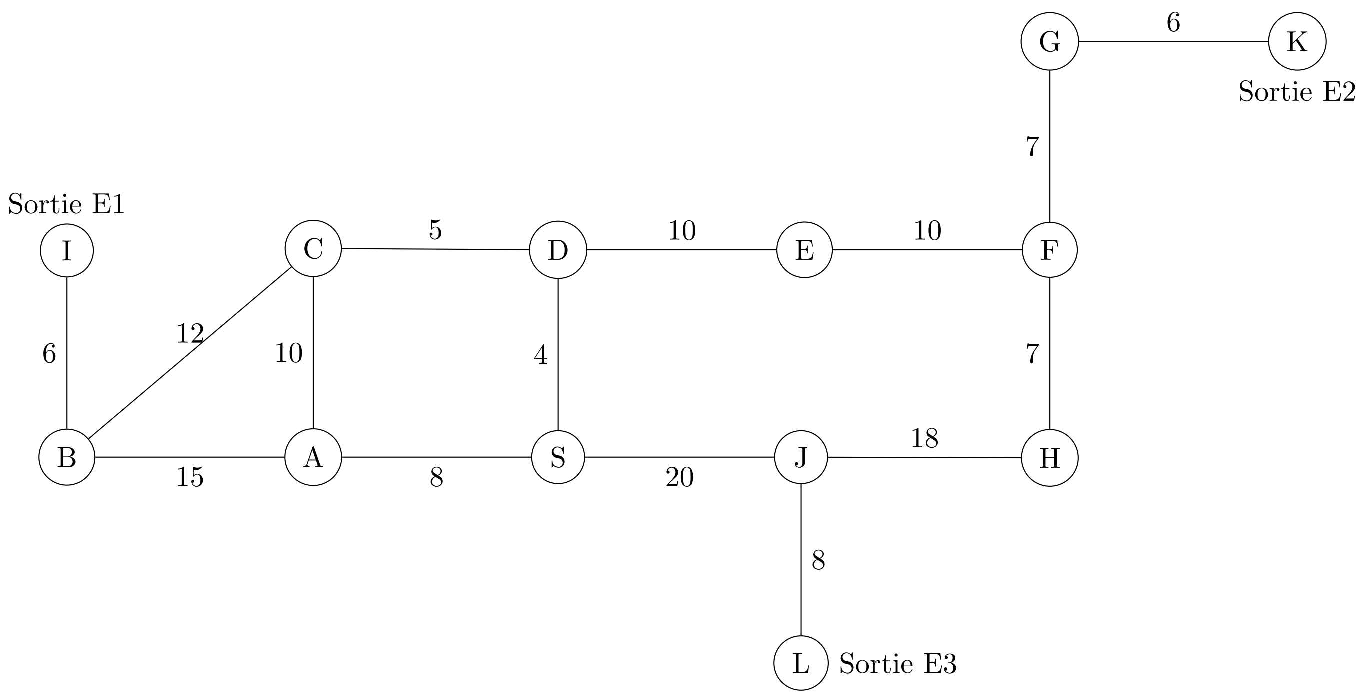
SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 :

Voici le 2e étage des pavillons Lassonde, modélisé sous la forme d'un graphe non orienté pondéré G_{plan}.

- Les **sommets** du graphe représentent les intersections de couloirs, les zones devant les ascenseurs ou encore les entrées de salles.
- Les **arêtes** correspondent aux couloirs reliant ces points.
- Les **poids** indiquent les distances approximatives entre ces points, en mètres.

Le point de départ est le sommet **S**, correspondant à l'endroit marqué "VOUS ÊTES ICI". Les sorties d'urgence (escaliers) sont représentées par les sommets **I**, **K** et **L**.



a) Appliquez l'algorithme de Dijkstra à partir du sommet **S** pour calculer les plus courts chemins vers l'ensemble des sommets du graphe. En vous basant sur les distances obtenues, identifiez la sortie d'urgence la plus proche parmi **I**, **K** et **L**.

Itération	S	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Init	0, -	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1 (S)	0, -	8,S	∞	∞	4,S	∞	∞	∞	∞	∞	20,S	∞	∞
2 (D)	0, -	8,S	∞	9,D	4,S	14,D	∞	∞	∞	∞	20,S	∞	∞
3 (A)	0, -	8,S	23,A	9,D	4,S	14,D	∞	∞	∞	∞	20,S	∞	∞
4 (C)	0, -	8,S	21,C	9,D	4,S	14,D	∞	∞	∞	∞	20,S	∞	∞
5 (E)	0, -	8,S	21,C	9,D	4,S	14,D	24,E	∞	∞	∞	20,S	∞	∞
6 (J)	0, -	8,S	21,C	9,D	4,S	14,D	24,E	∞	38,J	∞	20,S	∞	28,J
7 (B)	0, -	8,S	21,C	9,D	4,S	14,D	24,E	∞	38,J	27,B	20,S	∞	28,J
8 (F)	0, -	8,S	21,C	9,D	4,S	14,D	24,E	31,F	31,F	27,B	20,S	∞	28,J
9 (I)	0, -	8,S	21,C	9,D	4,S	14,D	24,E	31,F	31,F	27,B	20,S	∞	28,J
10 (L)	0, -	8,S	21,C	9,D	4,S	14,D	24,E	31,F	31,F	27,B	20,S	∞	28,J
11 (G)	0, -	8,S	21,C	9,D	4,S	14,D	24,E	31,F	31,F	27,B	20,S	37,G	28,J
12 (H)	0, -	8,S	21,C	9,D	4,S	14,D	24,E	31,F	31,F	27,B	20,S	37,G	28,J
13 (K)	0, -	8,S	21,C	9,D	4,S	14,D	24,E	31,F	31,F	27,B	20,S	37,G	28,J

Distances finales vers les sorties :

— $d(I) = 27$ (via S-D-C-B-I)
— $d(K) = 37$ (via S-D-E-F-G-K)
— $d(L) = 28$ (via S-J-L)

La sortie la plus proche est la sortie I, à 27 mètres.

b) Un agent de sécurité doit traverser **exactement une fois** chacun des couloirs du bâtiment. Peut-il organiser sa ronde de façon à

i) partir du point **S** et y revenir, sinon,

ii) partir de **S** et terminer à la sortie **K** ?

Justifiez soigneusement votre réponse.

Pour qu'un itinéraire eulérien existe, on doit analyser le degré des sommets. Degrés des sommets de G_{plan} :

— $d(S) = 3$, $d(A) = 3$, $d(B) = 3$, $d(C) = 3$, $d(D) = 3$, $d(E) = 2$, $d(F) = 3$, $d(G) = 2$, $d(H) = 2$, $d(I) = 1$, $d(J) = 3$, $d(K) = 1$, $d(L) = 1$

i) **Circuit eulérien (de S à S) :** Un circuit eulérien existe si et seulement si tous les sommets du graphe ont un degré pair. Ici, les sommets S, A, B, C, D, F, I, J, K, L ont un degré impair. **Conclusion : Il n'existe pas de circuit eulérien.**

ii) **Chemin eulérien (de S à K) :** Un chemin eulérien entre deux sommets distincts (ici S et K) existe si et seulement si ces deux sommets sont les deux seuls sommets de degré impair du graphe. Le graphe possède 10 sommets de degré impair, bien plus que les deux autorisés. **Conclusion : Il n'existe pas de chemin eulérien de S à K.**

c) Un technicien souhaite visiter **exactement une fois** chaque point clé de l'étage (intersections, zones devant ascenseurs, entrées de salles). Existe-t-il un itinéraire lui permettant

i) de boucler la tournée en revenant à son point de départ, sinon,

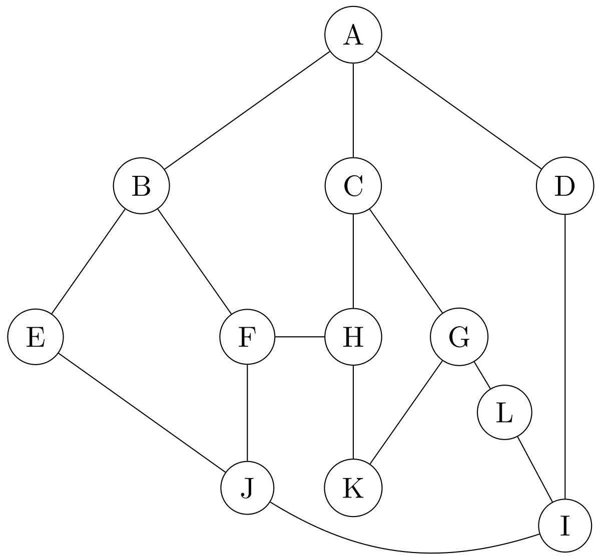
ii) d'effectuer la tournée en terminant à un point différent de celui du départ ?

Justifiez soigneusement votre réponse.

i) **Circuit hamiltonien :** Un circuit hamiltonien est un cycle qui visite chaque sommet exactement une fois. Les sommets de degré 1 (**I, K, L**) sont des points de blocage. Pour qu'un sommet de degré 1 soit dans un cycle, cela est impossible, car on ne peut le quitter pour continuer le cycle.
Conclusion : Il n'existe pas de circuit hamiltonien.

ii) **Chemin hamiltonien :** Un chemin hamiltonien peut commencer ou se terminer à un sommet de degré 1. Cependant, un chemin n'a que deux extrémités. Ce graphe possède trois sommets de degré 1 (**I, K, L**). Il est donc impossible de construire un chemin qui les visite tous les trois.
Conclusion : Il n'existe pas de chemin hamiltonien.

Exercice 2 :



a) À partir du sommet A, effectuez un parcours en profondeur du graphe. Les sommets doivent être explorés dans l'ordre alphabétique. Indiquez, à chaque itération, l'état de la pile ainsi que la liste des sommets visités.

Sommet Traité	**Pile**	**Visités**
-	[A]	{}
A	[D, C, B]	{A}
B	[D, C, F, E]	{A, B}
E	[D, C, F, J]	{A, B, E}
J	[D, C, F, I, F]	{A, B, E, J}
F	[D, C, I, H]	{A, B, E, J, F}
H	[D, C, I, K, C]	{A, B, E, J, F, H}
C	[D, G, I, K, G]	{A, B, E, J, F, H, C}
G	[D, I, K, L, K]	{A, B, E, J, F, H, C, G}
K	[D, I, L]	{A, B, E, J, F, H, C, G, K}
L	[D, I]	{A, B, E, J, F, H, C, G, K, L}
I	[D]	{A, B, E, J, F, H, C, G, K, L, I}
D	[]	{A, B, E, J, F, H, C, G, K, L, I, D}

Ordre du parcours : A, B, E, J, F, H, C, G, K, L, I, D

b) À partir du sommet A, effectuez un parcours en largeur du graphe. Les sommets doivent être explorés dans l'ordre alphabétique. Indiquez, à chaque itération, l'état de la file ainsi que la liste des sommets visités.

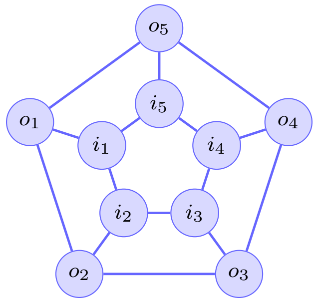
Sommet Traité	**File**	**Visités**
-	[A]	{}
A	[B, C, D]	{A}
B	[C, D, E, F]	{A, B}
C	[D, E, F, G, H]	{A, B, C}
D	[E, F, G, H, I]	{A, B, C, D}
E	[F, G, H, I, J]	{A, B, C, D, E}
F	[G, H, I, J]	{A, B, C, D, E, F}
G	[H, I, J, K, L]	{A, B, C, D, E, F, G}
H	[I, J, K, L]	{A, B, C, D, E, F, G, H}
I	[J, K, L]	{A, B, C, D, E, F, G, H, I}
J	[K, L]	{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J}
K	[L]	{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K}
L	[]	{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L}

Ordre du parcours : A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L

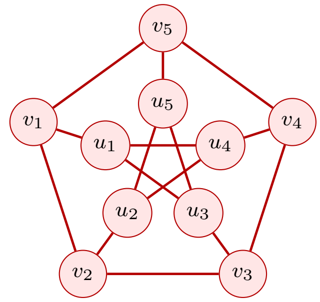
Exercice 3 :

Partie A :

On considère les deux graphes 3-réguliers G_A (prisme à base pentagonale) et G_B (graphe de Petersen).



Graphe G_A



Graphe G_B

a) Est-ce que G_A et G_B sont isomorphes ? Justifiez votre réponse.

Pour déterminer si les graphes sont isomorphes, on compare leurs invariants.

- **Invariants de base :**
  - $|V_A| = 10$, $|E_A| = 15$. Chaque sommet a un degré 3.
  - $|V_B| = 10$, $|E_B| = 15$. Chaque sommet a un degré 3.

  Les invariants de base (nombre de sommets, arêtes, séquence de degrés) sont identiques. Il faut un invariant plus profond.
- **Invariant structurel (Maille) :** La maille d'un graphe est la longueur de son plus petit cycle.
  - **Maille de G_A (prisme pentagonal) :** Ce graphe contient des cycles de longueur 4 (les "faces" rectangulaires). Par exemple, $o_1 - o_2 - i_2 - i_1 - o_1$. Il ne contient pas de cycle de longueur 3. La maille de G_A est donc 4.
  - **Maille de G_B (graphe de Petersen) :** Par inspection, on peut vérifier qu'il n'existe aucun cycle de longueur 3 ou 4. Le plus petit cycle est de longueur 5 (par exemple, le cycle extérieur $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_1$). La maille de G_B est donc 5.

Conclusion : Puisque la maille est un invariant de graphe et que $maille(G_A) \neq maille(G_B)$, les graphes ne sont pas isomorphes.

b) Le graphe de Petersen (G_B) est-il Hamiltonien ? Justifiez votre réponse.

Le graphe de Petersen (G_B) **n'est pas hamiltonien**, c'est-à-dire qu'il **ne possède aucun cycle hamiltonien**. Bien qu'il soit *régulier de degré 3*, *symétrique* et *connexe*, il constitue un **contre-exemple classique** en théorie des graphes : aucun cycle ne permet de parcourir l'ensemble des 10 sommets une seule fois tout en revenant au sommet de départ. Cette propriété a été démontrée par vérification exhaustive et est bien établie dans la littérature spécialisée.

En revanche, G_B **admet un chemin hamiltonien**, c'est-à-dire un chemin passant une seule fois par chaque sommet sans nécessairement former un cycle. Par exemple, le chemin suivant est hamiltonien :

$$v_1 \to u_1 \to u_3 \to v_3 \to u_5 \to v_5 \to v_4 \to u_4 \to u_2 \to v_2$$

Ce chemin visite exactement une fois chacun des 10 sommets du graphe, sans répétition, mais ne revient pas au sommet initial.

Partie B :

Polytechnique Montréal regroupe **sept départements d'enseignement**. Le tableau ci-dessous présente, pour chacun d'eux : (i) le nombre de professeur·e·s affilié·e·s ; (ii) les quotas de co-publications fixés par la direction de la recherche.

Département	**Sigle**	**Effectif** n	**Quotas de co-publications**	
			Interne d^{int}	*Externe* d^{ext}
Génie chimique	Ch	9	4	5
Génie électrique	Él	8	3	6
Génie informatique & logiciel	Inf	9	4	5
Génie mécanique	Méc	10	5	4
Génie physique	Phy	7	3	5
Mathématiques & génie industriel	Ind	8	4	4
Génie civil, géologique et des mines	Civ	8	3	6

Le réseau de collaboration à mettre en place doit permettre à chaque département de satisfaire simultanément ses quotas de co-publications internes (d^{int}) et externes (d^{ext}), en tenant compte des interactions entre professeur·e·s.

a) Montrez qu'aucun graphe ne peut satisfaire l'ensemble des quotas sans modification.

Modélisons les collaborations comme un multi-graphe où les professeurs sont des sommets. Les collaborations internes sont des arêtes reliant des professeurs d'un même département, et les collaborations externes relient des professeurs de départements différents. Le lemme des poignées de main stipule que la somme des degrés dans un graphe doit être paire. Considérons uniquement les collaborations internes. La somme totale des "demi-arêtes" internes est la somme des effectifs multipliée par les quotas internes :

$$\sum_{i \in Dep} n_i \times d_i^{\text{int}} = (9 \times 4) + (8 \times 3) + (9 \times 4) + (10 \times 5) + (7 \times 3) + (8 \times 4) + (8 \times 3)$$

$$= 36 + 24 + 36 + 50 + 21 + 32 + 24 = 223$$

La somme des degrés pour le "graphe interne" est 223, un nombre impair. **Ceci est impossible**, car cette somme doit être égale à deux fois le nombre d'arêtes internes, et donc être paire. Le programme est irréalisable.

b) On autorise désormais à modifier *d'au plus* ± 1—au choix, pour chaque professeur·e—soit son quota de co-publications internes, soit son quota de co-publications externes. Quel est le *plus petit nombre de professeur·e·s* qu'il faut ainsi ajuster pour rendre le programme réalisable ? Un raisonnement global (équilibrage des totaux, parité, etc.) suffit ; la construction détaillée du graphe n'est pas exigée.

Pour rendre le programme réalisable, la somme des degrés internes (223) et la somme des degrés externes (calculée à 293, aussi impaire) doivent toutes deux devenir paires. On doit donc effectuer des ajustements qui changent la parité de ces deux sommes. Un ajustement de ± 1 au quota (d^{int} ou d^{ext}) d'un seul professeur modifie la somme correspondante de ± 1, changeant ainsi sa parité.

- Pour corriger la somme interne ($223 \to 224$), il faut ajuster le quota d^{int} d'un professeur.

— Pour corriger la somme externe ($293 \rightarrow 294$), il faut ajuster le quota d^{ext} d'un professeur.

Peut-on faire cela en ajustant un seul professeur ? Oui. Si on ajuste à la fois le quota interne et le quota externe d'un seul et même professeur, on résout les deux problèmes de parité simultanément.
Conclusion : Le plus petit nombre de professeurs à ajuster est 1.

Exercice 4 :

La compagnie PolyAir lance l'opération « *Aurora-to-Sunset* » : un seul appareil décolle d'un aéroport de votre choix, visite 13 autres aéroports nord-américains, puis revient à l'aéroport d'origine, sans jamais emprunter deux fois le même couloir d'embarquement.

La figure 1 illustre la répartition géographique de ces escales.

Figure 1 – Localisation des 14 escales nord-américaines.

a) Concevez un *itinéraire complet* reliant les 14 aéroports listés ci-dessus, en respectant les contraintes suivantes :

— chaque aéroport doit être **visité exactement une fois** au cours du trajet ;

— le trajet commence et se termine par des aéroports de votre choix (ils peuvent être identiques ou différents).

Indiquez clairement les aéroports choisis comme point de départ et point d'arrivée. Représentez votre solution sous les trois formats suivants :

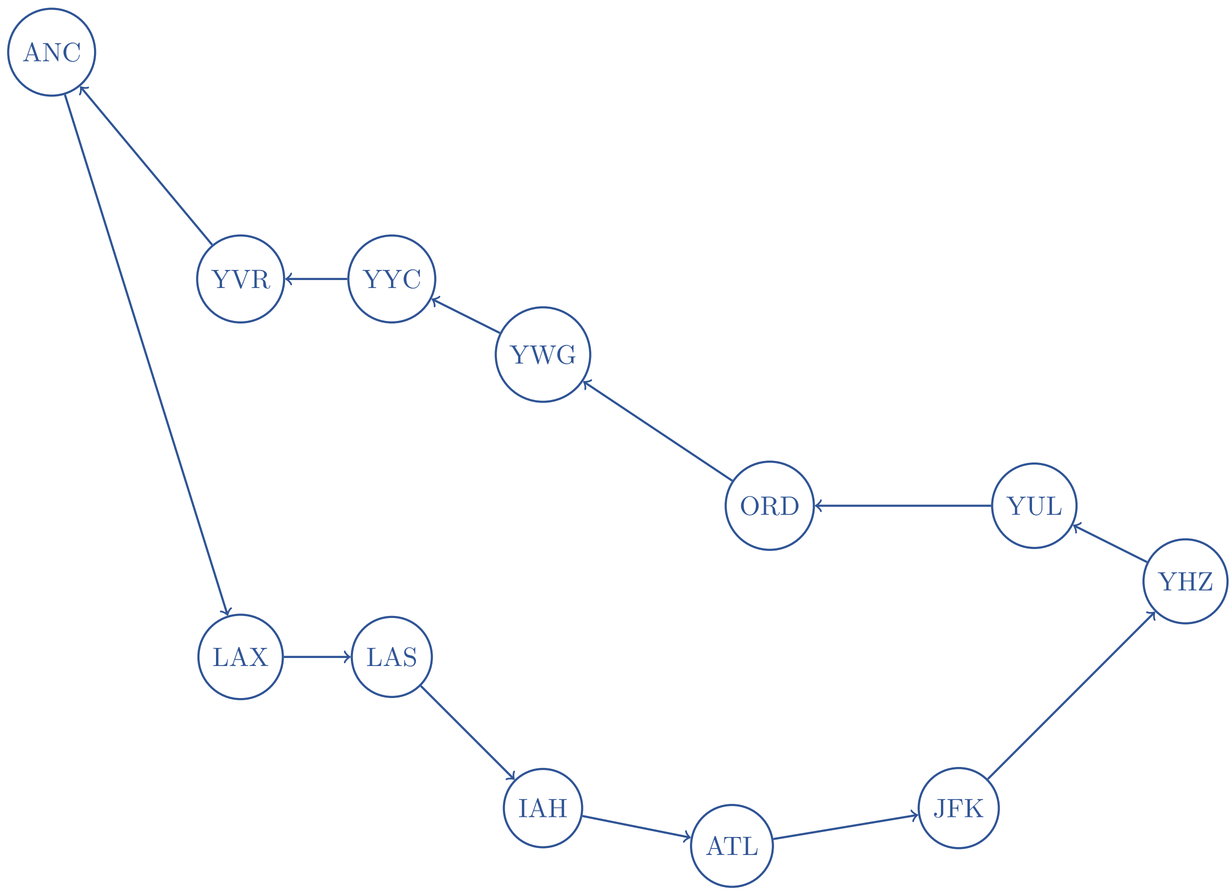
i. un graphe G représentant les connexions entre les aéroports ;

ii. la matrice d'adjacence A associée à ce graphe ;

iii. la liste d'adjacence pour chaque sommet.

Itinéraire choisi : *Montréal* (YUL) → *Chicago* (ORD) → *Winnipeg* (YWG) → *Calgary* (YYC) → *Vancouver* (YVR) → *Anchorage* (ANC) → *Los Angeles* (LAX) → *Las Vegas* (LAS) → *Houston* (IAH) → *Atlanta* (ATL) → *New York* (JFK) → *Halifax* (YHZ) → *Montréal* (YUL).

Point de départ et d'arrivée : Montréal (YUL).



$A =$

	YUL	ORD	YWG	YYC	YVR	ANC	LAX	LAS	IAH	ATL	JFK	YHZ
YUL	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ORD	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
YWG	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
YYC	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
YVR	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
ANC	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
LAX	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
LAS	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
IAH	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
ATL	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
JFK	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
YHZ	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Liste d'adjacence du graphe orienté

Aéroport	Aéroport adjacent
YUL	ORD
ORD	YWG
YWG	YYC
YYC	YVR
YVR	ANC
ANC	LAX
LAX	LAS
LAS	IAH
IAH	ATL
ATL	JFK
JFK	YHZ
YHZ	YUL

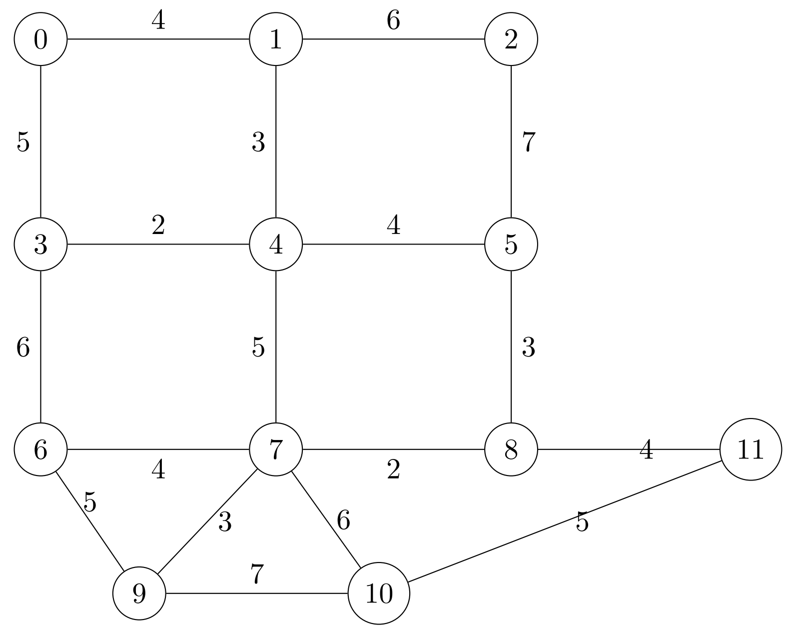
b) D'après votre modélisation, le graphe obtenu correspond-il à l'un des objets suivants (justifiez votre réponse) :

— un chemin eulérien.
— un circuit eulérien.
— un chemin hamiltonien.
— un circuit hamiltonien.

— **Chemin/Circuit Eulérien :** Pour être eulérien, tous les sommets doivent avoir un degré pair. Ici, tous les sommets ont un degré de 2, ce qui est pair. Un circuit eulérien doit traverser chaque arête une fois. Comme le graphe est uniquement constitué de ce cycle, le circuit hamiltonien que nous avons construit est aussi un circuit eulérien.
— **Chemin/Circuit Hamiltonien :** Oui. Par construction, nous avons créé un itinéraire qui visite chaque aéroport exactement une fois et revient au point de départ. C'est un circuit hamiltonien.

Exercice 5 (facultatif) :

Le graphe non orienté pondéré G ci-dessous comporte 12 sommets numérotés $0, 1, \ldots, 11$. Les poids indiqués sur les arêtes sont des distances abstraites.



a) Algorithme de Dijkstra

Appliquez l'algorithme de Dijkstra à partir du sommet **0** pour calculer les plus courts chemins vers l'ensemble des sommets du graphe. Parmi les sommets 6, 9, 11, lequel (lesquels) est/sont atteignable(s) à distance minimale ?

Itération	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Init	0,-	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1 (0)	0,-	4,0	∞	5,0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2 (1)	0,-	4,-	10,1	5,0	7,1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
3 (3)	0,-	4,-	10,1	5,-	7,1	∞	11,3	∞	∞	∞	∞	∞
4 (4)	0,-	4,-	10,1	5,-	7,-	11,4	11,3	12,4	∞	∞	∞	∞
5 (2)	0,-	4,-	10,-	5,-	7,-	11,4	11,3	12,4	∞	∞	∞	∞
6 (5)	0,-	4,-	10,-	5,-	7,-	11,-	11,3	12,4	14,5	∞	∞	∞
7 (6)	0,-	4,-	10,-	5,-	7,-	11,-	11,-	12,4	14,5	16,6	∞	∞
8 (7)	0,-	4,-	10,-	5,-	7,-	11,-	11,-	12,-	14,5	15,7	18,7	∞
9 (8)	0,-	4,-	10,-	5,-	7,-	11,-	11,-	12,-	14,-	15,7	18,7	18,8
10 (9)	0,-	4,-	10,-	5,-	7,-	11,-	11,-	12,-	14,-	15,-	18,9	18,8
11 (10)	0,-	4,-	10,-	5,-	7,-	11,-	11,-	12,-	14,-	15,-	18,-	18,8
12 (11)	0,-	4,-	10,-	5,-	7,-	11,-	11,-	12,-	14,-	15,-	18,-	18,-

Distances finales : d(6)=11, d(9)=15, d(11)=18.
Le sommet atteignable à distance minimale est le sommet 6.

b) Existence d'un circuit ou d'un chemin eulérien

i) Le graphe G possède-t-il un *circuit eulérien* ?

Non. Il y a des sommets de degré impair (1, 3, 5, 6, 7, 8, 9).

ii) Sinon, possède-t-il un *chemin eulérien* ?

Non. Le graphe a 7 sommets de degré impair. Un chemin eulérien requiert 0 ou 2 sommets de degré impair.

c) Existence d'un circuit ou d'un chemin hamiltonien

i) Prouvez ou réfutez l'existence d'un *circuit hamiltonien* dans G.

Non. Les sommets 0, 2, 10, 11 ont un degré 2. Dans un circuit hamiltonien, les deux arêtes de chaque sommet de degré 2 doivent être utilisées. Cela force les chemins : 3-0-1, 1-2-5, 7-10-9, 8-11- ?. L'arête (10,11) n'existe pas. Le chemin forcé serait ...-7-10-v et ...-8-11-v'. Cela contraint trop la structure.

ii) S'il n'existe pas, montrez ou réfutez l'existence d'un *chemin hamiltonien* allant de 0 à 11.

Oui. Un tel chemin existe. Exemple de chemin : **0-3-6-9-7-4-1-2-5-8-10-11**. Ce chemin visite tous les 12 sommets exactement une fois.

d) Parcours systématiques À partir du sommet 0, effectuez :

i) un parcours en profondeur.

0-1-2-5-4-3-6-7-8-11-10-9

ii) un parcours en largeur.

0-1-3-2-4-6-5-7-8-9-10-11

Feuille supplémentaire