POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 12 : MODÉLISATION COMPUTATIONNELLE

E2023

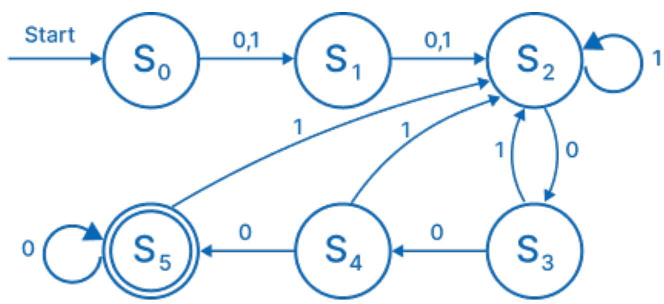
SOLUTIONNAIRE

Exercice 1

Pour chacun des langages suivants, construisez un automate fini déterministe le reconnaissant. Vous devez considérer l'ensemble des symboles terminaux $\boldsymbol{I} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.

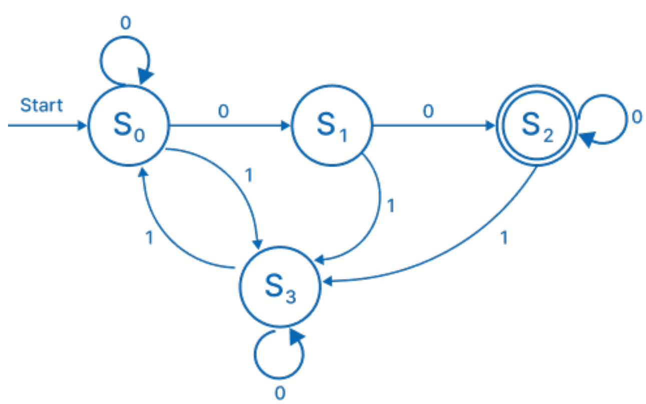
a) Le langage des mots composées d'au moins deux symboles quelconques suivis de trois « **0** » ou plus.

Solution :



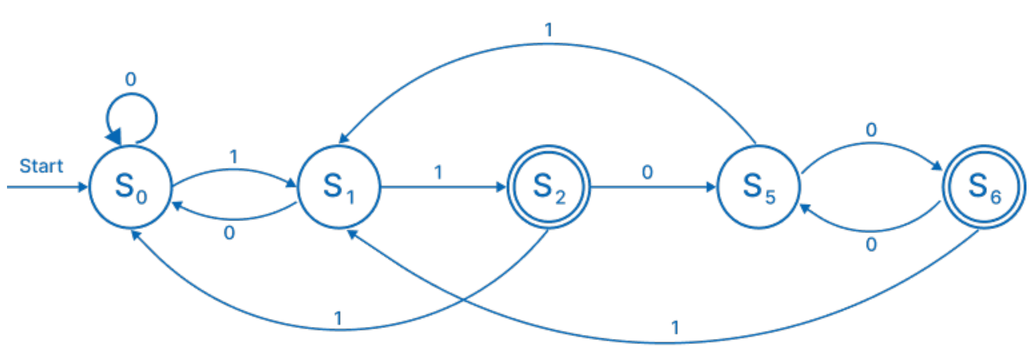
b) Le langage des mots finissant par au moins deux « **0** » consécutifs et qui comportent un nombre pair de « **1** ».

Solution :



c) Le langage des mots qui comportent une séquence de « **1** », où le nombre total de « **1** » est congru à 2 modulo 3, suivie d'un nombre pair de « **0** ».

Solution :



Exercice 2

Soit le langage $L = \{[a^2 + ab + b^2]^* [(a^+)c + (b^+)a + (c^+)b]\}$ construit sur l'alphabet $X = \{a, b, c\}$. Proposez une grammaire $G = (V, T, S, P)$ qui engendre le langage L. Vous devez préciser V, T et P. Notez que l'exposant « **+** » indique une répétition d'une ou plusieurs occurrences du symbole auquel il est associé dans le langage L.

Solution :

Note : Plusieurs solutions sont possibles. Celle qui est proposée ici n'est qu'une solution parmi tant d'autres.

- $G = (V, T, S, P)$
- $V = \{a, b, c, S, A, B, C, D, E, F\}$
- $T = \{a, b, c\}$
- P est constitué des productions suivantes :

$$S \rightarrow aA \mid bB \mid aC \mid aD \mid bE \mid cF$$
$$A \rightarrow aS$$
$$B \rightarrow bS$$
$$C \rightarrow bS$$
$$D \rightarrow aD \mid c$$
$$E \rightarrow bE \mid a$$
$$F \rightarrow cF \mid b$$

Exercice 3

Soit la grammaire $G = (V, T, S, P)$ avec $V = \{\mu, \sigma, -, S, M, E\}$, $T = \{\mu, \sigma, -\}$. S est l'axiome et P l'ensemble des règles de production suivant :

$$S \rightarrow M\ E\ M\ E$$
$$M \rightarrow M\ \mu \mid M\ \sigma \mid \varepsilon$$
$$E \rightarrow -\ M$$

Le mot « $\mu\ \mu - \mu\ \sigma\ \mu - \sigma\ \sigma$ » est-il reconnu par cette grammaire ? Dans l'affirmative, donnez l'arbre de dérivation (dérivation à gauche) correspondant.

Solution :

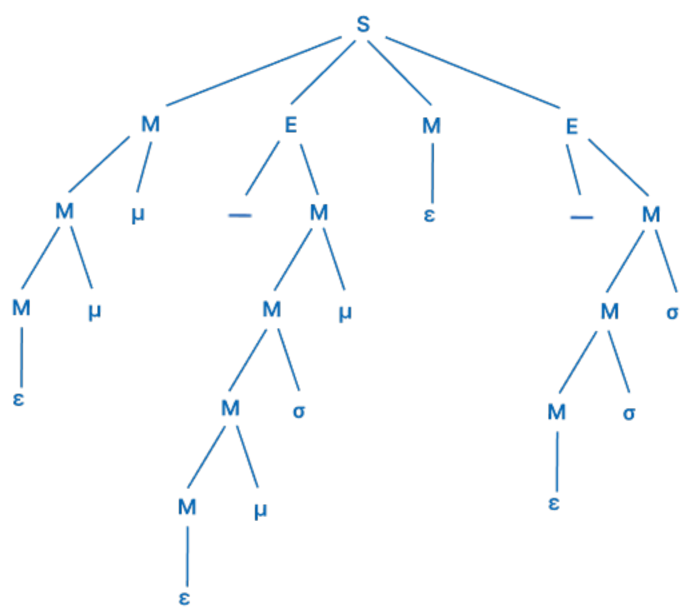
Oui, le mot « $\mu\ \mu - \mu\ \sigma\ \mu - \sigma\ \sigma$» est reconnu par cette grammaire.

Il est plus facile de construire l'arbre de dérivation à partir de la chaîne de dérivation car la chaîne fournit une séquence d'étapes claire et directe pour construire l'arbre étape par étape.

- La chaîne de dérivation

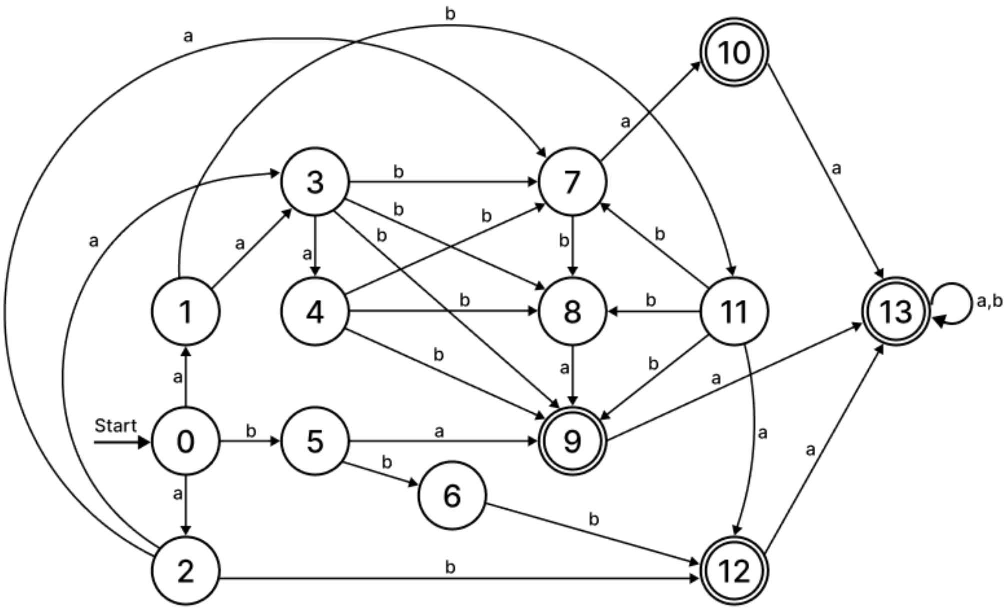
$S \rightarrow M\ E\ M\ E$	
$S \rightarrow M\ \mu\ E\ M\ E$	$(car\ M \rightarrow M\ \mu)$
$S \rightarrow M\ \mu\ \mu\ E\ M\ E$	$(car\ M \rightarrow M\ \mu)$
$S \rightarrow \mu\ \mu\ E\ M\ E$	$(car\ M \rightarrow \varepsilon)$
$S \rightarrow \mu\ \mu - M\ M\ E$	$(car\ E \rightarrow -M)$
$S \rightarrow \mu\ \mu - M\ \mu\ M\ E$	$(car\ M \rightarrow M\ \mu)$
$S \rightarrow \mu\ \mu - M\ \sigma\ \mu\ M\ E$	$(car\ M \rightarrow M\ \sigma)$
$S \rightarrow \mu\ \mu - M\ \mu\ \sigma\ \mu\ M\ E$	$(car\ M \rightarrow M\ \mu)$
$S \rightarrow \mu\ \mu - \mu\ \sigma\ \mu\ M\ E$	$(car\ M \rightarrow \varepsilon)$
$S \rightarrow \mu\ \mu - \mu\ \sigma\ \mu\ E$	$(car\ M \rightarrow \varepsilon)$
$S \rightarrow \mu\ \mu - \mu\ \sigma\ \mu - M$	$(car\ E \rightarrow -M)$
$S \rightarrow \mu\ \mu - \mu\ \sigma\ \mu - M\ \sigma$	$(car\ M \rightarrow M\ \sigma)$
$S \rightarrow \mu\ \mu - \mu\ \sigma\ \mu - M\ \sigma\ \sigma$	$(car\ M \rightarrow M\ \sigma)$
$S \rightarrow \mu\ \mu - \mu\ \sigma\ \mu - \sigma\ \sigma$	$(car\ M \rightarrow \varepsilon)$

- L'arbre de dérivation



Exercice 4

Transformez en automate déterministe l'automate suivant. Donnez la table d'états-transition et précisez les états finaux ou acceptants.



Solution :

Dans les tableaux d'états-transition, les états initiaux sont précédés par des flèches entrantes (⟶) et les états finaux sont précédés par des flèches sortantes (⟵).

- Table d'états-transition de l'automate non déterministe

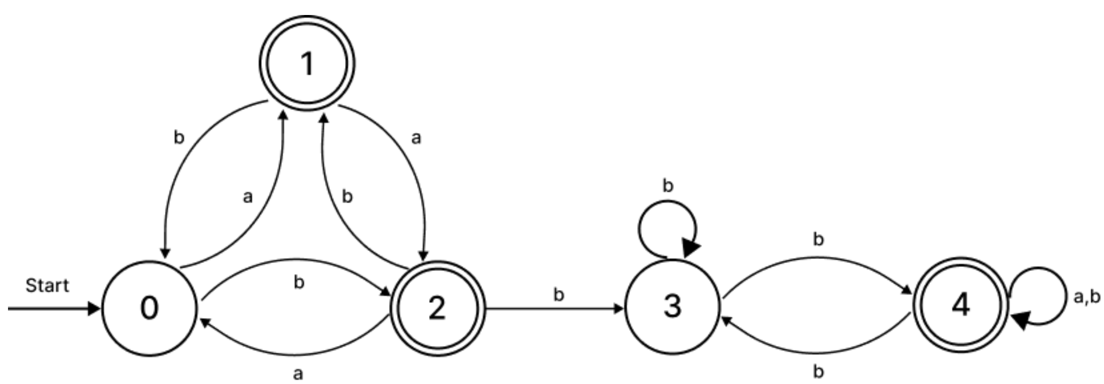
États	Entrée	
	a	**b**
⟶ 0	{1,2}	{5}
⟶ 1	{3}	{11}
⟶ 2	{3,7}	{12}
⟶ 3	{4}	{7,8,9}
⟶ 4	∅	{7,8,9}
⟶ 5	{9}	{6}
⟶ 6	∅	{12}
⟶ 7	{10}	{8}
⟶ 8	{9}	∅
⟵ 9	{13}	∅
⟵ 10	{13}	∅
⟶ 11	{12}	{7,8,9}
⟵ 12	{13}	∅
⟵ 13	{13}	{13}

- Table d'états-transition de l'automate déterministe

États	Entrée	
	a	b
$\longrightarrow \{0\}$	$\{1,2\}$	$\{5\}$
$\longrightarrow \{1,2\}$	$\{3,7\}$	$\{11,12\}$
$\longrightarrow \{5\}$	$\{9\}$	$\{6\}$
$\longrightarrow \{3,7\}$	$\{4,10\}$	$\{7,8,9\}$
$\longleftarrow \{11,12\}$	$\{12,13\}$	$\{7,8,9\}$
$\longleftarrow \{9\}$	$\{13\}$	$\emptyset$
$\longrightarrow \{6\}$	$\emptyset$	$\{12\}$
$\longleftarrow \{4,10\}$	$\{13\}$	$\{7,8,9\}$
$\longleftarrow \{7,8,9\}$	$\{9,10,13\}$	$\{8\}$
$\longleftarrow \{12,13\}$	$\{13\}$	$\{13\}$
$\longleftarrow \{13\}$	$\{13\}$	$\{13\}$
$\longleftarrow \{12\}$	$\{13\}$	$\emptyset$
$\longleftarrow \{9,10,13\}$	$\{13\}$	$\{13\}$
$\longrightarrow \{8\}$	$\{9\}$	$\emptyset$

Exercice 5

Donnez la grammaire $\boldsymbol{G}$ qui génère le langage reconnu par l'automate suivant. Vous devez préciser l'alphabet $\boldsymbol{V}$, l'ensemble des symboles terminaux $\boldsymbol{T}$, l'axiome $\boldsymbol{S}$ et l'ensemble des règles de production $\boldsymbol{P}$.



Solution :

Soit les symboles non terminaux associés aux états comme suit :

- État 0 : Symbole non terminal $\boldsymbol{S}$, axiome de la grammaire
- État 1 : Symbole non terminal $\boldsymbol{A}$
- État 2 : Symbole non terminal $\boldsymbol{B}$

- État 3 : Symbole non terminal $\boldsymbol{C}$
- État 4 : Symbole non terminal $\boldsymbol{D}$

Nous avons les ensembles suivants :
$\boldsymbol{V} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}\}$
$\boldsymbol{T} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$

Les productions de $\boldsymbol{P}$ sont :

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{S} \to \mathbf{a}\boldsymbol{A} \mid \mathbf{b}\boldsymbol{B} \mid \mathbf{a} \mid \mathbf{b}\\
&\boldsymbol{A} \to \mathbf{a}\boldsymbol{B} \mid \mathbf{b}\boldsymbol{S} \mid \mathbf{a}\\
&\boldsymbol{B} \to \mathbf{a}\boldsymbol{S} \mid \mathbf{b}\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{bC} \mid \mathbf{b}\\
&\boldsymbol{C} \to \mathbf{b}\boldsymbol{C} \mid \mathbf{b}\boldsymbol{D} \mid \mathbf{b}\\
&\boldsymbol{D} \to \mathbf{a}\boldsymbol{D} \mid \mathbf{b}\boldsymbol{D} \mid \mathbf{b}\boldsymbol{C} \mid \mathbf{a} \mid \mathbf{b}
\end{aligned}$$

Exercice 6

On considère l'alphabet $\boldsymbol{V} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$ et les langages $\boldsymbol{L_A}$ et $\boldsymbol{L_B}$.

$$\boldsymbol{L_A} = \{\mathbf{01}, \mathbf{101}\} \text{ et } \boldsymbol{L_B} = \{\mathbf{20000}, \mathbf{21110}, \mathbf{22220}\}$$

a) Donnez tous les mots de $\boldsymbol{V}^*$ de longueur inférieure à 3.

Solution :

Mot de longueur 0 : ε
Mots de longueur 1 : 0, 1, 2
Mots de longueur 2 : 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22

L'ensemble de mots recherchés est donc : **{ ε, 0, 1, 2, 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22}**.

b) Déterminez $\boldsymbol{L_A}^3$

Solution :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L_A}^3 &= \{(01 + 101)^3\}\\
&= \{010101, 0110101, 1010101, 10110101, 0101101, 01101101, 10101101, 101101101\}
\end{aligned}$$

c) Déterminez et simplifiez $\boldsymbol{L_B}^*$

Solution :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L_B}^* &= \{\varepsilon, 20000, 21110, 22220, 2000020000, \dots\}\\
&= \{(20000 + 21110 + 22220)^*\} = \{[2(000 + 111 + 222)0]^*\} = \{[2(0^3 + 1^3 + 2^3)0]^*\}
\end{aligned}$$

Exercice 7

Soit la grammaire $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{P})$ où $\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}\}$, $\boldsymbol{T} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$. $\boldsymbol{S}$ est l'axiome et $\boldsymbol{P}$ l'ensemble des règles de production suivant :

$$\begin{aligned}
&S \rightarrow ACaB \\
&Ca \rightarrow aaC \\
&CB \rightarrow DB \mid E \\
&aD \rightarrow Da \\
&AD \rightarrow AC \\
&aE \rightarrow Ea \\
&AE \rightarrow \varepsilon
\end{aligned}$$

Quel est le type de la grammaire $\boldsymbol{G}$? Justifiez votre réponse.

Solution :

- Elle n'est pas de **type 3**, car aucune production de $\boldsymbol{P}$ n'est de la forme $\boldsymbol{w_1} \rightarrow \boldsymbol{a}|\boldsymbol{aH}$ ou de la forme $S \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{a}$ étant un symbole terminal et $\boldsymbol{H}$ un symbole non terminal.

- Elle n'est pas de **type 2** du fait de la présence de la production $\boldsymbol{Ca} \rightarrow \boldsymbol{aaC}$ dont la partie gauche n'est pas symbole unique non terminal, mais un mot. Il en est de même pour :

$$\begin{aligned}
&CB \rightarrow DB|E \\
&aD \rightarrow Da \\
&AD \rightarrow AC \\
&aE \rightarrow Ea \\
&AE \rightarrow \varepsilon
\end{aligned}$$

- Elle n'est pas de **type 1**, car la production $\boldsymbol{CB} \rightarrow \boldsymbol{E}$ est tel que $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{CB}) > \boldsymbol{l}(\boldsymbol{E})$.

- La grammaire $\boldsymbol{G}$ est donc de **type 0**.

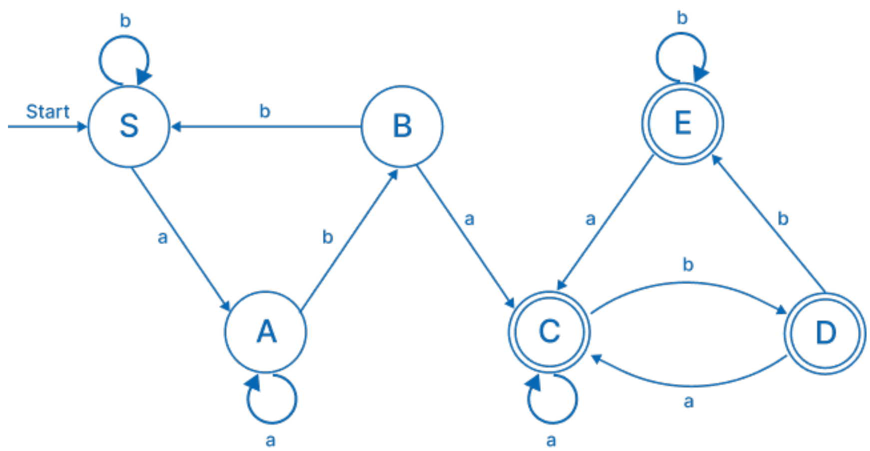
Exercice 8

Soit la grammaire $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{P})$ où $\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}\}$, $\boldsymbol{T} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$. $\boldsymbol{S}$ est l'axiome et $\boldsymbol{P}$ l'ensemble des règles de production suivant :

$$\begin{aligned}
&S \rightarrow aA \mid bS \\
&A \rightarrow aA \mid bB \\
&B \rightarrow aC \mid bS \mid a \\
&C \rightarrow aC \mid bD \mid a \mid b \\
&D \rightarrow aC \mid bE \mid a \mid b \\
&E \rightarrow aC \mid bE \mid a \mid b
\end{aligned}$$

Construisez l'automate $\boldsymbol{M}$ tel que $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{M})$.

Solution :


Start
S
A
B
C
D
E
a
b
a
b
a
b
a
b
a
b
a
b
a
b