POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 5 : RELATIONS

Directives pour la remise:

- La remise est individuelle et se fait à la fin de la séance de TD.
- Répondez directement sur ce document Word (docx).
- Lorsque vous avez terminé, générez un PDF avec le nom sous le format: ***SectionDeTD-Matricule.pdf*** (exemple: *04-1234567.pdf*).
- Téléchargez votre fichier PDF dans la boîte de remise située dans la Zone TDs de la page Moodle du cours.
- Choisissez la boîte de remise qui correspond à votre section de TD.
- Aucun retard et aucune remise par courriel ne seront accepté.
- Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.

Objectifs du TD5

Exercice 1: Démontrer comment calculer une relation composée.

Exercice 2: Travailler la notion de relation composée de manière plus spécifique pour les relations d'ensemble.

Exercice 3: Visualiser les caractéristiques des différents types de relations à l'aide de graphes

Exercice 4: Reconnaître une relation d'équivalence.

Exercice 5: Démontrer une propriété importante d'une relation d'ordre

Exercice 6: Se familiariser aux relations d'ordre total et leur représentation matricielle.

Exercice 7: Distinguer une relation d'équivalence, une relation d'ordre partiel et relation d'ordre total qui est un cas particulier de l'ordre partiel.

La remise est individuelle mais le travail en équipe est encouragé. Veuillez inscrire votre nom, prénom et matricule ainsi que les noms des collègues avec lesquels vous avez collaboré pour le TD.

Nom:

Prénom:

Matricule:

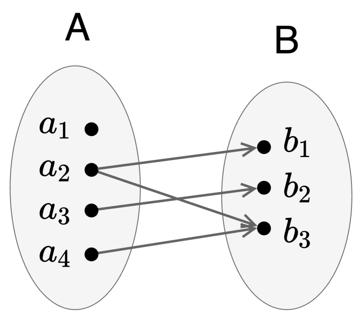
Collègues:

Exercice 1

Tout ensemble de couples ordonnés définit une relation binaire.

Un couple particulier qui est membre de la relation peut être noté $a_i R b_j$.

Par exemple, nous pouvons illustrer la relation
$R = \{(a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_3, b_2), (a_4, b_3)\}$ de la manière suivante:

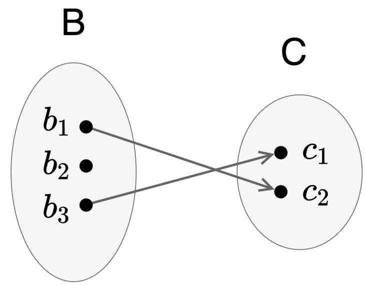


et la représenter à l'aide de la matrice

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où $m_{i,j} = 1$ si $(a_i, b_j) \in R$ et $m_{i,j} = 0$ si $(a_i, b_j) \notin R$

De la même manière nous pouvons illustrer la relation
$S = \{(b_1, c_2), (b_3, c_1)\}$ de la manière suivante:



et la représenter à l'aide de la matrice

$$M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

où $m_{i,j} = 1$ si $(b_i, c_j) \in S$ et $m_{i,j} = 0$ si $(b_i, c_j) \notin S$

Définition 1: L'ensemble des couples de la relation composée de S et R est constitué des éléments suivante:
$S \circ R = \{(a_i, c_j) \mid \exists b_k (a_i R b_k \wedge b_k S c_j)\}$

a) Donnez l'ensemble des couples de la relation composée $S \circ R$.

Réponse:
$S \circ R = \{(a_2, c_1), (a_2, c_2), (a_4, c_1)\}$

b) Donnez la matrice associée $M_{S \circ R}$.

Réponse:

$$M_{S \circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Expliquez, à partir des définitions 1 et 2, pourquoi la multiplication booléenne des matrices $M_R \odot M_S$ permet d'obtenir la représentation matricielle de la relation composée $S \circ R$.

Définition 2: Soit $X = [x_{ik}]$ une matrice $l \times n$ de zéro et de un et $Y = [y_{kj}]$ une matrice $n \times m$ de zéro et de un. Le produit booléen de X et Y noté $X \odot Y$ est une matrice $l \times m$ avec les éléments suivant:
$z_{ij} = (x_{i1} \wedge y_{1j}) \vee (x_{i2} \wedge y_{2j}) \vee \cdots \vee (x_{in} \wedge y_{nj})$

Réponse:

La relation composée est l'ensemble: $S \circ R = \{(a_i, c_j) \mid \exists b_k (a_i R b_k \wedge b_k S c_j)\}$

La multiplication booléenne permet de vérifier s'il existe un tel b_k pour chacun des couples (a_i, c_j). Pour s'en convaincre il suffit de substituer les éléments des relations dans les matrices X et Y de la manière suivante:

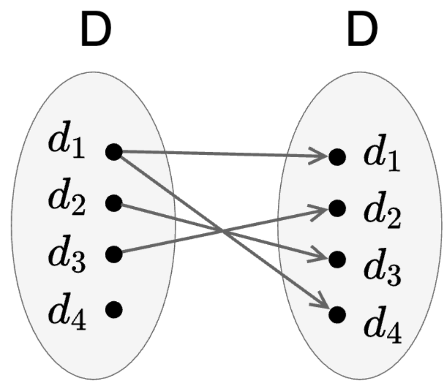
$x_{ik} = a_i R b_k$
$y_{kj} = b_k S c_j$
$z_{ij} = (a_i R b_1 \wedge b_1 S c_j) \vee (a_i R b_2 \wedge b_2 S c_j) \vee \cdots \vee (a_i R b_n \wedge b_n S c_j)$

Et ainsi $z_{ij} = 1$ si et seulement s'il existe un tel b_k.

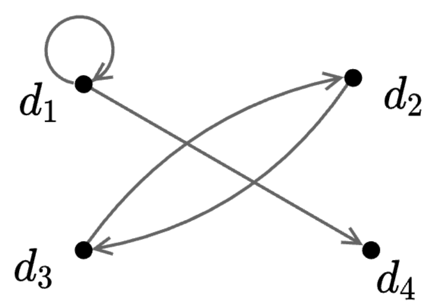
Exercice 2

Les relations d'un ensemble à lui-même ont un intérêt particulier.

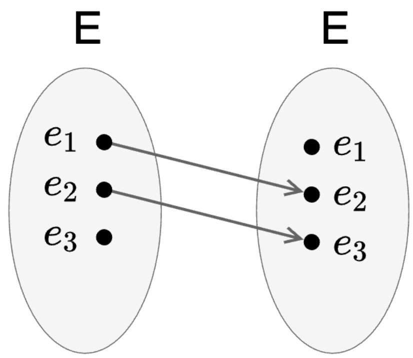
Soit la relation $R = \{(d_1, d_1), (d_1, d_4), (d_2, d_3), (d_3, d_2)\}$.



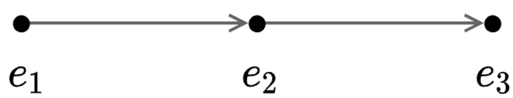
Une telle relation peut également être illustrée à l'aide du graphe de la figure suivante.



Soit maintenant un ensemble $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ et une relation S qui peut être illustrée en utilisant deux copies de l'ensemble E:



Ou encore de manière plus succincte à l'aide d'un graphe:



a) Donnez l'ensemble des couples de cette relation S.

Réponse:
$S = \{(e_1, e_2), (e_2, e_3)\}$

b) Donnez l'ensemble de la relation composée $S \circ S$ que l'on peut également noter S^2.

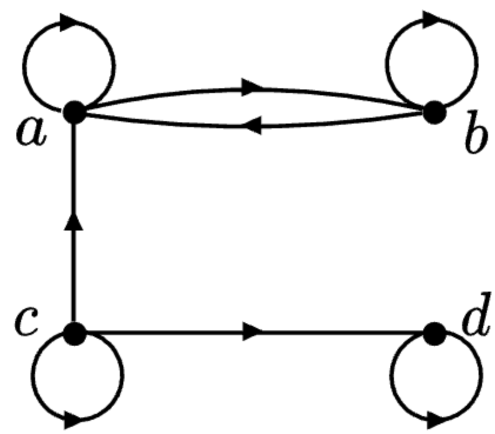
Réponse:
$S^2 = \{(e_1, e_3)\}$

Exercice 3

Déterminez si les relations représentées par les graphes ci-dessous sont réflexives, antiréflexives, symétriques, antisymétriques, asymétriques et/ou transitives.

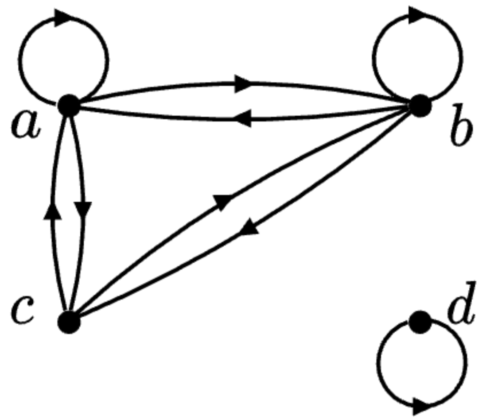
Réflexive: $\forall e_i (e_i R e_i)$
Antiréflexive: $\forall e_i \neg (e_i R e_i)$
Symétrique: $\forall e_i \forall e_j (e_i R e_j \rightarrow e_j R e_i)$
Antisymétrique: $\forall e_i \forall e_j ((e_i R e_j \wedge e_j R e_i) \rightarrow (i = j))$
Asymétrique: $\forall e_i \forall e_j (e_i R e_j \rightarrow \neg e_j R e_i)$
Transitive: $\forall e_i \forall e_j \forall e_k ((e_i R e_j \wedge e_j R e_k) \rightarrow (e_i R e_k))$

a)



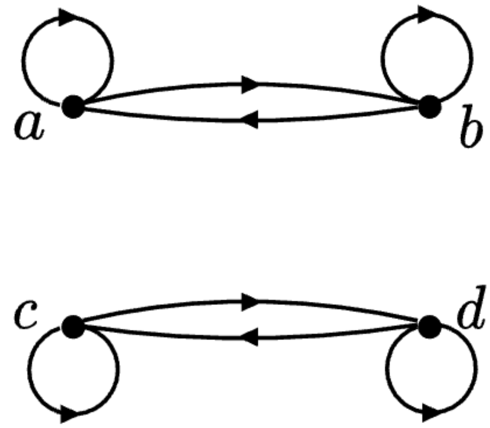
Réponse:
La relation illustrée est réflexive mais pas antiréflexive puisqu'il y a des boucles à chaque sommet. Elle n'est pas symétrique, puisque, par exemple, l'arête (c, a) est présente mais pas l'arête (a, c). Elle n'est pas antisymétrique, puisque les deux arêtes (a, b) et (b, a) sont présentes. Elle n'est donc pas asymétrique non plus. Elle n'est pas transitive, puisque le chemin (c, a), (a, b) de c à b n'est pas accompagné de l'arête (c, b).

b)



Réponse:
La relation illustrée n'est ni réflexive ni irréflexive puisqu'il y a des boucles mais pas une boucle à chaque sommet. Elle est symétrique, puisque les arêtes apparaissent par paires antiparallèles. Elle n'est pas antisymétrique, puisque, par exemple, les deux arêtes (a, b) et (b, a) sont présentes. Elle n'est donc pas asymétrique non plus. Elle n'est pas transitive, puisque les arêtes (c, a) et (a, c) sont présentes, mais pas (c, c) .

c)



Réponse:

La relation illustrée est réflexive et non irréflexive puisqu'il y a des boucles à tous les sommets. Elle est symétrique mais pas antisymétrique ou asymétrique. Elle est transitive; les seuls chemins non triviaux de longueur 2 ont les raccourcis de boucle nécessaires.

De manière générale nous pouvons retenir qu'une relation est;

Réflexive: s'il y a une boucle à chaque sommet ;

Antiréflexive (ou irréflexive): s'il n'y a aucun sommet avec une boucle ;

Symétrique: si les arêtes n'apparaissent que par paires antiparallèles (arêtes d'un sommet à un deuxième sommet et du deuxième retour au premier);

Antisymétrique: s'il n'y a pas de paire d'arêtes antiparallèles ;

Asymétrique: si est à la fois antisymétrique et irréflexive;

Transitive: si tous les chemins de longueur 2 (une paire d'arêtes (x,y) et (y,z)) sont accompagnés du chemin correspondant de longueur 1 (l'arête (x,z)).

Exercice 4

Lesquelles de ces relations sur l'ensemble de toutes les personnes sont des relations d'équivalence? Déterminez les propriétés de relation d'équivalence qui manquent aux autres.

Notation: Deux éléments d'un ensemble lié par une relation d'équivalence est souvent noté $a \sim b$.

Définition: Une relation d'équivalence est réflexive $a \sim a$ (un objet est équivalent à lui-même), symétrique, si $a \sim b$ alors $b \sim a$, et transitive, si $a \sim b$ et $b \sim c$ alors $a \sim c$.

a) $\{(a, b) \mid a$ et $b$ont le même âge$\}$

Réponse:
Oui. De manière plus générale, une relation $\{(a, b) \mid f(a) = f(b)\}$ pour une fonction quelconque est une relation d'équivalence. Ici la fonction retourne l'âge de chacune des personnes.

b) $\{(a, b) \mid a$ et $b$ont les mêmes parents$\}$
Réponse:
Oui. Ici la fonction retourne les parents de chacune des personnes.

c) $\{(a, b) \mid a$ et b partagent un parent$\}$
Réponse:
Non. Ce n'est pas une relation d'équivalence, puisqu'elle n'a pas besoin d'être transitive. Il est possible que A soit l'enfant de William et Yvette, B soit l'enfant de Yvette et George, et C soit l'enfant de George et Suzanne. Alors A est lié à B, et B est lié à C, mais A n'est pas lié à C.

d) $\{(a, b) \mid a$ et b se sont rencontrés$\}$

Réponse:

Non. Il ne s'agit pas d'une relation d'équivalence puisqu'elle n'est clairement pas transitive.

e) $\{(a, b) \mid a$ et b parlent une langue commune$\}$

Réponse:

Non. Pour la même raison qu'en c).

Exercice 5

Dites s'il est possible d'avoir une relation d'ordre partiel ou total où l'énoncé $a \leq b \leq c \leq d \leq a$ est vraie et expliquez pourquoi.

Définition: Une relation R sur un ensemble S est appelée ordre partiel si et seulement si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Réponse:

La relation doit être antisymétrique, alors $d \leq a$ implique $a \nleq d$. La relation doit être transitive, ce qui implique que $a \leq d$. Nous obtenons ainsi une contradiction. Il ne peut donc y avoir de relation ni partiel et ni total de cette forme.

Exercice 6

Supposons un ensemble S = {1, 2, 3, 4} et la relation d'ordre total ≼ = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4,4)}. Remplissez la représentation matricielle $M_{\preccurlyeq}$ de la relation.

Définition: Les éléments a et b d'un ordre partiel $(S, \preccurlyeq)$ sont dits comparables si $a \preccurlyeq b$ ou $a \succcurlyeq b$ sinon ils sont dits incomparables.

Définition: Si $(S, \preccurlyeq)$ est un ordre partielle et que tous les éléments de S sont comparables alors S est dit totalement ordonné (ou linéairement ordonné) et ≼ est dit un ordre total (ou un ordre linéaire).

Réponse:

$$M_{\preccurlyeq} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

$$M_{\preccurlyeq} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 7

Supposons l'ensemble $S = \{12,\ 24,\ 48,\ 72\}$ et une relation M sur cet ensemble. La relation M contient les couples aMb où a est un multiple de b. Donnez l'ensemble des couples de cette relation M et dites si c'est une relation d'équivalence, un ordre partiel ou un ordre total.

Voir les définitions des exercices 5 et 6.

Réponse:

$$M = \{(12{,}12), (24{,}12), (24{,}24), (48{,}12), (48{,}24), (48{,}48), (72{,}12), (72{,}24), (72{,}72)\}$$

Cette relation M est réflective, transitive et antisymétrique mais tous les nombres ne sont pas comparable et donc c'est un ordre partiel.