POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810
STRUCTURES DISCRÈTES

TD 13 : MODÉLISATION COMPUTATIONNELLE

Directives pour la remise:

- La remise est individuelle et se fait à la fin de la séance de TD.
- Répondez directement sur ce document Word (docx).
- Lorsque vous avez terminé, générez un PDF avec le nom sous le format: ***SectionDeTD-Matricule.pdf*** (exemple: *04-1234567.pdf*).
- Téléchargez votre fichier PDF dans la boîte de remise située dans la Zone TDs de la page Moodle du cours.
- Choisissez la boîte de remise qui correspond à votre section de TD.
- Aucun retard et aucune remise par courriel ne seront accepté.
- Dans l'intérêt de l'équité pour tous les étudiants, vous devez modifier le fichier Word (docx) fourni. Modifier le fichier EXCLUT le fait d'intégrer des scans de rédaction manuscrite ou d'y écrire avec un stylet.
- Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.

Objectifs du TD13

Exercice 1: Exprimer en vos propres mots un ensemble régulier.

Exercice 2: Exprimer un ensemble régulier à l'aide d'une expression régulière.

Exercice 3: Déterminer si un mot fait partie d'un ensemble régulier.

Exercice 4: Exprimer à l'aide d'une expression régulière le langage reconnu par un automate fini.

Exercice 5: Dériver l'expression régulière du langage reconnu par un automate fini en utilisant le lemme d'Arden.

Exercice 6: Appliquer le lemme de pompage afin de démontrer qu'un langage donné n'est pas régulier.

Exercice 7: Construire une machine de Turing qui reconnait un langage donné.

Exercice 8: Construire une machine de Turing capable d'effectuer des opérations booléennes.

La remise est individuelle mais le travail en équipe est encouragé. Veuillez inscrire votre nom, prénom et matricule ainsi que les noms des collègues avec lesquels vous avez collaboré pour le TD.

Nom:

Prénom:

Matricule:

Collègues:

Exercice 1

Décrivez en vos propres mots chacun de ces ensembles réguliers.

a) 001^*

Réponse:

Cette expression régulière génère toutes les chaînes composées d'exactement deux 0 suivis d'aucun ou de plusieurs 1.

b) $(01)^*$

Réponse:

Cette expression régulière génère toutes les chaînes constituées d'aucun ou de plusieurs répétitions de 01.

c) $01 \cup 001^*$

Réponse:

Il s'agit de la chaîne 01 ou toutes les chaînes composées d'exactement deux 0 suivis d'aucun ou de plusieurs 1.

d) $(101^*)^*$

Réponse:

Cet ensemble se compose de toutes les chaînes dans lesquelles chaque 0 est précédé d'un 1, et de plus la chaîne doit commencer par 10 si elle n'est pas vide.

Exercice 2

Exprimez chacun de ces ensembles réguliers à l'aide d'une expression régulière

a) L'ensemble des chaînes de deux 0, suivis d'aucun ou de plusieurs 1, et se terminant par un 0.

Réponse:

001^*0

b) L'ensemble de chaînes avec chaque 1 suivi de deux 0.

Réponse:

Nous supposons qu'il n'est pas prévu que chaque 1 soit suivi d'exactement deux 0, nous pouvons donc écrire $0^*(100 \cup 0)^*$. Nous pouvons également écrire plus simplement $(100 \cup 0)^*$.

c) L'ensemble de chaîne se terminant par 00 et ne contenant pas 11.

Réponse:

Une façon de dire cela est que chaque 1 doit être suivi d'un 0. Ainsi, nous pouvons écrire $0^*(10 \cup 0)^*00$. Nous pouvons également écrire plus simplement $(10 \cup 0)^*00$.

Exercice 3

Déterminez si la chaîne 01001 se trouve dans les ensembles suivants. Justifiez votre réponse.

a) $\{0, 1\}^*$

Réponse:

Cet ensemble contient toutes les chaînes de bits, donc bien sûr la réponse est oui.

b) $\{010\}^*\{0\}^*\{1\}$

Réponse:

Notre chaîne est $(010)^1 0^1 1$ et est donc dans cet ensemble.

c) $\{00\}\{0\}^*\{01\}$

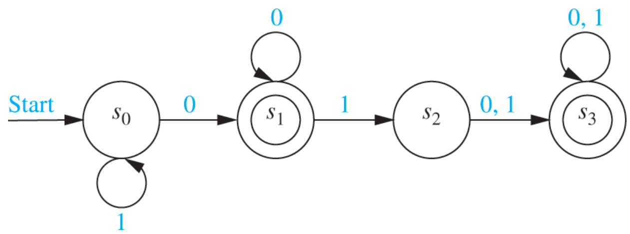
Réponse:

Toutes les chaînes de cet ensemble doivent commencer par 00 ; puisque notre chaîne ne commence pas par 00, elle n'est donc pas dans l'ensemble.

Exercice 4

Trouvez les langages reconnus par les machines à états finis déterministes suivantes.

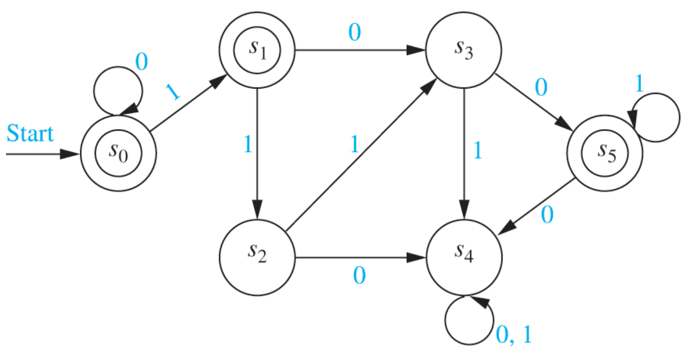
a)



Réponse:

Nous devons écrire les chaînes qui conduisent la machine aux états s1 ou s3 . Il n'est pas difficile de voir que le la réponse est $\{1\}^*\{0\}\{0\}^* \cup \{1\}^*\{0\}\{0\}^*\{10,11\}\{0,1\}^*$.

b)



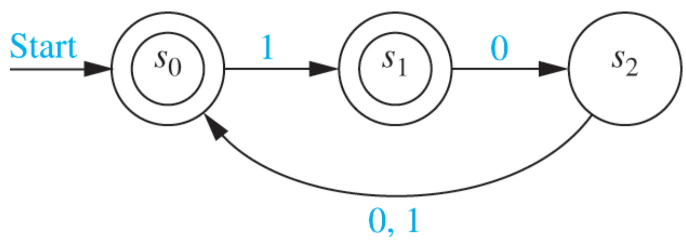
Réponse:

Nous devons écrire les chaînes qui conduisent la machine aux états s_0, s_1 ou s_5 . La réponse est :
$\{0\}^* \cup \{0\}^*\{1\} \cup \{0\}^*\{100\}\{1\}^* \cup \{0\}^*\{1110\}\{1\}^*$

qui peut s'écrire de manière plus compacte :
$\{0\}^*\{\lambda, 1\} \cup \{0\}^*\{100, 1110\}\{1\}^*$

Exercice 5

Trouvez le langage reconnu par la machine à états finis suivante. Justifiez votre réponse en utilisant le lemme d'Arden.



Réponse:

Nous pouvons nous retrouver à l'état s_0 en ne faisant rien, et nous pouvons nous retrouver à l'état s_1 en lisant un 1. Nous pouvons également nous retrouver dans ces états finaux en lisant d'abord $\{10\}\{0,1\}$, un nombre quelconque de fois. La réponse est donc $(\{10\}\{0,1\})^*\{\lambda,1\}$.

Utilisons maintenant le lemme d'Arden afin de confirmer cette réponse. Représentons d'abord l'automate fini par le système d'équations:

$X_0 = 1X_1 + \lambda$
$X_1 = 0X_2 + \lambda$
$X_2 = (0 + 1)X_0$

Substituer X_2 dans la deuxième équation donne :
$X_1 = 0(0+1)X_0 + \lambda$
Ensuite substituer le résultat dans la première équation donne :
$X_0 = 10(0+1)X_0 + 1 + \lambda$
Et en appliquant le lemme d'Arden nous obtenons :
$X_0 = (10(0+1))^*(1+\lambda)$

Ce qui est bien équivalent à la réponse donnée plus haut.

Exercice 6

Le nom du groupe de musique ABBA est un exemple de palindrome. La ville de LAVAL est un autre exemple.

Voici une grammaire qui génère tous les palindromes sur l'alphabet $\{a, b\}$

$S \rightarrow \lambda$
$S \rightarrow a$
$S \rightarrow b$
$S \rightarrow aSa$
$S \rightarrow bSb$

Utilisez le lemme de pompage afin de démontrer que l'ensemble des palindromes définit sur $\{a, b\}$ n'est pas régulier.

Indice : Considérez par exemple la chaîne $a^n bba^n$

Réponse:

Supposons que l'ensemble soit régulier. Soit p la valeur du lemme de pompage. Considérons la chaîne $\omega = a^p bba^p$ qui est clairement un palindrome et $|\omega| \geq p$. Par le lemme de pompage, il doit exister des sous-chaînes x, y et z satisfaisant les trois contraintes du lemme de pompage.

Donc choisissons n'importe quel x, y et z tel que $\omega = xyz$, $|xy| \leq p$ et $|y| \geq 1$. Parce que $|xy| \leq p$, xy est entièrement contenu dans le a^p au début de ω. Donc x et y sont entièrement constitués de a, c'est-à-dire que $x = a^i$ et $y = a^j$. Alors z doit ressembler à $a^k bba^p$ où $i + j + k = p$.

Maintenant, considérons xy^iz. Par le lemme de pompage, avec $i = 0$, xz doit être dans le langage.

Mais $xz = a^i a^k bba^p = a^{i+k}bba^p$. De $|y| \geq 1$, on sait que $j \geq 1$. Donc $i + k < p$. Cela signifie que xz n'est pas un palindrome, car les nombres de a aux deux extrémités ne correspondent pas à p.

Cela signifie que l'ensemble des palindromes ne satisfait pas le lemme de pompage et, ainsi, l'ensemble des palindromes définit sur l'ensemble $\{a, b\}$ ne peut pas être régulier.

Exercice 7

Construisez une machine de Turing qui reconnaît l'ensemble de toutes les chaînes de bits qui contiennent au moins deux 1.

Réponse:

Nous pouvons rester dans l'état s_0 jusqu'à ce que nous ayons atteint le premier 1 ; puis rester dans l'état s_1 jusqu'à ce que nous ayons atteint le deuxième 1. À ce stade, nous pouvons entrer dans l'état s_2 qui sera un état d'acceptation. Si nous arrivons au dernier blanc alors que nous sommes toujours dans les états s_0 ou s_1 , nous n'accepterons pas. Les quintuples sont simplement (s_0, 0, s_0, 0, R), (s_0, 1, s_1, 1, R), (s_1, 0, s_1, 0, R) et (s_1, 1, s_2, 1, R).

Exercice 8

Soit une machine de Turing T = (S, I, f, s_0) avec I = {0, 1, B}. Les symboles 0 et 1 sont respectivement utilisés pour représenter FAUX et VRAI.

Sur le ruban initial se trouve deux valeurs booléennes p et q comme ceci: …B B p q B B…

Construisez une machine de Turing qui imprime en troisième position (à la suite de p et q) sur le ruban le résultat des opérations booléennes suivantes :

a) $p \wedge q$

Réponse:

L'état s_0 représente le résultat VRAI jusqu'à preuve du contraire.
L'état s_1 représente le résultat FAUX.
s_2 est l'état d'arrêt.

(s_0, 0, s_1, 0, R)
(s_0, 1, s_0, 1, R)
(s_1,0, s_1, 0, R)
(s_1,1, s_1, 1, R)
(s_1,B, s_2, 0, R)
(s_0, B, s_2, 1, R)

b) $p \vee q$

Réponse:

L'état s_0 représente le résultat FAUX jusqu'à preuve du contraire.
L'état s_1 représente le résultat VRAI.
s_2 est l'état d'arrêt.

(s_0, 0, s_1, 0, R)
(s_0, 1, s_1, 1, R)
(s_1,0, s_1, 0, R)
(s_1,1, s_1, 1, R)
(s_1,B, s_2,1, R)
(s_0, B, s_2, 0, R)

c) $p \to q$

Réponse:

L'état s_1 l'hypothèse de l'implication est fausse.
L'état s_2 l'hypothèse de l'implication est vraie.
L'état s_3 inscrira VRAI.
L'état s_4 inscrira FAUX.
L'état s_5 est l'état d'arrêt.

(s_0, 0, s_1, 0, R)
(s_0, 1, s_2, 1, R)
(s_1,0, s_3, 0, R)
(s_1,1, s_3, 1, R)
(s_2,0, s_4, 0, R)
(s_2,1, s_3, 1, R)
(s_3,B, s_5, 1, R)
(s_4, B, s_5, 0, R)