POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810
STRUCTURES DISCRÈTES

TD 8 : INDUCTION ET RÉCURSION

Directives pour la remise:

- La remise est individuelle et se fait à la fin de la séance de TD.
- Répondez directement sur ce document Word (docx).
- Lorsque vous avez terminé, générez un PDF avec le nom sous le format: ***SectionDeTD-Matricule.pdf*** (exemple: *04-1234567.pdf*).
- Téléchargez votre fichier PDF dans la boîte de remise située dans la Zone TDs de la page Moodle du cours.
- Choisissez la boîte de remise qui correspond à votre section de TD.
- Aucun retard et aucune remise par courriel ne seront accepté.
- Dans l'intérêt de l'équité pour tous les étudiants, vous devez modifier le fichier Word (docx) fourni. Modifier le fichier EXCLUT le fait d'intégrer des scans de rédaction manuscrite ou d'y écrire avec un stylet.
- Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.

Objectifs du TD8

Exercice 1: Pratiquer la technique de preuve par induction. Remarquez qu'il serait également possible de faire une preuve par cas.

Exercice 2: S'exercer à faire la conjecture d'une formule suite à des observations et ensuite faire la démonstration que cette formule est valide pour tout n.

Exercice 3: Analyser les conditions nécessaires pour qu'une preuve par induction forte soit complète.

Exercice 4: Calculer d'abord quelques exemples afin de mieux comprendre le problème et en tirer des conclusions utiles afin de prouver un résultat. S'exercer ensuite à faire une preuve en utilisant la technique de l'induction forte.

Exercice 5: S'exercer à l'écriture et à l'analyse d'algorithmes récursifs.

Exercice 6: Appliquer l'induction et la récursion à la géométrie computationnelle.

La remise est individuelle mais le travail en équipe est encouragé. Veuillez inscrire votre nom, prénom et matricule ainsi que les noms des collègues avec lesquels vous avez collaboré pour le TD.

Nom:

Prénom:

Matricule:

Collègues:

Exercice 1

Démontrez en utilisant la technique de l'induction mathématique que 6 divise $n^3 - n$ lorsque $n \geq 0$ est un entier non négatif.

Réponse:

La proposition est vraie pour le cas de base, $n = 0$, puisque 6 divise 0. Supposons que 6 divise $n^3 - n$ pour un n quelconque. Il faut montrer que 6 divise $(n+1)^3 - (n+1)$. Si on développe l'expression en question, on obtient $n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = (n^3 - n) + 3n(n+1)$. Par l'hypothèse d'induction, 6 divise le premier terme, $n^3 - n$. De plus, 3 divise clairement le deuxième terme $3n(n+1)$, et ce deuxième terme est également pair, puisque l'un ou l'autre de n et $n + 1$ est pair ; donc 6 divise également le deuxième terme. Cela nous indique que 6 divise l'expression donnée, comme souhaité.

Exercice 2

a) Trouvez une formule simplifiée pour

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

en examinant les valeurs de cette expression pour des petites valeurs successives de n : $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, …

Réponse:

$$\frac{n}{n+1}$$

b) Démontrez votre formule en utilisant la technique de l'induction mathématique.

Réponse:

C'est clair pour n = 1, puisqu'il n'y a qu'un seul terme, 1/2. Supposons que

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Nous voulons démontrer que

$$\{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)}\} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

En partant de la gauche, on remplace la quantité entre les accolades par $\frac{k}{k+1}$ (par l'hypothèse d'induction), puis on fait l'algèbre:

$$\frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

donnant l'expression désirée.

Exercice 3

Supposons que P(n) soit une fonction propositionnelle. Déterminez pour quels entiers non négatifs n la proposition P(n) doit être vraie si:

a) P(0) est vraie. Pour tous les entiers non négatifs n, si P(n) est vraie, alors P(n+2) est vraie.

Réponse:

Ces conditions nous disent que P(n) est vraie pour les valeurs paires de n, à savoir 0, 2, 4, 6, 8, ... De plus, il n'y a aucun moyen d'être sûr que P(n) est vraie pour les autres valeurs de n.

b) P(0) est vraie. Pour tous les entiers non négatifs n, si P(n) est vraie, alors P(n+3) est vraie.

Réponse:

Ces conditions nous disent que P(n) est vraie pour les valeurs de n qui sont des multiples de 3, à savoir 0, 3, 6, 9, 12, ... De plus, il n'y a pas manière d'être sûr que P(n) est vraie pour les autres valeurs de n.

c) P(0) et P(1) sont vraies. Pour tout entier non négatif n, si P(n) et P(n+1) sont vraies, alors P(n+2) est vraie.

Réponse:

Ces conditions suffisent à prouver par induction que P(n) est vraie pour tout entier non négatif n.

d) P(0) est vraie. Pour tous les entiers non négatifs n, si P(n) est vraie, alors P(n+2) et P(n+3) sont vraies.

Réponse:

Nous savons immédiatement que $P(0)$, $P(2)$ et $P(3)$ sont vraies, et il n'y a aucun moyen d'être sûr que $P(1)$ est vraie. Une fois que nous avons $P(2)$ et $P(3)$, le pas inductif $P(n) \rightarrow P(n + 2)$ nous donne la vérité de $P(n)$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 4

Proposition

Tout nombre naturel $n \geq 11$ peut être écrit de la forme $n = 2a + 5b$ où $a > 0$ et $b > 0$ sont des nombres naturels.

a) Écrire des exemples est souvent le meilleur moyen de découvrir une preuve. Trouvez d'abord les solutions pour n = 11, 12, 13, 14, 15 et 16.

Réponse:

11 = 2 x 3 + 5 x 1
12 = 2 x 1 + 5 x 2
13 = 2 x 4 + 5 x 1
14 = 2 x 2 + 5 x 2
15 = 2 x 5 + 5 x 1
16 = 2 x 3 + 5 x 2

b) Est-ce que vous remarquez quelque chose? Est-ce que vous voyez ce dessiner un patron en particulier entre les nombre 11, 13 et 15 et ensuite entre les nombres 12, 14 et 16? Démontrez maintenant la proposition à l'aide d'une preuve en utilisant la technique de l'induction forte.

Réponse:

Condition de base

Dans l'étape d'induction, nous aurons besoin de deux conditions de base, nous montrons donc ici deux conditions, n = 11 et n = 12. Les deux peuvent être écrits :

11 = 2 x 3 + 5 x 1
12 = 2 x 1 + 5 x 2

Étape inductive

Démontrons que si $k = 2a_0 + 5b_0$ possède une solution avec des nombres naturels alors $k + 2 = 2a_2 + 5b_2$ possède également une solution en nombres naturels lorsque $k > 12$.

Si on ajoute 2 à $k = 2a_0 + 5b_0$ nous obtenons:

$k + 2 = 2(a_0 + 1) + 5b_0$

Remarquons que $a_0 + 1$ et b_0 sont des nombres naturels.

Alors, la proposition est démontrée par l'induction forte.

Exercice 5

a) Donnez un algorithme récursif pour trouver la somme des n premiers entiers positifs ($1 + 2 + \cdots + n$).

Réponse:

fonction somme_de_1_jusqu'à(n: entier positif)
si n = 1 **retourner** 1
sinon retourner somme_de_1_jusqu'à(n - 1) + n

b) Démontrez que votre algorithme récursif peut trouver la somme des n premiers entiers positifs en utilisant une preuve par induction.

Réponse:

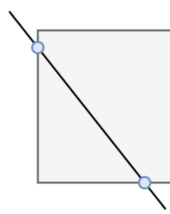
L'hypothèse d'induction est que la somme des n premiers entiers positifs est retournée.

La somme du premier entier positif est 1, et c'est la réponse que l'algorithme récursif donne lorsque n = 1, donc la condition de base est correct. Supposons maintenant que l'algorithme fonctionne correctement pour n = k . Si n = k + 1 , alors l'instruction **sinon** de l'algorithme est exécutée et k + 1 est ajouté à la somme (supposée correcte) des k premiers entiers positifs. Ainsi l'algorithme trouve correctement la somme des k + 1 premiers entiers positifs.

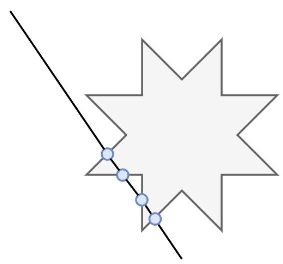
Exercice 6

Proposition 1
Un polygone convexe possède au maximum deux points d'intersection avec toute droite non confondue avec l'un des côtés du polygone.

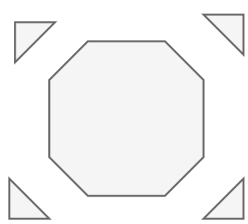
Proposition 2
Une droite qui entre par un côté d'un triangle doit nécessairement sortir par un des deux autres côtés ou sinon par le sommet opposé.



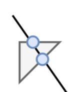
Polygone convexe



Polygone non convexe



Découpe des coins



Intersection entre un triangle et une droite

a) Si vous découpez un coin d'un polygone convexe de tel sorte que la découpe rejetée soit un triangle, est-ce que le nouveau polygone sera toujours convexe? Utilisez les propositions 1 et 2 afin de faire la démonstration de votre réponse.

Réponse:

Lorsqu'un coin est découpé, deux portions de côtés du polygone de départ sont remplacés par un nouveau côté. Si ce nouveau côté a une intersection avec une droite, alors selon la proposition 2, cette droite traversait déjà le polygone de départ. Ainsi découper les coins d'un polygone de tel sorte à ce que les découpes soient des triangles n'augmentent pas le nombre d'intersection du polygone avec une droite.

b) Si vous découpez tous les coins d'un polygone convexe une première fois et que vous répétez le processus n fois, alors est-ce que le résultat sera toujours un polygone convexe? Accompagnez votre réponse d'une preuve par induction.

Réponse:

Le polygone de départ est convexe. Nous avons fait la preuve que l'opération de découper les coins préserve la convexité du polygone. Si nous répétons l'opération n fois, par induction la convexité sera préservée.