POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 2 : LOGIQUE DES PRÉDICATS

A2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1

Considérons que l'univers du discours est l'ensemble des polynômes à coefficients réels, ainsi que l'ensemble des nombres réels. Soit les prédicats suivants et leur signification :

Prédicat	Signification
$PolynômeDegré(x, n)$	x est un polynôme de degré n
$Racine(x, a)$	a est une racine de x (C'est-à-dire, $x(a) = 0$)
$Irréductible(x)$	x est un polynôme irréductible sur les réels
$Divisible(x, y)$	x est divisible par y (C'est-à-dire, il existe un polynôme z tel que $x = zy$)
$Egal(x, y)$	x est égal à y

Exprimez les propositions suivantes de la manière la plus concise possible en utilisant seulement les prédicats présentés ci-dessus, mais les combinant si nécessaire avec des opérateurs logiques et/ou en les quantifiant et/ou en donnant des valeurs aux sujets. On ne vous demande pas de statuer sur la valeur de vérité des énoncés.

a) $X^2 - 4$ est un polynôme de degré 2.

Solution :

$PolynômeDegré(X^2 - 4, 2)$

b) $X^3 - 8$ a 2 comme racine.

Solution :

$Racine(X^3 - 8, 2)$

c) Il existe un polynôme irréductible de degré 3.

Solution :

$\exists x[PolynômeDegré(x, 3) \wedge Irréductible(x)]$

d) Tout polynôme irréductible de degré 4 est divisible par $X^2 + 1$.

Solution :

$\forall y\big[\big(PolynômeDegré(y, 4) \wedge Irréductible(y)\big) \rightarrow Divisible(y, X^2 + 1)\big]$

e) Aucun polynôme de degré 2 n'est irréductible sur les réels.

Solution :

$\forall x[PolynômeDegré(x, 2) \rightarrow \neg Irréductible(x)]$

f) Il existe un polynôme de degré 3 qui est divisible par $X-1$ et $X+1$, mais pas par X^2-1.

Solution :

$\exists y[PolynômeDegré(y,3) \wedge Divisible(y,X-1) \wedge Divisible(y,X+1) \wedge \neg Divisible(y,X^2-1)]$

g) Pour tout polynôme y, il existe au moins un polynôme x tel que x soit divisible par y.

Solution :

$\forall y \exists x \ Divisible(x,y)$

h) Deux polynômes distincts n'ont pas forcément des racines différentes.

Solution :

$\forall x \forall y \left[\neg Egal(x,y) \rightarrow \forall a\left[\neg Racine(x,a) \vee \neg Racine(y,a) \vee \left(Racine(x,a) \wedge Racine(y,a)\right)\right]\right]$

Exercice 2

Soit $\mathcal{U}$ l'univers des objets et $\mathcal{V}$ l'univers des véhicules et soit les fonctions propositionnelles suivantes :

- $Colis(x)$: x est un colis
- $Fragile(x)$: x est fragile
- $Camion(y)$: y est un camion
- $Transporter(x,y)$: x est transporté par y

Traduisez en langage courant, en utilisant les fonctions propositionnelles ci-dessus, chacun des énoncés de logique des prédicats suivants.

a) $\forall x \in \mathcal{U}\left[Colis(x) \wedge Fragile(x) \rightarrow \exists y \in \mathcal{V}\ [Camion(y) \wedge Transporter(x,y)]\right]$

Solution :

Plusieurs formulations possibles :

- Tous les colis fragiles sont transportés par au moins un camion.
- Tous les colis fragiles sont transportés par un camion.
- Tous les colis fragiles sont transportés par camion.
- Si un colis est fragile, alors il est transporté par au moins un camion.
- Si un colis est fragile, alors il est transporté par un camion.
- Si un colis est fragile, alors il est transporté par camion.

b) $\exists x \in \mathcal{U}, \exists y \in \mathcal{V}\ [Colis(x) \land Camion(y) \land \neg Transporter(x,y)]$

Solution :

Plusieurs formulations possibles :

- Il y a un colis qui n'est pas transporté par un camion donné.
- Il y a un colis qui n'est pas transporté par un certain camion.
- Il existe un colis et un camion tels que le colis n'est pas transporté par le camion.

c) $\forall y \in \mathcal{V}\ \big[Camion(y) \rightarrow \forall x \in \mathcal{U}\ [Colis(x) \land Transporter(x,y) \rightarrow Fragile(x)]\big]$

Solution :

Plusieurs formulations possibles :

- Tous les colis transportés par un camion sont fragiles.
- Si un camion transporte un colis, alors le colis est fragile.

d) $\neg(\forall x \in \mathcal{U}\ [Colis(x) \rightarrow Fragile(x)])$

Solution :

Plusieurs formulations possibles :

- Il y a au moins un colis qui n'est pas fragile.
- Il existe un colis qui n'est pas fragile.
- Certains colis ne sont pas fragiles.

Exercice 3

On considère l'univers des abeilles en Nouvelle-Zélande. Énoncez en langage courant **la négation** des phrases suivantes. Vous n'avez pas besoin de donner la traduction en logique des prédicats.

a) Certaines abeilles de Nouvelle-Zélande produisent du miel de Manuka.

Solution :

Plusieurs formulations possibles :

- Toutes les abeilles en Nouvelle-Zélande ne produisent pas de miel de Manuka.
- Les abeilles en Nouvelle-Zélande ne produisent pas de miel de Manuka.
- Aucune abeille en Nouvelle-Zélande ne produit de miel de Manuka.

b) Dans certaines régions de Nouvelle-Zélande, les abeilles sont utilisées pour la pollinisation des kiwis.

Solution :

Plusieurs formulations possibles :

- Dans toutes les régions de la Nouvelle-Zélande, les abeilles ne sont pas utilisées pour la pollinisation des kiwis.
- Dans aucune région de Nouvelle-Zélande, les abeilles ne sont utilisées pour la pollinisation des kiwis.
- Il n'y a aucune région en Nouvelle-Zélande où les abeilles sont utilisées pour la pollinisation des kiwis.

c) Les abeilles de Nouvelle-Zélande peuvent être affectées par la varroase.

Solution :

Plusieurs formulations possibles :
- Certaines abeilles de Nouvelle-Zélande ne peuvent pas être affectées par la varroase.
- Il existe des abeilles en Nouvelle-Zélande qui ne peuvent pas être affectées par la varroase.
- Il y a au moins une abeille en Nouvelle-Zélande qui ne peuvent pas être affectées par la varroase.

d) Dans aucune zone de Nouvelle-Zélande, les abeilles ne sont menacées par des espèces invasives.

Solution :

Plusieurs formulations possibles :
- Dans certaines zones de Nouvelle-Zélande, les abeilles sont menacées par des espèces invasives.
- Il existe au moins une zone en Nouvelle-Zélande où les abeilles sont menacées par des espèces invasives.
- Il y a des zones de Nouvelle-Zélande où les abeilles sont menacées par d'espèces invasives.

e) Il n'y a aucune espèce d'abeille en Nouvelle-Zélande qui soit endémique ou il y a plusieurs espèces d'abeille en Nouvelle-Zélande qui soit endémique.

Solution :

Plusieurs formulations possibles :
- Il existe une espèce d'abeille unique en Nouvelle-Zélande qui est endémique.
- Il existe une et une seule espèce d'abeille en Nouvelle-Zélande qui est endémique.

Exercice 4

Soit les fonctions propositionnelles suivantes pour l'univers des nombres réels :

- $P(x) : |x| > 3$
- $Q(x) : x > 3$
- $R(x) : x^2 + 1 = 3x - 1$
- $S(x, y) : x + y^2 < 0$

a) Déterminez la valeur de vérité de $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$. Justifiez votre réponse.

Solution :

$\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$ est fausse, car il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x)$ est vraie et $Q(x)$ est fausse.
Par exemple, $P(-4) : |-4| > 3$ est vraie, car $|-4| = -(-4) = 4$ et $4 > 3$.
Cependant, $Q(-4) : -4 > 3$ est fausse, car $-4 < 3$.
Ainsi, nous avons trouvé un contre-exemple où la prémisse est vraie et la conclusion est fausse.
D'où, la proposition $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$ est fausse.

b) Donnez **la réciproque de a)** et déterminez sa valeur de vérité. Justifiez votre réponse.

Solution :

La réciproque de **a)** est $\forall x[Q(x) \rightarrow P(x)]$, ce qui est vrai.
En effet, $(x > 3) \rightarrow (|x| > 3)$, car $|x| = x$ lorsque $x > 3$.
Lorsque $Q(x) : x > 3$ est vraie, alors $P(x) : |x| > 3$ est vraie.
De plus, si $Q(x)$ est fausse $(x \leq 3)$, l'implication est systématiquement vraie.
L'implication $Q(x) \rightarrow P(x)$ n'est donc jamais fausse, peu importe la valeur de x.

c) Donnez **l'inverse de b)** et déterminez sa valeur de vérité. Justifiez votre réponse.

Solution :

L'inverse de **b)** est $\forall x[\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x)]$, ce qui est faux, car il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $\neg Q(x) : x \leq 3$ est vraie et $\neg P(x) : |x| \leq 3$ est fausse.
Par exemple, si $x = -4$, alors $\neg Q(x) : x \leq 3$ est vraie $(-4 \leq 3)$, mais $\neg P(x) : |x| \leq 3$ est fausse $(|-4| = 4$ et $4 > 3)$.

d) Déterminez la valeur de vérité de $\forall x[R(x) \rightarrow \neg Q(x)]$. Montrez toutes les étapes de votre réponse.

Solution :

$$
\begin{aligned}
\forall x[R(x) \rightarrow \neg Q(x)] \quad & \equiv \forall x[(x^2 + 1 = 3x - 1) \rightarrow (x \leq 3)] \\
& \equiv \forall x[(x^2 - 3x + 2 = 0) \rightarrow (x \leq 3)] \\
& \equiv \forall x\big[\big((x-1)(x-2) = 0\big) \rightarrow (x \leq 3)\big] \\
& \equiv \forall x\big[\big((x = 1) \vee (x = 2)\big) \rightarrow (x \leq 3)\big] \\
& \equiv VRAI
\end{aligned}
$$

e) Déterminez la valeur de vérité de $\forall y \exists x\, S(x, y)$. Justifiez votre réponse.

Solution :

$\forall y \exists x\, S(x, y)$ est vraie, car il suffit de prendre n'importe quel x tel que $x < -y^2$.

Exercice 5

Les expressions suivantes sont-elles équivalentes ? Justifiez votre réponse.

- $\exists x\, P(x) \land \exists x\, Q(x)$
- $\exists x[P(x) \land Q(x)]$

Solution :

Si P est le prédicat « être un nombre pair » et Q le prédicat « être un nombre impair », alors la première expression nous dit qu'il existe un nombre pair et qu'il existe un nombre impair, mais pas nécessairement le même nombre.

Cependant, la deuxième expression nous dit qu'il existe un nombre qui est à la fois pair et impair, ce qui est impossible.

Un univers qui contient des nombres pairs et des nombres impairs, mais aucun nombre qui est à la fois pair et impair serait un contre-exemple.

Exercice 6

Soit l'univers des équipes sportives et les fonctions propositionnelles suivantes :

- $J(x,y)$: x a joué un match contre y
- $G(x,y)$: x a gagné contre y

On considère les formules suivantes :

(I.) $\forall x \exists y \left[\left(J(x,y) \land \forall z\big(J(y,z) \to G(y,z)\big)\right) \to \exists u\, G(x,u)\right]$

(II.) $\forall x \left[\exists y \left(J(x,y) \land \forall z\big(J(y,z) \to G(y,z)\big)\right) \to \exists u\, G(x,u)\right]$

(III.) $\exists x \left[\forall y \left(J(x,y) \land \forall z\big(J(y,z) \to G(y,z)\big)\right) \to \exists u\, G(x,u)\right]$

(IV.) $\forall x \forall y \left[\left(J(x,y) \land \forall z\big(J(y,z) \to G(y,z)\big)\right) \to \exists u\, G(x,u)\right]$

(V.) $\forall x \left[\forall y \left(J(x,y) \land \forall z\big(J(y,z) \to G(y,z)\big)\right) \to \exists u\, G(x,u)\right]$

a) Parmi les formules ci-dessus, lesquelles expriment la phrase : « **Tous ceux qui ont joué contre une équipe qui a gagné tous ses matchs, ont gagné au moins un match** » ?

Solution :

Les formules (I.) et (II.) expriment la phrase énoncée.

b) Parmi les formules ci-dessus, lesquelles sont équivalentes entre elles ?

Solution :

- $(\mathrm{I.})$ et $(\mathrm{II.})$ sont équivalentes.
- $(\mathrm{IV.})$ et $(\mathrm{V.})$ sont équivalentes.

c) Donnez la négation de chacune des formules $(\mathrm{I.})$ et $(\mathrm{IV.})$.

Solution :

Formule initiale	Négation de la formule
(I). $\forall x \exists y \left[\left(J(x,y) \land \forall z\left(J(y,z) \rightarrow G(y,z)\right)\right) \rightarrow \exists u\, G(x,u)\right]$	$\exists x \forall y \left[\left(J(x,y) \land \forall z\left(J(y,z) \rightarrow G(y,z)\right)\right) \land \forall u\, \neg G(x,u)\right]$
(IV). $\forall x \forall y \left[\left(J(x,y) \land \forall z\left(J(y,z) \rightarrow G(y,z)\right)\right) \rightarrow \exists u\, G(x,u)\right]$	$\exists x \exists y \left[\left(J(x,y) \land \forall z\left(J(y,z) \rightarrow G(y,z)\right)\right) \land \forall u\, \neg G(x,u)\right]$