POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810
STRUCTURES DISCRÈTES

TD 5 : **RELATIONS**
H2022

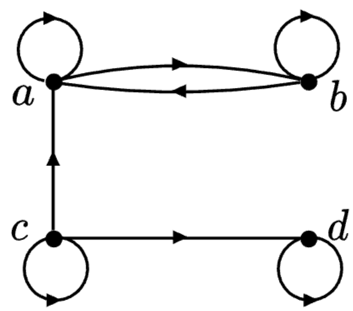
SOLUTIONNAIRE

Directives pour la remise :

- La remise est individuelle, mais le travail en équipe est encouragé.
- La remise est individuelle se fait à la fin de la séance de TD.
- Répondez directement sur ce document Word (docx). Dans l'intérêt de l'équité pour tous les étudiants, vous devez modifier le fichier Word. Modifiez le fichier **EXCLUT** le fait d'intégrer des scans de rédaction manuscrite ou d'y écrire avec un stylet.
- Lorsque vous avez terminé, générez un PDF avec le nom sous le format :
  Matricule-TDNuméro.pdf (exemple : 1234567-TD1.pdf).
- Téléversez votre fichier PDF dans la boîte de remise située dans la Zone TDs de la page Moodle du cours.
- Choisissez la boîte de remise qui correspond à votre section de TD.
- **Aucun retard et aucune remise par courriel ne seront acceptés.**
- **Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.**

Exercice 1. Soit ***A*** = {a, b, c, d}. Déterminez si les relations ***R*** définies sur ***A*** et représentées par les graphes ci-dessous sont réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives.

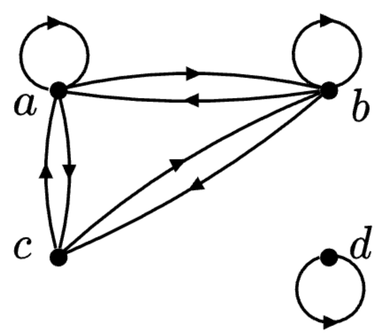
a)



Réponse :

- **Réflexivité** : La relation illustrée est réflexive puisqu'il y a une boucle à chaque sommet. Formellement, **∀ x ∈ *A*, (x, x) ∈ *R*** ou encore **∀ x ∈ *A*, x *R* x**.
- **Symétrie** : La relation n'est pas symétrique, puisque, par exemple, l'arête (c, a) est présente mais pas l'arête (a, c). C'est à dire, **(c, a) ∈ *R* ∧ (c, a) ∉ *R***. Formellement **∃ x, y ∈ *A*, ((x, y) ∈ *R*) ∧ ((y, x) ∉ *R*)**.
- **Antisymétrie** : Elle n'est pas antisymétrique, puisque les deux arêtes (a, b) et (b, a) sont présentes et **a ≠ b**. Formellement **∃ x, y ∈ *A*, ((x, y) ∈ *R*) ∧ ((y, x) ∈ *R*) ∧ (x ≠ y)**.
- **Transitivité** : Elle n'est pas transitive, puisque les deux arêtes (c, a), (a, b) sont présentes, mais l'arête (c, b) n'est pas présente. Formellement **∃ x, y, z ∈ *A*, ((x, y) ∈ *R*) ∧ ((y, z) ∈ *R*) ∧ (x, z) ∉ *R***.

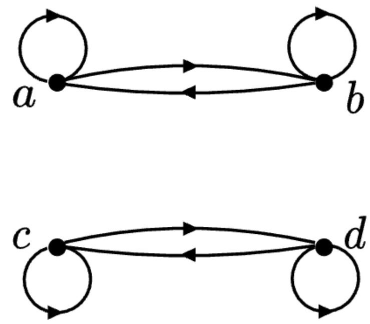
b)



Réponse :

- **Réflexivité** : La relation illustrée n'est pas réflexive puisqu'il existe un sommet c qui n'a pas de boucle. Formellement, **∃ x ∈ *A*, (x, x) ∉ *R***.
- **Symétrie** : La relation est symétrique, puisque, **∀ (x, y) ∈ *R*, (y, x) ∈ *R***.
- **Antisymétrie** : Elle n'est pas antisymétrique, puisque les deux arêtes (a, b) et (b, a) sont présentes et **a ≠ b**. Formellement **∃ x, y ∈ *A*, ((x, y) ∈ *R*) ∧ ((y, x) ∈ *R*) ∧ (x ≠ y)**.
- **Transitivité** : Elle n'est pas transitive, puisque les deux arêtes (c, a), (a, c) sont présentes, mais l'arête (c, c) n'est pas présente. Formellement **∃ x, y, z ∈ *A*, ((x, y) ∈ *R*) ∧ ((y, z) ∈ *R*) ∧ (x, z) ∉ *R***.

c)



Réponse :

- **Réflexivité** : La relation illustrée est réflexive puisqu'il y a une boucle à chaque sommet. Formellement, **∀ x ∈ *A*, (x, x) ∈ *R*** ou encore **∀ x ∈ *A*, x *R* x**.
- **Symétrie** : La relation est symétrique, puisque **∀ (x, y) ∈ *R*, (y, x) ∈ *R***.
- **Antisymétrie** : Elle n'est pas antisymétrique, puisque les deux arêtes (a, b) et (b, a) sont présentes et **a ≠ b**. Formellement **∃ x, y ∈ *A*, ((x, y) ∈ *R*) ∧ ((y, x) ∈ *R*) ∧ (x ≠ y)**.
- **Transitivité** : Elle est transitive, puisque **∀ ((x, y) ∈ *R*) ∧ ((y, z) ∈ *R*), (x, z) ∈ *R***.

Exercice 2. Soit A = {3, 6, 9, 12, 15, 18} et une relation ***R*** sur cet ensemble tel que a ***R*** b si et seulement si a est un multiple de b.

a) Donnez l'ensemble des couples de cette relation ***R***.

Réponse :

R = {(3, 3), (6, 6), (6, 3), (9, 9), (9, 3), (12, 12), (12, 6), (12, 3), (15, 15), (15,3), (18, 18), (18, 9), (18,6), (18, 3)}

b) Dites si ***R*** est une relation d'équivalence, un ordre partiel.

Réponse :

Pour répondre à la question, nous allons dans un premier temps vérifier les 4 propriétés réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité. La réflexivité, symétrie et la transitivité compte pour une relation d'équivalence alors réflexivité, l'antisymétrie et la transitivité compte pour la relation d'ordre partiel. L'absence d'une des propriétés est suffisante pour conclure en ce qui concerne l'équivalence ou l'ordre partiel.

- **Réflexivité** : La relation est réflexive puisque **∀ x ∈ *A*, (x, x) ∈ *R*** ou encore **∀ x ∈ *A*, x *R* x**.
- **Symétrie** : La relation n'est pas symétrique, puisque **((6, 3) ∈ *R*) ∧ (3, 6) ∉ *R*.** Ainsi,
  ∃ (x, y) ∈ *R* ∧ (y, x) ∉ *R*.
- **Équivalence** : La relation n'étant pas symétrique, elle ne peut être une relation d'équivalence.

- **Antisymétrie** : Elle est antisymétrique, puisque **(x≠ y) → ((x, y) ∉ *R*) ∨ ((y, x) ∉ *R*)**.
- **Transitivité** : Elle est transitive, puisque **(((x, y) ∈ *R*) ∧ ((y, z) ∈ *R*)) → (x, z) ∈ *R***.
- **Ordre partiel** : La relation est un ordre partiel car elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

c) Dites si ***R*** vérifie la propriété suivante : **∀ x, y ∈ *A*, (((x, y) ∈ *R*) ∨ ((y, x) ∈ *R*)).**

(((6, 9) ∉ R) ∧ ((9, 6) ∉ R)). R ne vérifie donc pas : **∀ x, y ∈ A, (((x, y) ∈ R) ∨ ((y, x) ∈ R)).**

<u>**Note**</u> : Une telle propriété fait d'une relation qui est déjà un ordre partiel, ce qu'on appelle un ordre total.

Grâce à la propriété **∀ x, y ∈ *A*, (((x, y) ∈ *R*) ∨ ((y, x) ∈ *R*))**, on dit que les éléments de A soit deux à deux comparables.
Dans l'exercice, 6 et 9 ne sont pas comparables. **La relation n'est pas un ordre total.**

d) Donnez la fermeture symétrique de la relation ***R***.

Réponse :

Soit ***S*** la fermeture symétrique de ***R.***

R = {(3, 3), (6, 6), (6, 3), (9, 9), (9, 3), (12, 12), (12, 6), (12, 3), (15, 15), (15,3), (18, 18), (18, 9), (18,6), (18, 3)}

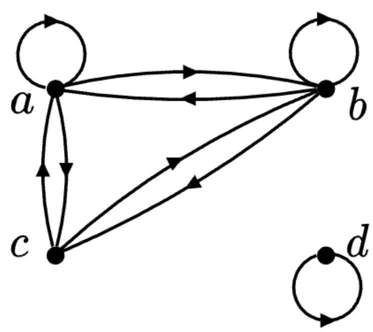
Soit **Δ** = {(y, x), ((x, y) ∈ R) ∧ ((y, x) ∉ R)}

Δ = {(3, 6), (3, 9), (3, 12), (3, 15), (3, 18), (6, 12), (6, 18), (9, 18)}

***S= R* ∪ Δ**

S= {(3, 3), (6, 6), (6, 3), (9, 9), (9, 3), (12, 12), (12, 6), (12, 3), (15, 15), (15,3), (18, 18), (18, 9), (18,6), (18, 3), (3, 6), (3, 9), (3, 12), (3, 15), (3, 18), (6, 12), (6, 18), (9, 18)}

Exercice 3. Soit ***A*** = {a, b, c, d}, la relation ***R*** définie sur ***A*** et représentée par les graphes ci-dessous.



a) Donnez la fermeture transitive de cette relation.

Réponse :

R = {(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b), (d, d)}

Soit ***S*** la fermeture transitive de ***R***.

S = {(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b), (d, d), **(c, c)**}

b) **Question facultative** : Retrouvez le résultat précédent en calculant la fermeture transitive à l'aide des matrices puissance de la relation. Vous pouvez utiliser les notions vues en cours et les notes de cours (pages 12 à 17), ainsi que la documentation complémentaire sur le produit booléen, disponible sur Moodle.

Réponse :

Soit ***M*** la matrice de R. On a :

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{M}^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{M}^{[3]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de la fermeture transitive est N = M ∨ $M^{[2]}$ ∨ $M^{[3]}$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 4. Soit la relation ***R*** définie dans l'ensemble des réels par :

$$x\, R\, y \leftrightarrow (x^3 - y^3 = 3(x - y))$$

On admet que ***R*** est une relation d'équivalence. Trouvez l'ensemble des éléments qui sont en relation avec 2.

Réponse :

Il s'agit de résoudre x R 2. Ce qui donne l'équation $x^3 - y^3 - 3(x - y) = 0$
On sait que $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
On a donc $(x - y)(x^2 + xy + y^2) - 3(x - y) = 0$ *ou encore* $(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 3) = 0$
En remplaçant y par 2, on obtient $(x-2)(x^2 + 2x + 4 - 3) = 0$
L'équation devient $(x-2)(x^2 + 2x + 1) = 0$, soit $(x-2)(x + 1)^2 = 0$
Les solutions sont x= 2 ou x = -1.
L'ensemble des éléments qui sont en relation avec 2 est donc **{-1, 2}.**

Note : L'ensemble des éléments qui sont en relation avec un certain élément constitue ce qu'on appelle sa classe d'équivalence. En considérant l'exercice, la classe d'équivalence de 2 est {-1, 2}.
Il faut également noter qu'un élément appartient à sa propre classe d'équivalence. La présence de 2 dans {-1, 2} le témoigne si bien.

Exercice 5. Soit ***R*** une relation sur E tel que R est réflexive et transitive. On définit la relation ***S*** par :

x ***S*** y ↔ ((x ***R*** y) ∧ (y ***R*** x))

La relation ***S*** est-elle une relation d'équivalence ?

Réponse

- **Réflexivité** :

Soit x ∈ E.
R étant réflexive, x R x. On peut donc écrire ((x ***R*** x) ∧ (x ***R*** x)) et en déduire que x ***S*** x. La relation ***S*** est donc réflexive.

- **Symétrie** :

Soit x, y ∈ E tel que (x ***S*** y) Montrons que (y ***S*** x).
x ***S*** y ↔ ((x ***R*** y) ∧ (y ***R*** x))
x ***S*** y ↔ ((y ***R*** x) ∧ (x ***R*** y))
On a ((y ***R*** x) ∧ (x ***R*** y)), alors, par définition, (y ***S*** x). La relation est donc symétrique.

- **Transitivité :** Soit x, y, z ∈ E tel que ((x ***S*** y) ∧ (y ***S*** z)) Montrons que (x ***S*** z).

x ***S*** y ↔ ((x ***R*** y) ∧ (y ***R*** x))
y ***S*** z ↔ ((y ***R*** z) ∧ (z ***R*** y))
((x S y) ∧ (y S z)) ↔ ((x ***R*** y) ∧ (y ***R*** x)) ∧ ((y ***R*** z) ∧ (z ***R*** y))

$((x\ S\ y) \wedge (y\ S\ z)) \leftrightarrow ((x\ \boldsymbol{R}\ y) \wedge (y\ \boldsymbol{R}\ z) \wedge (z\ \boldsymbol{R}\ y) \wedge (y\ \boldsymbol{R}\ x))$
Puisque R est transitive et qu'on a $(x\ \boldsymbol{R}\ y) \wedge (y\ \boldsymbol{R}\ z)$, alors $(x\ \boldsymbol{R}\ z)$. Aussi $(z\ \boldsymbol{R}\ y) \wedge (y\ \boldsymbol{R}\ x)$, donc on a $(z\ \boldsymbol{R}\ x)$
On a obtenu $(x\ \boldsymbol{R}\ z)$ et $(z\ \boldsymbol{R}\ x)$, ce qui permet d'établir, par définition que $(x\ \boldsymbol{S}\ z)$

La relation ***S*** étant réflexive, symétrique et transitive est une relation d'équivalence.