POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810
STRUCTURES DISCRÈTES

CONTRÔLE PÉRIODIQUE 1

A2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 (**3.5 points)**
En vous basant sur vos connaissances, quelles sont les valeurs de vérité des propositions suivantes. Vous n'avez pas besoin de justifier votre réponse.

a. (**0.75 point)** Il n'est pas vrai qu'un entier impair ne puisse pas être divisible par 6.

Réponse : FAUX

Explication : La proposition donnée par l'énoncé est la négation de ''un entier impair ne peut pas être divisible par 6''. Cette dernière a pour valeur de vérité VRAI car tout entier divisible par 6 est forcément divisible par 2 et par 3. Le fait d'être divisible par 2 témoigne de la parité paire de l'entier. Il ne peut donc être impair et être divisible par 6.

b. (**1 point)** Si 6 est plus petit que 7 alors 7 est plus petit que 6.

Réponse : FAUX

Explication : La proposition ''6 est plus petit que 7'' a pour valeur de vérité VRAI. La proposition ''7 est plus petit que 6'' a pour valeur de vérité FAUX. La proposition de l'énoncé est donc une implication dont la prémisse est vraie et la conséquence fausse. D'où une implication fausse.

c. (**0.75 point)** 84 est divisible par 7 implique que 121 est divisible par 11.

Réponse : VRAI

Explication : La proposition '' 84 est divisible par 7'' a pour valeur de vérité VRAI. La proposition '' 121 est divisible par 11'' a pour valeur de vérité VRAI. La proposition de l'énoncé est donc une implication dont la prémisse est vraie et la conséquence vraie. D'où une implication vraie.

d. (**1 point)** S'il pleut en ce moment, alors il pleut en ce moment.

Réponse : VRAI

Explication :

- Si la proposition ''il pleut en ce moment'' a pour valeur de vérité VRAI. La proposition de l'énoncé est donc une implication dont la prémisse est vraie et la conséquence vraie. D'où une implication vraie.
- Si la proposition ''il pleut en ce moment'' a pour valeur de vérité FAUX. La proposition de l'énoncé est donc une implication dont la prémisse est fausse et la conséquence vraie. D'où une implication vraie.

Exercice 2 (**3.5 points)**
Soit A l'univers des arbres de Aurel et les définitions suivantes :

- C(x) : x est un arbre onéreux
- F(x) : x est un arbre fruitier
- P(x): l'arbre x a été planté l'an passé
- V(x) : l'arbre x est dans le verger
- o : Orme

Traduisez les affirmations suivantes faites par Aurel.

a. (**0.75 point)** J'ai planté tous mes arbres onéreux l'an passé.
Réponse :

- $\forall x \in A, C(x) \rightarrow P(x)$

b. **(0.75 point)** Tous mes arbres fruitiers sont dans mon verger.

Réponse :

- $\forall x \in A, F(x) \rightarrow V(x)$

c. **(1 point)** Aucun des arbres fruitiers n'a été planté l'an passé.

Réponses :

- $\forall x \in A, F(x) \rightarrow \neg P(x)$
- $\forall x \in A, P(x) \rightarrow \neg F(x)$

d. **(1 point)** J'ai un orme, qui est un arbre onéreux, mais pas dans mon verger.

Réponse :

- $\exists o \in A, C(o) \wedge \neg P(o)$

Exercice 3 (**3.5 points)**

Dites quelles règles d'inférences sont utilisées dans les arguments suivants :

a. **(0.5 point)** Pierre est un étudiant et Pierre est un homme. Par conséquent, Pierre est un étudiant.

Réponse : Règle de simplification.

b. **(0.75 point)** Il pleut ou il neige. Cependant, il ne neige pas. Par conséquent, il pleut.

Réponse : Règle du syllogisme disjonctif.

c. **(0.75 point)** Si tout étudiant en informatique programme et que Alice est une étudiante en informatique, on conclut qu'Alice programme.

Réponse : Règle de l'instanciation universelle combinée avec la règle du modus ponens.

Explication

- Règle de l'instanciation universelle : Si Alice est une étudiante en informatique alors elle programme.
- Règle du modus ponens : Si Alice est une étudiante en informatique alors elle programme et Alice est une étudiante en informatique, par conséquent Alice programme.

d. **(0.75 point)** Si Batman attrape le Joker, alors ce dernier est envoyé à l'asile d'Arkham. De plus, tout patient d'Arkham fini par s'évader. Donc, si Batman attrape le Joker, il finira par s'évader.

Réponse : Règle du syllogisme par hypothèse.

e. **(0.75 point)** Tout extraterrestre est né sur une planète autre que la Terre. Or, Elvis est né sur la Terre. Par conséquent, Elvis n'est pas un extraterrestre.

Réponse : Règle du modus tollens.

Exercice 4 (**2 points)**

Montrez que :

$$P(\emptyset) \neq P(\{\emptyset\})$$

Réponse :

$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$P(\emptyset) \neq P(\{\emptyset\})$

Exercice 5 (**4 points)**
Soit A, B et C trois ensembles. On définit les fonctions **f** de **A** vers **B**, **g** de **A** vers **C** et h de **A** vers **B x C** tel que :

$$\forall\ x \in A, h(x) = \big(f(x),\ g(x)\big)$$

Montrez que si f est injective alors h est injective.

Réponse :
Utilisons la technique de la preuve directe. Supposons que f est injective.
Soit a et b deux éléments de A tel que $h(a) = h(b)$ et montrons que a =b.
$h(a) = h(b) \rightarrow (f(a), g(a)) = (f(b), g(b))$
$h(a) = h(b) \rightarrow (f(a) = f(b)) \wedge (g(a) = g(b))$
f étant injective, $f(a) = f(b) \rightarrow a = b$
Donc $h(a) = h(b) \rightarrow a = b$
Il s'en suit que h est injective.
CQFD.
Note : $a = b \rightarrow g(a) = g(b)$

Exercice 6 (**3.5 points)**
Soit a et b deux nombres réels. Démontrez que :

2 x max(a, b) = a + b + |a – b|

Note : max(a, b) désigne le maximum de a et b.

Réponse :
Supposons que a < b, sans perte de généralité.
Si a < b **alors** max(a, b) = b et |a – b| = b - a.
La partie gauche de l'égalité donnée par l'énoncé devient : 2 x max(a, b) = 2b.
La partie droite de l'égalité donnée par l'énoncé devient : a + b + |a – b| = a + b + b – a = 2b.
D'où 2 x max(a, b) = a+ b + |a – b|.

Note : Il est possible d'utiliser une preuve par cas. Les cas a < b et a ≥ b pourraient être considérés.