POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 8 : INDUCTION ET RÉCURSIVITÉ

H2025

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 :

Considérez une fonction propositionnelle $P(n)$. Déterminez pour quels entiers $n \in \mathbb{N}$ la proposition $P(n)$ est nécessairement vraie sous chacune des hypothèses suivantes. Pour chaque cas, précisez explicitement l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles $P(n)$ est forcément vraie.

a) $P(0)$ est vraie. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+3)$ est vraie.

Solution

Ces conditions nous disent que $P(n)$ est vraie pour les valeurs de n qui sont des multiples de 3, à savoir $0, 3, 6, 9, 12, \ldots$. De plus, il n'y a pas manière d'être sûr que $P(n)$ soit vraie pour les autres valeurs de n.

b) $P(1)$ est vraie. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+2)$ est vraie.

Solution

Ces conditions nous disent que $P(n)$ est vraie pour les valeurs impaires de n, à savoir $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$ De plus, il n'y a aucun moyen d'être sûr que $P(n)$ soit vraie pour les autres valeurs de n.

c) $P(0)$ est vraie. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.

Solution

Ces conditions suffisent à prouver par induction que $P(n)$ est vraie pour tout entier non négatif n.

d) $P(0)$ est vraie. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+2)$ et $P(n+3)$ sont vraies.

Solution

Nous savons immédiatement que $P(0)$vraie ce qui implique que $P(2)$ et $\mathrm{P}(3)$ soient vraies, .Il n'y a aucun moyen d'être sûr que $P(1)$ soit vraie. Une fois que nous avons $P(2)$ et $P(3)$, le pas inductif $P(n) \rightarrow P(n+2)$ nous donne la vérité de $P(n)$ pour tout $n \geq 2$. Le cas $P(2)$ montre les entiers pairs et le cas $P(3)$ montre les entiers impairs. $P(n+3)$ est redondant ici. L'ensemble des entiers décrit par l'induction structurelle est $\mathbb{N} - \{1\}$.

Exercice 2 :

a) Montrez par induction que pour $n \geq 1$ l'identité suivante est vraie :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{\mathrm{n}}{2\mathrm{n}+1}$$

Solution

Soit

$$P(n): \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{\mathrm{n}}{2\mathrm{n}+1}$$

Étape de base : Pour $n = 1$, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{(2(1)-1)(2(1)+1)} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\mathrm{n}}{2\mathrm{n}+1} = \frac{(1)}{2(1)+1} = \frac{1}{3}$$

On a donc $P(1)$ vraie.

Étape inductive : Supposons que pour un certain $m \geq 1$, $P(m)$ est vraie i.e.

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{\mathrm{m}}{2\mathrm{m}+1} \qquad \text{(Hypothèse d'induction, H.I.)}$$

On veut arriver à montrer que $P(m+1)$ est vraie i.e.

$$\sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{\mathrm{m}+1}{2(\mathrm{m}+1)+1} = \frac{m+1}{2m+3} \qquad \text{(Objectif)}$$

Nous avons donc :

$$\sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} + \frac{1}{(2(m+1)-1)(2(m+1)+1)}$$

$$= \frac{\mathrm{m}}{2\mathrm{m}+1} + \frac{1}{(2m+1)(2m+3)} \qquad \textbf{(H.I.)}$$

$$= \frac{m(2m+3)+1}{(2m+1)(2m+3)}$$

$$= \frac{2m^2 + 3m + 1}{(2m+1)(2m+3)}$$

$$= \frac{(m+1)(2m+1)}{(2m+1)(2m+3)}$$

$$= \frac{m+1}{2m+3}$$

$$= \frac{\mathrm{m}+1}{2(\mathrm{m}+1)+1}$$

Il s'en suit que $P(m+1)$ est vraie et que $P(m) \rightarrow P(m+1)$ est vraie

Conclusion :

Ainsi, $P(1)$ est vraie et $\forall m \geq 1$, $P(m) \rightarrow P(m+1)$ est vraie. En utilisant l'induction mathématique, nous avons démontré que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{\mathrm{n}}{2\mathrm{n}+1}$$

CQFD

b) Montrez par induction que si $n \geq 1$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2\sqrt{\mathrm{n}} - 1$$

Solution

Soit

$$P(n): \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2\sqrt{\mathrm{n}} - 1$$

Étape de base : Pour $n = 1$, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

$$2\sqrt{1} - 1 = 1$$

Comme $\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2\sqrt{1} - 1$, on a $P(1)$ vraie.

Étape inductive : Supposons que pour un certain $m \geq 1$, $P(m)$ est vraie i.e.

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2\sqrt{\mathrm{m}} - 1 \qquad \text{(Hypothèse d'induction, H.I.)}$$

On veut arriver à montrer que $P(m+1)$ est vraie i.e.

$$\sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2\sqrt{\mathrm{m}+1} - 1 \qquad \text{(Objectif)}$$

Nous avons donc :

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2\sqrt{\mathrm{m}} - 1 \quad \textbf{(H.I.)}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{i}} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{m}+1}} \leq 2\sqrt{\mathrm{m}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{m}+1}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2\sqrt{\mathrm{m}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{m}+1}}$$

Ainsi, il nous faut simplement montrer l'inégalité suivante :

$$2\sqrt{\mathrm{m}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{m}+1}} \leq 2\sqrt{\mathrm{m}+1} - 1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{\mathrm{m}} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{m}+1}} \leq 2\sqrt{\mathrm{m}+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\mathrm{m}+1}} \leq 2\sqrt{\mathrm{m}+1} - 2\sqrt{\mathrm{m}}$$

Nous avons :

$$2\left(\sqrt{\mathrm{m}+1} - \sqrt{\mathrm{m}}\right) \cdot \frac{\sqrt{\mathrm{m}+1} + \sqrt{\mathrm{m}}}{\sqrt{\mathrm{m}+1} + \sqrt{\mathrm{m}}} = \frac{2}{\sqrt{\mathrm{m}+1} + \sqrt{\mathrm{m}}}$$

Or :

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{m}+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{\mathrm{m}+1} + \sqrt{\mathrm{m}}}$$

Donc :

$$\sqrt{\mathrm{m}+1} + \sqrt{\mathrm{m}} \leq 2\sqrt{\mathrm{m}+1}$$

$$\sqrt{\mathrm{m}+1} + \sqrt{\mathrm{m}} \leq \sqrt{\mathrm{m}+1} + \sqrt{\mathrm{m}+1}$$

Nous avons ainsi montré que :

$$2\sqrt{\mathrm{m}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{m}+1}} \leq 2\sqrt{\mathrm{m}+1} - 1$$

Il s'en suit que $P(m+1)$ est vraie et que $P(m) \to P(m+1)$ est vraie

<u>Conclusion :</u>

Ainsi, $P(1)$ est vraie et $\forall m \geq 1$, $P(m) \to P(m+1)$ est vraie. En utilisant l'induction mathématique, nous avons démontré que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2\sqrt{\mathrm{n}} - 1$$

CQFD

Exercice 3 :

a) Soit la matrice $\boldsymbol{A}$ suivante :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En utilisant l'induction mathématique, montrez que pour tout entier positif non nul n,

$$\boldsymbol{A^n} = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution

Étape de base : Pour $n = 1$, nous avons :

$$\boldsymbol{A^1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'égalité est donc établie pour $n = 1$.

Étape inductive : Supposons que pour un certain $m \geq 1$, $l'égalité$ est vraie i.e.

$$\boldsymbol{A^m} = \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (Hypothèse d'induction, H.I.)}$$

On veut arriver à montrer que :

$$\boldsymbol{A^{m+1}} = \begin{bmatrix} 1 & m+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(Objectif)}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A^{m+1}} &= \boldsymbol{A^m A} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(par H.I.)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + m \cdot 0 & 1 \cdot 1 + m \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & m+1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donc, l'égalité est établie pour $m + 1$

Conclusion :

Ainsi, l'égalité est vraie pour $m = 1$. De plus, lorsque l'égalité est établie pour un m ≥ 1 quelconque, elle l'est également pour (m + 1). Donc on a pu démontrer, en utilisant l'induction mathématique, que pour tout entier positif non nul n

$$\boldsymbol{A^n} = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

CQFD

b) Montrez par induction que pour $n \geq 1$:

$$11^{n+1} + 12^{2n-1}$$

est divisible par 133.

Solution

Soit

$$P(n): 11^{n+1} + 12^{2n-1} \text{ est divisible par 133}$$

Étape de base : Pour $n = 1$, nous avons :

$$11^{1+1} + 12^{2(1)-1} = 11^2 + 12 = 133$$

Comme 133 est divisible par 133, nous avons $P(1)$ vraie.

Étape inductive : Supposons que pour un certain $m \geq 1$, $P(m)$ est vraie i.e.

$$11^{m+1} + 12^{2m-1} \text{ est divisible par 133} \qquad \text{(Hypothèse d'induction, H.I.)}$$

On veut arriver à montrer que $P(m+1)$ est vraie i.e

$$11^{(m+1)+1} + 12^{2(m+1)-1} \text{ est divisible par 133} \qquad \text{(Objectif)}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
11^{(m+1)+1} + 12^{2(m+1)-1} &= 11^{m+2} + 12^{2m+1} \\
&= 11 \cdot 11^{m+1} + 12^2 \cdot 12^{2m-1} \\
&= 11 \cdot 11^{m+1} + 144 \cdot 12^{2m-1} \\
&= 11 \cdot 11^{m+1} + 144 \cdot 12^{2m-1} - 11 \cdot 12^{2m-1} + 11 \cdot 12^{2m-1} \\
&= 11 \cdot 11^{m+1} + 11 \cdot 12^{2m-1} + 133 \cdot 12^{2m-1} \\
&= 11(11^{m+1} + 12^{2m-1}) + 133 \cdot 12^{2m-1} \\
&= 11(133k) + 133 \cdot 12^{2m-1} \quad k \in N \qquad \textbf{(H.I.)} \\
&= 133(11k + 12^{2m-1})
\end{aligned}$$

Il s'en suit que $P(m+1)$ est vraie et que $P(m) \rightarrow P(m+1)$ est vraie

Conclusion :

Ainsi, $P(1)$ est vraie et $\forall m \geq 1$, $P(m) \rightarrow P(m+1)$ est vraie. En utilisant l'induction mathématique, nous avons démontré que pour tout $n \geq 1$,

$$11^{n+1} + 12^{2n-1} \text{ est divisible par 133}$$

CQFD

Exercice 4 :

Considérons un échiquier de taille $2^n \times 2^n$(avec $n \geq 1$). On retire une case quelconque de l'échiquier. Montrez par induction qu'il est toujours possible de recouvrir parfaitement toutes les cases restantes avec des pièces en forme de « L » composées chacune exactement de 3 cases.

Solution

Étape de base :

Pour $n = 1$, nous avons, un carré de taille 2×2. L'échiquier contient 4 cases. Si l'on retire une case, il reste 3 cases. Une seule pièce en L couvre exactement 3 cases. Ainsi, nous avons montré que la propriété est vérifiée pour le cas de base $n = 1$.

Étape inductive :

Supposons que pour un certain $m \geq 1$, la propriété est vraie, c'est-à-dire qu'il est possible de parfaitement recouvrir un échiquier de taille $2^m \times 2^m$ auquel on a retiré n'importe quelle case avec des pièces en forme de L composé de 3 cases. (H.I.)

Nous devons démontrer que cette propriété est vraie pour un échiquier de taille $2^{m+1} \times 2^{m+1}$.

On remarque d'abord qu'il est possible de diviser un échiquier de taille $2^{m+1} \times 2^{m+1}$ en 4 sous-échiquiers de taille $2^m \times 2^m$. Supposons maintenant qu'on retire une case de l'échiquier. Ainsi :

- Un des quatre sous-échiquiers de taille $2^m \times 2^m$ aura une case en moins. Il pourra ainsi être complétement couvert par des pièces en forme de L selon notre hypothèse d'induction.
- Il est ensuite possible de placer une pièce en L au centre de l'échiquier de telle sorte à couvrir une pièce de chacun des 3 sous-échiquiers de taille $2^m \times 2^m$ restants.
- Ainsi, nous avons « retiré » une case à chacun des 3 sous-échiquiers de taille $2^m \times 2^m$ restants. Selon notre hypothèse d'induction, il est possible de complètement recouvrir chacun de ces 3 sous-échiquiers de taille $2^m \times 2^m$ par des pièces en L.

Ainsi, l'ensemble de l'échiquier de taille $2^{m+1} \times 2^{m+1}$ sera recouvert par des pièces en L.

Nous avons donc montré que si la proposition est vraie pour un échiquier de taille $2^m \times 2^m$, alors elle est vraie pour un échiquier de taille $2^{m+1} \times 2^{m+1}$.

Conclusion

Comme la proposition est vraie pour $n = 1$, et que si elle est vraie pour n alors elle est vraie pour $n + 1$. En utilisant l'induction mathématique, nous avons démontré que pour tout $n \geq 1$:

Qu'il sera toujours possible de recouvrir parfaitement toutes les cases restantes d'un échiquier de taille $2^n \times 2^n$ auquel on a retiré une case avec des pièces en forme de « L » composées chacune exactement de 3 cases.

CQFD