LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 8 : INDUCTION ET RÉCURSIVITÉ

A2024

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 :

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

a) Donnez le terme général de la suite suivante :

$$1, \frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{6}{11}, \frac{24}{20}, \frac{120}{37}$$

Solution

On remarque au numérateur que la suite croît de façon factorielle. On remarque que le dénominateur croît de façon exponentielle. Le terme général est :

$$\frac{n!}{2^n + n}$$

b) Calculez la somme suivante en trouvant le terme général (indice : la somme comprend 7 termes) :

$$2 + 5 + 13 + 35 + \cdots + 793$$

Solution

Le terme général est :

$$2^n + 3^n$$

La somme est donc :

$$\sum_{n=0}^{6} 2^n + 3^n = 3535$$

Exercice 2 :

Donnez une définition récursive pour les ensembles suivants :

a) L'ensemble des entiers positifs impairs.

Solution

Nous avons le cas de base :

$$1 \in \boldsymbol{S}$$

Puis la règle de récursion :

$$\text{Si } n \in \boldsymbol{S} \text{ alors } n+2 \in \boldsymbol{S}$$

b) L'ensemble des entiers positifs congrus à 1 modulo 4.

Solution

Nous avons le cas de base :

$$1 \in \boldsymbol{S}$$

Puis la règle de récursion :

$$\text{Si } n \in \boldsymbol{S} \text{ alors } n+4 \in \boldsymbol{S}$$

c) L'ensembles des entiers positifs non divisibles par 3.

Solution

Nous avons le cas de base :

$$1 \in \boldsymbol{S}, 2 \in \boldsymbol{S}$$

Puis la règle de récursion :

$$\text{Si } n \in \boldsymbol{S} \text{ alors } n+3 \in \boldsymbol{S}$$

Exercice 3 :

a) Dans un TD précédent, vous aviez utilisé l'identité suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Montrez que si $n \geq 1$, alors l'identité est vraie.

Solution

Soit

$$P(n): \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Étape de base : Pour $n = 1$, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1$$

$$\frac{(1)\big((1)+1\big)(2(1)+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

On a donc $P(1)$ vraie.

Étape inductive : Supposons que pour un certain $m \geq 1$, $P(m)$ est vraie i.e.

$\sum_{i=1}^{m} i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$ (Hypothèse d'induction, H.I.)

On veut arriver à montrer que $P(m+1)$ est vraie i.e.

$\sum_{i=1}^{m+1} i^2 = \frac{(m+1)\big((m+1)+1\big)(2(m+1)+1)}{6} = \frac{(m+1)(m+2)(2m+2)}{6}$ (Objectif)

Nous avons donc :

$$\sum_{i=1}^{m+1} i^2 = \sum_{i=1}^{m} i^2 + (m+1)^2$$

$$= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 \quad \textbf{(H.I.)}$$

$$= \frac{m(m+1)(2m+1) + 6(m+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(m+1)(m(2m+1) + 6(m+1))}{6}$$

$$= \frac{(m+1)(2m^2+2m+1)}{6}$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)(2m+2)}{6}$$

Il s'en suit que $P(m+1)$ est vraie et que $P(m) \to P(m+1)$ est vraie

Conclusion :

Ainsi, $P(1)$ est vraie et $\forall m \geq 1$, $P(m) \to P(m+1)$ est vraie. En utilisant l'induction mathématique, nous avons démontré que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

CQFD

b) Montrez que si $n \geq 1$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n} i(i!) = (n+1)! - 1$$

Solution

Soit

$$P(n): \sum_{i=1}^{n} i(i!) = (n+1)! - 1$$

Étape de base : Pour $n = 1$, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{1} i(i!) = 1(1)! = 1$$

$$(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 1$$

On a donc $P(1)$ vraie.

Étape inductive : Supposons que pour un certain $m \geq 1$, $P(m)$ est vraie i.e.

$\sum_{i=1}^{m} i(i!) = (m+1)! - 1$ (Hypothèse d'induction, H.I.)

On veut arriver à montrer que $P(m+1)$ est vraie i.e.

$\sum_{i=1}^{m+1} i(i!) = ((m+1)+1)! - 1 = (m+2)! - 1$

(Objectif)

Nous avons donc :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m+1} i(i!) &= \sum_{i=1}^{m} i(i!) + (m+1)(m+1)! \\
&= (m+1)! - 1 + (m+1)(m+1)! \quad \textbf{(H.I.)} \\
&= (1 + (m+1))(m+1)! - 1 \\
&= (m+2)(m+1)! - 1 \\
&= (m+2)! - 1
\end{aligned}
$$

Il s'en suit que $P(m+1)$ est vraie et que $P(m) \rightarrow P(m+1)$ est vraie

Conclusion :

Ainsi, $P(1)$ est vraie et $\forall m \geq 1$, $P(m) \rightarrow P(m+1)$ est vraie. En utilisant l'induction mathématique, nous avons démontré que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} i(i!) = (n+1)! - 1$$

CQFD

Exercice 4 :

a) En utilisant l'induction mathématique, montrez que pour tout entier naturel n non nul :

$$2^{2n} - 1 \text{ est divisible par 3}$$

Solution

Soit

$$P(n): 2^{2n} - 1 \textit{ est divisible par 3}$$

Étape de base : Pour $n = 1$, nous avons :

$$2^{2(1)} - 1 = 3$$

Comme 3 est divisible par 3, nous avons $P(1)$ vraie.

Étape inductive : Supposons que pour un certain $m \geq 1$, $P(m)$ est vraie i.e.

$$2^{2m} - 1 \textit{ est divisible par 3} \qquad \text{(Hypothèse d'induction, H.I.)}$$

On veut arriver à montrer que $P(m+1)$ est vraie i.e

$$2^{2(m+1)} - 1 \textit{ est divisible par 3} \qquad \text{(Objectif)}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} 2^{2(m+1)} - 1 &= 2^{2m+2} - 1 \\ &= 2^2 \cdot 2^{2m} - 1 \\ &= 4 \cdot 2^{2m} - 1 \\ &= 3 \cdot 2^{2m} + (2^{2m} - 1) \\ &= 3(2^{2m}) + 3k \;\; ; \;\; k \in N \qquad \textbf{(H.I.)} \\ &= 3(2^{2m} + k) \end{aligned}$$

Il s'en suit que $P(m+1)$ est vraie et que $P(m) \rightarrow P(m+1)$ est vraie

Conclusion :

Ainsi, $P(1)$ est vraie et $\forall m \geq 1$, $P(m) \rightarrow P(m+1)$ est vraie. En utilisant l'induction mathématique, nous avons démontré que pour tout $n \geq 1$,

$$2^{2n} - 1 \textit{ est divisible par 3}$$

CQFD

b) En utilisant l'induction mathématique, montrez que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$2n + 1 \leq 2^n$$

Solution

Soit

$$P(n): 2n + 1 \leq 2^n$$

Étape de base : Pour $n = 3$, nous avons :

$$2(3) + 1 = 7$$
$$2^3 = 8$$

Comme $2(3) + 1 \leq 2^3$ nous avons $P(3)$ vraie.

Étape inductive : Supposons que pour un certain $m \geq 3$, $P(m)$ est vraie i.e.

$$2m + 1 \leq 2^m \qquad \text{(Hypothèse d'induction, H.I.)}$$

On veut arriver à montrer que $P(m+1)$ est vraie i.e.

$$2(m+1) + 1 \leq 2^{(m+1)} \qquad \text{(Objectif)}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} 2(m+1) + 1 &= (2m+1) + 2 \\ &\leq 2^m + 2 \qquad \textbf{(H.I.)} \\ &\leq 2^m + 2^m \ (2 \leq 2^m \text{ pour } m \geq 1) \\ &= 2^{m+1} \end{aligned}$$

Il s'en suit que $P(m+1)$ est vraie et que $P(m) \rightarrow P(m+1)$ est vraie

Conclusion :

Ainsi, $P(1)$ est vraie et $\forall m \geq 3, P(m) \rightarrow P(m+1)$ est vraie. En utilisant l'induction mathématique, nous avons démontré que pour tout $n \geq 3$,

$$2n + 1 \leq 2^n$$

CQFD

Exercice 5 :

a) Calculez les 5 premiers termes de la suite définie récursivement par :

$$a_0 = 2,\ a_n = 5a_{n-1} \text{ pour } n \geq 1$$

Solution

$a_0 = 2, a_1 = 5a_0 = 10$
$a_2 = 5a_1 = 50$
$a_3 = 5a_2 = 250$
$a_4 = 5a_3 = 1250$
$a_5 = 5a_4 = 6250$

b) Déduisez une formule explicite pour a_n, en l'exprimant uniquement en fonction de n.

Solution

On se rend compte qu'il s'agit simplement de la définition récursive de l'exponentiation multiplié par une constante. Nous avons donc :

$$a_n = 2 \cdot 5^n$$

c) Démontrez votre conjecture en utilisant l'induction mathématique.

Solution

Soit

$$P(n): a_n = 2 \cdot 5^n$$

Étape de base : Pour $n = 0$, nous avons :

$$a_0 = 2$$
$$2 \cdot 5^0 = 2$$

$P(0)$ est donc vraie.

Étape inductive : Supposons que pour un certain $m \geq 0$, $P(m)$ est vraie i.e.

$$a_m = 2 \cdot 5^m \quad \text{(Hypothèse d'induction).}$$

On veut arriver à montrer que $P(m+1)$ est vraie i.e.

$$a_{m+1} = 2 \cdot 5^{m+1} \text{ (Objectif)}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= 5a_m \\ &= 5(2 \cdot 5^m) \quad \textbf{(H.I.)} \\ &= 2 \cdot 5^{m+1} \end{aligned}$$

Il s'en suit que $P(m+1)$ est vraie et que $P(m) \to P(m+1)$ est vraie

Conclusion :

Ainsi, $P(1)$ est vraie et $\forall m \geq 0, P(m) \to P(m+1)$ est vraie. En utilisant l'induction mathématique, nous avons démontré que pour tout $n \geq 0$,

$$a_n = 2 \cdot 5^n$$

CQFD

Exercice 6 :

Le théorème fondamental de l'arithmétique stipule que tout nombre entier supérieur à 1 peut être représenté de manière unique comme un produit de nombres premiers, à l'ordre près des facteurs.

On vous demande de démontrer une partie du théorème. Montrez que tout entier positif $n \geq 2$ peut s'exprimer comme le produit de nombres premiers.

Solution

Pour ce problème, nous devons utiliser l'induction forte.

Soit : $P(n)$: *n peut être exprimé comme le produit de nombres premiers.*

Étape de base : On doit considère le cas de base $n = 2$

$$2 = 2$$

Ainsi P(2) est vraie.

Étape inductive :

Nous devons montrer que $P(2), \ldots, P(n)$ implique $P(n+1)$ pour tout $n \geq 2$. Supposons que $P(2), \ldots, P(n)$ sont tous vraies (Hypothèse d'induction forte). Nous avons deux cas possibles. Le premier cas est si $n + 1$ est lui-même premier, il est alors trivial que P(n+1) est vraie dans ce cas. Le deuxième cas est le cas où $n + 1$ n'est pas premier. Ainsi, n+1 peut s'exprimer comme le produit de deux nombres s et r :

$$n + 1 = rs$$

Où $2 \leq r < n$ et $2 \leq s < n$

Ainsi, selon notre hypothèse d'induction forte, r et s peuvent tout deux s'exprimer comme le produit de nombres premiers et donc n+1 aussi. Ainsi, comme dans les deux cas n+1 peut s'exprimer comme le produit de nombres premiers, nous avons bien :

$$P(2) \wedge \ldots \wedge P(n) \rightarrow P(n+1) \text{ pour tout } n \geq 2$$

Conclusion :

Par induction forte, puisque $P(2)$ est vraie et que $P(2) \wedge \ldots \wedge P(n) \rightarrow P(n+1)$ pour tout $n \geq 2$, alors tout entier positif $\mathrm{n} \geq 2$ peut s'exprimer comme le produit de nombres premiers.

CQFD