POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 8 : INDUCTION ET RÉCURSIVITÉ

E2025

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 :

a) Montrez par induction mathématique que pour tout entier $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

Soit $P(n)$ la proposition : $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.
Cas de base ($n = 1$) : Membre de gauche : $\sum_{k=1}^{1} k(k+1)(k+2) = 1(1+1)(1+2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Membre de droite : $\frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4} = \frac{24}{4} = 6$. Puisque $6 = 6$, $P(1)$ est vraie.
Hypothèse de récurrence : Supposons que $P(m)$ est vraie pour un entier $m \geq 1$. C'est-à-dire, $\sum_{k=1}^{m} k(k+1)(k+2) = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4}$.
Étape inductive : Nous voulons montrer que $P(m+1)$ est vraie, c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{m+1} k(k+1)(k+2) = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{4}$.
Considérons le membre de gauche de $P(m+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1} k(k+1)(k+2) &= \left(\sum_{k=1}^{m} k(k+1)(k+2)\right) + (m+1)(m+2)(m+3) \\
&= \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4} + (m+1)(m+2)(m+3) \quad \text{(par H.I.)} \\
&= (m+1)(m+2)(m+3)\left(\frac{m}{4} + 1\right) \\
&= (m+1)(m+2)(m+3)\left(\frac{m+4}{4}\right) \\
&= \frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{4}
\end{aligned}$$

Ceci est le membre de droite de $P(m+1)$. Donc $P(m+1)$ est vraie.
Conclusion : Puisque $P(1)$ est vraie et que $P(m) \Rightarrow P(m+1)$ pour tout $m \geq 1$, par le principe d'induction mathématique, la proposition est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

b) Montrez par induction mathématique que pour tout entier $n \geq 0$, $133 \mid (11^{n+2} + 12^{2n+1})$.

Soit $P(n)$ la proposition : "$11^{n+2} + 12^{2n+1}$ est divisible par 133".
Cas de base ($n = 0$) : Pour $n = 0$, l'expression est $11^{0+2} + 12^{2(0)+1} = 11^2 + 12^1 = 121 + 12 = 133$. Puisque $133 = 1 \cdot 133$, 133 est divisible par 133. Donc $P(0)$ est vraie.
Hypothèse de récurrence : Supposons que $P(k)$ est vraie pour un entier $k \geq 0$. C'est-à-dire, $11^{k+2} + 12^{2k+1}$ est divisible par 133. Donc, il existe un entier m tel que $11^{k+2} + 12^{2k+1} = 133m$.
Étape inductive : Nous voulons montrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $11^{(k+1)+2} + 12^{2(k+1)+1}$ est divisible par 133. L'expression est $11^{k+3} + 12^{2k+3}$.

$$\begin{aligned}
11^{k+3} + 12^{2k+3} &= 11 \cdot 11^{k+2} + 12^2 \cdot 12^{2k+1} \\
&= 11 \cdot 11^{k+2} + 144 \cdot 12^{2k+1} \\
&= 11 \cdot 11^{k+2} + (11 + 133) \cdot 12^{2k+1} \\
&= 11 \cdot 11^{k+2} + 11 \cdot 12^{2k+1} + 133 \cdot 12^{2k+1} \\
&= 11(11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133 \cdot 12^{2k+1}
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence, $11^{k+2} + 12^{2k+1} = 133m$. Donc, l'expression devient :

$$\begin{aligned}
&= 11(133m) + 133 \cdot 12^{2k+1} \\
&= 133(11m + 12^{2k+1})
\end{aligned}$$

Soit $m' = 11m + 12^{2k+1}$. Puisque m et k sont des entiers, m' est un entier. Donc, $11^{k+3} + 12^{2k+3} = 133m'$, ce qui signifie que $11^{(k+1)+2} + 12^{2(k+1)+1}$ est divisible par 133. Ainsi $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : Puisque $P(0)$ est vraie et que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ pour tout $k \geq 0$, par le principe d'induction mathématique, $133 \mid (11^{n+2} + 12^{2n+1})$ pour tout entier $n \geq 0$.

c) Un étudiant prétend avoir prouvé par induction que pour toute suite de n chevaux, tous les chevaux de la suite sont de la même couleur. Soit $P(n)$ la proposition : "Dans toute suite de n chevaux, tous les chevaux sont de la même couleur". **Cas de base :** $P(1)$ est vraie. Dans une suite d'un seul cheval, tous les chevaux (ce seul cheval) sont de la même couleur. **Hypothèse d'induction :** Supposons $P(k)$ vraie pour un $k \geq 1$. **Étape inductive :** Considérons une suite de $k+1$ chevaux : $H_1, H_2, \ldots, H_k, H_{k+1}$. Le sous-ensemble $\{H_1, \ldots, H_k\}$ est une suite de k chevaux. Par H.I., ils sont tous de la même couleur. Le sous-ensemble $\{H_2, \ldots, H_{k+1}\}$ est aussi une suite de k chevaux. Par H.I., ils sont tous de la même couleur. Puisque $H_2, \ldots, H_k$ sont dans les deux sous-ensembles, la couleur des chevaux du premier sous-ensemble est la même que la couleur des chevaux du second sous-ensemble. Donc, tous les $k+1$ chevaux sont de la même couleur. $P(k+1)$ est vraie. **Conclusion :** Par induction, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$. Cette preuve est-elle correcte ? Si non, identifiez précisément l'erreur.

La preuve n'est **pas correcte**.

L'erreur se situe dans **l'étape inductive**, plus précisément dans l'argument utilisé pour lier la couleur des deux sous-ensembles. L'argument est : "Puisque $H_2, \ldots, H_k$ sont dans les deux sous-ensembles, la couleur des chevaux du premier sous-ensemble est la même que la couleur des chevaux du second sous-ensemble."

Cet argument repose sur le fait que l'intersection des deux sous-ensembles, $\{H_1, \ldots, H_k\}$ et $\{H_2, \ldots, H_{k+1}\}$, est non vide. L'intersection est l'ensemble $\{H_2, \ldots, H_k\}$.

L'erreur se manifeste lorsque $k = 1$ (c'est-à-dire, en essayant de prouver $P(2)$ à partir de $P(1)$) : Si $k = 1$, nous considérons une suite de $k + 1 = 2$ chevaux : H_1, H_2.

- Le premier sous-ensemble est $\{H_1, \ldots, H_k\} = \{H_1\}$. Par H.I. ($P(1)$), H_1 a une certaine couleur (disons C1).
- Le second sous-ensemble est $\{H_2, \ldots, H_{k+1}\} = \{H_2\}$. Par H.I. ($P(1)$), H_2 a une certaine couleur (disons C2).

Maintenant, considérons l'intersection supposée "non vide" : $\{H_2, \ldots, H_k\}$. Si $k = 1$, cet ensemble est $\{H_2, \ldots, H_1\}$. Cet ensemble est **vide** car l'indice de début (2) est supérieur à l'indice de fin (1).

Puisque l'intersection est vide lorsque $k = 1$, il n'y a aucun cheval commun aux deux sous-ensembles $\{H_1\}$ et $\{H_2\}$ qui permettrait de conclure que C1 (la couleur de H_1) est la même que C2 (la couleur de H_2). L'étape inductive $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ échoue spécifiquement pour le passage de $P(1)$ à $P(2)$.

Pour $k \geq 2$, l'ensemble $\{H_2, \ldots, H_k\}$ est non vide, et l'argument de l'étape inductive serait logiquement valide (si $P(k)$ était effectivement vraie pour ces k). Cependant, comme la chaîne de l'induction est rompue au tout début (de $P(1)$ à $P(2)$), la conclusion générale que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$ est fausse.

En résumé : L'erreur est que l'argument de chevauchement utilisé dans l'étape inductive n'est pas valide pour le cas $k = 1$ (lors de la tentative de déduction de $P(2)$ à partir de $P(1)$), car l'intersection des deux sous-groupes de chevaux est vide dans ce cas précis.

Exercice 2 :

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Montrer par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + (-1)^n$.

Soit $P(n)$ la proposition $u_n = 2^n + (-1)^n$.
Cas de base :

— Pour $n = 0$: $u_0 = 2$ (donné). La formule donne $2^0 + (-1)^0 = 1 + 1 = 2$. Donc $P(0)$ est vraie.

— Pour $n = 1$: $u_1 = 1$ (donné). La formule donne $2^1 + (-1)^1 = 2 - 1 = 1$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hypothèse de récurrence forte : Supposons que $P(j)$ est vraie pour tous les entiers j tels que $0 \leq j \leq k$, où $k \geq 1$. C'est-à-dire, supposons que $u_j = 2^j + (-1)^j$ pour $0 \leq j \leq k$.

Étape inductive : Nous voulons montrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} = 2^{k+1} + (-1)^{k+1}$. Puisque $k \geq 1$, on a $k + 1 \geq 2$. Nous pouvons donc utiliser la définition récursive de la suite pour u_{k+1} : $u_{k+1} = u_k + 2u_{k-1}$.

Par l'hypothèse de récurrence forte, $P(k)$ et $P(k-1)$ sont vraies (car $k \geq 1 \Rightarrow k-1 \geq 0$, et $k-1 \leq k$, $k \leq k$). Donc, $u_k = 2^k + (-1)^k$ et $u_{k-1} = 2^{k-1} + (-1)^{k-1}$.

Substituons ces expressions dans la définition de u_{k+1} :

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= (2^k + (-1)^k) + 2(2^{k-1} + (-1)^{k-1}) \\
&= 2^k + (-1)^k + 2 \cdot 2^{k-1} + 2 \cdot (-1)^{k-1} \\
&= 2^k + (-1)^k + 2^k + 2(-1)^{k-1}
\end{aligned}$$

Nous savons que $(-1)^{k-1} = (-1)^{-1}(-1)^k = -(-1)^k$.

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= 2 \cdot 2^k + (-1)^k + 2(-(-1)^k) \\
&= 2^{k+1} + (-1)^k - 2(-1)^k \\
&= 2^{k+1} - (-1)^k \\
&= 2^{k+1} + (-1) \cdot (-1)^k \\
&= 2^{k+1} + (-1)^{k+1}
\end{aligned}$$

Ceci est exactement la formule pour $P(k+1)$. Ainsi, $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : Puisque $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies, et que si $P(j)$ est vraie pour $0 \leq j \leq k$ (avec $k \geq 1$) alors $P(k+1)$ est vraie, par le principe de récurrence forte, $u_n = 2^n + (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 :

On considère la fonction $T(n)$ qui représente souvent le temps d'exécution d'un algorithme de type "diviser pour régner". $T(n)$ est définie pour les entiers n qui sont des puissances de 2 par la récurrence suivante :

— $T(1) = c_1$ (où c_1 est une constante positive)

— $T(n) = 2T(n/2) + c_2 n$ pour $n = 2^k, k \geq 1$ (où c_2 est une constante positive)

Montrer par récurrence (sur k, où $n = 2^k$) que pour $n = 2^k$ avec $k \geq 0$, $T(n) = c_1 n + c_2 n \log_2 n$.

Soit $n = 2^k$ pour $k \geq 0$. Nous voulons prouver par récurrence sur k que $T(2^k) = c_1 2^k + c_2 2^k \log_2(2^k)$. Notons que $\log_2(2^k) = k$. Donc, la proposition à prouver est $P(k) : T(2^k) = c_1 2^k + c_2 k 2^k$.

Cas de base ($k = 0$) : Pour $k = 0$, $n = 2^0 = 1$. D'après la définition de la récurrence, $T(1) = c_1$. D'après la formule à prouver, pour $k = 0$: $T(2^0) = c_1 2^0 + c_2 \cdot 0 \cdot 2^0 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 \cdot 1 = c_1$. Les deux sont égaux, donc $P(0)$ est vraie.

Hypothèse de récurrence : Supposons que $P(j)$ est vraie pour un entier $j \geq 0$. C'est-à-dire, supposons que $T(2^j) = c_1 2^j + c_2 j 2^j$.

Étape inductive : Nous voulons montrer que $P(j+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $T(2^{j+1}) = c_1 2^{j+1} + c_2(j+1)2^{j+1}$. Pour $n = 2^{j+1}$, puisque $j \geq 0$, on a $j+1 \geq 1$. Nous pouvons donc utiliser la partie récursive de la définition de $T(n)$: $T(2^{j+1}) = 2T(2^{j+1}/2) + c_2 2^{j+1}$. $T(2^{j+1}) = 2T(2^j) + c_2 2^{j+1}$.

Maintenant, utilisons l'hypothèse de récurrence pour $T(2^j)$: $T(2^j) = c_1 2^j + c_2 j 2^j$. Substituons cela dans l'expression pour $T(2^{j+1})$:

$$\begin{aligned}
T(2^{j+1}) &= 2(c_1 2^j + c_2 j 2^j) + c_2 2^{j+1} \\
&= c_1(2 \cdot 2^j) + c_2 j(2 \cdot 2^j) + c_2 2^{j+1} \\
&= c_1 2^{j+1} + c_2 j 2^{j+1} + c_2 2^{j+1} \\
&= c_1 2^{j+1} + (c_2 j + c_2) 2^{j+1} \\
&= c_1 2^{j+1} + c_2(j+1) 2^{j+1}
\end{aligned}$$

Ceci est exactement la formule pour $P(j+1)$. Ainsi, $P(j+1)$ est vraie.

Conclusion : Puisque $P(0)$ est vraie et que si $P(j)$ est vraie alors $P(j+1)$ est vraie pour tout $j \geq 0$, par le principe de récurrence simple (sur k), $T(n) = c_1 n + c_2 n \log_2 n$ pour tout $n = 2^k$ avec $k \geq 0$.

Exercice 4 :

En juin 2025, Postes Canada a simplifié son offre de timbres pour la correspondance ordinaire : il ne reste plus que deux valeurs unitaires, 4 ¢ et 7 ¢. Les agents du comptoir soutiennent qu'il n'est jamais nécessaire de rendre de monnaie : pour tout affranchissement d'au moins 18 ¢, on peut toujours composer un montant exact à l'aide de ces deux timbres.

Votre tâche est de démontrer rigoureusement cette assertion en vous appuyant sur le principe d'induction.

Soit $P(n)$ la proposition : "un affranchissement de n cents peut être composé exactement à l'aide de timbres de 4 ¢ et 7 ¢". Nous voulons prouver que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 18$. Nous utiliserons une récurrence forte.

Cas de base : Nous devons vérifier $P(n)$ pour quelques valeurs initiales à partir de $n = 18$. Le nombre de cas de base dépendra de la manière dont nous structurons notre étape inductive. Si nous utilisons un argument où l'on "revient en arrière" de 4 unités (par exemple, remplacer un timbre de 4¢ par ... ou ajouter un timbre de 4¢), nous aurons besoin de 4 cas de base consécutifs.

— $P(18)$: $18 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 = 4 + 14 = 18$. $P(18)$ est vraie.

— $P(19)$: $19 = 3 \cdot 4 + 1 \cdot 7 = 12 + 7 = 19$. $P(19)$ est vraie.

— $P(20)$: $20 = 5 \cdot 4 + 0 \cdot 7 = 20$. $P(20)$ est vraie.

— $P(21)$: $21 = 0 \cdot 4 + 3 \cdot 7 = 21$. $P(21)$ est vraie.

Hypothèse de récurrence forte : Supposons que pour un entier $k \geq 21$, $P(j)$ est vraie pour tout entier j tel que $18 \leq j \leq k$.

Étape inductive : Nous voulons montrer que $P(k+1)$ est vraie, où $k+1 \geq 22$. Considérons le montant $k + 1$. Nous voulons le former avec des timbres de 4¢ et 7¢. Puisque $k + 1 \geq 22$, alors $k + 1 - 4 \geq 18$. Soit $m = k + 1 - 4 = k - 3$. Comme $k \geq 21$, $k - 3 \geq 21 - 3 = 18$. Donc, $18 \leq m \leq k$. Par l'hypothèse de récurrence forte, $P(m)$ est vraie. Cela signifie que le montant $m = k - 3$ cents peut être composé avec des timbres de 4¢ et 7¢. Il existe donc des entiers non négatifs a et b tels que $k - 3 = 4a + 7b$. Alors, $k + 1 = (k - 3) + 4 = (4a + 7b) + 4 = 4(a + 1) + 7b$. Puisque $a \geq 0$, $a + 1 \geq 1$. Et $b \geq 0$. Donc, $k + 1$ peut être composé avec $a + 1$ timbres de 4¢ et b timbres de 7¢. Ainsi, $P(k + 1)$ est vraie.

Conclusion : Puisque $P(18), P(19), P(20), P(21)$ sont vraies, et que pour $k \geq 21$, si $P(j)$ est vraie pour $18 \leq j \leq k$, alors $P(k + 1)$ est vraie, par le principe de récurrence forte, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 18$.

Exercice 5 (facultatif) :

Partie A :

Une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est définie récursivement par :

- $f(0) = 0$
- $f(n) = f(\lfloor n/3 \rfloor) + (n \pmod 3) + 1$ pour $n > 0$.

Rappel : $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.
a) Calculer $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(10)$.

- $f(0) = 0$ (par définition).
- $f(1) = f(\lfloor 1/3 \rfloor) + (1 \pmod 3) + 1 = f(0) + 1 + 1 = 0 + 1 + 1 = 2$.
- $f(2) = f(\lfloor 2/3 \rfloor) + (2 \pmod 3) + 1 = f(0) + 2 + 1 = 0 + 2 + 1 = 3$.
- $f(3) = f(\lfloor 3/3 \rfloor) + (3 \pmod 3) + 1 = f(1) + 0 + 1 = 2 + 0 + 1 = 3$.
- $f(4) = f(\lfloor 4/3 \rfloor) + (4 \pmod 3) + 1 = f(1) + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 = 4$.
- $f(10) = f(\lfloor 10/3 \rfloor) + (10 \pmod 3) + 1 = f(3) + 1 + 1 = 3 + 1 + 1 = 5$.

b) Montrer par récurrence forte que $f(n) \leq n$ pour tout $n \geq 0$.
Soit $P(n)$ la proposition "$f(n) \leq n$". Nous voulons prouver $P(n)$ pour tout $n \geq 0$.
D'après les calculs en a) :

- $f(0) = 0$. $P(0)$ est $0 \leq 0$, ce qui est vrai.
- $f(1) = 2$. $P(1)$ est $2 \leq 1$, ce qui est **faux**.
- $f(2) = 3$. $P(2)$ est $3 \leq 2$, ce qui est **faux**.
- $f(3) = 3$. $P(3)$ est $3 \leq 3$, ce qui est vrai.
- $f(4) = 4$. $P(4)$ est $4 \leq 4$, ce qui est vrai.
- $f(10) = 5$. $P(10)$ est $5 \leq 10$, ce qui est vrai.

La proposition "$f(n) \leq n$ pour tout $n \geq 0$" est **fausse**, car elle ne tient pas pour $n = 1$ et $n = 2$.

Partie B :

Prouver par récurrence simple que pour tout entier $n \geq 1$, l'expression $7^n - 1$ est divisible par 6.

Soit $P(n)$ la proposition $7^n - 1$ est divisible par 6.

Cas de base ($n = 1$) : Pour $n = 1$, $7^1 - 1 = 7 - 1 = 6$. Puisque $6 = 6 \times 1$, 6 est divisible par 6. Donc, $P(1)$ est vraie.

Hypothèse de récurrence : Supposons que $P(k)$ est vraie pour un entier $k \geq 1$. C'est-à-dire, supposons que $7^k - 1$ est divisible par 6. Cela signifie qu'il existe un entier m tel que $7^k - 1 = 6m$. Donc, $7^k = 6m + 1$.

Étape inductive : Nous voulons montrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $7^{k+1} - 1$ est divisible par 6. Considérons $7^{k+1} - 1$:

$$\begin{aligned}
7^{k+1} - 1 &= 7 \cdot 7^k - 1 \\
&= 7(6m + 1) - 1 \quad \text{(par l'hypothèse de récurrence)} \\
&= 42m + 7 - 1 \\
&= 42m + 6 \\
&= 6(7m + 1)
\end{aligned}$$

Soit $m' = 7m + 1$. Puisque m est un entier, $7m + 1$ est aussi un entier. Donc, $7^{k+1} - 1 = 6m'$, ce qui signifie que $7^{k+1} - 1$ est divisible par 6. Ainsi, $P(k + 1)$ est vraie.

Conclusion : Puisque $P(1)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie alors $P(k+1)$ est vraie pour tout $k \geq 1$, par le principe de récurrence simple, $7^n - 1$ est divisible par 6 pour tout entier $n \geq 1$.

Feuille supplémentaire