POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 1 : LOGIQUE PROPOSITIONNELLE

H2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1. On considère les propositions P, Q, R et S définies comme suit :

P : « Marie-Soleil oublie son parapluie »
Q : « Marie-Soleil quitte le bureau »
R : « Marie-Soleil est trempée »
S : « Le météorologue annonce de la pluie »

Énoncez des phrases simples (en langage courant) qui traduisent chacune des propositions suivantes.

a. $\neg Q$

Réponse :
Marie-Soleil ne quitte pas le bureau.

b. $\neg P \lor R$

Réponse : Plusieurs formulations possibles.

- Ou bien Marie-Soleil n'oublie pas son parapluie ou bien elle est trempée.
- Si Marie-Soleil oublie son parapluie, alors elle est trempée.
- Marie-Soleil oublie son parapluie seulement si elle est trempée.
- Marie-Soleil est trempée dès qu'elle oublie son parapluie.
- Marie-Soleil est trempée, si elle oublie son parapluie.
- Il est suffisant que Marie-Soleil oublie son parapluie pour qu'elle soit trempée.
- Il est nécessaire que Marie-Soleil soit trempée pour qu'elle oublie son parapluie.

c. $\neg P \land \neg Q \land R$

Réponse :
Marie-Soleil n'oublie pas son parapluie et ne quitte pas le bureau, mais elle est trempée.

d. $S \land Q \land \neg R$

Réponse :
Le météorologue annonce de la pluie et Marie-Soleil quitte le bureau, mais elle n'est pas trempée.

e. $S \rightarrow (\neg P \leftrightarrow Q \leftrightarrow \neg R)$

Réponse :
Le météorologue annonce de la pluie seulement si Marie-Soleil n'oublie pas son parapluie si et seulement si elle quitte le bureau si et seulement si elle n'est pas trempée.

Exercice 2. Soit P et Q les propositions suivantes :

- P : « On réduit les impôts payés par les riches »
- Q : « L'activité économique augmente »

Représentez les énoncés suivants en logique propositionnelle.

a) On réduit les impôts payés par les riches, mais l'activité économique n'augmente pas.

Réponse : $P \land \neg Q$

b) On ne réduit pas les impôts payés par les riches seulement si l'activité économique augmente.

Réponse : $\neg P \rightarrow Q$

c) Soit l'activité économique augmente, soit on réduit les impôts payés par les riches.

Réponse : $Q \oplus P$

d) Soit on réduit les impôts payés par les riches, soit l'activité économique augmente, ou les deux à la fois.

Réponse : $P \lor Q$

e) Si on réduit les impôts payés par les riches, l'activité économique augmentera. Donc, pour que l'activité économique augmente, il faut réduire les impôts payés par les riches.

Réponse : $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$

f) Il suffit de réduire les impôts payés par les riches pour que l'activité économique augmente.

Réponse : $P \rightarrow Q$

Exercice 3. Soit les propositions :

- P : « Tu perds »
- G : « Tu gagnes »

a) Traduisez en logique propositionnelle en utilisant les propositions P et G, l'énoncé « **Si tu ne perds pas, tu n'as pas forcément gagné, et si tu gagnes, tu n'as pas perdu** ».

Réponse :
$[(\neg P \rightarrow G) \lor (\neg P \rightarrow \neg G)] \land (G \rightarrow \neg P)$

Ou bien,
$[\neg P \rightarrow (G \lor \neg G)] \land (G \rightarrow \neg P)$

b) Donnez en langage courant, la négation de l'énoncé « **Si tu ne perds pas, tu n'as pas forcément gagné, et si tu gagnes, tu n'as pas perdu** ».

Réponse : Plusieurs formulations sont possibles.

- « Tu ne perds pas et tu as forcément gagné ou tu gagnes et tu as perdu »
- « Tu ne perds pas et tu as forcément gagné ou tu gagnes et tu perds »

c) Donnez en langage courant la réciproque de « **Si tu ne perds pas, tu n'as pas forcément gagné** ».

Réponse : Plusieurs formulations sont possibles.

- « Si tu n'as pas forcément gagné, alors tu ne perds pas »
- « Si tu n'as pas forcément gagné, alors tu n'as pas perdu »

d) Donnez en langage courant l'inverse de « **Si tu ne perds pas, tu n'as pas forcément gagné** ».

Réponse : Plusieurs formulations sont possibles.

- « Si tu perds, alors tu as forcément gagné. »
- « Si tu perds, tu as forcément gagné. »
- « Si tu perds, tu as gagné. »
- « Si tu perds, tu gagnes. »
- « Tu perds, tu gagnes. »

e) Donnez en langage courant la contraposée de « **Si tu ne perds pas, tu n'as pas forcément gagné** ».

Réponse : Plusieurs formulations sont possibles.

- « Si tu as forcément gagné, alors tu perds. »
- « Si tu as forcément gagné, tu perds. »
- « Si tu as forcément gagné, tu as perdu. »
- « Si tu as gagné, tu as perdu. »
- « Si tu as gagné, tu perds. »
- « Si tu gagnes, tu perds. »
- « Tu gagnes, tu perds. »
- « Tu as gagné, tu as perdu. »

Exercice 4. Soit la proposition suivante :

$$A : \neg(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg Q$$

a) Vérifiez par table de vérité que la proposition A est une tautologie.

Réponse :

P	**Q**	**$P \rightarrow Q$**	**$\neg(P \rightarrow Q)$**	**$\neg Q$**	**$\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg Q$**
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	F	V	V

La proposition A est toujours vraie indépendamment de la valeur de vérité des variables qu'elle contient, donc elle est une tautologie.

b) Effectuez la négation de la proposition A et simplifier le plus possible cette proposition. Justifiez toutes les étapes par le nom de la propriété utilisée.

Réponse :

$\neg [\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg Q]$	$\equiv \neg [\neg (\neg(P \rightarrow Q)) \vee \neg Q]$	Équivalence de l'implication
	$\equiv \neg [\neg (\neg(\neg P \vee Q)) \vee \neg Q]$	Équivalence de l'implication
	$\equiv \neg (\neg (\neg(\neg P \vee Q))) \wedge \neg(\neg Q)$	De Morgan
	$\equiv \neg(\neg P \vee Q) \wedge Q$	Double négation
	$\equiv (\neg(\neg P) \wedge \neg Q) \wedge Q$	De Morgan
	$\equiv (P \wedge \neg Q) \wedge Q$	Double négation
	$\equiv P \wedge (\neg Q \wedge Q)$	Associativité
	$\equiv P \wedge \text{FAUX}$	Négation
	$\equiv \text{FAUX}$	Domination

c) Donnez un argument court qui explique pourquoi la négation de A est une contradiction.

Réponse :

La négation d'une tautologie est une contradiction, car une tautologie est toujours vraie, quelle que soit la valeur de vérité de ses variables. Si on nie une tautologie, on obtient une proposition qui est toujours fausse, ce qui est une contradiction.

Exercice 5. En utilisant la technique de dérivation, montrez que

$$(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R) \equiv P \rightarrow (Q \vee R)$$

Justifiez toutes les étapes de votre preuve par le nom de la propriété utilisée.

Réponse :

$(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$	$\equiv (\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R)$	Équivalence de l'implication
	$\equiv \neg P \vee Q \vee \neg P \vee R$	Associativité
	$\equiv \neg P \vee \neg P \vee Q \vee R$	Commutativité
	$\equiv (\neg P \vee \neg P) \vee (Q \vee R)$	Associativité
	$\equiv \neg (P \wedge P) \vee (Q \vee R)$	De Morgan
	$\equiv \neg P \vee (Q \vee R)$	Idempotente
	$\equiv P \rightarrow (Q \vee R)$	Équivalence de l'implication

CQFD