POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

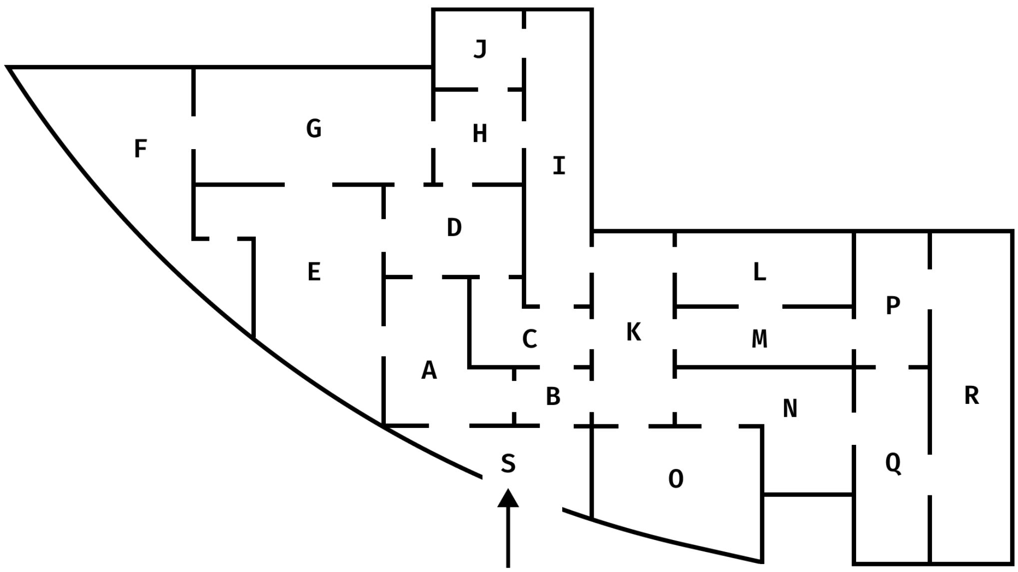
TD 10 : GRAPHE

A2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1

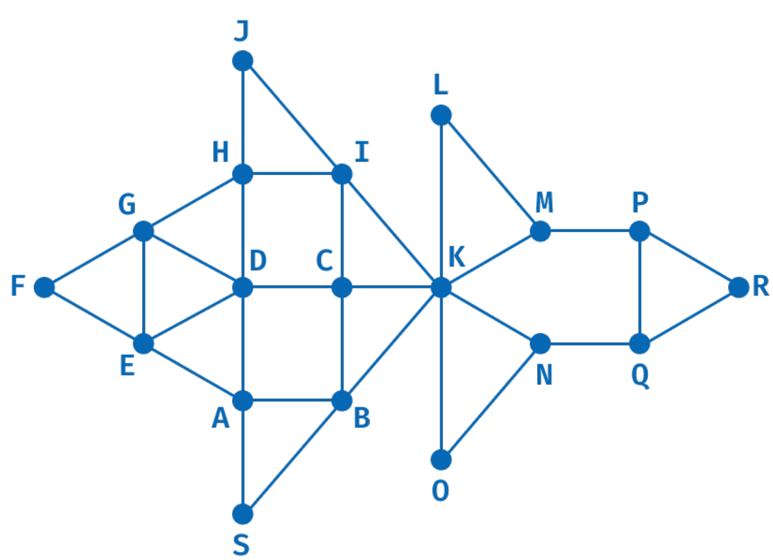
Un exterminateur a pour mission d'éliminer les punaises de lit au siège social de la Régie autonome des transports parisiens (RATP), un vaste bâtiment comprenant plusieurs bureaux reliés par des portes accessibles des deux côtés. Son travail consiste à inspecter chaque bureau, à éradiquer les punaises de lit, et à effectuer le nettoyage nécessaire. Il est essentiel de noter que ces parasites, malgré leur nom, ne se limitent pas aux lits et peuvent provoquer des piqûres, y compris sur les chaises de travail, ce qui souligne l'importance de leur éradication dans tout l'environnement de travail.



a) En utilisant vos connaissances en graphes, modélisez le plan du siège social de la RATP par un graphe. Précisez ensuite ce que représentent les sommets et les arêtes dans votre graphe.

Solution :

Nous pouvons modéliser le plan du siège social de la RATP par un graphe non orienté. Dans cette modélisation, chaque bureau ou espace est représenté par un sommet du graphe, tandis que les passages reliant ces bureaux sont représentés par les arêtes du graphe.



b) Donnez la représentation de votre graphe sous forme de **liste d'adjacence**.

Solution :

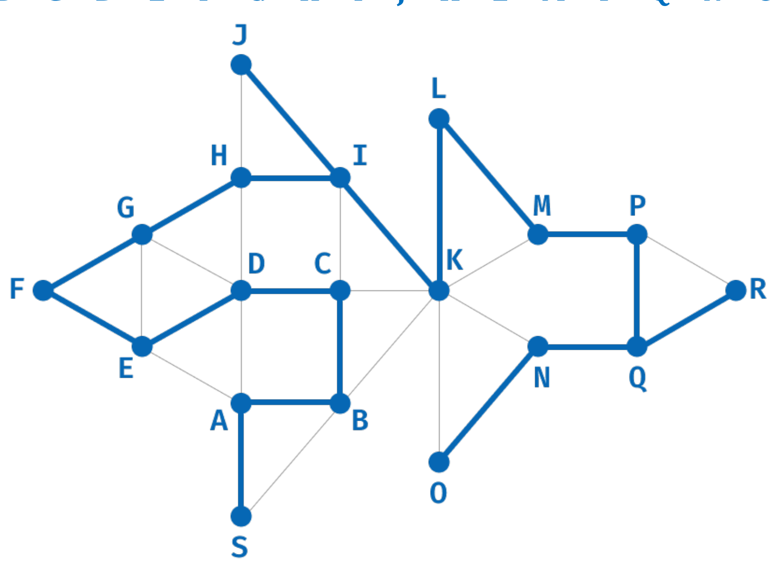
La liste d'adjacence ci-dessous spécifie les sommets adjacents à chaque sommet du graphe.

Sommet	Sommets adjacents
S	A, B
A	B, D, E, S
B	A, C, K, S
C	B, D, I, K
D	A, C, E, G, H
E	A, D, F, G
F	E, G
G	D, E, F, H
H	D, G, I, J
I	C, H, J, K
J	H, I
K	B, C, I, L, M, N, O
L	K, M
M	K, L, P
N	K, O, Q
O	K, N
P	M, Q, R
Q	N, P, R
R	P, Q

c) À partir de l'entrée principale du siège social de la RATP, donnez la séquence des espaces traités en utilisant le **parcours en profondeur**, tout en traçant le parcours. Les espaces doivent être considérés dans l'ordre alphabétique de leurs noms.

Solution :

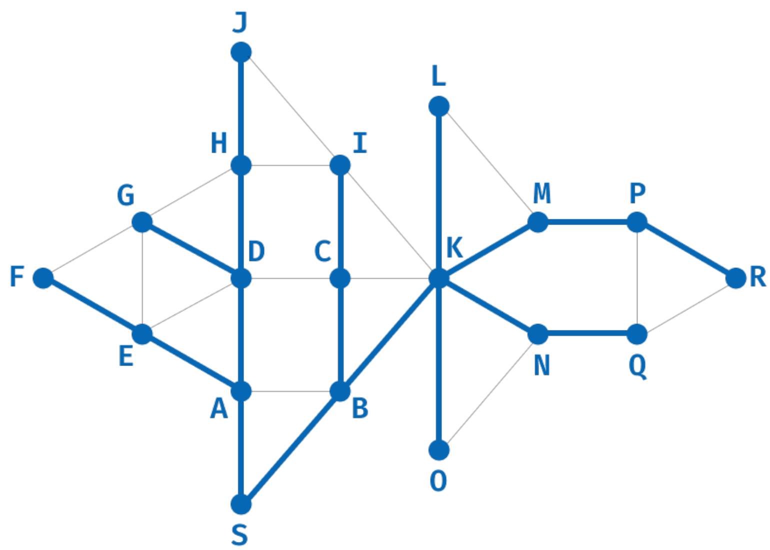
S – A – B – C – D – E – F – G – H – I – J – K – L – M – P – Q – N – O – R



d) À partir de l'entrée principale du siège social de la RATP, donnez la séquence des espaces traités en utilisant le **parcours en largeur**, tout en traçant le parcours. Les espaces doivent être considérés dans l'ordre alphabétique de leurs noms.

Solution :

S – A – B – D – E – C – K – G – H – F – I – L – M – N – O – J – P – Q – R



e) Le PDG de la RATP a chargé l'exterminateur de verrouiller les portes entre les espaces traités pour éviter la propagation des punaises de lit. Peut-il le faire sans faire demi-tour ni revisiter une partie de son parcours, tout en ayant la possibilité de se refermer dans un espace à la fin de sa mission ? Justifiez votre réponse.

Solution :

Pour que l'exterminateur de punaises de lit accomplisse sa tâche sans faire demi-tour ni revisiter une partie de son parcours, un chemin Eulérien, où chaque arête est traversée exactement une fois, serait nécessaire.

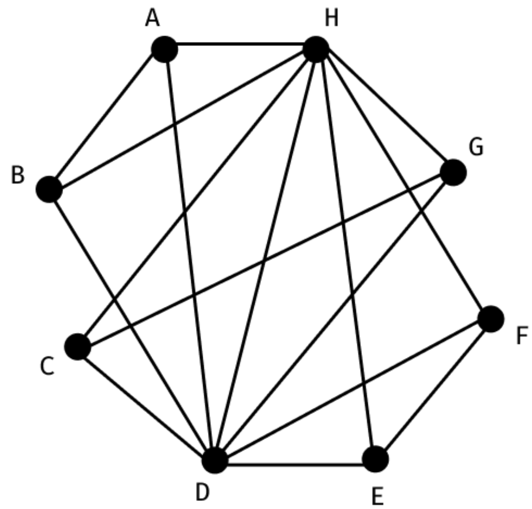
Cependant, en examinant le plan du siège social de la RATP, nous remarquons que plusieurs bureaux ($\mathbf{D}, \mathbf{K}, \mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$) ont un degré impair (respectivement $\mathbf{5}, \mathbf{7}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}$ et $\mathbf{3}$).

Conformément au théorème d'Euler, un graphe orienté contenant plus de deux sommets de degré impair ne peut pas avoir de chemin Eulérien.

Ainsi, l'exterminateur de punaises de lit ne peut pas accomplir sa mission sans faire demi-tour ou revisiter certaines parties de son parcours.

<u>Exercice 2</u>

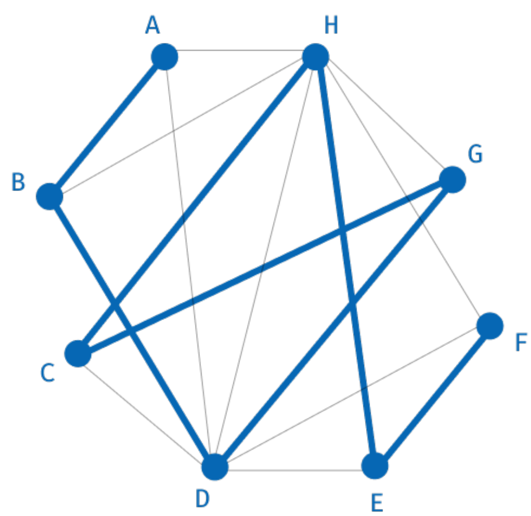
Pour le graphe ci-dessous, déterminez s'il contient une **chaîne Hamiltonienne**. Dans l'affirmative décrivez-en une.



<u>Solution :</u>

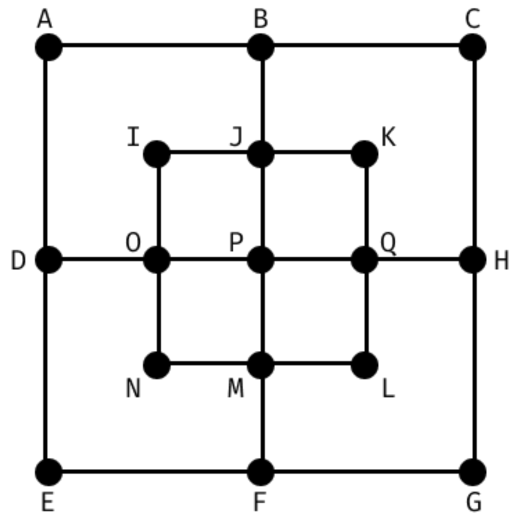
Ce graphe contient une chaîne Hamiltonienne.

Exemple de chaîne hamiltonienne : **A – B – D – G – C – H – E – F**



Exercice 3

Pour le graphe ci-dessous, déterminez s'il contient un **circuit Hamiltonien**. Dans l'affirmative décrivez-en un.



Solution :

Ce graphe n'a pas de circuit Hamiltonien.

Si cela était le cas, alors le circuit devrait contenir les arêtes $\{\mathbf{D},\mathbf{A}\}$ et $\{\mathbf{A},\mathbf{B}\}$ étant donné que ce sont les seules arêtes incidentes au sommet $\mathbf{A}$.

Par le même raisonnement, le circuit devrait aussi contenir les six autres arêtes autour de la figure i.e. $\{\mathbf{B},\mathbf{C}\}, \{\mathbf{C},\mathbf{H}\}, \{\mathbf{H},\mathbf{G}\}, \{\mathbf{G},\mathbf{F}\}, \{\mathbf{F},\mathbf{E}\}$ et $\{\mathbf{E},\mathbf{D}\}$.

Cependant, ces huit arêtes forment déjà un circuit, et ce circuit omet les neuf sommets à l'intérieur. Par conséquent, il n'y a pas de circuit Hamiltonien.

Exercice 4

Un groupe de 15 personnes se propose de constituer un réseautage particulier de sorte que chaque membre du groupe ait dans ses contacts le numéro de téléphone d'exactement 3 autres personnes du groupe. Ces échanges de numéros doivent être mutuels, c'est-à-dire que chaque personne doit avoir donné son numéro à 3 autres personnes qui, en retour, ont donné leur propre numéro à cette personne. Est-il possible de constituer ce réseautage ? Justifiez votre réponse.

Solution :

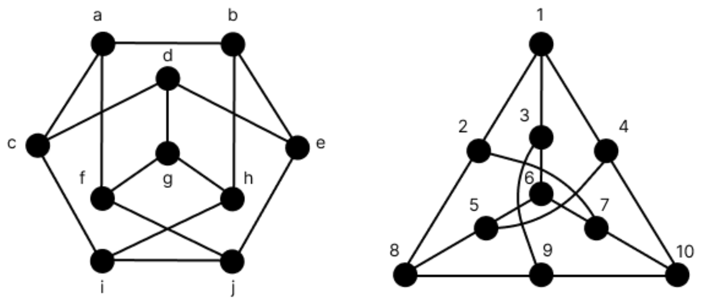
Non, il n'est pas possible de constituer un tel réseautage.

On peut constituer un graphe dont les sommets sont les 15 personnes. Chaque numéro de téléphone échangé permet d'établir un arc du graphe. Chaque sommet du graphe est donc de degré 3.

D'après le théorème des poignées de mains $3 \cdot 15 = 45$ qui est la somme des degrés des sommets du graphe doit être égale à 2 fois le nombre d'arcs. Il devrait donc être pair et non impair (45).

Exercice 5

Déterminez si les graphes $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ ci-dessous sont isomorphes. Justifiez votre réponse.

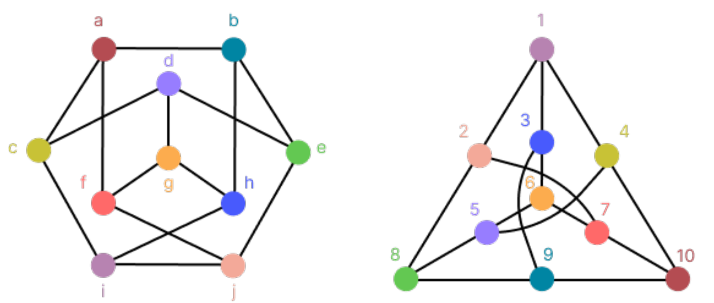


Graphe A Graphe B

Solution :

Les deux graphes sont isomorphes. Soit h la fonction bijective qui transforme le graphe $\mathbf{A}$ en celui de $\mathbf{B}$. Plusieurs réponses sont possibles. On a par exemple :

- $h(a) = 10$
- $h(b) = 9$
- $h(c) = 4$
- $h(d) = 5$
- $h(e) = 8$
- $h(f) = 7$
- $h(g) = 6$
- $h(h) = 3$
- $h(i) = 1$
- $h(j) = 2$



Graphe A Graphe B

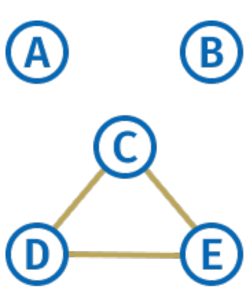
Exercice 6

Un graphe simple est un graphe dans lequel chaque paire de sommets est reliée par au plus une arête et aucun sommet ne possède de boucle. Énumérez tous les graphes simples **non isomorphes** ayant **cinq sommets** et **trois arêtes**.

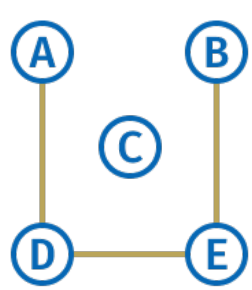
Note : Il y en a quatre.

Solution :

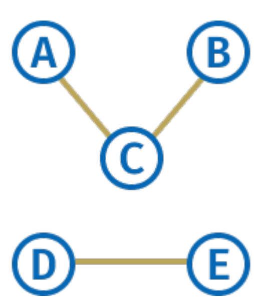
Graphe (I.) 5 sommets ✓
3 arêtes ✓



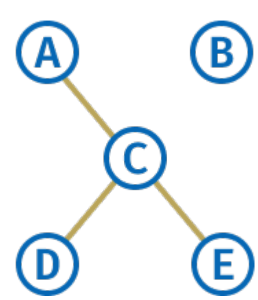
Graphe (II.) 5 sommets ✓
3 arêtes ✓



Graphe (III.) 5 sommets ✓
3 arêtes ✓

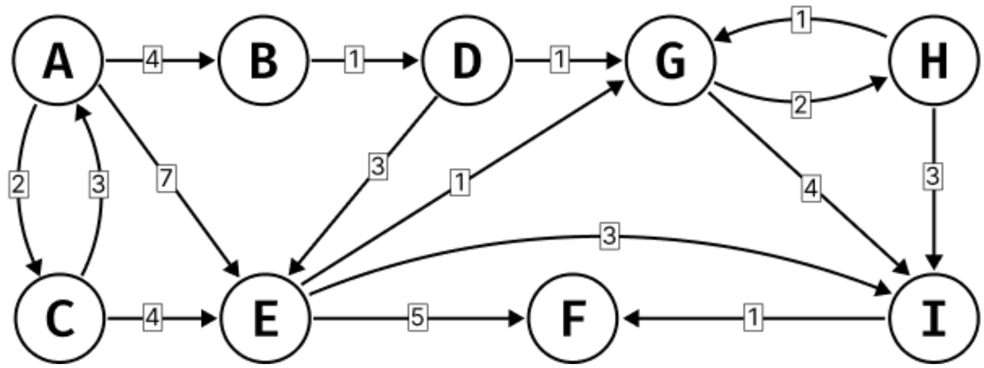


Graphe (IV.) 5 sommets ✓
3 arêtes ✓



Exercice 7

En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminez le plus court chemin, du sommet **A** vers tous les autres sommets. Montrez toutes les étapes de votre réponse, en détaillant la longueur des chemins à chaque itération du processus.



Solution :

Sommet it.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	Choix
0	0	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	-
1	-	4(A-B)	2(A-C)	∞ ( )	7(A-E)	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	A
2	-	4(A-B)	-	∞ ( )	6(A-C-E)	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	C
3	-	-	-	5(A-B-D)	6(A-C-E)	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	B
4	-	-	-	-	6(A-C-E)	∞ ( )	6(A-B-D-G)	∞ ( )	∞ ( )	D
5	-	-	-	-	-	11(A-C-E-F)	6(A-B-D-G)	∞ ( )	9(A-C-E-I)	E
6	-	-	-	-	-	11(A-C-E-F)	-	8(A-B-D-G-H)	9(A-C-E-I)	G
7	-	-	-	-	-	11(A-C-E-F)	-	-	9(A-C-E-I)	H
8	-	-	-	-	-	10(A-C-E-I-F)	-	-	-	I
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	F
Résultat	0	4(A-B)	2(A-C)	5(A-B-D)	6(A-C-E)	10(A-C-E-I-F)	6(A-B-D-G)	8(A-B-D-G-H)	9(A-C-E-I)	-