POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 5 : RELATIONS

A2022

Directives pour la remise :

- Répondez directement sur ce document papier.
- La remise est individuelle, mais le travail en équipe est encouragé.
- La remise se fait à la fin de la séance de TD.
- **Aucun retard ne sera accepté.**
- **Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.**

Identification

Veuillez inscrire votre section, nom, prénom et matricule ainsi que les noms des collègues avec lesquels vous avez collaboré pour le TD

Section :

Nom :

Prénom :

Matricule :

Collègues :

Exercice 1 :

Soit **E** = {a, b, c, d} et la relation d'équivalence R définies sur E par :

R = {(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)}

Quelles sont les classes d'équivalence de R ?

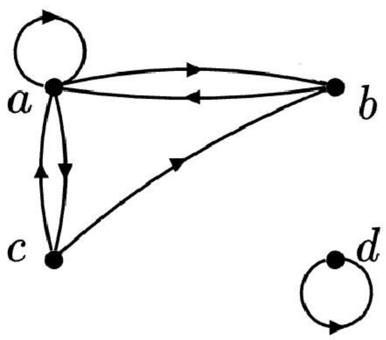
Réponse : :

y appartient à la classe de x lorsque x R y. De plus, lorsque y appartient à la classe de x, alors x appartient aussi à la classe de y.

- Classe de a : {a, b}
- Classe de c : {c, d}

Exercice 2 :

Soit **A** = {a, b, c, d}, la relation ***R*** définie sur **A** et représentée par le graphe ci-dessous.



a) Donnez la fermeture transitive de cette relation.

Réponse : :

R = {(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (d, d)}

Soit S la fermeture transitive de R.

S = {(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (c, b), (c, a), (d, d), **(c, c), (b, b), (b, c)**} b**)** Retrouvez le résultat précédent en calculant la fermeture transitive à l'aide des matrices puissance de la relation.

Réponse :

Soit M la matrice de R. On a :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M^{[3]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

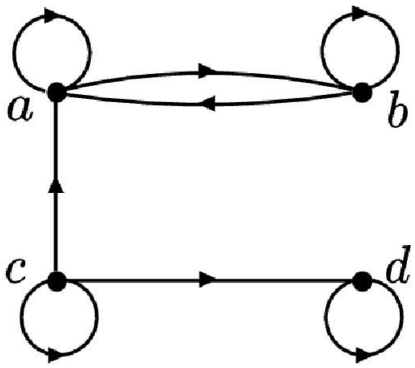
La matrice de la fermeture transitive est $N = M \vee M^{[2]} \vee M^{[3]}$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 3 :

Soit A = {a, b, c, d}. Déterminez si les relations R définies sur A et représentées par les graphes ci-dessous sont réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives.

a)



Réponse :

• **Réflexivité :** La relation illustrée est réflexive puisqu'il y a une boucle à chaque sommet.

Formellement, ∀ x ∈ A, (x, x) ∈ R ou encore ∀ x ∈ A, x R x.

• **Symétrie :** La relation n'est pas symétrique, puisque, par exemple, l'arête (c, a) est présente mais pas l'arête (a, c). C'est à dire, (c, a) ∈ R ∧ (c, a) ∉ R.

Formellement ∃ x, y ∈ A, ((x, y) ∈ R) ∧ ((y, x) ∉ R).

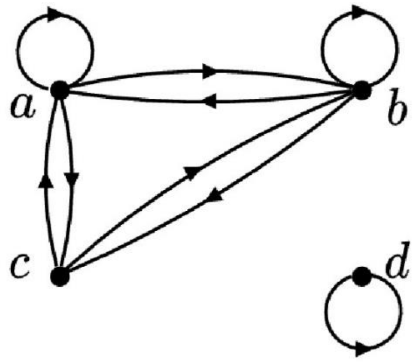
• **Antisymétrie :** Elle n'est pas antisymétrique, puisque les deux arêtes (a, b) et (b, a) sont présentes et a ≠ b.

Formellement ∃ x, y ∈ A, ((x, y) ∈ R) ∧ ((y, x) ∈ R) ∧ (x ≠ y).

• **Transitivité :** Elle n'est pas transitive, puisque les deux arêtes (c, a), (a, b) sont présentes, mais l'arête (c, b) n'est pas présente.

Formellement ∃ x, y, z ∈ A, ((x, y) ∈ R) ∧ ((y, z) ∈ R) ∧ (x, z) ∉ R

b)



Réponse :

• **Réflexivité :** La relation illustrée n'est pas réflexive puisqu'il existe un sommet c qui n'a pas de boucle.

Formellement, $\exists$ x $\in$ A, (x, x) $\notin$ R.

• **Symétrie :** La relation est symétrique, puisque, $\forall$ (x, y) $\in$ R, (y, x) $\in$ R.

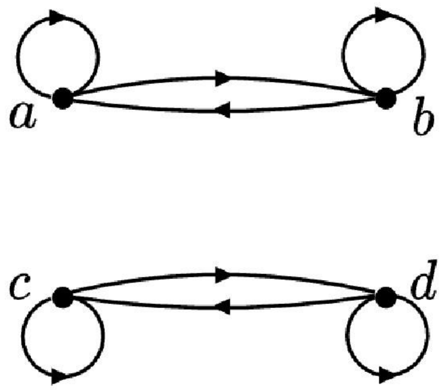
• **Antisymétrie :** Elle n'est pas antisymétrique, puisque les deux arêtes (a, b) et (b, a) sont présentes et a $\neq$ b.

Formellement $\exists$ x, y $\in$ A, ((x, y) $\in$ R) $\wedge$ ((y, x) $\in$ R) $\wedge$ (x $\neq$ y).

• **Transitivité :** Elle n'est pas transitive, puisque les deux arêtes (c, a), (a, c) sont présentes, mais l'arête (c, c) n'est pas présente.

Formellement $\exists$ x, y, z $\in$ A, ((x, y) $\in$ R) $\wedge$ ((y, z) $\in$ R) $\wedge$ (x, z) $\notin$ R.

c)



Réponse :

• **Réflexivité :** La relation illustrée est réflexive puisqu'il y a une boucle à chaque sommet.

• **Symétrie :** La relation est symétrique, puisque $\forall$ (x, y) $\in$ R, (y, x) $\in$ R.

• **Antisymétrie :** Elle n'est pas antisymétrique, puisque les deux arêtes (a, b) et (b, a) sont présentes et a $\neq$ b.

• **Transitivité :** Elle est transitive, puisque $\forall$ ((x, y) $\in$ R) $\wedge$ ((y, z) $\in$ R), (x, z) $\in$ R.

Exercice 4 :

Soit **R** la relation définie sur $\mathbb{R}^2$ par : (a,b) R (x,y) $\leftrightarrow$ a <x ou (a = x et b ≤ y)
R est-elle un ordre partiel ?

Réponse :

Pour vérifier si R est un ordre partiel, on va vérifier si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

• Réflexivité :
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$
On a a = a et b ≤ b donc R est réflexive.

• Antisymétrie :
Soient $(a,b),(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(a,b)R(x,y)$ et $(x,y)\ R(a,b)$.
Nécessairement on a $a = x$ et $y \leq b$ et $b \leq y$,
D'où a =x et b= y .
Donc R est antisymétrique

• Transitivité :
Soient (a,b), (x,y), (l,k) $\in \mathbb{R}^2$ tels que que $(a,b)R(x,y)$ et $(x,y)R(l,k)$.

- Cas 1 : $a < x$ et $x < l$. On obtient $a < l$ et donc $(a,b)R(l,k)$.
- Cas 2 : $a = x$ et $x = l$. dans ce cas, on a $b \leq y$ et $y \leq k$. On peut en déduire $b \leq k$ et donc $(a,b)R(l,k)$.
- Cas 3 : $a = x$ et $x < l$. On obtient $a < l$ et donc $(a,b)R(l,k)$.
- Cas 4 : $a < x$ et $x = l$. On obtient $a < l$ et donc $(a,b)R(l,k)$.

Donc R est transitive.

Ainsi R est réflexive, antisymétrique et transitive, c'est donc une relation d'ordre partiel.

Exercice 5 :

Soit **R** la relation définie sur $\mathbb{Z}$ par : **p R q$\leftrightarrow$ $p+q$ est pair.**
R est-elle une relation d'équivalence ?

Réponse :

Pour que R soit une relation d'équivalence, il faut montrer qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

• Réflexivité :
Soit p $\in \mathbb{Z}$
On a p+p = 2p qui est pair, donc R est réflexive.

• Symétrie :
Soient p,q $\in \mathbb{Z}$
Si $p+ q = q+p$ donc si $p+q$ est pair, $q+p$ l'est aussi
R est symétrique.

• Transitivité :
Soient p,q,s $\in \mathbb{Z}$ tels que pRq et qRs .
Alors il existe $k, l \in \mathbb{Z}$ tels que $p+q = 2k$ et $q+s = 2l$
Et $p + 2q + s = 2k + 2l$
$p + s = 2(k+l-q)$
Donc $p + s$ est pair et R est transitive.

Ainsi R est une relation d'équivalence.

Exercice 6 :
Soit A = {3, 6, 9, 12, 15, 18} et une relation R sur cet ensemble tel que a R b si et seulement si a est un multiple de b.
a) Donnez l'ensemble des couples de cette relation R.

Réponse :

R = {(3, 3), (6, 6), (6, 3), (9, 9), (9, 3), (12, 12), (12, 6), (12, 3), (15, 15), (15,3), (18, 18), (18, 9), (18,6), (18, 3)}

b) Dites si R est une relation d'équivalence, un ordre partiel.

Réponse :

Pour répondre à la question, nous allons dans un premier temps vérifier les 4 propriétés réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité. La réflexivité, symétrie et la transitivité compte pour une relation d'équivalence alors réflexivité, l'antisymétrie et la transitivité compte pour la relation d'ordre partiel. L'absence d'une des propriétés est suffisante pour conclure en ce qui concerne l'équivalence ou l'ordre partiel.

• **Réflexivité :** La relation est réflexive puisque ∀ x ∈ A, (x, x) ∈ R ou encore ∀ x ∈ A, x R x.
• **Symétrie :** La relation n'est pas symétrique, puisque ((6, 3) ∈ R) ∧ (3, 6) ∉ R. Ainsi, ∃ (x, y) ∈ R ∧ (y, x) ∉ R.
• **Équivalence :** La relation n'étant pas symétrique, elle ne peut être une relation d'équivalence.
• **Antisymétrie :** Elle est antisymétrique, puisque (x≠ y) → ((x, y) ∉ R) ∨ ((y, x) ∉ R).
• **Transitivité :** Elle est transitive, puisque (((x, y) ∈ R) ∧ ((y, z) ∈ R)) → (x, z) ∈ R.
• **Ordre partiel** : La relation est un ordre partiel car elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

c) Dites si R vérifie la propriété suivante : $\forall$ x, y $\in$ A, (((x, y) $\in$ R) $\vee$ ((y, x) $\in$ R)).

Réponse :
(((6, 9) $\notin$ R) $\wedge$ ((9, 6) $\notin$ R)). R ne vérifie donc pas : $\forall$ x, y $\in$ A, (((x, y) $\in$ R) $\vee$ ((y, x) $\in$ R)).

d) **Question facultative :** à quoi correspond la propriété énoncée en c) ?

Réponse :
Une telle propriété fait d'une relation qui est déjà un ordre partiel, ce qu'on appelle un ordre total.
Grâce à la propriété $\forall$ x, y $\in$ A, (((x, y) $\in$ R) $\vee$ ((y, x) $\in$ R)), on dit que les éléments de A soit deux à deux comparables.
Dans l'exercice, 6 et 9 ne sont pas comparables. La relation n'est pas un ordre total.

e) **Question facultative :** une relation peut-elle être à la fois une relation d'équivalence et un ordre partiel ? justifiez votre réponse.

Réponse :
Oui, si dans la relation chaque élément est en relation avec exactement lui-même.
Si on prend l'ensemble R = {a,b}
La relation suivante est à la fois une relation d'ordre et d'équivalence :
S={(a,a),(b,b)}

En revanche, si au moins 2 élément différents sont en relation, alors la relation ne peut pas être à la fois d'ordre et d'équivalence.
Pour le prouver, raisonnons par contradiction.
Soit R une relation sur un ensemble E.
Supposons que R est à la fois un ordre partiel, et une relation d'équivalence, qui met en relation au moins 2 éléments distincts .
R est fois un ordre partiel, et une relation d'équivalence donc R est à la fois symétrique, et antisymétrique.

Prenons un couple $x, y \in E^2$ tel que $(x,y) \in \mathrm{R}$ et $x \neq y$. Ce couple existe par hypothèse de départ.
R est symétrique donc $(y,x) \in \mathrm{R}$.
R est antisymétrique et $x \neq y$ donc $(y,x) \notin \mathrm{R}$.
Contradiction.
Donc R ne peut pas être symétrique et antisymétrique, et ainsi R ne peut pas être un ordre partiel et une relation d'équivalence.