POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810
STRUCTURES DISCRÈTES

TD 3 : **INFÉRENCE ET TECHNIQUES DE PREUVES**

É2022

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1. Soit n un entier positif. En utilisant la preuve directe, démontrez que :

n est pair si et seulement si 7n + 4 est pair.

Réponse :

Il s'agit de démontrer une biconditionnelle (bi-implication). Il nous faut donc démontrer 2 implications, soit :

n est pair seulement si 7n + 4 est pair
7n + 4 est pair seulement si n est pair

- Démontrons l'implication n est pair seulement si 7n + 4 est pair, en utilisant la preuve directe.
  Supposons que n est pair. Il existe un entier k tel que n = 2k.
  Ainsi, 7n + 4 =14k + 4 = 2(7k + 2)
  7n + 4 est donc pair.
  L'implication n est pair seulement si 7n + 4 est pair est ainsi prouvée.
- Démontrons l'implication 7n+4 est pair seulement si n est pair, en utilisant la preuve directe.
  Supposons que 7n + 4 est pair.
  4 étant pair et 7n + 4 pair, il s'en suit que 7n est pair.
  7 étant impair et 7n pair, il s'en suit que n est pair.
  L'implication 7n + 4 est pair seulement si n est pair est ainsi prouvée.

Les deux implications étant prouvées, nous pouvons conclure que n est pair si et seulement si 7n + 4 est pair.

Exercice 2. Soit a un réel. En utilisant la preuve indirecte (par contraposition), démontrez que si a^2 n'est pas un multiple entier de 16, alors a/2 n'est pas un entier pair.

Réponse :

La contraposée de « si a^2 n'est pas un multiple entier de 16, alors a/2 n'est pas un entier pair » est :

« si a/2 est un entier pair, alors a^2 est un multiple entier de 16»

Supposons que a/2 est un entier pair.
Il existe un entier k tel que a/2 =2k.
On a donc a = 4k et a^2 = 16 k^2. Ce qui permet de dire que a^2 est un multiple entier de 16.
Par conséquent, la preuve « si a/2 est un entier pair, alors a^2 est un multiple entier de 16» est établie ainsi que sa contraposée « si a^2 n'est pas un multiple entier de 16, alors a/2 n'est pas un entier pair ».

Exercice 3. Soient *a* et *b* deux réels positifs. En utilisant la preuve par contradiction (raisonnement par l'absurde), montrez que :

$$Si\ \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}, alors\ a = b$$

Réponse :

Raisonnons par l'absurde. Supposons que l'implication

$$Si\ \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}, alors\ a = b$$

est fausse. C'est-à-dire :

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \ \wedge \ \mathrm{a} \neq \mathrm{b}$$

a et b étant positifs, 1 + b et 1+ a sont non nuls.
On a : a(1+a) = b(1+b)
$a + a^2 = b + b^2$
$(a-b) + (a^2 - b^2) = 0$
(a - b) + (a - b)(a + b) = 0
(a - b)(1 + a + b) = 0
Puisque a ≠b, on a (1 + a + b) = 0
Soit a + b = -1.
Or a et b sont tous positifs. Leur somme ne peut pas être négative. Contradiction.
D'où

$$Si \ \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}, alors \ a = b$$

Exercice 4.
En utilisant la preuve par cas, démontrez que le carré d'un entier qui n'est pas divisible par 7 donne pour reste 1, 2 ou 4 lorsqu'il est divisé par 7.

Réponse
Lorsqu'un entier n'est pas divisible par 7, le reste de sa division par 7 est soit 1, 2, 3, 4, 5, ou 6. Il faut donc se baser sur ces 6 cas pour faire la preuve.
Soit n un entier n'est pas divisible par 7. On a n=7k+r avec k entier et r = 1 ou r = 2, ou r = 3, ou r = 4, ou r = 5, ou r = 6.
$n^2 = (7k+r)^2 = 49k^2 + 14\,k + r^2$.
$49k^2 + 14\,k = 7(7k^2 + 2\,k)$. Il est divisible par 7.
Le reste de la division de n^2 par 7 est donc celui r^2 par 7.
Examinons chaque cas.

- Cas r = 1
  $r^2 = 1^2 = 1$. Le reste de la division de 1 par 7 est 1.
- Cas r = 2
  $r^2 = 2^2 = 4$. Le reste de la division de 4 par 7 est 4.
- Cas r = 3
  $r^2 = 3^2 = 9$. Le reste de la division de 9 par 7 est 2.
- Cas r = 4
  $r^2 = 4^2 = 16$. Le reste de la division de 16 par 7 est 2.
- Cas r = 5
  $r^2 = 5^2 = 25$. Le reste de la division de 25 par 7 est 4.
- Cas r = 6
  $r^2 = 6^2 = 36$. Le reste de la division de 36 par 7 est 1.

Les 6 cas ramènent à un reste qui est 1, 2 ou 4. D'où` le carré d'un entier qui n'est pas divisible par 7 donne pour reste 1, 2 ou 4 lorsqu'il est divisé par 7.

Exercice 5. Montrez que l'affirmation suivante est fausse :

Tout entier positif est la somme de trois carrés distincts.

Note : les carrés sont : 0, 1, 4, 9, 16, 25, ….

Réponse

On utilise la technique de preuve par contre-exemple. Prenons 12.

$12 = 9 + 1 + 2$

$12 = 1^2 + 3^2 + 2$ ou encore $12 = 1^2 + 2^2 + 7$

L'entier positif 12 n'est pas la somme de trois carrés distincts.

Exercice 6. Soit le raisonnement suivant au sujet d'une rencontre.

> Quand Marie est là, c'est qu'elle accompagne Paul ou Jean. Paul ne vient jamais en même temps que son cousin Serge. Si Jean et Serge viennent tous les deux, leur sœur Louise les accompagne. Si Louise se pointe, Raoul ne reste pas. Hier, Raoul et Serge étaient présents jusqu'à la fin.

On considère également les définitions suivantes.

- M : Marie est présente à la rencontre
- P : Paul est présent à la rencontre
- J : Jean est présent à la rencontre
- S : Serge est présent à la rencontre
- L : Louise est présente à la rencontre
- R : Raoul est présent à la rencontre

1. En utilisant les définitions ci-dessus, traduisez les hypothèses énoncées en logique mathématique.

Réponse :

- Quand Marie est là, c'est qu'elle accompagne Paul ou Jean.
  - **H1** : $M \rightarrow (P \vee J)$
- Paul ne vient jamais en même temps que son cousin Serge.
  - **H2 :** $P \oplus S$
- Si Jean et Serge viennent tous les deux, leur sœur Louise les accompagne.
  - **H3** : $(J \wedge S) \rightarrow L$
- Si Louise se pointe, Raoul ne reste pas.
  - **H4** : $L \rightarrow \neg R$
- Hier, Raoul et Serge étaient présents jusqu'à la fin.
  - **H5** : $(R \wedge S)$

2. Peut-on conclure que Marie n'était pas présente à la rencontre ? Pour répondre à la question, vous utiliserez les hypothèses définies à la question a) et vos connaissances des règles d'inférence.

Réponse :

Soit C la conclusion Marie n'était pas présente à la rencontre. On a :

- **C** : $\neg M$

Le raisonnement est le suivant.

1.	$R \wedge S$	H5
2.	R	1 et règle de simplification

3. S	1 et règle de simplification
4. $L \rightarrow \neg R$	H5
5. $\neg L$	2, 4 et règle du modus tollens
6. $(J \wedge S) \rightarrow L$	H3
7. $\neg(J \wedge S)$	5, 6 et règle du modus tollens
8. $\neg J \vee (\neg S)$	7 et Loi de De Morgan
9. $\neg J$	3, 8 et règle du syllogisme disjonctif
10. $P \oplus S$	H2
11. $\neg P$	3, 10 et Définition de $\oplus$
12. $\neg J \wedge \neg P$	9, 11 et règle de conjonction
13. $\neg(J \vee P)$	12 et loi de De Morgan
14. $\neg(P \vee J)$	14 et loi de commutativité de $\vee$
15. $M \rightarrow (P \vee J)$	H1
16. $\neg M$	14, 15 et règle du modus tollens

On peut donc conclure que Marie n’était pas présente à la rencontre.