POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 3 : PREUVES

A2024

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 :

Démontrez par l'absurde qu'il n'existe pas de plus grand nombre premier.

Réponse :

Supposons par l'absurde qu'il existe un plus grand nombre premier, que nous appellerons p. Cela signifie que l'ensemble des nombres premiers est fini, et que tous les nombres premiers sont $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, avec $p_n = p$ étant le plus grand.

Construisons un nouveau nombre N en multipliant tous les nombres premiers connus entre eux et en ajoutant 1. Autrement dit :

$$N = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \dots \times p_n + 1$$

Ce nombre N n'est divisible par aucun des $p_1, p_2, \dots, p_n$, car lorsqu'on divise N par n'importe lequel de ces nombres, il reste 1.

Donc, N n'est divisible par aucun des nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_n$. Cela signifie que N est soit un nombre premier, soit divisible par un autre nombre premier qui n'est pas dans notre liste.

Dans les deux cas, cela contredit notre hypothèse initiale selon laquelle p est le plus grand nombre premier. Si N est premier, alors il est plus grand que p, et s'il est divisible par un autre nombre premier, alors ce nombre est plus grand que p.

Par conséquent, notre supposition selon laquelle il existe un plus grand nombre premier est fausse. Il n'existe donc pas de plus grand nombre premier, et l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 2 :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. En utilisant la preuve par contraposition (preuve indirecte), démontrez que si $a \cdot b$ est pair, alors au moins un des entiers a ou b est pair.

Réponse :

Puisqu'on suggère une preuve indirecte, on démontrera la contraposée : *Si a et b sont tous deux impairs, alors $a \cdot b$ est impair.*

Supposons donc par hypothèse que a et b sont impairs. Donc, il existe k_1 et k_2 entiers tels que :

$$a = 2k_1 + 1 \quad \text{et} \quad b = 2k_2 + 1$$

En développant le produit $a \cdot b$:

$$a \cdot b = (2k_1 + 1)(2k_2 + 1) = 4k_1k_2 + 2k_1 + 2k_2 + 1$$

Ce qui peut se réécrire sous la forme :

$a \cdot b = 2(2k_1k_2 + k_1 + k_2) + 1$

Cela montre que $a \cdot b$ est de la forme $2k' + 1$, où $k' = 2k_1k_2 + k_1 + k_2$ est un entier.

Donc, $a \cdot b$ est impair.

Ainsi, par contraposition, si $a \cdot b$ est pair, alors au moins un des entiers a ou b est pair. *CQFD.*

Exercice 3 :

En utilisant la preuve par cas, démontrez que si $x \in \mathbb{R}*$, alors $0 < \frac{x^2}{|x|} \leq |x|$.

Réponse :

Les deux cas sont :

- Cas 1) $x > 0$ - Cas 2) $x < 0$

Cas 1 : $x > 0$

On le fait avec une preuve directe : Par hypothèse, $x > 0$. Dans ce cas, $|x| = x$. Donc,

$$\frac{x^2}{|x|} = \frac{x^2}{x} = x$$

D'une part, comme $x > 0$, on donc $\frac{x^2}{|x|} > 0$. Et d'autre part, on a également $x = |x|$, donc $\frac{x^2}{|x|} \leq |x|$. Ainsi, dans ce cas, $0 < \frac{x^2}{|x|} \leq |x|$ est vrai.

Cas 2 : $x < 0$

On le fait avec une preuve directe : Par hypothèse, $x < 0$. Dans ce cas, $|x| = -x$. Donc,

$$\frac{x^2}{|x|} = \frac{x^2}{-x} = -x$$

Comme $x < 0$, on a $-x > 0$, donc $\frac{x^2}{|x|} = -x = 0$. Ainsi, $\frac{x^2}{|x|} \leq |x|$ dans ce cas est également vrai.

Dans les deux cas, nous avons montré que $0 < \frac{x^2}{|x|} \leq |x|$. Par conséquent, nous avons démontré que si $x \in \mathbb{R}$, alors $0 < \frac{x^2}{|x|} \leq |x|$. *CQFD*.

Exercice 4 :

En utilisant la preuve directe, démontrez que si a et b sont deux nombres réels distincts tels que $a < b$, alors la moyenne $m = \frac{a+b}{2}$ de ces deux nombres est telle que $a < m < b$.

Réponse :

Par hypothèse, il existe a et b réels distincts tels que $a < b$. Et posons $m = \frac{a+b}{2}$.

(I) En additionnant les deux côtés de $a < b$ par b, on a :

$$a < b \quad \equiv \quad a + b < b + b \quad \equiv \quad a + b < 2b \quad \equiv \quad \frac{a+b}{2} < b \quad \equiv \quad m < b$$

où $m = \frac{a+b}{2}$.

(II) En additionnant les deux côtés de $a < b$ par a, on a :

$$a < b \quad \equiv \quad a + a < b + a \quad \equiv \quad 2a < a + b \quad \equiv \quad a < \frac{a+b}{2} \quad \equiv \quad a < m$$

où $m = \frac{a+b}{2}$.

En combinant (I) et (II), on obtient $a < m < b$.

Ainsi, si $a < b$, alors la moyenne $m = \frac{a+b}{2}$ de ces deux nombres est telle que $a < m < b$. *CQFD*.

Exercice 5 :

Pour chacun de ces arguments, déterminez si l'argument est correct ou incorrect et expliquez pourquoi.

1. Tous les étudiants boivent du café. Nizar est étudiant. Donc, Nizar boit du café.
Réponse : Correct, utilisant l'instanciation universelle et le modus ponens.

2. Tous les utilisateurs de Mac pensent qu'Apple est supérieur à tout. Maï pense qu'Apple est la meilleure entreprise au monde. Donc, Maï utilise un Mac.
Réponse : Incorrect; c'est une erreur de généralisation. Le fait que Maï adore Apple ne signifie pas nécessairement qu'elle utilise un Mac.

3. Toutes les personnes qui possèdent un chien sont plus heureuses. Otmane est stressé. Donc, Otmane n'a pas de chien.
Réponse : Correct; en utilisant le modus tollens. Si toutes les personnes qui possèdent un chien sont plus heureuses ($P \rightarrow Q$), et qu'Otmane n'est pas plus heureux ($\neg Q$), alors on peut logiquement conclure qu'Otmane ne possède pas de chien ($\neg P$).

4. Chaque personne qui utilise TikTok est accro aux vidéos de chats. Jacinthe déteste les vidéos de chats. Donc, Jacinthe n'utilise pas TikTok.
Réponse : Correct; modus tollens. Si chaque personne qui utilise TikTok est accro aux vidéos de chats ($P \rightarrow Q$), et que Jacinthe déteste les vidéos de chats ($\neg Q$), alors il est logique de conclure que Jacinthe n'utilise pas TikTok ($\neg P$).

5. Chaque personne qui passe beaucoup de temps sur le réseau social X aime débattre. Evenson aime débattre. Donc, Evenson passe beaucoup de temps sur X.
Réponse : Incorrect; c'est une erreur de généralisation hâtive. Bien que Evenson adore débattre, cela ne prouve pas qu'il passe son temps sur X.

Exercice 6 :

Une personne étudiante fait la déclaration suivante.

> « Fumer est nocif pour la santé. Boire sans modération aussi, d'ailleurs. Quand je ne fume pas, je bois sans modération. Ces habitudes mettent donc ma santé en danger. »

En vous basant sur les définitions, les traductions ci-dessous, vos connaissances en logique ainsi que les règles d'inférence vues en cours, que dites-vous du raisonnement de cette personne ? Vous devez numéroter et justifier convenablement les étapes de votre raisonnement.

Définitions :

F : Fumer
B : Boire sans modération
R : Existence d'un risque pour la santé

Traductions :

Énoncé	Expression logique
Fumer est nocif pour la santé.	H1 : $F \rightarrow R$
Boire sans modération est nocif pour la santé.	H2 : $B \rightarrow R$
Quand je ne fume pas, je bois sans modération.	H3 : $\neg F \rightarrow B$
Ma santé est en danger.	C : R

Plusieurs solutions sont possibles.

Solution 1

1. $\neg F \rightarrow B$	H3
2. $\neg B \rightarrow \neg(\neg F)$	Ligne 1 et équivalence par contraposition
3. $\neg B \rightarrow F$	Ligne 2 et application de la loi de double négation
4. $F \rightarrow R$	H1
5. $\neg B \rightarrow R$	Lignes 3 et 4 et application de la règle du syllogisme par hypothèse
6. $\neg R \rightarrow \neg(\neg B)$	Ligne 5 et équivalence par contraposition
7. $\neg R \rightarrow B$	Ligne 6 et application de la loi de double négation
8. $B \rightarrow R$	H2
9. $\neg R \rightarrow R$	Lignes 7 et 8 et application de la règle du syllogisme par hypothèse
10. $\neg(\neg R) \vee R$	Ligne 9 et traduction de l'implication en disjonction
11. $R \vee R$	Ligne 10 et application de la loi de double négation
12. R	Ligne 11 et application de la loi d'idempotence
13. C	Ligne 12 et définition

Conclusion

Le raisonnement de la personne étudiante est bien valide.

Solution 2

1. ¬F → B	H3
2. ¬B → ¬(¬F)	Ligne 1 et équivalence par contraposition
3. ¬B → F	Ligne 2 et application de la loi de double négation
4. F → R	H1
5. ¬B → R	Lignes 3 et 4 et application de la règle du syllogisme par hypothèse
6. ¬(¬B) ∨ R	Ligne 5 et traduction de l'implication en disjonction
7. B ∨ R	Ligne 6 et application de la loi de double négation
8. B → R	H2
9. ¬B ∨ R	Ligne 8 et traduction de l'implication en disjonction
10. (R ∨ R)	Lignes 7 et 9 et application de la loi de la résolution
11. R	Ligne 10 et application de la loi d'idempotence
12. C	Ligne 11 et définition

Conclusion

Le raisonnement de la personne étudiante est bien valide.