FINAL H22

Question#1 : Logique des prédicats

Soit ***U*** l'univers des personnes et des animaux et ***t*** la constante qui désigne *Tobby*. Soit les fonctions propositionnelles suivantes :

- Aime(x, y) : x aime y
- C(x) : x est un chien
- E(x) : x est un enfant
- Cr(x, y) : x craint y

Traduisez en logique des prédicats, les énoncés suivants.

a) **(1 point)** *Tobby* est un chien qui aime les enfants.

Réponse :

$\forall y\ E(y) \land C(t) \land Aime(t, y)$

b) **(1 point)** Tous les enfants ne craignent pas les chiens.

Réponse :

$\exists x\ \forall y\ (E(x) \land C(y) \land (\neg Cr(x, y)))$

c) **(1.25 point)** Certains chiens aiment les enfants et réciproquement.

Réponse :

- $(\exists y\ \forall x\ (C(y) \land E(x) \land Aime\ (y, x))) \land (\exists x\ \forall\ y\ (C(y) \land E(x) \land Aime\ (x, y)))$
- $(\exists y\ \forall x\ Aime\ (y, x)) \land (\exists x\ \forall\ y\ Aime\ (x, y)) \land C(y) \land E(x)$

Question#2 : Dénombrement

Exercice 1 : dé à n faces

On lance un dé à **8 faces** jusqu'à ce qu'on obtienne un même chiffre pour la deuxième fois. La suite des chiffres obtenus est appelée un résultat.

a. Quel est le nombre maximal de lancers ?

Réponse :

Le nombre maximal de lancer est atteint lorsqu'après 8 lancers chaque lancer donne une face différente. Il faudrait donc un 9ème lancer pour avoir l'un des chiffres se répéter. Le résultat recherché est 9.

b. Combien y-a-t-il de résultats obtenus avec exactement cinq lancers ?

Réponse :

Le résultat des lancers est un arrangement (permutation) avec remise, car à chaque lancer les 8 faces du dé sont en jeu et l'ordre compte. En effet, l'énoncé parle de suite de chiffres. L'ordre dans lequel ces chiffres sont pris est donc important. Ainsi on pourrait constituer le résultat en notant le chiffre qui sort au premier lancer, au deuxième, etc.

- Au premier lancer, il y a P(8, 1) possibilités.
- Le chiffre sorti au premier lancer n'est pas réapparu au deuxième lancer. On a donc P(7, 1) possibilités pour le deuxième lancer.
- Les chiffres sortis au premier et deuxième lancer ne sont pas réapparus au troisième lancer puisqu'il faut 5 lancers. On a donc P(6, 1) possibilités pour le troisième lancer.
- Les chiffres sortis au premier deuxième et troisième lancer ne sont pas réapparus au quatrième lancer puisqu'il faut 5 lancers. On a donc P(5, 1) possibilités pour le troisième lancer.
- Au cinquième et dernier lancer, le chiffre obtenu est un des quatre chiffres précédemment obtenus. Il y a donc P(4, 1) possibilités pour ce cinquième lancer.

  Le nombre de résultats obtenus avec exactement trois lancers est donc P(8, 1) x P(7, 1) x P(6, 1) x P(5, 1) x P(4, 1) = 8 x 7 x 6 x 5 x 4 = 6720

▼ Question#3 : Injectivité, Surjectivité, Bijectivité

**** Par exactement cette question, mais il y avait des cas à considérer pour démontrer la surjectivité pour conclure que f(x) était bijective.**

a) Soit ***f*** : $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ définie pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ par ***f(n, m) = n*** *x* ***m****, produit de n par m*.

b) **(2 points)** ***f*** est-elle injective ?

Réponse :

- Méthode 1 :

Soit (n_1, m_1) et $(n_2, m_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(n_1, m_1) \neq (n_2, m_2)$

$(n_1, m_1) \neq (n_2, m_2) \rightarrow (n_1 = n_2 \wedge m_1 \neq m_2) \vee (n_1 \neq n_2 \wedge m_1 = m_2) \vee (n_1 \neq n_2 \wedge m_1 \neq m_2)$

  - Cas $n_1 = n_2 \wedge m_1 \neq m_2$

    $m_1 \neq m_2 \rightarrow n_1m_1 \neq n_1m_2$

    $m_1 \neq m_2 \rightarrow n_1m_1 \neq n_2m_2$ car $n_1 = n_2$

    Donc $f(n_1, m_1) \neq f(n_2, m_2)$

  - Cas $n_1 \neq n_2 \wedge m_1 = m_2$

    $n_1 \neq n_2 \rightarrow n_1m_1 \neq n_2m_1$

    $n_1 \neq n_2 \rightarrow n_1m_1 \neq n_2m_2$ car $m_1 = m_2$

    Donc $f(n_1, m_1) \neq f(n_2, m_2)$

  - Cas $n_1 \neq n_2 \wedge m_1 \neq m_2$

    $n_1 \neq n_2 \wedge m_1 \neq m_2$ mais on n'a pas toujours $n_1m_1 \neq n_2m_2$

  f n'est donc pas injective.

- Méthode 2 : Contre-exemple

  $(n_1, m_1) = (2, 4)$ et $(n_2, m_2) = (1, 8)$

  $f(n_1, m_1) = f(n_2, m_2) = 8$ et $(n_1, m_1) \neq (n_2, m_2)$

  f n'est donc pas injective.

c) **(2 points)** ***f*** est-elle surjective ?

Réponse :

$\forall y \in \mathbb{N}, \exists\ (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $y = nm = f(n, m)$

f est surjective.

▼ Question#4 : Méthode de preuve

**** Je me rappelle plus si c'était une preuve indirecte ou par contradiction, mais vous comprenez le principe**

Exercice 3. En utilisant la preuve indirecte (preuve par contraposition), démontrez que :

Si l'entier (n^2 - 1) n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

Réponse :

Il s'agit de démontrer une implication par la preuve indirecte. Ce qui revient à faire la preuve directe de la contraposée de cette implication, c'est-à-dire :

Si l'entier n n'est pas pair, alors l'entier (n^2 - 1) est divisible par 8.

Ou encore

Si l'entier n est impair, alors l'entier (n^2 - 1) est divisible par 8.

Supposons que n est impair.
Il existe un entier k tel que n=2.k + 1. On a alors (n^2 – 1)= $4k^2$ +4k =4k(k+1).
k étant un entier, lorsqu'il est pair (K+1) est impair et leur produit est toujours pair.
Aussi, lorsqu'il est impair, (K+1) est pair et leur produit est toujours pair.
On en déduit que 4k(k+1) est multiple de 8 et qu'ainsi (n^2 - 1) est divisible par 8.
D'où, Si l'entier (n^2 - 1) n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

▼ Question#5 : Réflexivité, Antisymétrie, Transitivité

Montrez que la relation R définie dans $\mathbb{N}^* = \{1,2,\ldots\}$ comme ci-dessous est une relation d'ordre.

$$pRq \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*, q = p^k$$

Réponse:

Montrons que la relation est une relation d'ordre en montrant qu'elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Réflexivité

Soit p un entier non nul.

On a $p=p^1$. Donc il existe k un entier non nul tel que $p=p^k$.

On en déduit que R est réflexive.

Antisymétrie

Soit p et q deux entiers non nuls tel que ***p R q*** et ***q R p***.

Par définition :

$$pRq \leftrightarrow \exists k_1 \in N^*, q = p^{k_1}$$

$$pRq \leftrightarrow \exists k_2 \in N^*, p = q^{k_2}$$

En remplaçant q dans la 2ème égalité par son expression de la 1ère égalité, on obtient :

$$p = p^{k_1 \times k_2}$$

Ainsi on a $k_1 \times k_2 = 1$, soit $k_1 = k_2 = 1$

D'où $p = q$

R est donc antisymétrique

Transitivité

Soit p, q et s trois entiers non nuls tel que ***p R q*** et ***q R s***.

Par définition :

LOG2810-01-02-03 Contrôle périodique 2

$pRq \leftrightarrow \exists k_1 \in N^*, q = p^{k_1}$

$qRs \leftrightarrow \exists k_2 \in N^*, s = q^{k_2}$

En remplaçant q dans la 2ème égalité par son ***p R q*** expression de la 1ère égalité, on obtient :

$s = p^{k_1 \times k_2}$

En posant $k = k_1 \times k_2$ on a $s = p^k$. **Ainsi *p R s*.**

R est donc transitive.

▼ Question#6 : Théorème maître

Vous décidez d'utiliser la technique de diviser pour régner pour résoudre un certain type de problèmes.

- Pour $n \geq 4$, vous pouvez obtenir la solution à un exemplaire de taille n en résolvant ***64*** sous-exemplaires de taille **⌈n/4⌉**.
- Le temps requis pour la décomposition de l'exemplaire original en ***64*** sous-exemplaires est $\Theta(n^2/\log n)$.
- Le temps requis pour la recombinaison des solutions est en $\Theta(n^2)$.

En supposant que n est une puissance de **4**, trouvez l'ordre de grandeur du temps d'exécution de la solution.

Réponse :

Soit $f(n)$ la fonction correspondant à la solution.

En considérant les temps des manipulations complémentaires $\Theta(n^2/\log n)$ et $\Theta(n^2)$, on obtient une fonction $g(n)$ qui est $\Theta(\max(n^2/\log n, n^2))$, *soit* $\Theta(n^2)$.

Puisque $g(n)$ est $\Theta(n^2)$, elle est aussi $O(n^2)$.

On peut donc écrire que :

$f(n) = 64f(\lceil n/4 \rceil) + n^2$

Elle est de la forme $f(n) = af(\lceil n/b \rceil) + c.n^d$, avec $a = 64$, $b=4$, $c=1$ et $d=2$.

Comparons $a = 64$ et $b^d = 16$. On a que $a > b^d$

$f(n) = O(n^{\log_b a}) = O(n^{\log_4 64}) = O(n^3)$

D'où $f(n) = = O(n^3)$

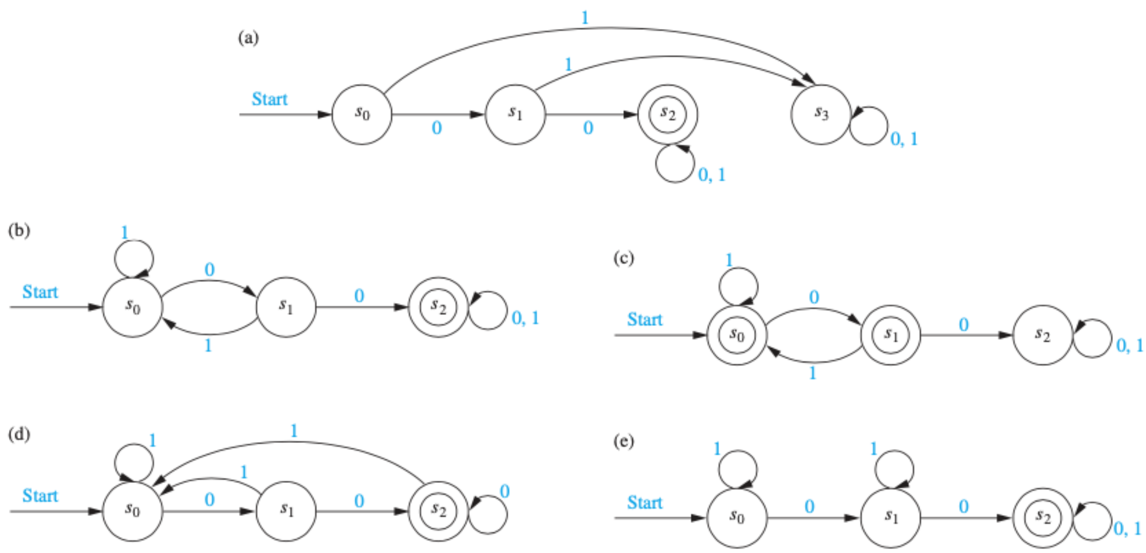
▼ Question#7 : Construire un automate fini déterministe

**Similaire à l'exo c)

EXAMPLE 6 Construct deterministic finite-state automata that recognize each of these languages.

Extra Examples

(a) the set of bit strings that begin with two 0s
(b) the set of bit strings that contain two consecutive 0s
(c) the set of bit strings that do not contain two consecutive 0s
(d) the set of bit strings that end with two 0s
(e) the set of bit strings that contain at least two 0s



(c) Our goal is to construct a deterministic finite-state automaton that recognizes the set of bit strings that do not contain two consecutive 0s. Besides the start state s_0, which should be a final state, we include a final state s_1, which we move to from s_0 when 0 is the first input bit. When an input bit is a 1, we return to, or stay in, state s_0. We add a state s_2, which we move to from s_1 when the input bit is a 0. Reaching s_2 tells us that we have seen two consecutive 0s as input bits. We stay in state s_2 once we have reached it; this state is not final. The reader should verify that the finite-state automaton in Figure 3(c) recognizes the set of bit strings that do not contain two consecutive 0s. [The astute reader will notice the relationship between the finite-state automaton constructed here and the one constructed in part (b). See Exercise 39.]

▼ Question#8 : Proposer une grammaire qui engendre le langage

Exercice 3. Soit le langage ***L*** = ***{(a + b)*ba*}*** construit sur l'alphabet ***X*** = *{a, b}*. Proposez une grammaire ***G*** = *(V, T, S, P)* qui engendre le langage ***L***. Vous devez préciser ***V***, ***T***, et ***P***.

Réponse :

Note : Plusieurs solutions sont possibles. Celle qui est proposée ici n'est qu'une solution parmi tant d'autres.

- G = (V, T, S, P)
- V = {a, b, S, A}
- T = {a, b}
- P est constitué des productions suivantes :

  S → aS | bS | bA | b

  A → aA | a

▼ Question#9 : Arbre de dérivation

Exercice 4. . Soit les grammaires ***G*** *= (V₁, T₁, S, P₁)* où ***V*** *= {a, b, S, A, B},*
T *= {a, b}*. ***S*** est l'axiome, ***P*** est l'ensembles de règles de production.

$$P = \{S \rightarrow AA \mid ABA \mid B,\ A \rightarrow aaA \mid aa,\ B \rightarrow bB \mid b\}$$

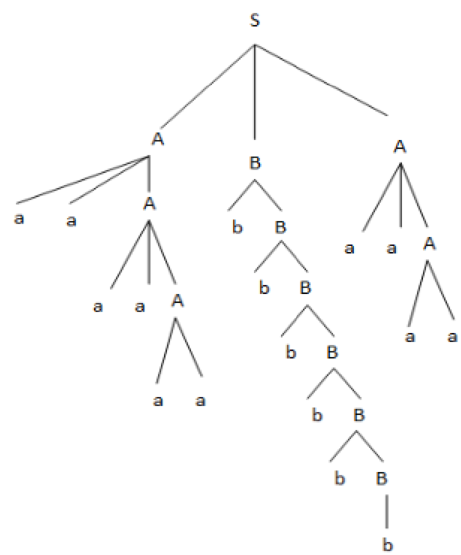
Le mot ***aaaaaabbbbbbaaaa*** est-il reconnu par cette grammaire ? Si oui, donnez la dérivation correspondante.

Réponse :

- Dérivation

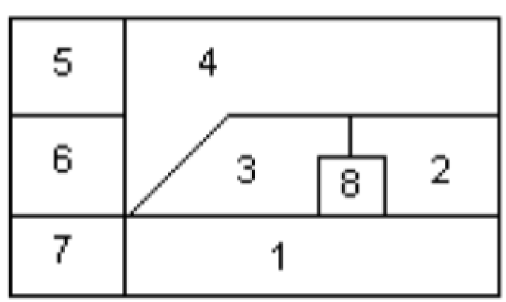
S → ABA
S → aaABA (car A → aaA)
S → aaaaABA (car A → aaA)
S → aaaaaaBA (car A → aa)
S → aaaaaabBA (car B → bB)
S → aaaaaabbBA (car B → bB)
S → aaaaaabbbBA (car B → bB)
S → aaaaaabbbbBA (car B → bB)
S → aaaaaabbbbbBA (car B → bB)
S → aaaaaabbbbbbA (car B → b)
S → aaaaaabbbbbbaaA (car A → aaA)
S → aaaaaabbbbbbaaaa (car A → aa)

- Arbre de dérivation



▼ Question#10 : Circuit eulérien/hamiltonien

<u>**Exercice 5**</u> (3 points)
Huit pays sont représentés ci-dessous avec leurs frontières. Deux pays qui ont en commun une partie des frontières sont dits adjacents. Cependant, deux pays dont les frontières n'ont qu'un nombre fini de points en commun ne sont pas considérés comme étant adjacents.



c. ***(1.5 point)*** Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir après avoir franchi chaque frontière une et une seule fois ? Justifiez votre réponse.

Question#11 : Lemme de pompage

Exercice 6. Montrez que le langage ***L*** n'est pas régulier.

$$L = \{ 0^{2n}1^{n}, n \in \mathbb{N} \}$$

Réponse :

Raisonnons par l'absurde. Supposons que le langage est régulier. Il vérifie donc le lemme de pompage. Soit p la constante du lemme de pompage.

Le mot $m = 0^{2p}1^{p}$ est un mot de ***L***. La décomposition $m = uvw$ tel que $u = 0^{i}$, $v = 0^{j}$ et $w = 0^{(2p-i-j)}1^{p}$ avec $i+j < p$ et $j \geq 1$ satisfait aux conditions du lemme de pompage. Ainsi, le mot $uv^{0}w$ devrait être aussi un mot de ***L***.

$uv^{0}w = uw$

$uv^{0}w = 0^{i}0^{(2p-i-j)}1^{p}$

$uv^{0}w = 0^{(2p-j)}1^{p}$

$0^{(2p-j)}1^{p}$ n'est pas un mot du langage. Puisque $j \geq 1$ on a $(2p-j) \neq 2p$. Le lemme de pompage n'est donc pas vérifié.

D'où le langage ***L*** n'est pas régulier.