POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 12 : MODÉLISATION COMPUTATIONNELLE

A2022

Directives pour la remise :

- Répondez directement sur ce document papier.
- La remise est individuelle, mais le travail en équipe est encouragé.
- La remise se fait à la fin de la séance de TD.
- **Aucun retard ne sera accepté.**
- **Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.**

Identification

Veuillez inscrire votre section, nom, prénom et matricule ainsi que les noms des collègues avec lesquels vous avez collaboré pour le TD

Section :

Nom :

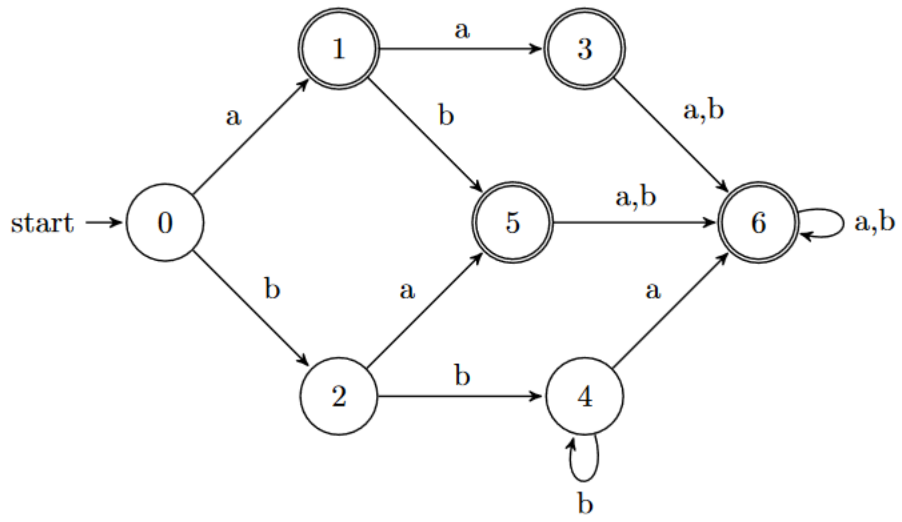
Prénom :

Matricule :

Collègues :

Exercice 1 :

Donnez la grammaire G qui génère le langage reconnu par l'automate suivant. Vous devez préciser l'alphabet **V**, l'ensemble des symboles terminaux **T**, l'axiome **S**, et l'ensemble des règles de production **P**.



Réponse :
Soit les symboles non terminaux associés aux états comme suit :
• État 0 : Symbole non terminal S, axiome de la grammaire
• État 1 : Symbole non terminal A
• État 2 : Symbole non terminal B
• État 3 : Symbole non terminal C
• État 4 : Symbole non terminal D
• État 5 : Symbole non terminal E
• État 6 : Symbole non terminal F
Nous avons les ensembles suivants :
N = {S, A, B, C, D, E, F},
T = {a, b},
V = {a, b, S, A, B, C, D, E, F}.

Les productions de **P** sont :

S → a | aA | bB
A → a | aC | b | bE
B → a | aE | bD
C → a | b | aF | bF
D → a | aF | bD
E → a | b | aF | bF
F → a | b | aF | bF

Exercice 2 :

Construisez un automate déterministe à états finis qui reconnaît le langage généré par la grammaire régulière G=(V,T,S,P) où :

V = {a,b,S,A,B,C,D}

T = {a,b}

Et les productions P sont :

S -> bB | aA

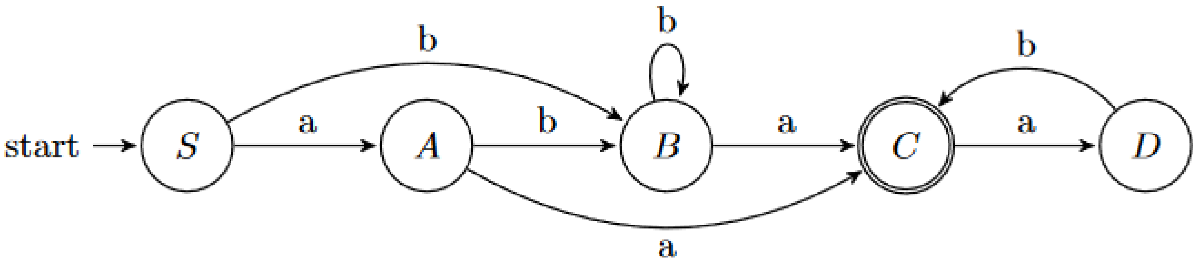
A -> bB | aC | a

B -> bB | aC | a

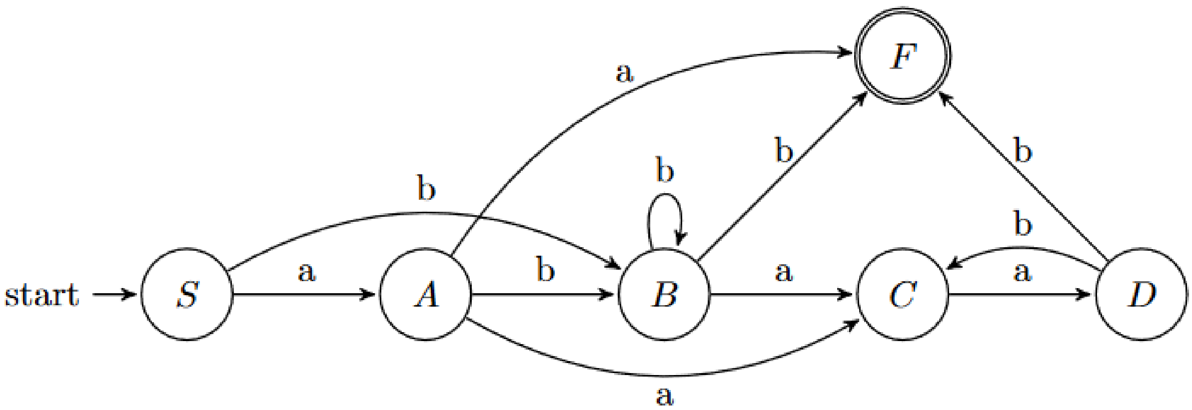
C -> aD

D -> bC | b

Réponse :



Attention ! L'automate ci-dessous n'est PAS une bonne réponse, car il n'est pas déterministe.



Exercice 3 :

On considère :

- L'alphabet **V = {a,b,S,A,B}**
- L'ensemble des symboles terminaux **T={a,b}**
- L'axiome **S**

Pour chacune des grammaires suivantes, donnez son type. Justifiez votre réponse.

a) $G_1 = (V,T,S,P_1)$ avec $P_1 = \{ S\to aB|bA \ , A \to a \ , B \to bA| \lambda \}$

Réponse :

- Elle n'est pas de type 3, à cause de la règle de production B -> λ où B n'est pas l'axiome.
- Elle est de type 2, car tous les symboles à gauche dans les productions de P1 sont des symboles non terminaux.

b) $G_2 = (V,T,S,P_2)$ avec $P_2 = \{ S \to \lambda \ , S\to aaB \ , A \to aB|a \ , B \to bAA\}$

Réponse :

- Elle n'est pas de type 3 du fait de la présence des productions S → aaB, B → bAA qui ne sont pas de la forme w1 → a | aA avec a un symbole terminal et A un symbole non terminal.
- Elle est de type 2, car tous les symboles à gauche dans les productions de P2 sont des symboles non terminaux.

c) $G_3 = (V,T,S,P_3)$ avec $P_3 = \{ S\to bA|\lambda \ , A \to aaa|aAB \ , AB \to S\}$

Réponse :

- Elle n'est pas de type 3, car A -> aaa|aAB n'est pas de la forme w1 → a | aA avec a un symbole terminal et A un symbole non terminal.
- Elle n'est pas de type 2 car dans AB -> S , AB n'est pas un unique symbole non terminal
- Elle n'est pas de type 1 car dans AB -> S , la longueur de AB est supérieure à la longueur de S.
- Elle est donc de type 0.

Exercice 4 :

Soit le langage **L = {(a + b)*ba*}** construit sur l'alphabet **X** = {a, b}. Proposez une grammaire **G** = (V, T, S, P) qui engendre le langage L. Vous devez préciser **V**, **T**, et **P**.

Réponse :

Plusieurs réponses possibles. Une possibilité est :

- G = (V, T, S, P)
- V = {a, b, S, A}
- T = {a, b}
- P est constitué des productions suivantes :

  $S \rightarrow aS \mid bS \mid bA \mid b$

  $A \rightarrow aA \mid a$

Exercice 5 :

Soit le langage **L = {$a^n b^m a^n$** | n,m ∈ ℕ **}** construit sur l'alphabet **X** = {a, b}. Proposez une grammaire **G** = (V, T, S, P) qui engendre le langage L. Vous devez préciser **V**, **T**, et **P**.

Cette grammaire peut-elle être représentée par un automate fini déterministe ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

Plusieurs réponses possibles. Une possibilité est :

- G = (V, T, S, P)
- V = {a, b, S, B}
- T = {a, b}
- P est constitué des productions suivantes :

  $S \rightarrow aSa \mid B \mid \lambda$

  $B \rightarrow bB \mid \lambda$

  Ou encore

  $S \rightarrow aSa \mid B \mid b \mid \lambda$

  $B \rightarrow bB \mid b$

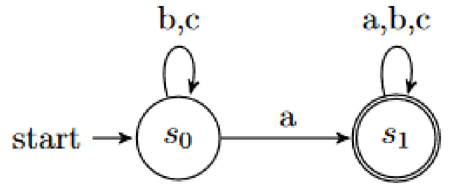
Cette grammaire est de type 2, car tous les termes à gauche sont des symboles uniques non terminaux, mais la règle de production $S \rightarrow aSa$ fait que ce n'est pas une grammaire de type 3.

Puisque seules les grammaires régulières (de type 3) peuvent être représentées par un automate fini déterministe, cette grammaire ne peut pas l'être.

Exercice 6 :
Pour chacun des langages suivants, construisez un automate fini déterministe reconnaissant le langage. Vous devez considérer l'ensemble des symboles terminaux **T={a,b,c} .**

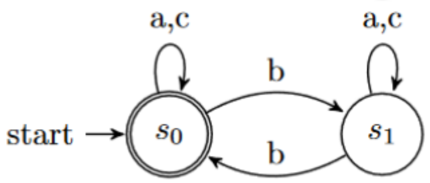
a) Le langage des mots contenant au moins une fois la lettre a

Réponse :



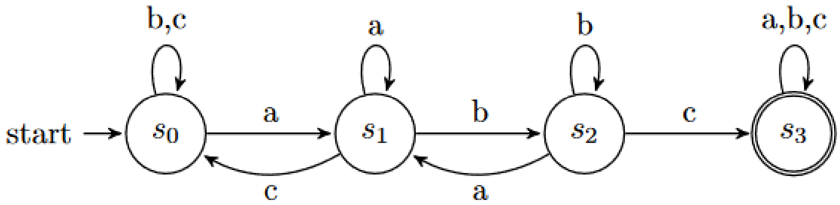
b) Le langage des mots contenant un nombre pair de fois la lettre b

Réponse :



c) Le langage des mots admettant abc pour facteur

Réponse :



Exercice 7 :

Soit la Grammaire (V,T,S,P) avec :

- V = {a,b,c,S,A}
- T = {a,b,c}
- S est l'axiome
- P contient :
  - 1: S-> aS | bA
  - 2: A -> cA | λ

a) Pour chacun des mots suivants, déterminez s'ils sont générés par G. Si oui, donnez l'arbre de dérivation ou la dérivation.

w1 = abac ; w2 = aabccc ; w3 = cabbac ; w4= ab

Réponse :

- w1 et w3 ne sont pas généré par G, car il y a un **a** après un ou plusieurs **b**.

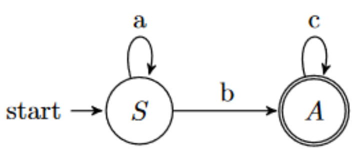
- w2 est est généré par G :
  S->aS (S -> aS)
  S->aaS (S -> aS)
  S->aabA (S -> bA)
  S->aabcA (A -> cA)
  S->aabccA (A -> cA)
  s->aabcccA (A -> cA)
  S->aabccc (A -> λ)

- w4 est généré par G :
  S->aS (S -> aS)
  S->abA (S -> bA)
  S->ab (A -> λ)

b) Trouvez le langage généré par G.

Réponse :

Une démarche possible est de construire l'automate fini déterministe engendré par la grammaire :

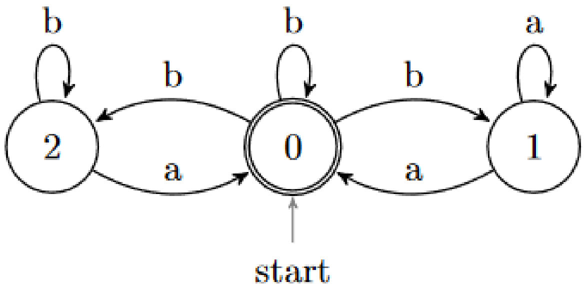


Puis d'en déduire le langage : {a*bc*} .

Exercice 8 :

Transformez en automate déterministe les automates suivants. Vous pouvez juste donner la table d'états-transition et préciser les états finaux ou acceptants de l'automate déterministe que vous proposez.

a)

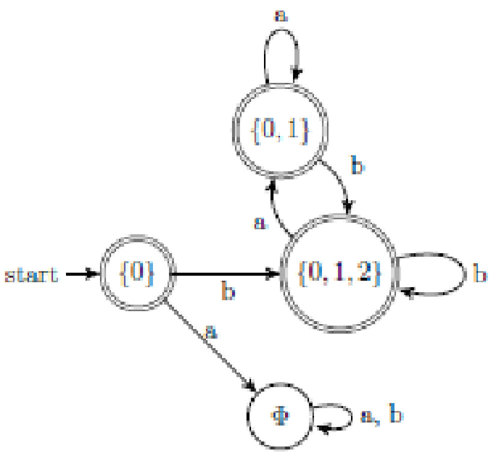


Réponse :

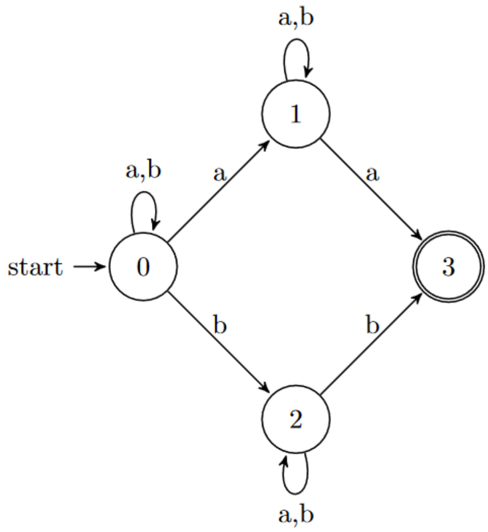
- Table d'états-transition

États	**Entrée**	
	a	**b**
0	Ø	{0, 1, 2}
{0, 1,2}	{0, 1}	{0, 1, 2}
{0, 1}	{0, 1}	{0, 1, 2}

- États finaux : {0}, {0, 1, 2}, {0, 1}.
- Automate



b)



Réponse :

- Table d'états-transition de l'automate déterministe émondé

États	Entrée	
	a	b
{0}	{0, 1}	{0, 2}
{0, 1}	{0, 1, 3}	{0, 1, 2}
{0, 2}	{0, 1, 2}	{0, 2, 3}
{0, 1, 3}	{0, 1, 3}	{0, 1, 2}
{0, 1, 2}	{0, 1, 2, 3}	{0, 1, 2, 3}
{0, 2, 3}	{0, 1, 2}	{0, 2, 3}
{0, 1,2, 3}	{0, 1, 2, 3}	{0, 1, 2, 3}

- États finaux : {0, 1, 3}, {0, 2, 3} et {0, 1, 2, 3}.
- Automate