POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 1 : LOGIQUE PROPOSITIONNELLE

SOLUTIONNAIRE

Directives pour la remise:

- La remise est individuelle et se fait à la fin de la séance de TD.
- Répondez directement sur ce document Word (docx).
- Lorsque vous avez terminé, générez un PDF avec le nom sous le format: ***SectionDeTD-Matricule.pdf*** (exemple: *04-1234567.pdf*).
- Téléchargez votre fichier PDF dans la boîte de remise située dans la Zone TDs de la page Moodle du cours.
- Choisissez la boîte de remise qui correspond à votre section de TD.
- Aucun retard et aucune remise par courriel ne seront accepté.
- Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.

Exercice 1. Supposons que le téléphone intelligent **A** dispose de 256 Mo de RAM et de 32 Go de mémoire flash et que la résolution de son appareil photo soit de 8 MP; que le téléphone intelligent **B** a 288 Mo de RAM et 64 Go de mémoire flash, et la résolution de son appareil photo est de 4 MP; et que le téléphone intelligent **C** a 128 Mo de RAM et 32 Go de mémoire flash, et la résolution de son appareil photo est de 5 MP. Déterminez la valeur de vérité de chacune de ces propositions.

a) Le téléphone **B** a le plus de RAM parmi les trois téléphones.
Réponse: Vrai, car 288 > 256 et 288 > 128.

b) Le téléphone **C** a plus de mémoire flash ou a une résolution plus élevée que le téléphone **B**.
Réponse: Vrai, car **C** a une résolution de 5 MP par rapport à la résolution de 4 MP de B. Notez qu'une seule de ces conditions doit être remplie en raison du mot OU.

c) Le téléphone **B** a plus de RAM, plus de mémoire flash et a également une plus haute résolution que le téléphone **A**.
Réponse: Faux, car sa résolution n'est pas plus élevée (toutes les affirmations devraient être vraies pour que la conjonction soit vraie).

d) Si le téléphone **B** a plus de RAM et plus de mémoire flash que le téléphone **C**, il a également une résolution plus élevée.
Réponse: Faux, car l'hypothèse de cet énoncé conditionnel est vraie et la conclusion est fausse.

e) Le téléphone **A** a plus de RAM que le téléphone **B** si et seulement si le téléphone **B** a plus de RAM que le téléphone **A**.
Réponse: Faux, car la première partie de cet énoncé bi-conditionnel est fausse et la seconde partie est vraie.

Exercice 2. En notant P , Q et R les affirmations suivantes:

- P : « Gustave fait du ski »
- Q : « Gustave porte une tuque »
- R : « Gustave porte des lunettes de ski »

Représentez les affirmations qui suivent sous forme symbolique (Utilisez les symboles $P\ Q\ R\ \neg \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$).

a) « Gustave ne fait pas de ski et ne porte pas de tuque mais porte des lunettes. »

Réponse: $\neg P \wedge \neg Q \wedge R$

b) « Gustave fait du ski et porte une tuque mais ne porte pas de lunettes. »

Réponse: $P \wedge Q \wedge \neg R$

c) « Il est faux que Gustave fasse du ski sans porter de tuque. »

Réponse: $\neg(P \wedge \neg Q)$

d) « Si Gustave fait du ski alors il porte une tuque. »

Réponse: $P \rightarrow Q$

e) « Il est faux que Gustave ne porte pas de tuque et fasse quand même du ski. »

Réponse: $\neg(\neg Q \wedge P)$

f) « Gustave fait du ski seulement s'il porte ses lunettes. »

Réponse: $P \rightarrow R$

Exercice 3. Vérifiez par table de vérité, l'équivalence associative des connecteurs suivants et indiquez vos conclusions quant à la propriété d'associativité pour chacun des connecteurs logiques :

Produisez les tables de vérités par étape successive. Identifiez d'abord le nombre de variable (n) dans l'expression. Ensuite dressez la table de vérité avec 2^n états. Vous pouvez par la suite évaluer un terme à la fois. Par exemple vous pouvez d'abord évaluer $(p \wedge q)$ et ensuite le résultat avec $\wedge r$, etc.

Vous pouvez au besoin utiliser le générateur de table de vérité suivant pour vérifier votre raisonnement:
https://web.stanford.edu/class/cs103/tools/truth-table-tool/

a) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

Réponse:

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \wedge r$
F	F	F	F	**F**
F	F	V	F	**F**
F	V	F	F	**F**
F	V	V	F	**F**
V	F	F	F	**F**
V	F	V	F	**F**
V	V	F	V	**F**
V	V	V	V	**V**

p	q	r	$(q \wedge r)$	$p \wedge (q \wedge r)$
F	F	F	F	**F**
F	F	V	F	**F**
F	V	F	F	**F**
F	V	V	V	**F**
V	F	F	F	**F**
V	F	V	F	**F**
V	V	F	F	**F**
V	V	V	V	**V**

L'équivalence est vérifiée puisque les dernières colonnes sont identiques.

b) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

Réponse:

p	q	r	$(p \vee q)$	$(p \vee q) \vee r$
F	F	F	F	**F**
F	F	V	F	**V**
F	V	F	V	**V**
F	V	V	V	**V**
V	F	F	V	**V**
V	F	V	V	**V**
V	V	F	V	**V**
V	V	V	V	**V**

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \vee (q \vee r)$
F	F	F	F	**F**
F	F	V	V	**V**
F	V	F	V	**V**
F	V	V	V	**V**
V	F	F	F	**V**
V	F	V	V	**V**
V	V	F	V	**V**
V	V	V	V	**V**

L'équivalence est vérifiée puisque les dernières colonnes sont identiques.

c) $(p \rightarrow q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$

Réponse:

p	q	r	$(p \rightarrow q)$	$(p \rightarrow q) \rightarrow r$
F	F	F	V	**F**
F	F	V	V	**V**
F	V	F	V	**F**
F	V	V	V	**V**
V	F	F	F	**V**
V	F	V	F	**V**
V	V	F	V	**F**
V	V	V	V	**V**

p	q	r	$(q \rightarrow r)$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$
F	F	F	V	**V**
F	F	V	V	**V**
F	V	F	F	**V**
F	V	V	V	**V**
V	F	F	V	**V**
V	F	V	V	**V**
V	V	F	F	**F**
V	V	V	V	**V**

L’équivalence n’est pas vérifiée puisque les dernières colonnes ne sont pas identiques.

d) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
Réponse:

p	q	r	$(p \leftrightarrow q)$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$
F	F	F	V	**F**
F	F	V	V	**V**
F	V	F	F	**V**
F	V	V	F	**F**
V	F	F	F	**V**
V	F	V	F	**F**
V	V	F	V	**F**
V	V	V	V	**V**

p	q	r	$(q \leftrightarrow r)$	$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
F	F	F	V	**F**
F	F	V	F	**V**
F	V	F	F	**V**
F	V	V	V	**F**
V	F	F	V	**V**
V	F	V	F	**F**
V	V	F	F	**F**
V	V	V	V	**V**

L’équivalence est vérifiée puisque les dernières colonnes sont identiques.

Conclusion:

Les connecteurs ET, OU et BI-DIRECTIONNEL possèdent la propriété d’associativité alors que le connecteur IMPLICATION n’est pas associatif.

Supplément:

Donnons quelques exemples d'opérations qui ne vérifie pas la propriété d'associativité. La soustraction et la division ne sont pas des opérations associatives.

$(8 - 4) - 2 = 2$ alors que $8 - (4 - 2) = 6$

$(8 \div 4) \div 2 = 1$ alors que $8 \div (4 \div 2) = 4$

Il suffit d'un contre exemple pour montrer qu'une opération binaire n'est pas associative.

Par contre, il faudra une preuve mathématique pour montrer qu'un opérateur binaire comme l'addition et la multiplication sur les nombres entier est associatif. Le principe d'induction nécessaire pour cette preuve sera vu à la semaine 8.

Exercice 4. Démontrez que chaque énoncé conditionnel suivant est une tautologie en appliquant une chaîne d'identités logiques (sans l'utilisation de tables de vérité).

a) $(\neg p \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$

Réponse:

1. $(\neg p \wedge (p \vee q)) \rightarrow q \equiv \neg(\neg p \wedge (p \vee q)) \vee q$ équivalence conditionnelle-disjonction
2. $\equiv p \vee \neg(p \vee q) \vee q$ par de Morgan
3. $\equiv (p \vee q) \vee \neg(p \vee q)$ par commutativité et associativité
4. $\equiv Vrai$ par la loi de négation

b) $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

Réponse:

1. $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q \equiv \neg(p \wedge (p \rightarrow q) \vee q$ équivalence conditionnelle-disjonction
2. $\equiv \neg p \vee \neg(p \rightarrow q) \vee q$ par de Morgan
3. $\equiv (\neg p \vee q) \vee \neg(p \rightarrow q)$ par commutativité et associativité
4. $\equiv (p \rightarrow q) \vee \neg(p \rightarrow q)$ équivalence conditionnelle-disjonction
5. $\equiv Vrai$ par la loi de négation

Petite histoire sur le connecteur d'implication:

À la table du souper, ma jeune fille a dit un jour : « Levez la main si vous êtes une fille ». L'un de mes fils, pour la taquiner, a levé la main au motif que, puisqu'elle n'a pas ajouté « et gardez-la en bas si vous êtes un garçon », son action était compatible avec son commandement.