POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810
STRUCTURES DISCRÈTES

TD 9 : **DÉNOMBREMENT**

H2022

SOLUTIONNAIRE

Directives pour la remise :

- La remise est individuelle, mais le travail en équipe est encouragé.
- La remise est individuelle se fait à la fin de la séance de TD.
- Répondez directement sur ce document Word (docx). Dans l'intérêt de l'équité pour tous les étudiants, vous devez modifier le fichier Word. Modifiez le fichier **EXCLUT** le fait d'intégrer des scans de rédaction manuscrite ou d'y écrire avec un stylet.
- Lorsque vous avez terminé, générez un PDF avec le nom sous le format :
  Matricule-TDNuméro.pdf (exemple : 1234567-TD1.pdf).
- Téléversez votre fichier PDF dans la boîte de remise située dans la Zone TDs de la page Moodle du cours.
- Choisissez la boîte de remise qui correspond à votre section de TD.
- **Aucun retard et aucune remise par courriel ne seront acceptés.**
- **Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.**

Exercice 1. On considère un ensemble de 15 objets tous distincts. Les objets A et B font partie de la collection. De combien de façons peut-on ordonner 6 objets parmi les 15 de sorte que :

a. l'objet A soit dans le résultat ?

Réponse :

- Il y a **6 places** possibles pour A dans le résultat. Ce résultat peut aussi être trouvé en dénombrant directement **P(6, 1)**.
- Les 5 places restantes seront occupées par 5 objets parmi les 14 autres, soit **P(14, 5)** possibilités.

Le nombre recherché est :

$$P(6, 1).P(14, 5) = 1\,441\,440$$

b. les objets A et B soient tous deux dans le résultat ?

Réponse :

- Lorsque les 2 objets sont dans le résultat, ils occupent 2 places. Le nombre de façons de placés ces 2 objets dans le résultats est **P(6, 2) = 6.5 = 30**.
  Note : Ce résultat peut aussi être retrouvé en choisissant de placer l'un des objets en premier, ce qui donne 6 choix possibles. Puis, placer le 2ème objet, ce qui lui donne 5 choix possibles. En définitive, le placement des 2 objets auraient donné 6.5 = 30 possibilités.
- Les 4 places restantes seront occupées par 4 objets parmi les 13 autres, soit **P(13, 4)** possibilités.

Le nombre recherché est :

$$P(6, 2).P(13, 4) = 514\,800$$

c. soit l'objet A est dans le résultat, soit l'objet B est dans le résultat, mais pas les 2 à la fois ?

Réponse :

Soit N le résultat recherché, N_A le nombre de résultats dans lesquels se trouve A, N_B le nombre de résultats dans lesquels se trouve B et N_{AB} le nombre de résultats dans lesquels se trouve à la fois A et B.

Pour obtenir N, il faut exclure de N_A ceux qui continent B et exclure de N_B ceux qui continent A. On a :

$$N = (N_A - N_{AB}) + (N_B - N_{AB})$$

En plus de constater que $N_A = N_B$, on peut faire le dénombrement pour trouver N_A et N_B, mais on peut aussi exploiter le résultat de la question 1.a). On fera aussi le constat que N_{AB} est le résultat de la question 1.b). Cela n'empêche pas que l'on fasse le dénombrement souhaité ici même.

$$N = 2.P(6, 1).P(14, 5) – 2.P(6, 2).P(13, 4) = 1\,853\,280$$

Exercice 2. Soit n un entier positif. Prouvez en utilisant les manipulations algébriques que :

$$\left(\frac{5}{4}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times 2^{-2k}$$

Réponse :

En utilisant le théorème du binôme, on a :

$$\left(\frac{5}{4}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times 1^{n-k} \times \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times \left(\frac{1}{4}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^k$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times (2^{-2})^k = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times (2^{-2k})$$

CQFD.

Exercice 3. Démontrez que :

C(n, k) x C(n-k, p-k) = C(p, k) x C(n, p)

Réponse :

Par définition, on a :

- C(n, k) = n! /[k! x (n-k)!]
- C(n-k, p-k) = (n-k)! /[(p-k)! x (n-p)!]
- C(p, k) = p! /[k! x (p-k)!]
- C(n, p) = n! /[p! x (n-p)!]

Alors,

C(n, k) x C(n-k, p-k) = (n! / [k! x (n-k)!]) x ((n-k)! / [(p-k)! x (n-p)!])

C(n, k) x C(n-k, p-k) = (n! x (n-k)!) / [k! x (n-k)! x (p-k)! x (n-p)!]

En simplifiant le terme commun (n-k)!, on a :

C(n, k) x C(n-k, p-k) = (n!) / [k! x (p-k)! x (n-p)!]

On peut à présent multipliez le numérateur et le dénominateur par p!

C(n, k) x C(n-k, p-k) = (n! x p!) / [k! x (p-k)! x (n-p)! x p!]

C(n, k) x C(n-k, p-k) = (p! / [k! x (p-k)!]) x (n! / [p! x (n-p)!]

D'où C(n, k) x C(n-k, p-k) = C(p, k) x C(n, p).

Exercice 4. Résolvez la relation de récurrence :

$$\mathbf{a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}\ ;\ avec\ a_0 = 1,\ a_1 = -2,\ a_2 = -1}$$

Réponse :

La relation de récurrence linéaire homogène à coefficient constant $\mathbf{a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}}$ admet pour équation caractéristique $\mathbf{r^3+3r^2+3r + 1 = 0.}$

L'équation peut se réécrire $(r+1)^3 = 0$.

Elle admet donc une racine triple $r = -1$.

La forme générale des solutions de l'équation de récurrence est alors $a_n = \alpha.r^n + \beta.n.r^n + \gamma.n^2.r^n$, soit $a_n = (\alpha + \beta.n + \gamma.n^2)(-1)^n$.

À partir de cette équation, on obtient :

$\mathbf{a_0} = (\alpha + \beta.0 + \gamma.0^2)(-1)^0 = \alpha$

$\mathbf{a_1} = (\alpha + \beta.1 + \gamma.1^2)(-1)^1 = (\alpha + \beta + \gamma)(-1) = -(\alpha + \beta + \gamma)$

$\mathbf{a_2} = (\alpha + \beta.2 + \gamma.2^2)(-1)^2 = (\alpha + 2\beta + 4\gamma).1 = \alpha + 2\beta + 4\gamma$

En considérant les conditions initiales $\mathbf{a_0 = 1, a_2 = -2, a_3 = -1,}$ on obtient les équations suivantes :

- $\alpha = \mathbf{1}$
- $-(\alpha + \beta + \gamma) = \mathbf{-2,}$
- $\alpha^2 + 2\beta + 4\gamma = \mathbf{-1}$

En résolvant ces équations on obtient :

$\alpha = \mathbf{1},\ \beta = \mathbf{3}$ **et** $\gamma = \mathbf{-2}$

La solution de l'équation de récurrence linéaire homogène à coefficient constant est :

$$\mathbf{a_n} = (1 + 3n - 2.n^2)(-1)^n$$

Exercice 5.

a) Résolvez l'équation de récurrence suivante : $\mathbf{T(n) = 3T(n/4) + cn^2}$, avec c une constante.

Réponse :

L'équation $T(n) = 3T(n/4) + cn^2$ est de la forme $T(n) = aT(n/b) + cn^d$; avec $a = 3$, $b = 4$ et $d = 2$.

Comparons a et b^d.

On a $b^d = 4^2 = 16$. Il s'en suit que $a < b^d$

D'Où $T(n) = O(n^2)$.

b) Pour un problème donné, on a une solution directe en $\Theta(n^3)$. On a aussi trouvé deux solutions de type diviser pour régner comme suit :

   i. Découper le problème de taille n en 2 sous-problèmes de taille n/2, et les recombiner en temps $\Theta(n^2)$.

   ii. Découper le problème de taille n en 4 sous-problèmes de taille n/3 et les recombiner en temps $\Theta(\sqrt{n})$.

Parmi les trois solutions, laquelle choisir ?

Réponse :

- Soit f la fonction représentant la solution directe. D'après l'énoncé,

$$f(n) = \Theta(n^3).$$

- Soit g la solution qui consiste à découper le problème de taille n en 2 sous-problèmes de taille n/2, et les recombiner en temps $\Theta(n^2)$. On a :

$$g(n) = 2 \times g(n/2) + n^2$$

  g est de la forme $g(n) = a.g(n/b) + cn^d$; avec a = 2, b = 2, c= 1 et d = 2.
  Puis que $b^d = 4$ et $2 < 4$, on déduit que $a < b^d$. Ainsi,

$$g(n) = O(n^2).$$

- Soit T la solution qui consiste à découper le problème de taille n en 4 sous-problèmes de taille n/3 et les recombiner en temps $\Theta(\sqrt{n})$. On a :

$$T(n) = 4 \times T(n/3) + n^{\frac{1}{2}}$$

  T est de la forme $T(n) = a.T(n/b) + cn^d$; avec a = 4, b = 3, c= 1 et d = 1/2.
  Puis que $b^d = 3^{1/2}$ et $4 > 3^{1/2}$, on déduit que $a > b^d$. Ainsi,

$$T(n) = O(n^{log_3 4})$$

Pour répondre à la question, il faut comparer $\Theta(n^3)$, $O(n^2)$ et $O(n^{log_3 4})$ et retenir le moins coûteux, soit $T(n)$.

Conclusion
Il faut choisir de découper le problème de taille n en 4 sous-problèmes de taille n/3 et les recombiner en temps $\Theta(\sqrt{n})$.

Exercice 6 (facultatif). Une boîte contient 20 balles dont 6 sont rouges, 6 vertes et 8 bleues.

a. De combien de manières peut-on sélectionner 5 balles si toutes les balles sont considérées comme distinctes.

Réponse : C(20, 5)

b. De combien de manières peut-on sélectionner 2 balles rouges, 3 vertes et 2 bleues si toutes les balles sont considérées comme distinctes.

Réponse : C(6, 2) x C(6, 3) x C(8, 2)

c. On retire 5 balles, puis on les remet dans la boîte. On retire à nouveau 5 balles. De combien de manières différentes peut-on effectuer cela si toutes les balles sont considérées comme distinctes.

Réponse : C(20, 5) x C(20, 5)

d. On retire 5 balles, sans les remettre dans la boîte. On retire à nouveau 5 balles. De combien de manières différentes peut-on effectuer cela si toutes les balles sont considérées comme distinctes.

Réponse : C(20, 5) x C(15, 5)

Exercice 7 (facultatif). Une De combien de façons une douzaine de livres peuvent-ils être placés sur quatre tablettes distinctes d'une étagère.

a) Si les livres sont des exemplaires indiscernables du même titre ?

Réponse :

Tout ce qui compte est le nombre de livres sur chaque tablette, donc la réponse est le nombre de solutions à $\mathbf{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12}$, où x_i est considéré comme le nombre de livres sur l'étagère i. La réponse est donc C (4 + 12 − 1, 12) = C (15, 12) = 455.

Note : Pour la formule utilisée, voir page 28 des notes de cours sur le dénombrement ou p.446 à 448 du livre de Rosen.

b) S'il n'y a pas deux livres identiques et que la position des livres sur les tablettes est importante ?

Réponse :

Sans perte de généralité, si l'on numérote les livres $b_1, b_2, \ldots, b_{12}$ et que l'on pense à placer le livre b_1 , puis à placer b_2 , et ainsi de suite. Il y a clairement 4 façons de placer b_1, puisque nous pouvons le mettre comme premier livre (pour l'instant) sur n'importe laquelle des tablettes. Une fois que b_1 est placé, il y a 5 façons de placer b_2, car il peut aller à droite de b_1 ou il peut s'agir du premier livre sur l'une des quatre tablettes. Nous continuons ainsi : il y a 6 façons de placer b_3 (à droite de b_1 , à droite de b_2, ou comme premier livre sur l'une des étagères), 7 façons de placer b_4, ..., 15 façons de placer b_{12}. La réponse est donc le produit de ces nombres $4 \times 5 \cdots 15 = 217\,945\,728\,000$.