POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 2 : LOGIQUE DES PRÉDICATS

E2025

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 :

a) Traduction en logique des prédicats.

Considérez l'univers du discours comme étant l'ensemble des personnes et des modules logiciels. Soit les fonctions propositionnelles suivantes :

— $D(x)$: x est un développeur.
— $M(x)$: x est un module logiciel.
— $P(x)$: x est un projet.
— $Assigné(x, y, z)$: x est assigné à y sur z.
— $Terminé(x, y)$: x de y est terminé.
— $Testé(x, y)$: x de y a été testé.
— $Critique(x, y)$: x de y est critique.
— $RespecteDélais(x)$: x respecte les délais.

Traduisez les phrases suivantes en logique des prédicats :

1. Tous les modules critiques d'un projet qui respecte les délais ont été testés.
$\forall z \forall y((P(z) \wedge RespecteDélais(z) \wedge M(y) \wedge Critique(y, z)) \rightarrow Testé(y, z))$

2. Il existe un développeur qui est assigné à un module non terminé.
$\exists x \exists y \exists z(D(x) \wedge M(y) \wedge P(z) \wedge Assigné(x, y, z) \wedge \neg Terminé(y, z))$

3. Aucun module n'est terminé s'il n'a pas été testé.
$\forall y \forall z((M(y) \wedge P(z) \wedge \neg Testé(y, z)) \rightarrow \neg Terminé(y, z))$
Alternativement : $\neg \exists y \exists z(M(y) \wedge P(z) \wedge \neg Testé(y, z) \wedge Terminé(y, z))$

4. Pour chaque projet, il y a au moins un développeur assigné à un module critique.
$\forall z(P(z) \rightarrow \exists x \exists y(D(x) \wedge M(y) \wedge Critique(y, z) \wedge Assigné(x, y, z)))$

5. Certains développeurs ne sont assignés qu'à des modules terminés et testés.
$\exists x(D(x) \wedge \forall y \forall z((M(y) \wedge P(z) \wedge Assigné(x, y, z)) \rightarrow (Terminé(y, z) \wedge Testé(y, z))))$

b) Traduction en langage naturel

En utilisant les prédicats de la Partie a, traduisez les expressions logiques suivantes en phrases françaises claires et naturelles :

1. $\forall x(D(x) \rightarrow \exists y \exists z(M(y) \wedge P(z) \wedge Assigné(x, y, z)))$
Tout développeur est assigné à au moins un module d'un projet.

2. $\exists z(P(z) \wedge \neg RespecteDélais(z) \wedge \exists y(M(y) \wedge Critique(y, z) \wedge \neg Terminé(y, z)))$
Il existe un projet qui ne respecte pas les délais et pour lequel au moins un module critique n'est pas terminé.

3. $\forall y \forall z((M(y) \wedge P(z) \wedge \mathit{Terminé}(y, z)) \rightarrow \forall x(\mathit{Assigné}(x, y, z) \rightarrow D(x)))$
   Pour tout module terminé d'un projet, tous ceux qui y sont assignés sont des développeurs.
   (Alternativement : Si un module d'un projet est terminé, alors toute personne assignée à ce module est un développeur.)

4. $\neg \exists x(D(x) \wedge \forall y \forall z((M(y) \wedge P(z) \wedge \mathit{Assigné}(x, y, z)) \rightarrow \mathit{Critique}(y, z)))$
   Il n'existe aucun développeur qui ne soit assigné qu'à des modules critiques.
   (Alternativement : Tout développeur est assigné à au moins un module non critique, ou n'est assigné à aucun module.)

Exercice 2 :

Considérez l'univers du discours comme étant celui des événements qui se déroulent à Montréal. Soient les prédicats suivants :

— $F(x)$: x est un festival d'été.

— $T(x)$: x attire des touristes.

— $S(x)$: x propose des spectacles gratuits.

Considérez les deux propositions suivantes :

— $\mathbf{S_1}$: "À Montréal, tous les festivals d'été attirent des touristes ou proposent des spectacles gratuits."

— $\mathbf{S_2}$: "À Montréal, tous les festivals d'été attirent des touristes ou tous les festivals d'été proposent des spectacles gratuits."

1. Traduisez les propositions $\mathbf{S_1}$ et $\mathbf{S_2}$ en logique des prédicats.
   — $\mathbf{S_1} \equiv \forall x(F(x) \rightarrow (T(x) \vee S(x)))$
   — $\mathbf{S_2} \equiv (\forall x(F(x) \rightarrow T(x))) \vee (\forall x(F(x) \rightarrow S(x)))$
2. Pour chacune des propositions $\mathbf{S_1}$ et $\mathbf{S_2}$, donnez sa négation en logique des prédicats, puis traduisez cette négation en langage naturel.
   — **Négation de $\mathbf{S}_1$:**
   — *Logique :*

$$\begin{aligned}
\neg\mathbf{S}_1 &\equiv \neg\forall x \left(F(x) \rightarrow (T(x) \vee S(x))\right) \\
&\equiv \exists x\, \neg\left(F(x) \rightarrow (T(x) \vee S(x))\right) \quad (\text{Négation de } \forall) \\
&\equiv \exists x\, (F(x) \wedge \neg(T(x) \vee S(x))) \quad (\text{Négation de } \rightarrow) \\
&\equiv \exists x\, (F(x) \wedge \neg T(x) \wedge \neg S(x)).
\end{aligned}$$

   — *Naturel :* « Il existe un festival d'été à Montréal qui n'attire pas de touristes et ne propose pas de spectacles gratuits. »

   — **Négation de $\mathbf{S}_2$:**
   — *Logique :*

$$\begin{aligned}
\neg\mathbf{S}_2 &\equiv \neg\big((\forall x \left(F(x) \rightarrow T(x)\right)) \;\vee\; (\forall x \left(F(x) \rightarrow S(x)\right))\big) \\
&\equiv \neg\forall x \left(F(x) \rightarrow T(x)\right) \;\wedge\; \neg\forall x \left(F(x) \rightarrow S(x)\right) \quad (\text{De Morgan}) \\
&\equiv \left(\exists x\, \neg(F(x) \rightarrow T(x))\right) \;\wedge\; \left(\exists x\, \neg(F(x) \rightarrow S(x))\right) \quad (\text{Négation de } \forall) \\
&\equiv \left(\exists x\, (F(x) \wedge \neg T(x))\right) \;\wedge\; \left(\exists x\, (F(x) \wedge \neg S(x))\right) \quad (\text{Négation de } \rightarrow).
\end{aligned}$$

   — *Naturel :* « Il existe un festival d'été à Montréal qui n'attire pas de touristes, et il existe un festival d'été à Montréal qui ne propose pas de spectacles gratuits. »
3. Les propositions $\mathbf{S_1}$ et $\mathbf{S_2}$ sont-elles logiquement équivalentes ? Justifiez votre réponse.

Équivalence de $\mathbf{S_1}$ et $\mathbf{S_2}$ Les propositions $\mathbf{S_1}$ et $\mathbf{S_2}$ ne sont **pas logiquement équivalentes**. Nous savons que l'implication

$$\left(\forall x\, A(x) \;\vee\; \forall x\, B(x)\right) \;\rightarrow\; \forall x\big(A(x) \vee B(x)\big)$$

est toujours **vraie**. En posant

$$A(x) \equiv \big(F(x) \rightarrow T(x)\big), \quad B(x) \equiv \big(F(x) \rightarrow S(x)\big),$$

on a alors

$$\mathbf{S_2} \equiv \big(\forall x\,(F(x) \to T(x))\big) \lor \big(\forall x\,(F(x) \to S(x))\big).$$

Le membre de droite de l'implication devient

$$\forall x\,\big((F(x) \to T(x)) \lor (F(x) \to S(x))\big).$$

Simplifions l'expression à l'intérieur :

$$\begin{aligned}
(F(x) \to T(x)) \lor (F(x) \to S(x)) &\equiv (\neg F(x) \lor T(x)) \lor (\neg F(x) \lor S(x)) \quad \text{(Implication)}\\
&\equiv \neg F(x) \lor T(x) \lor \neg F(x) \lor S(x) \quad \text{(Associativité)}\\
&\equiv \neg F(x) \lor \neg F(x) \lor T(x) \lor S(x) \quad \text{(Commutativité)}\\
&\equiv \neg F(x) \lor T(x) \lor S(x) \quad \text{(Idempotence)}\\
&\equiv F(x) \to \big(T(x) \lor S(x)\big) \quad \text{(Implication)}
\end{aligned}$$

Donc

$$\forall x\,\big((F(x) \to T(x)) \lor (F(x) \to S(x))\big) \equiv \forall x\big(F(x) \to (T(x) \lor S(x))\big) \equiv \mathbf{S_1}.$$

Ainsi l'implication $\mathbf{S_2} \to \mathbf{S_1}$ est **vraie**.
Cependant l'implication inverse $\mathbf{S_1} \to \mathbf{S_2}$ (c'est-à-dire $\forall x\,(P(x) \lor Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \lor (\forall x\,Q(x))$) n'est généralement pas vraie.

Contre-exemple pour $\mathbf{S_1} \to \mathbf{S_2}$ Soit l'univers $U = \{e_1, e_2\}$ des événements à Montréal. Définissons :

$$\begin{aligned}
F(e_1) &= \text{VRAI}, \quad F(e_2) = \text{VRAI},\\
T(e_1) &= \text{VRAI}, \quad T(e_2) = \text{FAUX},\\
S(e_1) &= \text{FAUX}, \quad S(e_2) = \text{VRAI}.
\end{aligned}$$

Évaluons $\mathbf{S_1} \equiv \forall x\big(F(x) \to (T(x) \lor S(x))\big)$:

— Pour $x = e_1$: VRAI $\to$ (VRAI $\lor$ FAUX) = VRAI.
— Pour $x = e_2$: VRAI $\to$ (FAUX $\lor$ VRAI) = VRAI.

Donc $\mathbf{S_1}$ est **vraie**.
Évaluons $\mathbf{S_2} \equiv (\forall x\,(F(x) \to T(x))) \lor (\forall x\,(F(x) \to S(x)))$:

— *Premier terme* : $\forall x\,(F(x) \to T(x))$.
VRAI $\to$ VRAI = VRAI pour e_1, VRAI $\to$ FAUX = FAUX pour e_2. Donc ce terme est **faux**.
— *Deuxième terme* : $\forall x\,(F(x) \to S(x))$.
VRAI $\to$ FAUX = FAUX pour e_1, VRAI $\to$ VRAI = VRAI pour e_2. Donc ce terme est **faux**.

Ainsi $\mathbf{S_2}$ = FAUX $\lor$ FAUX = FAUX.
Puisque $\mathbf{S_1}$ est vraie et $\mathbf{S_2}$ est fausse, on conclut

$$\mathbf{S_1} \not\equiv \mathbf{S_2}.$$

Exercice 3 :

a) Valeur de vérité de propositions

Déterminez la valeur de vérité de chaque proposition ci-dessous et justifiez votre réponse.

1. Pour tout nombre x, $x + 0 = x$. (Univers implicite : nombres)
   VRAI. Justification : C'est la propriété de l'élément neutre pour l'addition, valable pour les ensembles de nombres usuels (réels, entiers, rationnels, etc.).

2. Il existe un nombre x tel que $x \times 0 = 1$. (Univers implicite : nombres)
   FAUX. Justification : Pour tout nombre x, $x \times 0 = 0$. Puisque $0 \neq 1$, il n'existe aucun nombre x tel que $x \times 0 = 1$.

3. Pour tous nombres x et y, $x + y = y + x$. (Univers implicite : nombres)
   VRAI. Justification : C'est la propriété de commutativité de l'addition, valable pour les ensembles de nombres usuels.

4. Il existe un nombre entier x tel que x est pair et x est impair. (Univers : nombres entiers)
   FAUX. Justification : Un nombre entier ne peut pas être à la fois pair (divisible par 2) et impair (non divisible par 2).

5. Pour tout nombre entier positif x, si x est un nombre premier, alors $x > 1$. (Univers : nombres entiers positifs)
   VRAI. Justification : Par définition, un nombre premier est un entier naturel qui n'a pas de diviseurs positifs autres que 1 et lui-même.

6. Il existe exactement un nombre réel x tel que $x^2 = 4$. (Univers : nombres réels)
   FAUX. Justification : $x^2 = 4$ a deux solutions réelles : $x = 2$ et $x = -2$. Il n'y a donc pas une solution unique.

7. Pour tout nombre réel non nul x, $x/x = 1$. (Univers : nombres réels non nuls)
   VRAI. Justification : Pour tout nombre réel $x \neq 0$, $x/x = 1$.

8. Si un nombre entier est divisible par 6, alors il est divisible par 3. (Univers : nombres entiers)
   VRAI. Justification : Si un nombre est divisible par 6, alors il peut s'écrire $6k$ pour un entier k. Puisque $6k = 3(2k)$, le nombre est aussi divisible par 3.

9. La somme de deux nombres impairs est toujours un nombre impair. (Univers : nombres entiers)
   FAUX. Justification : Soient deux nombres impairs $2k + 1$ et $2m + 1$. Leur somme est $(2k + 1) + (2m + 1) = 2k + 2m + 2 = 2(k + m + 1)$, ce qui est un nombre pair.

b) Détermination de l'univers du discours et des prédicats

Pour chacune des phrases suivantes, proposez un univers du discours approprié et définissez les prédicats nécessaires pour la traduire en logique (sans effectuer la traduction complète).

1. Certains ingénieurs logiciels sont aussi des musiciens.
   - **Univers du discours possible :** L'ensemble des personnes.
   - **Prédicats nécessaires :**
     - $IngLog(x)$: "x est un ingénieur logiciel".
     - $Musicien(x)$: "x est un musicien".
2. Toutes les planètes de notre système solaire orbitent autour du Soleil.
   - **Univers du discours possible :** L'ensemble des corps célestes.
   - **Prédicats nécessaires :**
     - $PlanèteSS(x)$: "x est une planète de notre système solaire".
     - $OrbiteAutourDe(x, y)$: "x orbite autour de y".
     - (Constante) $Soleil$: L'objet céleste Soleil.
3. Il existe un algorithme qui peut résoudre ce problème en temps polynomial.
   - **Univers du discours possible :** L'ensemble des algorithmes.
   - **Prédicats nécessaires :**
     - $Résout(x, p)$: "L'algorithme x peut résoudre le problème p".
     - $TempsPoly(x)$: "L'algorithme x s'exécute en temps polynomial".
     - (Constante) $CeProblème$: Le problème spécifique en question.
4. Aucun étudiant n'aime les examens à 7h du matin.
   - **Univers du discours possible :** L'ensemble des personnes. (Ou l'ensemble des étudiants pour simplifier $Etudiant(x)$).
   - **Prédicats nécessaires :**
     - $Etudiant(x)$: "x est un étudiant".
     - $Examen7h(y)$: "y est un examen à 7h du matin". (Si les examens sont dans l'univers)
     - $AimeExamen7h(x)$: "x aime les examens à 7h du matin". (Prédicat plus direct)
5. Si un client achète un produit, il reçoit une facture.
   - **Univers du discours possible :** L'ensemble des entités (personnes, items, documents).
   - **Prédicats nécessaires :**
     - $Client(x)$: "x est un client".
     - $Produit(y)$: "y est un produit".
     - $Facture(z)$: "z est une facture".
     - $Achète(x, y)$: "Le client x achète le produit y".
     - Reçoit(x, z) : « La personne x reçoit le document z. »
     - $EstPour(z, x, y)$: "La facture z est pour l'achat du produit y par le client x".

Exercice 4 :

On considère une fonction propositionnelle $R(x, y)$ et une constante a appartenant à l'univers de discours. Les six propositions suivantes sont définies :

- $P_1 : \forall x \forall y R(x, y)$
- $P_2 : \exists x \exists y R(x, y)$
- $P_3 : \forall x R(x, a)$
- $P_4 : \exists x R(x, a)$
- $P_5 : \forall y R(a, y)$
- $P_6 : \exists y R(a, y)$

Remplissez le tableau ci-dessous en indiquant si la proposition composée $P_i \to P_j$ est vraie (V) ou fausse (F) pour tout couple de propositions (P_i, P_j) avec $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, peu importe la fonction propositionnelle $R(x, y)$ et l'univers de discours (non vide). Fournissez une brève justification ou un contre-exemple pour chaque entrée FAUSSE.

$P_i \to P_j$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1						
P_2						
P_3						
P_4						
P_5						
P_6						

Solution : Le tableau rempli est le suivant :

$P_i \to P_j$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	V	V	V	V	V	V
P_2	F	V	F	F	F	F
P_3	F	V	V	V	F	V
P_4	F	V	F	V	F	F
P_5	F	V	F	V	V	V
P_6	F	V	F	F	F	V

Justifications pour les entrées FAUSSES (Univers $U = \{u_1, u_2\}$, constante $a = u_1$) :

— $P_2 \to P_1$: F. $R(u_1, u_1) =$ VRAI, autres FAUX. P_2=V, P_1=F.

— $P_2 \to P_3$: F. $R(u_2, u_2) =$ VRAI, autres FAUX. P_2=V, $P_3(\forall x R(x, u_1))$=F.

— $P_2 \to P_4$: F. $R(u_2, u_2) =$ VRAI, autres FAUX. P_2=V, $P_4(\exists x R(x, u_1))$=F.

— $P_2 \to P_5$: F. $R(u_2, u_2) =$ VRAI, autres FAUX. P_2=V, $P_5(\forall y R(u_1, y))$=F.

— $P_2 \to P_6$: F. $R(u_2, u_2) =$ VRAI, autres FAUX. P_2=V, $P_6(\exists y R(u_1, y))$=F.

— $P_3 \to P_1$: F. $R(x, y) \equiv (y = u_1)$. P_3=V, P_1=F.

— $P_3 \to P_5$: F. $R(x, y) \equiv (y = u_1)$. P_3=V, $P_5(\forall y R(u_1, y) \equiv \forall y(y = u_1))$=F.

- $P_4 \to P_1$: F. $R(u_1, u_1)$ = VRAI, autres FAUX. P_4=V, P_1=F.
- $P_4 \to P_3$: F. $R(u_1, u_1)$ = VRAI, $R(u_2, u_1)$ = FAUX. P_4=V, P_3=F.
- $P_4 \to P_5$: F. $R(u_1, u_1)$ = VRAI, autres FAUX. P_4=V, P_5=F.
- $P_4 \to P_6$: F. $R(x, y) \equiv (x = u_2 \land y = u_1)$. $P_4(\exists x R(x, u_1))$ est VRAI (pour $x = u_2$). $P_6(\exists y R(u_1, y))$ est FAUX.
- $P_5 \to P_1$: F. $R(x, y) \equiv (x = u_1)$. P_5=V, P_1=F.
- $P_5 \to P_3$: F. $R(x, y) \equiv (x = u_1)$. P_5=V, $P_3(\forall x R(x, u_1) \equiv \forall x(x = u_1))$=F.
- $P_6 \to P_1$: F. $R(u_1, u_1)$ = VRAI, autres FAUX. P_6=V, P_1=F.
- $P_6 \to P_3$: F. $R(u_1, u_1)$ = VRAI, autres FAUX. P_6=V, P_3=F.
- $P_6 \to P_4$: F. $R(x, y) \equiv (x = u_1 \land y = u_2)$. $P_6(\exists y R(u_1, y))$ est VRAI (pour $y = u_2$). $P_4(\exists x R(x, u_1))$ est FAUX.
- $P_6 \to P_5$: F. $R(u_1, u_1)$ = VRAI, $R(u_1, u_2)$ = FAUX. P_6=V, P_5=F.

Justifications pour les entrées VRAIES (Brèves) :

- P_1 implique toutes les autres car si $R(x, y)$ est vrai pour toutes les paires, alors toutes les restrictions ou existences sont aussi vraies.
- $P_i \to P_i$ est toujours VRAI (Tautologie).
- Si P_i affirme une propriété universelle sur une dimension (ex : $P_3 : \forall x R(x, a)$), elle implique une propriété existentielle sur cette même dimension ($P_4 : \exists x R(x, a)$), assumant un univers non vide.
- $P_3 \to P_2$: Si $\forall x R(x, a)$, alors $R(x_0, a)$ pour un x_0 (non vide), donc $\exists x \exists y R(x, y)$.
- $P_3 \to P_6$: Si $\forall x R(x, a)$, alors $R(a, a)$ est vrai, donc $\exists y R(a, y)$ (avec $y = a$) est vrai.
- $P_5 \to P_2$: Similaire à $P_3 \to P_2$.
- $P_5 \to P_4$: Si $\forall y R(a, y)$, alors $R(a, a)$ est vrai, donc $\exists x R(x, a)$ (avec $x = a$) est vrai.
- $P_6 \to P_2$: Similaire à $P_4 \to P_2$.

Exercice 5 : (facultatif)

Pour chacune des équivalences logiques suivantes, déterminez si elle est VRAIE ou FAUSSE.

1. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$
2. $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$
3. $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$
4. $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x))$

1. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$ **VRAIE.** *Preuve :*

   $(\rightarrow)$: Supposons $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ est VRAI. Soit c un élément arbitraire de l'univers. Alors $P(c) \wedge Q(c)$ est VRAI. Donc, $P(c)$ est VRAI et $Q(c)$ est VRAI. Puisque c est arbitraire, $\forall x P(x)$ est VRAI et $\forall x Q(x)$ est VRAI. Par conséquent, $(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$ est VRAI.

   $(\leftarrow)$: Supposons $(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$ est VRAI. Alors $\forall x P(x)$ est VRAI et $\forall x Q(x)$ est VRAI. Soit c un élément arbitraire de l'univers. Alors $P(c)$ est VRAI et $Q(c)$ est VRAI. Donc, $P(c) \wedge Q(c)$ est VRAI. Puisque c est arbitraire, $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ est VRAI.

   Puisque l'implication est vraie dans les deux sens, l'équivalence est VRAIE.

2. $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$ **FAUSSE.** *Contre-exemple :* Soit l'univers du discours l'ensemble des entiers $\mathbb{Z}$. Soit $P(x) \equiv$ "x est pair". Soit $Q(x) \equiv$ "x est impair".

   — Membre de Gauche (MG) : $\forall x(P(x) \vee Q(x))$. "Pour tout entier x, x est pair ou x est impair." Ceci est **VRAI**.

   — Membre de Droite (MD) : $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$. "Tous les entiers sont pairs, ou tous les entiers sont impairs." $\forall x P(x)$ est FAUX (ex : 3 n'est pas pair). $\forall x Q(x)$ est FAUX (ex : 2 n'est pas impair). Donc, FAUX $\vee$ FAUX $\equiv$ FAUX. Ceci est **FAUX**.

   Puisque MG est VRAI et MD est FAUX, l'équivalence est FAUSSE.

3. $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$ **FAUSSE.**
   L'implication $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow ((\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x)))$ est VRAIE.
   Cependant, l'implication $((\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$ est FAUSSE.
   Contre-exemple : Soit l'univers du discours l'ensemble des entiers $\mathbb{Z}$. Soit $P(x) \equiv$ "x est pair". Soit $Q(x) \equiv$ "x est impair".

   — Membre de Gauche (MG) : $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$. "Il existe un entier x tel que x est pair et x est impair." Ceci est **FAUX**.

   — Membre de Droite (MD) : $(\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$. "Il existe un entier pair ET il existe un entier impair." $\exists x P(x)$ est VRAI (ex : 2 est pair). $\exists x Q(x)$ est VRAI (ex : 3 est impair). Donc, VRAI $\wedge$ VRAI $\equiv$ VRAI. Ceci est **VRAI**.

   Puisque MG est FAUX et MD est VRAI, l'équivalence est FAUSSE.

4. $\exists x(P(x) \lor Q(x)) \equiv (\exists x P(x)) \lor (\exists x Q(x))$ **VRAIE.** *Preuve :*

($\rightarrow$) : Supposons $\exists x(P(x) \lor Q(x))$ est VRAI. Alors il existe un élément c dans l'univers tel que $P(c) \lor Q(c)$ est VRAI. Si $P(c)$ est VRAI, alors $\exists x P(x)$ est VRAI. Donc $(\exists x P(x)) \lor (\exists x Q(x))$ est VRAI. Si $Q(c)$ est VRAI, alors $\exists x Q(x)$ est VRAI. Donc $(\exists x P(x)) \lor (\exists x Q(x))$ est VRAI. Dans les deux cas, $(\exists x P(x)) \lor (\exists x Q(x))$ est VRAI.

($\leftarrow$) : Supposons $(\exists x P(x)) \lor (\exists x Q(x))$ est VRAI. Cas 1 : $\exists x P(x)$ est VRAI. Alors il existe un élément c tel que $P(c)$ est VRAI. Donc $P(c) \lor Q(c)$ est VRAI. Par conséquent, $\exists x(P(x) \lor Q(x))$ est VRAI. Cas 2 : $\exists x Q(x)$ est VRAI. Alors il existe un élément d tel que $Q(d)$ est VRAI. Donc $P(d) \lor Q(d)$ est VRAI. Par conséquent, $\exists x(P(x) \lor Q(x))$ est VRAI. Dans les deux cas, $\exists x(P(x) \lor Q(x))$ est VRAI.

Puisque l'implication est vraie dans les deux sens, l'équivalence est VRAIE.

Feuille supplémentaire