



**POLYTECHNIQUE
MONTREAL**

UNIVERSITÉ
D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

Contrôle périodique 3

Automne 2021

SOLUTIONNAIRE:

Directives:

- La durée du contrôle périodique est de 60 minutes.
- Vous devez compléter cet examen seul, sans l'aide de personne et en utilisant aucun outil de communication.
- L'examen est sur un total de 20 points.
- Répondez directement sur ce document Word (docx).
- Vous avez 15 minutes additionnelles pour produire le PDF et le soumettre dans la boîte de remise de votre section de cours.
- Générez le PDF avec le nom sous le format **SectionDeCours-Matricule.pdf** (exemple 0X-1234567.pdf) où X est la section de **cours**.
- Dans l'intérêt de l'équité pour tous les étudiants, vous devez modifier le fichier Word (docx) fourni. Modifier le fichier EXCLUT le fait d'intégrer des scans de rédaction manuscrite ou d'y écrire avec un stylet.
- Aucun retard ne sera toléré.
- Aucun courriel ne sera accepté.

Prénom:

Nom:

Matricule:

Exercice 1 (5 points)

Résoudre la relation de récurrence suivante :

$$2a_n = 7a_{n-1} - 3a_{n-2} \quad \text{avec } a_0 = \frac{26}{15} \text{ et } a_1 = \frac{17}{10}$$

a) Donnez l'équation caractéristique. (1 point)

Réponse:

$$2r^2 - 7r + 3 = 0$$

b) Trouvez les racines de l'équation caractéristique. (2 points)

Réponse:

$$r = \frac{1}{2} \text{ ou } r = 3$$

c) Donnez la solution de la relation de récurrence. (2 points)

Réponse:

$$a_n = \frac{7}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \times 3^n$$

Exercice 2 (2 points)

Démontrez que :

$$k \times \binom{n}{k} = n \times \binom{n-1}{k-1}$$

Réponse:

Par définition:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ et}$$

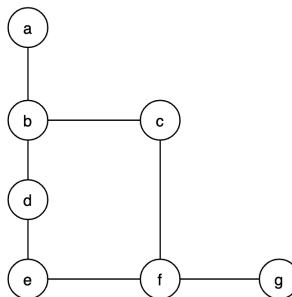
$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

Partons du terme de gauche afin de dériver le terme de droite.

$$k \times \binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \times \binom{n-1}{k-1}$$

Exercice 3 (3 points)

Soit le graphe ci-dessous :



LOG2810-01-02-03 Contrôle périodique 3

Donnez la séquence dans laquelle les sommets sont visités lors d'un parcours en largeur (Breadth First Search) à partir du sommet a. Pour y arriver, vous devez fournir l'état de la structure de données appropriée étape par étape.

Réponse:

Deux solutions possibles

Première solution:

a, b, c, d, f, e, g

État de la file FIFO à chacune des itérations

1. a
2. b
3. d, c
4. f, d
5. e, f
6. g, e
7. g
8. Vide

Deuxième solution:

a, b, d, c, e, f, g

État de la file FIFO à chacune des itérations

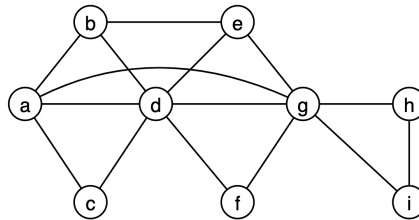
1. a
2. b
3. c, d
4. e, c
5. f, e
6. f

7. g

8. Vide

Exercice 4 (4 points)

Soit le graphe ci-dessous :



a) Le graphe contient-il un cycle eulérien ? Si oui, donnez la séquence des sommets. Sinon, justifiez votre réponse. (2 points)

Réponse:

Non

Le graphe contient des sommets de degrés impairs. Il ne saurait contenir de cycle eulérien.

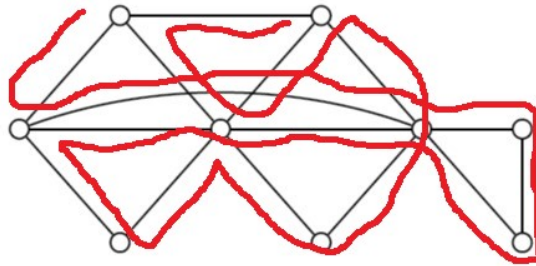
b) Le graphe contient-il un parcours (chaîne) eulérien ? Si oui, donnez la séquence des sommets. Sinon, justifiez votre réponse. (2 points)

Réponse:

Oui

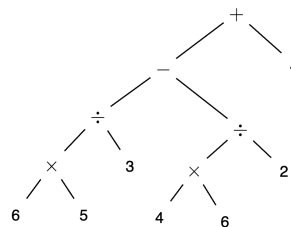
Il contient exactement 2 sommets de degrés impairs. Il contient donc un parcours eulérien.

Soit le parcours : b, a, g, h, i, g, d, a, c, d, f, g, e, d, b, e.



Exercice 5 (2.5 points)

Soit l'arbre syntaxique suivant :



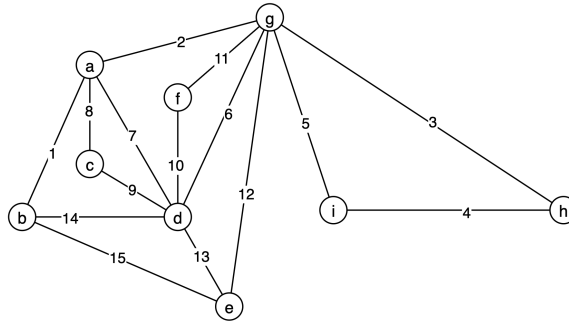
Donnez l'expression correspondante en notation polonaise.

Réponse:

$+ \ - \ \div \ \times \ 6 \ 5 \ 3 \ \div \ \times \ 4 \ 6 \ 2 \ 4$

Exercice 6 (3.5 points)

Soit le graphe ci-dessous :



a) Donnez l'arbre couvrant de poids minimum. Détaillez votre démarche en suivant l'algorithme de Kruskal. (3 points)

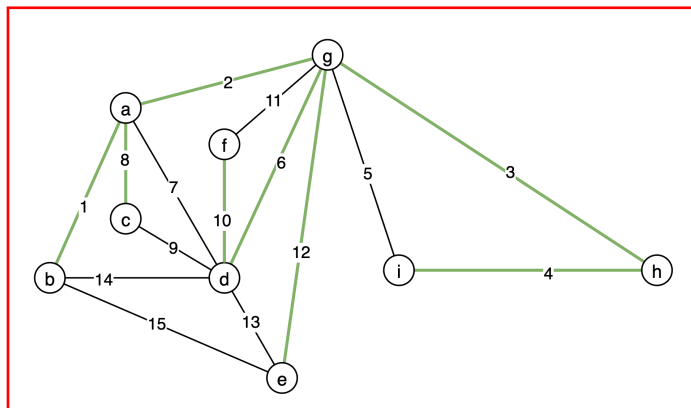
Réponse:

Voici la démarche avec l'algorithme de Kruskal.

Il faut d'abord ordonner les arêtes et ensuite ajouter dans l'ordre les arêtes à l'arbre couvrant en s'assurant que l'arête ajoutée ne forme pas de cycle.

Dans l'ordre on peut ajouter les arêtes:

{a, b}, {a, g}, {g, h}, {h, i}, {d, g}, {a, c}, {d, f}, {g, e}



b) Donnez le poids de cet arbre couvrant de poids minimum. (0.5 point)

Réponse:

$$1+2+3+4+6+8+10+12 = 46$$