POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 9 : DÉNOMBREMENT

H2025

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 :

Résolvez l'équation de récurrence :

$$\ln(a_{n+1}) - 3\ln(a_n) = 2, \quad n \geq 0,$$

avec les conditions initiales :

$$a_0 = e \qquad \text{et} \quad a_1 = e^5.$$

Solution :

Posons $b_n = \ln(a_n)$. La relation de récurrence devient alors

$$b_{n+1} - 3\,b_n = 2.$$

Il s'agit maintenant d'une équation linéaire à coefficients constants.

La récurrence homogène associée est

$$b_{n+1} - 3\,b_n = 0.$$

On cherche une solution de la forme $b_n^{(h)} = r^n$. En substituant,

$$r^{n+1} - 3\,r^n = r^n(r-3) = 0,$$

donc $r = 3$. Ainsi, la solution homogène est

$$b_n^{(h)} = C \cdot 3^n,$$

où C est une constante.

On cherche une solution particulière de la forme constante $b_n^{(p)} = A$. En insérant dans

$$b_{n+1} - 3\,b_n = 2,$$

on obtient

$$A - 3A = 2 \quad \Rightarrow \quad -2A = 2 \quad \Rightarrow \quad A = -1.$$

La solution particulière est donc $b_n^{(p)} = -1$.

La solution générale de la récurrence est la somme des solutions homogène et particulière,

$$b_n = C \cdot 3^n - 1.$$

Les conditions initiales fournissent

$$b_0 = \ln(a_0) = 1 \quad \text{et} \quad b_1 = \ln(a_1) = 5.$$

Pour $n = 0$,

$$b_0 = C \cdot 3^0 - 1 = C - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 2.$$

On vérifie pour $n = 1$:

$$b_1 = 2 \cdot 3^1 - 1 = 6 - 1 = 5,$$

ce qui est conforme aux conditions initiales.

Puisque $b_n = \ln(a_n)$, nous obtenons

$$\ln(a_n) = 2 \cdot 3^n - 1 \quad \Rightarrow \quad a_n = e^{\,2\cdot 3^n - 1}.$$

$$\boxed{a_n = e^{\,2\cdot 3^n - 1}}$$

Conclusion :

L'expression explicite de la suite (a_n) est $a_n = e^{\,2\cdot 3^n - 1}$.

Exercice 2 :

Soit n un entier positif. Montrez qu'il existe un multiple de n dont l'écriture décimale ne contient que les chiffres 0 et 1.

Solution :

Considérons les $n+1$ nombres suivants, chacun constitué uniquement de chiffres 1 :

$$1, \quad 11, \quad 111, \quad \dots, \quad \underbrace{11\cdots1}_{n+1 \text{ chiffres}}.$$

Pour $i = 1,2, \dots, n+1$, notons a_i le nombre composé de i chiffres 1.

Il y a $n+1$ nombres et seulement n restes possibles (de 0 à $n-1$) lorsqu'on les divise par n. Par le principe des tiroirs, il existe deux indices i et j (avec $i > j$) tels que

$$a_i \equiv a_j \pmod{n}.$$

En soustrayant, on obtient

$$a_i - a_j \equiv 0 \pmod{n},$$

ce qui signifie que $a_i - a_j$ est un multiple de n.

Or, la soustraction $a_i - a_j$ donne un nombre dont l'écriture décimale consiste en une suite de chiffres 1 suivie de j zéros (puisque a_j est soustrait de la partie terminale de a_i). Ce nombre ne contient donc que des 1 et des 0, et c'est un multiple de n.
On a ainsi démontré qu'il existe un multiple de n écrit uniquement avec les chiffres 0 et 1.

Exercice 3 :

On définit la fonction f par la récurrence suivante :

$$f(n) = 2f\left(\frac{n}{2}\right) + 3, \quad f(1) = 5$$

a) Calculez explicitement $f(2)$, $f(8)$, $f(64)$ et $f(1024)$.

Solution :

On calcule explicitement :

$$\begin{aligned} f(2) &= 2f(1) + 3 = 2 \times 5 + 3 = 13 \\ f(4) &= 2f(2) + 3 = 2 \times 13 + 3 = 29 \\ f(8) &= 2f(4) + 3 = 2 \times 29 + 3 = 61 \\ f(16) &= 2f(8) + 3 = 2 \times 61 + 3 = 125 \\ f(32) &= 2f(16) + 3 = 2 \times 125 + 3 = 253 \\ f(64) &= 2f(32) + 3 = 2 \times 253 + 3 = 509 \end{aligned}$$

Pour une formule générale, en déroulant la récurrence jusqu'à $f(1)$, on obtient :

$$f(n) = 8n - 3$$

Ainsi,

$$f(1024) = 8 \times 1024 - 3 = 8192 - 3 = 8189$$

b) Déterminez l'ordre de grandeur en grand O de la fonction $f(n)$.

Solution :

La récurrence est de la forme :

$$f(n) = af\left(\frac{n}{b}\right) + cn^d$$

où $a = 2$, $b = 2$, $c = 3$ et $d = 0$.

On calcule $b^d = 2^0 = 1$.
On compare a et b^d : ici, $a > b^d$ (car $2 > 1$).
On applique donc le cas 3 du théorème maître :

$$f(n) = O\left(n^{\log_b a}\right) = O\left(n^{\log_2 2}\right) = O(n)$$

Conclusion

La complexité asymptotique obtenue est donc :

$$\boxed{f(n) = O(n)}$$

Exercice 4 :

Une entreprise organise un projet spécial impliquant 15 ingénieurs, répartis en trois équipes distinctes pour travailler respectivement sur le développement, le test et le support. L'équipe de développement doit compter 7 ingénieurs, l'équipe de test 5 ingénieurs et l'équipe de support 3 ingénieurs.

Deux d'entre eux doivent être désignés comme chefs d'équipe. Par ailleurs, dans l'équipe de développement, il est nécessaire d'établir un ordre de présentation pour les 7 ingénieurs lors d'une réunion, tout en veillant à ce que Pierre et Marie ne se retrouvent pas à se présenter successivement. Dans l'équipe de test, l'ordre de passage des 5 ingénieurs est fixé par une permutation, chaque position ayant son importance. Pour l'équipe de support, il convient de constituer un sous-groupe de 2 ingénieurs qui interviendront en premier (en tenant compte de l'ordre au sein de ce duo), tandis que le troisième ingénieur interviendra plus tard.

Enfin, au cours de la conférence générale, l'ordre de passage des trois équipes (développement, test, support) est lui aussi déterminé par une permutation des trois départements.

a) Déterminez le nombre de manières de répartir les 15 ingénieurs dans les équipes selon les tailles indiquées (7 pour développement, 5 pour Test et 3 pour support).

b) Dans l'équipe développement (7 membres), calculez le nombre de façons de désigner les 2 chefs d'équipe.

c) Toujours dans l'équipe développement, en tenant compte que l'ordre de présentation doit être établi parmi les 7 membres sans que Pierre et Marie ne se retrouvent consécutifs, déterminez le nombre de permutations possibles.

d) Calculez le nombre de permutations pour l'ordre de présentation dans l'équipe Test (5 membres).

e) Dans l'équipe support (3 membres), déterminez le nombre de façons de sélectionner et d'ordonner le sous-groupe de 2 ingénieurs qui interviendront en premier.

f) Calculez le nombre de permutations pour l'ordre de passage des équipes (développement, test, support) lors de la conférence générale.

g) En combinant toutes les étapes précédentes, déterminez le nombre total de configurations possibles pour l'organisation complète du projet.

Solution:

a) Répartition des ingénieurs :
On répartit les 15 ingénieurs en équipes de tailles 7, 5 et 3. Le nombre de façons est

$$N_1 = \binom{15}{7} \times \binom{15-7}{5} \times \binom{3}{3} = \binom{15}{7} \times \binom{8}{5}.$$

Or, $\binom{15}{7} = 6435$ et $\binom{8}{5} = 56$. Ainsi,

$$N_1 = 6435 \times 56 = 360\,360.$$

b) Désignation des chefs d'équipe dans l'équipe Développement :
Le nombre de façons de choisir 2 chefs parmi 7 est

$$N_2 = \binom{7}{2} = 21.$$

c) Ordre de présentation dans l'équipe Développement (contrainte Pierre-Marie) :
Le nombre total de permutations des 7 membres est $7! = 5040$. Pour compter celles où Pierre et Marie se présentent consécutivement, on les considère comme un bloc (2 permutations internes). Avec les 5 autres, cela donne $6! = 720$ arrangements. Donc

$$N_{\text{adj}} = 2 \times 720 = 1440.$$

Le nombre de permutations où Pierre et Marie ne sont pas adjacents est

$$N_3 = 7! - N_{\text{adj}} = 5040 - 1440 = 3600.$$

d) Ordre de présentation dans l'équipe Test :
Le nombre de permutations des 5 ingénieurs est

$$N_4 = 5! = 120.$$

e) Sélection et ordre dans l'équipe Support :
Pour constituer un sous-groupe ordonné de 2 ingénieurs parmi 3, on a

$$N_5 = P(3,2) = 3 \times 2 = 6.$$

f) Ordre de passage des équipes lors de la conférence générale :
Le nombre de permutations des 3 équipes est

$$N_6 = 3! = 6.$$

g) Nombre total de configurations :
En appliquant la règle du produit,

$$N_{\text{total}} = N_1 \times N_2 \times N_3 \times N_4 \times N_5 \times N_6.$$

En substituant,

$$N_{\text{total}} = 360\,360 \times 21 \times 3600 \times 120 \times 6 \times 6.$$

Calculons étape par étape :

$$360\,360 \times 21 = 7\,567\,560,$$

$$7\,567\,560 \times 3600 = 27\,243\,216\,000,$$

$$27\,243\,216\,000 \times 120 = 3\,269\,185\,920\,000,$$

$$3\,269\,185\,920\,000 \times 6 = 19\,615\,115\,520\,000,$$

$$19\,615\,115\,520\,000 \times 6 = 117\,690\,693\,120\,000.$$

Ainsi,

$$N_{\text{total}} = 117\,690\,693\,120\,000.$$

On obtient donc $\boxed{117\,690\,693\,120\,000}$ configurations distinctes pour organiser complètement le projet.

Exercices suggérés pour la semaine :

Rosen 8e Édition, Chapitre 6 :

Section 6.1 : 6.1.1, 6.1.2, 6.1.4, 6.1.5, 6.1.9, 6.1.12, 6.1.16, 6.1.18, 6.1.23, 6.1.29, 6.1.39, 6.1.45, 6.1.59, 6.1.63, 6.1.69

Section 6.2 : 6.2.1, 6.2.2, 6.2.5, 6.2.9, 6.2.12, 6.2.17, 6.2.20, 6.2.23, 6.2.28, 6.2.30, 6.2.35, 6.2.39

Section 6.3 : 6.3.1, 6.3.2, 6.3.5, 6.3.7, 6.3.10, 6.3.13, 6.3.16, 6.3.21, 6.3.25, 6.3.30, 6.3.34, 6.3.37

Section 6.4 : 6.4.1, 6.4.3, 6.4.6, 6.4.9, 6.4.13, 6.4.15, 6.4.21, 6.4.26, 6.4.29, 6.4.36, 6.4.40, 6.4.46

Section 6.5 : 6.5.1, 6.5.4, 6.5.7, 6.5.9, 6.5.12, 6.5.16, 6.5.19, 6.5.23, 6.5.27, 6.5.31, 6.5.35, 6.5.39

Section 6.6 : 6.6.1, 6.6.2, 6.6.5, 6.6.8, 6.6.11, 6.6.13, 6.6.17, 6.6.20, 6.6.24, 6.6.29, 6.6.33, 6.6.36