Solutionnaire

Contrôle périodique 1

LOG2810

Sigle du cours

Sigle et titre du cours	*Groupe*	*Trimestre*
LOG2810 **Structures discrètes**	**Tous**	**Été 2022**
Professeur	***Local***	***Téléphone***
Aurel Randolph, Chargé de cours **Lévis Thériault, Coordonnateur**		

Jour	*Date*	*Durée*	*Heures*
Samedi	**21 mai 2022**	**1h**	**10h30-11h30**

Question 1 **(1.75 point)**

Donnez en langage courant la négation des expressions suivantes.

a) **(0.75 point)** S'il pleut ou s'il fait froid, je ne sors pas.

Réponse :

Il pleut ou il fait froid et je sors.

b) **(1 point)** Le nombre 522 n'est pas divisible par 3, mais il est divisible par 7.

Réponse : Plusieurs traductions possibles

- Le nombre 522 est divisible par 3 ou il n'est pas divisible par 7.
- Le nombre 522 n'est pas divisible par 7 ou il est divisible par 3.
- Si le nombre 522 est divisible par 7, alors il est divisible par 3.

Question 2 **(3.25 points)**

Soit ***U*** l'univers des personnes et des animaux et ***t*** la constante qui désigne *Tobby*. Soit les fonctions propositionnelles suivantes :

- Aime(x, y) : x aime y
- C(x) : x est un chien
- E(x) : x est un enfant
- Cr(x, y) : x craint y

Traduisez en logique des prédicats, les énoncés suivants.

a) **(1 point)** *Tobby* est un chien qui aime les enfants.

Réponse :

$\forall y\ E(y) \land C(t) \land Aime(t, y)$

b) **(1 point)** Tous les enfants ne craignent pas les chiens.

Réponse :

$\exists x\ \forall y\ (E(x) \land C(y) \land (\neg Cr(x, y)))$

c) **(1.25 point)** Certains chiens aiment les enfants et réciproquement.

Réponse :

- $(\exists y\ \forall x\ (C(y) \land E(x) \land Aime\ (y, x))) \land (\exists x\ \forall\ y\ (C(y) \land E(x) \land Aime\ (x, y)))$
- $(\exists y\ \forall x\ Aime\ (y, x)) \land (\exists x\ \forall\ y\ Aime\ (x, y)) \land C(y) \land E(x)$

Question 3 (**3 points**)

Montrez que :

$$\overline{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$$

Réponse :

$$\overline{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})} = (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$$
$$\overline{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})} = \left(\overline{A} \cap (A \cup \overline{B})\right) \cup \left(B \cap (A \cup \overline{B})\right)$$
$$\overline{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})} = \left((\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})\right) \cup \left((B \cap A) \cup (B \cap \overline{B})\right)$$
$$\overline{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})} = \left(\emptyset \cup (\overline{A} \cap \overline{B})\right) \cup ((B \cap A) \cup \emptyset)$$
$$\overline{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (B \cap A)$$
$$\overline{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$$

Question 4 (**3.5 points**)

En utilisant la technique de la preuve directe, prouvez que : pour tout entier positif et impair ***n***,

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor = \frac{n-1}{2} \times \frac{n+1}{2}$$

Réponse :

Soit n un entier positif impair. Il existe un entier positif k tel que n = 2k + 1.

On a $k = \frac{n-1}{2}$

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(2k+1)^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4k^2+4k+1}{4} \right\rfloor = \left\lfloor k^2 + k + \frac{1}{4} \right\rfloor$$

$k^2 + k$ est un entier positif et ¼ =0.25. Donc $\left\lfloor k^2 + k + \frac{1}{4} \right\rfloor = k^2 + k.$

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor = k^2 + k = k(k+1) = \frac{n-1}{2} \times \frac{n+1}{2}$$

CQFD.

Question 5 (**4 points**)

a) Soit ***f*** : $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ définie pour tout (n, m) ∈ $\mathbb{N}^2$ par ***f(n, m) = n*** *x* ***m****, produit de n par m*.

b) (**2 points**) ***f*** est-elle injective ?

Réponse :

- Méthode 1 :

Soit (n_1, m_1) et $(n_2, m_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(n_1, m_1) \neq (n_2, m_2)$

$(n_1, m_1) \neq (n_2, m_2) \rightarrow (n_1 = n_2 \wedge m_1 \neq m_2) \vee (n_1 \neq n_2 \wedge m_1 = m_2) \vee (n_1 \neq n_2 \wedge m_1 \neq m_2)$

  - Cas $n_1 = n_2 \wedge m_1 \neq m_2$

$m_1 \neq m_2 \rightarrow n_1m_1 \neq n_1m_2$

$m_1 \neq m_2 \rightarrow n_1m_1 \neq n_2m_2$ car $n_1 = n_2$

Donc $f(n_1, m_1) \neq f(n_2, m_2)$

- Cas $n_1 \neq n_2 \wedge m_1 = m_2$

  $n_1 \neq n_2 \rightarrow n_1m_1 \neq n_2m_1$

  $n_1 \neq n_2 \rightarrow n_1m_1 \neq n_2m_2$ car $m_1 = m_2$

  Donc $f(n_1, m_1) \neq f(n_2, m_2)$

- Cas $n_1 \neq n_2 \wedge m_1 \neq m_2$

  $n_1 \neq n_2 \wedge m_1 \neq m_2$ mais on n'a pas toujours $n_1m_1 \neq n_2m_2$

f n'est donc pas injective.

- Méthode 2 : Contre-exemple
  $(n_1, m_1) = (2, 4)$ et $(n_2, m_2) = (1, 8)$
  $f(n_1, m_1) = f(n_2, m_2) = 8$ et $(n_1, m_1) \neq (n_2, m_2)$
  f n'est donc pas injective.

c) **(2 points)** ***f*** est-elle surjective ?

Réponse :

$\forall y \in \mathbb{N}, \exists\ (n, m) \in \mathbb{N}^2, y = nm = f(n, m)$

f est surjective.

Question 6 **(4.5 points)**

Vous êtes sur le point de quitter votre logement pour aller au contrôle périodique de LOG2810 à Polytechnique Montréal. Vous constatez soudainement que vous n'avez pas vos lunettes. En déroulant les faits passés, vous faites les déclarations suivantes qui sont toutes vraies.

> *Si mes lunettes sont sur la table de la cuisine, alors je les aurais vues au déjeuner. J'ai lu le journal dans le salon ou je l'ai lu dans la cuisine. Si j'ai lu le journal dans le salon, alors mes lunettes sont sur la table à café. Je n'ai pas vu mes lunettes au déjeuner. Si j'ai lu le journal dans la cuisine, alors mes lunettes sont sur la table de la cuisine.*

En vous basant sur vos connaissances en logique mathématique, vous traduisez ces déclarations comme suit.

Définitions

- P : Mes lunettes sont sur la table de la cuisine
- Q : J'ai vu mes lunettes au déjeuner
- R : J'ai lu le journal dans le salon
- S : J'ai lu le journal dans la cuisine
- T : Mes lunettes sont sur la table à café

Hypothèses

H1 : $P \rightarrow Q$
H2 : $R \vee S$
H3 : $R \rightarrow T$
H4 : $\neg Q$
H5 : $S \rightarrow P$

En utilisant les règles d'inférence étudiées en cours, pouvez-vous conclure que les lunettes sont sur la table à café ? Vous devez numéroter, écrire et justifier toutes les étapes de votre raisonnement.

Réponse :

1.	$P \rightarrow Q$	H1
2.	$\neg Q$	H4
3.	$\neg P$	Étapes 1 et 2 et modus tollens
4.	: $S \rightarrow P$	H5
5.	$\neg S$	Étapes 3 et 4 et modus tollens
6.	$R \vee S$	H2
7.	R	Étapes 5 et 6 et syllogisme disjonctif
8.	$R \rightarrow T$	H3
9.	T	Étapes 7 et 8 et modus ponens

On peut effectivement conclure que les lunettes sont sur la table à café