

LOG 2810 – Éléments de structures discrètes

Examen final

Hiver 2021

Nom :
Matricule :

Directives

- Veuillez indiquer votre nom, prénoms et matricule, puis signer l'engagement sur l'honneur.
- Toute documentation est permise.
- En cas de doute sur le sens d'une question, énoncez clairement dans votre réponse toutes les suppositions que vous faites. Nous ne répondrons pas aux questions.
- La durée réelle de l'examen est de **2 heures 30 minutes**. Ce temps peut varier pour les personnes en situation de handicap et bénéficiant d'une mesure de temps supplémentaire.
- Vous disposez d'un **temps additionnel de 30 minutes** réparti comme suit : 10 minutes pour la préparation avant le début de l'examen et 20 minutes pour compléter la procédure de dépôt. Ce temps additionnel de 30 minutes est le même pour tous, personne en situation de handicap ou non.
- Vous devez scanner vos réponses ainsi que cette page de couverture où se trouvent vos informations d'identification et l'engagement sur l'honneur signé, puis déposer le tout en un seul document pdf sur le site Moodle du cours en utilisant le lien prévu à cet effet. Cette directive sur l'envoi par moodle s'applique également pour les personnes en situation de handicap. Aucun envoi par mail ne donc sera accepté.
- Vous devez veiller à ce que votre copie numérisée soit lisible. La qualité de la copie soumise est de votre responsabilité. Les parties illisibles ne seront pas corrigées et vaudront 0.
- Aucune copie ne sera reçue après le délai de dépôt.
 - En complément à l'engagement ci-dessous, l'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.
 - Cet examen est calculé sur 20 points et vaut 40% de la note finale.

Engagement sur l'honneur à remettre

Sur mon honneur, je déclare avoir complété cet examen par moi-même, sans communication avec personne, et en conformité avec les directives identifiées sur la première page de l'énoncé.

Signature :

Question 1

- a. **(1.5 points)** Démontrez que la relation R , constituée de tous les couples (u, v) , où u et v sont des mots sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ de longueur 3 ou plus qui concordent sauf peut-être pour les trois dernières lettres, est une relation d'équivalence sur l'ensemble des mots de Σ^* de longueur trois ou plus.

Solution :

- b. **(1.5 points)** Quelles sont les classes d'équivalence de R ?

Solution :

Question 2

a. **(2 points)**

Montrez que les trois hypothèses

$$\text{H1 } \forall x(P(x) \rightarrow S(x))$$

$$\text{H2 } \neg \exists x(Q(x) \wedge R(x))$$

$$\text{H3 } \forall x \neg R(x) \rightarrow \neg S(x)$$

impliquent la conclusion $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$.

Utilisez les règles d'inférence pour construire un **raisonnement valide** qui aboutit à la conclusion à partir des hypothèses. Justifiez chacune de vos étapes.

Solution :

b. **(2 points)** Montrez par induction que

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

pour tout entier positif plus grand que 1.

Solution :

Question 3

- a. **(2 points)** Combien peut-on former de mots distincts de 10 lettres sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ qui contiennent exactement quatre a, trois b et trois c ?

Solution :

- b. **(2 points)** Trouvez une relation de récurrence pour le nombre de chaînes binaires de longueur n qui contiennent un nombre pair de 0. Quelles sont les conditions initiales ?

Indice : *Le nombre de ces chaînes est égal au nombre de ces chaînes qui se terminent par 0 plus le nombre de ces chaînes qui se terminent par 1.*

Solution :

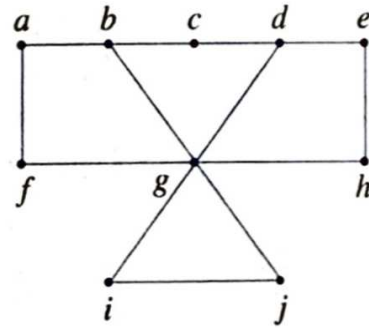
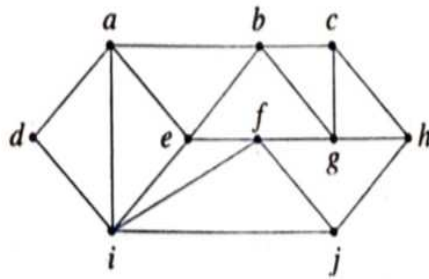
Question 4

- a. **(2 points)** Énumérez tous les graphes simples **non isomorphes** ayant 5 sommets et 3 arcs.

Indice : *Il y en a 4.*

Solution :

- b. **(2 points)** Pour chacun des deux graphes déterminez s'il contient un cycle Hamiltonien. Dans l'affirmative, décrivez-en un et dans la négative, prouvez-le.



Solution :

Question 5

Considérez l'automate \mathcal{A} de la figure 1

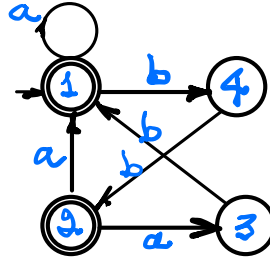


FIGURE 1 – L'automate \mathcal{A} de la question 5.

- a. **(1.5 points)** Construisez un automate fini déterministe équivalent à l'automate \mathcal{A} .

Solution :

- b. **(1.5 points)** Trouvez le langage reconnu par l'automate \mathcal{A} en résolvant le système d'équations linéaires associé.

Solution :

Question 6 (2 points)

Soit la grammaire $G = \{V, T, S, P\}$ avec $V = \{S, A, B, a, b\}$, $T = \{a, b\}$ et P , composé des productions :

$$S \rightarrow AB, A \rightarrow aAb, B \rightarrow bBa, A \rightarrow \lambda, B \rightarrow \lambda$$

Trouvez le langage produit par la grammaire G .

Solution :

