POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 5 : Relations

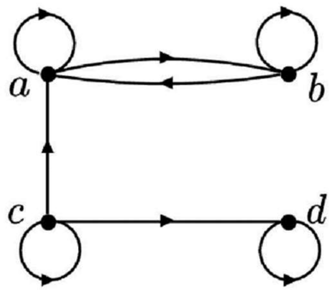
SOLUTIONNAIRE

H2024

Exercice 1 :

Soit A = {a, b, c, d}. Déterminez si les relations R définies sur A et représentées par les graphes ci-dessous sont réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives.

a)



Réponse :

• Réflexivité : La relation illustrée est réflexive puisqu'il y a une boucle à chaque sommet.

Formellement, ∀ x ∈ A, (x, x) ∈ R ou encore ∀ x ∈ A, x R x.

• Symétrie : La relation n'est pas symétrique, puisque, par exemple, l'arête (c, a) est présente mais pas l'arête (a, c). C'est à dire, (c, a) ∈ R ∧ (c, a) ∉ R.

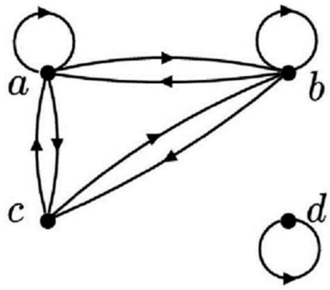
Formellement ∃ x, y ∈ A, ((x, y) ∈ R) ∧ ((y, x) ∉ R).

• Antisymétrie : Elle n'est pas antisymétrique, puisque les deux arêtes (a, b) et (b, a) sont présentes et a ≠ b.

Formellement ∃ x, y ∈ A, ((x, y) ∈ R) ∧ ((y, x) ∈ R) ∧ (x ≠ y).

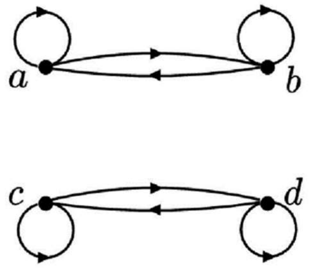
• Transitivité : Elle n'est pas transitive, puisque les deux arêtes (c, a), (a, b) sont présentes, mais l'arête (c, b) n'est pas présente.

Formellement ∃ x, y, z ∈ A, ((x, y) ∈ R) ∧ ((y, z) ∈ R) ∧ (x, z) ∉ R b)



Réponse :
• Réflexivité : La relation illustrée n’est pas réflexive puisqu'il existe un sommet c qui n’a pas de boucle.
Formellement, ∃ x ∈ A, (x, x) ∉ R.
• Symétrie : La relation est symétrique, puisque, ∀ (x, y) ∈ R, (y, x) ∈ R.
• Antisymétrie : Elle n'est pas antisymétrique, puisque les deux arêtes (a, b) et (b, a) sont présentes et a ≠ b.
Formellement ∃ x, y ∈ A, ((x, y) ∈ R) ∧ ((y, x) ∈ R) ∧ (x ≠ y).
• Transitivité : Elle n'est pas transitive, puisque les deux arêtes (c, a), (a, c) sont présentes, mais l'arête (c, c) n’est pas présente.
Formellement ∃ x, y, z ∈ A, ((x, y) ∈ R) ∧ ((y, z) ∈ R) ∧ (x, z) ∉ R.

c)



Réponse :
• Réflexivité : La relation illustrée est réflexive puisqu'il y a une boucle à chaque sommet.
• Symétrie : La relation est symétrique, puisque ∀ (x, y) ∈ R, (y, x) ∈ R.
• Antisymétrie : Elle n'est pas antisymétrique, puisque les deux arêtes (a, b) et (b, a) sont présentes et a ≠ b.
• Transitivité : Elle est transitive, puisque ∀ ((x, y) ∈ R) ∧ ((y, z) ∈ R), (x, z) ∈ R

Exercice 2 :

Soit F = {e, f, g, h} et la relation d'équivalence S définies sur F par :
S = {(e, e), (e, f), (f, e), (f, f), (g, g), (g, h), (h, g), (h, h)}
Quelles sont les classes d'équivalence de S ?

Réponse :
Les éléments appartiennent à la même classe d'équivalence s'ils sont reliés par S.
- Classe de e : {e, f}
- Classe de g : {g, h}

Exercice 3 :

Soit F = {6, 7, 8, 9, 10} et la relation S définies sur F par :
S = {(6, 8), (8, 6), (8, 7), (8, 9), (9, 10)}
Quelle est la fermeture transitive T de la relation S ?

Réponse :
La fermeture transitive T d'une relation S est la plus petite relation transitive qui contient S. Elle inclut tous les éléments de S, ainsi que tous les éléments qui peuvent être reliés par une séquence d'éléments de S.
- T = {(6, 8), (8, 6), (8, 7), (8, 9), (9, 10), (6, 6), (6, 7), (6, 9), (6, 10), (8, 8), (8, 10)}

Exercice 4 :

Soit S l'ensemble de toutes les chaînes de caractères de l’alphabet français. Déterminez si ces relations sont réflexives, symétriques, antisymétriques et/ou transitives.

a) R1 = {(a, b) | a et b n'ont aucune lettre en commun}

b) R2 = {(a, b) | a et b n'ont pas la même longueur}

c) R3 = {(a, b) | a est plus longue que b}

Solution :

a)

S = A = {ensemble de toutes les chaînes de lettres françaises}

R1 = {(a, b) | a et b n'ont aucune lettre en commun}

R1 n'est pas réflexive, car une chaîne n'a jamais aucune lettre en commun avec elle-même.

R1 est symétrique, car si la chaîne a et la chaîne b n'ont aucune lettre en commun, alors les chaînes b et a n'ont aucune lettre en commun non plus.

R1 n'est pas antisymétrique, car si la chaîne a et la chaîne b n'ont aucune lettre en commun et si la chaîne b et la chaîne n’ont également aucune lettre en commun, alors les chaînes a et b ne sont pas nécessairement la même chaîne (par exemple, ‘wx’ et ‘yz’ n'ont aucune lettre en commun alors qu'elles ne sont pas la même chaîne).

R1 n'est pas transitive, car si la chaîne a et la chaîne b n'ont aucune lettre en commun et si la chaîne b et la chaîne c n'ont également aucune lettre en commun, alors les chaînes a et c peuvent contenir des lettres communes (par exemple, si a = ‘xy’, b = ‘wz’ et c = ‘vx’).

b)

S = A = {ensemble de toutes les chaînes de lettres françaises}

R2 = {(a, b) | a et b n'ont pas la même longueur}

R2 n'est pas réflexive, car une chaîne a toujours la même longueur qu'elle-même.

R2 est symétrique, car si la chaîne a et la chaîne b n'ont pas la même longueur, alors les chaînes b et a n'ont pas la même longueur non plus.

R2 n'est pas antisymétrique, car si la chaîne a et la chaîne b n'ont pas la même longueur et si la chaîne b et la chaîne a n'ont également pas la même longueur, alors les chaînes a et b ne sont pas nécessairement la même chaîne (par exemple, ‘wx’ et ‘xyz’ n'ont pas la même longueur alors qu'elles ne sont pas la même chaîne).

R2 n'est pas transitive, car si la chaîne a et la chaîne b n'ont pas la même longueur et si la chaîne b et la chaîne c n'ont pas la même longueur, alors les chaînes a et c peuvent avoir la même longueur (par exemple, si a = ‘xy’, b = ‘wyz’ et c = ‘vx’).

c)

S = A = {ensemble de toutes les chaînes de lettres françaises}

R3 = {(a, b) | a est plus longue que b}
R3 n'est pas réflexive, car une chaîne n'est jamais plus longue qu'elle-même.
R3 n'est pas symétrique, car si la chaîne a est plus longue que la chaîne b, alors b ne peut pas être plus longue que a.
R3 est antisymétrique, car "a est plus longue que b et b est plus longue que a" ne peut jamais être vrai et donc l'énoncé conditionnel dans la définition d'antisymétrique est toujours vrai.
R3 est transitive, car si la chaîne a est plus longue que la chaîne b et si la chaîne b est plus longue que la chaîne c, alors la chaîne a doit être plus longue que la chaîne c.

Exercice 5 :

On définit sur R^2 la relation $\prec$ par :

$$(x, y) \prec (x', y') \Leftrightarrow ((x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y')).$$

Démontrer que ceci définit une relation d'ordre partiel sur R^2.

Solution :

La relation est

- réflexive : $x = x$ et $y \leq y$ impliquent $(x, y) \prec (x, y)$;

- antisymétrique : si $(x, y) \prec (x', y')$ et $(x', y') \prec (x, y)$, alors on a nécessairement que $x = x'$

(si $x < x'$ par exemple, on ne peut avoir $(x', y') \prec (x, y)$). Mais alors, on a à la fois $y \leq y'$ d'après la première relation, et aussi $y' \leq y$ d'après la seconde. On en déduit que $x = x'$ et $y = y'$;

- transitive : si $(x, y) \prec (x', y')$ et $(x', y') \prec (x'', y'')$, alors :

- ou bien $x = x'$ et $x' = x''$: dans ce cas, on a $y \leq y'$ et $y' \leq y''$ donc $y \leq y''$ et donc $(x, y) \prec (x'', y'')$;

- ou bien $x = x'$ et $x' < x''$: dans ce cas, on a $x < x''$ et donc $(x, y) \prec (x'', y'')$;

- ou bien $x < x'$ et $x' = x''$: dans ce cas, on a $x < x''$ et donc $(x, y) \prec (x'', y'')$;

La relation est réflexive, transitive, et antisymétrique, ceci définit un ordre partiel sur R^2.

Exercice 6 :

Soit E un ensemble non-vide et $\alpha \subset P(E)$ non-vide vérifiant la propriété suivante :

$$\forall X,Y \in \alpha, \exists Z \in \alpha, Z \subset (X \cap Y)$$

On définit sur P(E) la relation $\sim$ par :

$$A \sim B \Leftrightarrow \exists X \in \alpha, X \cap A = X \cap B.$$

Prouver que ceci définit une relation d'équivalence sur P(E).

Solution :

Vérifions les 3 propriétés d'une relation d'équivalence :

La relation est symétrique :
$A \sim B \Leftrightarrow \exists X \in \alpha, X \cap A = X \cap B \Leftrightarrow B \sim A.$

La relation est réflexive : soit $A \in P(E)$ quelconque, et prenons $X \in \alpha$ (peu importe lequel). Alors on a bien $X \cap A = X \cap A$ et donc $A \sim A$.

La relation est transitive : prenons $A, B, C \in P(E)$ tels que $A \sim B$ et $B \sim C$. Alors on a
$A \sim B \Leftrightarrow \exists X \in \alpha, X \cap A = X \cap B$
$B \sim C \Leftrightarrow \exists Y \in \alpha, Y \cap B = Y \cap C.$

Soit $Z \in \alpha$ tel que $Z \subset X \cap Y$. Alors on a $Z \cap X = Z$ et $Z \cap Y = Z$. De cela, on tire

$$\begin{aligned} Z \cap A &= Z \cap X \cap A \\ &= Z \cap X \cap B \\ &= Z \cap B \\ &= Z \cap Y \cap B \\ &= Z \cap Y \cap C \\ &= Z \cap C. \end{aligned}$$

Ceci prouve bien que $A \sim C$ et que $\sim$ est une relation d'équivalence.