



**POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL**

UNIVERSITÉ
D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 1 : LOGIQUE PROPOSITIONNELLE

Solutionnaire

Exercice 1 :

Considérez les propositions suivantes concernant les croyances des platistes (ceux qui pensent que la Terre est plate) :

- P : Une personne croit que la Terre est plate.
- Q : Une personne a regardé toutes les vidéos YouTube sur la "vérité" de la Terre plate.
- R : Une personne participe activement à des forums de platistes en ligne.
- S : Une personne a convaincu au moins trois autres personnes que la Terre est plate.
- T : Une personne achète un billet pour une croisière d'exploration au "bord de la Terre".
- C : Une personne est convaincue qu'il n'y a aucun risque de tomber dans l'espace.
- E : Une personne est prête à rejoindre l'expédition.

Pour chacune des combinaisons logiques suivantes, traduisez l'expression en langage courant :

1. $P \leftrightarrow (Q \wedge R \wedge S)$

Réponse proposée : Une personne ne peut croire que la Terre est plate que si elle a regardé toutes les vidéos YouTube pertinentes, participe activement à des forums de platistes en ligne, et a convaincu au moins trois autres personnes.

2. $T \rightarrow (P \wedge R)$

Réponse proposée : Si une personne achète un billet pour une croisière d'exploration au bord de la Terre, alors elle croit que la Terre est plate et participe activement aux forums en ligne.

3. $(\neg R \vee \neg S) \rightarrow \neg P$

Réponse proposée : Une personne qui ne participe pas activement aux forums de platistes en ligne ou n'a pas convaincu au moins trois autres personnes ne peut pas croire fermement que la Terre est plate.

4. $T \rightarrow (Q \wedge P)$

Réponse proposée : Pour acheter un billet pour une croisière au bord de la Terre, il est nécessaire mais pas suffisant qu'une personne ait regardé toutes les vidéos YouTube et croit que la Terre est plate.

5. $(P \wedge S) \rightarrow (R \wedge Q)$

Réponse proposée : Une personne qui croit que la Terre est plate et a convaincu au moins trois autres personnes doit également participer activement aux forums en ligne et avoir regardé toutes les vidéos YouTube pertinentes.

$$6. E \leftrightarrow (P \wedge \neg C)$$

Réponse proposée : Une personne est prête à rejoindre l'expédition au bord de la Terre si et seulement si elle est convaincue que la Terre est plate, mais qu'elle est encore hésitante sur le fait de tomber dans l'espace.

Exercice 2:

Considérez les propositions suivantes concernant le médicament antidiabétique commercialisé sous le nom Ozempic :

- O : Tout le monde commence à utiliser Ozempic.
- D : Les ventes de donuts baissent drastiquement.
- C : Les célébrités arrêtent de promouvoir Ozempic sur les réseaux sociaux.
- E : Tout le monde veut essayer Ozempic.
- S : Ozempic peut avoir des effets secondaires surprenants.
- M : Les personnes qui utilisent Ozempic le font pour des raisons médicales.
- F : Ozempic est efficace pour la perte de poids.

Utilisez les propositions ci-dessus pour écrire des expressions logiques basées sur les énoncés suivants :

1. Si tout le monde commence à utiliser Ozempic, alors les ventes de donuts baisseront drastiquement.

Réponse : $O \rightarrow D$

2. À moins que les célébrités arrêtent de promouvoir Ozempic sur les réseaux sociaux, tout le monde voudra l'essayer.

Réponse : $\neg C \rightarrow E$

3. Ozempic est efficace pour la perte de poids, mais il peut aussi avoir des effets secondaires surprenants.

Réponse : $F \wedge S$

4. Il n'est pas vrai que toutes les personnes qui utilisent Ozempic le font pour des raisons médicales.

Réponse : $\neg M$

5. Si les célébrités arrêtent de promouvoir Ozempic, alors tout le monde ne voudra pas forcément l'essayer, et les ventes de donuts ne baisseront pas.

Réponse : $C \rightarrow (\neg E \wedge \neg D)$

Exercice 3 :

Formulez la réciproque, la contraposée et l'inverse pour chacun de ces énoncés :

1. Si je mets à jour mon profil LinkedIn, alors je trouverai un travail.

Réponse :

Réciproque :

- Si je trouve un travail, alors j'ai mis à jour mon profil LinkedIn.
- Trouver un travail est une condition suffisante pour avoir mis à jour mon profil LinkedIn.

Contraposée :

- Si je ne trouve pas de travail, alors je n'ai pas mis à jour mon profil LinkedIn.
- Ne pas trouver de travail signifie que je n'ai pas mis à jour mon profil LinkedIn.

Inverse :

- Si je ne mets pas à jour mon profil LinkedIn, alors je ne trouverai pas de travail.
- Ne pas mettre à jour mon profil LinkedIn est suffisant pour ne pas trouver de travail.

2. Je postule à une offre d'emploi chaque fois que je reçois une alerte "offre intéressante".

Réponse :

Réciproque :

- Si je postule à une offre d'emploi, alors j'ai reçu une alerte "offre intéressante".
- Postuler à une offre d'emploi est une condition suffisante pour avoir reçu une alerte "offre intéressante".

Contraposée :

- Si je ne postule pas à une offre d'emploi, alors je n'ai pas reçu d'alerte "offre intéressante".
- Ne pas postuler à une offre d'emploi signifie que je n'ai pas reçu d'alerte "offre intéressante".

Inverse :

- Si je ne reçois pas d'alerte "offre intéressante", alors je ne postule pas à une offre d'emploi.
 - Ne pas recevoir d'alerte "offre intéressante" est suffisant pour ne pas postuler à une offre d'emploi.
3. Si je maîtrise le langage Python, alors je vais recevoir des messages des recruteurs sur LinkedIn.

Réponse :**Réciproque :**

- Si je reçois des messages des recruteurs sur LinkedIn, alors je maîtrise le langage Python.
- Recevoir des messages des recruteurs sur LinkedIn est une condition suffisante pour maîtriser le langage Python.

Contraposée :

- Si je ne reçois pas de messages des recruteurs sur LinkedIn, alors je ne maîtrise pas le langage Python.
- Ne pas recevoir de messages des recruteurs sur LinkedIn signifie que je ne maîtrise pas le langage Python.

Inverse :

- Si je ne maîtrise pas le langage Python, alors je ne vais pas recevoir de messages des recruteurs sur LinkedIn.
- Ne pas maîtriser le langage Python est suffisant pour ne pas recevoir de messages des recruteurs sur LinkedIn.

Exercice 4:

En utilisant une méthode par dérivation, montrez que :

$$((P \wedge Q) \rightarrow R) \equiv ((P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R))$$

Justifiez toutes les étapes de votre réponse en précisant la loi utilisée à chaque étape.

Réponse :**Méthode 1 : Dérivons l'expression de gauche**

$$((P \wedge Q) \rightarrow R) \equiv (\neg (P \wedge Q) \vee R) \text{ Implication en disjonction}$$

$$\equiv (((\neg P) \vee (\neg Q)) \vee R) \text{ Loi de De Morgan}$$

$$\equiv (\neg P \vee (\neg Q) \vee R) \text{ Associativité}$$

$$\equiv ((\neg P \vee (\neg Q)) \vee R) \text{ Associativité}$$

$$\equiv (\neg P \vee R) \vee ((\neg Q) \vee R) \text{ Idempotence}$$

$$\equiv ((P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)) \text{ Disjonctions en implications}$$

CQFD

Méthode 2 : Dérivons l'expression de droite

$$((P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)) \equiv ((\neg P \vee R) \vee (\neg Q \vee R)) \text{ Transformation des implications en disjonction}$$

$$\equiv (\neg P \vee R \vee \neg Q \vee R) \text{ Associativité de } \vee$$

$$\equiv ((\neg P \vee \neg Q) \vee (R \vee R)) \text{ Associativité de } \vee$$

$$\equiv ((\neg P \vee \neg Q) \vee R) \text{ Simplification de } (R \vee R)$$

$$\equiv (\neg(P \wedge Q) \vee R) \text{ Loi de De Morgan}$$

$$\equiv ((P \wedge Q) \rightarrow R) \text{ Transformation de la disjonction en implication}$$

CQFD

Exercice 5 :

En utilisant une table de vérité, répondez aux questions suivantes. Justifiez toutes les étapes de votre réponse.

1. Le célèbre économiste Harold Carlson fait la prédiction suivante : « La balance des paiements diminuera si et seulement si les taux d'intérêt restent stables ; cependant, il n'est pas vrai que soit les taux d'intérêt ne resteront pas stables, soit la balance des paiements diminuera. »

Que peut-on dire de la prédiction de Carlson ? Est-ce le cas d'une tautologie, contradiction, ou contingence ?

B : "La balance des paiements diminuera."

I : "Les taux d'intérêt resteront stables."

Réponse :

« La balance des paiements diminuera si et seulement si les taux d'intérêt restent stables. » Ceci peut être écrit comme :

$$B \leftrightarrow I$$

« Il n'est pas vrai que soit les taux d'intérêt ne resteront pas stables, soit la balance des paiements diminuera. » Ceci peut être écrit comme :

$$\neg(\neg I \oplus B)$$

Nous devons évaluer la table de vérité pour l'énoncé composé :

$$(B \leftrightarrow I) \wedge \neg(\neg I \oplus B)$$

Table de vérité :

B	I	$(B \leftrightarrow I) \wedge \neg(\neg I \oplus B)$
VRAI	VRAI	FAUX
VRAI	FAUX	FAUX
FAUX	VRAI	FAUX
FAUX	FAUX	FAUX

La dernière colonne de la table de vérité montre que l'énoncé composé $(B \leftrightarrow I) \wedge (I \wedge \neg B)$ est faux dans tous les cas. Cela signifie que la prédiction de Carlson est une **contradiction**.

2. Deux astronomes discutent des supernovas. Le Dr Frank dit : « La recherche a établi que si une supernova se produit à moins de dix années-lumière de la Terre, alors la vie sur Terre sera détruite. » Le Dr Harris dit : « La recherche a également établi qu'une supernova ne se produira pas à moins de dix années-lumière de la Terre, ou la vie sur Terre ne sera pas détruite. »

Est-il possible que les deux astronomes aient raison ? Dans ce cas, que pouvez-vous déterminer sur l'occurrence d'une supernova ?

S : "Une supernova se produit à moins de dix années-lumière de la Terre."

L : "La vie sur Terre sera détruite."

Réponse :

Dr Frank : « Si une supernova se produit à moins de dix années-lumière de la Terre, alors la vie sur Terre sera détruite. » Ceci peut être écrit comme :

$$S \rightarrow L$$

Dr Harris : « Soit une supernova ne se produira pas à moins de dix années-lumière de la Terre, soit la vie sur Terre ne sera pas détruite. » Ceci peut être écrit comme :

$$\neg S \vee \neg L$$

En faisant l'équivalence des deux déclarations :

$$\neg S \vee \neg L \equiv S \rightarrow L$$

Table de vérité :

S	L	$\neg S \vee \neg L$	$S \rightarrow L$
VRAI	VRAI	FAUX	VRAI
VRAI	FAUX	VRAI	FAUX
FAUX	VRAI	VRAI	VRAI
FAUX	FAUX	VRAI	VRAI

Il est possible que les deux astronomes aient raison.

Selon la table de vérité, les cas où les deux affirmations sont correctes sont ceux où une supernova ne se produit pas à moins de dix années-lumière de la Terre.