Solutionnaire

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Contrôle périodique 3

LOG1810

Sigle du cours

Sigle et titre du cours	Groupe	Trimestre
LOG1810 Structures discrètes	Tous	Été 2024

Professeur	Local	Téléphone
Vincent Brouillard, Chargé de cours Aurel Randolph, Chargé de cours		

Jour	Date	Durée	Heures
Samedi	15 juin 2024	1h	10h30-11h30

Documentation	Calculatrice	
☐ Aucune ☒ Toute ☒ Voir directives particulières	☐ Aucune ☐ Toutes ☒ Non programmable (AEP)	Les appareils électroniques personnels sont interdits.

Question 1 (**5.5 points)**

Soit **E** l'ensemble des nombres de 4 chiffres dont le premier chiffre est non nul.

a. (**2 points)** Quel est le nombre d'éléments de **E** ?

Réponse :

Soit N1 le nombre recherché.

Choix du 1er chiffre, 0 étant exclu : C(9, 1).

- Choix du 2ème chiffre : C (10, 1).
- Choix du 3ème chiffre : C (10, 1).
- Choix du 4ème chiffre : C (10, 1).

- **Nombre d'éléments de E**
  - N1 = C(9, 1) x C(10, 1) x C(10, 1) x C(10, 1)
  - N1 = 9000

b. (**3.5 points**) Quel est le nombre d'éléments de **E** composés d'exactement deux chiffres identiques ?

Réponse :

Soit N2 le nombre recherché, a le chiffre qui se répète 2 fois, b et c les autres chiffres qui ne se répètent pas, avec b ≠ c.

A. Préalable

- **Dénombrement des motifs**
  - Dénombrement par énumération

On a les motifs suivants :

aabc – abac – abca   aacb – acab – acba   baac– baca – bcaa   caab – caba – cbaa

  - Il y a donc au otl 12 motifs.
- Autre possibilité de dénombrement des motifs.
  - Pour le chiffre qui se répète 2 fois, nous avons C(4, 2) choix de positions pour constituer le motif.
  - Une fois que le chiffre qui se répète est positionné, il nous reste C(2, 1) choix pour le 2ème chiffre. Le reste s'impose au 3ème chiffre.
  - Le nombre total de motifs est donc : C(4, 2) x C(2, 1) = 12

B. Solution 1

- **Cas où le chiffre qui se répète est différent de 0**
  - Choix du chiffre qui se répète 2 fois : C(9, 1).
  - Choix du 2ème chiffre qui compose le nombre, incluant éventuellement le 0 : C(9, 1)
  - Choix du 3ème chiffre qui compose le nombre, incluant éventuellement le 0, s'il y a lieu : C(8, 1)
  - Nombre d'éléments dans le cas courant, sans restriction est : 12 x C(9, 1) x C(9, 1) x C(8, 1)
  - Exclusion des motifs **baac– baca – bcaa** : 3 x C(9, 1) x C(8, 1)
  - Exclusion des motifs **caab – caba – cbaa** : 3 x C(9, 1) x C(8, 1)

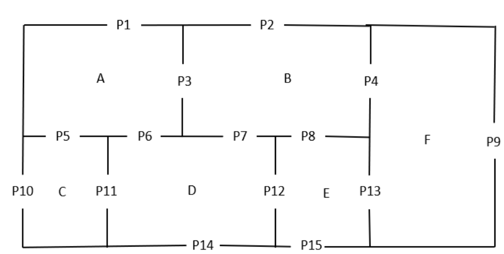
- Nombre d'éléments dans le cas courant avec restriction est : 12 x C(9, 1) x C(9, 1) x C(8, 1) - 3 x C(9, 1) x C(8, 1) - 3 x C(9, 1) x C(8, 1)

- **Cas où le chiffre qui se répète est 0**
  - Les seuls motifs admissibles sont : **baac– baca – bcaa, caab – caba – cbaa**
  - Choix du 2ème chiffre qui compose le nombre : C(9, 1)
  - Choix du 3ème chiffre qui compose le nombre : C(8, 1)
  - Nombre d'éléments dans le cas courant : 6 x C(9, 1) x C(8, 1)
- **Nombre d'éléments de E composés d'exactement deux chiffres identiques**
  - N2 = 12 x C(9, 1) x C(9, 1) - 3 x C(9, 1) x C(8, 1) - 3 x C(9, 1) x C(8, 1) + 6 x C(9, 1) x C(8, 1)
  - N2 = 12 x C(9, 1) x C(9, 1) x C(8, 1)
  - N2 = 7776

C. Solution 2

- **Dénombrement sans restriction**
  - Choix du chiffre qui se répète 2 fois : C(10, 1).
  - Choix du $2^{\text{ème}}$ chiffre qui compose le nombre : C(9, 1).
  - Choix du $3^{\text{ème}}$ chiffre qui compose le nombre : C(8, 1).
  - Nombre d'éléments dans le cas courant est : 12 x C(10, 1) x C(9, 1) x C(8 1).
- **Dénombrement des cas non souhaités**
  - Nombre d'éléments répondant aux motifs **00bc – 0b0c – 0bc0, 00cb – 0c0b – 0cb0**
    - 3 x C(9, 1) x C(8, 1)
  - Nombre d'éléments répondant aux motifs **0aac– 0aca – 0caa, caa0 – ca0a – c0aa**
    - 3 x C(9, 1) x C(8, 1)
- **Nombre d'éléments de E composés d'exactement deux chiffres identiques**
  - N2 = 12 x C(10, 1) x C(9, 1) x C(8 1) – 3 x C(9, 1) x C(8, 1)– 3 x C(9, 1) x C(8, 1)
  - N2 = 7776

Question 2 (**5.5 points**)
On considère le plan d'un bâtiment comme ci-dessous. Les murs sont représentés par les lignes. Les salles sont nommées A, B, C, D, E et F. Les portes sont étiquetées de P1 à P15. Toutes les portes sont à double sens de circulation.



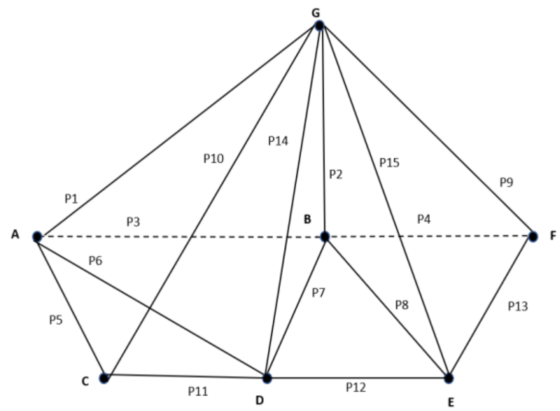
En partant de la salle E, est-il possible de trouver un chemin qui passe une et une seule fois par chacune des portes ? Justifiez votre réponse.
Note : Vous devez utiliser vos connaissances en théorie des graphes pour répondre à la question. Il ne s'agit pas d'essayer des tracés à la main pour prétendre répondre à la question.

Réponse :

- **Formalisation du problème**

Le problème peut être modélisé en considérant que :

- le plan est constitué de 6 salles auxquelles on ajoute l'extérieur du bâtiment comme une salle fictive. Appelons l'extérieur du bâtiment ''salle G''
- chaque salle est considérée comme le sommet d'un graphe dont les arêtes sont les portes d'accès. Ainsi, franchir une porte pour se rendre d'une salle à une autre, c'est parcourir un arc qui relie les 2 salles.



Graphe modélisant le problème

- **Analyse du problème**
  - Le nombre de portes d'accès à une salle est le nombre d'arcs incidents au sommet correspondant à cette salle, ce qui permet de déterminer son degré.
  - Nous avons : deg(A) = 4 ; deg(B) = 5; deg(C) = 3; deg(D) = 5 ; deg(E) = 4; deg(F) = 3; deg(G) = 6.
  - Trouver un chemin qui passe une et une seule fois par chacune des portes en partant d'un sommet de départ (sommet E) situé à l'intérieur du bâtiment, c'est parcourir tous les arcs du graphe une et une seule fois, exceptés des arcs incidents au sommet G (extérieur du bâtiment) qui peuvent ne pas être franchis si l'on finit le parcours à l'extérieur. Cela revient à chercher une chaîne eulérienne, exception faite de certains arcs incidents à G. Cela n'est possible que lorsque le graphe contient exactement 2 sommets de degré impair, exception faite du sommet G. Or nous avons au moins 3 sommets de degrés impairs, soit les sommets B, D et F.
- **Conclusion**

Il n'est donc pas possible de trouver un chemin qui passe une et une seule fois par chacune des portes en partant de la salle E.

Question 3 (**5.5 points)**

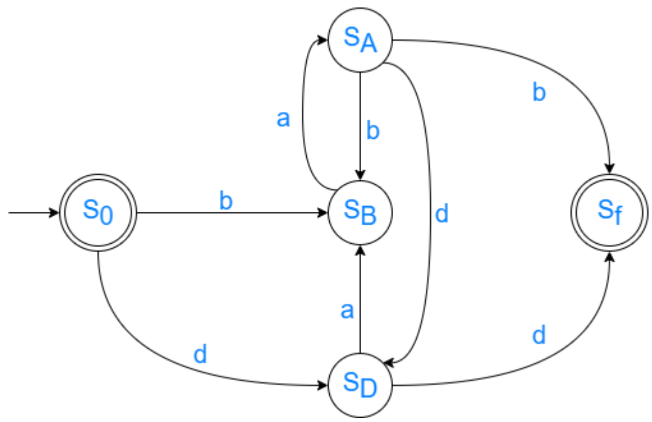
Considérez la grammaire régulière ***G* = (*V, T, S, P*)** où ***V* = {a, b, d, A, B, D, S}**, ***T* = {a, b, d}** et les règles de production *P* sont :

S → bB	A → bB	B → aA
S → dD	A → dD	D → aB
S → λ	A → b	D → d

a. **(3.5 points)** Construisez un automate à états finis qui reconnaît le langage généré par la grammaire régulière **G**.

Réponse :

Soit S_0, S_A, S_B, S_D les états correspondant aux non terminaux S, A, B, D, respectivement.
L'automate recherché est le suivant.



b. (2 **points)** Est-ce que la chaîne « **dab** » fait partie du langage généré par la grammaire ***G*** ? Si oui, donnez la chaîne de production correspondante ; Sinon, proposez autant de règles de production qu'il faut pour permettre d'obtenir cette chaîne et donnez la chaîne de production correspondante.

Réponse :

La chaîne « **dab** » n'est pas un mot du langage ***G***. En effet, il est possible d'obtenir la sous-chaîne « **da** » avec les règles de production S → dD et D → aB, ce qui donne la chaîne de dérivation S → dD→ daB.
Cependant, il n'existe pas de règle à partir du symbole non terminal B qui produise « b ». Ainsi, pour permettre à ***G*** de produire la chaîne« **dab** », il suffirait de rajouter la règle de production **B → b**.
La chaîne de dérivation serait dans ce cas S → dD → daB→ dab

Question 4 (**3.5 points)**
Donnez l'arbre algébrique correspondant à l'expression en notation polonaise inversée suivante.

a b c d e + + * - f ÷ g *

Réponse :