POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 11 : Arbres

SOLUTIONNAIRE

H2024

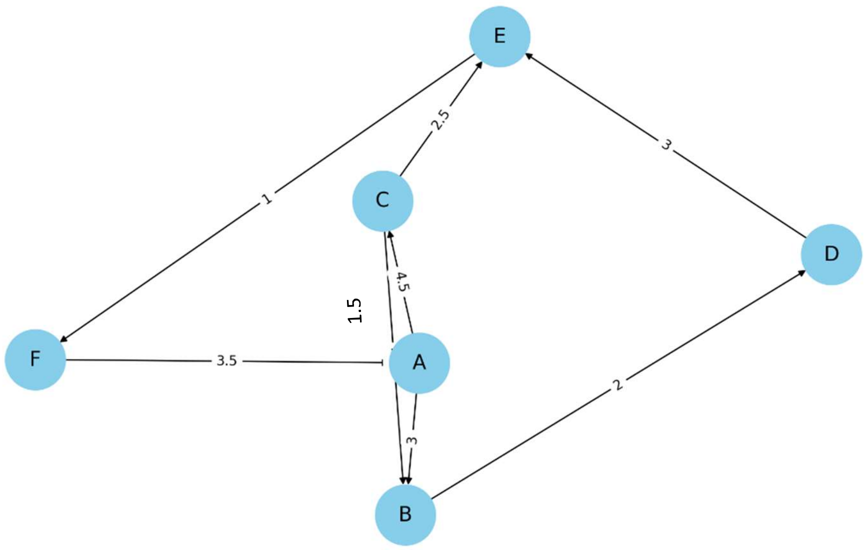
Exercice 1 :

Aya, une organisatrice d'événements culturels, est chargée de planifier un circuit de visites pour un festival d'art contemporain à Montréal. Elle doit optimiser l'expérience des visiteurs tout en respectant les contraintes de temps et de distance entre les différentes galeries d'art. Les distances entre les galeries sont données dans le tableau ci-dessous.

Distances entre les galeries d'art de Montréal :

Point de départ	Destination	Distance (en km)
Galerie A	Galerie B	3
Galerie A	Galerie C	4.5
Galerie B	Galerie D	2
Galerie C	Galerie B	1.5
Galerie C	Galerie E	2.5
Galerie D	Galerie E	3
Galerie E	Galerie F	1
Galerie F	Galerie A	3.5

On associe au tableau le graphe pondéré représentant les connexions entre les galeries d'art de Montréal avec les distances comme poids :



1) À partir du graphe construit, utilisez l'algorithme de Prim pour construire un parcours qui minimise les distances pour le visiteur. Détaillez toutes les étapes de cet algorithme et déterminez la distance totale de cet itinéraire.

2) Application de l'algorithme de Prim :

Les arêtes sont ajoutées dans l'ordre suivant :

E-F avec un poids de 1 km.

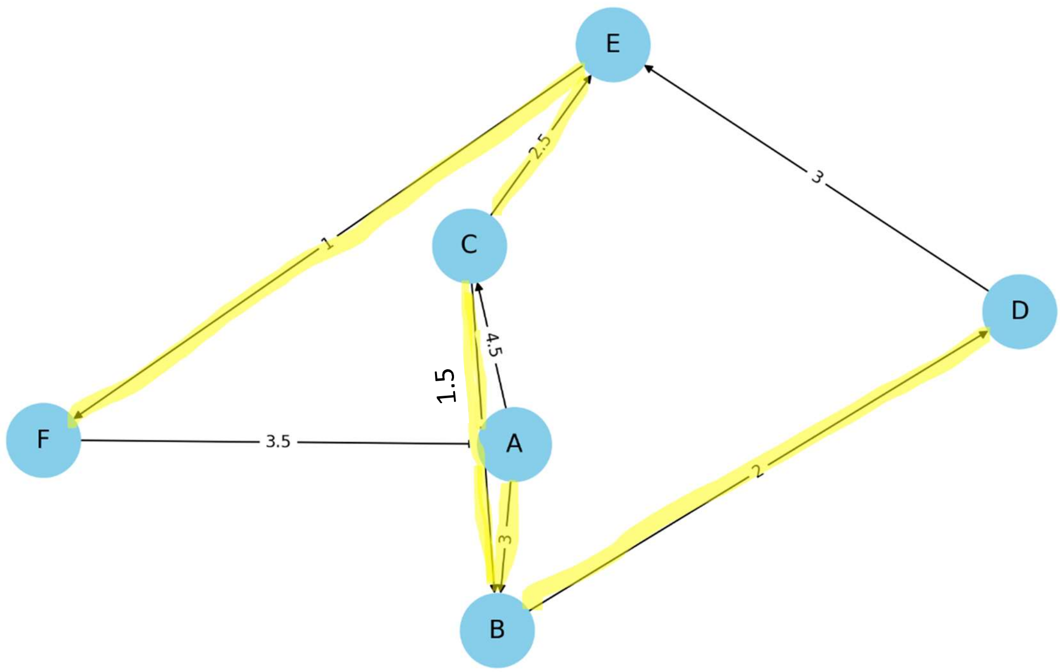
E-C avec un poids de 2.5 km.

C-B avec un poids de 1.5 km.

B-D avec un poids de 2 km.

B-A avec un poids de 3 km.

Le coût de l'arbre est : 3+1.5+2.5+1+2=103+1.5+2.5+1+2=10 km



2) Utilisez l'algorithme de Kruskal pour construire un parcours qui minimise également les distances. Détaillez toutes les étapes de cet algorithme et calculez la distance totale de l'itinéraire obtenu.

Étape 1 : Pour l'algorithme de Kruskal, nous commençons par lister toutes les arêtes du graphe avec leurs poids et les trions par ordre croissant de poids.

Galerie E vers Galerie F : 1 km

Galerie C vers Galerie B : 1.5 km

Galerie B vers Galerie D : 2 km

Galerie C vers Galerie E : 2.5 km

Galerie A vers Galerie B : 3 km

Galerie D vers Galerie E : 3 km

Galerie F vers Galerie A : 3.5 km

Galerie A vers Galerie C : 4.5 km

On ajoute ensuite les arêtes au graphe, de la plus légère à la plus lourde, en s'assurant qu'aucun cycle n'est formé. Si l'ajout d'une arête crée un cycle, cette arête est rejetée. On continue jusqu'à ce que l'arbre couvrant contienne tous les sommets du graphe.

On ajoute Galerie E vers Galerie F.

On ajoute Galerie C vers Galerie B.

On ajoute Galerie B vers Galerie D.

On ajoute Galerie C vers Galerie E.

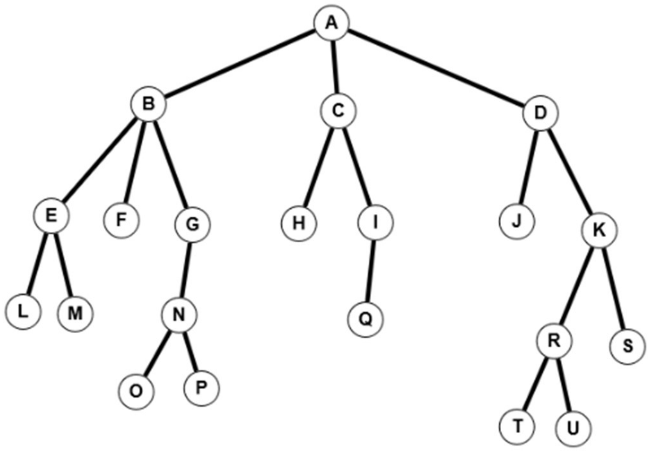
On ajoute Galerie A vers Galerie B.

On s'arrête ici car l'ajout d'autres arêtes formerait un cycle ou relierait des points déjà reliés de manière optimale

.**Le coût de l'arbre est :** 3+1.5+2.5+1+2=103+1.5+2.5+1+2=10 km

Exercice 2 :

Considérez cet arbre :



1) Effectuez un parcours préfixe de l'arbre.

Parcours préfixe de l'arbre : a-b-e-l-m-f-g-n-o-p-c-h-i-q-d-j-k-r-t-u-s

2) Effectuez un parcours infixe de l'arbre.

Parcours infixe de l'arbre : l-e-m-b-f-o-n-p-g-a-h-c-q-i-j-d-t-r-u-k-s

3) Effectuez un parcours postfixe

Parcours postfixe de l'arbre : l-m-e-f-o-p-n-g-b-h-q-i-c-j-t-u-r-s-k-d-a

Exercice 3 :

Une nouvelle application mobile est lancée et le fondateur, Avon Husk, invite 5 de ses amis à télécharger l'application. Chaque ami est encouragé à partager l'invitation avec 5 autres personnes. Pour chaque téléchargement réussi, le premier invitant dans la chaîne (jusqu'à 5 niveaux en amont) reçoit des crédits dans l'application selon les niveaux suivants :

- Niveau 1 (invités directement par Avon) : 10 crédits par téléchargement.
- Niveau 2 (invités par les amis d'Avon) : 8 crédits.
- Niveau 3 : 6 crédits.
- Niveau 4 : 4 crédits.
- Niveau 5 : 2 crédits.

Les niveaux supérieurs à 5 ne génèrent pas de crédits pour les invités en amont.

1) Combien de crédits Avon aura-t-il accumulé après que tous les amis du Niveau 1 aient invité leurs amis jusqu'au Niveau 5, en supposant que chaque personne invite 5 nouveaux utilisateurs ? Justifiez votre réponse.

Le nombre total de crédits accumulés par Avon peut être calculé en considérant le nombre de téléchargements à chaque niveau et les crédits correspondants.

Niveau 1 : 5×10=50 crédits.

Niveau 2 : 5^2×8=200 crédits.

Niveau 3 : 5^3×6=750 crédits.

Niveau 4 : 5^4×4=2500 crédits.

Niveau 5 : 5^5×2=6250 crédits.

Total des crédits accumulés par Avon : 50+200+750+2500+6250=9750 crédits.

2) Combien de personnes au total auront téléchargé l'application à la fin du Niveau 5 ? Justifiez votre réponse.

Le nombre total de téléchargements à la fin du Niveau 5 est calculé en utilisant la somme d'une progression géométrique :

$$S = \frac{5(1-5^5)}{1-5} = 3905 \text{ téléchargements.}$$

3) Si une personne du Niveau 3 décide de ne pas partager l'invitation, comment cela affecte-t-il le nombre total de téléchargements et les crédits accumulés par Avon ? Justifiez votre réponse.

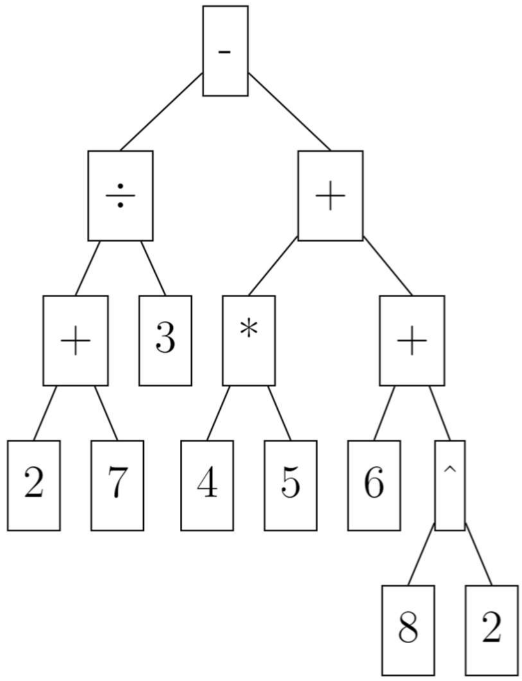
Cette décision résulte en 70 téléchargements manquants au total, car elle affecte les personnes qu'elle aurait pu inviter au Niveau 4 (25 personnes) et celles que ces 25 auraient invitées au Niveau 5 (125 personnes supplémentaires). En termes de crédits, Avon perd 350 crédits à cause de cette chaîne de partage interrompue. Ce calcul prend en compte les crédits qu'il aurait reçus pour les téléchargements au Niveau 4 (4 crédits par téléchargement pour 25 téléchargements) et au Niveau 5 (2 crédits par téléchargement pour 125 téléchargements).

Exercice 4 :

Convertissez l'expression suivante écrite en notation polonaise inverse en un arbre binaire, puis réécrivez-la en notation infixe.
Expression en notation polonaise inverse : 2 7 + 3 ÷ 4 5 × 6 8 2 ˆ + + −

Solution :

Arbre binaire :



La notation infixe de l'expression est :
$((2 + 7) \div 3) - ((4 \times 5) + (6 + 8^2))$

Exercice 5 :

Un arbre enraciné T est appelé un arbre S_k s'il satisfait cette définition récursive : C'est un arbre S_0 s'il possède un seul sommet. Pour k > 0, T est un arbre S_k s'il peut être construit à partir de deux arbres S{k-1} en faisant du sommet de l'un le sommet de l'arbre S_k et en faisant du sommet de l'autre l'enfant du sommet du premier arbre S{k-1}.

Montrez qu'un arbre S_k possède 2^k sommets et un unique sommet au niveau k.

Solution :

Pour prouver cet énoncé, nous utiliserons la méthode de preuve par induction.

Soit $P(n)$ l'affirmation "L'arbre S_n a 2^n sommets et exactement un sommet au niveau n".

Étape de base :

Considérons le cas où $n = 0$. L'arbre S_0 a exactement un sommet, et puisque $2^0 = 1$, l'affirmation est vraie. De plus, cet unique sommet se trouve au niveau 0. Donc, $P(0)$ est vraie.

Hypothèse d'induction

Supposons que $P(k)$ soit vraie pour un certain entier non négatif k. Cela signifie que l'arbre S_k a 2^k sommets et exactement un sommet au niveau k.

Étape d'induction

Nous devons maintenant prouver que $P(k+1)$ est vraie.

L'arbre S_{k+1} est formé de deux copies de S_k, reliées par une arête. Par conséquent, S_{k+1} contient deux fois plus de sommets que S_k, soit $2 \times 2^k = 2^{k+1}$ sommets.
De plus, le seul sommet au niveau $k+1$ est le nouveau sommet ajouté pour relier les deux copies de S_k. Ainsi, il y a exactement un sommet au niveau $k+1$.
Par conséquent, $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion

En suivant le principe de l'induction mathématique, et ayant prouvé que $P(0)$ est vraie (étape de base) et que si $P(k)$ est vraie alors $P(k+1)$ est également vraie (étape d'induction), nous concluons que $P(n)$ est vraie pour tout entier non négatif n.

Cela démontre que tout arbre S_k possède 2^k sommets et un unique sommet au niveau.