POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 9 : DÉNOMBREMENT

E2025

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 :

Partie 1 : Repêchage LNH

a) Ordre du Repêchage et Alignements

i) Pour la cérémonie d'ouverture, les représentants des 7 équipes canadiennes de la LNH (Canadiens, Maple Leafs, Senators, Jets, Oilers, Flames, Canucks) montent sur scène un par un. De combien de façons peuvent-ils être ordonnés si le représentant des Canadiens de Montréal doit être *le premier ou le dernier* ?

Il y a 7 représentants au total. Cas 1 : Le représentant des Canadiens est premier. Les 6 autres peuvent être ordonnés de 6! façons. Cas 2 : Le représentant des Canadiens est dernier. Les 6 autres peuvent être ordonnés de 6! façons. Ces deux cas sont disjoints. Nombre total de façons $= 6! + 6! = 2 \times 6! = 2 \times 720 = 1440$.

ii) Une équipe a sélectionné 6 espoirs : 3 attaquants (A1, A2, A3), 2 défenseurs (D1, D2) et 1 gardien (G1). Pour une photo de groupe, les 6 recrues s'alignent. Combien d'alignements sont possibles si les 3 attaquants doivent être regroupés *et* les 2 défenseurs aussi ?

Considérons le bloc des 3 attaquants (AAA), le bloc des 2 défenseurs (DD), et le gardien (G). Ces 3 "unités" (AAA, DD, G) peuvent être arrangées de 3! façons. À l'intérieur du bloc des attaquants, les 3 attaquants peuvent être arrangés de 3! façons. À l'intérieur du bloc des défenseurs, les 2 défenseurs peuvent être arrangés de 2! façons. Nombre total d'alignements = (arrangements des blocs) $\times$ (arrangements internes des attaquants) $\times$ (arrangements internes des défenseurs) $= 3! \times 3! \times 2! = 6 \times 6 \times 2 = 72$.

iii) Lors du premier tour du repêchage, 32 équipes choisissent dans un ordre précis. Si l'ordre des 5 premières équipes est déjà fixé par la loterie, de combien de manières peut-on ordonner les 27 équipes restantes pour les choix 6 à 32 ?

Les 5 premières positions sont fixes. Il reste $32 - 5 = 27$ positions à pourvoir par les 27 équipes restantes. Le nombre de manières d'ordonner ces 27 équipes est 27!.

iv) Photo protocolaire avec rivalité : on exige que les représentants des Maple Leafs et des Canadiens *ne soient pas côte à côte*. Combien d'alignements linéaires respectent cette contrainte ?

Nombre total d'alignements sans contrainte pour 7 représentants $= 7! = 5040$. Nombre d'alignements où les représentants des Maple Leafs (L) et des Canadiens (C) sont côte à côte : Considérons (LC) ou (CL) comme un seul bloc. Ce bloc et les 5 autres représentants forment 6 unités, qui peuvent être arrangées de 6! façons. Le bloc (LC) peut être arrangé de 2! façons (LC ou CL). Nombre d'alignements où L et C sont ensemble $= 6! \times 2! = 720 \times 2 = 1440$. Nombre d'alignements où L et C ne sont pas côte à côte = Total - (L et C ensemble) $= 7! - (6! \times 2!) = 5040 - 1440 = 3600$.

v) Photo à deux rangées : 4 représentants debout (premier rang) et 3 assis (second rang). Combien d'arrangements distincts si l'on distingue chaque position à l'intérieur d'un même rang ?

D'abord, choisir les 4 représentants pour le premier rang parmi 7 : $\binom{7}{4}$ façons. Ensuite, ordonner ces 4 représentants au premier rang : 4! façons. Les 3 représentants restants vont au second rang. Les ordonner : 3! façons. Nombre total d'arrangements $= \binom{7}{4} \times 4! \times 3! = P(7,4) \times 3! = \frac{7!}{3!} \times 3! = 7! = 5040$. Alternativement : Choisir 4 personnes pour le premier rang et les permuter $P(7,4)$. Puis permuter les 3 restantes pour le second rang $P(3,3) = 3!$. Total $P(7,4) \times P(3,3) = \frac{7!}{3!} \times 3! = 7! = 5040$.

b) Sélection des Joueurs et Évaluation des Talents

i) On doit choisir 3 joueurs parmi 10 attaquants, 7 défenseurs et 3 gardiens, avec *exactement* 1 attaquant, 1 défenseur et 1 gardien. Combien de sélections possibles ?

Choisir 1 attaquant parmi 10 : $\binom{10}{1}$ façons. Choisir 1 défenseur parmi 7 : $\binom{7}{1}$ façons. Choisir 1 gardien parmi 3 : $\binom{3}{1}$ façons. Nombre total de sélections $= \binom{10}{1} \times \binom{7}{1} \times \binom{3}{1} = 10 \times 7 \times 3 = 210$.

ii) Même contexte, mais on impose seulement *au moins* un défenseur. Combien de sélections possibles ?

Nombre total de joueurs $= 10(A)+7(D)+3(G) = 20$. Nombre total de façons de choisir 3 joueurs parmi 20 sans contrainte $= \binom{20}{3} = \frac{20\times19\times18}{3\times2\times1} = 1140$. Nombre de façons de choisir 3 joueurs sans aucun défenseur : on choisit 3 joueurs parmi les $10 + 3 = 13$ non-défenseurs (attaquants ou gardiens). Nombre de façons de choisir 0 défenseur $= \binom{13}{3} = \frac{13\times12\times11}{3\times2\times1} = 13 \times 2 \times 11 = 286$. Nombre de façons de choisir au moins un défenseur = Total - (Aucun défenseur) $= \binom{20}{3} - \binom{13}{3} = 1140 - 286 = 854$.

iii) Sur 100 espoirs, le panel note : 60 rapides (V), 50 habiles (H), 45 intelligents (I), $30(V \cap H), 20(V \cap I), 25(H \cap I), 10(V \cap H \cap I)$.

a) Combien d'espoirs possèdent *au moins* une de ces qualités ?

Par le principe d'inclusion-exclusion : $|V \cup H \cup I| = |V| + |H| + |I| - (|V \cap H| + |V \cap I| + |H \cap I|) + |V \cap H \cap I| = 60 + 50 + 45 - (30 + 20 + 25) + 10 = 155 - 75 + 10 = 80 + 10 = 90$. Il y a 90 espoirs qui possèdent au moins une de ces qualités.

b) Combien n'en possèdent *aucune* ?

Nombre d'espoirs n'en possédant aucune = Total - (Au moins une qualité) $= 100 - |V \cup H \cup I| = 100 - 90 = 10$.

iv) On veut distribuer 10 rondelles d'entraînement identiques à 4 espoirs (0 à 10 chacune). Combien de répartitions différentes ?

C'est un problème de combinaisons avec répétition. On cherche le nombre de solutions à $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$, où $x_i \geq 0$. La formule est $\binom{n+k-1}{k-1}$ ou $\binom{n+k-1}{n}$, où $n = 10$ (objets) et $k = 4$ (destinataires). Nombre de répartitions $= \binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3} = \frac{13\times12\times11}{3\times2\times1} = 13 \times 2 \times 11 = 286$. Ou $\binom{10+4-1}{10} = \binom{13}{10} = \binom{13}{3} = 286$.

v) Sélection d'une escouade élargie : choisir 8 joueurs dans le même bassin (10 A, 7 D, 3 G), avec *au moins* 2 gardiens et *au moins* 2 défenseurs. Combien de combinaisons ?

Total de joueurs = 20. On choisit 8 joueurs. Contraintes : ≥ 2 Gardiens (G), ≥ 2 Défenseurs (D). Cas possibles pour (G, D, A) où G+D+A=8, G ≥ 2, D ≥ 2 :
- G=2, D=2 : A=4. $\binom{3}{2}\binom{7}{2}\binom{10}{4} = 3 \times 21 \times 210 = 13230$.
- G=2, D=3 : A=3. $\binom{3}{2}\binom{7}{3}\binom{10}{3} = 3 \times 35 \times 120 = 12600$.
- G=2, D=4 : A=2. $\binom{3}{2}\binom{7}{4}\binom{10}{2} = 3 \times 35 \times 45 = 4725$.
- G=2, D=5 : A=1. $\binom{3}{2}\binom{7}{5}\binom{10}{1} = 3 \times 21 \times 10 = 630$.
- G=2, D=6 : A=0. $\binom{3}{2}\binom{7}{6}\binom{10}{0} = 3 \times 7 \times 1 = 21$.
- G=3, D=2 : A=3. $\binom{3}{3}\binom{7}{2}\binom{10}{3} = 1 \times 21 \times 120 = 2520$.
- G=3, D=3 : A=2. $\binom{3}{3}\binom{7}{3}\binom{10}{2} = 1 \times 35 \times 45 = 1575$.
- G=3, D=4 : A=1. $\binom{3}{3}\binom{7}{4}\binom{10}{1} = 1 \times 35 \times 10 = 350$.
- G=3, D=5 : A=0. $\binom{3}{3}\binom{7}{5}\binom{10}{0} = 1 \times 21 \times 1 = 21$.

Somme $= 13230 + 12600 + 4725 + 630 + 21 + 2520 + 1575 + 350 + 21 = 35672$.

vi) Distribution équitable : distribuer les 10 rondelles en donnant *au moins* une rondelle à chacun des 4 espoirs. Combien de répartitions ?
On donne d'abord une rondelle à chaque espoir. Il reste $10 - 4 = 6$ rondelles à distribuer aux 4 espoirs sans autre contrainte. C'est $x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 = 6$, où $x'_i \geq 0$. Nombre de répartitions $= \binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3} = \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = 3 \times 4 \times 7 = 84$.

c) Tournoi d'Exhibition et Statistiques Avancées

i) Mini-tournoi « toutes-rencontres » entre 8 équipes : combien de matchs distincts seront programmés ?

Chaque match implique de choisir 2 équipes parmi 8. L'ordre ne compte pas. Nombre de matchs $= \binom{8}{2} = \frac{8\times7}{2} = 28$.

ii) Numérotation des chandails : 23 joueurs à numéroter entre 1 et 99. Si 17 numéros sont déjà retirés, combien d'assignations différentes des 23 numéros restants ?

Nombre de numéros disponibles $= 99 - 17 = 82$. On doit choisir 23 numéros distincts parmi ces 82 et les assigner aux 23 joueurs (l'ordre compte, car le joueur A avec le numéro X est différent du joueur B avec le numéro X, et le joueur A avec X est différent du joueur A avec Y). C'est une permutation de 23 numéros choisis parmi 82. Nombre d'assignations $= P(82, 23) = \frac{82!}{(82-23)!} = \frac{82!}{59!}$.

iii) Probabilité d'un trio 100 % gaucher : dans un groupe de 12 attaquants (7 gauchers, 5 droitiers), on en choisit 3 sans remise. Quelle est la probabilité que les trois soient gauchers ?

Nombre total de façons de choisir 3 attaquants parmi 12 $= \binom{12}{3} = \frac{12\times11\times10}{3\times2\times1} = 2\times11\times10 = 220$. Nombre de façons de choisir 3 attaquants gauchers parmi 7 $= \binom{7}{3} = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$. Probabilité $= \frac{\text{Cas favorables}}{\text{Cas possibles}} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$.

iv) Partitions des séances vidéo : répartir 6 séances distinctes entre 3 coachs adjoints C_1, C_2, C_3, chaque séance confiée à un coach. Combien de répartitions possibles ?

Pour chaque séance vidéo, il y a 3 choix de coachs. Il y a 6 séances. Nombre de répartitions $= 3^6 = 729$.

Partie 2 : Mystères Archéologiques à Mazamari

Une équipe d'archéologues explore un site à Mazamari pendant 20 jours consécutifs. Chaque jour, ils découvrent au moins un artefact. Soit a_k le nombre total d'artefacts découverts depuis le premier jour jusqu'à la fin du k-ième jour. À la fin des 20 jours, ils ont découvert un total de 30 artefacts (donc $a_{20} = 30$). Montrez qu'il existe une séquence de jours consécutifs pendant laquelle exactement 9 artefacts ont été découverts.

Soit a_k le nombre total d'artefacts découverts jusqu'au jour k. Puisqu'au moins un artefact est découvert chaque jour, la suite $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$ est strictement croissante. $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{20} = 30$. Considérons les 20 nombres $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$. Considérons aussi les 20 nombres $a_1 + 9, a_2 + 9, \ldots, a_{20} + 9$. Les valeurs de a_k sont des entiers compris entre 1 et 30. Les valeurs de $a_k + 9$ sont des entiers compris entre $1 + 9 = 10$ et $a_{20} + 9 = 30 + 9 = 39$. Nous avons donc $20 + 20 = 40$ nombres. Tous ces 40 nombres sont compris dans l'intervalle $[1, 39]$. Les 40 nombres sont : $a_1, \ldots, a_{20}, a_1 + 9, \ldots, a_{20} + 9$. Les valeurs possibles pour ces nombres vont de 1 à 39. Il y a 39 "tiroirs" possibles pour ces 40 "pigeons". Par le principe des tiroirs, au moins deux de ces 40 nombres doivent être égaux. Puisque $a_1 < a_2 < \cdots < a_{20}$ sont tous distincts, et $a_1 + 9 < a_2 + 9 < \cdots < a_{20} + 9$ sont aussi tous distincts, une égalité ne peut se produire qu'entre un nombre de la première liste et un nombre de la seconde liste. Donc, il existe des indices i et j (avec $1 \leq j < i \leq 20$) tels que $a_i = a_j + 9$. Cela signifie que $a_i - a_j = 9$. $a_i - a_j$ est le nombre d'artefacts découverts du jour $j + 1$ au jour i inclusivement. Donc, il existe une séquence de jours consécutifs (du jour $j + 1$ au jour i) pendant laquelle exactement 9 artefacts ont été découverts.

Exercice 2 :

Résolvez la relation de récurrence suivante : $a_n = -2a_{n-1} + 4a_{n-2} + 2^n$ pour $n \geq 2$, avec les conditions initiales $a_0 = 1$ et $a_1 = 5$. Détaillez toutes les étapes.

1. Changement de variable. Posons

$$b_n = \frac{a_n}{2^n}.$$

Alors

$$2^n b_n = -2 \cdot 2^{n-1} b_{n-1} + 4 \cdot 2^{n-2} b_{n-2} + 2^n \implies b_n = -b_{n-1} + b_{n-2} + 1.$$

2. Passage à une relation homogène. Cherchons la valeur fixe L telle que

$$L = -L + L + 1 \quad \implies \quad L = 1.$$

On définit

$$c_n = b_n - 1,$$

d'où

$$c_n = -\, c_{n-1} + c_{n-2},$$

relation linéaire homogène d'ordre 2.

3. Équation caractéristique. Pour la relation

$$c_n + c_{n-1} - c_{n-2} = 0,$$

on écrit

$$r^2 + r - 1 = 0,$$

dont les solutions sont

$$r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

4. Solution générale. Par conséquent,

$$c_n = \alpha\, r_1^n + \beta\, r_2^n, \quad r_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ r_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

5. Conditions initiales. On a

$$b_0 = \frac{a_0}{1} = 1, \quad b_1 = \frac{a_1}{2} = \frac{5}{2},$$

donc

$$c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{3}{2}.$$

Le système s'écrit

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0, \\ \alpha\, r_1 + \beta\, r_2 = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Sa résolution donne

$$\alpha = \frac{3\sqrt{5}}{10}, \quad \beta = \frac{-3\sqrt{5}}{10}.$$

6. Formule explicite pour a_n. Puisque $a_n = 2^n(b_n) = 2^n(c_n + 1)$, on obtient

$$\boxed{a_n = 2^n \left[1 + \frac{3\sqrt{5}}{10} \left(\tfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{-3\sqrt{5}}{10} \left(\tfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].}$$

Exercice 3 :

Prouvez l'identité suivante : $\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$, pour des entiers non négatifs m, n, r.

Considérons le produit de deux polynômes : $(1+x)^m$ et $(1+x)^n$.
D'une part,

$$(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{m+n}.$$

Par le théorème binomial, le coefficient de x^r dans le développement de $(1+x)^{m+n}$ est :

$$\binom{m+n}{r}.$$

D'autre part, développons $(1+x)^m$ et $(1+x)^n$ séparément à l'aide du théorème binomial :

$$(1+x)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i, \quad (1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j.$$

Le produit est donc :

$$(1+x)^m(1+x)^n = \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j\right) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \binom{m}{i}\binom{n}{j} x^{i+j}.$$

Nous cherchons le coefficient de x^r dans ce produit. Ce coefficient est obtenu lorsque $i + j = r$.
Pour chaque i (que nous appellerons k pour correspondre à la formule de l'identité), il faut que $j = r - k$.
Le terme en x^r est donc formé par la somme des produits :

$$\binom{m}{k} x^k \cdot \binom{n}{r-k} x^{r-k}$$

pour toutes les valeurs possibles de k.
Les valeurs de k vont de 0 à r. De plus : - $k \leq m$ (car $\binom{m}{k} = 0$ si $k > m$), - $r - k \leq n$ (car $\binom{n}{r-k} = 0$ si $r - k > n$, c'est-à-dire $k < r - n$).
Le coefficient de x^r dans le produit

$$\left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j\right)$$

est donc :

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}.$$

(La somme peut être considérée de $k = 0$ à r, car si $k > m$ ou $r - k > n$, les coefficients binomiaux sont nuls et les termes ne contribuent pas à la somme.)
Puisque le coefficient de x^r doit être le même dans les deux expressions de $(1+x)^{m+n}$, nous avons :

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$

Ceci prouve l'identité de **Vandermonde**.

Alternativement, par un argument combinatoire :

Considérons un groupe de m hommes et n femmes. Nous voulons choisir un comité de r personnes parmi ces $m+n$ personnes.

Le nombre total de façons de former ce comité est :

$$\binom{m+n}{r}.$$

Une autre façon de procéder est de choisir k hommes parmi m (il y a $\binom{m}{k}$ façons), et $r-k$ femmes parmi n (il y a $\binom{n}{r-k}$ façons). Le nombre total de façons pour un k donné est donc :

$$\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}.$$

Comme k (le nombre d'hommes) peut varier de 0 à r, tout en respectant $k \leq m$ et $r-k \leq n$, on somme sur toutes les valeurs possibles de k :

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}.$$

Les deux méthodes comptent la même chose, donc les expressions sont égales :

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$

Exercice 4 :

Un algorithme, nommé `AlgoDivReigne`, est conçu pour trier un tableau A de n éléments. Son fonctionnement est le suivant :

1. Si $n < 3$, l'algorithme trie le tableau directement en utilisant un nombre constant d'opérations (par exemple, tri par insertion).
2. Si $n \geq 3$:
   - L'algorithme divise le tableau A en trois sous-tableaux A_1, A_2, A_3 de tailles respectives $\lfloor n/3 \rfloor$, $\lceil n/3 \rceil$, et $n - \lfloor n/3 \rfloor - \lceil n/3 \rceil$. Pour simplifier l'analyse, supposez que n est une puissance de 3, donc chaque sous-tableau est de taille $n/3$. Cette division prend un temps en $O(n)$.
   - L'algorithme s'appelle récursivement sur les deux premiers sous-tableaux : `AlgoDivReigne`$(A_1, n/3)$ et `AlgoDivReigne`$(A_2, n/3)$.
   - Après les appels récursifs, les sous-tableaux A_1 et A_2 sont triés. L'algorithme fusionne ces deux sous-tableaux triés en un seul tableau trié A_{12} de taille $2n/3$. Cette fusion prend un temps en $O(n)$.
   - Le troisième sous-tableau A_3 n'est pas traité par un appel récursif direct dans cette étape.

a) Établissez la relation de récurrence $T(n)$ qui décrit le nombre d'opérations effectuées par `AlgoDivReigne` sur une entrée de taille n.

Pour $n < 3$, $T(n) = O(1)$ (constant). Pour $n \geq 3$: L'algorithme effectue deux appels récursifs sur des problèmes de taille $n/3$. Le coût est $2T(n/3)$. La division prend $O(n)$. La fusion prend $O(n)$. Le coût total de division et fusion est $O(n) + O(n) = O(n)$. Donc, la relation de récurrence est $T(n) = 2T(n/3) + cn$ pour une constante $c > 0$.

b) En utilisant le théorème maître, déterminez la complexité asymptotique (Grand-O) de $T(n)$. Justifiez votre réponse.

La relation de récurrence est $T(n) = 2T(n/3) + cn$. Elle est de la forme $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, où $f(n) = cn^1$. Les paramètres pour le théorème maître sont : $a = 2$ (nombre de sous-problèmes) $b = 3$ (facteur de réduction de la taille) $d = 1$ (l'exposant de n dans $f(n) = cn^d$)
Nous devons comparer a avec b^d. $b^d = 3^1 = 3$. Nous avons $a = 2$ et $b^d = 3$. Puisque $a < b^d$ (car $2 < 3$), nous sommes dans le Cas 1 du théorème maître. Le Cas 1 stipule que si $a < b^d$, alors $T(n) \in O(n^d)$. Dans notre cas, $d = 1$, donc $T(n) \in O(n^1) = O(n)$. La complexité asymptotique de `AlgoDivReigne` est $O(n)$.

Exercice 5 (facultatif) :

a) Considérons

$$a_{n+3} = -3a_{n+2} - 3a_{n+1} - a_n, \qquad a_0 = 7,\ a_1 = -5,\ a_2 = 13.$$

i) Résoudre complètement la suite (a_n).

L'équation caractéristique est :

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0,$$

soit $(r+1)^3 = 0$. Nous avons une racine triple $r = -1$.
La solution générale est :

$$a_n = (\alpha_1 + \alpha_2 n + \alpha_3 n^2)(-1)^n.$$

Avec $a_0 = 7$:

$$\alpha_1 = 7.$$

Avec $a_1 = -5$:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(-1) = -5 \Rightarrow 7 + \alpha_2 + \alpha_3 = 5 \Rightarrow \alpha_2 + \alpha_3 = -2 \quad \text{(Éq 1)}.$$

Avec $a_2 = 13$:

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3)(-1)^2 = 13 \Rightarrow 7 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 13 \Rightarrow \alpha_2 + 2\alpha_3 = 3 \quad \text{(Éq 2)}.$$

Soustrayons (Éq 1) de (Éq 2) :

$$(\alpha_2 + 2\alpha_3) - (\alpha_2 + \alpha_3) = 3 - (-2) \Rightarrow \alpha_3 = 5.$$

Dans (Éq 1) :

$$\alpha_2 + 5 = -2 \Rightarrow \alpha_2 = -7.$$

Donc, la solution est :

$$a_n = (7 - 7n + 5n^2)(-1)^n.$$

ii) Démontrer que $|a_n|$ croît comme $\Theta(n^2)$.

On a :

$$|a_n| = |(7 - 7n + 5n^2)(-1)^n| = |5n^2 - 7n + 7|.$$

Pour $n \geq 1$, $5n^2 - 7n + 7$ est un polynôme quadratique avec un coefficient dominant positif, donc il est positif.
On veut montrer qu'il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ telles que :

$$c_1 n^2 \leq |a_n| \leq c_2 n^2 \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

Borne supérieure :

$$5n^2 - 7n + 7 \leq 5n^2 + 7 \leq 5n^2 + 7n^2 = 12n^2 \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Donc, $c_2 = 12$ fonctionne.
Borne inférieure :
On note :

$$5n^2 - 7n + 7 \geq 5n^2 - 7n.$$

On cherche c_1 tel que :

$$5n^2 - 7n \geq c_1 n^2 \Rightarrow n(5n-7) \geq c_1 n^2.$$

Pour $n > \frac{7}{5}$, on a $5n - 7 > 0$. Par exemple, pour $n \geq 2$, $5n - 7 \geq 3$, donc :

$$5n^2 - 7n \geq 3n.$$

On veut une borne en n^2, donc testons :

$$5n^2 - 7n \geq n^2 \iff 4n^2 - 7n \geq 0 \iff n(4n-7) \geq 0,$$

ce qui est vrai pour $n \geq 2$.
Ainsi, $|a_n| \geq n^2$ pour $n \geq 2$. On peut prendre $c_1 = 1$ et $n_0 = 2$.

Donc,

$$|a_n| = \Theta(n^2).$$

b) Démontrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{k} \binom{k}{j} = 3^n.$$

On change l'ordre de sommation. Pour un j fixé, k varie de j à n :

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{j}.$$

On utilise l'identité :

$$\binom{n}{k} \binom{k}{j} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j}.$$

L'expression devient :

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \sum_{k=j}^{n} \binom{n-j}{k-j}.$$

Posons $l = k - j$. La somme interne devient :

$$\sum_{l=0}^{n-j} \binom{n-j}{l}.$$

Par le théorème binomial :

$$\sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} = 2^m,$$

donc ici :

$$\sum_{l=0}^{n-j} \binom{n-j}{l} = 2^{n-j}.$$

L'expression totale devient :

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 2^{n-j}.$$

Par le théorème binomial généralisé :

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j} = (x+y)^n.$$

En prenant $x = 1$ et $y = 2$, on obtient :

$$(1+2)^n = 3^n.$$

Ainsi :

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{j} = 3^n.$$

c) **Blackjack**

a) Combien y a-t-il de façons d'obtenir un "Blackjack" (une main de 2 cartes composée d'un As et d'une carte valant 10 points - 10, Valet, Dame ou Roi) à partir d'un jeu de 52 cartes ?

Il y a 4 As dans un jeu de 52 cartes. Il y a 16 cartes valant 10 points (les quatre 10, les quatre Valets, les quatre Dames et les quatre Rois). Par la règle du produit, le nombre de façons d'obtenir un Blackjack est : (Nombre de façons de choisir un As) $\times$ (Nombre de façons de choisir une carte de 10 points) $= \binom{4}{1} \times \binom{16}{1} = 4 \times 16 = 64$. Il y a 64 mains de Blackjack possibles.

b) Combien y a-t-il de mains de 2 cartes possibles au total ?

Le nombre total de mains de 2 cartes est le nombre de façons de choisir 2 cartes parmi 52, sans tenir compte de l'ordre. Nombre total de mains $= \binom{52}{2} = \frac{52 \times 51}{2} = 26 \times 51 = 1326$.

c) Quelle est la probabilité d'obtenir un Blackjack ?

La probabilité est le rapport entre le nombre de mains de Blackjack et le nombre total de mains de 2 cartes. Probabilité(Blackjack) $= \frac{\text{Nombre de mains de Blackjack}}{\text{Nombre total de mains de 2 cartes}} = \frac{64}{1326} \approx 0.0483$ ou 4.83%.

Feuille supplémentaire