POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

Contrôle périodique 1

Automne 2021

SOLUTIONNAIRE:

Directives:

- La durée du contrôle périodique est de 60 minutes.
- Vous devez compléter cet examen seul, sans l'aide de personne et en utilisant aucun outil de communication.
- L'examen est sur un total de 20 points.
- Répondez directement sur ce document Word (docx).
- Vous avez 15 minutes additionnelles pour produire le PDF et le soumettre dans la boîte de remise de votre section de cours.
- Générez le PDF avec le nom sous le format **Matricule.pdf** (exemple 1234567.pdf).
- Aucun courriel ne sera accepté.

<u>Exercice 1</u> (2 points)

Montrez par dérivation, en utilisant les équivalences logiques, que

$$(P \to (Q \to R)) \equiv ((P \land Q) \to R)$$

Réponse:

$(P \to (Q \to R)) \equiv (\neg P \lor (\neg Q \lor R))$ par l'équivalence conditionnelle disjonction

$\equiv ((\neg P \lor \neg Q) \lor R))$ par l'associativité de la disjonction

$\equiv (\neg(\neg P \lor \neg Q) \to R))$ par l'équivalence conditionnelle disjonction

$\equiv ((P \land Q) \to R))$ par la loi de De Morgan

<u>Exercice 2</u> (3 points)

Trois personnes (Jean, Léo et Sam) sont soupçonnées d'avoir commis un méfait. Au cours de l'enquête, ils font les déclarations suivantes :

Jean : Léo est coupable et Sam est innocent,
Léo : Si Jean est coupable, Sam l'est aussi,
Sam : Je suis innocent, mais l'un au moins des deux autres est coupable.

a. Traduisez les trois déclarations ci-dessus en logique propositionnelle (du français aux symboles)

Réponse:

P: Léo est coupable

Q: Sam est coupable

R: Jean est coupable

Déclarations:

$P \land \neg Q, R \to Q, \neg Q \land (P \lor R)$

b. En utilisant les règles d'inférence et en supposant que chacun dit la vérité, démontrer qui sont innocent(s) et coupable(s) ?

Réponse:

1. $P \wedge \neg Q$

2. P Simplification de 1.

3. $\neg Q$ Simplification de 1.

4. $R \rightarrow Q$ Par définition

5. $\neg R$ Par modus tolets de 3 et 4

6. Donc Jean et Sam sont innocents et Léo est coupable.

<u>Exercice 3</u> (3 points)

On considère l'univers des humains et des vélos.

Soit :

$Coach(x)$: x est un coach

$Velo(x)$: x est un vélo

$Possede(x, y)$: x possède y

Traduisez en langage courant, en utilisant les fonctions propositionnelles ci-dessus, chacun des énoncés de logique des prédicats suivants:

$\forall x(Velo(x) \rightarrow \exists y(Coach(y) \wedge Possede(y, x)))$

Réponse:

Tout vélo est possédé par un coach.

$\forall x(Coach(x) \rightarrow \forall y \forall z((Velo(y) \wedge Velo(z) \wedge y \neq z) \rightarrow (\neg Possede(x, y) \vee \neg Possede(x, z))))$

Réponse:

Aucun coach ne possède deux vélos.

$\exists x(Coach(x) \wedge (\forall y(Velo(y) \rightarrow \neg Possede(x, y)))$

Réponse:

Il existe un coach qui ne possède pas de vélo.

<u>Exercice 4</u> (2 points)

Définition: Un satellite est un corps en orbite autour d'une planète.

Formalisez les propositions suivantes (du français aux symboles) :

a. Tout ce qui est en orbite autour de la terre est plus petit que toutes les planètes.

b. Certaines planètes sont plus grandes que Neptune tout en étant plus éloignées du soleil qu'elle.

Pour répondre à la question vous devez:

- Définir les variables, les prédicats et les fonctions propositionnelles contextualisés

- Symbolisez en logique des prédicats de chacun des énoncés.

Réponse:

P(x) : x est une planète

O(x, z) : x est en orbite autour z

G(x, y) : x est plus petit que y

E(x, y) : x est plus éloigné que y

a. $\forall x(O(x, Terre) \rightarrow (\forall y(P(y) \rightarrow G(x, y)))$

b. $\exists x(P(x) \wedge G(Neptune, x) \wedge E(x, Neptune))$

Exercice 5 **(5 points)**

Montrez que pour tout entier naturel n, $n(n^2 - 1)$ est un multiple de 3 en utilisant une preuve par cas.

Réponse:

Tout nombre entier peut s'écrire sous la forme 3a, 3a+1 ou 3a+2 où a est un nombre entier. Seul la première forme est un multiple de 3. Traitons alors les 3 formes possibles pour un nombre entier n.

Remarquons également que $n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1)$

Cas 1. La forme $n = 3a$ donne le résultat $3a(3a - 1)(3a + 1) = 3m$ où $m = a(3a - 1)(3a + 1)$.

Cas 2. La forme $n = 3a + 1$ donne le résultat $(3a + 1)(3a)(3a + 2) = 3m$ où $m = (3a + 1)(a)(3a + 2)$.

Cas 3. La forme $n = 3a + 2$ donne le résultat $(3a + 2)(3a + 1)(3a + 3) = 3m$ où $m = (3a + 2)(3a + 1)(a + 1)$.

Exercice 6 **(2 points)**

Donnez l'ensemble puissance P(E) de l'ensemble de E= {2, 4, 6}.

Réponse:

{ {}, {2}, {4}, {6}, {2, 4}, {2, 6}, {4, 6}, {2, 4, 6} }

Exercice 7 **(3 points)**

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des nombres réels vers les nombres réels $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Est-ce que cette fonction est injective, surjective et/ou bijective? Justifiez votre réponse.

Réponse:

Cette fonction n'est pas injective. Par exemple les entrées $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$ donne des sorties identiques, soit $\sqrt{2}$. Cette fonction n'est pas non plus surjective puisque $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1$. Puisqu'elle n'est pas injective ni surjective alors elle n'est pas bijective.