POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810
STRUCTURES DISCRÈTES

TD 5 : RELATIONS

A2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1

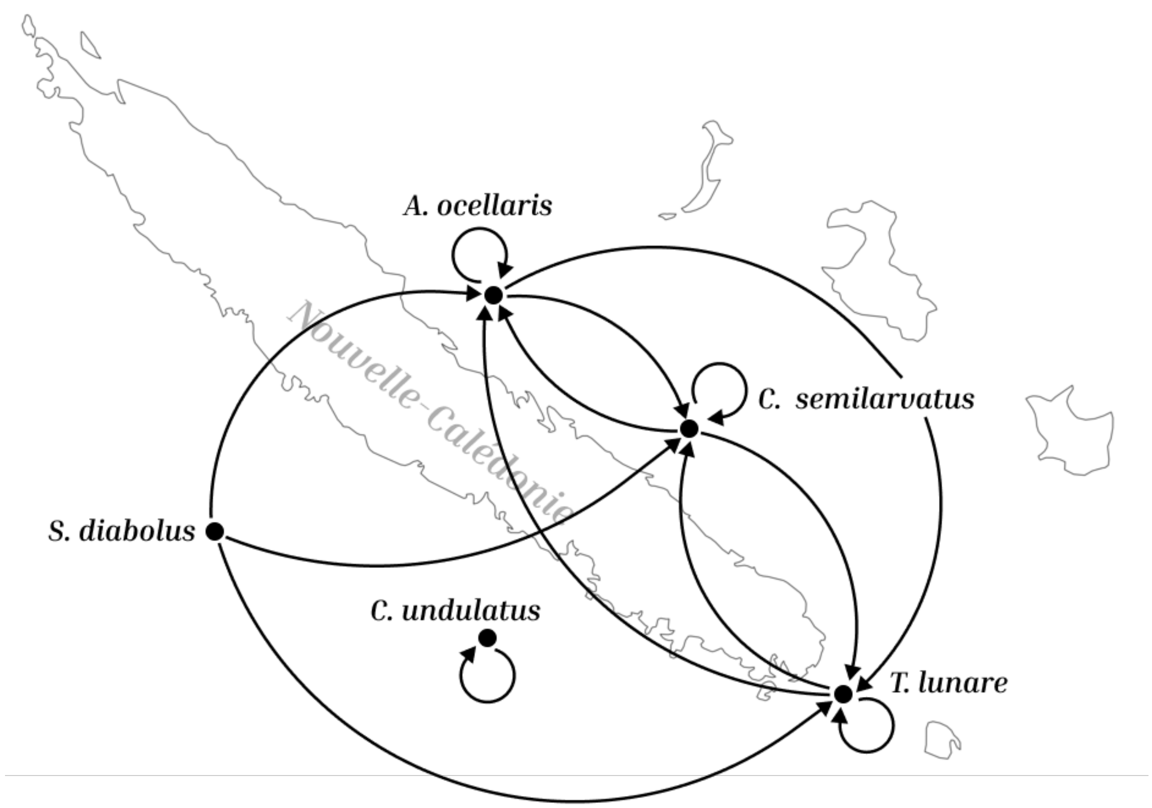
En Nouvelle-Calédonie, on observe une grande diversité d'espèces de poissons qui jouent un rôle essentiel dans l'écosystème sous-marin. Parmi les espèces de poissons présentes dans cette région, nous pouvons citer :

- $A.ocellaris$ (Poisson-clown)
- $C.semilarvatus$ (Poisson-papillon demi-masqué)
- $S.diabolus$ (Poisson-scorpion diable)
- $T.lunare$ (Girelle paon)
- $C.undulatus$ (Poisson Napoléon)

Nous considérons l'ensemble $\mathcal{F}$ des espèces de poissons suivantes :

$$\mathcal{F} = \{A.ocellaris,\ C.semilarvatus,\ S.diabolus,\ T.lunare,\ C.undulatus\}$$

Nous définissons la relation $\mathcal{R}_1$ sur $\mathcal{F}$ comme une relation de préférence de cohabitation, où certaines espèces ont une tendance à préférer la compagnie d'autres espèces pour des raisons telles que la protection, l'alimentation ou des interactions écologiques spécifiques. Par exemple, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathcal{R}_1$ signifie que l'espèce $\boldsymbol{a}$ préfère cohabiter avec l'espèce $\boldsymbol{b}$.



$\boldsymbol{Fig.1}$. Graphe des relations de cohabitation entre les espèces de poissons en Nouvelle-Calédonie basé sur leurs habitats préférentiels.

a) Déterminez si la relation $\mathcal{R}_1$ représentée par le graphe $\boldsymbol{Fig.1}$. est (I.) réflexive, (II.) symétrique, (III.) antisymétrique, (IV.) transitive. Justifiez vos réponses pour chacune des propriétés.

Solution :

(I.) **Réflexivité** : La relation illustrée n'est réflexive parce qu'il existe un sommet $S.\,diabolus$ qui n'a pas de boucle. Formellement, $\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \notin \boldsymbol{\mathcal{R}_1}$.

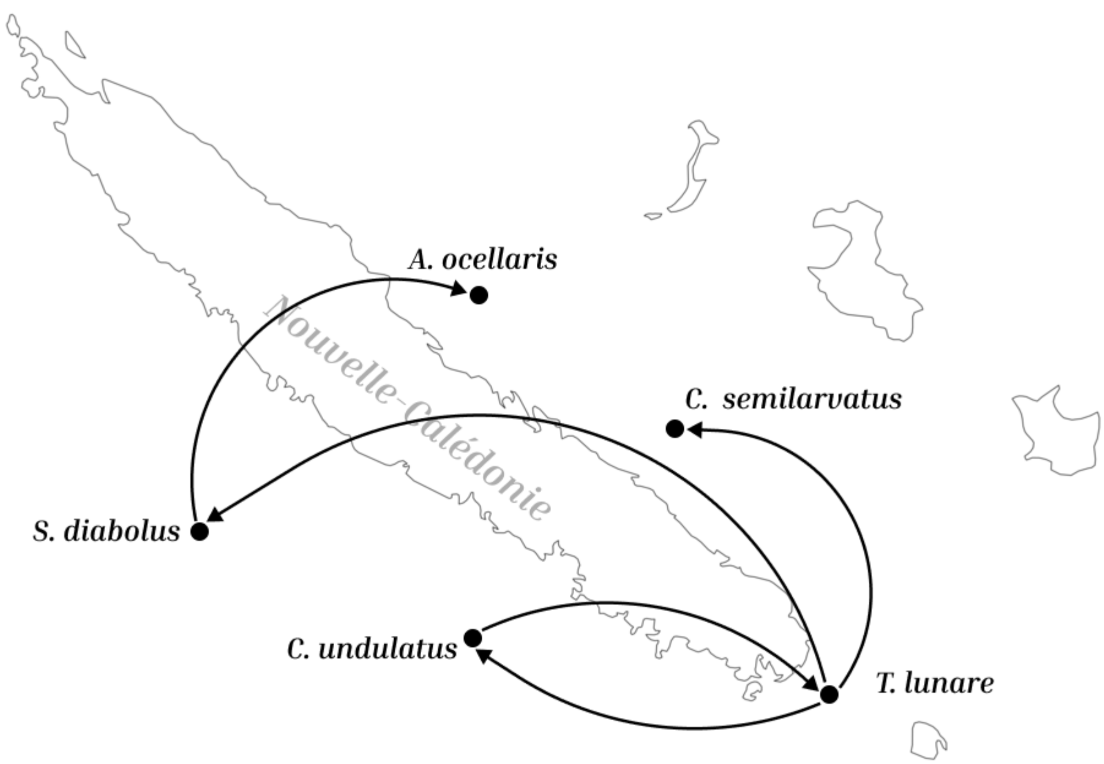
(II.) **Symétrie** : La relation n'est pas symétrique. Par exemple, l'arête $(S.\,diabolus, A.\,ocellaris)$ est présente, mais pas l'arête $(A.\,ocellaris, S.\,diabolus)$.
C'est-à-dire, $\big((S.\,diabolus, A.\,ocellaris) \in \boldsymbol{\mathcal{R}_1}\big) \wedge \big((A.\,ocellaris, S.\,diabolus) \notin \boldsymbol{\mathcal{R}_1}\big)$.
Formellement, $\exists \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}, \big((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}_1}\big) \wedge \big((\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \notin \boldsymbol{\mathcal{R}_1}\big)$.

(III.) **Antisymétrie** : La relation n'est pas antisymétrique, puisque par exemple, les deux arêtes $(A.\,ocellaris, T.\,lunare)$ et $(T.\,lunare, A.\,ocellaris)$ sont présentes et $A.\,ocellaris \neq T.\,lunare$. Formellement, $\exists \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}, \big((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}_1}\big) \wedge \big((\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}_1}\big) \wedge (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y})$.

(IV.) **Transitivé** : La relation est transitive, puisque
$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}, \big[\big((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}_1}\big) \wedge \big((\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}_1}\big)\big] \rightarrow \big((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}_1}\big)$.

En somme, la relation $\boldsymbol{\mathcal{R}_1}$ est transitive, mais elle n'est ni réflexive, ni symétrique, ni antisymétrique.

Nous définissons la relation $\boldsymbol{\mathcal{R}_2}$ sur $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ comme une relation de dépendance, où certaines espèces de poissons dépendent directement ou indirectement d'autres espèces pour leur survie ou leur reproduction. Par exemple, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}_2}$ signifie que l'espèce $\boldsymbol{a}$ dépend de l'espèce $\boldsymbol{b}$.



$\boldsymbol{Fig.\,2}$. Graphe des interactions de dépendance entre les espèces de poissons en Nouvelle-Calédonie.

a) Donnez la fermeture transitive de la relation $\mathcal{R}_2$ représentée par le graphe $\boldsymbol{Fig.2}$.

Solution :

$\mathcal{R}_2 = \{$

$$(S.diabolus, A.ocellaris),$$
$$(T.lunare, C.semilarvatus), (T.lunare, S.diabolus), (T.lunare, C.undulatus),$$
$$(C.undulatus, T.lunare)$$

$\}$

Soit $\boldsymbol{S}$ la fermeture transitive de $\mathcal{R}_2$.

$\boldsymbol{S} = \{$

$$(S.diabolus, A.ocellaris),$$
$$(T.lunare, A.ocellaris), (T.lunare, C.semilarvatus), (T.lunare, S.diabolus),$$
$$(T.lunare, T.lunare), (T.lunare, C.undulatus),$$
$$(C.undulatus, A.ocellaris), (C.undulatus, S.diabolus), (C.undulatus, C.semilarvatus),$$
$$(C.undulatus, T.lunare), (C.undulatus, C.undulatus)$$

$\}$

Exercice 2

Soit $\boldsymbol{C}$ un ensemble de chaînes de bits et $\mathcal{T}$ une relation définie sur $\boldsymbol{C}$. La relation $\mathcal{T}$ est telle que pour deux chaînes de bits u et v, $u\ \mathcal{T}\ v$ si et seulement si $u = v$ ou u et v ont au moins trois bits en commun dans leurs trois premiers bits.

Quelles sont les classes d'équivalence de $\boldsymbol{T}$? Justifiez vos réponses.

Solution :

Pour les chaînes de bits de longueur strictement inférieure à trois, il est trivial qu'elle soit équivalente à elle-même. Cela signifie que chaque chaîne individuelle est une classe d'équivalence distincte. Ainsi, les classes d'équivalence correspondantes pour les chaînes de bits de longueur strictement inférieure à trois sont les suivantes :

- **Classe I.** : $\{\ \lambda\ \}$ où λ est la chaîne vide
- **Classe II.** : { 0 }
- **Classe III.** : { 1 }
- **Classe IV.** : { 00 }
- **Classe V.** : { 01 }

- **Classe VI.** : { 10 }
- **Classe VII.** : { 11 }

De même, pour les chaînes de bits de longueur trois ou plus, elles sont équivalentes à l'une des huit chaînes de bits suivantes : 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 et 111. Voici un exemple pour illustrer la relation $\mathcal{T}$:

Prenons les chaînes de bits $u = 0110010$ et $v = 0110101$. Ces deux chaînes ont la séquence «011» en commun dans leurs trois premiers bits. Donc, u et v appartiennent à la même classe d'équivalence des chaînes ayant la séquence «011» en commun dans leurs trois premiers bits.

Ainsi, nous pouvons définir les classes d'équivalence pour les chaînes de bits de longueur trois ou plus comme suit :

- **Classe VIII.** : { 000, 0000, 0001, 00000, 00001, 00010, 00011, … }
- **Classe IX.** : { 001, 0010, 0011, 00100, 00101, 00110, 00111, … }
- **Classe X. :** { 010, 0100, 0101, 01000, 01001, 01010, 01011, … }
- **Classe XI.** : { 011, 0110, 0111, 01100, 01101, 01110, 01111, … }
- **Classe XII.** : { 100, 1000, 1001, 10000, 10001, 10010, 10011, … }
- **Classe XIII.** : { 101, 1010, 1011, 10100, 10101, 10110, 10111, … }
- **Classe XIV.** : { 110, 1100, 1001, 11000, 11001, 11010, 11011, … }
- **Classe XV.** : { 111, 1110, 1111, 11100, 11101, 11110, 11111, … }

Exercice 3

On définit une relation $\ll$ sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$x \ll y \text{ s'il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } y = x^n$$

$\ll$ est-elle une relation d'ordre partiel ? Justifiez votre réponse.

Solution :

Pour vérifier si $\ll$ est une relation d'ordre partiel, on va vérifier si elle est (I.) réflexive, (II.) antisymétrique et (III.) transitive.

(I.) **Réflexivité :**

Soit $x \in \mathbb{N}^*$.

Lorsque $n = 1$, on a $x = x^n$.
Alors, $x \ll x$.
La relation $\ll$ est donc réflexive.

(II.) **Antisymétrie :**
Soit $x, y \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \ll y$ et y $\ll$ x.
Alors, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$y = x^n \qquad (1.)$$

Et aussi, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$x = y^m \qquad (2.)$$

En substituant (2.) dans (1.), on obtient $y = (y^m)^n = y^{m \cdot n}$.
Ainsi, $y = y^{m \cdot n}$ lorsque $m \cdot n = 1$.
On en déduit que $n = 1$ et $m = 1$.
Ainsi, $x = y$.
La relation $\ll$ est donc antisymétrique.

(III.) **Transitivité :**
Soit $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \ll y$ et y $\ll$ z.
Alors, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$y = x^n \qquad (3.)$$

Et aussi, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$z = y^m \qquad (4.)$$

En substituant (3.) dans (4.), on obtient $z = (x^n)^m = x^{n \cdot m}$.
En posant $p = n \cdot m$, on a $z = x^p$.
Et donc, $x \ll z$.
Ainsi, la relation $\ll$ est transitive.

On conclut que $\ll$ est une relation d'ordre partiel, car elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Exercice 4

On considère dans l'ensemble des entiers plus grands que 1, la relation $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ définie par :

$$(s, t) \in \boldsymbol{\mathcal{L}} \text{ si et seulement si } s^t \leq t^s$$

La relation est-elle transitive ? Justifiez votre réponse.

Solution :

Soit s, t et u trois entiers plus grands que 1 tel que $(s, t) \in \boldsymbol{\mathcal{L}}$ et $(t, u) \in \boldsymbol{\mathcal{L}}$.

$$\begin{aligned}(s, t) \in \boldsymbol{\mathcal{L}} \wedge (t, u) \in \boldsymbol{\mathcal{L}} &\to (s^t \leq t^s) \wedge (t^u \leq u^t) \\ &\to (t \log(s) \leq s \log(t)) \wedge (u \log(t) \leq t \log(u)) \\ &\to (u \cdot t \log(s) \leq u \cdot s \log(t)) \wedge (s \cdot u \log(t) \leq s \cdot t \log(u))\end{aligned}$$

$\rightarrow u \cdot t \log(s) \leq u \cdot s \log(t) \leq s \cdot t \log(u)$
$\rightarrow u \cdot t \log(s) \leq s \cdot t \log(u)$
$\rightarrow u \log(s) \leq s \log(u)$, car t est non nul et positif
$\rightarrow s^u \leq u^s$
$\rightarrow (s,u) \in \boldsymbol{\mathcal{L}}$

On a donc $\big((s,t) \in \boldsymbol{\mathcal{L}}$ et $(t,u) \in \boldsymbol{\mathcal{L}}\big) \rightarrow (s,u) \in \boldsymbol{\mathcal{L}}$
La relation $\mathcal{L}$ est donc transitive.

Exercice 5

Soit $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ un ensemble et $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ une partie de $\boldsymbol{\mathcal{M}}$. On définit une relation $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ sur $\mathcal{P}(\boldsymbol{\mathcal{M}})$ par :

X* 𝓘 *Y si et seulement si (***X*** ∩ ***𝓝***) = (***Y*** ∩ ***𝓝***)

Montrez que $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(\boldsymbol{\mathcal{M}})$.

Solution :

Pour montrer que $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ est une relation d'équivalence, on va montrer qu'elle est (I.) réflexive, (II.) symétrique et (III.) transitive.

(I.) **Réflexivité :**
Soit **X** ∈ $\mathcal{P}(\boldsymbol{\mathcal{M}})$.
On a (***X*** ∩ ***𝓝***) = (***X*** ∩ ***𝓝***).
Donc ***X* 𝓘 *X***.
La relation $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ est réflexive.

(II.) **Symétrie :**
Soit **X, Y** ∈ $\mathcal{P}(\boldsymbol{\mathcal{M}})$ tel que ***X* 𝓘 *Y***.
Donc ***X* 𝓘 *Y*** → (***X*** ∩ ***𝓝***) = (***Y*** ∩ ***𝓝***)
→ (***Y*** ∩ ***𝓝***) = (***X*** ∩ ***𝓝***)
→ ***Y* 𝓘 *X***
On a donc ***X* 𝓘 *Y*** → ***Y* 𝓘 *X***.
La relation $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ est symétrique.

(III.) **Transitivité :**
Soit **X, Y, Z** ∈ $\mathcal{P}(\boldsymbol{\mathcal{M}})$ tel que ***X* 𝓘 *Y*** et ***Y* 𝓘 *Z***.
Alors, ***X* 𝓘 *Y*** ↔ (***X*** ∩ ***𝓝***) = (***Y*** ∩ ***𝓝***).
Et, ***Y* 𝓘 *Z*** ↔ (***Y*** ∩ ***𝓝***) = (***Z*** ∩ ***𝓝***).
Donc, (***X* 𝓘 *Y*** ∧ ***Y* 𝓘 *Z****)* → [(***X*** ∩ ***𝓝***) = (***Y*** ∩ ***𝓝***)] ∧ [(***Y*** ∩ ***𝓝***)= (***Z*** ∩ ***𝓝***)]
→ (***X*** ∩ ***𝓝***) = (***Y*** ∩ ***𝓝***) = (***Z*** ∩ ***𝓝***)
→ (***X*** ∩ ***𝓝***) = (***Z*** ∩ ***𝓝***)
→ ***X* 𝓘 *Z***
On a donc (***X* 𝓘 *Y*** *et* ***Y* 𝓘 *Z****)* → ***X* 𝓘 *Z***.

La relation $\mathcal{J}$ est transitive.

Ainsi, $\mathcal{J}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(\mathcal{M})$, car elle est réflexive, symétrique et transitive.
CQFD

Exercice 6

Soit $\mathbf{\Gamma} = \{1, 2, 3\}$. On définit une relation Å sur $\mathbf{\Gamma}^2$ par :

$$(a, b) \text{ Å } (c, d) \text{ si et seulement si } (a - c) \text{ est pair et } (b - d) \text{ est divisible par } 3$$

Donnez la représentation tabulaire de Å**.**

Solution :

Pour représenter cette relation de manière tabulaire, nous pouvons diviser le processus en deux étapes distinctes, chacune représentant l'une des conditions.

(I.) Dans la première étape, nous créons un tableau pour la condition « $(a - c)$ est pair ». Nous remplissons ce tableau en vérifiant si la différence entre a et c est un nombre pair comme suit :

	(1, 1)	**(1, 2)**	**(1, 3)**	**(2, 1)**	**(2, 2)**	**(2, 3)**	**(3, 1)**	**(3, 2)**	**(3, 3)**
(1, 1)	1	1	1	0	0	0	1	1	1
(1, 2)	1	1	1	0	0	0	1	1	1
(1, 3)	1	1	1	0	0	0	1	1	1
(2, 1)	0	0	0	1	1	1	0	0	0
(2, 2)	0	0	0	1	1	1	0	0	0
(2, 3)	0	0	0	1	1	1	0	0	0
(3, 1)	1	1	1	0	0	0	1	1	1
(3, 2)	1	1	1	0	0	0	1	1	1
(3, 3)	1	1	1	0	0	0	1	1	1

(II.) Dans la deuxième étape, nous créons un deuxième tableau pour la condition « $(b - d)$ est divisible par 3 ». Nous remplissons ce tableau en vérifiant si la différence entre b et d est divisible par 3 comme suit :

	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)
(1, 1)	1	0	0	1	0	0	1	0	0
(1, 2)	0	1	0	0	1	0	0	1	0
(1, 3)	0	0	1	0	0	1	0	0	1
(2, 1)	1	0	0	1	0	0	1	0	0
(2, 2)	0	1	0	0	1	0	0	1	0
(2, 3)	0	0	1	0	0	1	0	0	1
(3, 1)	1	0	0	1	0	0	1	0	0
(3, 2)	0	1	0	0	1	0	0	1	0
(3, 3)	0	0	1	0	0	1	0	0	1

Maintenant que nous avons ces deux tableaux, la représentation de la relation Å est obtenue en effectuant un produit élément par élément des deux tableaux. Cela signifie que nous gardons uniquement les cellules où les deux conditions sont satisfaites, montrant ainsi quelles paires d'éléments de $\mathbf{\Gamma}^2$ satisfont à ces deux critères simultanément, et cela nous donne la représentation tabulaire de Å suivante :

	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)
(1, 1)	1	0	0	0	0	0	1	0	0
(1, 2)	0	1	0	0	0	0	0	1	0
(1, 3)	0	0	1	0	0	0	0	0	1
(2, 1)	0	0	0	1	0	0	0	0	0
(2, 2)	0	0	0	0	1	0	0	0	0
(2, 3)	0	0	0	0	0	1	0	0	0
(3, 1)	1	0	0	0	0	0	1	0	0
(3, 2)	0	1	0	0	0	0	0	1	0
(3, 3)	0	0	1	0	0	0	0	0	1