POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810
STRUCTURES DISCRÈTES

TD 1 : LOGIQUE PROPOSITIONNELLE

E2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1

On considère les propositions P, Q et R définies comme suit :

- P : « Ana Sofia se promène sur la plage »
- Q : « Le soleil brille »
- R : « Il pleut »

Énoncez des phrases simples (en langage courant) qui traduisent chacune des propositions suivantes.

a) $(Q \wedge \neg R) \rightarrow P$

Solution :

Si le soleil brille et qu'il ne pleut pas, alors Ana Sofia se promène sur la plage.

b) $Q \rightarrow (\neg R \rightarrow P)$

Solution :

Si le soleil brille, alors s'il ne pleut pas, Ana Sofia se promène sur la plage.

c) $\neg\big(P \leftrightarrow (R \vee Q)\big)$

Solution :

Plusieurs formulations possibles.

- Ana Sofia se promène sur la plage si et seulement s'il ne pleut pas et le soleil ne brille pas.
- Ana Sofia ne se promène pas sur la plage si et seulement s'il pleut ou le soleil brille.
- Soit Ana Sofia se promène sur la plage, soit il pleut ou le soleil brille.

d) $(R \wedge \neg Q) \rightarrow \neg P$

Solution :

S'il pleut et que le soleil ne brille pas, alors Ana Sofia ne se promène pas sur la plage.

Exercice 2

Soit B et F les propositions suivantes :

- B : « On prépare des grillades pour le barbecue »
- F : « Il y a des invités pour la fête »

Représentez la négation des énoncés suivants en logique propositionnelle.

a) On ne prépare des grillades pour le barbecue que s'il y a des invités pour la fête.

Solution :

$B \wedge \neg F$

b) Il suffit qu'il y ait des invités pour la fête pour qu'on prépare des grillades pour le barbecue.

Solution :

$F \wedge \neg B$

c) On prépare des grillades pour le barbecue, mais il n'y a pas d'invités pour la fête.

Solution :

Plusieurs réponses possibles.

- $\neg B \vee F$
- $B \rightarrow F$
- $\neg F \rightarrow \neg B$

d) Il n'y a pas d'invités pour la fête si et seulement si on ne prépare pas des grillades pour le barbecue.

Solution :

Plusieurs réponses possibles.

- $\neg F \leftrightarrow B$
- $\neg B \leftrightarrow F$
- $\neg F \oplus \neg B$

Exercice 3

On considère les propositions P, Q, R et S définies comme suit :

- P : « L'utilisateur appuie sur la touche Cancel »
- Q : « L'utilisateur appuie sur la touche OK »
- R : « Le programme plante »
- S : « Le fichier est effacé »

Trois énoncés sont également définis :

- A : « Si l'utilisateur appuie sur la touche OK, alors le programme ne plante pas »
- B : « Le fichier est effacé si le programme plante ou l'utilisateur appuie sur la touche Cancel »

- C : « L'utilisateur n'appuie pas sur les deux touches OK et Cancel en même temps, donc le fichier n'est pas effacé si l'utilisateur appuie sur la touche OK »

a) Donnez en langage courant la contraposée de l'énoncé A.

Solution :

Si le programme plante, alors l'utilisateur n'appuie pas sur la touche OK.

b) Donnez en langage courant la réciproque de l'énoncé B.

Solution :

Si le fichier est effacé, alors le programme plante ou l'utilisateur appuie sur la touche Cancel.

c) Donnez en langage courant l'inverse de l'énoncé C.

Solution :

Si l'utilisateur appuie sur les deux touches OK et Cancel en même temps, alors il appuie sur la touche OK et le fichier est effacé.

Exercice 4

Construisez une table de vérité pour chacune des propositions suivantes et dites s'il s'agit d'une tautologie, d'une contradiction ou d'une contingence. Justifiez votre réponse.

a) $(q \to \neg p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

Solution :

p	q	$\neg p$	$q \to \neg p$	$p \leftrightarrow q$	$(q \to \neg p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
T	T	F	F	T	F
T	F	F	T	F	F
F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T

D'après la table de vérité ci-dessus, il s'agit bien d'une **contingence**, car la proposition est vraie lorsque les valeurs de p et q sont fausses, mais fausse pour toutes les autres combinaisons de valeurs de p et q.

b) $(p \oplus q) \land (p \oplus \neg q)$

Solution :

p	q	$\neg q$	$p \oplus q$	$p \oplus \neg q$	$(p \oplus q) \land (p \oplus \neg q)$
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	T	F

D'après la table de vérité ci-dessus, il s'agit bien d'une **contradiction**, car elle est toujours fausse quelles que soient les valeurs de p et q.

Exercice 5

Soit la proposition suivante :

$$(P \to Q) \to [(Q \to R) \to (P \to R)]$$

En dérivant la proposition, dites s'il s'agit d'une tautologie, d'une contradiction ou d'une contingence. Justifiez chaque étape de votre réponse.

Solution :

$(P \to Q) \to [(Q \to R) \to (P \to R)]$	$\equiv (P \to Q) \to [\neg(Q \to R) \lor (P \to R)]$	car $(A \to B) \equiv (\neg A \lor B)$
	$\equiv (P \to Q) \to [\neg(\neg Q \lor R) \lor (\neg P \lor R)]$	car $(A \to B) \equiv (\neg A \lor B)$
	$\equiv (P \to Q) \to [(Q \land \neg R) \lor (\neg P \lor R)]$	De Morgan
	$\equiv (P \to Q) \to [(Q \land \neg R) \lor (R \lor \neg P)]$	Commutativité
	$\equiv (P \to Q) \to \big[\big((Q \land \neg R) \lor R\big) \lor \neg P\big]$	Associativité de $\lor$
	$\equiv (P \to Q) \to \big[\big((Q \lor R) \land (\neg R \lor R)\big) \lor \neg P\big]$	Distributivité de $\lor$ par rapport à $\land$
	$\equiv (P \to Q) \to \big[\big((Q \lor R) \land VRAI\big) \lor \neg P\big]$	Loi de négation
	$\equiv (P \to Q) \to [(Q \lor R) \lor \neg P]$	Loi d'identité
	$\equiv \neg(P \to Q) \lor [(Q \lor R) \lor \neg P]$	car $(A \to B) \equiv (\neg A \lor B)$
	$\equiv \neg(\neg P \lor Q) \lor [(Q \lor R) \lor \neg P]$	car $(A \to B) \equiv (\neg A \lor B)$
	$\equiv (P \land \neg Q) \lor [(Q \lor R) \lor \neg P]$	De Morgan
	$\equiv (P \land \neg Q) \lor [Q \lor R \lor \neg P]$	Associativité de $\lor$
	$\equiv [P \lor (Q \lor R \lor \neg P)] \land [\neg Q \lor (Q \lor R \lor \neg P)]$	Distributivité de $\lor$ par rapport à $\land$
	$\equiv [P \lor Q \lor R \lor \neg P] \land [\neg Q \lor Q \lor R \lor \neg P]$	Associativité de $\lor$
	$\equiv [(P \lor \neg P) \lor Q \lor R] \land [(\neg Q \lor Q) \lor R \lor \neg P]$	Associativité de $\lor$
	$\equiv [VRAI \lor Q \lor R] \land [VRAI \lor R \lor \neg P]$	Loi de négation
	$\equiv [VRAI] \land [VRAI]$	Loi de domination
	$\equiv VRAI$	Loi de domination

En dérivant la proposition, il s'agit donc d'une tautologie.

Exercice 6

En récompense d'avoir identifié une faille de sécurité importante dans le système informatique de l'Agence canadienne de développement international, le directeur général vous offre l'opportunité de gagner une clé USB contenant des informations confidentielles. Les deux clés USB qui ne contiennent pas les informations sont vides. Pour gagner, vous devez sélectionner la bonne clé USB. Les clés USB 1 et 2 portent chacune l'inscription "Ce dispositif est vide", et la clé USB 3 porte l'inscription "Les informations se trouvent sur la clé USB 2". L'expert en cybersécurité, qui ne ment jamais, vous dit qu'une seule de ces inscriptions est vraie, tandis que les deux autres sont fausses. Quelle clé USB devriez-vous choisir pour gagner ? Justifiez votre réponse.

Solution :

Soit p_i la proposition que les informations sont sur la clé USB i, pour i = 1, 2, 3.

Pour traduire en logique propositionnelle la déclaration de l'expert en cybersécurité selon laquelle une seule des inscriptions est vraie, il est possible de remarquer que les inscriptions sur la clé USB 1, la clé USB 2 et la clé USB 3 sont respectivement $\neg p_1, \neg p_2\ et\ p_2$.

Ainsi, sa déclaration peut être traduite en :

$$(\neg p_1 \land \neg(\neg p_2) \land \neg p_2) \lor (\neg(\neg p_1) \land \neg p_2 \land \neg p_2) \lor (\neg(\neg p_1) \land \neg(\neg p_2) \land p_2))$$

En utilisant les règles de la logique propositionnelle, on peut voir que cela est équivalent à

$$(p_1 \land \neg p_2) \lor (p_1 \land p_2).$$

En appliquant la loi de la distributivité, $(p_1 \land \neg p_2) \lor (p_1 \land p_2)$ est équivalent à $p_1 \land (\neg p_2 \lor p_2)$.

Mais comme $\neg p_2 \lor p_2$ doit être vrai, cela est alors équivalent à $p_1 \land T$, qui est à son tour équivalent à p_1 par la loi d'identité.

Ainsi, les informations sont sur la clé USB 1, c'est-à-dire que p_1 est vraie et p_2 et p_3 sont fausses et que l'inscription sur la clé USB 2 est la seule vraie.