POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 10 : GRAPHES

H2025

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 :

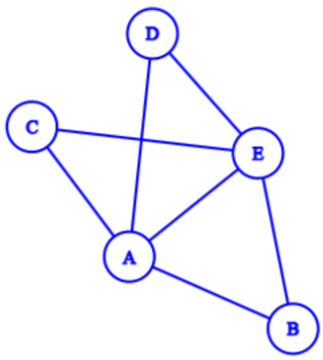
On considère le graphe non orienté défini par la **liste d'adjacence** suivante qui correspond à un réseau social. Chaque sommet représente une personne et chaque arête représente une relation.

Personnes	A	B	C	D	E
Relations	B, C, D, E	A, E	A, E	A, E	A, B, C, D

a) Représentez le problème à l'aide d'un graphe et d'une matrice d'adjacence.

Solution

Graphe :



Matrice d'adjacence :
Les lignes et les colonnes de la matrice sont respectivement étiquetées A, B, C, D, E.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Est-il possible de transmettre un message à travers le réseau, tout en s'assurant que chaque personne le reçoive ou le transmette une seule fois ? Justifiez votre réponse.

<u>Solution</u>

On souhaite savoir si l'on peut transmettre un message à travers le réseau de sorte que chaque personne le reçoive ou le transmette exactement une fois. Autrement dit, on recherche l'existence d'un parcours hamiltonien dans le graphe (un chemin qui passe par chaque sommet exactement une fois).

La réponse est oui : il existe un tel parcours.
Exemple :

$$B - A - C - E - D$$

c) Est-il possible de trouver un circuit qui traverse toutes les relations une seule fois ? Si oui, donnez un exemple. Dans le cas contraire, est-il au moins possible de trouver un parcours qui passe par chaque relation une seule fois? Si oui, donnez un exemple. Justifiez vos réponses.

<u>Solution</u>

On nous demande de trouver un circuit/parcours qui passe par chaque arête une seule fois, il s'agit d'un circuit/parcours eulérien. Tous les sommets sont de degrés pairs. Ainsi, le graphe admet un circuit eulérien. Il est donc possible de trouver un circuit eulérien. Exemple :

$$B - A - C - E - D - A - E - B$$

d) La personne E s'est disputée avec B et C. Les interactions entre E et ces deux personnes ont été supprimées. Répétez les questions b et c avec ce nouveau réseau.

<u>Solution</u>

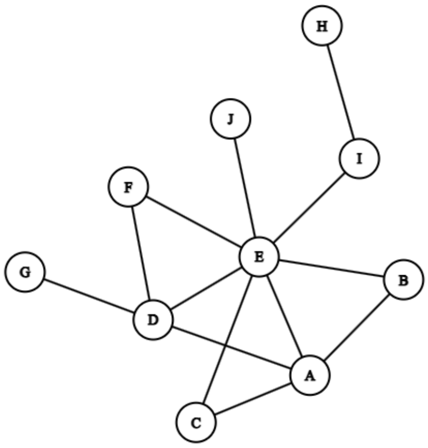
Il n'est alors plus possible de trouver de parcours hamiltonien. En effet, A est devenu le seul lien permettant de relier C et B au reste du réseau ; pour visiter tous les sommets, on serait contraint de repasser par A plusieurs fois, ce qui contredit l'exigence d'un parcours hamiltonien (un chemin qui ne visite chaque sommet qu'une seule fois).

B et C sont maintenant de degré impair. Ainsi, le graphe n'admet pas de circuits eulériens car il contient des sommets de degré impair. Cependant, comme le graphe contient exactement deux sommets de degré impair, alors le graphe admet un parcours eulérien. Il est donc possible de trouver un parcours qui traverse chaque relations une seule fois. Exemple :

$$B - A - E - D - A - C$$

Exercice 2

On considère le graphe suivant :



a) À partir du sommet A, donnez un parcours en largeur du graphe. Les sommets doivent être considérés dans l'ordre alphabétique. Donnez l'état de la file et la liste des sommets visités à chaque itération.

Solution

Dans un parcours en largeur, on ajoute les nœuds adjacents dans la file et dans la liste des sommets visités, car on sait qu'une fois ajouté dans la file, ils seront visités en priorité (FIFO).

Sommet visité	A	B	C	D	E
File	[B,C,D,E]	[C,D,E]	[D,E]	[E,F,G]	[F,G,I,J]
Sommets visités	{A,B,C,D,E}	{A,B,C,D,E}	{A,B,C,D,E}	{A,B,C,D,E,F,G}	{A,B,C,D,E,F,G,I,J}

F	G	I	J	H
[G,I,J]	[I,J]	[J,H]	[H]	[]
{A,B,C,D,E,F,G, I,J}	{A,B,C,D,E,F,G, I,J}	{A,B,C,D,E,F,G,I,J,H}	{A,B,C,D,E,F,G,I,J,H}	{A,B,C,D,E,F,G,I,J,H}

Ainsi : A-B-C-D-E-F-G-I-J-H

b) À partir du sommet A, donnez un parcours en profondeur du graphe. Les sommets doivent être considérés dans l'ordre alphabétique. Donnez l'état de la pile et la liste des sommets visités à chaque itération.

Solution

Dans un parcours en profondeur, on ajoute les nœuds adjacents seulement dans la pile car un nœud peut être exploré par une autre branche (LIFO).

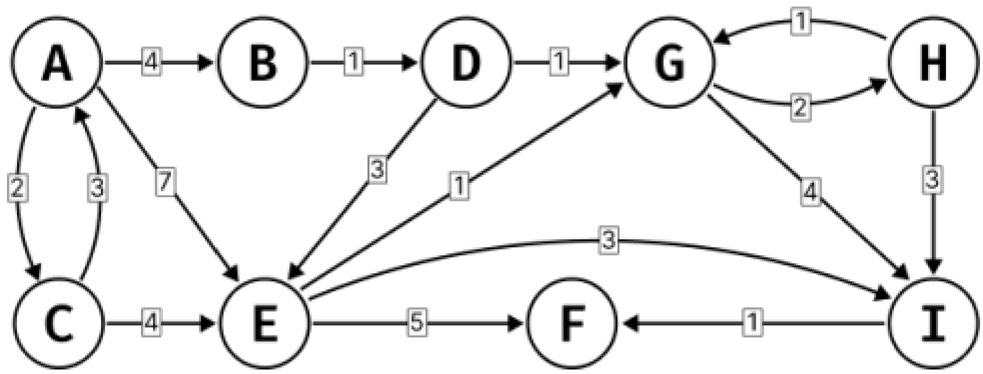
Sommet visité	A	B	E	C	D
Pile	[E,D,C,B]	[E,D,C,E]	[E,D,C,J,I,F,D,C]	[E,D,C,J,I,F,D]	[E,D,C,J,I,F,G,F]
Sommets visités	{A}	{A,B}	{A,B,E}	{A,B,E,C}	{A,B,E,C,D}

F	G	I	H	J
[E,D,C,J,I,F,G]	[E,D,C,J,I,F]	[E,D,C,J,H]	[E,D,C,J]	[E,D,C]
{A,B,E,C,D,F}	{A,B,E,C,D,F,G}	{A,B,E,C,D,F,G,I}	{A,B,E,C,D,F,G,I,H}	{A,B,E,C,D,F,G,I,H,J}

Ainsi : A-B-E-C-D-F-G-I-H-J

Exercice 3 :

En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminez le plus court chemin, du sommet A vers tous les autres sommets. Montrez toutes les étapes de votre réponse, en détaillant la longueur des chemins à chaque itération du processus.



Solution

Sommet it.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	Choix
0	0	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	-
1	-	4(A-B)	2(A-C)	∞ ( )	7(A-E)	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	A
2	-	4(A-B)	-	∞ ( )	6(A-C-E)	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	C
3	-	-	-	5(A-B-D)	6(A-C-E)	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	∞ ( )	B
4	-	-	-	-	6(A-C-E)	∞ ( )	6(A-B-D-G)	∞ ( )	∞ ( )	D
5	-	-	-	-	-	11(A-C-E-F)	6(A-B-D-G)	∞ ( )	9(A-C-E-I)	E
6	-	-	-	-	-	11(A-C-E-F)	-	8(A-B-D-G-H)	9(A-C-E-I)	G
7	-	-	-	-	-	11(A-C-E-F)	-	-	9(A-C-E-I)	H
8	-	-	-	-	-	10(A-C-E-I-F)	-	-	-	I
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	F
Résultat	0	4(A-B)	2(A-C)	5(A-B-D)	6(A-C-E)	10(A-C-E-I-F)	6(A-B-D-G)	8(A-B-D-G-H)	9(A-C-E-I)	-

Exercice 4 :

Skynet est un réseau de 15 routeurs. Chaque routeur est directement connecté à au moins 7 autres routeurs. Est-ce qu'une information peut transiter d'un routeur à n'importe quel autre à travers le réseau ? Justifier votre réponse en modélisant le problème sous forme de graphe.

Solution

On modélise le réseau Skynet sous forme d'un graphe G :

- Chaque routeur est représenté par un sommet,
- 2 routeurs sont reliés par une arête s'ils sont directement connectés. Une information peut transiter d'un routeur à n'importe quel autre à travers le réseau si et seulement si G est connexe.

Montrons que G est connexe :

Si un graphe n'est pas connexe, cela signifie qu'il peut se décomposer en au moins deux composantes disjointes. Nous allons montrer qu'avec un degré minimum de 7 dans un graphe de 15 sommets, il est impossible d'avoir deux (ou plus) composantes disjointes.

Soit A un sommet quelconque. A est lié à au moins 7 sommets (routeurs) différents. Nous avons donc un sous-graphe connexe de 8 sommets. Soit un sommet B ne faisant pas partie de ce sous-graphe. Il est également connecté à au moins sept autres sommets ; il y a donc un nouveau sous-graphe connexe de 8 sommets.

Il doit cependant y avoir un sommet partagé entre les 2 sous-graphes, car sinon le réseau aurait au moins 16 sommets. Les deux sous-graphes connexes sont donc connectés, d'où G est connexe.

Conclusion : Oui, une information peut transiter d'un routeur à n'importe quel autre à travers Skynet.

Exercices suggérés pour la semaine :

Rosen 8e Édition, Chapitre 6 :

Section 10.1 : 10.1.1, 10.1.11, 10.1.13, 10.1.15, 10.1.19, 10.1.23, 10.1.29

Section 10.2 : 10.2.1, 10.2.3, 10.2.5, 10.2.7, 10.2.9, 10.2.13, 10.2.19

Section 10.3 : 10.3.1, 10.3.3, 10.3.5, 10.3.7, 10.3.11, 10.3.13, 10.3.15, 10.3.17, 10.3.19, 10.3.21, 10.3.29, 10.3.33, 10.3.35, 10.3.39, 10.3.41, 10.3.43, 10.3.45, 10.3.47

Section 10.4 : 10.4.1, 10.4.3, 10.4.5, 10.4.21, 10.4.23, 10.4.27,10.4.39

Section 10.5 : 10.5.1, 10.5.3, 10.5.5, 10.5.7, 10.5.9, 10.5.11, 10.5.13, 10.5.15, 10.5.19, 10.5.21, 10.5.23, 10.5.31, 10.5.33, 10.5.35, 10.5.37, 10.5.39, 10.5.41, 10.5.43

Section : 10.6 : 10.6.1, 10.6.3, 10.6.5, 10.6.17