POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 1 : LOGIQUE PROPOSITIONNELLE

A2022

Directives pour la remise :

- Répondez directement sur ce document papier.
- La remise est individuelle, mais le travail en équipe est encouragé.
- La remise se fait à la fin de la séance de TD.
- **Aucun retard ne sera accepté.**
- **Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.**

Identification

Veuillez inscrire votre section, nom, prénom et matricule ainsi que les noms des collègues avec lesquels vous avez collaboré pour le TD

Section :

Nom :

Prénom :

Matricule :

Collègues :

Exercice 1 :

Soit les propositions :

T : « Rémi vient en TD »
C : « Rémi réussit le cours »
P : « Rémi mange du poulet »
S : « Rémi fait du sport »

Traduisez en langage courant (avec des phrases simples) chacune des propositions suivantes :

a) $\neg P$

Réponse : Rémi ne mange pas de poulet

b) $T \wedge S$

Réponse : Rémi vient en TD et fait du sport

c) $\neg T \vee C$

Réponse : plusieurs formulations possibles.

- Rémi ne vient pas en TD ou il réussit le cours.
- Si Rémi vient en TD, alors réussit le cours.
- Rémi vient au TD implique qu'il réussisse le cours
- Rémi réussit le cours dès qu'il vient en TD
- Rémi réussit le cours s'il vient en TD
- Il est suffisant que Rémi vienne en TD pour qu'il réussisse le cours.
- Il est nécessaire que Rémi réussisse le cours pour qu'il vienne en TD.

d) $(\neg T \vee \neg P) \rightarrow \neg C$

Réponse : Plusieurs formulations possibles, en basant sur les formulations vues en cours. Seul 2 exemples sont donnés ici.

- Si Rémi ne va pas en TD ou ne mange pas de poulet, il ne réussira pas le cours
- Rémi ne réussit pas le cours, ou mange du poulet et va en TD.

e) $(P \leftrightarrow S) \wedge (T \leftrightarrow C)$

Réponse : Rémi mange du poulet si et seulement si il fait du sport, et Rémi réussit le cours si et seulement si il va en TD.

Exercice 2 :

Soit P et Q les propositions suivantes :

• P : « Jean est fort en Mathématiques »
• Q : « Jean est fort en Algorithmique »

De plus, on suppose qu'être faible, c'est ne pas être fort.
Représentez les énoncés suivants en logique propositionnelle, à l'aide des symboles P Q ¬ ∧ ∨ → ↔

a) Jean est fort en Mathématiques mais faible en Algorithmique.

Réponse : $P \wedge \neg Q$

b) Jean n'est fort ni en Mathématiques ni en Algorithmique.

Réponse : $\neg P \wedge \neg Q$

c) Jean est fort en Mathématiques ou il est à la fois fort en Algorithmique et faible en Mathématiques.

Réponse : $P \vee (Q \wedge \neg P)$

d) Jean est fort en Mathématiques s'il est faible en Algorithmique.

Réponse : $\neg Q \rightarrow P$

e) Jean est fort en Algorithmique et en Mathématiques ou il est faible en Mathématiques et fort en Algorithmique.

Réponse : $(Q \wedge P) \vee (\neg P \wedge Q)$

f) Il suffit que Jean soit fort en Mathématiques pour être fort en Algorithmique.

Réponse : $P \rightarrow Q$

Exercice 3 : Soit l'énoncé : "Si tu gagnes, tu reçois un prix".
Parmi les énoncés ci-dessous, lesquels sont équivalents à cette implication et lesquels sont équivalents à sa réciproque ? Justifiez votre réponse, par exemple en représentant les énoncés en logique propositionnelle (y compris celui de l'énoncé).

"Si tu gagnes, tu reçois un prix" se traduit par : $G \rightarrow R$

a) Tu gagnes ou tu ne reçois pas un prix.
Réponse :
$G \lor \neg R \equiv R \rightarrow G$. C'est la réciproque.

b) Tu ne gagnes pas ou tu reçois un prix.
Réponse :
$\neg G \lor R \equiv G \rightarrow R$. C'est l'implication.

c) Tu gagneras et recevras un prix.
Réponse :
$G \land R$. Ce n'est équivalent ni à l'implication, ni à la réciproque.

d) C'est nécessaire pour toi de gagner pour recevoir un prix.
Réponse :
(G nécessaire pour R) $\equiv R \rightarrow G$. C'est la réciproque.

e) C'est suffisant de gagner pour recevoir un prix.
Réponse :
(G suffisant pour R) $\equiv G \rightarrow R$. C'est l'implication.

f) Tu gagneras si et seulement si tu reçois un prix
Réponse :
$(R \leftrightarrow G) \equiv (R \rightarrow G) \land (G \rightarrow R)$. Ce n'est équivalent ni à l'implication, ni à la réciproque.

Exercice 4 : Simplifiez le plus possible la proposition suivante :

$$((P \rightarrow R) \wedge (R \leftrightarrow Q) \wedge P)$$

Indications :

- chaque lettre ne doit pas apparaître plus d'une fois

- les opérateurs $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$ ne font pas partie du résultat final

Réponse :

$((P \rightarrow R) \wedge (R \leftrightarrow Q) \wedge P)$

$((P \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \wedge P$ traduction de l'implication double

$(\neg P \vee R) \wedge (\neg R \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge P$ traduction des implications

$P \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg R \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R)$

$((P \wedge \neg P) \vee (P \wedge R)) \wedge (\neg R \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R)$ distributivité

$(\mathbf{F} \vee (P \wedge R)) \wedge (\neg R \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R)$ loi d'identité

$P \wedge R \wedge (\neg R \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R)$ loi de domination

$P \wedge ((R \wedge \neg R) \vee (R \wedge Q)) \wedge (\neg Q \vee R)$ distributivité

$P \wedge R \wedge Q \wedge (\neg Q \vee R)$ identité et domination

$P \wedge R \wedge ((Q \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R))$ distributivité

$P \wedge R \wedge Q \wedge R$ identité et domination

$P \wedge R \wedge Q$ Idempotence

Exercice 5 : : Soit la proposition suivante : $P \land \neg (Q \lor (P \land \neg Q))$.
En dérivant la proposition, dites s'il s'agit d'une contingence, d'une tautologie ou d'une contradiction.
Justifiez chaque étape de votre réponse.

Réponse :
$P \land \neg (Q \lor (P \land \neg Q))$
$\equiv P \land (\neg Q \land \neg (P \land \neg Q))$ De Morgan
$\equiv P \land (\neg Q \land (\neg P \lor Q))$ De Morgan
$\equiv (P \land \neg Q) \land (\neg P \lor Q)$ Associativité de $\land$
$\equiv \neg (\neg P \lor Q) \land (\neg P \lor Q)$ De Morgan
$\equiv \neg R \land R$ avec $R \equiv (\neg P \lor Q)$
C'est donc une contradiction.