LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 10 : GRAPHES

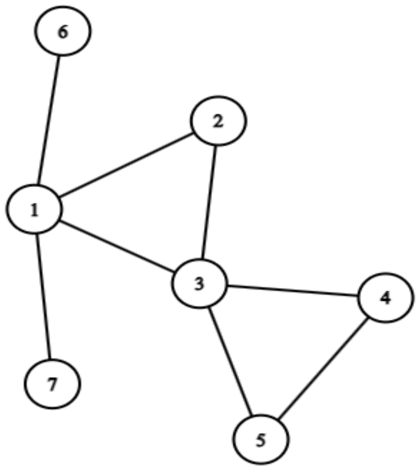
H2024

SOLUTIONNAIRE

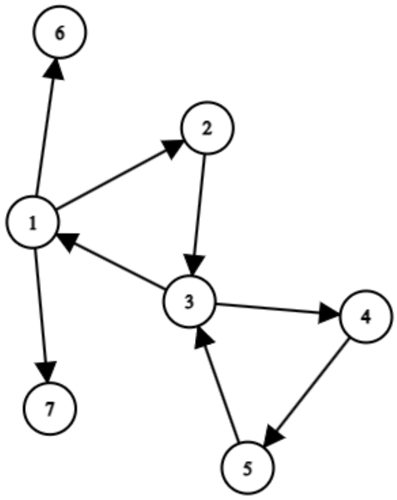
Exercice 1 :

Pour les deux graphes ci-dessous :

Graphe 1 :



Graphe 2 :



a) Donnez la liste d'adjacence des graphes 1 et 2.

Solution

Graphe 1 :

Sommets	1	2	3	4	5	6	7
Sommets adjacents	2,3,6,7	1,3	1,2,4,5	3,5	3,4	1	1

Graphe 2 :

Sommets	1	2	3	4	5	6	7
Sommets adjacents	2,6,7	3	1,4	5	3	Ø	Ø

b) Donnez les matrices d'adjacences des graphes 1 et 2.

<u>Solution</u>

Les lignes et les colonnes de chaque matrice sont respectivement étiquetées 1,2,3,4,5,6,7.

$$Graph\,1: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Graph\,2: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Le graphe 1 admet-il un circuit eulérien ? Si oui, donnez un exemple. Dans le cas contraire, admet-il au moins un parcours eulérien ? Si oui, donnez un exemple. Justifiez vos réponses.

<u>Solution</u>

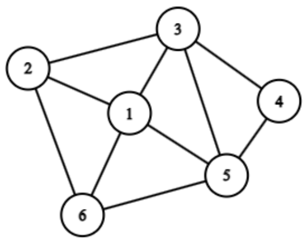
Les sommets 6 et 7 sont de degré impair. Ainsi, le graphe n'admet pas de circuits eulériens car il contient des sommets de degré impair. Cependant, comme le graphe contient exactement deux sommets de degré impair, alors le graphe admet un parcours eulérien. Voici un exemple de parcours eulérien :

6-1-2-3-4-5-3-1-7

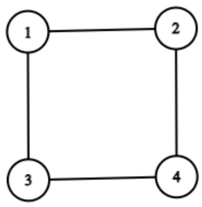
Exercice 2 :

Pour chacun des quatre graphes suivants :

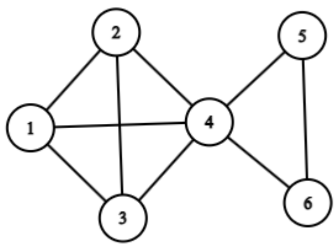
- Le graphe admet-il un circuit hamiltonien ? Si oui, donnez un exemple. Dans le cas contraire, admet-il au moins un parcours hamiltonien ? Si oui, donnez un exemple.
- Le graphe admet-il un circuit eulérien ? Si oui, donnez un exemple. Dans le cas contraire, admet-il au moins un parcours eulérien ? Si oui, donnez un exemple. Justifiez votre réponse.



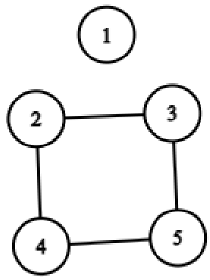
Graphe 1



Graphe 2



Graphe 3



Graphe 4

a) Graphe 1 :

Solution

- Le graphe contient le circuit hamiltonien : 1-2-3-4-5-6-1
- Les sommets 2 et 6 sont de degré impair. Ainsi, le graphe n'admet pas de circuit eulérien car il contient des sommets de degré impair. Cependant, comme le graphe contient exactement deux sommets de degré impair alors, le graphe admet un parcours eulérien. Voici un exemple de parcours eulérien : 2-3-4-5-3-1-5-6-1-2-6

b) Graphe 2 :

Solution

- Le graphe contient le circuit hamiltonien : 1-2-4-3-1
- Tous les sommets du graphe sont de degré pair. Ainsi, le circuit admet un circuit eulérien. Voici un exemple de circuit eulérien : 1-2-4-3-1

c) Graphe 3 :

Solution

- Le graphe ne contient pas de circuit hamiltonien. Effectivement on peut voir que le nœud 4 fait le lien entre les nœuds 5-6 et le reste du graphe. Ainsi, le nœud 4 sera parcourue deux fois si on essaye de passer d'un côté et d'y revenir pour terminer le circuit. Le graphe admet cependant un parcours hamiltonien. Par exemple : 1-2-3-4-5-6
- Les sommets 1 2 et 3 sont de degré impair. Ainsi, comme le graphe contient plus de deux sommets de degré impairs, il ne contient pas de circuits ou de parcours eulériens.

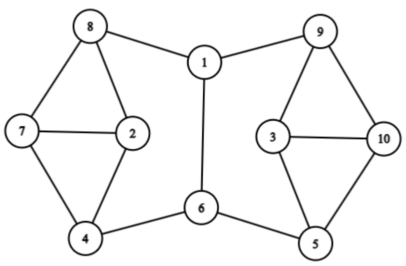
d) Graphe 4 :

Solution

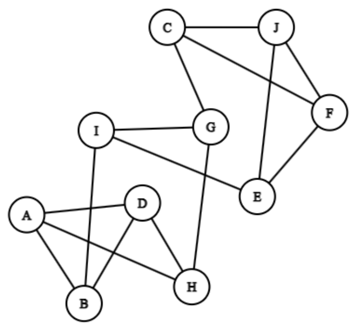
- Graphe non hamiltonien. Effectivement, l'existence du sommet isolé 1 rend le graphe non hamiltonien.
- Graphe non eulérien. Effectivement, l'existence du sommet isolé 1 rend le graphe non eulérien (le graphe doit être connexe).

Exercice 3 :

Déterminez si les graphes **A** et **B** ci-dessous sont isomorphes. Justifiez votre réponse.



*Graphe **A***



*Graphe **B***

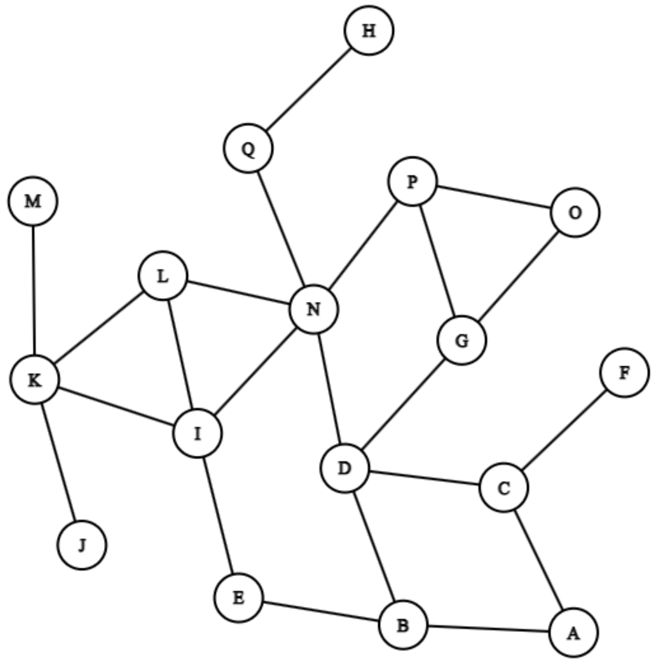
Solution

Les deux graphes sont isomorphes. Soit h la fonction bijective qui transforme le graphe **A** en celui de **B**. Plusieurs réponses sont possibles. On a par exemple :

- h(1)=G
- h(2)=D
- h(3)=J
- h(4)=B
- h(5)=E
- h(6)=I
- h(7)=A
- h(8)=H
- h(9)=C
- h(10)=F

Exercice 4 :

On considère le graphe suivant :



a) À partir du sommet A, donnez un parcours en largeur du graphe. Les sommets doivent être considérés dans l'ordre alphabétique.

Solution

Sommet visité	A	B	C	D	E	F	G	N
File	[B,C]	[C,D,E]	[D,E,F]	[E,F,G,N]	[F,G,N,I]	[G,N,I]	[N,I,O,P]	[I,O,P,L,Q]
Sommets visités*	{A,B,C}	{A,…,E}	{A,…,F}	{A,…,G,N}	{A,…,I}	{A,…}	{A,…O,P}	{A,…,L,Q}

I	O	P	L	Q	K	H	J	M
[O,P,L,Q,K]	[P,L,Q,K]	[L,Q,K]	[Q,K]	[K,H]	[H,J,M]	[J,M]	[J]	[]
{A,…,K}	{A,…}	{A,…}	{A,…}	{A,…,H}	{A,…,J,M}	{A,…}	{A,…}	{A,…}

*On note seulement les nouveaux sommets ajoutés aux sommets visités pour faciliter la lisibilité.

Ainsi : A-B-C-D-E-F-G-N-I-O-P-L-Q-K-H-J-M

b) À partir du sommet A, donnez un parcours en profondeur du graphe. Les sommets doivent être considérés dans l'ordre alphabétique.

Solution

Sommet visité	A	B	D	C	F	G	O	P
Pile	[B,C]	[D,E,C]	[C,G,N,E,C]	[F,G,N,E,C]	[G,N,E,C]	[O,P,N,E,C]	[P,P,N,E,C]	[N,P,N,E,C]
Sommets visités*	{A}	{A,B}	{A,B,D}	{A,…,C}	{A,…,F}	{A,…,G}	{A,…,O}	{A,…,P}

N	I	E	K	J	L	M	Q	H
[I,L,QP,N,E,C]	[E,K,L,L,Q,P,N,E,C]	[K,L,L,Q,P,N,E,C]	[J,L,M,L,L,Q,P,N,E,C]	[L,M,L,L,Q,P,N,E,C]	[M,L,L,Q,P,N,E,C]	[~~L~~,~~L~~,Q,P,N,E,C]	[H,P,N,E,C]	[~~P~~,~~N~~,~~E~~,~~C~~]
{A,…,N}	{A,…,I}	{A,…,E}	{A,…,K}	{A,…,J}	{A,…,L}	{A,…,M}	{A,…,Q}	{A,…H}

*On note seulement les nouveaux sommets ajoutés aux sommets visités pour faciliter la lisibilité.

Ainsi : A-B-D-C-F-G-O-P-N-I-E-K-J-L-M-Q-H

Exercice 5 :

a) Une classe est composée de 31 étudiants, est-il possible pour chaque étudiant de la classe d'avoir 3 amis dans la classe ? Justifiez votre réponse.

Solution

Non, il n'est pas possible que chaque étudiant ait 3 amis dans la classe. Effectivement, on peut représenter cette situation comme un graphe où chaque étudiant est un sommet et chaque amitié un arc du graphe. Ainsi, chaque sommet du graphe est de degré 3.

Ainsi, selon le lemme des poignées de main, $3 \cdot 31 = 93$, qui correspond à la somme des degrés des sommets du graphe, devrait être pair car il devrait être égal au double du nombre d'arcs. Ainsi, comme la somme des degrés des sommets du graphe est impair, alors le graphe ne peut pas exister.

b) Est-il possible pour chaque étudiant de la classe d'avoir 4 amis dans la classe ? Si oui, combien d'amitiés existent dans la classe ? Justifiez votre réponse.

Solution

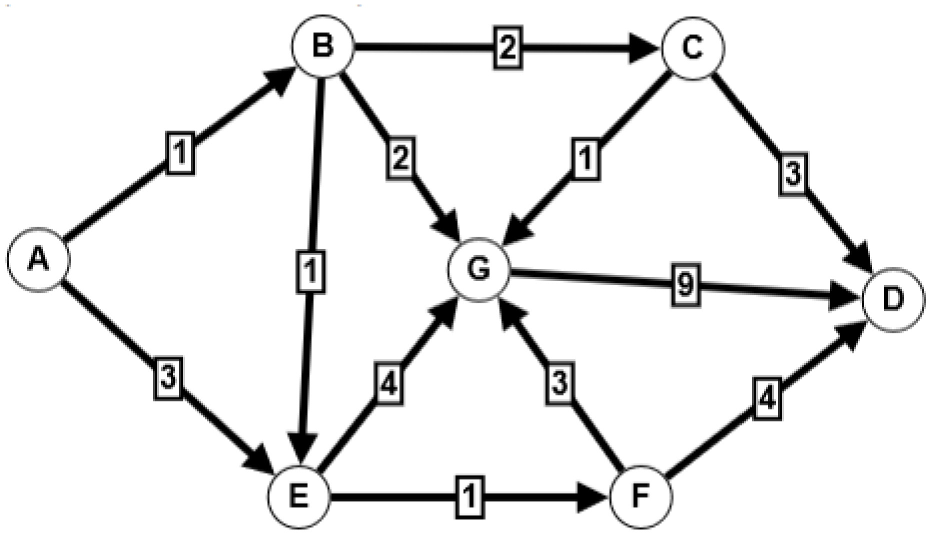
Oui, il est possible que chaque étudiant ait 4 amis dans la classe. Effectivement, dans ce cas, la somme des degrés des sommets du graphe est égale à $4 \cdot 31 = 124$, qui est pair, le graphe existe. Ainsi, le nombre d'amitiés correspond tout simplement au nombre d'arcs dans le graphe. Selon le lemme des poignées de main :

$$2e = \sum deg(v) = 124$$
$$\Rightarrow \quad e = 62$$

Ainsi, il existe 62 amitiés dans la classe.

Exercice 6 :

En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminez le plus court chemin, du sommet A vers tous les autres sommets. Montrez toutes les étapes de votre réponse, en détaillant la longueur des chemins à chaque itération du processus.



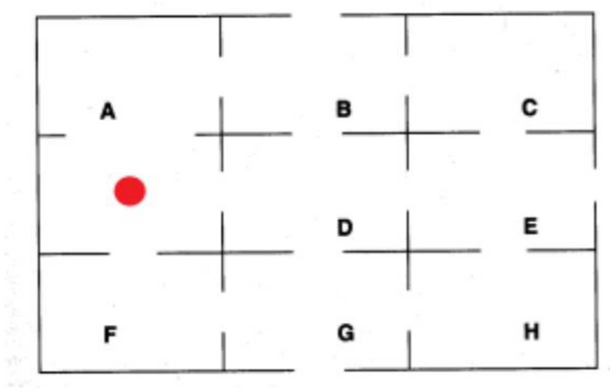
Réponse :

Les étapes et les calculs sont consignés dans le tableau ci-dessous

Itération	S	A	B	C	D	E	F	G
0	Ø	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	{A}	-	1 (AB)	∞	∞	3 (AE)	∞	∞
2	{A, B}	-	-	3 (ABC)	∞	2 (ABE)	∞	3 (ABG)
3	{A, B, E}	-	-	3 (ABC)	∞	-	3 (ABEF)	3 (ABG)
4	{A, B, E, C}	-	-	-	6 (ABCD)	-	3 (ABEF)	3 (ABG)
5	{A, B, E, C, G}	-	-	-	6 (ABCD)	-	3 (ABEF)	-
6	{A, B, E, C, G, F}	-	-	-	6 (ABCD)	-	-	-
7	{A, B, E, C, G,F,D}	-	-	-	-	-	-	-
CONCLUSION		-	1 (AB)	3 (ABC)	6 (ABCD)	2 (ABE)	3 (ABEF)	3 (ABG)

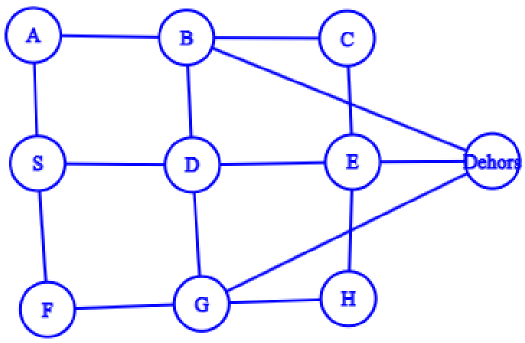
Exercice 7 :

On considère ci-dessous le plan de la maison de Pierre. Les lignes représentent les murs. Les espaces vides entre les murs représentent les portes. Pierre se trouve présentement dans la pièce située entre A et F, marquée par le cercle. Il désire fermer à clé toutes les portes de la maison avant de dormir, traversant chacune d'elles avant de la verrouiller. Il peut sortir à l'extérieur et revenir dans la maison par une autre porte. De plus, lors de sa tournée, il ne souhaite pas ouvrir une porte déjà fermée. Pouvez-vous indiquer où il dort ? Justifiez votre réponse en explicitant son parcours.



Solution

La situation peut être représentée à l'aide d'un graphe. Les sommets représentent les pièces de la maison ainsi que l'extérieur alors que les arêtes représentent les portes. Voici le graphe :



On remarque que tous les sommets sont de degré pair à l'exception du sommet de départ ainsi que de l'extérieur. Ainsi, le graphe n'admet pas de circuits eulériens car il contient des sommets de degré impair. Cependant, comme le graphe contient exactement deux sommets de degré impair, alors le graphe admet un parcours eulérien. De plus, un parcours eulérien doit commencer et se terminer sur un nœud de degré impair. Ainsi, comme on commence au nœud S (de degré impair), on est obligé de finir le parcours à l'extérieur (seul autre nœud de degré impair). Ainsi, Pierre dormira à l'extérieur.