POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

# TD 11 : ARBRES

A2022

## Directives pour la remise :

- Répondez directement sur ce document papier.
- La remise est individuelle, mais le travail en équipe est encouragé.
- La remise se fait à la fin de la séance de TD.
- **Aucun retard ne sera accepté.**
- **Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.**

## Identification

Veuillez inscrire votre section, nom, prénom et matricule ainsi que les noms des collègues avec lesquels vous avez collaboré pour le TD

**Section :**

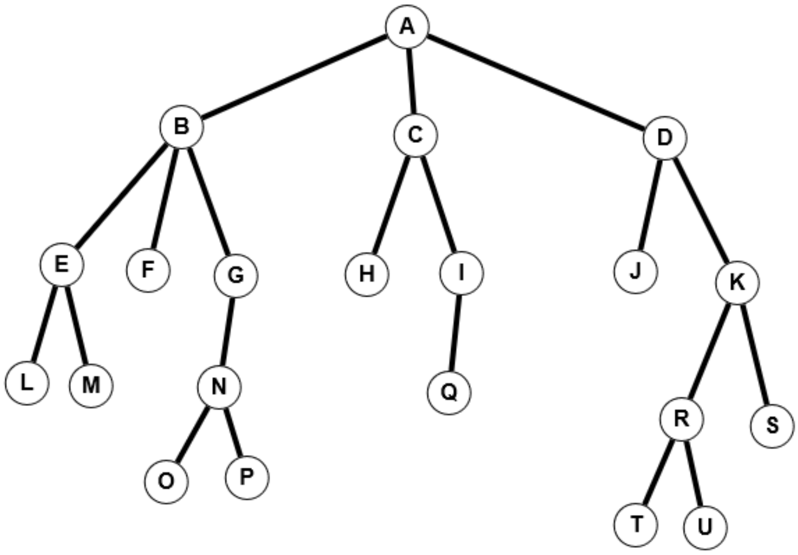
**Nom :**

**Prénom :**

**Matricule :**

**Collègues :**

**Exercice 1 :**
Soit l'arbre ci-dessous :




a. Donnez l'expression correspondant au parcours préfixe de l'arbre.
**Réponse** :
a-b-e-l-m-f-g-n-o-p-c-h-i-q-d-j-k-r-t-u-s

b. Donnez l'expression correspondant au parcours infixe de l'arbre.
**Réponse** :
l-e-m-b-f-o-n-p-g-a-h-c-q-i-j-d-t-r-u-k-s

c. Donnez l'expression correspondant au parcours postfixe de l'arbre.
**Réponse** :
l-m-e-f-o-p-n-g-b-h-q-i-c-j-t-u-r-s-k-d-a

**Exercice 2 :**
Quelles sont les valeurs des expressions postfixées ci-dessous ? Détaillez vos calculs.
L'opérateur ^ est celui de l'exponentiation.

a. 9 3 / 5 + 7 2 - *

**Réponse** :

9 3 / 5 + 7 2 - * = (9 3 /) 5 + 7 2 - *
= 3 5 + 7 2 - *
= (3 5 +) 7 2 - *
= 8 7 2 - *
= 8 (7 2 -) *
= 8 5 *
= 40

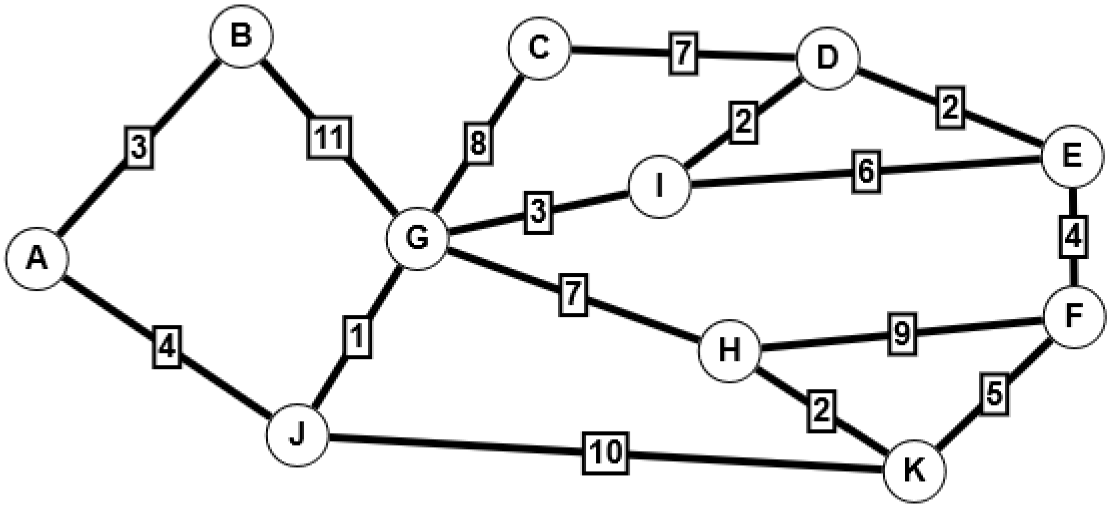
b. 3 2 * 2 ^ 5 3 – 8 4 / * -

**Réponse** :

3 2 * 2 ^5 3 – 8 4 / * - = (3 2 *) 2 ^5 3 – 8 4 / * -
= (6 2 ^) 5 3 – 8 4 / * -
= 36 (5 3 –) 8 4 / * -
= 36 2 (8 4 /)* -
= 36 (2 2*) -
= (36 4 -)
= 32

**Exercice 3 :**

Soit le graphe ci-dessous. Construisez un arbre de poids minimum en appliquant l'algorithme de Prim. Détaillez toutes les étapes. Quel est son coût ?




**Réponse** :

On commence avec le segment de poids minimal : JG .

Il y a 11 sommets, donc on devra ajouter 10 arêtes.

Les arcs sont ajoutés dans l'ordre suivant :

GJ-GI-ID-DE-

Ici, on a le choix entre ajouter l'arc AJ et l'arc EF.

Si on ajouter l'arc AJ en premier, cela nous donne : GJ-GI-ID-DE-JA-AB-EF-FK-KH-DC

Si on ajouter l'arc EF en premier, cela nous donne : GJ-GI-ID-DE-EF-JA-AB-FK-KH-DC

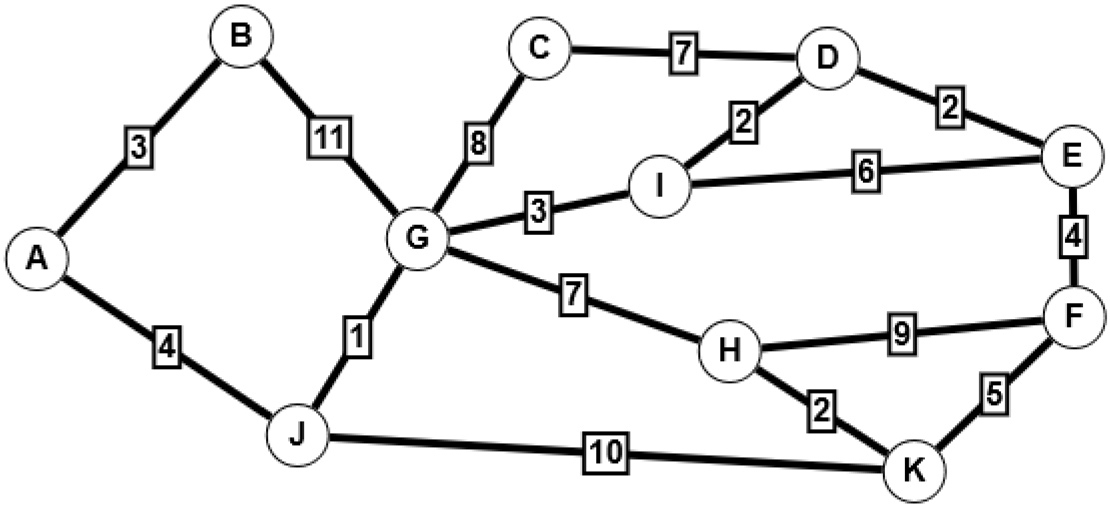
On s'arrête après avoir ajouté la dixième arête.

Dans les 2 cas, les mêmes arêtes sont présentes dans l'Arbre couvrant de poids minimal ainsi construit, donc le cout de l'arbre est le même :

coût de l'arbre = 1+3+2+2+4+4+3+5+2+7 = 33

**Exercice 4 :**

Soit le graphe ci-dessous. Construisez un arbre de poids minimum en appliquant l'algorithme de Kruskal. Détaillez les 3 étapes telles que vu en cours. Quel est son coût ?




**Réponse** :

Étape 1 : trier les arcs en ordre croissant de leur poids

- JG 1
- DE 2
- DI 2
- HK 2
- AB 3
- GI 3
- AJ 4
- EF 4
- FK 5
- EI 6
- CD 7
- GH 7
- JK 10
- BG 11

Étape 2 : parcourir la liste triée des arcs, en commençant par le premier arc de poids minimum. Ajouter l'arc à l'arbre en construction, s'il ne forme pas de cycle.

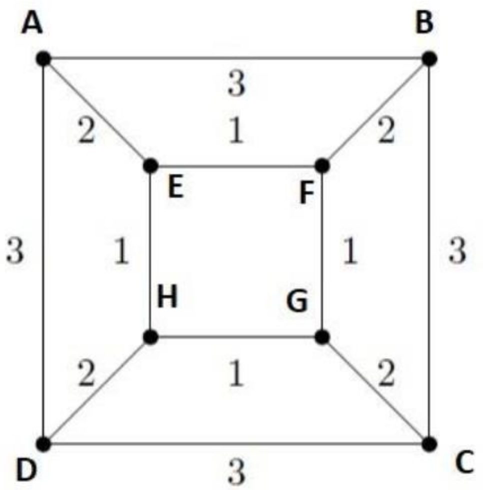
À titre d'illustration, les arcs qui forment un cycle vont être surlignés en rouge.

Étape 3 : Arrêter l'algorithme lorsque que (n-1) arcs ont été ajoutés à l'arbre en construction, n étant le nombre de sommets dans le graphe initial.

- JG 1
- DE 2
- DI 2
- HK 2
- AB 3
- GI 3
- AJ 4
- EF 4
- FK 5
- EI 6
- CD 7
- GH 7
- JK 10
- BG 11

Le coût de l'arbre est : 1+2+2+2+3+3+4+4+5+7 = 33

**Exercice 5 :**
Soit le graphe ci-dessous. On désire construire un arbre de poids minimum dans lequel on impose la présence obligatoire de l'arc AB. Construisez l'arbre souhaité en détaillant les étapes suivies.



**Réponse** : **Plusieurs solutions possibles**

Pour le construire, l'arbre on apportera une modification à l'algorithme de Prim ou à l'algorithme de Kruskal. La modification consiste à initialiser les traitements avec l'arc AB. Les autres étapes des algorithmes sont maintenues. L'arc AB sera donc considéré lors de l'évitement de cycle.

- **Kruskal :**

Étape 1 : trier les arcs en ordre croissant de leur poids, à l'exception de l'arc AB

- EF 1
- FG 1
- GH 1
- EH 1
- AE 2
- BF 2
- GC 2
- DH 2
- BC 3
- CD 3
- AD 3

Étape 2 : Initialiser l'arbre avec l'arc AB

Étape 3 : Parcourir la liste triée des arcs, en commençant par le premier arc de poids minimum. Ajouter l'arc à l'arbre en construction, s'il ne forme pas de cycle.

À titre d'illustration, les arcs qui forment un cycle vont être surlignés en rouge.

- EF 1
- FG 1
- GH 1
- EH 1
- AE 2
- BF 2
- GC 2
- DH 2
- BC 3
- CD 3
- AD 3

- **Prim :**

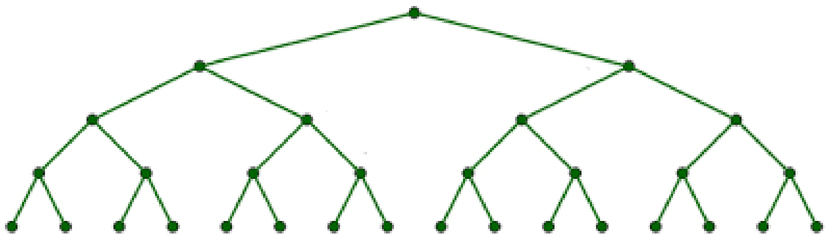
On initialise l'arbre avec l'arc AB. On ajoute les arcs dans l'ordre ci-après.

AB – AE – EF – FG – HG – HD - GC

On s'arrête à la 7eme arête.

**Exercice 6 :**
Dans cet exercice, on va s'intéresser aux arbres binaires (2-aire), et en particulier aux **Arbres binaires parfaits.**

Un **Arbre binaire parfait** est un arbre binaire complet dans lequel toutes les feuilles (nœuds n'ayant aucun fils) sont à la même distance de la racine (c'est-à-dire au même niveau). Il s'agit d'un arbre dont tous les niveaux sont remplis : où tous les nœuds internes ont deux fils et où toutes les feuilles ont la même hauteur.



*Exemple d'arbre binaire parfait ayant 4 niveaux.*

On considère que la racine de l'arbre est au niveau 0. Justifiez chacune de vos réponses.
a) Combien y a-t-il de nœuds à chaque niveau d'un arbre binaire parfait ayant 4 niveaux ? Que remarquez-vous ?
**Réponse** :
D'après le schéma,
Niveau 0 : 1 neud, qui s'écrit aussi $2^0$.
Niveau 1 : 2 neud, qui s'écrit aussi 2*1, ou $2^1$.
Niveau 2 : 4 neud, qui s'écrit aussi 2*2, ou $2^2$.
Niveau 3 : 8 neud, qui s'écrit aussi 2*4, ou $2^3$.
Niveau 4 : 16 neud, qui s'écrit aussi 2*8, ou $2^4$.
On remarque que à chaque niveau, le nombre de sommet double, ou que le nombre de sommet est égal à $2^{\text{niveau}}$.

b) Généralisez : combien y a-t-il de nœuds au niveau i d'un arbre binaire parfait ?
**Réponse** :
Le nombre de sommets double à chaque niveau, et il y a 1 sommet au niveau 0.
Le nombre de sommets au niveau i est donc égal à : 1 * 2* 2 * … *2 = $2^i$.
<u>Note</u> : on peut aussi modéliser ce problème sous forme d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2, ce qui donne aussi $U_i = 1*2^i$

c) Soit n un entier naturel. Exprimer en fonction de n le nombre total de sommets dans un arbre binaire parfait ayant n niveaux.
**Réponse** :
Il suffit de sommer le nombre de sommets sur tous les niveaux allant de 0 à n :

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} \quad 2^{n+1}-1$$

Il y a $2^{n+1}-1$ sommet dans un arbre binaire complet de taille n .

d) Soit n un entier naturel. Utilisez les résultats précédents pour exprimer le nombre de feuilles dans un arbre binaire parfait ayant n niveaux.

**Réponse** :

D'après la question b, il y a $2^i$ nœuds au niveau i d'un arbre binaire complet.

Or les feuilles sont les nœuds du dernier niveau de l'arbre,

Donc il y a $2^n$ feuilles dans un arbre binaire parfait de n niveaux.

e) Utilisez les résultats précédents pour exprimer le nombre n de niveaux d'un arbre binaire parfait en fonction de son nombre f de feuilles (n, f des entiers naturels, f non nul).

**Réponse** :

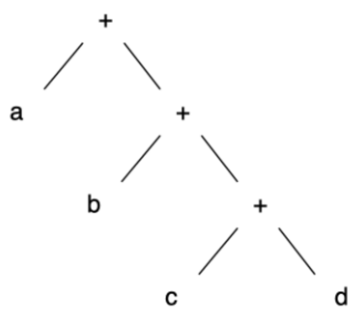
D'après la question d), on a $f = 2^n$.

D'où $\log_2(f) = n$

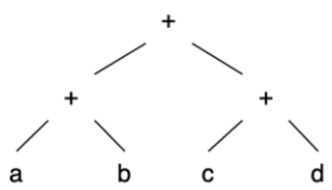
**Exercice 7 :**

L'opération d'addition est associative. Pour cette raison, plusieurs arbres d'opérations peuvent représenter l'expression a+b+c+d.

1.




2.




Supposons qu'un processeur puisse calculer une opération (addition) par cycle d'horloge. Si vous pouvez effectuer des opérations en parallèle, combien de cycle d'horloge avez-vous besoin pour obtenir le résultat :

a) En suivant la démarche indiquée par l'arbre d'opérations 1

**Réponse** :

Chaque addition a besoin des résultats de la précédentes. On est donc obligé de les calculer l'une après l'autre : Il faut 3 cycles.

b) En suivant la démarche indiquée par l'arbre d'opérations 2

**Réponse** :

Les 2 additions du niveau 1 de l'arbre sont indépendantes. On peut calculer paralléliser ces 2 additions durant le même cycle d'horloge. Ensuite il suffit de calculer l'opération de la racine : Il faut 2 cycles.

c) Soit n un entier naturel. Vous voulez calculer $2^n$ opérations d'additions, et vous avez accès à une capacité de calcul parallèle illimitée. Combien de cycles cela demande-t-il :

1. Si vous suivez la démarche décrite par l'arbre 1.
2. Si vous suivez la démarche décrite par l'arbre 2 (utiliser les résultats de l'exercice 6).

**Réponse** :

1. Si on suit la démarche de l'arbre 1, il faut calculer chaque addition l'une après l'autre. Cela prend donc $2^n$ cycles d'horloges.

2.

Si on considère $2^n$-1 additions :

Si on suit la démarche de l'arbre 2, il faut additionner chaque entier 2 à 2, puis additionner les résultats obtenus 2 à 2, etc jusqu'à avoir un seul résultat, en partant de $2^n$ entiers. Cela revient à construire un arbre d'opérations de la forme d'un arbre binaire parfait, avec $2^n$ feuilles, dont l'ensemble des opérations de chaque niveau est résolu en un cycle d'horloge.

nombre cycles d'horloge = nombre de niveaux dans l'arbre binaire parfait
= $\log_2$(nombre de feuilles de l'arbre)    d'après 6e)
= $\log_2(2^n)$
= n

En suivant la démarche décrite par l'arbre 2, il faut n cycles d'horloges.

Si on considère effectivement $2^n$ additions :

On reprend la démarche précédente, et on additionne le résultat des $2^n$-1 premières additions avec le dernier entier sur un cycle d'horloge supplémentaire.
Au total, il faut n+1 cycle d'horloge.