Solutionnaire

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Contrôle périodique 3

LOG2810

Sigle du cours

Sigle et titre du cours	*Groupe*	*Trimestre*
LOG2810 Structures discrètes	Tous	Été 2022

Professeur	*Local*	*Téléphone*
Aurel Randolph, Chargé de cours Lévis Thériault, Coordonnateur	A-416	

Jour	*Date*	*Durée*	*Heures*
Samedi	18 juin 2022	1h	10h30-11h30

<u>Question 1</u> (**5 points)**

Résolvez l'équation de récurrence :

$$a_{n+1} - 2a_{n-1} = -a_{n-3}\,; avec\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 6, a_3 = -1$$

Solution

On sait que :

$$a_{n+1} - 2a_{n-1} + a_{n-3} = 0$$

on a donc :

$$a_n - 2a_{n-2} + a_{n-4} = 0$$

Cette relation de récurrence linéaire homogène à coefficient constant de degré 4 a pour équation caractéristique :

$$r^4 - 2r^2 + 1 = 0$$

$$(r^2 - 1)^2 = 0$$

$$[(r+1)(r-1)]^2 = 0$$

Les racines de cette équation sont r = 1 (racine double) et r = -1 (racine double).

La solution de la relation de récurrence est de la forme

$$a_n = (\mathrm{s} + \mathrm{n.t})(1^n) + (\mathrm{u} + \mathrm{n.v})(-1)^n$$

$$a_n = (\mathrm{s} + \mathrm{n.t}) + (\mathrm{u} + \mathrm{n.v})(-1)^n$$

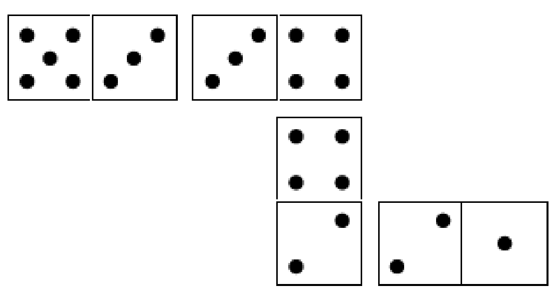
Avec les cas de base on obtient s = 1, t = 1, u = -1 et v = 2.

La solution est donc

$$a_n = (1 + \mathrm{n}) + (-1 + 2\mathrm{n})(-1)^n$$

<u>Question 2</u> (**2.5 points)**

On considère des dominos dont les faces sont numérotées à l'aide de deux chiffres choisis entre 1 et 6. On précise qu'il n'y a jamais deux dominos identiques.



a. **(1 point)** En excluant les dominos doubles (deux fois le même chiffre), de combien de dominos dispose-t-on ? Expliquez votre méthode de dénombrement.

Réponse :

Sur chaque face du domino, chaque chiffre est associé à chacun des 5 autres chiffres. Il y a P(6, 1) façons de placer un premier chiffre et P(5, 1) façons de placer un deuxième chiffre pour éviter les dominos doubles.

Cependant, il faut supprimer les répétitions en divisant par 2. Par exemple, un domino 1.6 est le même qu'un domino 6.1. Le nombre de dominos est donc

$$P(6, 1) . P(5, 1) / 2 = 6.5/2 = 15$$

Cela revient aussi à combiner 2 chiffres sur 6, soit **C(6, 2) = 15**.

b. **(1.5 point)** En excluant les dominos doubles (deux fois le même chiffre), peut-on arranger les dominos de façon à former une boucle fermée ? Justifiez votre réponse en vous basant sur vos connaissances en théorie des graphes.

Note : La règle de contact entre deux dominos est de mettre ensemble deux chiffres identiques. Des exemples de contact sont illustrés dans la figure ci-dessus.

Réponse : Deux solutions sont proposées ici

- Raisonnement général.

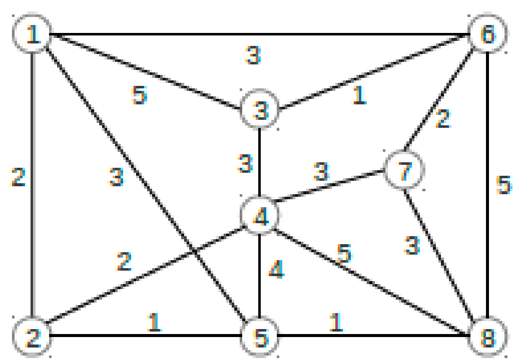
Arranger les dominos de façon à former une boucle fermée revient à associer les chiffres par pair. Chaque chiffre apparaissant 5 fois, pour un chiffre donné, il y aura un domino portant ce chiffre qui ne saurait être associé. Il n'est donc pas possible de faire une bouche fermée.

- Considérons un domino comme le sommet d'un graphe.

Chaque domino est assimilable à un sommet d'un graphe dans lequel tous les sommets sont reliés entre eux et sans boucle. Chaque arc est donc un contact entre 2 dominos, soit les demi-faces de 2 dominos portant même chiffre. Ainsi, chaque sommet a pour degré 2. Faire une boucle fermée revient à obtenir un cycle eulérien. Ce qui est impossible du fait de la parité impair chiffres qui participent à la constitution d'un arc et d'un degré de sommet. On aura donc des dominos de degrés 1.

Question 3 (**4.5 points)**

Soit le graphe suivant. Trouvez l'arbre de recouvrement de poids minimal. Vous devez préciser la méthode utilisée et présenter toutes les étapes de votre réponse.



Réponse :

- Méthode : Kruskal
- Démarche

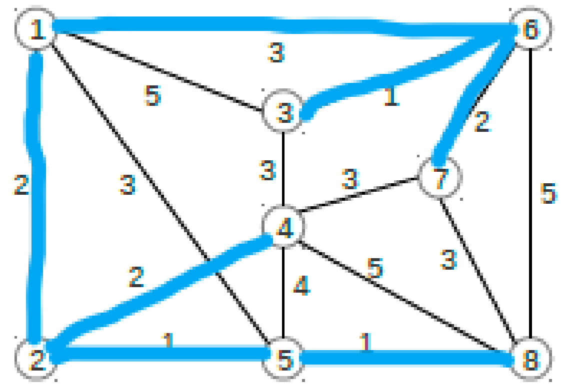
1. Tri les arcs en ordre croissant de coût

2. Construction de l'arbre par ajout itératif d'arcs. À cet effet, il faut parcourir la liste triée du haut vers le bas en ne sélectionnant que les arcs qui n'ajoutent pas de cycle dans l'arbre en construction. Arrêter après l'ajout de (n-1) = 7

À titre illustratif, les arcs non retenus sont barrés.

arcs, avec n = 8 le nombre de sommets dans le graphe initial.

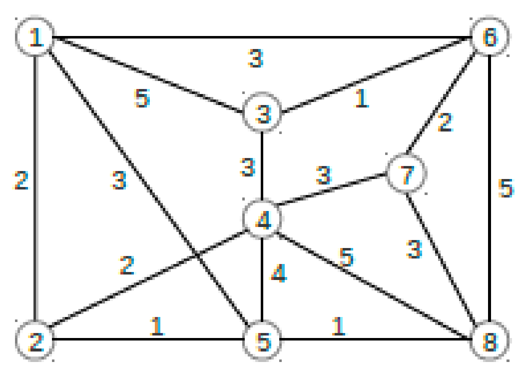
Arcs	Coût
2-5	1
5-8	1
3-6	1
1-2	2
2-4	2
6-7	2
1-5	3
1-6	3
4-7	3
3-4	3
7-8	3
4-5	4
1-3	5
6-8	5
4-8	5



Arcs	Coût
2-5	1
5-8	1
3-6	1
1-2	2
2-4	2
6-7	2
~~1-5~~	~~3~~
1-6	3
~~4-7~~	~~3~~
~~3-4~~	~~3~~
~~7-8~~	~~3~~
~~4-5~~	~~4~~
~~1-3~~	~~5~~
~~6-8~~	~~5~~
~~4-8~~	~~5~~

<u>Question 4</u> (6 points)

En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminez le plus court chemin, du sommet 2 vers tous les autres sommets. Montrez toutes les étapes de votre réponse.

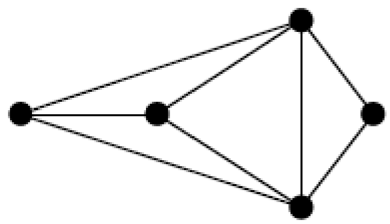


<u>Solution</u>

i	S	2	1	3	4	5	6	7	8
0	-	0	∞ ()	∞ ()	∞ ()	∞ ()	∞ ()	∞ ()	∞ ()
1	{2}	-	2 (2-1)	∞ ()	2 (2-4)	1 (2-5)	∞ ()	∞ ()	∞ ()
2	{2, 5}	-	2 (2-1)	∞ ()	2 (2-4)	-	∞ ()	∞ ()	2 (2-5-8)
3	{2, 5, 1}	-	-	7 (2-1-3)	2 (2-4)	-	5 (2-1-6)	∞ ()	2 (2-5-8)
4	{2, 5, 1, 4}	-	-	5 (2-4-3)	-	-	5 (2-1-6)	5 (2-4-7)	2 (2-5-8)
5	{2, 5, 1, 4, 8}	-	-	5 (2-4-3)	-	-	5 (2-1-6)	5 (2-4-7)	-
6	{2, 5, 1, 4, 8, 3}	-	-	-	-	-	5 (2-1-6)	5 (2-4-7)	-
7	{2, 5, 1, 4, 8, 3, 6}	-	-	-	-	-	-	5 (2-4-7)	-
8	{2, 5, 1, 4, 8, 3, 6, 7}	0	2 (2-1)	5 (2-4-3)	2 (2-4)	1 (2-5)	5 (2-1-6)	5 (2-4-7)	2 (2-5-8)

Question 5 (**2 points)**

Un facteur désire faire sa tournée sans passer deux fois dans la même rue. Est-ce possible si les rues sont représentées par les arcs du graphe ci-dessous et les nœuds les intersections ? Justifiez votre réponse.



Réponse :

Faire la tournée revient à chercher soit un parcours eulérien, si le facteur ne revient pas au point de départ, soit un cycle eulérien si le facteur doit revenir au point de départ. Dans le premier cas, il faut exactement deux sommets de degrés impairs. Dans le second cas, tous les sommets doivent être de degrés pairs.

Le graphe présente exactement deux sommets de degrés impairs. Il contient alors un parcours eulérien. Il est donc possible de faire la tournée sans passer deux fois dans la même rue et sans revenir au point de départ.