POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 13 : MODÉLISATION COMPUTATIONNELLE

SOLUTIONNAIRE

H2024

Exercice 1

Démontrez que le langage $L = \{0^{n!} \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas régulier.

Solution :

Raisonnons par l'absurde et supposons que L soit régulier. Selon le lemme de pompage, il existe un entier p tel que tout mot w dans L de longueur au moins p peut être décomposé en $w = xyz$, avec les conditions suivantes :

- $|xy| \leq p$,
- $|y| > 0$,
- Pour tout $i \geq 0$, $xy^i z \in L$.

Choisissons $w = 0^{p!}$, qui est clairement dans L car $p!$ est le factoriel de p. D'après le lemme, w peut être décomposé en xyz où $|xy| \leq p$ et $|y| > 0$. Considérons le cas où $i = 0$, ce qui donne le mot $xz = 0^{p!-|y|}$.

Pour que xz soit dans L, $p! - |y|$ doit être le factoriel d'un entier. Cependant, retirer un nombre non nul $|y|$ (avec $1 \leq |y| \leq p$) de $p!$ ne peut pas résulter en un autre factoriel. En effet, la différence entre $p!$ et tout autre factoriel inférieur est toujours supérieure à p lorsque $p \geq 2$.

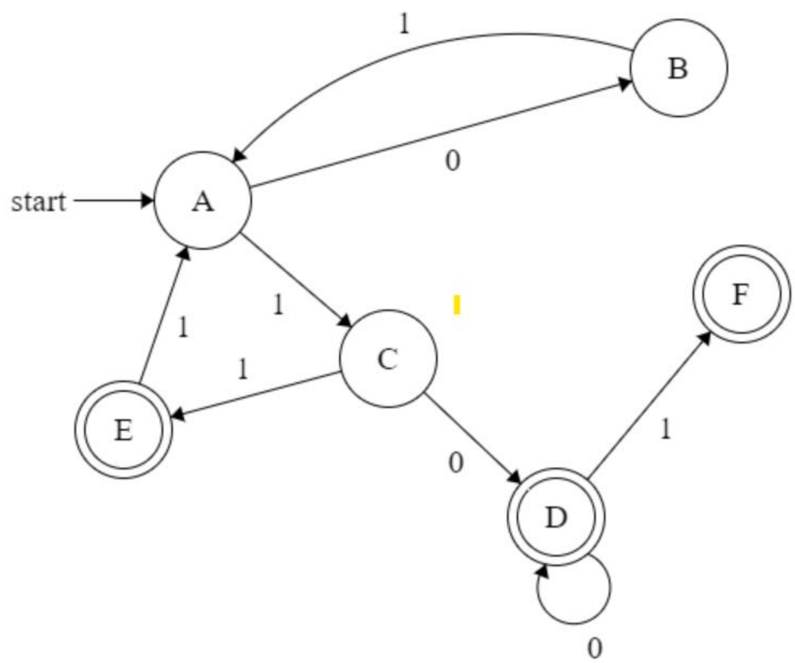
Par conséquent, $xz \notin L$, ce qui contredit le lemme de pompage. Ainsi, notre hypothèse initiale que L est régulier doit être fausse.

Conclusion : Le langage L n'est pas régulier.

Exercice 2

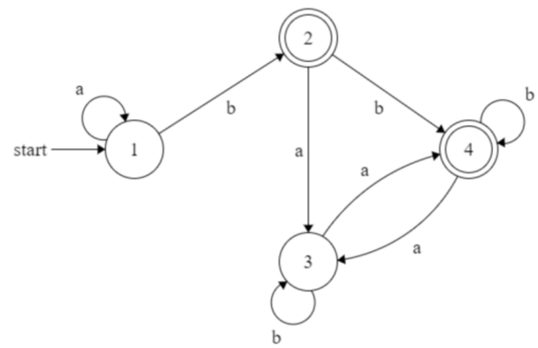
Construisez un automate fini reconnaissant l’expression régulière $(01+111)^{*}10^{*}(0+1)$.

Réponse



Exercice 3

a) En utilisant le lemme d'Arden, trouvez le langage reconnu par la machine à états finis suivante. Présentez toutes les étapes de votre démarche.



Réponse

Soit X_1, X_2, X_3 *et* X_4 les étiquettes associées aux états 1,2,3,4. Nous obtenons le système d'équation suivant :

$$
\begin{aligned}
X_1 &= aX_1 + bX_2 \\
X_2 &= aX_3 + bX_4 + \lambda \\
X_3 &= aX_4 + bX_3 \\
X_4 &= aX_3 + bX_4 + \lambda
\end{aligned}
$$

On applique une première fois le lemme d'Arden sur X_3 :

$$X_3 = bX_3 + aX_4 = b^*(aX_4) = b^*aX_4$$

On remplace ensuite X_3 dans la dernière équation et on applique le lemme d'Arden :

$$
\begin{aligned}
X_4 &= aX_3 + bX_4 + \\
&= (ab^*a + b)X_4 + \lambda \\
&= (ab^*a + b)^*
\end{aligned}
$$

On remplace la valeur de X_4 dans la troisième équation :

$$X_3 = b^*aX_4 = b^*a(ab^*a + b)^*$$

On remplace X_3 *et* X_4 dans l'équation 2 :

$$X_2 = aX_3 + bX_4 + \lambda$$

$$= ab^*a(ab^*a+b)^* + b(ab^*a+b)^* + \lambda$$

Finalement, on remplace X_2 par la valeur trouvée dans la première équation et on applique le lemme d'Arden :

$$\begin{aligned} X_1 &= aX_1 + bX_2 \\ &= aX_1 + b(ab^*a(ab^*a+b)^* + b(ab^*a+b)^* + \lambda) \\ &= a^*b(ab^*a(ab^*a+b)^* + b(ab^*a+b)^* + \lambda) \\ &= a^*b\ ab^*a(ab^*a+b)^* + a^*bb(ab^*a+b)^* + a^*b \end{aligned}$$

Ainsi, le langage reconnu par cette machine à état est :

$$a^*b\ ab^*a(ab^*a+b)^* + a^*bb(ab^*a+b)^* + a^*b$$

b) Donnez la grammaire ***G*** qui génère le langage reconnu par l'automate en a. Vous devez préciser l'alphabet ***V***, l'ensemble des symboles terminaux ***T***, l'axiome ***S*** et l'ensemble des règles de production ***P.***

Réponse

Soit les symboles non terminaux associés aux états comme suit :

- État 1 : Symbole non terminal S (axiome de la grammaire)
- État 2 : Symbole non terminal A
- État 3 : Symbole non terminal B
- État 4 : Symbole non terminal C

Nous avons les ensembles suivants :

$\boldsymbol{V} = \{a, b, S, A, B, C\}$

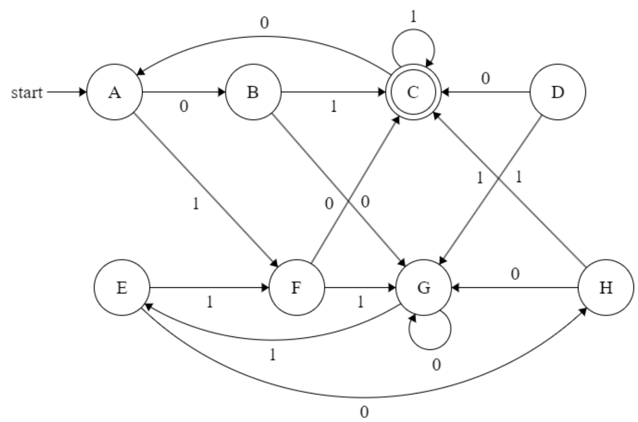
$\boldsymbol{T} = \{a, b\}$

Les productions de **P** sont :

$$\begin{aligned} S &\to aS|bA|b \\ A &\to aB|bC|b \\ B &\to aC|bB|a \\ C &\to aB|bC|b \end{aligned}$$

Exercice 4

Minimisez l’automate ci-dessous. Donnez la table d’états-transition en précisant les états finaux et construisez ensuite l’automate que vous proposez. Présentez toutes les étapes de votre démarche.



Réponse

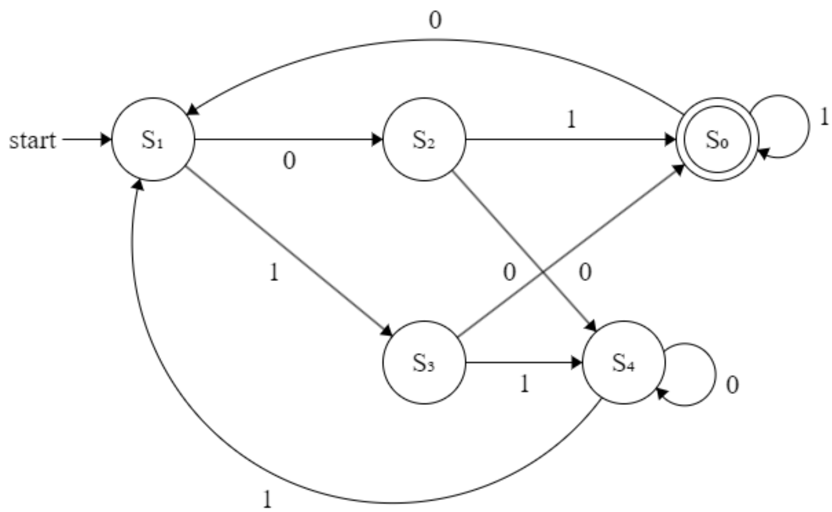
Nous présentons les différentes classes d’équivalence à chaque itération :

1. $S_0 = \{C\}, S_1 = \{A, B, D, E, F, G, H\}$
2. $S_0 = \{C\}, S_1 = \{A, E, G\}, S_2 = \{B, H\}, S_3 = \{D, F\}$
3. $S_0 = \{C\}, S_1 = \{A, E\}, S_2 = \{B, H\}, S_3 = \{D, F\}, S_4 = \{G\}$

Ainsi, nous avons la table d’états-transition de l’automate minimisé :

États	**Entrée**	
	0	1
$\leftarrow \boldsymbol{S_0}$	S_1	S_0
$\rightarrow \boldsymbol{S_1}$	S_2	S_3
$\boldsymbol{S_2}$	S_4	S_0
$\boldsymbol{S_3}$	S_0	S_4
$\boldsymbol{S_4}$	S_4	S_1

Nous avons donc l’automate minimisé :



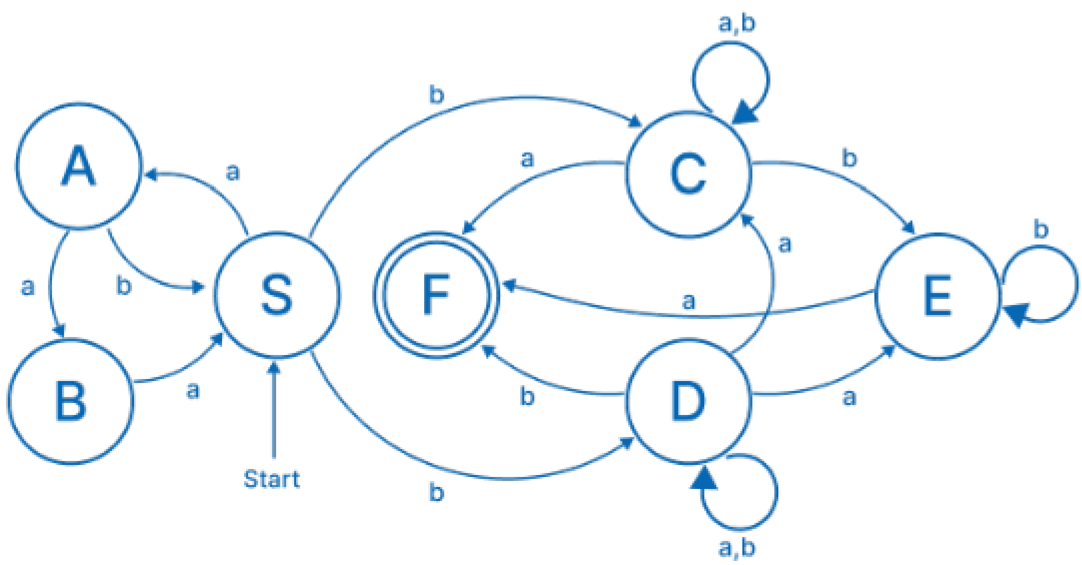
Exercice 5

On considère le vocabulaire $V = \{a, b, S, A, B, C, D, E\}$, l'ensemble des symboles terminaux $T = \{a, b\}$ et l'axiome S. Soit la grammaire $G = (V, T, S, P)$ avec P l'ensemble des règles de production suivante :

$$
\begin{aligned}
&S \to aA|bC|bD \\
&A \to aB|bS \\
&B \to aS \\
&C \to aC|bC|bE|a \\
&D \to aC|aD|aE|bD|b \\
&E \to bE|a
\end{aligned}
$$

Construisez l'automate M tel que $L(G) = L(M)$.

Réponse



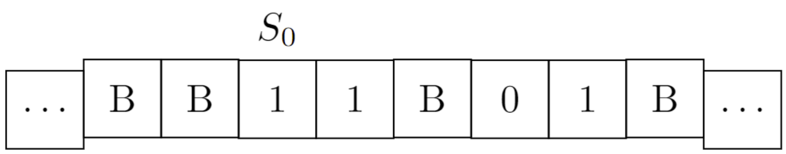
Exercice 6

Soit T la machine de Turing dont l'état initial est S_0 et définie par les 5-tuples :

$$(S_0, 0, S_1, 1, R) \quad (S_0, 1, S_1, 0, R) \quad (S_0, B, S_1, 0, R)$$
$$(S_1, 0, S_2, 1, L) \quad (S_1, 1, S_1, 0, R) \quad (S_1, B, S_2, 0, L)$$

En considérant le ruban initial suivant, déterminez le ruban final lorsque T s'arrête. On suppose que T commence en position initiale.

Ruban initial:



Solution :