POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 4 : ENSEMBLES ET FONCTIONS

H2024

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1 :

Déterminez, dans chacun des cas suivants, si la fonction donnée est une fonction injective, une fonction surjective et/ou une fonction bijective. Justifiez votre réponse.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$

Solution :

Fonction injective : Oui.

Tous les éléments distincts du domaine n'ont pas la même image. Effectivement, montrons que si $f(a) = f(b)$, alors $a = b$:

$$\begin{gathered} f(a) = f(b) \\ \Rightarrow 2a + 1 = 2b + 1 \\ \Rightarrow 2a = 2b \\ \Rightarrow a = b \end{gathered}$$

Ainsi, nous avons montré que si $f(a) = f(b)$, alors $a = b$, la fonction est donc injective.

Fonction surjective : Oui.

Tous les éléments du codomaine sont couverts. Effectivement, pour n'importe quel élément de codomaine y, il est couvert par l'élément : $x = \frac{y-1}{2}$ du domaine.

Fonction Bijective : Oui.

Comme la fonction est injective et surjective, alors elle est bijective.

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{(x^2+1)}{(x^2+2)}$

Solution :

Fonction injective : Non

La fonction est paire, nous avons $f(x) = f(-x)$. Ainsi, il existe des éléments distincts du domaine qui ont la même image.

Fonction surjective : Non

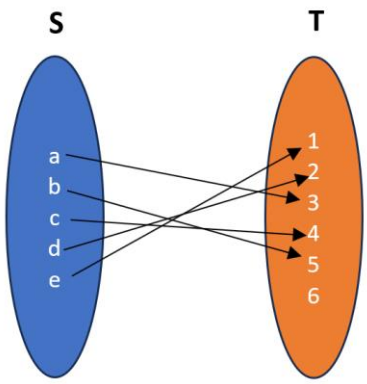
La fonction est toujours positive, elle ne couvre donc pas l'ensemble du codomaine.

Fonction Bijective : Non.

Comme la fonction n'est ni injective ni surjective, alors elle n'est pas bijective.

c) Soit le domaine $\boldsymbol{S} = \{a, b, c, d, e\}$ et le codomaine $\boldsymbol{T} = \{1,2,3,4,5,6\}$. Nous avons la fonction $f = \{(a, 3), (b, 5), (c, 4), (d, 2), (e, 1)\}$ définie de $\boldsymbol{S} \rightarrow \boldsymbol{T}$.

Solution :



Fonction injective : Oui

Les éléments du domaine **S** ont chacun une image distincte des autres éléments de **S.**

Fonction surjective : Non

L'élément 6 du codomaine **T** n'a pas d'antécédent dans **S**.

Fonction Bijective : Non.

Comme la fonction n'est pas surjective, alors elle n'est pas bijective.

Exercice 2 :

Considérons les ensembles suivants :

- $A = \{a, b, c, d, e\}$
- $B = \{1,2\}$
- $C = \{1,2, a, b, c\}$

a) Définissez par énumération l'ensemble $P(A \cap C)$.

Solution :

$A \cap C = \{a, b, c\}$

Ainsi, $P(A \cap C) = \{ \{\} , \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

b) Définissez par énumération l'ensemble $P(P(B))$.

Solution :

$P(B) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

Ainsi, $P(P(B)) = \{$

$$\{\},$$
$$\{\{\}\}, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{1,2\}\},$$
$$\{\{\}, \{1\}\}, \{\{\}, \{2\}\}, \{\{\}, \{1,2\}\}\{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1\}, \{1,2\}\}, \{\{2\}, \{1,2\}\},$$
$$\{\{\}, \{1\}, \{2\}\}, \{\{\}, \{1\}, \{1,2\}\}, \{\{\}, \{2\}, \{1,2\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}\},$$
$$\{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

$\}$

c) Quel serait le nombre d'éléments présents dans l'ensemble $P(P(A))$? Plus généralement, quel est le nombre d'éléments pour un ensemble de la forme $P(P(\ldots P(S))\ldots)$ où l'on réalise m puissances ?

Solution :

$|P(A)| = 2^{|A|} = 2^5 = 32$

$|P(P(A))| = 2^{|P(A)|} = 2^{32} = 4294967296$

Plus généralement :

$\left|P\left(P\left(\ldots P(S)\right)\ldots\right)\right| = 2^{2^{\cdot^{|S|}}}$, où l'on réalise m puissances.

Exercice 3 :

a) Soit A, B et C, trois sous-ensembles d'un ensemble E. Montrez que

$$(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A$$

Solution :

Soit x est un élément de E

$x \in (B - A) \cup (C - A)$

$\Leftrightarrow [x \in (B - A)] \vee [x \in (C - A)]$ Déf. Union

$\Leftrightarrow [x \in B \wedge x \notin A] \vee [x \in C \wedge x \notin A]$ Déf. Différence

$\Leftrightarrow \big[x \in B \vee [x \in C \wedge x \notin A]\big] \wedge \big[x \notin A \vee [x \in C \wedge x \notin A]\big]$ Distributivité

$\Leftrightarrow [x \in B \vee x \in C] \wedge [x \in B \vee x \notin A] \wedge [x \notin A \vee x \in C] \wedge [x \notin A \vee x \notin A]$ Distributivité

$\Leftrightarrow [x \in B \vee x \in C] \wedge [x \in B \vee x \notin A] \wedge [x \notin A \vee x \in C] \wedge [x \notin A]$ Idempotence

$\Leftrightarrow [x \in B \vee x \in C] \wedge [x \in B \vee x \notin A] \wedge [x \notin A]$ Absorption

$\Leftrightarrow [\mathrm{x} \in \mathrm{B} \vee \mathrm{x} \in \mathrm{C}] \wedge [x \notin A]$ Absorption

$\Leftrightarrow [x \in (B \cup C)] \wedge [x \notin A]$ Déf. Union

$\Leftrightarrow [x \in (B \cup C) - A]$ Déf. Différence

Ainsi, $(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A.$

CQFD

b) Soit A et B trois sous-ensembles d'un ensemble E. On définit l'opérateur suivant :

$$A \star B = (A - B) \cup (B - A)$$

Montrez que $A \star B = \overline{A} \star \overline{B}$

Solution :

Soit x un élément de E.

$x \in \overline{A} \star \overline{B}$	$\Leftrightarrow (x \in (\overline{A} - \overline{B})) \vee (x \in (\overline{B} - \overline{A}))$	Déf. Union
	$\Leftrightarrow [(x \in \overline{A}) \wedge (x \notin \overline{B})] \vee [(x \in \overline{B}) \wedge (x \notin \overline{A})]$	Déf. Différence
	$\Leftrightarrow [(x \notin A) \wedge (x \in B)] \vee [(x \notin B) \wedge (x \in A)]$	Déf. Complément
	$\Leftrightarrow [(x \in B) \wedge (x \notin A)] \vee [(x \in A) \wedge (x \notin B)]$	Commutativité
	$\Leftrightarrow (x \in (B - A)) \vee (x \in (A - B))$	Déf. Différence
	$\Leftrightarrow x \in ((B - A) \cup (A - B))$	Déf. Union
	$\Leftrightarrow x \in ((A - B) \cup (B - A))$	Commutativité
	$\Leftrightarrow x \in A \star B$	Déf. De l'opérateur $\star$

D'où $A \star B = \overline{A} \star \overline{B}$

CQFD

Exercice 4 :

Soit A, B et C trois sous-ensembles d’un ensemble E. Simplifiez chacune des expressions. Justifiez toutes les étapes de votre réponse.

a) $\left(\overline{A \cup B}\right) \cap \left(\overline{B \cup C}\right) \cap \left(\overline{\overline{A} \cup C}\right)$

Solution :

$$
\begin{aligned}
\left(\overline{A \cup B}\right) \cap \left(\overline{B \cup C}\right) \cap \left(\overline{\overline{A} \cup C}\right) &= \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cap \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right) \cap \left(\overline{\overline{A}} \cap \overline{C}\right) \\
&= \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cap \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right) \cap \left(A \cap \overline{C}\right) \\
&= \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap A \cap \overline{C} \\
&= \overline{A} \cap A \cap \overline{B} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{C} \\
&= \left(\overline{A} \cap A\right) \cap \overline{B} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{C} \\
&= \emptyset \cap \overline{B} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{C} \\
&= \emptyset
\end{aligned}
$$

Loi de De Morgan
Loi de complémentation
Loi d’associativité
Loi de commutativité
Loi d’associativité
Loi complémentaire
Domination

b) $(A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)$

Solution :

$$
\begin{aligned}
(A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) &= \left(A \cup \left(A \cap \overline{B}\right)\right) \cap \left(B \cup \left(A \cap \overline{B}\right)\right) \\
&= (A \cup A) \cap \left(A \cup \overline{B}\right) \cap (B \cup A) \cap \left(B \cup \overline{B}\right) \\
&= A \cap \left(A \cup \overline{B}\right) \cap (B \cup A) \cap \left(B \cup \overline{B}\right) \\
&= A \cap \left(A \cup \overline{B}\right) \cap (B \cup A) \cap E \\
&= A \cap (B \cup A) \cap E \\
&= A \cap E \\
&= A
\end{aligned}
$$

Distributivité
Distributivité
Idempotence
Loi complémentaire
Lois de l’absorption
Lois de l’absorption
Identité

c) $\left(\overline{\overline{A} \cap C}\right) \cup \left(\overline{A \cap B}\right)$

Solution :

$$
\begin{aligned}
\left(\overline{\overline{A} \cap C}\right) \cup \left(\overline{A \cap B}\right) &= \left(\overline{\overline{A}} \cup \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) && \text{Loi de De Morgan} \\
&= \left(A \cup \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) && \text{Loi de complémentation} \\
&= A \cup \overline{C} \cup \overline{A} \cup \overline{B} && \text{Loi d'associativité} \\
&= A \cup \overline{A} \cup \overline{C} \cup \overline{B} && \text{Loi de commutativité} \\
&= (A \cup \overline{A}) \cup \overline{C} \cup \overline{B} && \text{Loi d'associativité} \\
&= E \cup \overline{C} \cup \overline{B} && \text{Loi complémentaire} \\
&= E && \text{Domination}
\end{aligned}
$$

Exercice 5

Soit la fonction h :

$$h: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$
$$h(x,y) = \begin{cases} x \cdot y, & x \leq y \\ x - y, & x > y \end{cases}$$

a) Déterminez si h telle que définie est injective. Justifiez votre réponse.

Solution :

Non injective, car par exemple pour $(x_1,y_1) = (2,5)$ et $(x_2,y_2) = (1,10)$

$x_1 \leq y_1$, donc $h(x_1, y_1) = 2 \cdot 5 = 10$
et $x_2 \leq y_2$, donc $h(x_2, y_2) = 1 \cdot 10 = 10$

Il existe donc deux éléments distincts (x_1,y_1) et (x_2,y_2) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ qui ont pour images $h(x_1,y_1)$, $h(x_2,y_2)$ devaleurs identiques. Ainsi, la fonction h n'est pas injective lorsque $x \leq y$.

Et par exemple pour $(x_1,y_1) = (20,10)$ et $(x_2,y_2) = (40,30)$

$x_1 > y_1$, donc $h(x_1, y_1) = 20 - 10 = 10$
et $x_2 > y_2$, donc $h(x_2, y_2) = 40 - 30 = 10$

Il existe donc deux éléments distincts (x_1,y_1) et (x_2,y_2) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ qui ont pour images $h(x_1,y_1)$, $h(x_2,y_2)$ devaleurs identiques. Ainsi, la fonction h n'est pas injective lorsque $x > y$.

Ainsi, la fonction h n'est donc pas injective.

b) Déterminez si h telle que définie est surjective. Justifiez votre réponse.

Solution :

Lorsque $x \leq y$,
$\forall z \in \mathbb{Z}, \exists(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, z = x \cdot y = h(x, y)$
Pour z = 20, il est possible de trouver plusieurs couples (x,y) tel que z = x.y = h(x,y).Par exemple, (1, 20), (2, 10) et (4, 5).
Donc, h est surjective lorsque $x \leq y$.

Lorsque $x > y$,
$\forall z \in N*, \exists(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, z = x - y = h(x, y)$
Effectivement, l'expression z=x-y avec la condition x > y couvre seulement les naturels plus grands que 0. En effet, nous avons l'expression x=y-z. Nous avons x>y seulement pour z>0. Ainsi, la fonction n'est pas surjective pour x>y.

La fonction étant surjective pour x ≤ y, le codomaine est déjà entièrement couvert avec la condition x ≤ y. Ainsi, même si la fonction n'est pas surjective pour x>y, la fonction h est tout de même surjective.

Exercice 6

Considérons les ensembles suivants :

- $A = \{1,2,3,4,5,6\}$
- $B = \{2,4,6\}$
- $C = \{1,2,3\}$
- $D = \{7,8,9\}$

Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies, fausses ou vides de sens. Justifiez vos réponses.

a) $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}.$
Faux : $\mathbf{1} \in \boldsymbol{A}$ mais $\mathbf{1} \notin \boldsymbol{B}.$

b) $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}.$
Vrai : Chaque élément de B est élément de A sans que B soit égal à A.

c) $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{C}.$
Faux : L'ensemble $\{2,4,6\}$ n'est pas inclus dans C.

d) $\emptyset \in \boldsymbol{A}.$
Faux : L'ensemble $\emptyset$ n'est pas inclus dans A.

e) $\emptyset \subset \boldsymbol{A}.$

Vrai : L'ensemble vide est un sous-ensemble de tous les autres ensembles.

f) $\boldsymbol{A} < \boldsymbol{D}.$

Vide de sens : Un ensemble ne peut pas être plus petit qu'un autre ensemble. L'expression $|A| < |D|$ permettrait de comparer la taille des deux ensembles

g) $\mathbf{3} \in \boldsymbol{C}.$

Vrai : L'ensemble C contient l'élément 3.

h) $\mathbf{3} \subset \boldsymbol{C}.$

Vide de sens : 3 n'est pas un ensemble, il ne peut donc pas être sous ensemble d'un autre ensemble.

i) $\{\mathbf{3}\} \subset \boldsymbol{C}.$

Vrai : Chaque élément de {3} est élément de C sans que {3} soit égal à C.

Exercice 7

Soit une suite géométrique $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On donne $V_5 = \frac{-243}{4}$ et $V_7 = \frac{-2187}{16}$. Exprimez V_n en fonction de n :

Solution :

Nous avons :

$$V_n = V_0 r^n$$

Nous devons déterminer la raison ainsi que le premier terme de la suite.
Commençons par trouver la raison. Nous avons :

(I) $\quad V_5 = \frac{-243}{4} = V_0 r^5$

(II) $\quad V_7 = \frac{-2187}{16} = V_0 r^7$

Nous obtenons :

$$\frac{V_7}{V_5} = \frac{V_0 r^7}{V_0 r^5}$$
$$\Rightarrow \frac{9}{4} = r^2$$
$$\Rightarrow r = \pm\frac{3}{2}$$

Ainsi, nous avons deux réponses possibles (r positif et r négatif) :

$$V_5 = V_0 r^5 \qquad\qquad V_5 = V_0 r^5$$
$$\Rightarrow V_0 = \frac{V_5}{r^5} \qquad\qquad \Rightarrow V_0 = \frac{V_5}{r^5}$$
$$\Rightarrow V_0 = -8 \qquad\qquad \Rightarrow V_0 = 8$$

Nous obtenons ainsi deux réponses possibles :

$$V_n = -8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

ou

$$V_n = 8 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^n$$