POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

UNIVERSITÉ
D'INGÉNIERIE

LOG1810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 6 : ALGORITHMES ET ANALYSE DE COMPLEXITÉ

E2023

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1

La double sommation, également appelée somme double, est couramment utilisée en mathématiques, en informatique et dans nombreux autres domaines pour calculer des sommes de valeurs dans une matrice ou un tableau de données bidimensionnel.

Soit $n \geq 1$. Montrez que

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} 3i}{n+1} \in O(n^2)$$

Solution :

Commençons par simplifier l'expression $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} i$.

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} 3i = 3\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} i\right) = 3\sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{2} = \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{n}(j^2+j) = \frac{3}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j^2 + \sum_{j=1}^{n} j\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{6}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{n(n+1)\big((2n+1)+3\big)}{6}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{n(n+1)\cdot 2(n+2)}{6}\right)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{2}$$

$$= \frac{n^3+3n^2+2n}{2}$$

On a donc que :

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} 3i}{n+1} = \frac{n^3+3n^2+2n}{2n+2}$$

Approche 1 : Recherche de témoins

Par définition, si $\frac{n^3+3n^2+2n}{2n+2}$ est $O(n^2)$, alors il existe des constantes c et k telles que $n > k$ et $\frac{n^3+3n^2+2n}{2n+2} \leq c \cdot n^2$

Supposons que l'inégalité est vérifiée et trouvons les valeurs c et k.
On sait que pour $n > 0$, $2n+2 > 0$. On peut donc écrire successivement :

$$\frac{n^3+3n^2+2n}{2n+2} \leq c \cdot n^2 \Leftrightarrow n^3+3n^2+2n \leq c \cdot (2n+2)n^2$$
$$\Leftrightarrow n^3+3n^2+2n \leq 2c \cdot n^3 + 2c \cdot n^2$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq (2c-1)n^3 + (2c-3)n^2 - 2n$$

En posant $c = 1$, on a :

$$0 \leq (2c-1)n^3 + 3(2c-1)n^2 - 2n \Leftrightarrow 0 \leq n^3 - n^2 - 2n$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq n(n^2 - n - 2)$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq \underbrace{n}_{\text{(I.)}} \underbrace{(n+1)}_{\text{(II.)}} \underbrace{(n-2)}_{\text{(III.)}}$$

(I.) Lorsque $n \geq 2$, on peut déduire que $n \geq 0$.
(II.) Lorsque $n \geq 2$, on a $(n+1) \geq 3$ et on déduit que $(n+1) \geq 0$.
(III.) Lorsque $n \geq 2$, on a $(n-2) \geq 0$.

Ainsi lorsque $n \geq 2$, $0 \leq n(n+1)(n-2)$ est vérifiée.

On peut donc considérer que lorsque $c = 1$ et $k = 1$, on a pour $n > k$:

$$\frac{n^3+3n^2+2n}{2n+2} \leq c \cdot n^2$$

Approche 2 : Utilisation des combinaisons de fonctions en grand-O

Alternativement, selon le théorème sur les combinaisons de fonctions en Grand-O, on peut manipuler l'expression $\frac{n^3+3n^2+2n}{2n+2}$ en utilisant la propriété $O\left(\frac{h}{f}\right) = \frac{O(h)}{O(f)}$. Nous avons un polynôme de degré 3 au numérateur $(n^3 + 3n^2 + 2n)$ et un polynôme de degré 1 au dénominateur $(2n + 2)$. Le rapport des deux polynômes nous donne $O(n^2)$.

D'où

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} 3i}{n+1} \in O(n^2)$$

CQFD

Exercice 2

Donnez la meilleure évaluation possible du comportement asymptotique de chacune des fonctions suivantes, en utilisant le Grand-Omega.

Exemple : Si vous savez qu'une fonction est à la fois $\Omega(n^{2.5})$ et $\Omega(n^2)$, alors $\Omega(n^{2.5})$ est une meilleure évaluation du comportement asymptotique que $\Omega(n^2)$.

Il n'est pas nécessaire de justifier vos réponses pour cette question.

a) $[(n!)! + 2^n][n^2 + 2]$

Solution :

D'une part, $[(n!)! + 2^n]$ est $\Omega\big((n!)!\big)$
D'autre part, $[n^2 + 2]$ est $\Omega(n^2)$
$[(n!)! + 2^n][n^2 + 2]$ est donc $\Omega\left(n^2\big((n!)!\big)\right)$

b) $[n^3 + n\log n][n^2 + 3]$

Solution :

D'une part, $[n^3 + n\, log\, n]$ est $\Omega(n^3)$
D'autre part, $[n^2 + 3]$ est $\Omega(n^2)$
$[n^3 + n\, log\, n][n^2 + 3]$ est donc $\Omega(n^5)$

c) $[n! + 5^n][5!\log(\log(n^n)) + 2023]$

Solution :

D'une part, $[n! + 5^n]$ est $\Omega(n!)$
D'autre part, $5!\, log(log(n^n)) = 5!\log(n\log n) = 5!\log n + 5!\log(\log n)$
Et, $5!\log n + 5!\log(\log n)$ est $\Omega(\log n)$
Ainsi, $[n! + 5^n][5!\, log(log(n^n))]$ est donc $\Omega(n!\log n)$

d) $[n^n + n \cdot 2^n + 49^n][n^2 + 49]$

Solution :

D'une part, $[n^n + n \cdot 2^n + 49^n]$ est $\Omega(n^n)$
D'autre part, $[n^2 + 49]$ est $\Omega(n^2)$
$[n^n + n \cdot 2^n + 49^n][n^2 + 49]$ est donc $\Omega(n^{n+2})$

e) $[n^4 + n^3\log n][n^4\log n + 1] + [n^4 + \log(n^3 + 1)][n^4 + 1]$

Solution :

Dans un premier temps,
- $[n^4 + n^3\, log\, n]$ est $\Omega(n^4)$
- $[n^4\, log\, n + 1]$ est $\Omega(n^4\log n)$

$[n^4 + n^3\, log\, n][n^4\, log\, n + 1]$ est donc $\Omega(n^8\log n)$

Dans un deuxième temps,

- $[n^4 + log(n^3 + 1)]$ est $\Omega(n^4)$
- $[n^4 + 1]$ est $\Omega(n^4)$

$[n^4 + log(n^3 + 1)][n^4 + 1]$ est donc $\Omega(n^8)$

Et enfin, $[n^4 + n^3 \log n][n^4 \log n + 1] + [n^4 + \log(n^3 + 1)][n^4 + 1]$ est donc $\Omega(n^8 \log n)$

Exercice 3

Soit $n \geq 1$. Montrez que n^3 n'est pas $O(n^2 + 4n + 17)$.

Solution :

Raisonnons par l'absurde.
Supposons que n^3 est $O(n^2 + 4n + 17)$.
Par définition, il existe donc des constantes c et k telles que $n > k$ et $n^3 \leq c(n^2 + 4n + 1)$.
Si on divise les deux côtés de l'inégalité par n^3(puisque n^3 est positif pour $n \geq 1$), on obtient :

$$1 \leq c\left(\frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{17}{n^3}\right)$$

De plus lorsque $n \geq 1$, $\frac{4}{n^2} \leq \frac{4}{n}$ et $\frac{17}{n^3} \leq \frac{17}{n}$.

On peut déduire que :

$$1 \leq c\left(\frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{17}{n^3}\right) \leq c\left(\frac{1}{n} + \frac{4}{n} + \frac{17}{n}\right) \leq c \cdot \frac{22}{n}$$

Or lorsque $n = 23c$, l'inégalité devient :

$$1 \leq c \cdot \frac{22}{23c} \leq \frac{22}{23} \qquad \text{, car c} > 0$$

Cependant, on obtient $1 \leq \frac{22}{23}$ ce qui est absurde puisque cette inégalité est fausse.
Ainsi, il y a une contradiction. Il faut donc, n^3 n'est pas $O(n^2 + 4n + 17)$.
CQFD

Exercice 4 (Facultatif)

Soit $n \geq 1$. Montrez que $n^{98} + n^{99}$ est $\mathbf{\Theta}(n^{99})$, sans utiliser la règle sur les polynômes.

Solution :

Il suffit de trouver les témoins C_1, C_2 et k tels que $C_1 n^{99} \leq n^{98} + n^{99} \leq C_2 n^{99}$ pour $n > k$.
Si on divise tous les termes par n^{99}(puisque n^{99} est positif pour $n \geq 1$), on obtient :

$$C_1 \leq \frac{1}{n} + 1 \leq C_2$$

Si on choisit $k = 1$, on a

$$1 \leq \frac{1}{n} + 1 \leq 2$$

On peut donc alors choisir par exemple $C_1 = 0{,}5$ et $C_2 = 2{,}5$.
En somme, en choisissant $C_1 = 0{,}5$ et $C_2 = 2{,}5$ et $k = 1$, on a :

$$n^{98} + n^{99} \text{ est } \mathbf{\Theta}(n^{99})$$

CQFD

Exercice 5 (Facultatif)

Donnez une évaluation de la complexité en Grand-Thêta de $2^{n+5} + 5^{n-1}$. Justifiez votre réponse.

Solution :

$2^{n+5} + 5^{n-1} \in \mathbf{\Theta}(5^n)$

D'une part, montrons que $2^{n+5} + 5^{n-1} \in \mathbf{O}(5^n)$.
$2^{n+5} \in \boldsymbol{O}(2^n)$
$5^{n-1} \in \boldsymbol{O}(5^n)$
$2^{n+5} + 5^{n-1} \in \boldsymbol{O}(\max(2^n, 5^n))$
$2^{n+5} + 5^{n-1} \in \boldsymbol{O}(5^n)$

D'autre part, montrons que $5^n \in \boldsymbol{O}(2^{n+5} + 5^{n-1})$.
Cherchons c et k tel que $5^n \leq c\ (2^{n+5} + 5^{n-1})$ pour $n \geq k$.
En prenant $c = 5$, on a :

$$\begin{aligned} c \cdot (5^{n+5} + 5^{n-1}) &= 5 \cdot (2^{n+5} + 5^{n-1}) \\ &= 5 \cdot 2^{n+5} + 5^n \end{aligned}$$

On a donc $5^n \leq 5 \cdot 2^{n+5} + 5^n$ pour tout entier positif n.
À gauche et à droite de l'inégalité, on a bien 5^n.
Celui de droite est augmenté de $5 \cdot 2^{n+5}$, ce qui explique le sens de l'inégalité.
C'est-à-dire $5^n \leq c \cdot (2^{n+5} + 5^{n-1})$ pour $n \geq 0$.
En prenant $k = 1$ et $c = 1$, on a bien $5^n \leq c \cdot (2^{n+5} + 5^{n-1})$.
Ce qui permet de conclure que $5^n \in \boldsymbol{O}(2^{n+5} + 5^{n-1})$.

Exercice 6 (Facultatif)

La double factorielle $n!!$ est une extension de la factorielle standard $n!$ pour les nombres entiers positifs. Elle est utilisée dans différentes branches des mathématiques telles que la combinatoire, l'analyse et la théorie des nombres. Elle est définie comme suit :

$$n!! = \begin{cases} n \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 & , si\ n > 1\ et\ n\ est\ pair \\ n \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 & , si\ n > 1\ et\ n\ est\ impair \\ 1 & , si\ n = 0\ ou\ n = 1 \end{cases}$$

Par exemple, 0!! = 1, 1!! = 1, 2!! = 2, 3!! = 3 · 1 = 3, 4!! = 4 · 2 = 8, 5!! = 5 · 3 · 1 = 15.

Soit deux modules $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ de complexités respectives $\boldsymbol{\mathcal{A}} \in \boldsymbol{O}(\alpha(n))$ et $\boldsymbol{\mathcal{B}} \in \boldsymbol{O}(\beta(n))$ tel que :

$$\alpha(n) = \begin{cases} 10^n & , si\ n\ est\ pair \\ \log(n!!) & , si\ n\ est\ impair \end{cases} \qquad \beta(n) = \begin{cases} n^{10} & , si\ n\ est\ pair \\ \log(n^n) & , si\ n\ est\ impair \end{cases}$$

Déterminez la complexité lorsque les deux modules sont exécutés séquentiellement ($\boldsymbol{\mathcal{A}}$ suivi de $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ ou $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ suivi de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$). Justifiez votre réponse.

Solution :

Lorsque les deux modules sont exécutés séquentiellement, la complexité recherchée est celle de $\boldsymbol{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\mathcal{B}}$. En appliquant la règle de la somme, elle vaut :

$$\boldsymbol{O}(\max(\alpha(n), \beta(n))) = \begin{cases} \max(10^n, n^{10}) & , si\ n\ est\ pair \\ \max(\log(n!!), \log(n^n)) & , si\ n\ est\ impair \end{cases}$$

Soit

$$\boldsymbol{O}(\max(\alpha(n), \beta(n))) = \begin{cases} 10^n & , si\ n\ est\ pair \\ n \log n & , si\ n\ est\ impair \end{cases}$$