POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

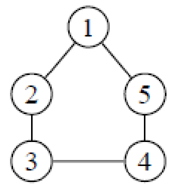
TD 10 : **GRAPHE**

É2022

SOLUTIONNAIRE

Exercice 1. On considère les graphes ci-dessous. Lesquels sont hamiltoniens ? Lesquels sont eulériens ? Justifiez vos réponses.

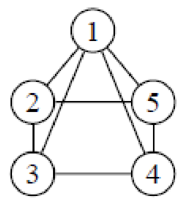
a. Graphe 1



Réponse :

- Graphe hamiltonien. Existence de cycle hamiltonien : 1-2-3-4-5-1
- Graphe eulérien. Tous les sommets sont de degrés pairs.

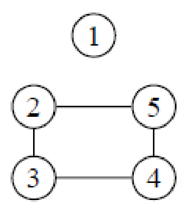
b. Graphe 2



Réponse :

- Graphe hamiltonien. Existence de cycle hamiltonien : 1-2-3-4-5-1
- Graphe non eulérien. Existence de sommets de degrés impairs. Exemples : 2, 5, 3, 4.

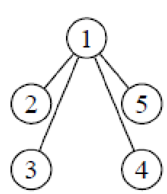
c. Graphe 3



Réponse :

- Graphe non hamiltonien. Existence d'un sommet isolé : 1.
- Graphe eulérien. Tous les sommets sont de degrés pairs.

d. Graphe 4

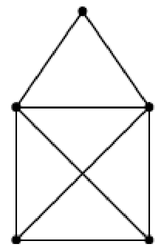


Réponse :

- Graphe non hamiltonien. Existence d'un sommet pendant. Exemples : 2, 5, 3, 4.
- Graphe non eulérien. Existence de sommets de degrés impairs. Exemples : 2, 5, 3, 4.

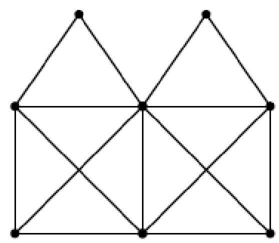
Exercice 2.
Pour chacun des graphes ci-dessous, est-il possible, sans lever le crayon, de tracer chaque arête exactement une fois ? Justifiez vos réponses.

a. Graphe G_1



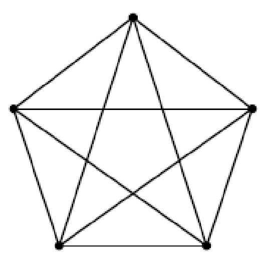
Réponse :
Oui, car le graphe possède une chaîne eulérienne. En effet, il contient exactement 2 sommets de degrés impairs.

b. Graphe G_2



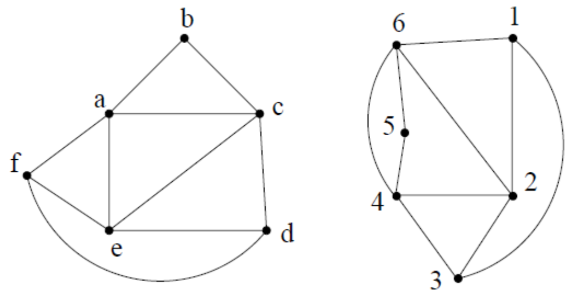
Réponse :
Non. Le graphe ne possède ni cycle eulérien, ni chaîne eulérienne. En effet, Il contient plus de deux sommets de degrés impairs.

c. Graphe G_3



Réponse :
Oui, car le graphe possède un cycle eulérien. En effet, tous les sommets sont de degrés pairs.

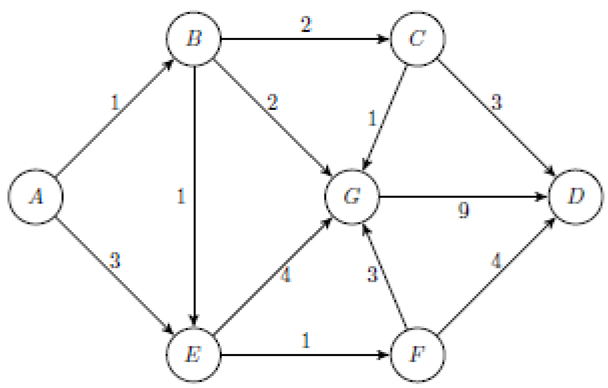
Exercice 3. Les graphes ci-dessous sont isomorphes. Donnez une fonction **α** qui transforme le graphe de gauche en celui de droite.



Réponse :

- α(a) = 4
- α(b) = 5
- α(c) = 6
- α(d) = 1
- α(e) = 2
- α(f) = 3

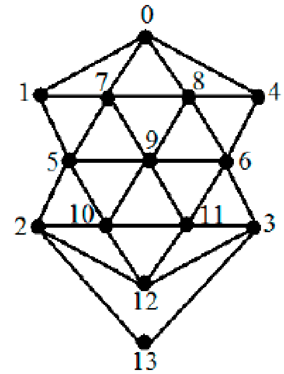
Exercice 4. Utilisez l'algorithme de Dijkstra pour calculer les parcours les plus courts du sommet de départ unique A vers tous les autres sommets. Spécifiez chacun des parcours et la distance pour atteindre chacun des sommets.



Réponse :
Les étapes et les calculs sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Itération	S	A	B	C	D	E	F	G
0	∅	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	{A}	-	1 (AB)	∞	∞	3 (AE)	∞	∞
2	{A, B}	-	-	3 (ABC)	∞	2 (ABE)	∞	3 (ABG)
3	{A, B, E}	-	-	3 (ABC)	∞	-	3 (ABEF)	3 (ABG)
4	{A, B, E, C}	-	-	-	6 (ABCD)	-	3 (ABEF)	3 (ABG)
5	{A, B, E, C, G}	-	-	-	6 (ABCD)	-	3 (ABEF)	-
6	{A, B, E, C, G, F}	-	-	-	6 (ABCD)	-	-	-
7	{A, B, E, C, G, F, D}	-	-	-	-	-	-	-
Conclusion		-	1 (AB)	3 (ABC)	6 (ABCD)	2 (ABE)	3 (ABEF)	3 (ABG)

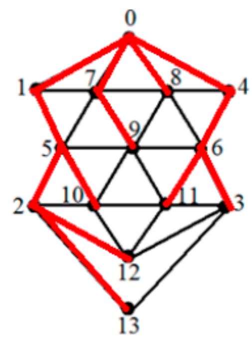
Exercice 5. On considère le graphe suivant.



a. À partir du sommet 0, donnez un parcours en largeur du graphe. Les sommets doivent être considérés dans l'ordre croissant de leur numéro.

Réponse :

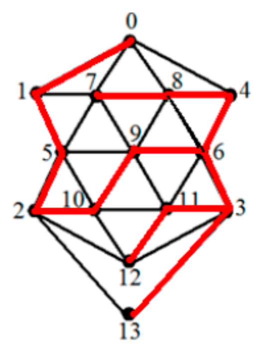
0-1-4-7-8-5-6-9-2-10-3-11-12-13



b. À partir du sommet 0, donnez un parcours en profondeur du graphe. Les sommets doivent être considérés dans l'ordre croissant de leur numéro.

Réponse :

0-1-5-2-10- 9-6-3-11-12-13-4-8-7



Exercice 6. Un groupe de 15 personnes se propose de constituer un réseautage particulier de sorte que chaque membre du groupe ait dans ses contacts le numéro de téléphone d'exactement 3 autres personnes du groupe. Est-il possible ? Justifiez votre réponse.

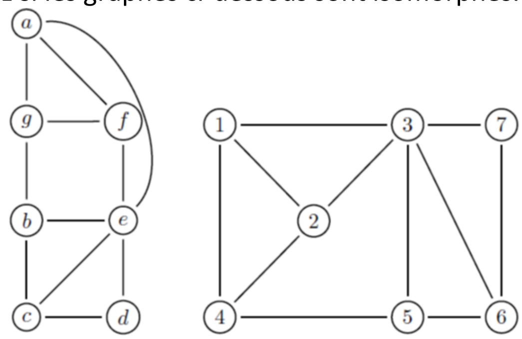
Réponse :

La réponse est non.

On peut constituer un graphe dont les sommets sont les 15 personnes. Chaque numéro de téléphone échangé permet d'établir un arc du graphe. Chaque sommet du graphe est donc de degré 3.

D’après le théorème des poignées de mains 3 x 15 = 45 qui est la somme des degrés des sommets du graphe doit être égale à 2 fois le nombre d’arcs. Il devrait donc être pair et non impair (45).

Exercice 7 (facultatif). Déterminez si les graphes ci-dessous sont isomorphes. Justifiez votre réponse.



Réponse :

Les deux graphes sont isomorphes. Soit ***h*** la fonction bijective qui transforme le premier graphe en l’autre. On a :

h(a) = 1, h(b) = 5, h(c) = 6, h(d) = 7, h(e) = 3, h(f) = 2, h(g) = 4.