POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 5 : **RELATIONS**

H2022

SOLUTIONNAIRE

PARTIE 1

Exercice 1. Soit ***E*** = *{a, b, c, d}* et la relation d'équivalence ***R*** définies sur ***E*** par :

$$\boldsymbol{R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}}$$

Quelles sont les classes d'équivalence de ***R*** ?

Réponse :

y appartient à la classe de x lorsque x ***R*** y. De plus, lorsque y appartient à la classe de x, alors x appartient aussi à la classe de y.

- Classe de a : {a, b}
- Classe de c : {c, d}

Exercice 2. Soit ***E*** = *{1, 2, 3, 4, 5}* et la relation d'équivalence ***R*** définies sur ***E*** par :

$$\boldsymbol{R = \{(1, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 5)\}}$$

Quelle la fermeture transitive ***S*** de la relation ***R*** ?

Réponse :

$$\boldsymbol{S = \{(1, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 5), (1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 5), (3, 3), (3, 5)\}}$$

Exercice 3. On définit une relation ***R*** sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{x\ R\ y \leftrightarrow |x| \leq |y|.}$$

R est-elle une relation d'ordre ?

Réponse :

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a $|x| \leq |x|$. La relation est donc réflexive.

- Soit x, y, $z \in \mathbb{R}$ tel que *x R y et y R z*.

On a $|x| \leq |y|$ et $|y| \leq |z|$. Donc $|x| \leq |y| \leq |z|$. *Par suite,* $|x| \leq |z|$ *et x R z*. La relation est donc transitive.

- Soit x, $y \in \mathbb{R}$ tel que *x R y et y R x*.

On a $|x| \leq |y|$ et $|y| \leq |x|$. Donc $|x| = |y|$. *Par suite, x = y ou x = -y*. On a donc pas toujours x = y. La relation n'est donc pas antisymétrique.

- On conclure que ***R*** n'est pas une relation d'ordre.

Exercice 4. Soit ***E*** un ensemble et ***A*** une partie de ***E***. On définit sur $\mathcal{P}$***(E)*** la relation ***R*** par :

$$\boldsymbol{X\ R\ Y \leftrightarrow X \cup A = Y \cup A}$$

Montrez que ***R*** est une relation d'équivalence.

Réponse :

- Soit $X \in \mathcal{P}(E)$.
  $X \cup A = X \cup A$
  $X\ R\ X$
  R est réflexive.
- Soit X, $Y \in \mathcal{P}(E)$ tel que *X R Y*.

$X\,\mathbf{R}\,Y \Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A$
$X\,\mathbf{R}\,Y \Leftrightarrow Y \cup A = X \cup A$
$X\,\mathbf{R}\,Y \rightarrow Y \cup A = X \cup A$
$X\,\mathbf{R}\,Y \rightarrow Y\,\mathbf{R}\,X$
R est symétrique.

- Soit X, Y, Z ∈ $\mathscr{P}$***(E)*** tel que $X\,\mathbf{R}\,Y$ *et* $Y\,\mathbf{R}\,Z$.
  $X\,\mathbf{R}\,Y \Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A$
  $Y\,\mathbf{R}\,Z \Leftrightarrow Y \cup A = Z \cup A$
  $(X\,\mathbf{R}\,Y \text{ et } Y\,R\,Z) \rightarrow X \cup A = Y \cup A = Z \cup A$
  $(X\,\mathbf{R}\,Y \text{ et } Y\,R\,Z) \rightarrow X \cup A = Z \cup A$
  $(X\,\mathbf{R}\,Y \text{ et } Y\,R\,Z) \rightarrow X\,\mathbf{R}\,Z$
  R est transitive.
- ***R*** est réflexive, symétrique et transitive. Elle est donc une relation d'équivalence.

PARTIE 2 : EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 5. Soit ***E*** un ensemble et ***A*** une partie de ***E***. On définit une relation R sur ***P(E)*** par :

$$\boldsymbol{X\,R\,Y \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A.}$$

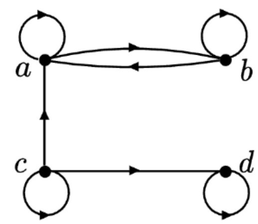
Montrez que ***R*** est une relation d'équivalence.

Réponse :

- Soit X ∈ $\mathscr{P}$***(E)***.
  $X \cap A = X \cap A$
  $X\,R\,X$
  R est réflexive.
- Soit X, Y ∈ $\mathscr{P}$***(E)*** tel que $X\,R\,Y$.
  $X\,\mathbf{R}\,Y \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A$
  $X\,\mathbf{R}\,Y \Leftrightarrow Y \cap A = X \cap A$
  $X\,\mathbf{R}\,Y \rightarrow Y \cap A = X \cap A$
  $X\,\mathbf{R}\,Y \rightarrow Y\,\mathbf{R}\,X$
  R est symétrique.
- Soit X, Y, Z ∈ $\mathscr{P}$***(E)*** tel que $X\,\mathbf{R}\,Y$ *et* $Y\,\mathbf{R}\,Z$.
  $X\,\mathbf{R}\,Y \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A$
  $Y\,\mathbf{R}\,Z \Leftrightarrow Y \cap A = Z \cap A$
  $(X\,\mathbf{R}\,Y \text{ et } Y\,R\,Z) \rightarrow X \cap A = Y \cap A = Z \cap A$
  $(X\,\mathbf{R}\,Y \text{ et } Y\,R\,Z) \rightarrow X \cap A = Z \cap A$
  $(X\,\mathbf{R}\,Y \text{ et } Y\,R\,Z) \rightarrow X\,\mathbf{R}\,Z$
  R est transitive.
- ***R*** est réflexive, symétrique et transitive. Elle est donc une relation d'équivalence.

Exercice 6. Soit ***A*** = {a, b, c, d}. Déterminez si les relations ***R*** définies sur ***A*** et représentées par les graphes ci-dessous sont réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives.

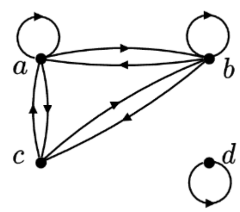
a)



Réponse :

- **Réflexivité** : La relation illustrée est réflexive puisqu'il y a une boucle à chaque sommet. Formellement, **∀ x ∈ *A*, (x, x) ∈ *R*** ou encore **∀ x ∈ *A*, x *R* x**.
- **Symétrie** : La relation n'est pas symétrique, puisque, par exemple, l'arête (c, a) est présente mais pas l'arête (a, c). C'est à dire, **(c, a) ∈ *R* ∧ (c, a) ∉ *R***. Formellement **∃ x, y ∈ *A*, ((x, y) ∈ *R*) ∧ ((y, x) ∉ *R*)**.
- **Antisymétrie** : Elle n'est pas antisymétrique, puisque les deux arêtes (a, b) et (b, a) sont présentes et **a ≠ b**. Formellement **∃ x, y ∈ *A*, ((x, y) ∈ *R*) ∧ ((y, x) ∈ *R*) ∧ (x ≠ y)**.
- **Transitivité** : Elle n'est pas transitive, puisque les deux arêtes (c, a), (a, b) sont présentes, mais l'arête (c, b) n'est pas présente. Formellement **∃ x, y, z ∈ *A*, ((x, y) ∈ *R*) ∧ ((y, z) ∈ *R*) ∧ (x, z) ∉ *R***.

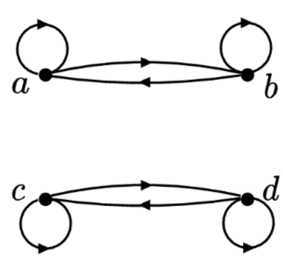
b)



Réponse :

- **Réflexivité** : La relation illustrée n'est pas réflexive puisqu'il existe un sommet c qui n'a pas de boucle. Formellement, **∃ x ∈ *A*, (x, x) ∉ *R***.
- **Symétrie** : La relation est symétrique, puisque, **∀ (x, y) ∈ *R*, (y, x) ∈ *R***.
- **Antisymétrie** : Elle n'est pas antisymétrique, puisque les deux arêtes (a, b) et (b, a) sont présentes et **a ≠ b**. Formellement **∃ x, y ∈ *A*, ((x, y) ∈ *R*) ∧ ((y, x) ∈ *R*) ∧ (x ≠ y)**.
- **Transitivité** : Elle n'est pas transitive, puisque les deux arêtes (c, a), (a, c) sont présentes, mais l'arête (c, c) n'est pas présente. Formellement **∃ x, y, z ∈ *A*, ((x, y) ∈ *R*) ∧ ((y, z) ∈ *R*) ∧ (x, z) ∉ *R***.

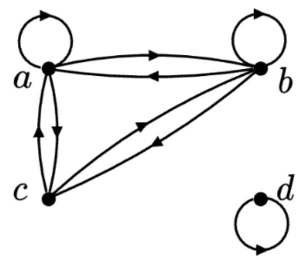
c)



Réponse :

- **Réflexivité** : La relation illustrée est réflexive puisqu'il y a une boucle à chaque sommet. Formellement, **∀ x ∈ *A*, (x, x) ∈ *R*** ou encore **∀ x ∈ *A*, x *R* x**.
- **Symétrie** : La relation est symétrique, puisque **∀ (x, y) ∈ *R*, (y, x) ∈ *R***.
- **Antisymétrie** : Elle n'est pas antisymétrique, puisque les deux arêtes (a, b) et (b, a) sont présentes et **a ≠ b**. Formellement **∃ x, y ∈ *A*, ((x, y) ∈ *R*) ∧ ((y, x) ∈ *R*) ∧ (x ≠ y)**.
- **Transitivité** : Elle est transitive, puisque **∀ ((x, y) ∈ *R*) ∧ ((y, z) ∈ *R*), (x, z) ∈ *R***.

Exercice 7. Soit ***A*** = {a, b, c, d}, la relation ***R*** définie sur ***A*** et représentée par les graphes ci-dessous.



a) Donnez la fermeture transitive de cette relation.

Réponse :

R = {(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b), (d, d)}

Soit ***S*** la fermeture transitive de ***R***.

S = {(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b), (d, d), **(c, c)**}

b) Retrouvez le résultat précédent en calculant la fermeture transitive à l'aide des matrices puissance de la relation. Vous pouvez utiliser les notions vues en cours et les notes de cours (pages 12 à 17), ainsi que la documentation complémentaire sur le produit booléen, disponible sur Moodle.

Réponse :

Soit ***M*** la matrice de R. On a :

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{M}^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{M}^{[3]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de la fermeture transitive est $\mathrm{N} = \mathrm{M} \vee \mathrm{M}^{[2]} \vee \mathrm{M}^{[3]}$

$$\mathrm{N} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$