常微分方程

一. 可分离变量方程

二. 齐次方程　令 $\frac{y}{x}$ (或 $\frac{x}{y}$) $=u$

① 写成 $\frac{dy}{dx}=\cdots$(齐)　② 设 u　③ $\frac{dy}{dx}=g(u,x)$

④ 转化为可分离

三. 一阶线性微分

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\cdot y=f(x)$$

① 令 $f(x)=0$ ⇒ 可分离 ⇒ $y=Ce^{-\int P(x)dx}$　通解

② 令 $y=ue^{-\int P(x)dx}$ (根据通解变 C 为 u) 代入. 特解

$$\Rightarrow y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int f(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

四. 伯努利

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)\cdot y^n$$

令 $z=y^{1-n}$ ⇒ $\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)f(x)$.

⇒ 求 z, 代入求 y.

五. 全微分

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=du(x,y)$　方程是 $u(x,y)$ 的全微分

$\Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

① ⇒ $u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\left[M(x,y)dx+N(x,y)dy\right]$.

$=\int_{x_0}^{x}M(\xi,y_0)d\xi+\int_{y_0}^{y}N(x_0,\xi)d\xi$

② 对 x: $u(x,y)=\int M(x,y)dx+\varphi(y)$.

对 y: $\frac{\partial u}{\partial y}=\cdots+\varphi'(y)$　代入求 $\varphi'(y)$ ⇒ $\varphi(y)$ ⇒ u.

六. 可降阶的二阶微分:

(一) $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$ ⇒ 积两次.

(二) $\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x,\frac{dy}{dx}\right)$

令 $\frac{dy}{dx}=p$, ⇒ $\frac{dp}{dx}=f(x,p)$

(三) $\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(y,\frac{dy}{dx}\right)$

令 $\frac{dy}{dx}=p$, ⇒ $p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$.

七. 二阶常系数齐次线性微分

$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0$

⇒ $\lambda^2+p\lambda+q=0$

$$\begin{cases}2\text{根}: y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}\\ 1\text{根}: y=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1 x}\\ \alpha\pm i\beta \to 0\text{根}: y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)\end{cases}$$

八. n阶常系数线性齐次: k重实根需补 $(1+\cdots x^{k-1})e^{\lambda x}$ 乘上去.

九. 常系数非齐次

① $\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=P_m(x)\cdot e^{\lambda x}$

(1) 齐次的解 y_1.

(2) 令 $y^*=Q(x)e^{\lambda x}$ 代入.

x^n (n为重根数)

⇒ $\frac{d^2Q}{dx^2}+(2\lambda+p)\frac{dQ}{dx}+(\lambda^2+p\lambda+q)Q=P_m(x)$.

$$\begin{cases}\lambda^2+p\lambda+q\neq 0, \Rightarrow Q(x)\text{是}m\text{次多项式}. (\lambda\text{是特征方程根})\\ \lambda^2+p\lambda+q=0,\ 2\lambda+p\neq 0 \Rightarrow m+1\text{次}\\ \lambda^2+p\lambda+q=0,\ 2\lambda+p=0 \Rightarrow m+2\text{次}\end{cases}$$

$\Rightarrow \underline{y^*=x^nR_m(x)e^{\lambda x}}$

② $\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=P_m(x)e^{\lambda x}\cos bx$ → $e^{(\lambda+ib)x}$ 实部

$e^{\lambda x}\sin bx$ → 虚部

⇒ $y^*=x^n(R_n(x)e^{ax}\cos bx+S_n(x)e^{ax}\sin bx)$.

(n为 $a\pm bi$ 对特征方程的重根数).

十. 一般线性微分

(一) 欧拉: $a_0x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_ny=f(x)$.

令 $x=e^t$ ⇒ y关于t的常系数. $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)\end{cases}$

(二) 考虑 $\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0$.

令 $y=y_1u$. ⇒ $y_1u''+[2y_1'+P(x)y_1]u'+\overbrace{[y_1''+P(x)y_1'+Q(x)y_1]}^{=0}u$

① 若 y_1 为已知解: $y_1u''+[2y_1'+P(x)y_1]u'=0$

⇒ 刘维尔公式: $y=y_1\left[C_1+C_2\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}dx\right]$.

② 若 $2y_1'+P(x)y_1=0$ 且 $2P'(x)+P^2(x)-4Q(x)$ 为常数

⇒ $y=u\cdot e^{-\int\frac{1}{2}P(x)dx}$

(三) 求齐次解 y_1, y_2. ($y=C_1y_1+C_2y_2$).

⇒ $y=u_1y_1+u_2y_2$.

$$\begin{cases}u_1'y_1+u_2'y_2=0.\\ u_1'y_1'+u_2'y_2'=f(x).\end{cases}$$

十一. 常系数线性微分方程组

(一) 齐次. 特征方程 → 特征根 → 特征向量.

eg $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$

① 若有复数: 一样. 有 λ → 只取一个共轭就好了. (实) + (虚).

② 若有重根: 对应 ≥ 2 个特征向量. $c_3[(\ )+t(\ )+t^2(\ )]e^{\lambda t}$

$(A-\lambda E)^{\text{重}} V_0 = 0$ ⇒ 求 $V_0^{(1)} \cdots V_0^{(k)}$

$V_1^{(k)} = (A-\lambda E) V_0^{(k)}$ ⇒ $(V_0^{(1)} + V_1^{(1)} t) e^{\lambda t}$ ($V_2 \cdots$ 也有)

(V_1 也可能为 0).

(二) 非齐次 $\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$

法一: 消元.

法二: 先求齐次解 $X(t)$. 令 $X(t) \cdot C'(t) = f(t)$

求 $C'(t)$ → $C(t) = C + \int C'$.

※ 其他: 令 $\frac{dy}{dx} = z$. $\frac{dz}{dy} = z \cdot \frac{dz}{dx}$.

令 $\frac{y}{x} = u$. (齐次的).

翻过来.

二阶:

齐次
- 常系数: 求 λ. 通解
- 非常系数:
  - ① 欧拉
  - ② 化成 y'' 系数为 1.
    - 有给特解 y_1 → 刘维尔求 y_2.
    - 没给 → 令 $y = uv$ (万能的)
      使 u' 系数为 0 且 u 系数为常数
      这样 u, v 皆可求

→ 非齐次: 变易常数.

一阶

1. 分离变量
2. 齐次
3. 一阶线性
4. 伯努利
5. 全微分 (积分因子)
6. 可降阶