线代3-4章.

U3. 运算. 转置^T, 求逆$^{-1}$, 伴随* (可逆才有)

1. 变换 $\begin{cases} 左乘: 行 \\ 右乘: 列 \end{cases}$

2. 求逆. $A\cdot A^*=A^*\cdot A=|A|E$　　$(A, E)\to(E, A^{-1})$

$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$ (满秩才可逆) $(A, C)\to(E, A^{-1}C)$ 前

$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$　　$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}E\\BA^{-1}\end{pmatrix}$ 后.

①求抽象矩阵逆　　$P=ABC\Rightarrow P^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

②求高次幂: $\begin{cases} a. 乘n个, 找规律. \\ b. (\ )=(\ )(\ ). 相邻消掉. eg \begin{pmatrix}3&9\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}(1\ \ 3) \\ c. 拆成 \lambda E+A. \end{cases}$

3. 分块 $\begin{vmatrix}A&0\\0&B\end{vmatrix}$ (行)(C)(D) $=|A||B|$ (对了2)，$\begin{vmatrix}(C)&A_{nn}\\B_{mm}&(D)\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|$ (只对2)

逆② $\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&\\&B^{-1}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}A&\\C&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&\\-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}A&C\\&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&-A^{-1}CB^{-1}\\&B^{-1}\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}&A\\B&\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}&B^{-1}\\A^{-1}&\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}C&A\\B&\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}&B^{-1}\\A^{-1}&-A^{-1}CB^{-1}\end{pmatrix}$　先水平

$\begin{pmatrix}&A\\B&C\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\\A^{-1}&\end{pmatrix}$　换位

秩③ $r\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}=r(A)+r(B)=r\begin{pmatrix}&B\\A&\end{pmatrix}$

$r\begin{pmatrix}A&C\\&B\end{pmatrix}, r\begin{pmatrix}A&\\C&B\end{pmatrix}\geq r(A)+r(B)$

秩

① $r(AB)\leq\min\{r(A), r(B)\}$.

② $r(AB)\geq r(A)+r(B)-n$ } 方阵.

③ $r(ABC)\geq r(AB)+r(BC)-r(B)$

④ $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$

⑤ A, B 可逆 $\Rightarrow r(C)=r(AC)=r(ACB)$.

⑥ $r(A^TA)=r(A)=r(A^T)=r(A^TA)$.

⑦ $r(A\ \ AB)=r(A)$.　$r(B)=r\begin{pmatrix}B\\AB\end{pmatrix}$.

⑧ $A_{m\cdot n}B_{n\times t}=0\Rightarrow r(A)+r(B)\leq n$.

⑨ $r(A^*)=\begin{cases}n, & r(A)=n\\1, & r(A)=n-1\\0, & r(A)<n-1\end{cases}$

⑩ $r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\leq r(A)+r(B)$　　$A=P\begin{pmatrix}E_r&\\&0\end{pmatrix}Q$. 再做变换

行列式

$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$　$|A^T|=|A|$　$|AB|=|A|\cdot|B|$

~~$|A^{-1}||A|=E$~~　$|A^T+B^T|=|A+B|$　$(kA)^*=k^{n-1}A^*$

A 方阵, $|A^*|=|A|^{n-1}$　　$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$

U4. n元向量空间

$\alpha_1, \alpha_2\cdots\alpha_s$ 线性相关 $\Rightarrow (\alpha_1\cdots\alpha_s)X=0$ 有非0解 $\Rightarrow r(A)<\overset{s}{n}\Rightarrow\begin{cases}方阵: |A|=0\\非方: 秩\end{cases}$

延伸: ·可逆 ·是基 $\Leftarrow$ 无关 $\Rightarrow$ 只有0解 $\Rightarrow r(A)=n\ \begin{cases}|A|\neq0\\秩\end{cases}$

非齐: β 可由 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 线性表示 $\Leftrightarrow(\alpha_1\cdots\alpha_s)X=\beta$ 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\bar{A})$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1\cdots\alpha_s 线性无关\\\alpha_1\cdots\alpha_s, \beta 线性相关\end{cases}$

向量组的秩, n元向量空间的维数 $\dim P^n$.

从基 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 到基 $\beta_1\cdots\beta_n$ 的过渡矩阵 M, $(\beta_1\cdots\beta_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)M$.

其解 (~~X_β~~ $X_\alpha=MX_\beta$.

子空间: ① $(0,\cdots0)\in V$　② 加法, 数乘封闭

齐次: $AX=0$. $\Rightarrow X=t_1\eta_1+t_2\eta_2+\cdots+t_{n-r}\eta_{n-r}$ 解集构成子空间

维数 $\dim W_0=n-r$　　基础解系

非齐: $AX=b\Rightarrow X=\eta_0+t_1\eta_1+\cdots+t_{n-r}\eta_{n-r}=\eta_0+W_0$ (特解) 不构成子空间

内积 (α, β) (点乘) $\begin{cases}\alpha=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)X\\\beta=(\ 基\ )Y\end{cases}\Rightarrow(\alpha, \beta)=X^T\begin{bmatrix}\varepsilon_1^T\varepsilon_1&\varepsilon_1^T\varepsilon_2&\cdots&\varepsilon_1^T\varepsilon_n\\\varepsilon_2^T\varepsilon_1&&&\\\vdots&&&\\\varepsilon_n^T\varepsilon_1&&&\varepsilon_n^T\varepsilon_n\end{bmatrix}Y$ 度量矩阵

正交基 / 正交向量组. 标准正交基.

施密特正交化. $\alpha_1\sim\alpha_s$ 是线性无关组.

$\begin{cases}\beta_1=\alpha_1\\\beta_k=\alpha_k-\frac{(\alpha_k, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_k, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_k, \beta_{k-1})}{(\beta_{k-1}, \beta_{k-1})}\beta_{k-1}\end{cases}$

$\frac{\beta_1}{|\beta_1|}, \frac{\beta_2}{|\beta_2|}\cdots$ 标准正交向量组.

正交矩阵: $UU^T=U^TU=E$

标准正交基 × 正交矩阵 $\Rightarrow$ 标准正交基.

单位化: $\eta_1=\frac{\beta_1}{\sqrt{(\beta_1, \beta_1)}}$

不管什么奇奇怪怪的内积定义都选择.

$A=A^T$：实对称矩阵

$r(A)\le 1$：任一A的二阶子式的$|\ |=0$.

$tr(AB)=tr(BA)$

幂等矩阵：构造$Q\begin{pmatrix}E_r & \\ & 0\end{pmatrix}Q^{-1}$使$A=A^2$.

利用分块矩阵，一维⇒多维.

$\begin{pmatrix}A & \\ & B\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}A^n & \\ & B^n\end{pmatrix}$.

对A^*，首先考虑$A^*\underline{A}=|A|E$. 无A就乘一个.

对A^{-1}，首选$A^{-1}A=E$. 凑A.

把E拆成$A\cdot A^{-1}$

要证A可逆，可以求$A^2=\cdots A$，再转化为初等矩阵.

$A=BC$，BC都可逆.

任何向量组都不能由向量组$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$线性表示⇒$|\alpha_1\alpha_2\alpha_3|=0$.

(x_1,x_2,x_3,x_4)是向量α在R^4下的基. 但在其他场合也可能是基

遇到$BA=2B+3A$型，① $(B-3E)(A-2E)=6E$ 麻烦

(已知A求B) ② $B(A-2E)=3A$. ⇒ $B=3A(A-2E)^{-1}$

分块矩阵的降阶公式

$$\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{vmatrix}=|A_{11}|\,|A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$$

方程组的解：

$$r(A)\begin{cases}<r(\bar{A})：无解\\ =r(\bar{A})有解\begin{cases}<n：\infty\\ =n：唯一解\Leftarrow|A|\neq 0.\end{cases}\end{cases}$$

关于线性相关的证明，假如有"显然"的，反证法.

$A_{m\times n}$，$R(A)=m$ ⇒ A的行向量组线性无关

有一个二阶子式$\neq 0$ ⇒ $r(A)\geq 2$.

U5-6. 12.10. 线代

特征值：$A\xi=\lambda_0\xi \Rightarrow |A-\lambda E|=0$；$(\lambda E-A)X$ 有非0解，$r(\lambda E-A)<n$（线性相关）（不可逆）

若 $A^2+A=0 \Rightarrow \lambda_0^2+\lambda_0=0$.

特征向量 $(A-\lambda_1 E)\xi_1=0$　　$\Rightarrow P^{-1}AP=\Lambda$，$\begin{cases} P=(\xi_1 \cdots \xi_n) \\ \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\end{cases}$

A, B 相似 $\Leftrightarrow P^{-1}AP=B \Leftrightarrow$ AB 特征值=，且每个特征值几何重数=. $\Leftrightarrow$ AB $\begin{cases} tr, r \text{ 相同} \\ |A|=|B| \\ |A-\lambda E|=|B-\lambda E| \\ \text{可相似于同一对角阵} \end{cases}$

相似对角化：相对角矩阵相似 $\Leftrightarrow$ 有n个线性无关的特征向量.

$r(A)\le n \Rightarrow$ 一定有一个特征值为0.

等价：r=.

实对称矩阵A，一定存在正交矩阵C（又经过单位化），使 $C^{-1}AC=\Lambda$ 一定相似对角化.（$C^{-1}=C^T$）

相似的实对称矩阵A, B 在实数域上合同

二次型 $\begin{cases} \text{多项式形式} \\ \text{矩阵形式 } X^T\underset{\text{对称}}{A}X \end{cases}$

普通形 → 标准形 → 规范形

(A)　　(A_1)　　(A_2)

→A, B 合同 $\Rightarrow P^TAP=B$（这样方便转换）

合同对角化：$P^TAP=\Lambda$.

A中的正负

→相同数量的正负惯性指数=特征值（+二重根

① 配方. 第一项全吸收 x_1. 二 x_2…

$\Rightarrow y=CX \Rightarrow X=Py$ $(P=C^{-1})$.

若不含平方项，构造 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2\end{cases}$ …

二次型的秩 $=r(A)=r(A_1)$

$=$ 特征值个数

② 正交变换. 求A的特征值/向量 $\Rightarrow$ ~~正交~~ 正交单位化得 P, Λ

A_1

正负惯性指数.

标准形系数/特征值正负 $\Rightarrow$（半）正定/负定 $\Leftrightarrow$ 存在n阶实…B 使 $A=B^TB$. $\Leftrightarrow X^TAX\ge 0$.（定义）

- λ是A的特征值　　A, B 相似

  λ^k　A^k　　A^k　B^k

  λ^{-1}　A^{-1}　　$g(A)$　$g(B)$

  $\lambda^{-1}|A|$　A^*

  $g(\lambda)$　$g(A)$

- $f=X^TAX^T$ 正定 / A为正定矩阵：

  特征值>0；顺 $\Delta>0$　　一定对称

  存在n阶实可逆矩阵B，使 $A=B^TB$.（半正定✓）.

  A与n阶单位矩阵合同.（半：与 $\begin{bmatrix}E_r & \\ & 0\end{bmatrix}$ 合同）.

- A, B正定 $\Rightarrow kA, A^{-1}, A^*, A^k, C^TAC, A+B, \begin{bmatrix}A & 0 \\ 0 & B\end{bmatrix}$ 正定.

- 若 $A\eta=0$，则η一定是A的特征向量.

- 反实对称矩阵特征值为0.

- 证正交，找正交

  证可逆：$r\to$ 11.

- $r(A)=r \Rightarrow$ 设 $A=S\begin{pmatrix}E_r \\ 0\end{pmatrix}(E_r\ 0)T$.

- 如要证A特征值都是实数 $\Rightarrow$ A实对称，或A与实对称矩阵相似

- 有一整个的逆 $(\quad)^{-1}$，不能拆，只能左/右乘.

线代 U7 线性空间

二元运算 ⇒ 构成线性空间

两个向量组等价 ⟺ 可以互相线性表示

U8 欧氏空间

内积、内积空间、度量矩阵

$$\begin{cases} (\alpha,\beta)=(\beta,\alpha) & \alpha=\theta \Leftrightarrow (\alpha,\alpha) \\ (c\alpha,\beta)=c(\alpha,\beta) \\ (\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma) \end{cases}$$

正交函数组、正交向量组 ⇒ 标准正交向量组 ($\ell=1$)

正交基 ⇒ 标准正交基

欧氏的子空间还是欧氏

U9 线性映射（空间的拉伸）

矩阵对应一种映射关系。

和，数乘，乘积

维数定理

$\dim \mathrm{Im}(\varphi)+\dim \mathrm{Ker}(\varphi)=\dim V$.

定义在 V 上取值于 W

$\mathrm{Hom}(V,W)$ ~~$W\to V$~~ $V\to W$

$\mathrm{Im}(\varphi) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi(\alpha) \mid \alpha\in V\}$

W 的子空间，φ 的像空间（值域

$\mathrm{Ker}(\varphi) \overset{\text{def}}{=} \{\alpha\in V \mid \varphi(\alpha)=\theta\}$

V 的子空间，φ 的核空间

满足加

线映条件 $\begin{cases} T(u)+T(v)=T(u+v) \\ T(cu)=cT(u). \end{cases}$

线性变换：维度一致的线映

- $|A|\cdot|B|\geq|(A,B)|$.

⇒ $(\alpha,\alpha)\cdot(\beta,\beta)\geq(\alpha,\beta)^2$ 变式.

（看到 $(\ )^2\leq\cdots$ 形式，向此靠）

- 要证 A 是线性空间 V 的一组基，可先设 V 的基，再 $A=V\cdot X$，X 可逆.（抽象）

- 涉及到 $r(A)=r$ 的证明题，$A=S\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T=S\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix}T$.

行列式

过渡矩阵

坐标变换

解方程组

特征值/向量

相似对角化.

子空间 2

线性空间 8. P156

内积 4 P177

线性映射 2

维数

正交化 ⇒ 标准正交

正定