

Solución de Mie

Jonathan e Isabel

28 de octubre de 2020

Índice general

Índice de figuras	V
Índice de tablas	VII
1. Conceptos de electromagnetismo	1
1.1. Ecuaciones de Maxwell	1
1.2. Condiciones a la frontera	3
1.3. Campos electromagnéticos armónicos	5
1.4. Vector de Poynting	7
2. Teoría general de esparcimiento	9
3. Los armónicos esféricos vectoriales	13
3.1. Solución con geometría esférica	14
3.2. Relaciones de ortogonalidad	17
3.3. Expansión de una onda plana	19
3.4. Ejercicios sugeridos	21
4. Esparcimiento y absorción de una esfera	23
5. Casos particulares	25

Índice de figuras

1.1. Condiciones de frontera	5
1.2. Campo electromagnético armónico	7
2.1. Diagrama del plano de esparcimiento (en verde) definido por el vector \mathbf{r} , posición donde se evalúan los campos EMs, y el vector $\hat{\mathbf{e}}_z$, cuando una onda plana monocromática propagándose en dirección z (en rojo) ilumina a una partícula arbitraria. La base cartesiana para vectores se muestra en azul, mientras que la base esférica se muestra en negro. Las direcciones paralelas \parallel y perpendiculares \perp al plano de incidencia para el campo eléctrico incidente, denotado por el subíndice i y el esparcido, denotado por el subíndice s , se muestran en morado; el haz incidente se muestra en rojo.	9

Índice de tablas

*Dedicado a todos nosotros que estudiamos esto y
lo escribimos porque nos odiamos un poquito :)*

Introduction

Aquí iría el texto que todos vamos a escribir al final, en donde hablamos del propósito del libro y esas cosas.

Capítulo 1

Conceptos de electromagnetismo

Con el propósito de desarrollar la solución de Mie, se comenzará por una breve revisión de algunos conceptos fundamentales del electromagnetismo. De esta forma, se establecerán las convenciones que serán usadas a lo largo de estas notas y, además, servirá como un punto de partida para el desarrollo del problema de esparcimiento.

1.1. Ecuaciones de Maxwell

Los fenómenos electromagnéticos son descritos casi por completo a través un conjunto de cuatro ecuaciones conocidas como *ecuaciones de Maxwell*. Con ellas se determina el comportamiento y la propagación de los campos electromagnéticos y cómo son influenciados por fuentes externas [jackson1999electrodynamics](#). En el caso donde los campos eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{B} se propagan en el vacío las ecuaciones de Maxwell se escriben como [jackson1999electrodynamics](#):

Ecuaciones de Maxwell en el vacío

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0}, \quad \text{Ley de Gauss eléctrica} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \text{Ley de Gauss magnética} \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{Ley de Faraday-Lenz} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{tot} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \text{Ley de Ampère-Maxwell} \quad (1.4)$$

en donde ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío, mientras que μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío; ρ_{total} se refiere a la densidad volumétrica de carga total y \mathbf{J}_{tot} a la densidad volumétrica de corriente total. Es importante destacar que las Ecs. (1.1)–(1.4) están escritas en unidades del sistema internacional. Cada una representa una expresión matemática que describe observaciones experimentales. No pueden ser demostradas pero su aplicabilidad es verificable,

por ello, las ecuaciones de Maxwell se utilizan en diversos problemas que involucren sistemas macroscópicos [reitz1993foundations](#).

Las Ecs. (1.1) y (1.4) cambian su forma cuando los campos electromagnéticos se propagan en medios materiales. Para ello, es necesario considerar al vector de desplazamiento, definido como [jackson1999electrodynamics](#):

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (1.5)$$

con \mathbf{P} la polarización del material, y al campo \mathbf{H} , cuya relación con el campo magnético es [griffiths2013electrodynamics](#):

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}. \quad (1.6)$$

donde \mathbf{M} corresponde a la magnetización del medio material. Por tanto, las ecuaciones de Maxwell en medios materiales son [jackson1999electrodynamics](#):

Ecuaciones de Maxwell en medios materiales

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{ext}, \quad (1.7a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.7b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.7c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{ext} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.7d)$$

en donde ρ_{ext} corresponde a la densidad de carga volumétrica externa y \mathbf{J}_{ext} es la densidad de corriente volumétrica externa.

Las ecuaciones de Maxwell en para medios materiales [Ecs. (1.7a)–(1.7d)] contienen la información del material a través de dos cantidades conocidas como polarización, \mathbf{P} , y magnetización, \mathbf{M} [griffiths2013electrodynamics](#). Por ello, es preciso contar con relaciones que describan el comportamiento de los materiales bajo la influencia del campos EMs. En general, la polarización y magnetización no se pueden describir en una forma reducida y simple. Sin embargo, pueden realizarse algunas suposiciones sobre el material en cuestión. El caso más sencillo consiste en un medio material que cumple con ser *homogéneo* (sus propiedades son iguales en cada punto), *isotrópo* (sus propiedades ópticas en cada punto son independientes de la dirección) y tiene una respuesta ante los campos EMs de tipo *lineal*. Dichas características permiten escribir *relaciones constitutivas* que establecen una relación entre los cuatro campos vectoriales \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} y \mathbf{H} . La polarización y la magnetización cumplen con [griffiths2013electrodynamics](#):

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad (1.8)$$

respectivamente, donde se ha utilizado que χ_e (χ_m) es la susceptibilidad eléctrica (magnética). De está forma, al sustituir las Ecs. (1.8) en las expresiones para los campos \mathbf{D} [Ec. (1.5)] y \mathbf{H} [Ec. (1.6)], se llega a [griffiths2013electrodynamics](#)

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \text{y} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}, \quad (1.9)$$

donde $\epsilon \equiv \epsilon_0 (1 + \chi_e)$ y $\mu \equiv \mu_0 (1 + \chi_m)$ son la permitividad y permeabilidad características del medio material, respectivamente. En general, ϵ es una

cantidad compleja que depende de la frecuencia de la onda incidente. A partir de ambas propiedades se expresa el índice de refracción del material en cuestión [griffiths2013electrodynamics](#)

$$n \equiv \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}. \quad (1.10)$$

1.2. Condiciones a la frontera

Las ecuaciones de Maxwell son ecuaciones diferenciales aplicadas localmente en cada punto del espacio [jackson1999electrodynamics](#). EN particular, es interesante conocer lo que sucede con las componentes de los campos \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} y \mathbf{H} en la interfaz que separa dos medios. Para ello se inicia escribiendo a las ecuaciones de Maxwell en su forma integral [griffiths2013electrodynamics](#)

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{tot}, \quad (1.11a)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0, \quad (1.11b)$$

$$\oint_P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}, \quad (1.11c)$$

$$\oint_P \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{tot} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a}, \quad (1.11d)$$

Con el propósito de derivar estudiar la continuidad de los campos en una interfaz, primero, se suponen dos medios, cada uno caracterizado por sus propiedades ópticas: ϵ_1, μ_1 para el medio 1 y ϵ_2, μ_2 para el medio 2. La interfaz que separa ambos medios tiene densidad superficial de carga σ_{tot} y una densidad superficial de corriente \mathbf{K}_{tot} . En particular, para analizar las componentes de \mathbf{D} ortogonales a la interfaz, se realiza la integral en la Ec. (1.11a). Para ello, se elige un prisma rectangular como el que se muestra en la Fig. 1.1(a) (conocido como *Gaussian pillbox*); se supondra que su altura es δ y que sus caras paralelas a la superficie tienen un área A . Una parte del volumen estará por encima de la interfaz y el resto se encontrará por debajo. El vector normal a la superficie está denotado por $\hat{\mathbf{n}}$. Puesto que la integral en la Ec. (1.11a) es de superficie, se realiza sobre todas las caras del volumen. Sin embargo, se considera que la altura de la caja es infinitesimalmente pequeña ($\delta \rightarrow 0$). Por tanto, sólo las caras de área A contribuyen, dando como resultado [griffiths2013electrodynamics](#):

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = (D_1^\perp - D_2^\perp) A = Q_{enc}, \quad (1.12)$$

donde D_1^\perp y D_2^\perp corresponden a las componentes del vector de desplazamiento ortogonales a la interfaz en los medios 1 y 2, respectivamente. Además, Q_{enc} es la carga encerrada por el volumen de la caja. Recordando que $Q_{enc} = \sigma_{enc}A$, se puede reescribir a la Ec. (1.12) en términos de la densidad de carga superficial:

$$D_1^\perp - D_2^\perp = \sigma_{tot}. \quad (1.13)$$

Por tanto, la componente perpendicular del campo \mathbf{D} es discontinua en la frontera entre dos medios. A través de un procedimiento similar y usando la

Ec. (1.11b), se deduce que [griffiths2013electrodynamics](#)

$$B_1^\perp - B_2^\perp = 0, \quad (1.14)$$

donde B_i^\perp denota la componente del campo \mathbf{B} perpendicular a la interfaz dentro del medio $i = 1, 2$. Es decir, la componente perpendicular del campo \mathbf{B} es continua a través de la frontera.

Por otro lado, a partir de la Ec. (1.11c) es posible describir la continuidad de las componentes del campo eléctrico paralelas a la interfaz. Con ese fin, la integral de trayectoria en la Ec. (1.11c) se calcula utilizando un circuito rectangular como el mostrado en la Fig. 1.1(b); su altura es δ y el ancho l . Nuevamente, la mitad del circuito se encuentra inmerso en el medio 1 (sobre la interfaz) y el resto en el medio 2 (debajo de la interfaz). Se considerará el límite $\delta \rightarrow 0$, por tanto, la integral queda como

$$\oint_P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (E_1^\parallel - E_2^\parallel)l = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{l} - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{l}, \quad (1.15)$$

siendo E_1^\parallel y E_2^\parallel las componentes del campo eléctrico paralelas a la superficie de la interfaz en los medios 1 y 2, respectivamente. Por otra parte, al considerar que la altura del circuito es infinitamente pequeña la contribución del campo magnético a la Ec. (1.11c) es despreciable. Esto último puede entenderse al considerar que la integral de superficie del campo \mathbf{B} da como resultado $B_\perp A^*$, con A^* el área del circuito. Al realizar el límite $\delta \rightarrow 0$, el área también tiende a cero. Por tanto, se concluye que [griffiths2013electrodynamics](#)

$$\mathbf{E}_1^\parallel - \mathbf{E}_2^\parallel = \mathbf{0}, \quad (1.16)$$

es decir, los componentes del campo eléctrico paralelas a la interfaz son continuas sobre la frontera.

De la Ec. (1.11d) se deduce una relación para las componentes del campo \mathbf{H} . Utilizando el circuito ya descrito, se realiza la integral de contorno [griffiths2013electrodynamics](#):

$$\oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (H_1^\parallel - H_2^\parallel)l = \mathbf{H}_1^\parallel \cdot \mathbf{l} - \mathbf{H}_2^\parallel \cdot \mathbf{l}, \quad (1.17)$$

donde H_1^\parallel y H_2^\parallel son las componentes del campo eléctrico paralelas a la superficie de la interfaz en los medios 1 y 2, respectivamente. Se debe notar que la contribución del campo \mathbf{D} a la Ec. (1.11d) es despreciable debido a que, al considerar $\delta \rightarrow 0$, el área del circuito es infinitesimalmente pequeña. Por otra parte, la corriente encerrada por el circuito es I_{enc} . Puesto que para este caso sólo la densidad de corriente superficial contribuye, la corriente se escribe como [griffiths2013electrodynamics](#):

$$I_{tot} = \mathbf{K}_{tot} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{l}) = (\mathbf{K}_{tot} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{l} \quad (1.18)$$

donde, $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario y normal a la interfaz. De esta forma, se llega a que [griffiths2013electrodynamics](#)

$$\mathbf{H}_1^\parallel - \mathbf{H}_2^\parallel = \mathbf{K}_{tot} \times \hat{\mathbf{n}}. \quad (1.19)$$

Las componentes paralelas de \mathbf{H} son discontinuas en la frontera por una cantidad proporcional a la densidad de corriente superficial. En particular, cuando los me-

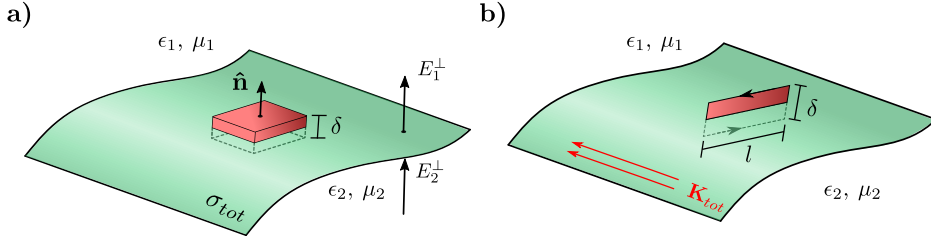


Fig. 1.1: Diagrama de una interfaz (superficie en verde) que separa dos medios distintos. El medio 1 tiene propiedades ópticas ϵ_1, μ_1 , mientras que las del medio 2 son ϵ_2, μ_2 . **a)** Prisma rectangular con altura δ y cuyas caras paralelas a la superficie tiene un área A . Sobre la superficie que separa a los medios hay una densidad de carga superficial total igual a σ_{tot} . **b)** Circuito rectangular con altura δ y ancho l . En la interfaz entre los medios hay una densidad de corriente superficial K_{tot} .

dios son lineales, las condiciones de frontera son [griffiths2013electrodynamics](#):

Condiciones de frontera para materiales lineales	
$\epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp = \sigma_{tot},$	$\mathbf{E}_1^\parallel - \mathbf{E}_2^\parallel = 0,$
$B_1^\perp - B_2^\perp = 0,$	$\frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel = \mathbf{K}_{tot} \times \hat{\mathbf{n}},$

(1.20)

En las Ecs. (1.20) es posible notar que, si no hay fuentes externas, tanto componentes paralelas como perpendiculares de los campos EMs son continuas en la frontera entre ambos medios.

1.3. Campos electromagnéticos armónicos

Las ecuaciones de Maxwell imponen relaciones entre los cuatro campos \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} y \mathbf{H} . Es posible desacoplar a las ecuaciones de Maxwell y obtener una ecuación para sólo uno de los campos. Para ello, primero, se observa que, en el vacío y sin fuentes externas, es decir, $J_{tot}, \rho_{tot} = 0$, se cumple que

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \text{y} \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}, \quad (1.21)$$

Por otro lado, se calcula el rotacional de la Ec. (1.7d)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{\partial \nabla \times \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.22)$$

donde se utilizó la relación [griffiths2013electrodynamics](#)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \quad (1.23)$$

y que $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$. Además, se cumple también que $\nabla \times \mathbf{D} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$. Por tanto, sustituyendo en la Ec. (1.22), se obtiene que [griffiths2013electrodynamics](#)

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.24)$$

A través de un procedimiento análogo se llega a

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.25)$$

Las Ecs. (1.24) y (1.25) son la ecuación de onda vectorial para el campo \mathbf{H} y \mathbf{E} , respectivamente. Cada una de las componentes de los campos EMs cumplen la ecuación de onda escalar en un medio homogéneo, libre de corrientes y cargas [born2005principles](#):

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0, \quad (1.26)$$

en donde $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ corresponde a la velocidad de la luz.

Una de las soluciones más sencillas a la ecuación de onda escalar está dada por [griffiths2013electrodynamics](#)

$$V = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (1.27)$$

donde \mathbf{k} es el vector de onda, asociado a la dirección de propagación de la onda, y ω es la frecuencia angular, da el número de vibraciones en 2π segundos [born2005principles](#). La amplitud A es una cantidad compleja. La Ec. (1.27) también pudo ser escrita en términos de las funciones seno y coseno, sin embargo, es preferible el uso de exponenciales complejas puesto que es más sencillo de manipular para hacer cálculos. Al final, sólo se considera la parte real de la función de onda [griffiths2013electrodynamics](#). A partir de la Ec. (1.27) se distingue a la onda plana; se obtiene cuando $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ es constante, por tanto, en cada instante de tiempo V es constante en cada plano definido por $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ [griffiths2013electrodynamics](#).

Debido a la forma de la dependencia temporal en la Ec. (1.27) se dice que el campo es armónico en el tiempo. Por ello, los campos EMs armónicos se escriben como [griffiths2013electrodynamics](#)

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{H}_c = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (1.28)$$

con $\omega = kc$. En ausencia de fuentes externas los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} son ortogonales entre sí y respecto al vector de onda \mathbf{k} , ver Fig. 1.2. Se relacionan entre sí a través de la siguiente ecuación [griffiths2013electrodynamics](#):

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad (1.29)$$

Debido a la forma de los campos EMs [Ecs. (1.28)], las ecuaciones de Maxwell se reescriben como [bohren1998absorption](#)

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E}_c = 0, \quad (1.30)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_c = 0, \quad (1.31)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_c = i\omega \mu \mathbf{H}_c, \quad (1.32)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_c = -i\omega \epsilon \mathbf{E}_c. \quad (1.33)$$

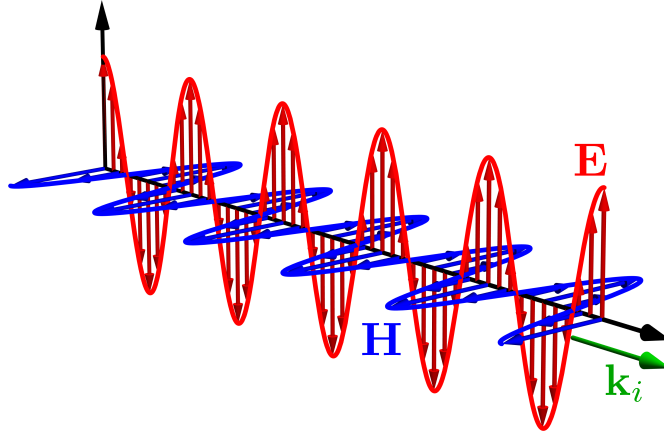


Fig. 1.2: Representación de los campos EMs armónico. En rojo se encuentra el campo eléctrico \mathbf{E} y en azul el campo \mathbf{H} , para cada uno, las flechas indican la orientación de su oscilación. La flecha verde indica la dirección de propagación de la onda, dada por \mathbf{k}_i .

Nuevamente, es posible desacoplar las ecuaciones de Maxwell. Para ello calculamos el rotacional de las Ecs. (1.32) y (1.33):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = i\omega\mu\nabla \times \mathbf{H} = \omega^2\epsilon\mu\mathbf{E}, \quad (1.34)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -i\omega\epsilon\nabla \times \mathbf{E} = \omega^2\epsilon\mu\mathbf{H} \quad (1.35)$$

Usando la propiedad en la Ec. (1.23), se reescriben a las Ecs. (1.34) y (1.35) como sigue

Ecuación vectorial de Helmholtz	
$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2\epsilon\mu\mathbf{E} = 0,$	(1.36a)
$\nabla^2 \mathbf{H} + \omega^2\epsilon\mu\mathbf{H} = 0,$	(1.36b)

en donde $k^2 = \omega^2\epsilon\mu$.

1.4. Vector de Poynting

El vector de Poynting es una cantidad que indica la energía por unidad de tiempo, por unidad de área, transportada por los campos EMs, de forma general, se define como [griffiths2013electrodynamics](#):

$$\mathbf{S} = (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \quad (1.37)$$

La energía por unidad de tiempo que cruza una superficie infinitesimal $d\mathbf{a}$ es $\mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}$, y es llamado flujo de energía [griffiths2013electrodynamics](#).

En el caso de la luz, las longitudes de onda son tan cortas ($\sim 5 \times 10^{-7}$ m), y el periodo ($\sim 10^{-15}$ s), que las mediciones macroscópicas involucran muchos ciclos, por ello no es viable medir directamente al vector de Poynting. Se utiliza el promedio temporal, denotado con $\langle \rangle$ [griffiths2013electrodynamics](#).

Retomando el caso de campos EMs armónicos, el vector de Poynting luce de la siguiente forma

$$\mathbf{S} = \text{Re}\{\mathbf{E}_c\} \times \text{Re}\{\mathbf{H}_c\}, \quad (1.38)$$

cuyo promedio temporal es [born2005principles](#)

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_c \times \mathbf{H}_c^*), \quad (1.39)$$

en donde * indica el complejo conjugado. El cálculo del promedio temporal se realiza sobre un ciclo completo. Ahora es posible calcular la potencia promedio por unidad de área transportada por una onda EM, es decir, la intensidad [griffiths2013electrodynamics](#)

$$I = \langle S \rangle \quad (1.40)$$

Con el vector de Poynting también se determina la magnitud y dirección de la tasa de transferencia de energía electromagnética en cualquier punto del espacio [bohren1998absorption](#). Es posible cuantificar la tasa neta con la que la energía EM cruza la frontera de una superficie cerrada A que encierra un volumen V [bohren1998absorption](#):

$$W = - \int_A \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA, \quad (1.41)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector unitario normal a la superficie. Es importante notar que se agrega un signo menos en la Ec. (1.41) puesto que se ha elegido el vector normal que apunta hacia afuera del volumen. Entonces, si \mathbf{S} es tal que apunta en la dirección contraria a $\hat{\mathbf{n}}$, W será positiva. Lo cual indica que la energía se absorbe.

Capítulo 2

Teoría general de esparcimiento

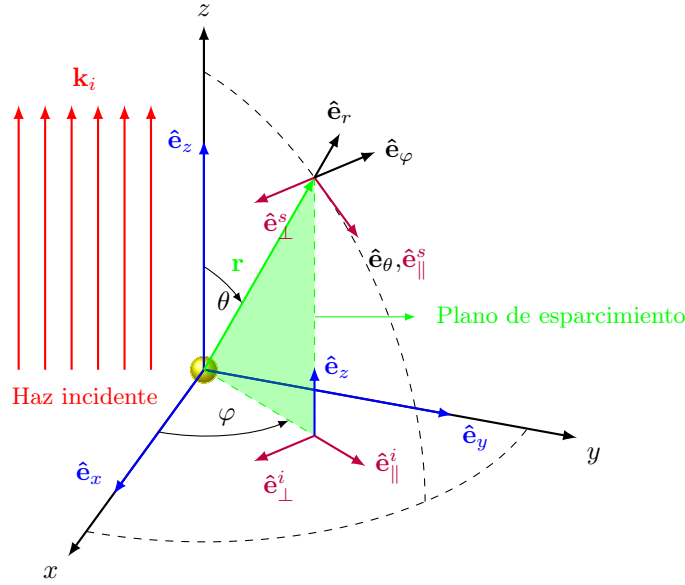


Fig. 2.1: Diagrama del plano de esparcimiento (en verde) definido por el vector \mathbf{r} , posición donde se evalúan los campos EMs, y el vector $\hat{\mathbf{e}}_z$, cuando una onda plana monocromática propagándose en dirección z (en rojo) ilumina a una partícula arbitraria. La base cartesiana para vectores se muestra en azul, mientras que la base esférica se muestra en negro. Las direcciones paralelas \parallel y perpendiculares \perp al plano de incidencia para el campo eléctrico incidente, denotado por el subíndice i y el esparcido, denotado por el subíndice s , se muestran en morado; el haz incidente se muestra en rojo.

Para el estudio del esparcimiento por una partícula arbitraria inmersa en un medio con índice de refracción n_m , denominado matriz, se considera que la partícula es iluminada por una onda plana monocromática con una longitud de onda λ , cuya dirección de propagación define la dirección z , es decir,

$$\mathbf{E}^i = (E_x^i \hat{\mathbf{e}}_x + E_y^i \hat{\mathbf{e}}_y) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (2.1)$$

donde $k = 2\pi n_m/\lambda$ es el número de onda. En la Fig. 2.1 se muestra una partícula localizada en el origen, iluminada por una onda plana monocromática [Ec. (2.1)] que se propaga en la dirección z ; sobre la partícula se posiciona el origen del sistema coordenado cartesiano (x, y, z) , así como las bases de vectores ortonormales rectangulares $\{\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z\}$ y polares $\{\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_\varphi\}$. De forma análoga al plano de incidencia¹, se construye el plano de esparcimiento (en verde en la Fig. 2.1), con el vector de la dirección de esparcimiento $\hat{\mathbf{e}}_r$ y la dirección del haz incidente $\hat{\mathbf{e}}_z$, que define las componentes ortogonales \perp y paralelas \parallel de los campos EMs, así como su polarización. Los vectores unitarios perpendicular y paralelo al plano de esparcimiento de la onda incidente, $\hat{\mathbf{e}}_\perp^i$ y $\hat{\mathbf{e}}_\parallel^i$, respectivamente, y de los campos EMs esparcidos $\hat{\mathbf{e}}_\perp^s$ y $\hat{\mathbf{e}}_\parallel^s$ están dados por

$$\hat{\mathbf{e}}_\perp^i = -\hat{\mathbf{e}}_\varphi = \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_x - \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (2.2a)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\parallel^i = \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_x + \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (2.2b)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\perp^s = -\hat{\mathbf{e}}_\varphi, \quad (2.3a)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\parallel^s = \hat{\mathbf{e}}_\theta. \quad (2.3b)$$

Al despejar $\hat{\mathbf{e}}_x$ y $\hat{\mathbf{e}}_y$ de las Ecs. (2.2) y reescribirlos en la base de los vectores unitarios en la dirección perpendicular y normal al plano de esparcimiento, como $\hat{\mathbf{e}}_x = \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_\perp^i + \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_\parallel^i$ y $\hat{\mathbf{e}}_y = -\cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_\perp^i + \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_\parallel^i$, se obtiene que el campo eléctrico incidente \mathbf{E}^i [Ec. (2.1)] se puede escribir como

$$\mathbf{E}^i = [(\cos \varphi E_x^i + \sin \varphi E_y^i) \hat{\mathbf{e}}_\perp^i + (\sin \varphi E_x^i - \cos \varphi E_y^i) \hat{\mathbf{e}}_\parallel^i] e^{ikz} = E_\perp^i \hat{\mathbf{e}}_\perp^i + E_\parallel^i \hat{\mathbf{e}}_\parallel^i, \quad (2.4)$$

en donde se omite el término de la fase temporal $e^{-i\omega t}$ y la fase espacial e^{ikz} se incluye en los coeficientes E_\perp^i y E_\parallel^i . Adicionalmente, al considerar para el campo eléctrico esparcido únicamente los términos que corresponden al campo lejano, es decir, el término con componentes transversales, que decae como r^{-1} y cumple con la relación $kr \ll 1$, el campo esparcido \mathbf{E}^s puede escribirse como **bohren1998absorption**

$$\mathbf{E}^s \propto \frac{e^{ikr}}{-ikr} \mathbf{E}_0^s = \frac{e^{ikr}}{-ikr} (E_\perp^s \hat{\mathbf{e}}_\perp^s + E_\parallel^s \hat{\mathbf{e}}_\parallel^s), \quad (2.5)$$

en donde \mathbf{E}_0^s es la amplitud del campo esparcido, E_\perp^s y E_\parallel^s sus componentes en la base de los vectores paralelo y perpendicular al plano de esparcimiento [Ec. (2.3)]. Asimismo, es posible relacionar al campo eléctrico esparcido \mathbf{E}^s por una partícula localizada en el centro de coordenadas [Ec. (2.5)] con el campo eléctrico incidente \mathbf{E}^i [Ec. (2.4)], mediante el operador de esparcimiento de campo lejano $\mathbb{F}(\hat{\mathbf{k}}^i, \hat{\mathbf{k}}^s)$ **tsang2000scattering**

$$\mathbf{E}^s = \frac{e^{i\hat{\mathbf{k}}^s \cdot \mathbf{r}}}{r} \mathbb{F}(\hat{\mathbf{k}}^i, \hat{\mathbf{k}}^s) \mathbf{E}^i, \quad (2.6)$$

donde \mathbb{F} depende de la dirección de la onda plana incidente $\hat{\mathbf{k}}^i$ y de la dirección del campo eléctrico esparcido $\hat{\mathbf{k}}^s$. Al considerar la forma asintótica del campo

¹En el problema de un haz de luz incidente a una superficie plana, el plano de incidencia se define por el vector normal a la superficie y la dirección de propagación del haz.

eléctrico esparcido [Ec. (2.5)] y su relación con el campo eléctrico incidente [Ec. (2.6)], se pueden relacionar las componentes perpendiculares del campo esparcido y el campo incidente de una onda plana en la base de los vectores perpendiculares y paralelos al plano de incidencia mediante la matriz de esparcimiento **  bohren1998absorption**

$$\begin{pmatrix} E_{\parallel}^s \\ E_{\perp}^s \end{pmatrix} = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr} \begin{pmatrix} S_2 & S_3 \\ S_4 & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\parallel}^i \\ E_{\perp}^i \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

en donde $S_j = S_j(\theta, \varphi)$, con $j = 1, 2, 3$ y 4 , son funciones complejas, además de que las componentes de la matriz de esparcimiento en la Ec. (2.7) dependen en general de la geometría de la partícula iluminada por la onda plana.

Capítulo 3

Los armónicos esféricos vectoriales

Para encontrar una solución al problema de esparcimiento y absorción de luz por una partícula esférica, consideremos una región del espacio libre de fuentes y campos electromagnéticos (EMs) armónicos en el tiempo, como se presentan en las Ecs. (1.30)-(1.33). Asimismo, planteemos una base de funciones vectoriales que permitan escribir a los campos EM como una combinación lineal de ellos. Propongamos, entonces, un campo vectorial \mathbf{M} tal que [bohren1998absorption](#)

$$\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{r}\psi), \quad (3.1)$$

donde ψ es una función escalar y \mathbf{r} el vector de posición; dado que \mathbf{M} es el rotacional de $\mathbf{r}\psi$, se cumple que $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$, y que \mathbf{M} y \mathbf{r} son vectores perpendiculares ([Ejercicio 3.1](#)). La ecuación de Helmholtz para \mathbf{M} , dado que el operador laplaciano y el rotacional conmutan ([Ejercicio 3.2](#)), es

$$\nabla^2 \mathbf{M} + k^2 \mathbf{M} = \nabla \times [\nabla^2 (\mathbf{r}\psi) + k^2 (\mathbf{r}\psi)],$$

y como se cumple que $\nabla^2 (\mathbf{r}\psi) = 2\nabla\psi + \mathbf{r}\nabla^2\psi$ ([Ejercicio 3.3](#)) y que $\nabla \times (\nabla\psi) = 0$, la ecuación de Helmholtz para \mathbf{M} puede reescribirse como

$$\nabla^2 \mathbf{M} + k^2 \mathbf{M} = \nabla \times [\mathbf{r}(\nabla^2\psi + k^2\psi)]. \quad (3.2)$$

Adicional a \mathbf{M} , se define el vector \mathbf{N} como [bohren1998absorption](#)

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla \times \mathbf{M}}{k}, \quad (3.3)$$

cuyo laplaciano es $\nabla^2 \mathbf{N} = \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{M}/k) = \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{M}/k)$, y por tanto la ecuación de Helmholtz para \mathbf{N} es

$$\nabla^2 \mathbf{N} + k^2 \mathbf{N} = \nabla \times \left(\frac{\nabla^2 \mathbf{M}}{k} \right) + k \nabla \times \mathbf{M} = \frac{1}{k} \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{M} + k^2 \mathbf{M}). \quad (3.4)$$

De las Ecs. (3.2) y (3.4) concluimos que los campos \mathbf{M} y \mathbf{N} cumplen con la ecuación de Helmholtz vectorial si, y sólo si, la función escalar ψ cumple con la

ecuación de Helmholtz escalar. Si este es el caso, entonces, el rotacional de \mathbf{N} está dado por

$$\nabla \times \mathbf{N} = \nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{M}}{k} \right) = -\frac{\nabla^2 \mathbf{M}}{k} = \frac{k^2 \mathbf{M}}{k} = k\mathbf{M}. \quad (3.5)$$

Los campos vectoriales \mathbf{M} y \mathbf{N} son conocidos como los *armónicos esféricos vectoriales*, ψ como su función generadora y \mathbf{r} como el vector de guía o vector piloto **bohren1998absorption**. Los armónicos esféricos vectoriales \mathbf{M} y \mathbf{N} cumplen con tener divergencia nula y que el rotacional de uno es proporcional al otro [Ecs. (3.3) y (3.5)], es decir, que cumplen con las ecuaciones de Maxwell sin fuentes [Ecs. (1.32)-(1.35)] siempre que se cumpla que

ψ : Función generadora de los armónicos esféricos vectoriales

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0. \quad (3.6)$$

3.1. Solución con geometría esférica

Para poder encontrar las soluciones del campo esparcido por una esfera basta entonces con encontrar las soluciones de la Ec. (3.6) con la geometría deseada e imponer las condiciones a la frontera de los campos EMs. Suponiendo una partícula esférica es conveniente emplear coordenadas esféricas (r, θ, φ) , en las que la función generadora de los armónicos vectoriales debe cumplir con la ecuación

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + k^2 \psi = 0. \quad (3.7)$$

Al resolver la Ec. (3.7) es posible construir un conjunto de funciones linealmente independientes que sean una base para los campos EMs incidente, esparcido y dentro de la esfera, lo que permite determinar, mediante las condiciones a la frontera de los campos EMs, la forma de la matriz de esparcimiento [Ec. (2.7)].

Para resolver la Ec. (3.7) se emplea el método de separación de variables donde se propone que ψ sea el producto de tres funciones y cada una de éstas depende únicamente en una variable, es decir,

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi). \quad (3.8)$$

Sustituyendo la Ec. (3.8) en la Ec. (3.7), multiplicando por $r^2/R\Theta\Phi$ y despejando los términos que dependen únicamente de r , se obtiene como resultado que una función con dependencia radial es igual a una función con dependencia angular, por lo tanto se igualan a una constante $\ell(\ell+1)$, es decir

$$\overbrace{\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2}^{\text{radial}} = \ell(\ell+1) = \underbrace{-\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}}_{\text{angular}}. \quad (3.9)$$

Si la parte angular de la Ec. (3.9) se multiplica por $\sin^2 \theta$, y se despejan los términos que dependen de θ , se obtiene que una función que depende únicamente

de θ es igual a una que depende únicamente de φ , por lo que ambas partes se igualan a la constante m^2 . Tanto ℓ en la Ec. (3.9), como m son constantes que se determinan ante condiciones impuestas a ψ . Tras este procedimiento se concluye que las funciones $R(r)$, $\Theta(\theta)$, y $\Phi(\varphi)$ cumplen con las ecuaciones

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + m^2 \Phi = 0. \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + [k^2 r^2 - \ell(\ell+1)] R = 0. \quad (3.12)$$

Dado que ψ debe ser una función con periodicidad 2π en φ , es decir que $\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$, las soluciones linealmente independientes de la Ec. (3.10) son

$$\Phi_e(\varphi) = \cos(m\varphi), \quad (3.13)$$

$$\Phi_o(\varphi) = \sin(m\varphi), \quad (3.14)$$

con m un número natural (incluido el cero) y donde los subíndices e y o hacen referencia a que son funciones pares (*even*, e) e impares (*odd*, o), respectivamente. Las funciones $\sin(m\varphi)$ y $\cos(m\varphi)$ obedecen las relaciones de ortogonalidad

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\varphi) \cos(m'\varphi) d\varphi = 0 \quad \forall m, m', \quad (3.15)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\varphi) \sin(m'\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos(m\varphi) \cos(m'\varphi) d\varphi = \delta_{m,m'} \frac{\pi}{2}, \quad (3.16)$$

en donde $\delta_{m,m'}$ es la delta de Kronecker.

Al realizar el cambio de variable $\mu = \cos \theta$ en la Ec. (3.11), ésta se reescribe como

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 \Theta}{d\mu^2} - 2\mu \frac{d\Theta}{d\mu} + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{(1 - \mu^2)} \right] \Theta = 0,$$

cuyas soluciones son las *funciones asociadas de Legendre* $P_\ell^m(\cos \theta)$ de grado ℓ y orden m [arfken2001methods](#), imponiendo que $\ell = m, m+1, m+2, \dots$ para que la Ec. (3.11) sea finita en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ —o bien $\mu = \pm 1$ —. Las funciones asociadas de Legendre cumplen con la relación de ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 P_\ell^m(\mu) P_{\ell'}^m(\mu) d\mu = \delta_{\ell,\ell'} \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}. \quad (3.17)$$

Asimismo, las funciones asociadas de Legendre se reducen a los polinomios de Legendre cuando $m = 0$, además de que las funciones asociadas y los polinomios de Legendre se relacionan mediante la identidad [arfken2001methods](#)

$$P_\ell^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{m/2} \frac{d^m P_\ell(\mu)}{d\mu^m}, \quad (3.18)$$

de donde se deduce que $P_\ell^m(\pm 1) = 0$ para toda m distinta de cero.

Para resolver la Ec. (3.12) se emplea el cambio de variable $\rho = kr$ y se define la función $Z = R\sqrt{\rho}$, por lo que la ecuación radial se reescribe como

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dZ}{d\rho} \right) + \left[\rho^2 - \left(\ell + \frac{1}{2} \right)^2 \right] Z = 0, \quad (3.19)$$

cuyas soluciones son las *funciones esféricas de Bessel* j_ℓ y y_ℓ o cualquier combinación lineal de ellas, por lo que de forma general las soluciones de la Ec. (3.19) son [arfken2001methods](#)

$$j_\ell(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} J_{\ell+1/2}(\rho), \quad (3.20a)$$

$$y_\ell(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} Y_{\ell+1/2}(\rho), \quad (3.20b)$$

$$h_\ell^{(1)}(\rho) = j_\ell(\rho) + iy_\ell(\rho), \quad (3.20c)$$

$$h_\ell^{(2)}(\rho) = j_\ell(\rho) - iy_\ell(\rho), \quad (3.20d)$$

en donde J_ℓ y Y_ℓ son las *funciones de Bessel del primer y segundo tipo*, respectivamente, y h_ℓ son las *funciones esféricas de Bessel del tercer tipo*, también denominadas como *funciones esféricas de Hankel*. Todas las funciones esféricas de Bessel z_ℓ —donde z_ℓ es cualquier función de las Ecs. (3.20)— puede ser calculada mediante relaciones de recurrencia¹ [arfken2001methods](#).

Dado que las soluciones para la ecuación azimutal son las Ecs. (3.14) y (3.13), para la polar, Ec. (3.18) y para la radial, Ecs. (3.20), las funciones generadoras de los armónicos esféricos vectoriales son

$$\psi_{em\ell} = \cos(m\varphi) P_\ell^m(\cos\theta) z_\ell(kr), \quad (3.21)$$

$$\psi_{om\ell} = \sin(m\varphi) P_\ell^m(\cos\theta) z_\ell(kr). \quad (3.22)$$

Al emplear las Ecs. (3.21) y (3.22) en la Ec. (3.1) se obtiene como resultado $\mathbf{M}_{em\ell}$ y $\mathbf{M}_{om\ell}$, dados por las expresiones

Armónicos esféricos vectoriales $\mathbf{M}_{em\ell}$ y $\mathbf{M}_{om\ell}$

$$\mathbf{M}_{em\ell} = -m \sin(m\varphi) z_\ell(kr) \frac{P_\ell^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta - \cos(m\theta) z_\ell(kr) \frac{dP_\ell^m(\cos\theta)}{d\theta} \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \quad (3.23a)$$

$$\mathbf{M}_{om\ell} = m \cos(m\varphi) z_\ell(kr) \frac{P_\ell^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin(m\theta) z_\ell(kr) \frac{dP_\ell^m(\cos\theta)}{d\theta} \hat{\mathbf{e}}_\varphi. \quad (3.23b)$$

Para el cálculo $\mathbf{N}_{em\ell}$ y $\mathbf{N}_{om\ell}$ se sustituyen las Ecs. (3.23a) y (3.23b) en la Ec. (3.3). Para simplificar las expresiones de las componentes radiales de $\mathbf{N}_{em\ell}$ y

¹Todas las funciones esféricas de Bessel cumplen: $z_{\ell-1}(\rho) + z_{\ell+1}(\rho) = (2\ell+1)z_\ell(\rho)/\rho$ y $(2\ell+1) dz_\ell(\rho)/d\rho = \ell z_{\ell-1}(\rho) - (\ell+1)z_{\ell+1}(\rho)$, con $j_0(\rho) = \sin \rho/\rho$ y $j_1(\rho) = \sin \rho/\rho^2 - \cos \rho/\rho$, $y_0(\rho) = -\cos \rho/\rho$ y $y_1(\rho) = -\cos \rho/\rho^2 - \sin \rho/\rho$.

$\mathbf{N}_{om\ell}$, se agrupan los términos que dependen de φ y kr y, dado que las funciones asociadas de Legendre cumplen con la relación

$$-\ell(\ell+1)P_\ell^m(\cos\theta) = \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dP_\ell^m(\cos\theta)}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} P_\ell^m(\cos\theta),$$

que es una consecuencia de la Ec. (3.11), las expresiones de $\mathbf{N}_{em\ell}$ y $\mathbf{N}_{om\ell}$ son

Armónicos esféricos vectoriales $\mathbf{N}_{em\ell}$ y $\mathbf{N}_{om\ell}$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{em\ell} = & \cos(m\varphi) \frac{z_\ell(kr)}{kr} \ell(\ell+1) P_\ell^m(\cos\theta) \hat{\mathbf{e}}_r \\ & + \cos(m\varphi) \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} \left[kr z_\ell(kr) \right] \frac{dP_\ell^m(\cos\theta)}{d\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ & - m \sin(m\varphi) \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} \left[kr z_\ell(kr) \right] \frac{P_\ell^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \end{aligned} \quad (3.23c)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{om\ell} = & \sin(m\varphi) \frac{z_\ell(kr)}{kr} \ell(\ell+1) P_\ell^m(\cos\theta) \hat{\mathbf{e}}_r \\ & + \sin(m\varphi) \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} \left[kr z_\ell(kr) \right] \frac{dP_\ell^m(\cos\theta)}{d\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ & + m \cos(m\varphi) \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} \left[kr z_\ell(kr) \right] \frac{P_\ell^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \hat{\mathbf{e}}_\varphi. \end{aligned} \quad (3.23d)$$

3.2. Relaciones de ortogonalidad

Los armónicos esféricos vectoriales son solución a la ecuación de Helmholtz, por lo que cualquier solución de los campos EMs puede escribirse como una serie infinita en términos de las Ecs. (3.23). Para resolver el problema de los campos EMs esparcidos por una partícula esférica, esto es, determinar las componentes de la matriz de esparcimiento \mathbb{S} de la Ec. (2.7), se expande una onda plana \mathbf{E}^i en la base de los armónicos esféricos vectoriales. Para esto, calculemos las relaciones de ortogonalidad de los armónicos esféricos vectoriales. Para facilitar la notación, definamos el producto $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle_{\theta, \varphi}$ entre dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} como

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle_{\theta, \varphi} \equiv \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \sin\theta d\theta d\varphi$$

Las funciones $\sin(m\varphi)$ y $\cos(m\varphi)$ obedecen las relaciones de ortogonalidad de la Ec. (3.15), por lo que el producto entre $\mathbf{M}_{em\ell}$ y $\mathbf{M}_{om'\ell'}$, y $\mathbf{N}_{em\ell}$ y $\mathbf{N}_{om'\ell'}$ es

$$\langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{M}_{om'\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = \langle \mathbf{N}_{em\ell}, \mathbf{N}_{om'\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = 0 \quad \forall m, m', \ell, \ell', \quad (3.24)$$

así como también

$$\langle \mathbf{M}_{om\ell}, \mathbf{N}_{em'\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = \langle \mathbf{M}_{om\ell}, \mathbf{N}_{om'\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = \langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{N}_{em'\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = 0 \quad \forall m, m', \ell, \ell'. \quad (3.25)$$

pues \mathbf{M} tiene componente nula en $\hat{\mathbf{e}}_r$ y en los demás términos se encuentra la Ec. (3.16). Las Ecs. (3.15) y (3.16) implican que todos los armónicos esféricos vectoriales orden m distinto son ortogonales entre sí.

El producto interior entre $\mathbf{M}_{em\ell}$ y $\mathbf{N}_{om\ell'}$, empleando el resultado de la Ec. (3.16) con $m = m'$, está dado por

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{N}_{om\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} &= -\frac{\pi}{2} \frac{z_\ell(\rho)}{\rho} \frac{dz_{\ell'}(\rho)}{d\rho} m \int_0^\pi \left[P_\ell^m(\cos\theta) \frac{dP_{\ell'}^m(\cos\theta)}{d\theta} + \frac{dP_\ell^m(\cos\theta)}{d\theta} P_{\ell'}^m(\cos\theta) \right] d\theta \\ &= -\frac{\pi}{2} \frac{z_\ell(\rho)}{\rho} \frac{dz_{\ell'}(\rho)}{d\rho} m \int_0^\pi \frac{d}{d\theta} [P_\ell^m(\cos\theta) P_{\ell'}^m(\cos\theta)] d\theta \\ &= -\frac{\pi}{2} \frac{z_\ell(\rho)}{\rho} \frac{dz_{\ell'}(\rho)}{d\rho} m \left[P_\ell^m(\cos\theta) P_{\ell'}^m(\cos\theta) \right]_0^\pi.\end{aligned}\quad (3.26)$$

Mediante un procedimiento semejante se obtiene que $\langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{N}_{om\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = \langle \mathbf{M}_{om\ell}, \mathbf{N}_{em\ell'} \rangle_{\theta, \varphi}$. Haciendo uso de la relación entre las funciones asociadas de Legendre con los polinomios de Legendre [Ec. (3.18)] se obtiene que $P_\ell^m(\cos\theta) = 0$ para $\theta = 0, \pi$ y $m \neq 0$. Sin embargo, si en la Ec. (3.26) m es igual a cero, el producto interior también es nulo, por lo que se cumple que

$$\langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{N}_{om\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = \langle \mathbf{M}_{om\ell}, \mathbf{N}_{em\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = 0 \quad \forall \ell, \ell' m. \quad (3.27)$$

Las expresiones del producto interior entre $\mathbf{M}_{em\ell}$ y $\mathbf{M}_{em\ell'}$, y $\mathbf{N}_{em\ell}$ y $\mathbf{N}_{em\ell'}$, empleando el resultado de la Ec. (3.16) con $m = m'$, y la relación de ortogonalidad de las funciones asociadas de Legendre [Ec. (3.17)] son

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{M}_{em\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} &= \frac{\pi}{2} z_\ell(\rho) z_{\ell'}(\rho) \times \int_0^\pi \left[\frac{m^2}{\sin^2\theta} P_\ell^m(\cos\theta) P_{\ell'}^m(\cos\theta) + \frac{dP_\ell^m(\cos\theta)}{d\theta} \frac{dP_{\ell'}^m(\cos\theta)}{d\theta} \right] \sin\theta d\theta \\ \langle \mathbf{N}_{em\ell}, \mathbf{N}_{em\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{z_\ell(\rho)}{\rho} \ell(\ell+1) \right]^2 \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_\ell^{\ell'} + \frac{\pi}{2} \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} [\rho z_\ell(\rho)] \frac{d}{d\rho} [\rho z_{\ell'}(\rho)] \\ &\quad \times \int_0^\pi \left[\frac{m^2}{\sin^2\theta} P_\ell^m(\cos\theta) P_{\ell'}^m(\cos\theta) + \frac{dP_\ell^m(\cos\theta)}{d\theta} \frac{dP_{\ell'}^m(\cos\theta)}{d\theta} \right] \sin\theta d\theta.\end{aligned}$$

Asimismo, se cumple que $\langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{M}_{em\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = \langle \mathbf{M}_{om\ell}, \mathbf{M}_{om\ell'} \rangle_{\theta, \varphi}$ y $\langle \mathbf{N}_{em\ell}, \mathbf{N}_{em\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = \langle \mathbf{N}_{om\ell}, \mathbf{N}_{om\ell'} \rangle_{\theta, \varphi}$. Sustituyendo $P_\ell^m(\cos\theta)$ en la Ec. (3.11) y multiplicándola por $P_{\ell'}^m(\cos\theta)$, operando de la misma forma intercambiando los papeles de $P_\ell^m(\cos\theta)$ y $P_{\ell'}^m(\cos\theta)$ y sumando ambos resultados se llega a la expresión

$$\begin{aligned}2 \frac{m^2}{\sin^2\theta} P_\ell^m P_{\ell'}^m \sin\theta &= P_\ell \frac{d}{d\theta} \left[\sin\theta \frac{dP_{\ell'}^m}{d\theta} \right] P_{\ell'} \frac{d}{d\theta} \left[\sin\theta \frac{dP_\ell^m}{d\theta} \right] + \ell(\ell+1) P_\ell^m P_{\ell'}^m \sin\theta \\ &\quad + \ell'(\ell'+1) P_\ell^m P_{\ell'}^m \sin\theta,\end{aligned}\quad (3.28)$$

en donde se obvia el argumento $\cos\theta$. Dado que

$$\frac{d}{d\theta} \left[P_{\ell'}^m \sin\theta \frac{dP_\ell^m}{d\theta} \right] = P_{\ell'}^m \frac{d}{d\theta} \left[\sin\theta \frac{dP_\ell^m}{d\theta} \right] + \sin\theta \frac{dP_{\ell'}^m}{d\theta} \frac{dP_\ell^m}{d\theta},$$

sumando $2 \sin\theta dP_{\ell'}^m d\theta dP_\ell^m d\theta$ de ambos lados de la Ec. (3.28) y agrupando términos, se obtiene que el integrando presente en los productos interiores de

$\mathbf{M}_{em\ell}$ y $\mathbf{M}_{em\ell'}$, y $\mathbf{N}_{em\ell}$ y $\mathbf{N}_{em\ell'}$ es

$$\left[\frac{m^2}{\sin^2 \theta} P_\ell^m P_{\ell'}^m + \frac{dP_\ell^m}{d\theta} \frac{dP_{\ell'}^m}{d\theta} \right] \sin \theta = \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{dP_{\ell'}^m}{d\theta} P_\ell^m + \sin \theta \frac{dP_\ell^m}{d\theta} P_{\ell'}^m \right] + \frac{1}{2} \ell(\ell+1) P_\ell^m P_{\ell'}^m \sin \theta + \frac{1}{2} \ell'(\ell'+1) P_\ell^m P_{\ell'}^m \sin \theta,$$

en donde el primer término de la suma se desvanece al evaluarse en $\theta = 0, \pi$ y los últimos cumplen con la relación de ortogonalidad de la Ec. (3.17). Por lo tanto

$$\langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{M}_{em\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = \langle \mathbf{M}_{om\ell}, \mathbf{M}_{om\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = \delta_\ell^{\ell'} \pi z_\ell(\rho)^2 \frac{\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \quad \forall \ell, \ell', m, \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N}_{em\ell}, \mathbf{N}_{em\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} &= \langle \mathbf{N}_{om\ell}, \mathbf{N}_{om\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} \\ &= \delta_\ell^{\ell'} \pi \frac{\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \left\{ \left[\frac{z_\ell(\rho)}{\rho} \right]^2 \ell(\ell+1) + \left[\frac{1}{\rho} \frac{d[\rho z_\ell(\rho)]}{d\rho} \right]^2 \right\} \quad \forall \ell, \ell', m. \end{aligned} \quad (3.30)$$

3.3. Expansión de una onda plana

Sea una onda plana con longitud de onda λ , polarizada en la dirección x , y caracterizada por el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}^i$ propagándose en la dirección z en un medio con índice de refracción n_m . En la base de los vectores ortonormales polares la onda plana se escribe como

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}^i &= E_0 e^{ikz} \hat{\mathbf{e}}_x \\ &= E_0 e^{ikr \cos \theta} (\sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_r + \cos \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_\phi), \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde E_0 es la magnitud del campo eléctrico y $k = 2\pi n_m / \lambda$. La expansión de la ec. (3.31) en términos de los armónicos esféricos vectoriales [ecs. (3.23)] es

$$\vec{\mathbf{E}}^i = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=m}^{\infty} \left[B_{em\ell} \vec{\mathbf{M}}_{em\ell} + B_{om\ell} \vec{\mathbf{M}}_{om\ell} + A_{em\ell} \vec{\mathbf{N}}_{em\ell} + A_{om\ell} \vec{\mathbf{N}}_{om\ell} \right]. \quad (3.32)$$

Con las expresiones de los armónicos esféricos vectoriales [Ec. (3.23)] y con sus relaciones de ortogonalidad se pueden calcular los coeficientes de la expansión de una onda plana en esta base [Ec. (3.32)]. Dado que en la componente radial hay dependencia con $\cos \varphi$, se sigue que $m = 1$ al comparar con las expresiones de $\mathbf{N}_{em\ell}$ [Ec. (3.23c)] y $\mathbf{N}_{om\ell}$ [Ec. (3.23d)] —únicos elementos con componente radial—, y además que $A_{om\ell} = 0$ pues $\mathbf{N}_{om\ell}$ es proporcional a $\sin \varphi$ en esta componente. Asimismo, por la dependencia con $\sin \varphi$ en la componente $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$, $B_{em\ell} = 0$ pues $\mathbf{M}_{em\ell}$ es proporcional a $\cos \varphi$ en dicha entrada.

La onda plana no tiene ninguna divergencia, por lo que se escoge $z_\ell = j_\ell$. Esto se denota en los armónicos esféricos vectoriales con el superíndice (1). Se

escribe entonces a la onda plana como

$$\mathbf{E}^i = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left[B_{o1\ell} \mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)} + A_{e1\ell} \mathbf{N}_{e1\ell}^{(1)} \right], \quad (3.33)$$

con

$$\begin{aligned} B_{o1\ell} &= \frac{\langle \mathbf{E}^i, \mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)} \rangle_{\theta, \varphi}}{\langle \mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)}, \mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)} \rangle_{\theta, \varphi}}, \\ A_{e1\ell} &= \frac{\langle \mathbf{E}^i, \mathbf{N}_{e1\ell}^{(1)} \rangle_{\theta, \varphi}}{\langle \mathbf{N}_{e1\ell}^{(1)}, \mathbf{N}_{e1\ell}^{(1)} \rangle_{\theta, \varphi}}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Empleando la Ec. (3.29) con $m = 1$, se calcula el denominador del coeficiente $B_{o1\ell}$, como

$$\langle \mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)}, \mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)} \rangle_{\theta, \varphi} = \pi \frac{[j_\ell(\rho)\ell(\ell+1)]^2}{2\ell+1}, \quad (3.35)$$

y con la Ec. (3.23b) y la Ec. (3.31) se calcula

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}^i, \mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)} \rangle_{\theta, \varphi} &= \frac{E_0\pi}{2} j_\ell(\rho) \int_0^\pi \left(\cos\theta P_\ell^1(\cos\theta) + \sin\theta \frac{dP_\ell^1(\cos\theta)}{d\theta} \right) e^{i\rho\cos\theta} d\theta, \\ &= \frac{E_0\pi}{2} j_\ell(\rho) \int_0^\pi \frac{d}{d\theta} [\sin\theta P_\ell^1(\cos\theta)] e^{i\rho\cos\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Considerando la relación entre las funciones asociadas de Legendre y los polinomios de Legendre [Ec. (3.18)] con $m = 1$, se cumple que $P_\ell^1(\mu) = -dP_\ell(\mu)/d\theta$. Además, los polinomios de Legendre cumplen con la Ec. (3.11) con $m = 0$, es decir,

$$\frac{d}{d\theta} \left[\sin\theta \frac{dP_\ell(\cos\theta)}{d\theta} \right] = -\ell(\ell+1)P_\ell(\cos\theta) \sin\theta,$$

por lo que la Ec. (3.36) es

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}^i, \mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)} \rangle_{\theta, \varphi} &= \frac{E_0\pi}{2} j_\ell(\rho) \int_0^\pi -\frac{d}{d\theta} \left[\sin\theta \frac{dP_\ell(\cos\theta)}{d\theta} \right] e^{i\rho\cos\theta} d\theta \\ &= \frac{E_0\pi}{2} j_\ell(\rho) \ell(\ell+1) \int_0^\pi P_\ell(\cos\theta) \sin\theta e^{i\rho\cos\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (3.37)$$

La generalización de las integrales de Poisson de Gegenbauer relaciona a los polinomios de Legendre con la función esférica de Bessel de primer tipo mediante la relación

$$j_\ell(\rho) = \frac{1}{2i^\ell} \int_0^\pi P_\ell(\cos\theta) \sin\theta e^{i\rho\cos\theta} d\theta,$$

por lo que la Ec. (3.37) se reescribe como

$$\langle \mathbf{E}^i, \mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)} \rangle_{\theta, \varphi} = E_0\pi [j_\ell(\rho)]^2 \ell(\ell+1) i^\ell. \quad (3.38)$$

Calculando el cociente de la Ec. (3.38) con (3.35), se calcula el coeficiente $B_{o1\ell}$, dado por la expresión

$$B_{o1\ell} = i^\ell E_0 \frac{(2\ell+1)}{\ell(\ell+1)}. \quad (3.39)$$

El denominador del coeficiente $A_{e,1,\ell}$, empleando la Ec. (3.30), es

$$\langle \mathbf{N}_{e1\ell}^{(1)}, \mathbf{N}_{e1\ell}^{(1)} \rangle_{\theta,\varphi} = \pi \frac{[\ell(\ell+1)]^2}{2\ell+1} \left\{ \left[\frac{z_\ell(\rho)}{\rho} \right]^2 \ell(\ell+1) + \left[\frac{1}{\rho} \frac{d[\rho z_\ell(\rho)]}{d\rho} \right]^2 \right\} \quad (3.40)$$

Falta calcular el numerador del coeficiente Al emplear las Ecs. (3.29) y (3.30) con $m = 1$, y las condiciones de ortogonalidad de los armónicos esféricos vectoriales, se calcula la expresión de la onda plana en una base esférica, dada por

$$\mathbf{E}^i = E_0 \sum_{\ell=1}^{\infty} i^\ell \frac{2\ell+1}{\ell(\ell+1)} \left(\mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)} - i \mathbf{N}_{e1\ell}^{(1)} \right). \quad (3.41a)$$

El campo magnético incidente se calcula empleando la Ley de Farady-Lenz [Ec. (??)], cuyo resultado es

$$\mathbf{H}^i = \frac{-k_m}{\omega \mu_m} \sum_{\ell=1}^{\infty} E_\ell \left(\mathbf{M}_{e1\ell}^{(1)} + i \mathbf{N}_{o1\ell}^{(1)} \right), \quad (3.41b)$$

con $E_\ell = E_0 i^\ell (2\ell+1)/[\ell(\ell+1)]$.

3.4. Ejercicios sugeridos

Ejercicio 3.1 Demostrar que el campo vectorial $\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{r}\psi)$ es ortogonal a \mathbf{r} suponiendo que ψ es una función suave.

Solución: Empleando la convención de la suma de Einstein con ϵ_{ijk} el símbolo de Levi-Civita y $\partial_j \equiv \partial/\partial x_j$, se calcula la componente i de \mathbf{M} como

$$\begin{aligned} M_i &= [\nabla \times (\mathbf{r}\psi)]_i = \epsilon_{ijk} \partial_j (r_k \psi) \\ &= \psi \epsilon_{ijk} \partial_j (r_k) - \epsilon_{ikj} r_k \partial_j \psi \\ &= \psi [\nabla \times \mathbf{r}]_i - [\mathbf{r} \times \nabla \psi]_i \\ &= -[\mathbf{r} \times \nabla \psi]_i. \end{aligned}$$

Por lo que se demuestra que $\mathbf{M} \cdot \mathbf{r} = 0$.

Ejercicio 3.2 Demostrar que el operador rotacional $\nabla \times$ y el laplaciano ∇^2 conmutan al aplicarse a un campo vectorial \mathbf{A} arbitrario, pero con segundas derivadas continuas.

Solución: Para un campo vectorial arbitrario \mathbf{A} se cumple que

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}),$$

por lo que el rotacional del laplaciano de \mathbf{A} es

$$\nabla \times (\nabla^2 \mathbf{A}) = \nabla \times [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})] - \nabla \times [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})] = -\nabla \times [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})]$$

ya que el rotacional del gradiente de cualquier función es nulo. Además, al sustituir $\mathbf{A} \rightarrow \nabla \times \mathbf{A}$ en la expresión del laplaciano de \mathbf{A} y considerando que la divergencia del rotacional de cualquier función es nulo, se obtiene que

$$\nabla^2 (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla[\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})] - \nabla \times [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})] = -\nabla \times [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})].$$

Por tanto, ∇^2 y $\nabla \times$ son operadores que conmutan.

Ejercicio 3.3 Demostrar que $\nabla^2(\mathbf{r}\psi) = 2\nabla\psi + \mathbf{r}\nabla^2\psi$, suponiendo que ψ es una función suave.

Solución: Empleando la convención de la suma de Einstein

$$\begin{aligned} [\nabla^2(\mathbf{r}\psi)]_i &= \partial_{jj}^2(r_i\psi) \\ &= \partial_j[\partial_j(r_i)\psi + r_i\partial_j\psi] \\ &= \partial_{jj}r_i + 2\partial_jr_i\partial_j\psi + r_i\partial_{jj}^2\psi, \end{aligned}$$

donde $\partial_jr_i = \delta_{ij}$ con δ_{ij} la delta de Kronecker. Dado que $\partial_{jj}r_i$ y que $\delta_{ij}\partial_j\psi = \partial_i\psi$, concluimos que

$$[\nabla^2(\mathbf{r}\psi)]_i = 2\partial_i\psi + r_i\partial_{jj}^2\psi,$$

que es la igualdad que se quería demostrar.

Capítulo 4

Esparcimiento y absorción de una esfera

Esta parte corresponde a **Eduardo**. El contenido propuesto es

- Citar a las Condiciones a la frontera de la esfera
- Cálculo del campo dentro y fuera de la esfera (Coefficientes de Mie)
- Matriz de esparcimiento
- Análisis de a_n , b_n y las $S_{1,2}$

Capítulo 5

Casos particulares

Esta parte aún no tiene autor asignado. El contenido propuesto es

- Gota de agua
- Modelo de Drude (material plasmónico)
- Oro y plata (con experimento)
- Tungsteno (con experimento)

Bibliografía

- jackson1999electrodynamics** John David Jackson. *Classical electrodynamics*. 3.^a ed. John Wiley & Sons, 1999 (vid. págs. [1-3](#)).
- reitz1993foundations** John R. Reitz, Frederick J. Milford y Robert W Christy. *Foundations of Electromagnetic Teory*. 4.^a ed. Addison-Wesley Pub. Co., 1993 (vid. pág. [2](#)).
- griffiths2013electrodynamics** David Jeffrey Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. 4^o. Pearson, 2013 (vid. págs. [2-8](#)).
- born2005principles** Max Born y Wolf Emil. *Principle of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Intergerence and Diffraction of Light*. 7.^a ed. Cambridge University Press, 2005 (vid. págs. [6](#), [8](#)).
- bohren1998absorption** Craig F Bohren y Donald R Huffman. *Absorption and scattering of light by small particles*. John Wiley & Sons, 1998 (vid. págs. [6](#), [8](#), [10](#), [11](#), [13](#), [14](#)).
- arfken2001methods** George Brown Arfken y Hans J Weber. *Mathematical methods for physicists*. Harcourt Academic Press, 2001 (vid. págs. [15](#), [16](#)).

Índice alfabético

- Armónicos esféricos vectoriales, [14](#)
 - M** y **N**, [17](#)
 - función generadora
 - solución azimutal de la, [15](#)
 - solución general, [16](#)
 - solución polar de la, [15](#)
 - solución radial de la, [16](#)
 - función generadora de los, [14](#)
- Bessel
 - ecuación esférica de, [16](#)
 - funciones esféricas de, [16](#)
 - relaciones de recurrencia de las, [16](#)
- Ecuación
 - asociada de Legendre, [15](#)
 - esférica de Bessel, [16](#)
- Electromagnéticos
 - campos
 - lejano, [10](#)
 - operador de campo lejano, [10](#)
- Esparcimiento
 - matriz de, [11](#)
- Hankel, *véase* Bessel
- funciones esféricas de, [16](#)
- Kronecker
 - Delta de, [15](#)
- Legendre
 - ecuación asociada de, [15](#)
 - funciones asociadas de, [15](#)
 - relaciones de ortogonalidad de las, [15](#)
 - polinomios de, [15](#)
- Ortogonalidad
 - funciones asociadas de
 - Legendre, relaciones de, [15](#)
 - seno y coseno, relaciones de, [15](#)
- Plano
 - de esparcimiento, [10](#)
- Polarización
 - respecto al plano de esparcimiento, [10](#)
 - paralela (\parallel), [10](#)
 - perpendicular (\perp), [10](#)
- Separación de variables, [14](#)