Solución de Mie

Jonathan, Amauri, Isabel y Eduardo

30 de agosto de 2019

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Dedicado a todos nosotros que estudiamos esto y lo escribimos porque nos odiamos un poquito :)

Introduction

Aquí iría el texto que todos vamos a escribir al final, en donde hablamos del propósito del libro y esas cosas.

Capítulo 1

Repaso de electromagnetismo

Esta parte corresponde a **Isabel**. El contenido propuesto es

- Ecuaciones de Maxwell
- Considerar la Ec. de Helmholts
- Hablar sobre los campos EM armónicos
- Vector de Poynting
- Condiciones a la frontera de forma general
- Condiciones a la frontera considerando una esfera

Capítulo 2

Teoría general de esprcimiento

Esta parte aún no tiene a alguien asignado. El contenido propuesto es

- Matriz de esparcimiento general
- Teorema óptico

Capítulo 3

Los armónicos esféricos vectoriales

Para encontrar una solución al problema de esparcimiento y absorción de la luz por una partícula esférica, se considerará una región del espacio libre de fuentes y que los campos EM son armónicos en el tiempo, como se presentan en las Ecs. (**??**) Isabel, pondrás las ecuaciones de Maxwell con su transformada de Fourier?. Asimismo, se plantea un base de funciones vectoriales que permitan escribir a los campos EM como una combinación lineal de ellos.

Se propone un campo vectorial $\mathbf{M}$ tal que [**?**]

$$\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{r}\psi)\,, \tag{3.1}$$

donde ψ es una función escalar y $\mathbf{r}$ el vector de posición; dado que $\mathbf{M}$ es el rotacional de $\mathbf{r}\psi$, se cumple que $\nabla \cdot \mathbf{M} = \mathbf{0}$. Asimismo, al calcular el rotacional de $\mathbf{r}\psi$, empleando la convención de la suma de Einstein y con ϵ_{ijk} el símbolo de Levi-Civita, se obtiene que

$$M_i = [\nabla \times (\mathbf{r}\psi)]_i = \epsilon_{ijk}\partial_j(r_k\psi) = \psi\epsilon_{ijk}\partial_j(r_k) - \epsilon_{ikj}r_k\partial_j\psi = \psi[\nabla \times \mathbf{r}]_i - [\mathbf{r} \times \nabla\psi]_i = -[\mathbf{r} \times \nabla\psi]_i, \tag{3.2}$$

es decir, que $\mathbf{M}$ y $\mathbf{r}$ son vectores perpendiculares.

La ecuación de Helmholtz para $\mathbf{M}$, dado que el operador laplaciano y el rotacional conmutan[1], es

$$\nabla^2\mathbf{M} + k^2\nabla\mathbf{M} = \nabla \times \left[\nabla^2 (\mathbf{r}\psi) + k^2 (\mathbf{r}\psi)\right], \tag{3.3}$$

y como $\nabla^2(\mathbf{r}\psi) = 2\nabla\psi + \mathbf{r}\nabla^2\psi$, ya que

$$[\nabla^2(\mathbf{r}\psi)]_i = \partial^2_{jj}(r_i\psi) = \partial_j[\partial_j(r_i)\psi + r_i\partial_j\psi] = \partial_{jj}r_i + 2\partial_j r_i\partial_j\psi + r_i\partial^2_{jj}\psi, \tag{3.4}$$

[1] Para un campo vectorial arbitrario $\mathbf{A}$ se cumple que $\nabla^2\mathbf{A} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})$, por lo que el rotacional del laplaciano de $\mathbf{A}$ es $\nabla\times(\nabla^2\mathbf{A}) = \nabla\times[\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})] - \nabla\times[\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})] = -\nabla\times[\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})]$ pues el rotacional del gradiente de cualquier función es nulo. Además, al sustituir $\mathbf{A} \to \nabla\times\mathbf{A}$ en la expresión del laplaciano de $\mathbf{A}$ y considerando que la divergencia del rotacional de cualquier función es nulo, se obtiene que$\nabla^2(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla[\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})] - \nabla\times[\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})] = -\nabla\times[\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})]$. Por tanto, ∇^2 y $\nabla\times$ con operadores que conmutan.

donde $\partial_j r_i = \delta_{ij}$, con δ_{ij} la delta de Kronecker, se cumple que $[\nabla^2(\mathbf{r}\psi)]_i = 2\partial_i\psi + r_i\partial_{jj}\psi = 2[\nabla\psi]_i + [\mathbf{r}\nabla^2\psi]_i$, y por lo tanto $\nabla\times(\nabla\psi) = 0$, la ecuación de Helmholtz para $\mathbf{M}$ puede reescribirse como

$$\nabla^2\mathbf{M} + k^2\nabla\mathbf{M} = \nabla\times\left[\mathbf{r}\left(\nabla^2\psi + k^2\psi\right)\right]. \tag{3.5}$$

Adicional a $\mathbf{M}$, se define el vector $\mathbf{N}$ como [?]

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla\times\mathbf{M}}{k}, \tag{3.6}$$

cuyo laplaciano es $\nabla^2\mathbf{N} = \nabla^2(\nabla\times\mathbf{M}/k) = \nabla\times(\nabla^2\mathbf{M}/k)$, y por tanto la ecuación de Helmholtz para $\mathbf{N}$ es

$$\nabla^2\mathbf{N} + k^2\mathbf{N} = \nabla\times\left(\frac{\nabla^2\mathbf{M}}{k}\right) + k\nabla\times\mathbf{M} = \frac{1}{k}\nabla\times\left(\nabla^2\mathbf{M} + k^2\mathbf{M}\right).$$

Los campos $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$ cumplen con la ecuación de Helmholtz vectorial [Ec. (**??**)] si, y sólo si, la función escalar ψ cumple con la ecuación de Helmholtz escalar $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$. Si este es el caso, entonces, el rotacional de $\mathbf{N}$ está dado por

$$\nabla\times\mathbf{N} = \nabla\times\left(\frac{\nabla\times\mathbf{M}}{k}\right) = \frac{\nabla(\nabla\cdot\mathbf{M}) - \nabla^2\mathbf{M}}{k} = -\frac{\nabla^2\mathbf{M}}{k} = \frac{k^2\mathbf{M}}{k} = k\mathbf{M}. \tag{3.7}$$

Los campos vectoriales $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$ son conocidos como los *armónicos vectoriales*, ψ como su función generadora y $\mathbf{r}$ como el vector de guía o vector piloto [?]. Los armónicos vectoriales $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$ cumplen con tener divergencia nula y que el rotacional de uno es proporcional al otro [Ecs. (3.6) y (3.7)], es decir, que cumplen con las ecuaciones de Maxwell [Ecs. (**??**)] siempre que se cumpla que

ψ: Función generadora de los armónicos vectoriales

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0. \tag{3.8}$$

Cuando se considera una partícula esférica de radio a e índice de refracción n_p, inmersa en un medio denominado matriz con índice de refracción n_m (ver Fig. **??**), iluminada por una onda plana propagándose a lo largo del eje z, es conveniente emplear coordenadas esféricas (r, θ, φ), en las que la función generadora de los armónicos vectoriales debe cumplir con la ecuación

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + k^2\psi = 0. \tag{3.9}$$

Al resolver la Ec. (3.9) es posible construir un conjunto de funciones linealmente independientes que sean una base para los campos EMs incidente, esparcido y dentro de la esfera, lo que permite determinar, mediante las condiciones a la frontera de los campos EMs, la forma de la matriz de esparcimiento [Ec. (**??**)].

Para resolver la Ec. (3.9) se emplea el método de separación de variables, al proponer como solución $\psi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$. Para que ψ sea solución a la Ec.

(3.9), las funciones $R(r)$, $\Theta(\theta)$, y $\Phi(\varphi)$ deben cumplir con las ecuaciones

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\varphi^2} + m^2\Phi = 0, \tag{3.10}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta = 0, \tag{3.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left[k^2r^2 - \ell(\ell+1)\right]R = 0, \tag{3.12}$$

en donde tanto ℓ como m son constantes que se determinan mediante las condiciones impuestas a ψ. Dado que ψ debe ser una función con periodicidad 2π en φ, es decir que $\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$, las soluciones linealmente independientes de la Ec. (3.10) son

$$\Phi_e(\varphi) = \cos(m\varphi), \tag{3.13a}$$

$$\Phi_o(\varphi) = \sin(m\varphi), \tag{3.13b}$$

con m un número natural (incluido el cero) y donde los subíndices e y o hacen referencia a que son funciones pares (*even*, e) e impares (*odd*, o), respectivamente. Las funciones $\sin(m\varphi)$ y $\cos(m\varphi)$ obedecen las relaciones de ortogonalidad

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\varphi)\cos(m'\varphi)\mathrm{d}\varphi = 0 \qquad \forall\, m, m', \tag{3.14a}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\varphi)\sin(m'\varphi)\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \cos(m\varphi)\cos(m'\varphi)\mathrm{d}\varphi = \delta_{m,m'}\frac{\pi}{2}, \tag{3.14b}$$

en donde $\delta_{m,m'}$ es la delta de Kronecker.

Al realizar el cambio de variable $\mu = \cos\theta$ en la Ec. (3.11), ésta se reescribe como

$$(1-\mu^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\mu^2} - 2\mu\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\mu} + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{(1-\mu^2)}\right]\Theta = 0,$$

cuyas soluciones son las *funciones asociadas de Legendre* $P_\ell^m(\cos\theta)$ de grado ℓ y orden m [**?**], imponiendo que $\ell = m, m+1, m+2, \ldots$ para que la Ec. (3.11) sea finita en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ —o bien $\mu = \pm 1$—. Las funciones asociadas de Legendre cumplen con la relación de ortogonalidad

$$\int_{-1}^{1} P_\ell^m(\mu)P_{\ell'}^m d\mu = \delta_{\ell,\ell'}\frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}. \tag{3.15}$$

Asimismo, las funciones asociadas de Legendre se reducen a los polinomios de Legendre cuando $m = 0$, además de que las funciones asociadas y los polinomios de Legendre se relacionan mediante la identidad [**?**]

$$P_\ell^m(\mu) = (1-\mu^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m P_\ell(\mu)}{\mathrm{d}\mu^m}, \tag{3.16}$$

de donde se deduce que $P_\ell^m(\pm 1) = 0$ para toda m distinta de cero.

Para resolver la Ec. (3.12) se emplea el cambio de variable $\rho = kr$ y de define la función $Z = R\sqrt{\rho}$, por lo que la ecuación radial se reescribe como

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\rho}\right) + \left[\rho^2 - \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2\right] Z = 0, \tag{3.17}$$

cuyas soluciones son las *funciones esféricas de Bessel* j_ℓ y y_ℓ o cualquier combinación lineal de ellas, por lo que de forma general las soluciones de la Ec. (3.17) son [?]

$$j_\ell(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} J_{\ell+1/2}(\rho), \tag{3.18a}$$

$$y_\ell(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} Y_{\ell+1/2}(\rho), \tag{3.18b}$$

$$h_\ell^{(1)}(\rho) = j_\ell(\rho) + i y_\ell(\rho), \tag{3.18c}$$

$$h_\ell^{(2)}(\rho) = j_\ell(\rho) - i y_\ell(\rho), \tag{3.18d}$$

en donde J_ℓ y Y_ℓ son las *funciones de Bessel del primer y segundo tipo*, respectivamente, y h_ℓ son las *funciones esféricas de Bessel del tercer tipo*, también denominadas como *funciones esféricas de Hankel*. Todas las funciones esféricas de Bessel z_ℓ —donde z_ℓ es cualquier función de las Ecs. (3.18)— puede ser calculada mediante relaciones de recurrencia[2] [?].

Dado que las soluciones para la ecuación azimutal son las Ecs. (3.28), para la polar, Ec. (3.16) y para la radial, Ecs. (3.18), las funciones generadoras de los armónicos esféricos vectoriales son

$$\psi_{em\ell} = \cos(m\varphi) P_\ell^m(\cos\theta) z_\ell(kr), \tag{3.19a}$$

$$\psi_{om\ell} = \sin(m\varphi) P_\ell^m(\cos\theta) z_\ell(kr). \tag{3.19b}$$

Al emplear las Ecs. (3.19) en la Ec. (3.1) se obtiene como resultado $\mathbf{M}_{em\ell}$ y $\mathbf{M}_{om\ell}$, dados por las expresiones

Armónicos esféricos vectoriales $\mathbf{M}_{em\ell}$ y $\mathbf{M}_{om\ell}$

$$\mathbf{M}_{em\ell} = - m \sin(m\varphi) z_\ell(kr) \frac{P_\ell^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\, \hat{\mathbf{e}}_\theta - \cos(m\theta) z_\ell(kr) \frac{\mathrm{d}P_\ell^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\, \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \tag{3.20a}$$

$$\mathbf{M}_{om\ell} = m \cos(m\varphi) z_\ell(kr) \frac{P_\ell^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\, \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin(m\theta) z_\ell(kr) \frac{\mathrm{d}P_\ell^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\, \hat{\mathbf{e}}_\varphi. \tag{3.20b}$$

Para el cálculo $\mathbf{N}_{em\ell}$ y $\mathbf{N}_{om\ell}$ se sustituyen las Ecs. (3.20a) y (3.20b) en la Ec. (3.6). Para simplificar las expresiones de las componentes radiales de $\mathbf{N}_{em\ell}$ y

[2] Todas las funciones esféricas de Bessel cumplen: $z_{\ell-1}(\rho) + z_{\ell+1}(\rho) = (2\ell+1) z_\ell(\rho)/\rho$ y $(2\ell+1)\, \mathrm{d}z_\ell(\rho)/\mathrm{d}\rho = \ell z_{\ell-1}(\rho) - (\ell+1) z_{\ell+1}(\rho)$, con $j_0(\rho) = \sin\rho/\rho$ y $j_1(\rho) = \sin\rho/\rho^2 - \cos\rho/\rho$, $y_0(\rho) = -\cos\rho/\rho$ y $y_1(\rho) = -\cos\rho/\rho^2 - \sin\rho/\rho$.

$\mathbf{N}_{o m \ell}$, se agrupan los términos que dependen de φ y kr y, dado que las funciones asociadas de Legendre cumplen con la relación

$$-\ell(\ell+1) P_\ell^m(\cos\theta) = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P_\ell^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}P_\ell^m(\cos\theta),$$

que es una consecuencia de la Ec. (3.11), las expresiones de $\mathbf{N}_{em\ell}$ y $\mathbf{N}_{om\ell}$ son

Armónicos esféricos vectoriales $\mathbf{N}_{em\ell}$ y $\mathbf{N}_{om\ell}$

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_{em\ell} = {} & \cos(m\varphi)\frac{z_\ell(kr)}{kr}\ell(\ell+1)P_\ell^m(\cos\theta)\,\hat{\mathbf{e}}_r \\ & + \cos(m\varphi)\frac{1}{kr}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(kr)}\Big[kr\, z_\ell(kr)\Big]\frac{\mathrm{d}P_\ell^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \\ & - m\sin(m\varphi)\frac{1}{kr}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(kr)}\Big[kr\, z_\ell(kr)\Big]\frac{P_\ell^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi,\end{aligned} \tag{3.20c}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_{om\ell} = {} & \sin(m\varphi)\frac{z_\ell(kr)}{kr}\ell(\ell+1)P_\ell^m(\cos\theta)\,\hat{\mathbf{e}}_r \\ & + \sin(m\varphi)\frac{1}{kr}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(kr)}\Big[kr\, z_\ell(kr)\Big]\frac{\mathrm{d}P_\ell^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \\ & + m\cos(m\varphi)\frac{1}{kr}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(kr)}\Big[kr\, z_\ell(kr)\Big]\frac{P_\ell^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi.\end{aligned} \tag{3.20d}$$

Los armónicos esféricos vectoriales son solución a la ecuación de Helmholtz, por lo que cualquier solución de los campos EMs puede escribirse como una serie infinta en términos de las Ecs. (3.20). Para resolver el problema de los campos EMs esparcidos por una partícula esférica, esto es, determinar las componentes de la matriz de esparcimiento $\mathbb{S}$ de la Ec. (**??**), se expande una onda plana $\mathbf{E}^i$ en la base de los armónicos esféricos vectoriales, haciendo uso de sus condiciones de ortogonalidad, calculadas a partir de la relaciones de ortogonalidad de las Ecs. (3.14) y (3.15), dando como resultado que los armónicos esféricos vectoriales son ortogonales cuando tienen paridad distinta y cuando se realiza el producto interior entre $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$, es decir

$$\langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{M}_{om'\ell'}\rangle_{\theta,\varphi} = \langle \mathbf{N}_{em\ell}, \mathbf{N}_{om'\ell'}\rangle_{\theta,\varphi} = 0 \qquad \forall\, m, m', \ell, \ell', \tag{3.21}$$

$$\langle \mathbf{M}_{om\ell}, \mathbf{N}_{em'\ell'}\rangle_{\theta,\varphi} = \langle \mathbf{M}_{om\ell}, \mathbf{N}_{om'\ell'}\rangle_{\theta,\varphi} = \langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{N}_{em'\ell'}\rangle_{\theta,\varphi} = 0 \qquad \forall\, m, m', \ell, \ell', \tag{3.22}$$

$$\langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{N}_{om\ell'}\rangle_{\theta,\varphi} = \langle \mathbf{M}_{om\ell}, \mathbf{N}_{em\ell'}\rangle_{\theta,\varphi} = 0 \qquad \forall\, \ell, \ell'\, m, \tag{3.23}$$

en donde se definió el producto interior $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B}\rangle_{\theta,\varphi}$ como

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B}\rangle_{\theta,\varphi} \equiv \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

De igual manera, cuando se realiza el producto interior con elementos de los armónicos esféricos vectoriales de la misma paridad, y considerando las combinaciones de $\langle \mathbf{M}, \mathbf{M}\rangle_{\theta,\varphi}$ y $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N}\rangle_{\theta,\varphi}$ se obtienen las relaciones

$$\langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{M}_{em\ell'} \rangle_{\theta,\varphi} = \langle \mathbf{M}_{om\ell}, \mathbf{M}_{om\ell'} \rangle_{\theta,\varphi} = \delta_{\ell,\ell'} \pi z_\ell(\rho)^2 \frac{\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \quad \forall\, \ell, \ell', m, \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N}_{em\ell}, \mathbf{N}_{em\ell'} \rangle_{\theta,\varphi} &= \langle \mathbf{N}_{om\ell}, \mathbf{N}_{om\ell'} \rangle_{\theta,\varphi} \\ &= \delta_{\ell,\ell'} \pi \frac{\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \left\{ \left[\frac{z_\ell(\rho)}{\rho} \right]^2 \ell(\ell+1) + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}[\rho z_\ell(\rho)]}{\mathrm{d}\rho} \right]^2 \right\} \quad \forall\, \ell, \ell', m. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Sea una onda plana con longitud de onda λ, polarizada en la dirección x, y caracterizada por el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}^i$ propagándose en la dirección z en un medio con índice de refracción n_m. En la base de los vectores ortonormales polares la onda plana se escribe como

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}^i &= E_0 e^{ikz} \hat{\mathbf{e}}_x \\ &= E_0 e^{ikr\cos\theta} (\sin\theta \cos\varphi \hat{\mathbf{e}}_r + \cos\theta \cos\varphi \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin\varphi \hat{\mathbf{e}}_\phi), \end{aligned} \tag{3.26}$$

donde E_0 es la magnitud del campo eléctrico y $k = 2\pi n_m/\lambda$. La expansión de la ec. (3.26) en términos de los armónicos esféricos vectoriales [ecs. (3.20)] es

$$\vec{\mathbf{E}}^i = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=m}^{\infty} \Big[B_{em\ell} \vec{\mathbf{M}}_{em\ell} + B_{om\ell} \vec{\mathbf{M}}_{om\ell} + A_{em\ell} \vec{\mathbf{N}}_{em\ell} + A_{om\ell} \vec{\mathbf{N}}_{om\ell} \Big]. \tag{3.27}$$

Para determinar los coeficientes $B_{em\ell}$, $B_{om\ell}$, $A_{em\ell}$ y $A_{om\ell}$ se requieren las relaciones de ortogonalidad de los armónicos esféricos vectoriales.

Las funciones $\sin(m\varphi)$ y $\cos(m\varphi)$ obedecen las relaciones de ortogonalidad

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\varphi) \cos(m'\varphi) \mathrm{d}\varphi = 0 \qquad \forall\, m, m', \tag{3.28a}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\varphi) \sin(m'\varphi) \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \cos(m\varphi) \cos(m'\varphi) \mathrm{d}\varphi = \delta_{m,m'} \frac{\pi}{2}. \tag{3.28b}$$

Por la ec. (3.28a) se cumple que el producto interior[3] entre $\vec{\mathbf{M}}_{em\ell}$ y $\vec{\mathbf{M}}_{om'\ell'}$, y $\vec{\mathbf{N}}_{em\ell}$ y $\vec{\mathbf{N}}_{om'\ell'}$ es

$$\langle \vec{\mathbf{M}}_{em\ell}, \vec{\mathbf{M}}_{om'\ell'} \rangle_{\theta,\varphi} = \langle \vec{\mathbf{N}}_{em\ell}, \vec{\mathbf{N}}_{om'\ell'} \rangle_{\theta,\varphi} = 0 \qquad \forall\, m, m', \ell, \ell', \tag{3.29}$$

así como también

$$\langle \vec{\mathbf{M}}_{om\ell}, \vec{\mathbf{N}}_{em'\ell'} \rangle_{\theta,\varphi} = \langle \vec{\mathbf{M}}_{om\ell}, \vec{\mathbf{N}}_{om'\ell'} \rangle_{\theta,\varphi} = \langle \vec{\mathbf{M}}_{em\ell}, \vec{\mathbf{N}}_{em'\ell'} \rangle_{\theta,\varphi} = 0 \qquad \forall\, m, m', \ell, \ell'. \tag{3.30}$$

pues $\vec{\mathbf{M}}$ tiene componente nula en $\hat{\mathbf{e}}_r$ y en los demás términos se encuentra la ec. (3.28a). Las ecs. (3.28) implican que todos los armónicos esféricos vectoriales orden m distinto son ortogonales entre sí.

[3] Se define el producto interior $\langle \vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{B}} \rangle_{\theta,\varphi}$ como $\langle \vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{B}} \rangle_{\theta,\varphi} \equiv \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$

El producto interior entre $\vec{\mathbf{M}}_{em\ell}$ y $\vec{\mathbf{N}}_{om\ell'}$, empleando el resultado de la ec. (3.28b) con $m = m'$, está dado por

$$\begin{aligned}\langle\vec{\mathbf{M}}_{em\ell}, \vec{\mathbf{N}}_{om\ell'}\rangle_{\theta,\varphi} &= -\frac{\pi}{2}\frac{z_\ell(\rho)}{\rho}\frac{\mathrm{d}z_{\ell'}(\rho)}{\mathrm{d}\rho}m\int_0^\pi\left[P_\ell^m(\cos\theta)\frac{\mathrm{d}P_{\ell'}^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta} + \frac{\mathrm{d}P_\ell^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}P_{\ell'}^m(\cos\theta)\right]\mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{\pi}{2}\frac{z_\ell(\rho)}{\rho}\frac{\mathrm{d}z_{\ell'}(\rho)}{\mathrm{d}\rho}m\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}[P_\ell^m(\cos\theta)P_{\ell'}^m(\cos\theta)]\mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{\pi}{2}\frac{z_\ell(\rho)}{\rho}\frac{\mathrm{d}z_{\ell'}(\rho)}{\mathrm{d}\rho}m\, P_\ell^m(\cos\theta)P_{\ell'}^m(\cos\theta)\Big|_0^\pi. \qquad (3.31)\end{aligned}$$

Mediante un procedimiento semejante se obtiene que $\langle\vec{\mathbf{M}}_{em\ell}, \vec{\mathbf{N}}_{om\ell'}\rangle_{\theta,\varphi} = \langle\vec{\mathbf{M}}_{om\ell}, \vec{\mathbf{N}}_{em\ell'}\rangle_{\theta,\varphi}$. Haciendo uso de la relación entre las funciones asociadas de Legndre con los polinomios de Legendre [ec. (**??**)] se obtiene que $P_\ell^m(\cos\theta) = 0$ para $\theta = 0, \pi$ y $m \neq 0$. Sin embargo, si en la ec. (3.31) m es igual a cero, el producto interior también es nulo, por lo que se cumple que

$$\boxed{\langle\vec{\mathbf{M}}_{em\ell}, \vec{\mathbf{N}}_{om\ell'}\rangle_{\theta,\varphi} = \langle\vec{\mathbf{M}}_{om\ell}, \vec{\mathbf{N}}_{em\ell'}\rangle_{\theta,\varphi} = 0 \qquad \forall\, \ell, \ell'\, m. \qquad (3.32)}$$

Las expresiones del producto interior entre $\vec{\mathbf{M}}_{em\ell}$ y $\vec{\mathbf{M}}_{em\ell'}$, y $\vec{\mathbf{N}}_{em\ell}$ y $\vec{\mathbf{N}}_{em\ell'}$, empleando el resultado de la ec. (3.28b) con $m = m'$, y la relación de ortogonalidad de las funciones asociadas de Legendre [ec. (3.15)] son

$$\begin{aligned}\langle\vec{\mathbf{M}}_{em\ell}, \vec{\mathbf{M}}_{em\ell'}\rangle_{\theta,\varphi} =& \frac{\pi}{2}z_\ell(\rho)z_{\ell'}(\rho) \times \int_0^\pi\left[\frac{m^2}{\sin^2\theta}P_\ell^m(\cos\theta)P_{\ell'}^m(\cos\theta) + \frac{\mathrm{d}P_\ell^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}P_{\ell'}^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right]\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ \langle\vec{\mathbf{N}}_{em\ell}, \vec{\mathbf{N}}_{em\ell'}\rangle_{\theta,\varphi} =& \frac{\pi}{2}\left[\frac{z_\ell(\rho)}{\rho}\ell(\ell+1)\right]^2\frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_\ell^{\ell'} + \frac{\pi}{2}\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}[\rho z_\ell(\rho)]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}[\rho z_{\ell'}(\rho)] \\ &\times\int_0^\pi\left[\frac{m^2}{\sin^2\theta}P_\ell^m(\cos\theta)P_{\ell'}^m(\cos\theta) + \frac{\mathrm{d}P_\ell^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}P_{\ell'}^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right]\sin\theta\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

Asimismo, se cumple que $\langle\vec{\mathbf{M}}_{em\ell}, \vec{\mathbf{M}}_{em\ell'}\rangle_{\theta,\varphi} = \langle\vec{\mathbf{M}}_{om\ell}, \vec{\mathbf{M}}_{om\ell'}\rangle_{\theta,\varphi}$ y $\langle\vec{\mathbf{N}}_{em\ell}, \vec{\mathbf{N}}_{em\ell'}\rangle_{\theta,\varphi} = \langle\vec{\mathbf{N}}_{om\ell}, \vec{\mathbf{N}}_{om\ell'}\rangle_{\theta,\varphi}$. Sustituyendo $P_\ell^m(\cos\theta)$ en la ec. (3.11) y multiplicándola por $P_{\ell'}^m(\cos\theta)$, operando de la misma forma intercambiando los papeles de $P_\ell^m(\cos\theta)$ y $P_{\ell'}^m(\cos\theta)$ y sumando ambos resultados se llega a la expresión

$$\begin{aligned}2\frac{m^2}{\sin^2\theta}P_\ell^mP_{\ell'}^m\sin\theta =& P_\ell\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}P_{\ell'}^m}{\mathrm{d}\theta}\right]P_{\ell'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}P_\ell^m}{\mathrm{d}\theta}\right] + \ell(\ell+1)P_\ell^mP_{\ell'}^m\sin\theta \\ &+ \ell'(\ell'+1)P_\ell^mP_{\ell'}^m\sin\theta, \qquad (3.33)\end{aligned}$$

en donde se obvia el argumento $\cos\theta$. Dado que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[P_{\ell'}^m\sin\theta\frac{\mathrm{d}P_\ell^m}{\mathrm{d}\theta}\right] = P_{\ell'}^m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}P_\ell^m}{\mathrm{d}\theta}\right] + \sin\theta\frac{\mathrm{d}P_{\ell'}^m}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}P_\ell^m}{\mathrm{d}\theta},$$

sumando $2\sin\theta\mathrm{d}P_{\ell'}^m\mathrm{d}\theta\mathrm{d}P_\ell^m\mathrm{d}\theta$ de ambos lados de la ec. (3.33) y agrupando términos, se obtiene que el integrando presente en los productos interiores de $\vec{\mathbf{M}}_{em\ell}$ y $\vec{\mathbf{M}}_{em\ell'}$, y $\vec{\mathbf{N}}_{em\ell}$ y $\vec{\mathbf{N}}_{em\ell'}$ es

$$\begin{aligned}\left[\frac{m^2}{\sin^2\theta}P_\ell^mP_{\ell'}^m + \frac{\mathrm{d}P_\ell^m}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}P_{\ell'}^m}{\mathrm{d}\theta}\right]\sin\theta =& \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}P_{\ell'}^m}{\mathrm{d}\theta}P_\ell^m + \sin\theta\frac{\mathrm{d}P_\ell^m}{\mathrm{d}\theta}P_{\ell'}^m\right] + \frac{1}{2}\ell(\ell+1)P_\ell^mP_{\ell'}^m\sin\theta \\ &+ \frac{1}{2}\ell'(\ell'+1)P_\ell^mP_{\ell'}^m\sin\theta,\end{aligned}$$

en donde el primer término de la suma se desvanece al evaluarse en $\theta = 0, \pi$ y los últimos cumplen con la relación de ortogonalidad de la ec. (3.15). Por lo tanto

$$\langle \vec{\mathbf{M}}_{em\ell}, \vec{\mathbf{M}}_{em\ell'} \rangle_{\theta,\varphi} = \langle \vec{\mathbf{M}}_{om\ell}, \vec{\mathbf{M}}_{om\ell'} \rangle_{\theta,\varphi} = \delta_\ell^{\ell'} \pi z_\ell(\rho)^2 \frac{\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \qquad \forall\, \ell, \ell', m, \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{\mathbf{N}}_{em\ell}, \vec{\mathbf{N}}_{em\ell'} \rangle_{\theta,\varphi} =& \langle \vec{\mathbf{N}}_{om\ell}, \vec{\mathbf{N}}_{om\ell'} \rangle_{\theta,\varphi} \\ =& \delta_\ell^{\ell'} \pi \frac{\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \left\{ \left[\frac{z_\ell(\rho)}{\rho} \right]^2 \ell(\ell+1) + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}[\rho z_\ell(\rho)]}{\mathrm{d}\rho} \right]^2 \right\} \qquad \forall\, \ell, \ell', m. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Con las expresiones de los armónicos esféricos vectoriales [ec. (3.20)] y con sus relaciones de ortogonalidad se pueden calcular los coeficientes de la expansión de una onda plana en esta base [ec. (3.27)]. Igualando las ecs. (3.26) y (3.27), se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}^i =& E_0 e^{ikr\cos\theta} (\sin\theta\cos\varphi \hat{\mathbf{e}}_r + \cos\theta\cos\varphi \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi) \\ =& \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=m}^{\infty} \Big[B_{em\ell} \vec{\mathbf{M}}_{em\ell} + B_{om\ell} \vec{\mathbf{M}}_{om\ell} + A_{em\ell} \vec{\mathbf{N}}_{em\ell} + A_{om\ell} \vec{\mathbf{N}}_{om\ell} \Big]. \end{aligned}$$

Dado que en la componente radial hay dependencia con $\cos\varphi$, se sigue que $m = 1$ al comparar con las expresiones de $\vec{\mathbf{N}}_{em\ell}$ [ec. (3.20c)] y $\vec{\mathbf{N}}_{om\ell}$ [ec. (3.20d)] —únicos elementos con componente radial—, y además que $A_{om\ell} = 0$ pues $\vec{\mathbf{N}}_{om\ell}$ es proporcional a $\sin\varphi$ en esta componente. Asimismo, por la dependencia con $\sin\varphi$ en la componente $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$, $B_{em\ell} = 0$ pues $\vec{\mathbf{M}}_{em\ell}$ es proporcional a $\cos\varphi$ en dicha entrada.

La onda plana no tiene ninguna divergencia, por lo que se escoge $z_\ell = j_\ell$. Esto se denota en los armónicos esféricos vectoriales con el superíndice (1). Se escribe entonces a la onda plana como

$$\vec{\mathbf{E}}^i = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Big[B_{o1\ell} \vec{\mathbf{M}}^{(1)}_{o1\ell} + A_{e1\ell} \vec{\mathbf{N}}^{(1)}_{e1\ell} \Big], \tag{3.36}$$

con

$$\begin{aligned} B_{o1\ell} &= \frac{\langle \vec{\mathbf{E}}^i, \vec{\mathbf{M}}^{(1)}_{o1\ell} \rangle_{\theta,\varphi}}{\langle \vec{\mathbf{M}}^{(1)}_{o1\ell}, \vec{\mathbf{M}}^{(1)}_{o1\ell} \rangle_{\theta,\varphi}}, \\ A_{e1\ell} &= \frac{\langle \vec{\mathbf{E}}^i, \vec{\mathbf{N}}^{(1)}_{e1\ell} \rangle_{\theta,\varphi}}{\langle \vec{\mathbf{N}}^{(1)}_{e1\ell}, \vec{\mathbf{N}}^{(1)}_{e1\ell} \rangle_{\theta,\varphi}}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Empleando la ec. (3.34) con $m = 1$, se calcula el denominador del coeficiente $B_{o1\ell}$, como

$$\langle \vec{\mathbf{M}}^{(1)}_{o1\ell}, \vec{\mathbf{M}}^{(1)}_{o1\ell} \rangle_{\theta,\varphi} = \pi \frac{[j_\ell(\rho)\ell(\ell+1)]^2}{2\ell+1}, \tag{3.38}$$

y con la ec. (3.20b) y la ec. (3.26) se calcula

$$\langle \vec{\mathbf{E}}^i, \vec{\mathbf{M}}^{(1)}_{o1\ell} \rangle_{\theta,\varphi} = \frac{E_0\pi}{2} j_\ell(\rho) \int_0^\pi \left(\cos\theta P^1_\ell(\cos\theta) + \sin\theta \frac{\mathrm{d}P^1_\ell(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta} \right) e^{i\rho\cos\theta} \mathrm{d}\theta,$$
$$= \frac{E_0\pi}{2} j_\ell(\rho) \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left[\sin\theta P^1_\ell(\cos\theta) \right] e^{i\rho\cos\theta} \mathrm{d}\theta. \tag{3.39}$$

Considerando la relación entre las funciones asociadas de Legendre y los polinomios de Legendre [ec. (**??**)] con $m = 1$, se cumple que $P^1_\ell(\mu) = -\mathrm{d}P_\ell(\mu)/\mathrm{d}\theta$. Además, los polinomios de Legedre cumplen con la ec. (3.11) con $m = 0$, es decir,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left[\sin\theta \frac{\mathrm{d}P_\ell(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta} \right] = -\ell(\ell+1) P_\ell(\cos\theta) \sin\theta,$$

por lo que la ec. (3.38) es

$$\langle \vec{\mathbf{E}}^i, \vec{\mathbf{M}}^{(1)}_{o1\ell} \rangle_{\theta,\varphi} = \frac{E_0\pi}{2} j_\ell(\rho) \int_0^\pi -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left[\sin\theta \frac{\mathrm{d}P_\ell(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta} \right] e^{i\rho\cos\theta} \mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{E_0\pi}{2} j_\ell(\rho) \ell(\ell+1) \int_0^\pi P_\ell(\cos\theta) \sin\theta e^{i\rho\cos\theta} \mathrm{d}\theta. \tag{3.40}$$

La generalización de las integrales de Poisson de Gegenbauer relaciona a los polinomios de Legendre con la función esférica de Bessel de primer tipo mediante la relación

$$j_\ell(\rho) = \frac{1}{2i^\ell} \int_0^\pi P_\ell(\cos\theta) \sin\theta e^{i\rho\cos\theta} \mathrm{d}\theta,$$

por lo que la ec. (3.39) se reescribe como

$$\langle \vec{\mathbf{E}}^i, \vec{\mathbf{M}}^{(1)}_{o1\ell} \rangle_{\theta,\varphi} = E_0\pi [j_\ell(\rho)]^2 \ell(\ell+1) i^\ell. \tag{3.41}$$

Calculando el cociente de la ec. (3.40) con (3.37), se calcula el coeficiente $B_{o1\ell}$, dado por la expresión

$$B_{o1\ell} = i^\ell E_0 \frac{(2\ell+1)}{\ell(\ell+1)}. \tag{3.42}$$

El denominador del coeficiente, empleando la ec. (3.35), es

$$\langle \vec{\mathbf{N}}^{(1)}_{e1\ell}, \vec{\mathbf{N}}^{(1)}_{e1\ell} \rangle_{\theta,\varphi} = \pi \frac{[\ell(\ell+1)]^2}{2\ell+1} \left\{ \left[\frac{z_\ell(\rho)}{\rho} \right]^2 \ell(\ell+1) + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}[\rho z_\ell(\rho)]}{\mathrm{d}\rho} \right]^2 \right\} \tag{3.43}$$

Al emplear las Ecs. (3.34) y (3.35) con $m = 1$, y las condiciones de ortogonalidad de los armónicos esféricos vectoriales, se calcula la expresión de la onda plana en una base esférica, dada por

$$\mathbf{E}^i = E_0 \sum_{\ell=1}^{\infty} i^\ell \frac{2\ell+1}{\ell(\ell+1)} \Big(\mathbf{M}^{(1)}_{o1\ell} - i\mathbf{N}^{(1)}_{e1\ell} \Big). \tag{3.44a}$$

El campo magnético incidente se calcula empleando la Ley de Farady-Lenz [Ec. (**??**)], cuyo resultado es

$$\mathbf{H}^i = \frac{-k_m}{\omega\mu_m} \sum_{\ell=1}^{\infty} E_\ell \Big(\mathbf{M}^{(1)}_{e1\ell} + i\mathbf{N}^{(1)}_{o1\ell} \Big), \tag{3.44b}$$

con $E_\ell = E_0 i^\ell (2\ell+1)/[\ell(\ell+1)]$.

Capítulo 4

Esparcimiento y absorción de una esfera

Esta parte corresponde a **Eduardo**. El contenido propuesto es

- Citar a las Condiciones a la frontera de la esfera
- Cálculo del campo dentro y fuera de la esfera (Coefficientes de Mie)
- Matriz de esparcimiento
- Análisis de a_n, b_n y las $S_{1,2}$

Capítulo 5

Casos particulares

Esta parte aún no tiene autor asignado. El contenido propuesto es

- Gota de agua
- Modelo de Drude (material plasmónico)
- Oro y plata (con experimento)
- Tugsteno (con experimento)

Índice alfabético