"Espacio" fase

↳ En realidad es una variedad

Habíamos visto que

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}=0}$$

Ecuación de E-L → dinámica del sistema

↳ $3N-\ell$ ecs. de movimiento

Ecs de 2^{do} orden para q_i

$\mathcal{L}: Q \to \mathbb{R}$

Habíamos dicho que

$q_i \in Q \subset \mathbb{R}^3$ — Pero puedo decir dónde vive $\dot{q}_i$?

↳ Variedad de configuraciones → $\mathbb{M}$ es una variedad si

↳ No necesariamente un espacio vectorial

$\underbrace{\mathbb{M}}_{} \subset \mathbb{E}^m$ y $\dim(\mathbb{M}) < m$

Usualmente no se puede parametrizar fácilmente $\Longrightarrow$ Se hacen mapas por regiones $\mathcal{U}_i \subset \mathbb{M}$ t.

↓

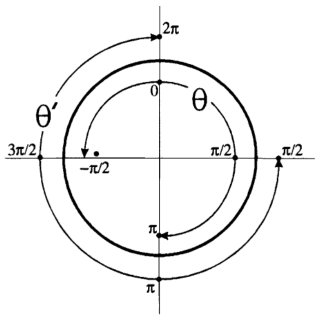
$\bigcup_i \mathcal{U}_i = \mathbb{M}$, $\bigcap_i \mathcal{U}_i \neq \phi$ — las regiones se intersectan

Una variedad se define por la relación entre mapas en las regiones de intersección

$\psi_i(u \in \mathcal{U}_i) \in \mathbb{R}^k$

Función biyectiva $\Rightarrow \psi^{-1}(\mathbb{R}^k) \in \mathcal{U}_i$

Ejemplo $\mathbb{M}=\mathbb{S}^1$ → circunferencia θ



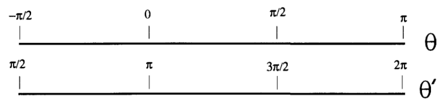


FIGURE 2.12
An atlas for the circle $\mathbb{S}^1$. (a) The circle with coordinates θ and θ' indicated. The overlap regions, namely the second and fourth quadrants, are covered by both coordinates. (b) The atlas itself: two charts on $\mathbb{E}^1$ (the line), one for θ and one for θ'.

Ahora que sabemos que $q_i \in Q$ ... ¿Dónde vive $\dot{q}_i$?

↳ $\dot{q}_i \in T_q Q$ → Espacio tangente a Q

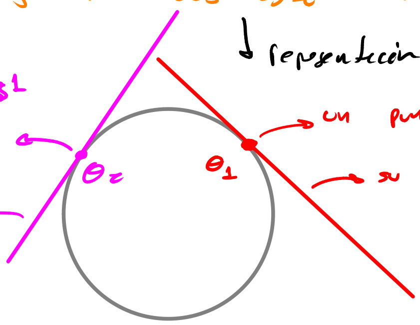
Aunque para $\theta \in \mathbb{S}^1$ se cumple que

$\theta \in (-\pi,\pi]$, sabemos que $\dot{\theta} \in (-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ — Toma todos estos valores

↳ Este es el espacio tangente

Pero si recordamos las ecs. de E-L, las posiciones y velocidades están acopladas

↓ representación gráfica



Punto en $\mathbb{S}^1$

θ_2

θ_1

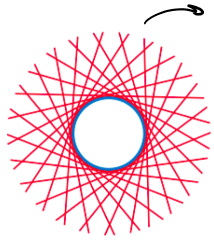
un punto en $\mathbb{S}^1$

su espacio tangente

$\underbrace{T_{\theta_1}\mathbb{S}^1}$ su espacio tangente

Si me tomo todas las combinaciones

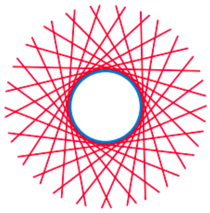
Definimos el fibrado tangente



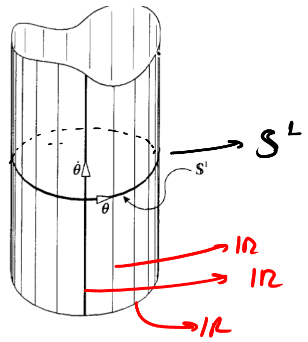
$$TQ = \bigcup_i T_{q_i}Q$$

Una forma más fácil de visualizar a TQ es entendiendo que T_qQ se traslape

Para $\underbrace{T\mathbb{S}^1 = T_{\theta_i}\mathbb{S}^1}_{\text{Fibrado del péndulo rígido}}$



$\Longrightarrow$



Notemos que

$$TQ = \bigcup_i T_{q_i}Q = \bigcup_i \underbrace{\{q_i\} \times T_{q_i}Q}_{\text{a cada } q_i \text{ le pegamos su espacio tangente}} = \bigcup_i \{(q_i, \dot{q}_i) \mid q_i \in Q, \dot{q}_i \in T_{q_i}Q\}$$

Entonces

$$L = L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}) : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$L = L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) : TQ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

¿Pero habíamos dicho que $L : Q \to \mathbb{R}$? Sí, la diferencia es que aquí considerabamos a las q_i's como mis variables y resolvíamos las Ecs. de E-L de 2do orden para 3N-L q's

Pero si considero que mis variables son $\{q_i\}$ y $\{\dot{q}_i\}$, debo poder encontrar el doble de ecuaciones pero de un solo orden

y si aplicamos una transformada de Legendre L_1, hacemos algo más fácil!

$$\underbrace{H}_{\text{Hamiltoniano}} = L_1[L] = \sum_i \Big(\dot{q}_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i} - 1\Big)[L] \longrightarrow L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) \longrightarrow H(\{q_i\}, \{p_i\}, t)$$

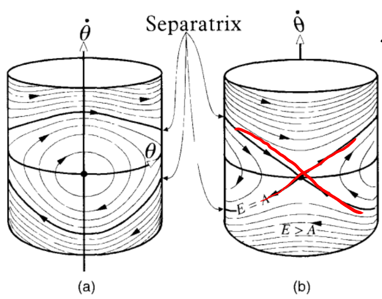
donde sabemos que se cumple que

- $\dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q} + Q_i$
- $\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$

y $\dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\partial L}{\partial t} = \dot{H}$

Y, la ventaja de trabajar a H y L es evidente si consideramos que

$L : Q \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vs $H : TQ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow$ Los diagramas de fase



$\longrightarrow$ Bastan con:

- Conocer las condiciones iniciales (q_0, p_0)
- Dar un corte de una función $E(q, p) = A = cte$

↳ Usualmente la energía

Otra ventaja que tenemos era a partir de las coordenadas ignorables q_α

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\right) = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0}_{} = \dot p_\alpha$$

pues $\dot p_\alpha = \frac{\partial H}{\partial q} = 0 \Rightarrow \dot q = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ es la única ecuación a resolver.