2.9. Condiciones de frontera en problemas de electrostática

En clases anteriores vimos que si $\phi = \phi(\vec r)$ era el potencial electrostático tal que $\nabla^2\phi = -\rho_{ext}(\vec r)/\varepsilon_0$, entonces su solución general era

Resultado obtenido con las identidades de Green

$$\phi(\vec r) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_{ext}(\vec r\,')}{\|\vec r - \vec r\,'\|}\,d^3r'}_{\text{Int}(V)} + \underbrace{\frac{1}{4\pi}\oint_{\partial V}\Big[\frac{\overbrace{\hat n\cdot\nabla\phi(\vec r\,')}^{\text{Básicamente } -\vec E \text{ en } \partial V}}{\|\vec r-\vec r\,'\|} - \overbrace{\phi(\vec r\,')}^{\phi \text{ en } \partial V}\,\hat n\cdot\nabla\Big(\frac{1}{\|\vec r-\vec r\,'\|}\Big)\Big]\,d^2r'}_{\text{Int}(\partial V)}$$

Esta es en realidad una ecuación integral equivalente a la ecuación de Poisson

- Si V es finito y $\rho \neq 0$ en V
  - ϕ en V está determinado por $\text{Int}(V)$ y si hay fuentes fuera de V, sus contribuciones se encuentran únicamente en $\text{int}(\partial V)$.
- Si V finito y $\rho = 0$ en V
  - ϕ en V determinado por su comportamiento en ∂V
- Si V es todo el espacio y $\phi \to r^{-1}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{\|\vec r-\vec r\,'\|}\hat n\cdot\nabla\phi + \phi\,\hat n\cdot\nabla\Big(\frac{1}{\|\vec r-\vec r\,'\|}\Big) \sim r^{-3}$
  - Se tiene el resultado general $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_{ext}(\vec r\,')}{\|\vec r-\vec r\,'\|}d^3r'$
- Si V es todo el espacio, entonces no se pueden tener los comportamientos de ∂V de forma simultánea
  $\hookrightarrow$ Problema sobredeterminado $\longrightarrow$ Por ~~tanto~~ eso se habla de una ecuación integral

Para resolver este problema repasemos los tipos de condiciones de frontera

- Dirichlet: $\phi(\partial V)$
- Neumann: $-\hat n\cdot\nabla\phi(\partial V) = \vec E(\partial V)$
- Robin: Neumann y Dirichlet en porciones de ∂V

Con esto en mente, probemos la unicidad de las soluciones dadas unas condiciones de frontera

Unicidad de la solución a $\nabla^2\phi = -\rho_{ext}/\varepsilon_0$

Sean ϕ_1 y ϕ_2 tales que: $\nabla^2\phi_1 = \nabla^2\phi_2 = \frac{\rho_{ext}}{\varepsilon_0}$, $\begin{cases}\phi_1(\partial V) = \phi_2(\partial V) \\ \text{o bien} \\ \hat n\cdot\nabla\phi_1(\partial V) = \hat n\cdot\nabla\phi_2(\partial V)\end{cases}$

Definiendo $\psi = \phi_2 - \phi_1$ podemos ver que

$$\nabla^2\psi = 0 \quad \text{y además} \quad \psi(\partial V) = 0 \quad \text{o bien} \quad \hat n\cdot\nabla\psi(\partial V) = 0$$

Si empleamos la primera identidad de Green con $\varphi = \psi$

$$\int_V [\varphi\nabla^2\psi + (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\psi)]\,d^3r = \oint_{\partial V}\varphi\,\hat n\cdot\nabla\psi\,d^2r \longrightarrow \int_V (\nabla\psi)^2 d^3r = \oint_{\partial V}\underbrace{\psi}_{\text{Dirichlet } \psi(\partial V)=0}\,\underbrace{\hat n\cdot\nabla\psi}_{\text{Neumann } \hat n\cdot\nabla\psi(\partial V)=0}\,d^2r = 0$$

Sin importar qué tipo de condición se tenga

En este caso $\int_V (\nabla\psi)^2 d^3r = 0 \quad \forall V \Rightarrow \nabla\psi = \vec{0} \Rightarrow \psi = cte$

- Si tenemos condiciones de Dirichlecht

$\psi = \phi_2 - \phi_1 = 0$ pues $\psi(\partial V) = 0$,

$\underbrace{\text{entonces } \phi_1 = \phi_2}$

Estas condiciones son especialmente útiles para materiales conductores

- Si tenemos condiciones de Neumann

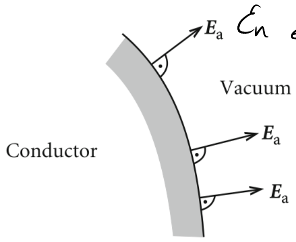
$\psi = \phi_2 - \phi_1 = 0$ pues $\hat{n}\cdot\nabla\psi = 0$

$\underbrace{\text{entonces}}$ $\phi_1 = \phi_2 + \underline{C}$

Condiciones útiles para aislantes ya que hay una densidad de carga atada a sus fronteras

Cuando se calcule $\vec{E}$, la ~~constante~~ no contribuye

$-\hat{n}\cdot\nabla(\phi_2 - \phi_1) = \sigma_{ext}/\varepsilon_0$



En el caso electrostático sabemos que para conductores $\vec{E} = \vec{0}$ adentro, entonces

$\vec{E} \neq 0$ Vacío

Pero por las condiciones que vimos

$(\vec{E}_{vacío} - \vec{E}_{metal}) \times \hat{n} = 0$

$\Rightarrow E_{\parallel}^{vacío} = E_{\parallel}^{metal} = 0$

$(\vec{E}_{vacío} - \cancel{\vec{E}_{metal}}^{\,0}) \cdot \hat{n} = \sigma_{ext}/\varepsilon_0 \Rightarrow \vec{E} \perp \partial V \Rightarrow$ Equipotenciales

Si hubiese un campo externo, el campo eléctrico externo induce una carga en la superficie.

Soluciones de Green a Poisson

$\rightarrow$ Recordemos que $\nabla_{\vec{r}}^2 \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}\right) = -4\pi\,\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$ para todo el procedimiento consecuente.

La ecuación de Poisson es $\nabla^2\phi = -\frac{\rho_{ext}}{\varepsilon_0}$, entonces podemos ver que

si $\rho_{ext}(\vec{r}) = \underbrace{\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')}$ entonces $\underbrace{\nabla_{\vec{r}}^2 G(\vec{r}, \vec{r}')} = -\frac{\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')}{\varepsilon_0}$ tiene solución y es

Carga puntual en $\vec{r}'$ con $q = 1$

$\hookrightarrow$ Esta es la función de Green que corresponde a la solución a la ecuación diferencial con un impulso como respuesta.

Por la propiedad que se menciona, vemos que $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \underline{f(\vec{r}, \vec{r}')}$, donde

Función casi arbitraria

Notemos que G y f son funciones simétricas entre $\vec{r}$ y $\vec{r}'$!

$\nabla_{\vec{r}'} f(\vec{r}, \vec{r}') = 0$

$\hookrightarrow$ Se emplea para empatar las condiciones de frontera.

Empleemos la segunda identidad de Green con $\phi \rightarrow$ Potencial, $\psi \rightarrow G$ (Green).

Esto es un procedimiento análogo a un cálculo anterior y por tanto sólo incluiremos el resultado

$$\int_V d^3r' \left[\phi(\vec{r}')\,\nabla_{\vec{r}'}^2 G(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}')\,\nabla_{\vec{r}'}^2\phi(\vec{r}')\right] = \int_V d^3r' \left(-\frac{\phi(\vec{r}')\,\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')}{\varepsilon_0}\right) - \int_V \left(-\frac{\rho_{ext}(\vec{r}')}{\varepsilon_0}\right) G(\vec{r}, \vec{r}')\, d^3r'$$

$$\int_V d^3r' \left[\phi(\vec r') \nabla^2_{\vec r'} G(\vec r, \vec r') - G(\vec r, \vec r') \nabla^2_{\vec r'} \phi(\vec r') \right] = \int_V d^3r' \left(- \frac{\phi(\vec r')\, \delta^3(\vec r - \vec r')}{\varepsilon_0} \right) - \int_V \left(- \frac{\rho_{tot}(\vec r')}{\varepsilon_0} \right) G(\vec r, \vec r')\, d^3r'$$

De aquí se puede despejar ϕ

$$= \oint_{\partial V} d^2r' \left[\phi(\vec r')\, \hat n \cdot \nabla_{\vec r'} G(\vec r - \vec r') - G(\vec r, \vec r')\, \hat n \cdot \nabla_{\vec r'} \phi(\vec r') \right]$$

Despejando $\phi(\vec r)$:

$$\phi(\vec r) = \int_V \rho_{tor}(\vec r')\, G(\vec r, \vec r')\, d^3r' - \varepsilon_0 \int_{\partial V} d^2r' \left[\phi(\vec r')\, \hat n \cdot \nabla_{\vec r'} G(\vec r - \vec r') - G(\vec r, \vec r')\, \hat n \cdot \nabla_{\vec r'} \phi(\vec r') \right]$$

Esta ecuación es equivalente a la que se muestra en esta sección, sin embargo aún tenemos la opción de introducir $f(\vec r, \vec r')$

Recordemos que $G(\vec r, \vec r') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\|\vec r - \vec r'\|} + f(\vec r, \vec r') \rightarrow \nabla^2_{\vec r'} f(\vec r, \vec r') = 0$

Veamos qué debe cumplir f para empatar las condiciones de frontera

- **Condiciones de Dirichlet.**

Se escoge $f(\vec r, \vec r')$ tal que $\oint_{\partial V} \underbrace{G_D(\vec r, \vec r')}_{\text{Función de Green de Dirichlet.}}\, \hat n \cdot \nabla_{\vec r'} \phi(\vec r') = 0 \quad \ldots \quad (D1)$

↳ Una opción es que $G_D(\vec r, \vec r') = 0$ en $\vec r' \in \partial V \quad \ldots (D2)$

En este caso $\phi(\vec r) = \int_V \underbrace{\rho_{tor}(\vec r')}_{\text{Se conoce}}\, G_D(\vec r, \vec r')\, d^3r' - \varepsilon_0 \int_{\partial V} d^2r' \left[\underbrace{\phi(\vec r')}\, \hat n \cdot \underbrace{\nabla_{\vec r'} G_D(\vec r - \vec r')}_{\text{Se conoce}} \right] \rightarrow$ Sólo falta determinar $G_D(\vec r, \vec r')$ que cumplan D1 y D2.

- **Condiciones de Neumann**

Se escoge $f(\vec r, \vec r')$ tal que $\varepsilon_0 \oint_{\partial V} \phi(\vec r')\, \hat n \cdot \nabla_{\vec r'} \underbrace{G_N(\vec r, \vec r')}_{\text{Función de Green de Neumann}} = \underbrace{-\phi_0}_{-\hat n \cdot \vec E = \phi_0 = \hat n \cdot \nabla \phi} \quad \ldots \quad (N1)$

↳ En este caso no es opción escoger $\hat n \cdot \nabla_{\vec r'} G_N(\vec r, \vec r') \Big|_{\partial V} = 0$ pues se llega a contradicciones

Para ver que esta opción no es viable, verifiquemos con el teorema de la divergencia

$$\int_V \nabla^2_{\vec r} G_N\, d^3r = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \delta^3(\vec r - \vec r')\, d^3r = \overbrace{-\frac{1}{\varepsilon_0}} = \int_V \nabla_{\vec r} \cdot \underbrace{(\nabla_{\vec r} G_N)}_{\nabla^2 G_N}\, d^3r = \oint_{\partial V} (\nabla_{\vec r} G_N) \cdot \hat n\, d^2r = \overbrace{\oint \hat n \cdot \nabla G_N\, d^2r}$$

Entonces esto no puede ser cero

Pero con este mismo procedimiento, nos es natural definir $\hat n \cdot \nabla_{\vec r'} G_N(\vec r, \vec r') \Big|_{\partial V} = -\frac{1}{S\varepsilon_0} \quad \ldots (N2)$

↳ $\int d^2r = S$

Por lo tanto en N1 se tiene que

$$\phi_0 = \frac{1}{S} \int_{\partial V} \phi(\vec r')\, d^2r' \longrightarrow \text{Potencial promedio en } \partial V$$

En este caso

$$\phi(\vec r) - \phi_0 = \int_V \underbrace{\rho_{tor}(\vec r')}_{\text{Se conoce}}\, G_N(\vec r, \vec r')\, d^3r' + \varepsilon_0 \int_{\partial V} d^2r' \left[\underbrace{\hat n \cdot \nabla_{\vec r'} \phi(\vec r')}_{\text{Se conoce}}\, G_D(\vec r - \vec r') \right] \rightarrow$$

Sólo ~~ala~~ determinar $G_N(\vec r, \vec r')$ que cumplan N1 y N2.