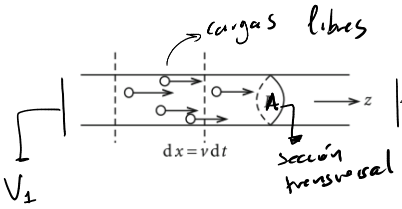
1.4.- Magnetostática

Causada por corrientes estacionarias

→ Corriente eléctrica

Si las cargas se mueven a $\vec{v} = cte$, entonces → No generan campo eléctrico



Se logra al mover cargas dentro de un conductor → Con una diferencia de potencial dentro del material con una diferencia de potencial (una pila, pues)

- Se genera calor — Efecto Joule
- Transporte de carga eléctrica
  - Se define la corriente eléctrica
- Campo magnético

$\vec{J}$ [=] $A m^{-2}$ → Densidad volumétrica

$\vec{K}$ [=] $A m^{-1}$ → Densidad de superficie

I [=] A → Carga

$$\boxed{\vec{J}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t)}$$

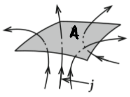
Densidad de carga; Densidad de carga; campo de velocidad

$$\boxed{I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}} = \frac{N}{V} A v q$$

$C t^{-1}$ = Ampère

$\frac{N}{V}$: Densidad de partículas cargadas; v: Velocidad de las partículas; q → carga; A: Sección transversal del conductor

$$\longrightarrow I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{a}$$



· Conservación de la carga.

→ De la definición de $\vec{J}$, se tiene que

$$\oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{a} \equiv \text{Corriente que atraviesa a la superficie cerrada del volumen } V \quad \cdots (1)$$

→ Asimismo, dentro de ese volumen V:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho\, d^3r \equiv \text{El cambio temporal de la carga dentro de } V \quad \cdots (2)$$

Por la relación entre ρ y $\vec{J}$ se cumple que

$$0 = \oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{a} + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, d^3r = \underbrace{\oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{a}}_{\text{Teorema de la divergencia}} + \int_V \frac{\partial}{\partial t}\rho\, d^3r = \int_V \left(\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\rho\right) d^3r \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\rho = 0}$$

Como V es arbitrario

conservación de la carga

Ecuación de continuidad

· Materiales óhmicos y el gas de electrones

En la definición de la carga se asumió que la corriente se generaba por una diferencia de potencial dentro de un conductor

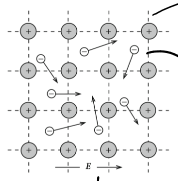
↳ = Campo eléctrico

Entonces se puede relacionar a estos conceptos como

Ley de Ohm

$$\underbrace{j_i = \sum_j \sigma_{ij} E_j}_{\text{Comportamiento lineal de transporte}} \qquad \boxed{\vec{J} = \overleftrightarrow{\sigma}\vec{E} = \overleftrightarrow{\sigma}\nabla\phi}$$

Esta es una relación constitutiva → Materiales → Óhmicos / No óhmicos



Red cristalina de un sólido

Electrons libres (N de ellos)

↳ Campo externo

- Si $\vec E = 0$, $\langle \vec v\rangle = \frac{1}{N}\sum_j \vec v_j \approx \vec 0$
- Si $\vec E$ = cte, $\langle \vec v\rangle$ es tal que $m\frac{d\vec v_i}{dt} = -q_e\vec E \approx m\frac{\vec v_i}{t_i} = -q_e\vec E$

$$\Rightarrow \langle \vec v\rangle = \frac{-1}{N}\sum_j \frac{e}{m}\vec E t_j = -\frac{q_e}{Nm}\vec E \underbrace{\sum_j t_j}_{=\tau} = -\frac{q_e\tau}{m}\vec E$$

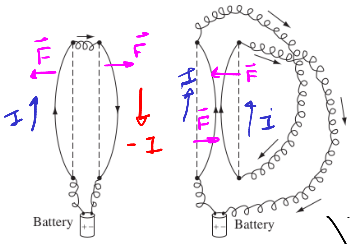
$= \tau$ tiempo promedio entre colisiones con ⊕ y otros ⊖

Entonces si $\vec J = -\overbrace{\frac{N}{V}q_e}^{\rho}\langle \vec v\rangle = \frac{q_e^2\tau}{Vm}\vec E = \sigma\vec E$

↳ Un gas de e^- es un material óhmico.

→ Ley de Biot-Savart

Una vez entendido el origen de las corrientes, la siguiente pregunta es ¿cómo interactúan?



(a) Currents in opposite directions repel. (b) Currents in the same direction attract.

- Corrientes antiparalelas: se repelen
- —— " —— paralelas: se atraen
- Notemos que → I tiene la dirección de las cargas, entonces $\vec I = q\vec v$

→ La fuerza $\vec F$ es perpendicular a $\vec v$

Históricamente esto se trató, inicialmente, como algo ajeno a la fuerza eléctrica. y se definió como magnetismos.

↳ y se definió el Campo magnético

La definición del campo magnético viene de experimentos como los siguientes

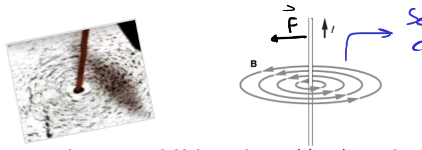


Figure 2. The magnetic field lines of a straight wire in the experiment (on the left) and in illustration (on the right).

Thai Quoc Bao *et al* 2019 *J. Phys.: Conf. Ser.* **1340** 012031

Se define un campo $\vec B$ que circula una corriente.

$\vec F_m = q\vec v\times\vec B$ → Parte magnética de la Fuerza de Lorentz

Aunque esta contribución se debe a Oliver Heaviside

$$\boxed{\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec J_{tot}\times(\widehat{\vec r-\vec r'})}{\|\vec r-\vec r'\|}dv}$$

$\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}\, N A^{-1}$

↳ Aunque para casos en 1D (alambres) se reduce a $\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_C \frac{I\, d\vec l'\times(\widehat{\vec r-\vec r'})}{\|\vec r-\vec r'\|^2}$

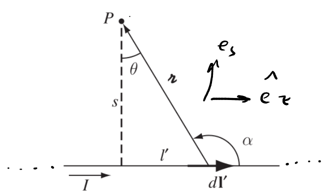
Toma en cuenta la dirección de $\vec B$ observada

Ejemplo:

Empleando coordenadas cilíndricas

$\vec r = s\,\hat e_s$

$\vec r' = z'\,\hat e_z$



Supongamos al cable como infinito

Notemos que si el cable es infinito

$$d\vec l'\times(\widehat{\vec r-\vec r'}) \sim \hat e_\phi \sin\alpha\, dz' = \hat e_\phi \cos\theta\, dz'$$

Además $\tan\theta = z'/s \Rightarrow z' = s\tan\theta \Rightarrow dz' = s\sec^2\theta\, d\theta = \frac{s}{\cos^2\theta}d\theta$

$$\cos\theta = \frac{s}{\|\vec r-\vec r'\|} \Rightarrow \frac{1}{\|\vec r-\vec r'\|^2} = \frac{\cos^2\theta}{s^2}$$

Sustituyendo

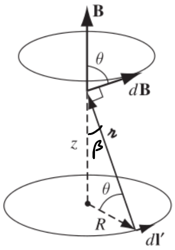
$$\|\vec B\| = \frac{\mu_0}{4\pi} I\int_{\theta_1}^{\theta_2} \underbrace{\left(\frac{\cos^2\theta}{s^2}\right)}_{1/\|\vec r-\vec r'\|^2}\overbrace{(\cos\theta)\underbrace{\left(\frac{s}{\cos^2\theta}d\theta\right)}_{dl'}}^{d\vec l'\wedge(\widehat{\vec r-\vec r'})} = \frac{\mu_0 I}{4\pi s}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta\, d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi s}\sin\theta\Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

Para un cable infinito

$\theta_2 \to +\pi/2$

$\theta_1 \to -\pi/2$

$$\Rightarrow \vec B(s)_{\text{cable infinito}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat e_\phi$$



Para este caso empleamos coordenadas cilíndricas nuevamente

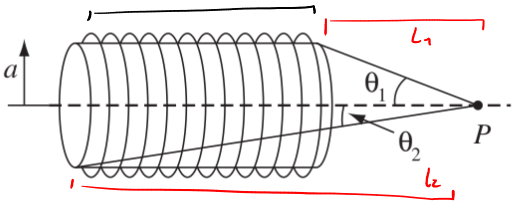
$$\left.\begin{aligned}\vec r\,' &= R\hat e_\varrho \\ \vec r &= z\hat e_z\end{aligned}\right\}$$ Nuevamente $\|d\vec\ell\,' \wedge (\hat r - \hat r')\| \sim \sin\beta = \cos\theta$ pues al integrar se va la componente horizontal

$$\|\vec r - \vec r\,'\|^2 = z^2 + R^2 \quad , \quad \cos\theta = \frac{R}{\|\vec r - \vec r\,'\|}$$

$$B\hat e_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int (R\,d\varphi)\cdot\frac{\cos\theta}{\|\vec r - \vec r\,'\|^2}\hat e_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\hat e_z\int d\varphi\,\frac{R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2+R^2)^{3/2}}\hat e_z$$

Solenoide

n vueltas por longitud



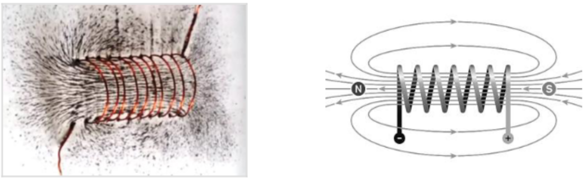


Figure 4. The magnetic field lines of a solenoid in the experiment (on the left) and in illustration (on the right).

Sabemos que para una espira

$$B_1 = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}}$$

Notemos que queremos integrar $B_{tot} = \int_{L_1}^{L_2} B_1\, n\, dz$

pero $\tan\theta = a/z \Rightarrow z = a\cot\theta$

$$\Rightarrow \sec^2\theta\, d\theta = -\frac{a}{L^2}\,dz$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = -\frac{1}{a}\left(\frac{a}{z}\right)^2 dz = -\frac{\tan^2\theta}{a}\,dL = -\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta\, a}\,dL$$

$$\Rightarrow dL = \frac{-a\,d\theta}{\sin^2\theta}$$

$$\therefore\ B_{tot} = \frac{\mu_0 I a^2 n}{2}\int_{L_1}^{L_2}\frac{dz}{(z^2+a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a^2 n}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{-d\theta}{\sin^2\theta}\,\frac{a}{[a^2(\underbrace{\cot^2\theta+1}_{\csc^2\theta})]^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a^3 n}{2a^3}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{-d\theta}{\sin^2\theta\cdot\csc^3\theta} = \frac{\mu_0 I n}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\,(-d\theta)$$

Por lo tanto

$$B_{tot} = \frac{\mu_0 I n}{2}\cos\theta\Big|_{\pi}^{0} = \mu_0 I n$$