Transformada de Legendre

En el contexto de la mecánica, definimos la función de estado $L(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t)$, conocida como la función Lagrangiana. También, vimos que podemos construir la función Hamiltoniana H, que en general es:

$$H=\sum_i p_i \dot{q}_i - L(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t), \qquad \text{con } p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

La expresión anterior es la transformada de Legendre multivariable del lagrangiano. Antes de interpretar H, analicemos qué hace la transformada en el caso más sencillo, transformada de Legendre en una dimensión, así como entender qué es una transformada.

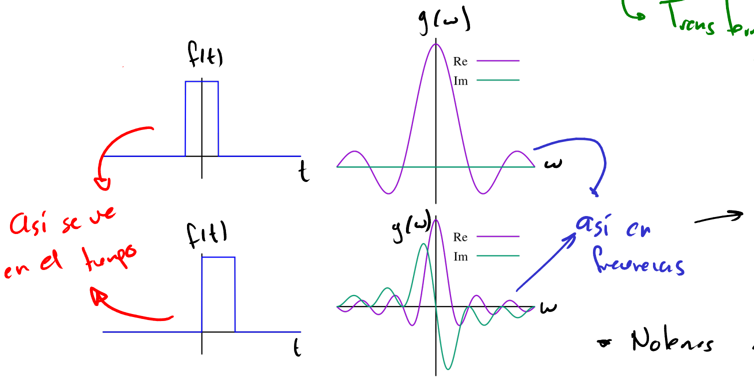
- Transformada: Cambia la forma de representar una función manteniendo la misma información. Por ejemplo:

· Transformada de Fourier $\mathcal{F}[f] = \int dt\, e^{-i\omega t} f(t) = g(\omega)$

función en el tiempo

función en frecuencias

Transformada integral



Es la misma información pero en un espacio distinto.

- Notemos que $\exists\, \mathcal{F}^{-1}$ t.q. $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f(t)$

$$\mathcal{F}^{-1}[g] = \frac{1}{2\pi}\int dt\, e^{+i\omega t} g(\omega) = f(t)$$

· Transformada de Legendre

· Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ t.q. $f=f(x)$, $s=\frac{df}{dx}$, entonces

$$\boxed{T_L[f] \equiv x\frac{df}{dx} - f = xs - f}$$

Determinemos de qué variables depende $T_L[f]$:

pero $df = \frac{df}{dx}dx = s\,dx$

Sea $g = T_L[f]$. Entonces $dg = d[xs-f] = dx\cdot s + x\cdot ds - df$

$$\Rightarrow dg = \cancel{dx\, s} + x\, ds - \cancel{s\, dx} = x\, ds \quad \therefore \boxed{g=g(s)}, \quad \boxed{\frac{dg}{ds}=x}$$

Es decir, $T_L[f]$ cambia la dependencia de x, a la de la curvatura de la función f.

Otra propiedad de $T_L[f]$ es que es su propia inversa, es decir:

$$\text{P.D.}\quad T_L\left[T_L[f]\right] = f.$$

Sea $g(s) = T_L[f(x)] = x\cdot s - f$, con $s = df/dx$ y $x = dg/ds$.

Calculemos $T_L[T_L[f]] = T_L[g] = s\dfrac{dg}{ds} - g = s\cdot x - g$

pero $g = T_L[f] = x\dfrac{df}{dx} - f = x\cdot s - f$

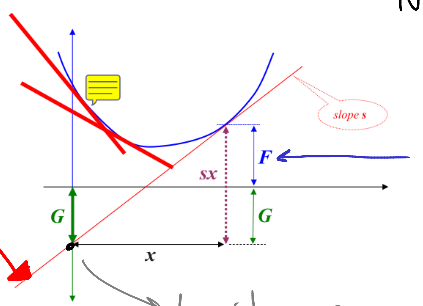
$$\Rightarrow T_L[T_L[f]] = s\cdot x - g = s\cancel{x} - (\cancel{x}s - f) = -(-f) = f.$$

¿Pero qué significa esto gráficamente?

Lo que se propone es que para $F = F(x)$ se cumple que

$$T_L[F(x)] = \underbrace{g(s) = x s - F}\text{;} \quad \text{donde} \quad s = \frac{dF}{dx}$$

Notemos que es la expresión de la familia de la recta tangente que pasa por cada punto $(x, F(x))$ $\rightarrow$



Notemos que

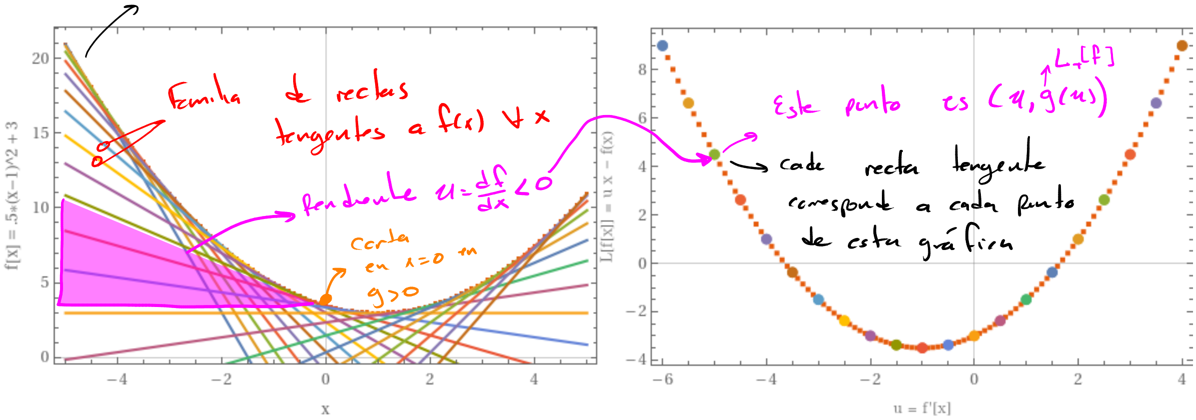
$F + G = x\cdot s$

↓

Punto en la curva

la idea es graficar este punto G, como función de $s = \dfrac{dF}{dx}$

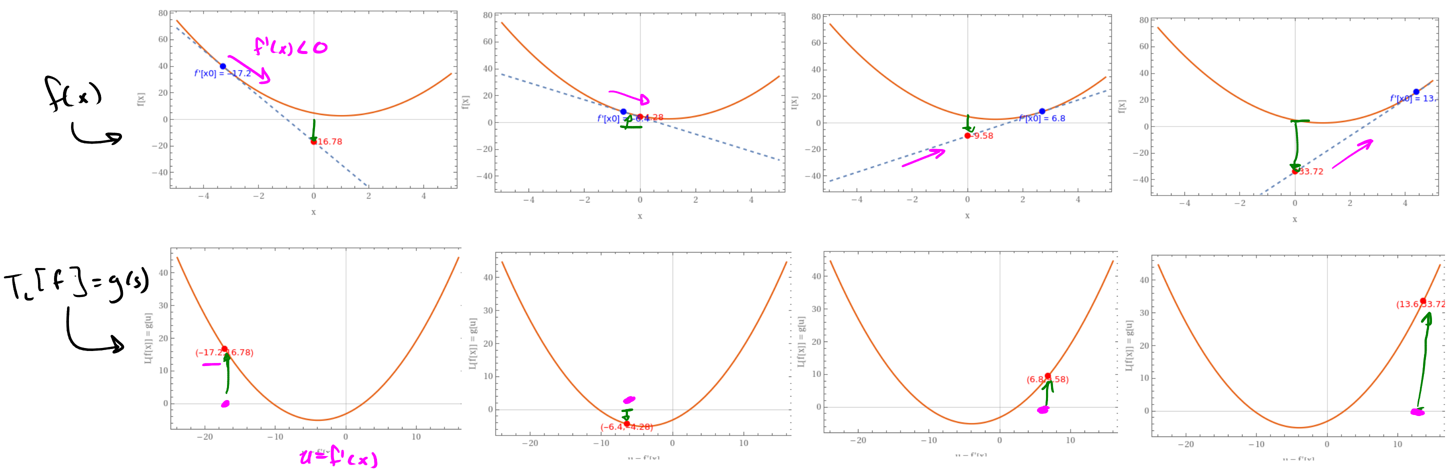
Curva $f(x) = 5(x-1)^2 + 3$



En las siguientes gráficas se observa cómo se mapea

$$(x, f(x)) \longrightarrow \left(u = \frac{df}{dx},\ g(s)\right)$$

corresponde a la distancia entre el eje x y el corte de la recta tangente al eje y (medido hacia abajo)



Cabe mencionar que lo anterior se puede generalizar para múltiples variables:

$$T_L[f(x_1,x_2,x_3,\dots x_N)] = \sum_{i=1}^{N} x_i \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}}^{=s_i} - f = g(s_1,s_2,\dots,s_N)$$