Principio de d'Alembert

Éste establece que las fuerzas de constricción no realizan trabajos virtuales, pero ¿qué significa esto?

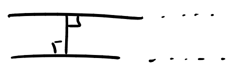
Del formalismo de Newton tomamos los siguientes paradigmas:

→ Tiempo absoluto ⇒ Nos lleva a la relatividad galileana

$\Delta t \longrightarrow \Delta t'$

→ Espacio absoluto y euclidiano ⇒ Se cumplen los cinco postulados de Euclides

→ "Líneas paralelas no se tocan"



→ Espacio plano

Con un espacio plano, construimos un espacio vectorial

→ Espacio físico $\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{E}^3$ → Espacio euclidiano en 3D

La única diferencia es que definimos la distancia

$$d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sqrt{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\cdot(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}$$

→ Fuerzas ⇒ Tres (3) Leyes de Newton

La segunda ley de Newton nos da las ecuaciones de movimiento

Sist. de N partículas

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i^{(ext)} + \vec{F}_i^{(intern)} \right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

masa constante

Como estamos en $\mathbb{E}^3$ hay $3N$ ecuaciones que resolver de 2do grado

⇒ Tenemos que realizar $2 \times (3N)$ integraciones

= Número de grados de libertad

Para resolver las ecuaciones de Newton para 1 partícula notamos que necesitamos describir el lado izquierdo, es decir a $\vec{F}$ → lo que actúa sobre la partícula

→ D'Alembert: ¿Hay comportamientos generales para $\vec{F}$?

Hay relaciones empíricas → Ecuaciones CONSTITUTIVAS

↓

Permiten que pueda escribir las ecuaciones de movimiento

Mediante la observación, se supuso que

- resortes → $\vec{F} = -k\vec{r}$
- masa puntual → $\vec{F} = -m\vec{g}$
- Fuerzas a distancia → $\vec{F} = -\nabla\left(\frac{e^{-\lambda r}}{r}\right)$
- Fluidos → $\frac{\vec{F}}{V} = -\rho \nabla P$ (presión)

También hay otro tipo de fuerzas, como las fundamentales

Fuerza de Lorentz $\longrightarrow$ $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Segunda ley de Newton $\longrightarrow$ $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$

Sin embargo hay otro tipo de fuerzas:

Ec. de movimiento $\quad \dot{\vec{p}} = \sum \vec{F}$

$\dot{\vec{p}}$ ↓ Propiedad de la partícula

$\sum \vec{F}$ ↓ Agentes externos al cuerpo

↳ Fuerzas aplicadas { F. externas, F. internas }

↳ Fuerzas de constricción

De las fuerzas de constricción se puede decir lo siguiente:

→ Limitan el movimiento → Tienen efectos geométricos

→ Restan grados de libertad

→ No hacen trabajo (virtual)

¿Por qué la 2da y 3ra ley no son fuerzas de constricción?

$\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ → Fenómeno general y fundamental

· $\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21}$ → —— " —— (Fuerzas de reacción) (Fuerzas internas)

$\vec{F} = -k\vec{r}$ → Hook → Modelo de la constitución de un resorte

↳ Caso muy particular (y con limitaciones materiales)

En general, las fuerzas externas las podemos dividir como

$$\vec{F}^{(ext)} = \vec{F}_{constricción} + \vec{F}_{constitutivas}$$

↳ limitan cómo se puede mover una partícula → Modifican los grados de libertad

↳ Mecanismos → Dimensionalidad → 1 partícula se puede mover en (x,y,z) → 3 grados de libertad

↓

N partículas → 3N grados de libertad

Por cada constricción quitamos un grado de libertad

ℓ constricciones → $3N-\ell$ grados de libertad

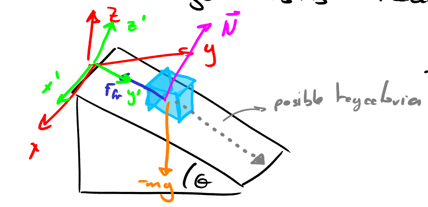
Mecanismos → Agentes externos

↓

limitaciones geométricas

↙ Superficies ↘ Otras fuerzas.

Para aterrizar estas ideas, veamos el ejemplo del plano inclinado



→ Sistema del cubo en el plano inclinado.

$N=1 \Rightarrow$ Hay 3 grados de libertad de inicio

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

↳ de la geometría, vemos que

$x(t) = x_0$ ✓ → quitamos un grado de libertad

En el diagrama hay dos ejes coordenados

El rojo (paralelo al piso)

$F_y = m\ddot{y}(t) = -F_{fr}\sin\theta + N\cos\theta$

$F_z = m\ddot{z}(t) = -mg + F_{fr}\cos\theta + N\sin\theta$

$\tan\theta = y/x$ → Ecuación de constricción

↳ este problema es equivalente al verde, pero más engorroso

El verde (paralelo al plano inclinado)

$F_{y'} = m\ddot{y}'(t) = -F_{fr} + mg\cos\theta$

$F_{z'} = m\ddot{z}'(t) = -mg\sin\theta + N = 0$ → Por la geometría

Aquí de forma directa, vemos que

$z(t) = V_{0z}\Delta t$ → Nos quitó una integral

y lo que resta es ver que

$\ddot{y}(t) = -F_{fr} + mg\cos\theta$ → Falta proponer una expresión para F_{fr}, para que tenga sólo una integración

Ahora, calculemos el trabajo de cada fuerza sobre el objeto

Supongamos un desplazamiento sobre la trayectoria posible

$d\vec{r} = dr\,\hat{e}_{y'} = dr(\cos\theta\, d_z\,\hat{e}_z + \sin\theta\, d_y\,\hat{e}_y)$

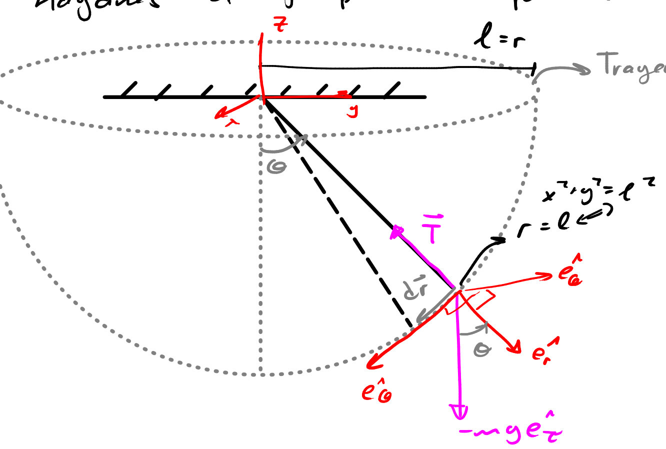
En los dos sistemas de referencia

$dW_{\vec{g}} = -\vec{F}_g \cdot d\vec{r} = -[-mg\hat{e}_z]\cdot d\vec{r} = mg\cos\theta$

$dW_{\vec{F}_{fr}} = -\vec{F}_{fr}\cdot d\vec{r} = -[F_{fr}\hat{e}_{y'}]\cdot d\vec{r} = -F_{fr}\,dr$

$dW_{\vec{N}} = -\vec{N}\cdot d\vec{r} = -[N\hat{e}_{z'}]\cdot d\vec{r} = 0$ → Esta fuerza hizo cero trabajo y me quitó un grado de libertad

Hagamos el ejemplo del péndulo rígido ⇒ Cuerda inextensible



En la base esférica $(r,\theta,\varphi) \Rightarrow \varphi = \varphi_0$

$F_\varphi = mr^2\sin\theta\,\ddot{\varphi} = 0$ → ya tenemos esta integral

$F_\theta = mr^2\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$

$F_r = m\ddot{r} = m\ddot{l} = mg\cos\theta - T = 0$ → pues $r = l = cte$

↳ ya hice esta integral

Las dos condiciones geométricas me quitaron dos grados de libertad y debo resolver sólo una ecuación

osc.

$ml^2\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \approx -mg\theta$

$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta \Rightarrow \theta = \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\Delta t + \theta_0\right)$

y los trabajos $d\vec{r} = r\,d\theta\,\hat{e}_\theta$

$dW_{\vec{g}} = mg\sin\theta\, r\, d\theta$

$dW_{\vec{T}} = 0$ → También es nulo el trabajo

Notemos que en los dos casos hubo dos constricciones pero sólo identifiqué a una fuerza. Como su efecto es geométrico basta describirlas como curvas de nivel en $\mathbb{E}^3$ ($\mathbb{R}^3$).

→ Para el plano inclinado

· $f_1(x,y,z,t) = \underbrace{\hat{n}\cdot\vec{r}} - a = 0$

↳ ecuación del plano de movimiento

· $f_2(x,y,z,t) = x - x_0 = 0$

→ Para el péndulo

· $f_1(r,\theta,\varphi,t) = \varphi - \varphi_0 = f_2(x,y,z,t) = y - y_0$

· $f_2(r,\theta,\varphi,t) = \underbrace{r^2 - \ell^2 = x^2 + y^2 - \ell^2 = f_2(x,y,z,t)}$

Notemos que podemos construir a una constricción geométrica en distintos marcos de referencia.

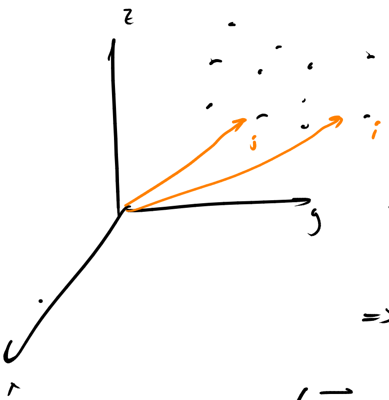
En general, una constricción es de la forma

$\underbrace{f(\vec{r},t)=0}$ Constricciones holonómicas

$\underbrace{f(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)=0}$ Constricciones no holonómicas

Con esto ya podemos escribir el principio de d'Alembert

Si tenemos un sistema de N partículas



$$\vec{F}_i = \sum_j \vec{F}_{ij}^{(int)} + \vec{F}_i^{(ext)} = \dot{\vec{p}}_i$$

$$\Rightarrow \sum_i \left(\vec{F}_i^{int} + \vec{F}_i^{(ext)} - \dot{\vec{p}}_i \right) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{F}_i^{int} + \vec{F}_i^{(ext)} - \dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i^{int} + \vec{F}_i^{ext'} + \vec{F}_i^{(const)} - \dot{\vec{p}}_i = 0$$

$$\Rightarrow \left(\vec{F}_i^{int} + \vec{F}^{ext'} + \cancel{\vec{F}^{cont}} - \dot{\vec{p}}_i \right) \cdot \boxed{\delta\vec{r}_i} = 0$$

→ Desplazamiento virtual

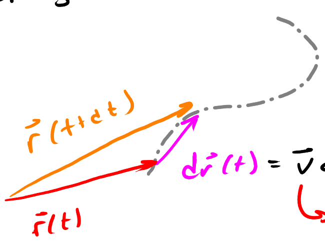
d'alembert

$$\Rightarrow \left(\underbrace{\vec{F}^{int} + \vec{F}^{ext}}_{\vec{F}\,(aplicadas)} - \dot{\vec{p}}_i \right) = 0$$

↳ Hace que el sistema pueda resolverse con las c.i. necesarias (ver final)

¿Por qué el Principio de d'Alembert está en términos de desplazamientos virtuales?

Desplazamiento real



↳ Depende de $\vec{v}$ → parámetro físico

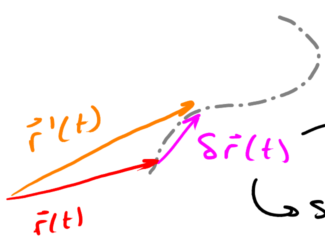
$$d\vec{r}(t) = \underbrace{\vec{r}(t) - \vec{r}(t+dt)}_{\text{posición a tiempos distintos}} = \vec{v}\,dt$$

↓

Trabajo real

↳ $dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$

Desplazamiento virtual



→ sólo depende de dos posibles posiciones.

↳ sólo es un parámetro geométrico

$$\delta\vec{r}(t) = \underbrace{\vec{r}(t) - \vec{r}'(t)}_{\text{todo ocurre a un mismo tiempo}}$$

↓

Trabajo virtual

$\delta W = \vec{F}\cdot\delta\vec{r}$

La principal diferencia entre los desplazamientos reales ($d\vec{r}$) y los virtuales ($\delta\vec{r}$) es:

Si $f = f(x, y, z, t)$; $x_i = (x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z)$

$$\Longrightarrow df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt \quad \text{vs.} \quad \delta f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \cancel{\frac{\partial f}{\partial t} \delta t}$$

$\delta t = 0$ → pues es a un tiempo fijo.

Una definición más clara es la de

Virtual Displacement in Lagrangian Dynamics

Subhankar Ray*
Dept of Physics, Jadavpur University, Calcutta 700 032, India and C. N. Yang Institute for Theoretical Physics, Stony Brook, NY 11794

J. Shamanna†
Physics Department, Visva Bharati University, Santiniketan 731235, India

(Dated: September 1, 2003)

Propone lo siguiente

- $f(\{\vec{r}_i\}, t)$ es el lugar geométrico que sigue una partícula
- Cualquier desplazamiento que haga, obedece

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{r}_i}\right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \longrightarrow \text{Pues es la dirección tangente a } f$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{r}_j}\right) \cdot \vec{v}_j + \frac{\partial f}{\partial t}$$

- Conozco la trayectoria, pero no su dependencia temporal. Es decir, no sé cuándo ocurren, entonces me agarro dos desplazamientos distintos y veo qué tan diferentes son.

$$\Rightarrow \text{Defino} \quad \underset{i \neq j}{\delta \vec{r}_i \equiv d\vec{r}_i - d\vec{r}_i'} = (\vec{v}_i - \vec{v}_i')\, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{paso infinitesimal}}}{dt} \equiv \text{Desplazamiento virtual}$$

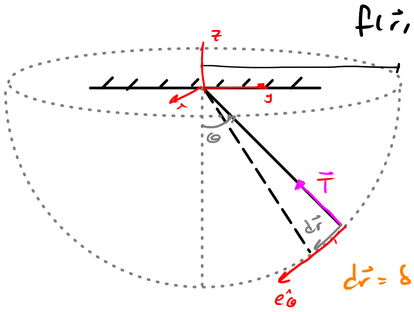
"Variación entre desplazamientos posibles"

- De esta definición, vemos que si $f = f(\vec{r})$ → No depende del tiempo → $d\vec{r} = \delta\vec{r}$

Ejemplo del caso no estacionario del péndulo

Péndulo estático

$f(\vec{r}, t) = x^2 + y^2 - \ell^2 = 0$



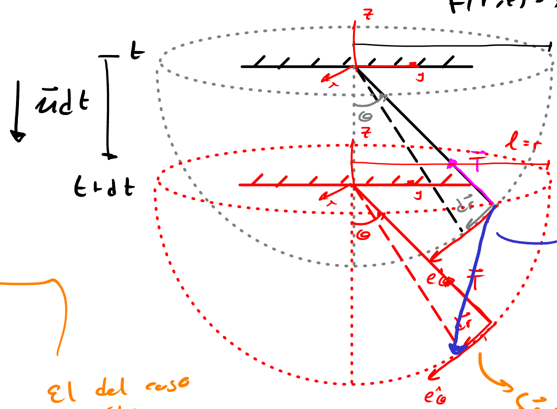
$d\vec{r} = \delta\vec{r} = r\, d\theta\, \hat{e}_\theta$

$\Rightarrow \vec{T} \cdot d\vec{r} = 0$

El del caso estático

Péndulo que cae con una velocidad $\vec{u}$

$f(\vec{r}, t) = x^2 + (y - ut)^2 - \ell^2$



esto es el $d\vec{r} = \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)$

$\vec{T} \cdot d\vec{r} \neq 0$

$\delta\vec{r} = (\vec{v}' - \vec{v})\, dt$

$= (\underbrace{\vec{v}(t+dt) - \vec{u}}_{\text{desplazas}} - \vec{v})\, dt$

lo que se recorre

Entonces $\delta\vec{r} \cdot \vec{T} = 0$

¿Por qué el principio de D'Alembert nos ayuda a tener un sistema soluble?

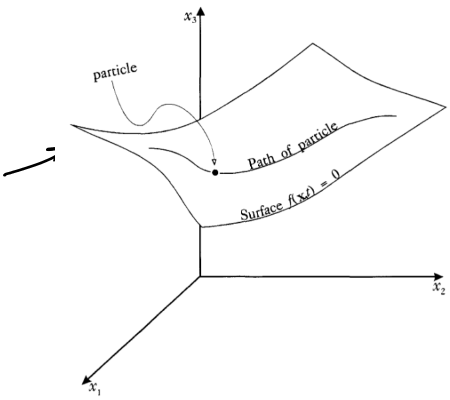


FIGURE 2.1
A particle in 3-space constrained to a two-dimensional surface given by an equation of the form $f(\mathbf{x}, t) = 0$.

d'Alembert. $\vec F^{(c)} \cdot \delta \vec r = 0$ → ¿y eso qué?

En general se cumple que

→ $\underbrace{m\ddot{\vec r}_i}_{} = \vec F_i^{(a)} + \vec F_i^{(c)}$ $i \in \{1,2,\dots N\}$

No se conocen

3 componentes → 3N ecuaciones

para cada $\vec F^{(c)}$ actuando tenemos

$f_k(\{\vec r_i\},\{\dot{\vec r}_i\},t)=0$ $k \le 3N$

Debo resolver 6N incógnitas ($3N \to \vec r_i$, $3N \to \vec F_i^{(c)}$)

$\vec F^{(c)}, \vec r_i$ se relacionan con 3N ecuaciones y ℓ condiciones

$\boxed{6N > 3N+\ell}$ → Me faltan $3N-\ell$ ecuaciones para que el sistema sea soluble

$3N-\ell$

Pero sabemos que $\sum_i^N \vec F_i^{(c)}\cdot\delta\vec r_i = 0$ → Me relaciona $3N-\ell$ ecuaciones más.

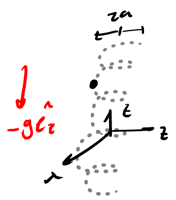
↳ son las que me faltaban

3N

ℓ → ℓ términos son cero

· Ejemplo

Masa que se mueve a lo largo de un resorte helicoidal:



$\vec r = a\cos\theta\,\hat e_x + a\,\text{sen}\theta\,\hat e_y + b\theta\,\hat e_z = a\hat e_s + b\theta\,\hat e_z$ → Dado que se mueve por el resorte, sabemos que hay alguna fuerza de constricción $\vec F^{(c)}$

$\Rightarrow \dot{\vec r} = a\dot\theta\,\hat e_\varphi + b\dot\theta\,\hat e_z$

$\Rightarrow \ddot{\vec r} = a(\ddot\theta\,\hat e_\varphi - a\dot\theta^2\,\hat e_s + b\ddot\theta\,\hat e_z)$

La ecuación de movimiento es: $m\ddot{\vec r} = -mg\hat e_z + \vec F^{(c)}$ No se conocen

Escribiéndola por componentes

s: $-ma\dot\theta^2 = F_s^{(c)}$ ...(1)

· φ: $ma\ddot\theta = F_\varphi^{(c)}$ ....(2)

· z: $mb\ddot\theta = -mg + F_z^{(c)}$ ...(3)

3 ecuaciones pero 4 incógnitas

$\ddot\theta,\ F_s^{(c)},\ F_\varphi^{(c)},\ F_z^{(c)}$

$\ddot\theta = \frac{d}{dt}\dot\theta$

El principio de d'Alembert me da la cuarta ecuación

$$dW^{(c)} = \vec F^{(c)}\cdot\delta\vec r = \vec F^{(c)}\cdot\dot{\vec r}\,dt = F_s^{(c)}\cdot 0 + F_\varphi^{(c)} a\dot\theta + F_z^{(c)} b\dot\theta = (F_\varphi^{(c)}a + F_z^{(c)}b)\,\dot\theta = 0$$

$$\Rightarrow F_z^{(c)} = -\frac{a}{b}F_\varphi^{(c)} \quad \dots(4)$$

Sigue abajo

Notemos que (1) ya está despejando y resolviendo $F_s^{(c)} = -ma\dot{\theta}^2$ → Fuerza centrípeta

$F_s^{(c)} = \frac{-mab^2}{(a^2+b^2)^2} g^2 t^2$

De (3) y (4) ⟶ $b\ddot{\theta} = -g + \frac{F_z^{(c)}}{m} = -\left(g + \frac{a}{mb} F_\varphi^{(c)}\right) \quad \dots (5)$

De (5) y (2) ⟶ $b\ddot{\theta} = -\left(g + \frac{a}{mb} F_\varphi^{(c)}\right) = -\left(g + \frac{a}{mb} ma\ddot{\theta}\right) = -\left(g + \frac{a^2}{b}\ddot{\theta}\right)$

$$\Rightarrow \left(b + \frac{a^2}{b}\right)\ddot{\theta} = -g \Rightarrow \underline{\ddot{\theta} = \frac{-b}{a^2+b^2} g} \quad \dots (6)$$

De (6) y (2) ⟶ $F_\varphi^{(c)} = ma\ddot{\theta} = \underline{-\frac{mab}{a^2+b^2} g} \quad \dots (7)$

De (4) y (7) ⟶ $F_z^{(c)} = \underline{\frac{a^2}{a^2+b^2} mg} \quad \dots (8)$

Comentario sobre las ecuaciones constitutivas:

No todas las ecuaciones constitutivas relacionan fuerzas. Van más enfocadas a la constitución de un material.

P. ej. sabemos que, en general podemos definir al vector de desplazamiento

$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})$ ⟶ Sup. un material lineal

vector de desplazamiento

Polarización de un material

↳ las mismas hipótesis pueden plantearse para:

- Respuesta magnética
- Respuesta elástica
- Viscosidad
- etc.

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \underbrace{\varepsilon_0 \overleftrightarrow{\chi}_e(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})}_{\vec{P}(\vec{r})}$$

susceptibilidad

Sup. lineal e isótropo $\overleftrightarrow{\chi} \longrightarrow \mathbb{1}\chi_e \to \chi_e$

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \varepsilon_0 \chi(\vec{r}) \vec{E}$$

Sup. lineal, homogéneo e isótropo $\chi_e(\vec{r}) \longrightarrow \chi_e$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}(\vec{r}) = \varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{E} \equiv \varepsilon \vec{E}$$

$\underline{\vec{D} = \varepsilon \vec{E}}$ ⟶ Ecuación constitutiva