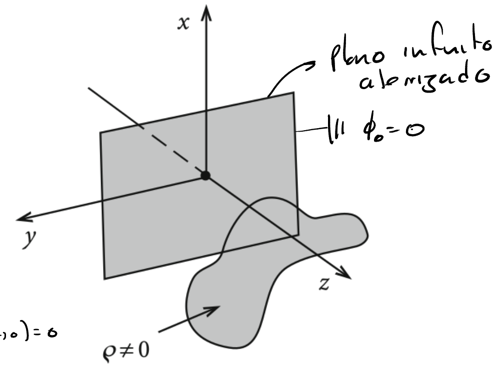
2.4.- Método de imágenes



En la sección anterior desarrollamos el formalismo de Green para electrostática. Ahora, ejemplificaremos un caso con condiciones de Dirichlet

$\hookrightarrow$ $\rho(\vec{r})$ acotada en $V = \{\vec{r} \mid z > 0\}$

$\hookrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \phi(z=0) = \phi_0 = 0 \\ \phi(x \to \pm\infty) = \phi(y \to \pm\infty) = 0 \end{array} \right\} \phi(r \to \infty \mid z > 0) = 0$

Es decir para $V = \{\vec{r} \mid z > 0\}$ tenemos que $\phi(\partial V) = 0$. Entonces, la meta es determinar

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} + f_D(\vec{r}, \vec{r}\,') \quad \text{ t. } \quad \phi(\vec{r}) = \int_V d^3r' \rho(\vec{r}\,') G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') - \varepsilon_0 \oint_{\partial V} d^2r' \phi(\vec{r}\,') \hat{n} \cdot \nabla_{\vec{r}\,'} G_D(\vec{r}, \vec{r}\,')$$

para esto, debe cumplirse que

$$\nabla_{\vec{r}}^2 f_D(\vec{r}, \vec{r}\,') = 0 \text{ en } V \quad \text{y} \quad \oint_{\partial V} d^2r' \underbrace{G_D(\vec{r}, \vec{r}\,')}_{} \hat{n} \cdot \nabla \phi(\vec{r}\,') = 0$$

$\hookrightarrow$ Esto se cumplirá si $G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') = 0$ en ∂V ...(1)

Para que (1) se cumpla, tenemos que ver que

$$0 = G_D(\vec{r}, z' = 0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z)^2 \right]^{-1/2} + f_D(\vec{r}, z' = 0)$$

$$\Rightarrow f_D(\vec{r}, z' = 0) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z)^2 \right]^{-1/2}$$

Esto sugiere el Ansatz $\displaystyle f_D(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_B\,'\|}$ $\longrightarrow$ $\vec{r}_B\,'$ debe mantener la igualdad anterior sin importar el valor de z', entonces se propone

$$\Rightarrow f_D(\vec{r}, \vec{r}\,') = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2 \right]^{-1/2}$$

$\vec{r}\,' = (x', y', z') \longrightarrow \vec{r}_B\,' = (x', y', -z')$

Calculando

$$\nabla_{\vec{r}}^2 f_D(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{\varepsilon_0} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_B) = \frac{1}{\varepsilon_0} \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z + z') = 0 \quad \forall \vec{r} \text{ y } \vec{r}\,' \in V$$

$\longrightarrow$ Pues esto viven en $z<0$

Por tanto ya se cumplen las dos condiciones sobre $f_D(\vec{r}, \vec{r}\,')$, dando como resultado

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} - \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_B\|} \right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{-1/2} - \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2 \right]^{-1/2} \right\}$$

$\hookrightarrow$ En $z = 0$ se cumple que $\|\vec{r} - \vec{r}\,'\| = \|\vec{r} - \vec{r}_B\|$ entonces $G_D(\vec{r}, z' = 0) = 0$ si $G_D(\|\vec{r}\| \to \infty \mid z > 0) = 0$

Por lo tanto $G_D(\vec{r}, \vec{r}\,' \in \partial V) = 0$, que es la condición impuesta

Por lo tanto:

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r' \rho(\vec{r}\,') G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') - \varepsilon_0 \oint_{\partial V} d^2r' \cancel{\phi(\vec{r}\,')}^{\,0} \hat{n} \cdot \nabla_{\vec{r}\,'} G_D(\vec{r}, \vec{r}\,')$$

$\overset{0}{\rightarrow}$ Condiciones de frontera en ∂V

$$\Rightarrow \boxed{\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} - \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_B\|} \right), \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} \vec{r}\,' = x'\hat{e}_x + y'\hat{e}_y + z'\hat{e}_z \\ \vec{r}_B = x'\hat{e}_x + y'\hat{e}_y - z'\hat{e}_z \end{array}}$$

Solución a $\phi(z > 0)$ con un plano $\phi(z = 0) = 0$ y $V = \{\vec{r} \mid z > 0\}$.

Si se tuviera la condición $\phi(z = 0) = \phi_0 \neq 0$, entonces notemos que

$$\hat{n} \cdot \nabla G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') \Big|_{\partial V} = -\hat{e}_z \cdot \nabla G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') \Big|_{z' = 0} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2z}{\left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2 \right]^{3/2}}$$

$\longrightarrow$ los dos términos son iguales para $z' = 0$

Y por lo tanto, de forma general

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r' \, G_D(\vec{r},\vec{r}') \rho(\vec{r}') + \frac{2z}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{\phi(x',y',0)}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}}$$

Con todo esto, podemos aseverar lo siguiente

$f_D(\vec{r},\vec{r}') \longrightarrow$ Potencial escalar asociado a una distribución de cargas fuera de V que permite empatar las condiciones de frontera en ∂V

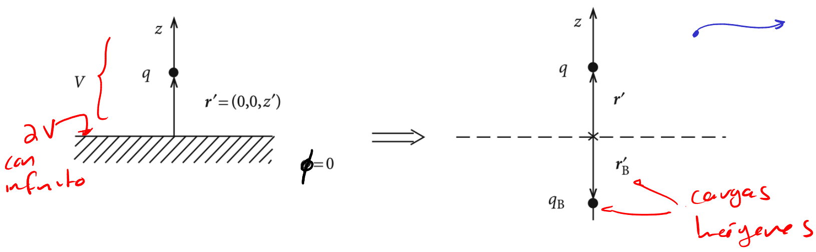
Estas son cargas ficticias con una distribución que depende de $\vec{r}'$ ⟶ Posición de cargas reales

⟶ Fuera de $\partial V \Rightarrow$ No modifican la ecuación de Poisson en V (pues $\nabla^2 f = 0$ en V)

El procedimiento anterior son las bases del método de imágenes que depende de diversas geometrías.

— Plano conductor aterrizado y carga puntual

Problema físico ⟶ Problema equivalente



Para resolver el potencial en $V = \{\vec{r} \,|\, z > 0\}$ proponemos

$$4\pi\varepsilon_0 \phi(\vec{r}) = \frac{q}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} + \underbrace{\frac{q_B}{\|\vec{r}-\vec{r}_B\|}}_{\text{Contribución de } f_D(\vec{r},\vec{r}')}$$

con $\vec{r}' = z\hat{e}_z$

¿Cuánto vale $\vec{r}_B$ o q_B?

Por condiciones de Dirichlet $\phi(z=0) = 0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{[(x-x')^2+(y-y')^2+(-z')^2]^{-1/2} q + q_B [(x-x_B)^2+(y-y_B)^2+(-z_B)^2]^{-1/2}\right\}$

Para que se cumpla esta condición: $q = -q_B$, $(-z')^2 = (-z_B)^2 \Leftrightarrow \vec{r}' = -\vec{r}_B$ ⟶ Fuera de V ⟶ pues no debe modificarse V

$$\Rightarrow \boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} - \frac{1}{\|\vec{r}+\vec{r}'\|}\right)}$$

Falta corroborar que $\nabla^2_{\vec{r}}\left(\frac{1}{\|\vec{r}+\vec{r}'\|}\right) = 0$, que sí pues $\nabla^2_{\vec{r}}\left(\frac{1}{\|\vec{r}+\vec{r}'\|}\right) = -4\pi\delta(\vec{r}+\vec{r}') = 0$ en V, pues $\vec{r}' \notin V$.

⟶ Esfera conductora aterrizada

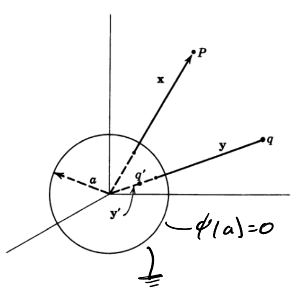


Figure 2.2 Conducting sphere of radius a, with charge q and image charge q'.

Nuevamente proponemos $4\pi\varepsilon_0 \phi(\vec{r}) = \frac{q}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} + \frac{q_B}{\|\vec{r}-\vec{r}_B\|}$

$$= \frac{q}{\|r\hat{e}_r - r'\underbrace{(\hat{r}')}\|} + \frac{q_B}{\|r\hat{e}_r - r_B\underbrace{(\hat{r}_B)}\|}$$

⟶ Vectores unitarios

$$= \frac{q}{r\|\hat{e}_r - (\frac{r'}{r})(\hat{r}')\|} + \frac{q_B}{r_B\|(\frac{r}{r_B})\hat{e}_r - (\hat{r}_B)\|}$$

Evaluando en $\phi(a) = 0$, vemos que $4\pi\varepsilon_0\phi(a) = 0 = \frac{q}{a\|\hat{e}_r - (\frac{r'}{a})(\hat{r}')\|} + \frac{q_B}{r_B\|(\frac{a}{r_B})\hat{e}_r - (\hat{r}_B)\|}$

Es decir $4\pi\epsilon_0\phi(a)=0=\dfrac{q}{a\left\|\hat{e}_r-\left(\frac{r'}{a}\right)(\hat{r}')\right\|}+\dfrac{q_B}{r_B\left\|\left(\frac{a}{r_B}\right)\hat{e}_r-(\hat{r}_B)\right\|}$.

Debido a la simetría esférica del problema, es razonable pensar que

$$\hat{r}'=\hat{r}_B$$

$$\Rightarrow\quad 4\pi\epsilon_0\phi(a)=0=\frac{q}{a\left\|\hat{e}_r-\left(\frac{r'}{a}\right)(\hat{r}')\right\|}+\frac{q_B}{r_B\left\|\left(\frac{a}{r_B}\right)\hat{e}_r-\hat{r}'\right\|}\quad\Rightarrow\quad \underbrace{\frac{q}{a}=\frac{q_B}{r_B}(-1)}_{a)}\ \text{y}\ \underbrace{\left\|\hat{e}_r-\left(\frac{r'}{a}\right)\hat{r}'\right\|=\left\|\left(\frac{a}{r_B}\right)\hat{e}_r-\hat{r}'\right\|}_{b)}$$

De b) notemos que

$$\left\|\hat{e}_r-\left(\frac{r'}{a}\right)\hat{r}'\right\|^2=1-2\left(\frac{r'}{a}\right)\hat{e}_r\cdot\hat{r}'+\left(\frac{r'}{a}\right)^2=\left(\frac{a}{r_B}\right)^2-2\left(\frac{a}{r_B}\right)\hat{e}_r\cdot\hat{r}'+1=\left\|\left(\frac{a}{r_B}\right)\hat{e}_r-\hat{r}'\right\|^2\quad\dots(1)$$

$$\Rightarrow -2\left(\frac{r'}{a}\right)\hat{e}_r\cdot\hat{r}'+\left(\frac{r'}{a}\right)^2=\left(\frac{a}{r_B}\right)^2-2\left(\frac{a}{r_B}\right)\hat{e}_r\cdot\hat{r}'$$

$$\Rightarrow -2\,\hat{e}_r\cdot\hat{r}'\left[\left(\frac{r'}{a}\right)-\left(\frac{a}{r_B}\right)\right]+\left(\frac{r'}{a}\right)^2-\left(\frac{a}{r_B}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow -2\,\hat{e}_r\cdot\hat{r}'\left[\left(\frac{r'}{a}\right)-\left(\frac{a}{r_B}\right)\right]+\left[\left(\frac{r'}{a}\right)-\left(\frac{a}{r_B}\right)\right]\left[\left(\frac{r'}{a}\right)+\left(\frac{a}{r_B}\right)\right]=0$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{r'}{a}\right)-\left(\frac{a}{r_B}\right)\right]\left\{-2\,\hat{e}_r\cdot\hat{r}'+\left(\frac{r'}{a}\right)+\left(\frac{a}{r_B}\right)\right\}=0$$

Entonces, para todo valor de $\hat{e}_r\cdot\hat{r}'$ se cumplen las condiciones de frontera si

$$\frac{q}{a}=-\frac{q_B}{r_B}\ \text{y}\ \frac{r'}{a}=\left(\frac{a}{r_B}\right)\ \Rightarrow\ \boxed{r_B=a\left(\frac{a}{r'}\right)<a,\quad q_B=-q\left(\frac{r_B}{a}\right)=-q\left(\frac{a^2}{a\,r'}\right)=-q\left(\frac{a}{r'}\right)}$$

Por lo tanto $\phi(\vec{r})=\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}-\dfrac{(a/r')}{\left\|\vec{r}-\left(\frac{a}{r'}\right)^2\vec{r}'\right\|}\right)$ es el potencial que buscamos.

De este resultado podemos proponer qué forma tiene la función de Green para esta geometría

$$G_D(\vec{r},\vec{r}')=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}-\frac{1}{\left\|\left(\frac{r'}{a}\right)\vec{r}-\left(\frac{a}{r'}\right)\hat{r}'\right\|}\right]$$

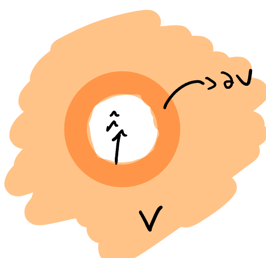
Notemos que cumple que $G_D(\vec{r},\vec{r}')=G_D(\vec{r}',\vec{r})$ y que $G_D(\vec{r},\vec{r}')\big|_{\partial V}=0$ por construcción y dado que $\frac{a^2}{r'}<a$, se cumple que $\nabla^2 G_D(\vec{r},\vec{r}')=0$ en V

Dado que ya conocemos la función de Green, no es necesario restringirnos al caso de esferas aterrizadas.

Para tener en cuenta $\phi(r=a)\neq 0$, debemos calcular $\hat{n}\cdot\nabla_{\vec{r}'}G_D(\vec{r},\vec{r}')\Big|_{r'=a}=-\hat{e}_{r'}\cdot\nabla_{\vec{r}'}G_D(\vec{r},\vec{r}')\Big|_{r'=a}$

Nuestro vector $\hat{n}$ debe apuntar fuera de V, y como en nuestro caso $V=\{\vec{r}\mid r>a\}$, entonces $\hat{n}=-\hat{e}_r$

De las expresiones en (1) podemos reescribir $G_D(\vec{r},\vec{r}')$ como sigue



$$G_D(\vec{r},\vec{r}')=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(r^2+(r')^2-2rr'\,\hat{e}_r\cdot\hat{r}'\right)^{-1/2}-\left(\frac{r^2(r')^2}{a^2}+a^2-2rr'\,\hat{e}_r\cdot\hat{r}'\right)^{-1/2}\right]$$

y como $\hat{n}\cdot\nabla_{\vec{r}'}=-\hat{e}_{r'}\cdot\nabla_{\vec{r}'}=-\frac{\partial}{\partial r'}$, entonces

$$\hat{n}\cdot\nabla_{\vec{r}'}G_D(\vec{r},\vec{r}')\Big|_{r'=a}=\frac{-1}{4\pi\epsilon_0 a}\frac{r^2-a^2}{\left(r^2+R^2-2ra\,\hat{e}_r\cdot\hat{r}'\right)^{3/2}}$$

Entonces, la solución general para esta geometría es:

$$\phi(\vec{r})=\phi(r,\theta,\varphi)=\int G_D(\vec{r},\vec{r}')\rho_{ext}(\vec{r}')\,d^3r'-\epsilon_0\oint_{r'=a}\phi(\vec{r}')\,\hat{n}\cdot\nabla_{\vec{r}'}G_D(\vec{r},\vec{r}')\,d^2r'$$

como $d^2r'=r^2\sin\theta'd\theta'd\varphi'=-r^2d(\cos\theta')\,d\varphi'$

$$\hookrightarrow +\frac{a(r^2-R^2)}{4\pi}\int_{-1}^{1}d(\cos\theta)\int_0^{2\pi}d\varphi'\,\frac{\phi(a,\theta',\varphi')}{\left(r^2+a^2-2ra\,\hat{e}_r\cdot\hat{r}'\right)^{3/2}}$$

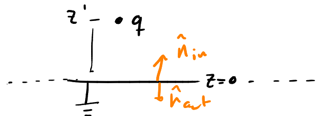
en donde la complicación de la integración en ∂V está en que

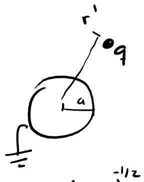
$$\hat{e}_r \cdot \hat{r}' = \sin\theta \sin\theta' \cos\varphi \cos\varphi' + \sin\theta \sin\theta' \sin\varphi \sin\varphi' + \cos\theta\cos\theta'$$

$$= \sin\theta\sin\theta'\left[\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\right] + \cos\theta\cos\theta' = \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi') + \cos\theta\cos\theta'$$

— Campo eléctrico, carga inducida y demás

Con los desarrollos anteriores, conocemos los potenciales para las siguientes geometrías





$$\phi(z>0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{-1/2} - \left((x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2\right)^{-1/2}\right]$$

$$\phi(r>a) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(r^2+(r')^2-2rr'\hat{e}_r\cdot\hat{r}'\right)^{-1/2} - \left(\frac{r^2(r')^2}{a^2}+a^2-2rr'\hat{e}_r\cdot\hat{r}'\right)^{-1/2}\right]$$

Campo eléctrico

Dado que $\vec{E} = -\nabla_r \phi$, entonces

$$\vec{E}(z>0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{(x-x')\hat{e}_x + (y-y')\hat{e}_y + (z-z')\hat{e}_z}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{3/2}} - \frac{(x-x')\hat{e}_x + (y-y')\hat{e}_y + (z+z')\hat{e}_z}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2\right]^{3/2}}\right\}$$

Escogiendo $\hat{r}' = \hat{e}_z$ $\hat{e}_r\cdot\hat{r}' = \cos\theta$ y en este caso lo dejaré de tarea ¨◡

Carga inducida

y en particular

$$\vec{E}(z\to 0^+) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-2z'\hat{e}_z}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z')^2\right]^{3/2}}$$

Como $(\vec{E}^{in} - \cancel{\vec{E}^{out}}^{\,0})\cdot\hat{n} = \vec{E}(z\to 0^+)\cdot\hat{e}_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, entonces

$$\sigma_{tot} = \varepsilon_0 E_z(x,y,0^+) = -\frac{q}{2\pi}\frac{z'}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z')^2\right]^{3/2}}$$

$$\sigma_{tot} = \varepsilon_0 E_r(r=a^+,\theta) = -\frac{q}{4\pi a^2}\left(\frac{a}{r'}\right)\frac{1-(a/r')^2}{\left(1+(a/r')^2-2(a/r')\cos\theta\right)^{3/2}}$$

Como el plano era neutro $\sigma_{tot} = \sigma_{ind}$, y por tanto

Tarea ¨◡

$$q_{ind} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,dy\,\sigma_{in}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,dy\,\frac{(-q/2\pi)z'}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z')^2\right]^{3/2}}$$

Integrando en cilíndricas con $s^2 = (x-x')^2+(y-y')^2$ y $dx\,dy = s\,d\varphi\,ds$

$$q_{ind} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} ds\,\frac{(-q/2\pi)z'}{\left[s^2+(z')^2\right]^{3/2}} = -qz'\int_0^{\infty} ds\,\frac{s}{\left[s^2+(z')^2\right]^{3/2}}$$

$$u = s^2+(z')^2 \longrightarrow du = 2s\,ds$$

$$q_{ind} = -qz'\int_{(z')^2}^{\infty}\frac{du/2}{u^{3/2}} = -qz'\left(+\frac{\cancel{2}}{1}\right)\frac{u^{-1/2}}{\cancel{2}}\Bigg|_{z'^2}^{\infty} = -\frac{z'}{|z'|}q = -q$$

Dado que ahora el plano está cargado, éste siente una fuerza debido a la carga original q en $z'>0$. En este caso

pero por simetría sólo habrá contribuciones en $\hat{e}_z$

$$\underbrace{d\vec{F}_{pq}}_{\text{Fuerza ejercida por el plano sobre } q} = \sigma\vec{E}(z\to 0^+)da$$

$$= \underbrace{E(z\to 0^+)}\,\sigma\,da\,\hat{e}_z$$

↳ Como para $z<0$ $\vec{E} = \vec{0}$, entonces hay una compensación con σ_{ind} y q, por lo que se propone que $E(z=0) = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ → Deducción con ley de Gauss eléctrica

3ª ley de Newton

$$\Rightarrow \vec{F}_{qp} = -\iint_{z=0} d\vec{F}_{pq} = -\hat{e}_z\iint \sigma E(z=0)da = -\hat{e}_z\iint\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}da$$

$$\vec{F}_{eq} = -\int d\vec{F}_{qe} = -\frac{\hat{e}_z}{2\varepsilon_0}\int d^2r\,\sigma^2(\theta)\cos\theta$$

$$= \frac{\hat{e}_z}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(-qa/r')}{\left(r'-(a/r')^2\right)^2}$$

y energía igual de tarea ¨◡

y Sustituyendo con la expresión de σ

$$\vec{F}_{qp} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{e}_z}{(2z')^2}$$

Donde se integró en coordenadas cilíndricas de nuevo.

El mismo resultado se obtenía de emplear el cálculo de $\vec{F}_{qq'}$, dado $\|\vec{r}-\vec{r}\,'\| = 2z'$

y aunque parezca que basta con analizar el problema imagen, hay que notar que para la energía del sistema, hay que proceder con cuidado

Formalmente, se debe calcular como sigue:

$d\vec{l} = \hat{e}_z\, dz'$ con $x' = y' = 0$

$$W = \int_{\infty}^{z'} \vec{F}_{pq} \cdot d\vec{l} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{z'} \frac{dz}{(2z)^2} = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 z}}_{\text{la energía total si V fuera todo el espacio}}\Big)$$

Este factor es nuevo.

Una forma de ver esto es argumentar que:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \vec{E}\cdot\vec{E}\, d^3r$$

si V es la mitad de todo el espacio

Esto lo podemos entender en que muevo dos cargas en el caso de las imágenes pero sólo una con el plano; la carga inducida ¡no las muevo yo!