Tarea 4 (Soluciones)

1.1) Hamaca

Decides comprar una hamaca para tu casa donde, convenientemente, hay un patio con dos árboles aledaños. Lo primero que se te ocurre para colgarla es amarrar los dos extremos de la hamaca en los árboles a la misma altura, tal como se muestra en la Fig 1. Si la hamaca tiene un peso total de W, y se subtiende un ángulo θ

1) - ¿Cuál es la tensión T_{ext} en cada extremo de la cuerda y la tensión T_{cen} en el centro de la hamaca antes de que te subas?

2) - Si en lugar de amarrar la hamaca en árboles, decidieras colgarla en la pared, ¿Qué tanto peso debe resistir la instalación en cada extremo para que no te caigas suponiendo que tienes una masa m y la hamaca pesa W?

3) - Muchas personas consideran que basta con que la instalación de cada extremo aguante la mitad de tu peso y el de la hamaca juntos. Discute si esto es cierto, o no, y bajo qué condiciones.

1) Según el diagrama de cuerpo libre, se cumplen las siguientes relaciones

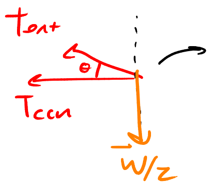
Extremo

$y: 2T_{ext}\cos\theta - W = 0$

$$\Rightarrow T_{ext} = \boxed{\frac{W}{2\cos\theta}}$$

$x: -(T_{ext}\sin\theta + T_{cen}) + (T_{ext}\sin\theta + T_{cen}) = 0$

Pero por simetría, y por estar en equilibrio estático



$\vec{T}_{ext} + \vec{T}_{cen} + \vec{W}/2 = 0$

$\Rightarrow x: T_{ext}\sin\theta + T_{cen} = 0$

$\Rightarrow T_{cen} = T_{ext}\sin\theta$

$$= \boxed{\frac{1}{2} W \tan\theta}$$

si $\theta = \pi/4$ $\quad T_{cen} = \frac{W}{2}$

pero $T_{ext} = \sqrt{2}W > W/2$

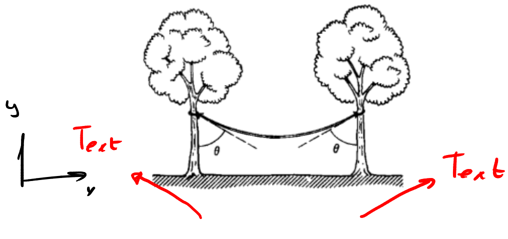


Figura 1: Hamaca en el patio.

Hint: ¿Qué resultados se obtienen si $\theta = \pi/4$? (30 puntos)

2) $W \longrightarrow W + mg \Rightarrow T_{ext} = \frac{1}{2}\frac{W+mg}{\cos\theta}$

3) Eso sólo ocurría si $\theta = 0$, pues as $\theta > 0$, es falso

1.2) Feria

En una feria hay un juego que puede describirse como un cilindro que, después de un tiempo de iniciado le juego, gira a una velocidad angular constante ω. Al alcanzar la velocidad ω, los pasajeros terminan contra la pared y tiempo después el piso desaparece.

- Haz el diagrama de cuerpo libre sobre una persona en el juego y explica por qué no caen cuando el piso se retira.
- Encuentra la velocidad angular mínima a la que debe girar el juego para que sus usuarios no caigan.

Como se sigue una trayectoria circular, la aceleración es la centrípeta, es decir $a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$

Las ecuaciones de movimiento son:

$\hat{r}: -ma_c = -N \Rightarrow N = \omega^2 R m$

$\hat{z}: \mu N - mg = 0 \Rightarrow N = \frac{mg}{\mu} = \omega^2 R m \Rightarrow \boxed{\omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{\mu R}}}$

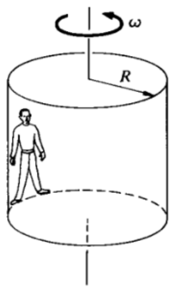


Figura 2: Juego mecánico

(30 puntos)

1.3) Sistema de poleas

Considera el sistema de poleas de la Fig. 3, donde las masas M_1 y M_2 se deslizan sobre una superficie con un coeficiente de fricción μ, y donde ambas están unidas con la masa M_3 por una cuerda inextensible. Suponiendo que las poleas no generan ningún tipo de fricción

- Haz el diagrama de cuerpo libre sobre cada masa e identifica las coordenadas que vayas a usar para este ejercicio.
- ¿Cómo se relacionan las aceleraciones de cada masa entre sí?
- ¿Cuál es la tensión de la cuerda?

$l = x_1 + x_2 + 2x_3$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + 2\ddot{x}_3 = 0}$$

Desp.)

Ecs. de movimiento:

$-\mu m_1 g + T = m_1 a_1$

$\Rightarrow -\mu g + \frac{T}{m_1} = \ddot{x}_1 \quad \ldots (1)$

$+\mu m_2 g - T = -m_2 a_2$

$\Rightarrow -\mu g + \frac{T}{m_2} = \ddot{x}_2 \quad \ldots (2)$

$-m_3 g + 2T = -m_3 a_3$

$\Rightarrow -g + \frac{2T}{m_3} = \ddot{x}_3 \quad \ldots (3)$

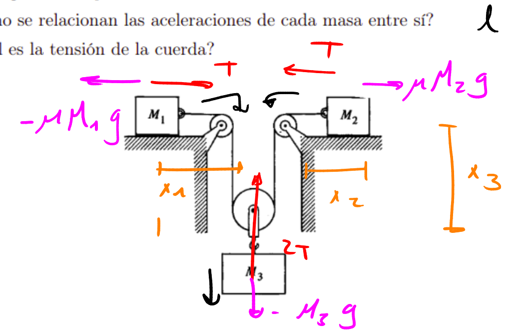


Figura 3: Sistema de poleas

(20 puntos)

Como $\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + 2\ddot{x}_3 = 0 \longrightarrow \left(-\mu g + \frac{T}{m_1}\right) + \left(-\mu g + \frac{T}{m_2}\right) + 2\left(-g + 2\frac{T}{m_3}\right) = 0$

$$\Rightarrow -2g(\mu+1) + T\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{4}{m_3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow T = \frac{2g(\mu+1)}{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{4}{m_3}\right)}$$

1.4) Una masa m está colgada a un hasta por dos cuerdas inextensibles como se muestra en la Fig. 4, y ésta comienza a girar a una velocidad angular ω. Haz el diagrama de cuerpo libre y calcula la tensión en ambdas cuerdas. (20 puntos)

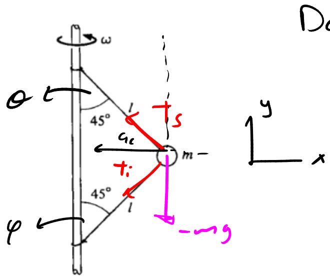


Figura 4: Masa girando en un hasta

Del diagrama de cuerpo libre

$\hat{y}: \quad T_s\cos\theta - T_i\cos\varphi - mg = 0$

$\hat{x}: \quad -T_s\sin\theta - T_i\sin\varphi = -ma_c = -m\omega^2 r = -m\omega^2 l\sin\varphi$

Como $\theta = \varphi = \pi/4$

$\hat{y}: \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(T_s - T_i) = mg \quad \ldots (1)$

$\hat{x}: \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(T_s + T_i) = m\omega^2 l\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \ldots (2)$

Sumando (1) y (2) $\longrightarrow \frac{2}{\sqrt{2}}T_s = m\left(g + \omega^2 l\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow T_s = \frac{m}{\sqrt{2}}\left(g + \omega^2 l\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Restando (1) y (2) $\longrightarrow -\frac{2}{\sqrt{2}}T_i = m\left(g - \omega^2 l\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow T_i = \frac{m}{\sqrt{2}}\left(-g + \omega^2 l\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

1.5) Una cabrestante es una artefacto empleado en los barcos para facilitar que los marineros controles cuerdas que cargan grandes pesos. Una forma de construir un cabrestante es enrollando la cuerda varias veces al rededor de un barril o mástil como se muestra en la Fig. 5 (vista superior, donde la cuerda típicamente es enrollada cuatro o cinco veces). Si el marinero jala la cuerda con una tensión T_B, mucho menor a la tensión a la que se somete la cuerdo del otro extremo T_A, muestra que se cumple que

$$T_B = T_A \exp(-\mu\theta),$$

con μ el coeficiente de fricción entre el barril y la cuerda, y θ el ángulo subtendido por la cuerda en el barril. (10 puntos)

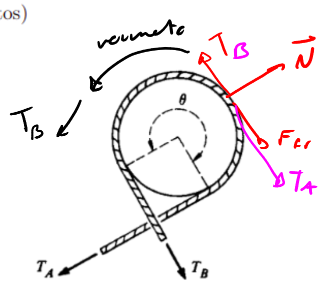


Figura 5: Esquema de un cabrestante

En clase vimos que $\Delta N = -T\Delta\theta$

Como $\vec{F}_{fric} = \mu\vec{N} \Rightarrow \mu\Delta N = -\mu T\Delta\theta$

Notamos que

$T_B = T_{fric} + T_A \Rightarrow \Delta T = T_B - T_A = F_{fric}$

$\Rightarrow \Delta T = -\mu T\Delta\theta$

$\Rightarrow \frac{\Delta T}{T} = -\mu\Delta\theta \longrightarrow \frac{dT}{T} = -\mu\, d\theta$

Integrando $\int_{T_A}^{T_B}\frac{dT}{T} = \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = \int_0^{\theta} -\mu\, d\theta = -\mu\theta$

$\Rightarrow T_B = T_A e^{-\mu\theta}$