22/10/21

El oscilador → Ley de Hooke $\quad \vec F = -k\vec r$

↳ se opone al movimiento

Habíamos visto que, en general

$$\underbrace{m\ddot x = -kx}_{\text{Ecuación de movimiento}} \to \ddot x + \underbrace{\frac{k}{m}}_{=\omega_0^2}x = 0 \to \ddot x + \omega_0^2 x = 0$$

ω_0^2 → Frecuencia angular para generalizar la solución

Obtuvimos dos soluciones

$x_1 = A\cos(\omega_0 t + B)$

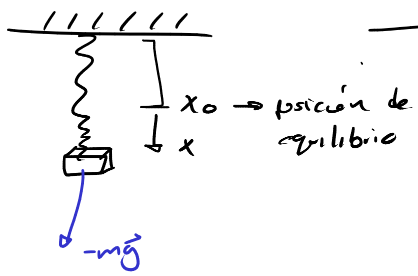
$x_2 = A'\cos(\omega_0 t) + B'\sin(\omega_0 t)$

Probemos que son equivalentes

Recordemos que $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$$\Rightarrow \quad A\cos(\omega t + B) = \underbrace{A\cos B}_{A'}\cos\omega_0 t \mp \underbrace{A\sin B}_{B'}\sin\omega_0 t$$

¿Qué pasa si hay una fuerza ~~constante~~ cons? El peso, por ejemplo



Ecuación de movimiento

$$\to m\frac{d^2}{dt^2}(x + x_0) = -k(x + x_0) - mg$$

Para simplificar $x_0 = 0$, ó $\mathcal{X} = x + x_0$

$$\ddot x = -\omega^2 x - g \to [\ddot x + \omega^2 x] = -g$$

Supongamos que $x(t) = x_h(t) = A\cos(\omega t + B)$

pero $\ddot x_h - \omega^2 x_h = 0 \to$ No nos va a dar el resultado

Propongo $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ → adivinemos $x_p(t)$

Sabemos que si $\ddot y = -g \to y = at^2 + bt + c$. Propongamos algo semejante

Sup. $x_p = a_2t^2 + a_1t + a_0 \Rightarrow \dot x_p = 2a_2t + a_1 \Rightarrow \ddot x_p = 2a_2$

$$-g = \ddot x_p + \omega^2 x_p = 2a_2 + \omega^2(a_2t^2 + a_1t + a_0)$$

$$\Rightarrow 0t^2 + 0t^1 - gt^0 = t^2\underbrace{a_2\omega^2}_{=0} + \underbrace{a_1\omega^2}_{=0}t + \underbrace{(a_0\omega^2 + 2a_2)}_{=-g}t^0 \to a_0 = -\frac{g}{\omega^2}$$

$a_2 = a_1 = 0$

$$\therefore \quad x(t) = x_h(t) + x_p(t) = -\frac{g}{\omega^2} + A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

↳ desplazamiento de la posición de equilibrio

↳ baja al sistema $\frac{g}{\omega^2}$

Esto lo hubiéramos sabido si no sólo resolviéramos la ecuación, sino también hubiéramos considerado la física

Podemos llegar a la misma solución de una forma más fácil:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -g \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x + g = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega^2\left(x + \frac{g}{\omega_0^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{g}{\omega_0^2}\right)^{\cdot\cdot} + \omega^2\left(x + \frac{g}{\omega_0^2}\right) = 0$$

Notemos que $\rightarrow \bar{X} = x + \frac{g}{\omega^2}$

$$\frac{d}{dt}(\bar{X}) = \frac{d}{dt}(x)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\bar{X}) = \frac{d}{dt}(x)$$

$$\Rightarrow \bar{X} = x + \frac{g}{\omega^2} = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \boxed{x = -\frac{g}{\omega^2} + A\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

Ahora, supongamos que además hay fricción $F = -m\gamma\dot{x}$

$$m\ddot{\bar{x}} = -k\bar{x} - mg - m\gamma\dot{\bar{x}} \longrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\gamma\dot{x}$$

Definimos $x = \bar{x} + \frac{g}{\omega_0^2}$

$$\boxed{\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

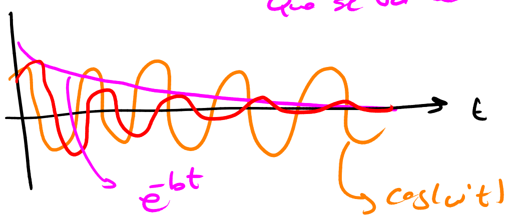
Este problema demanda más herramientas matemáticas.

Pensemos en la física

$$(\ddot{x} + \omega_0^2 x) + \gamma\dot{x} = 0 = \text{Oscilaciones} + \text{Fricción}$$

Fricción: Que se va deteniendo

Entonces, propongamos $x(t) = Ae^{-bt}\cos(\omega' t + \varphi)$



Tarea: Sustituyendo $x(t)$ en la ecuación, mostrar que

$$b = \frac{\gamma}{2}, \quad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

Dos casos particulares:

$\gamma = 0 \longrightarrow$ Recuperamos el oscilador armónico

$\frac{\gamma}{2} = \omega_0 \longrightarrow x(t) = A' e^{-\omega_0 t}$ → sólo decae.

Para fines generales $\longrightarrow \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \longrightarrow x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

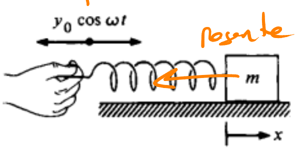
Resonancia

↓

Qué pasa si hay otros movimientos oscilatorios

Fuerza externa

resorte



$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = mf\cos(\omega t)$$

"omega cero" $\omega = \sqrt{k/m}$

"omega" → puede tomar cualquier valor.

Propongamos
$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$\dot{x} = A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$
$$\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

Sustituyendo
$$\longrightarrow A\cos(\omega t + \varphi)\left[-\omega^2 + \omega_0^2\right] = f\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow A\cos(\omega t + \varphi) = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t)$$

$$\varphi = 0, \quad A = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \longrightarrow x(t) = A(\omega)\cos(\omega t) = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t)$$

$x \longrightarrow \infty$
$\omega \to \omega_0$

¿Sentido físico?

¿Qué pasa si consideramos fricción?

$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x = f\cos(\omega t)$, Proponemos lo mismo $x(t)=A(\omega)\cos(\omega t+\varphi_0)$

$$\Rightarrow -\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi) + \gamma\omega A\sin(\omega t+\varphi) + \omega_0^2 A\cos(\omega t+\varphi) = f\cos(\omega t)$$

Recordamos que

$$\cos(\omega t+\varphi) = \cos\varphi\cos(\omega t) - \sin(\omega t)\sin\varphi$$
$$\sin(\omega t+\varphi) = \sin\varphi\cos(\omega t) + \cos\varphi\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow -\omega^2 A\left[\cos\varphi\cos(\omega t) - \sin(\omega t)\sin\varphi\right] + \gamma\omega A\left[\sin\varphi\cos(\omega t) + \cos\varphi\sin(\omega t)\right] +$$
$$\omega_0^2 A\left[\cos\varphi\cos(\omega t) - \sin(\omega t)\sin\varphi\right] = f\cos(\omega t)$$

agrupando

$$\Rightarrow \cos(\omega t)\left[\underbrace{-\omega^2\cos\varphi + \gamma\omega\sin\varphi + \omega_0^2\cos\varphi}_{=f/A}\right] + \sin(\omega t)\left[\underbrace{\sin\varphi\,\omega^2 + \gamma\omega\cos\varphi - \sin\varphi\,\omega_0^2}_{=0}\right] = \frac{f\cos(\omega t)}{A}$$

$$\Rightarrow A(\omega) = \frac{f}{[\omega_0^2-\omega^2]\cos\varphi + (\gamma\omega)\sin\varphi} ,$$

$\sin\varphi(\omega_0^2-\omega^2) = \gamma\omega\cos\varphi$

$$\Rightarrow \tan\varphi = \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

Vemos que $\cos^2+\sin^2=1$

$$\left(\frac{f}{A(\omega)}\right)^2 = \left([\omega_0^2-\omega^2]\cos\varphi + (\gamma\omega)\sin\varphi\right)^2 = [\omega_0^2-\omega^2]^2\cos^2\varphi + (\gamma\omega)^2\sin^2\varphi +$$
$$+ 2\sin\varphi(\omega_0^2-\omega^2)(\gamma\omega)\cos\varphi$$

uno con $\cos\varphi$ y otro con $\sin\varphi$

$$= [\omega_0^2-\omega^2]^2\cos^2\varphi + (\gamma\omega)^2\sin^2\varphi + \sin^2\varphi(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2\cos^2\varphi$$

$$= [\omega_0^2-\omega^2]^2\left(\cancelto{1}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\right) + (\gamma\omega)^2\left(\cancelto{1}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\right)$$

$$= (\omega_0^2-\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2$$

$$\therefore A(\omega) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_0)^2 + (\gamma\omega)^2}} \rightarrow x(t) = A(\omega)\cos\left[\omega t + \arctan\left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\right]$$

Lorentziana

Distribución de Cauchy