El Hamiltoniano

Recordemos que construimos toda la dinámica de Lagrange con lo siguiente

N partículas en 3D, ℓ constricciones holonómicas $f_j(\vec{r},t)$ con $j \leq \ell$

$\{q_i\}_{i \leq 3N-\ell} \longrightarrow$ Coordenadas generalizadas

$\{\dot{q}_i\}_{i \leq 3N-\ell} \longrightarrow$ Velocidades generalizadas

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t) \longrightarrow$ Lagrangiano $\longrightarrow$ Función de estado $\longrightarrow$ En algunos casos $\mathcal{L} = T - \mathcal{U}$ $\longrightarrow$ Potencial generalizado

$I_j[\mathcal{L}] = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\mathcal{L}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\mathcal{L} = 0 \longrightarrow$ Ecuación de movimiento

Habíamos visto que si tenemos una variable cíclica q_α t.q. $\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0}$, ent $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} = P_\alpha$ es una cantidad conservada.

$\hookrightarrow$ q_α no aparecía explícitamente en el Lagrangiano

¿Qué pasa si t es cíclica?

$\hookrightarrow$ Físicamente significa que tenemos un sistema estacionario.

Formalmente, podemos recordar un resultado del cálculo de variaciones.

$\hookrightarrow$ si $I[y(x)] = \int f(y,y';x)\,dx$ t.q. $\delta I_i = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'}f\right) - \frac{\partial}{\partial y}f = 0$

- si $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ ent $\frac{d}{dx}\left(f - \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right) = 0$

Generalizando este resultado a $3N-\ell$ variables y a $f \to \mathcal{L}$, tenemos que

$$\frac{d}{dt}\Bigg(\underbrace{\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L}(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t)}_{\equiv \mathcal{H}}\Bigg) = 0$$

$\hookrightarrow$ Definición de la función hamiltoniana $\mathcal{H} \longrightarrow$ Esta función es una cantidad conservada.

- Caso particular: $\mathcal{L} = T - V \longrightarrow$ t.q. $\vec{F} = -\nabla V$ $\longrightarrow$ No el generalizado

Como $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t)$, escribimos

$$T = \frac{1}{2}\sum_i^{3N} m_i \left|\frac{d r_i}{dt}\right|^2 = \frac{1}{2}\sum_i^{N} m_i\left(\sum_j^{3N-\ell}\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial r_i}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_i^{N} m_i\left(\sum_j^{3N-\ell}\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t}\right)$$

$r_i = r_i(\{q_i\},t)$; $\dot{q}_j$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i\left(\sum_j^{3N-\ell}\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot q_j + \frac{\partial r_i}{\partial t}\right)\left(\sum_k^{3N-\ell}\frac{\partial r_i}{\partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial r_i}{\partial t}\right)$$

$$= \sum_j^{3N-\ell}\sum_k^{3N-\ell}\underbrace{\left(\sum_i^N \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\frac{\partial r_i}{\partial q_k}\frac{m_i}{2}\right)}_{A_{jk}(\{q_i\},t)}\dot q_j \dot q_k + \sum_j^{3N-\ell}\underbrace{\left(\sum_i^N m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)}_{B_j(\{q_i\},t)}\dot q_j + \underbrace{\left(\sum_i^N \left(\frac{\partial r_i}{\partial t}\right)^2 m_i\right)}_{C(\{q_i\},t)}$$

$$\Rightarrow \quad T = \sum_{jk}^{3N-\ell} A_{jk}\dot q_j \dot q_k + \sum_j B_j \dot q_j + C \longrightarrow$$

Supongamos que T es función homogénea de grado 2 (dos) en las velocidades

i.e. $T(\{q_i\}, \lambda\{\dot q_i\}, t) = \lambda^2 T$

$\Leftrightarrow \boxed{B_j = C = 0}$

En este caso $\dfrac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \dfrac{\partial}{\partial \dot q_i}T - \cancel{\dfrac{\partial V}{\partial \dot q_i}}^{\,0} = \dfrac{\partial}{\partial \dot q_i}\left(\sum_{jk} A_{jk}\dot q_j \dot q_k\right) = \sum_{jk} A_{jk}\left(\delta_{ji}\dot q_k + \dot q_j \delta_{ik}\right) = 2\sum_j A_{ij}\dot q_j$

$$\Rightarrow \quad H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i - L = \sum_i\left(2\sum_j A_{ij}\dot q_j\right)\dot q_i - L = 2\overbrace{\left(\sum_{ij} A_{ij}\dot q_j \dot q_i\right)}^{=T} - L$$

$$\Rightarrow \quad H = \cancel{2}T - \underbrace{(\cancel{T} - V)}_{L} \quad \Rightarrow \quad H = T + V = E$$

El Hamiltoniano tiene como valor propio a la energía del sistema si

- $L = T - V$
- V es un campo conservativo
- $\partial L/\partial t = 0$