Separación de variables

Formalismo

→ Hasta ahora hemos empleado este método como un Ansatz, pero veámoslo más a detalle.

- Se dice que una coordenada q_i es separable si la ecuación de Hamilton-Jacobi puede reescribirse como sigue:

$$\mathcal{H}\left(\vec{q}, \frac{\partial F}{\partial \vec{q}}, t\right) = -\frac{\partial F}{\partial t} \longrightarrow \mathcal{H}\Big(\underbrace{\{q_j\}_{j\neq i}, \left\{\frac{\partial F}{\partial q_j}\right\}_{j\neq i}}_{\text{No depende de } q_i \text{ ni de } \partial F/\partial q_i}, f\left(q_i, \frac{\partial F}{\partial q_i}\right)\Big) = E \equiv cte$$

↳ función que sólo depende de q_i y $\frac{\partial F}{\partial q_i}$

- Si q_i es separable, entonces proponemos $F = W(\vec{q}; \vec{\alpha}) = W'(\{q_j\}_{j\neq i}, \vec{\alpha}) + W_i(q_i; \vec{\alpha})$

⇒ Hamilton-Jacobi se reescribe como

$$\mathcal{H}\left(\{q_j\}_{j\neq i}, \left\{\frac{\partial W'}{\partial q_j}\right\}_{j\neq i}, f\left(q_i, \frac{dW_i}{dq_i}\right)\right) = E$$

- Notemos que ahora sólo depende de q_i, incluso en derivadas.
- Como depende de dos maneras de q_i pero $\mathcal{H}$ sigue siendo una constante, aún cuando nosotros no hayamos especificado f, se debe cumplir que $f \equiv cte$.

Entonces, tenemos dos ecuaciones a resolver ahora

1) $\mathcal{H}\left(\{q_j\}_{j\neq i}, \left\{\frac{\partial W'}{\partial q_j}\right\}_{j\neq i}, cte\right) = E$ — E. Dif parcial
   - No lineal
   - $3N-\ell-1$ variables

2) $f\left(q_i, \frac{dW_i}{dq_i}\right) = cte$ → E. Diferencial **Ordinaria** ← ¡Ésta es la principal ventaja!
   → No lineal

- Mejor caso: Sistema completamente separable

$$W(\vec{q}; \vec{\alpha}) = \sum_j^{3N-\ell} W_j(q_j; \vec{\alpha})$$

⇒ Voy a tener $3N-\ell$ ecuaciones de la forma $\mathcal{H}_i\left(q_i, \frac{dW_i}{dq_i}\right) = E_i(\vec{\alpha})$

↳ ¡Para tener un sistema separable, se deben escoger las mejores coordenadas q_i'!

Notemos que si $E_i(\vec{\alpha}) = \alpha_i \Rightarrow \mathcal{H}_i = \alpha_i \Rightarrow \mathcal{H} = \sum \mathcal{H}_i$

Caso especial: Todos las variables q_i son cíclicas

En este caso $p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} = \alpha_i \equiv cte$, entonces no me cambia cambiar nada. En este caso, proponemos

$$W = F_2(\vec{q}, \vec{P}) = \sum_j P_j q_j = \underbrace{\sum_j \alpha_j q_j}_{} = \mathbb{1}$$

Es la identidad y justo, no genera ningún cambio

Ya es de la forma $W = \sum W_i(q_i)$

¿Qué pasa si ahora sólo 1 variable (q_1) no es separable?

Proponemos $W(\vec{q}, \alpha) = W_1(q_1; \vec{\alpha}) + \underbrace{\sum_{j \geq 2} q_j P_j}_{}$

Va a dejar sin cambios a las variables $\{q_j\}_{j \geq 2}$

Entonces, sólo queda por resolver $\mathcal{H} = \mathcal{H}\left(q_1, \frac{dW_1}{dq_1}; \vec{\alpha}\right) = E$ ✓

En general, si tengo una variable cíclica q_i, proponemos

$$W(\vec{q}) = W'(\{q_i\}_{i \neq j}; \vec{\alpha}) + \alpha_i q_i$$

variables conjugadas $\{P_i, q_j\} = \delta_{ij}$

Esto nos da una pista de por qué también nos sale $F = W(\vec{q}; \vec{\alpha}) - \underbrace{V(t; \vec{\alpha})}_{tE}$