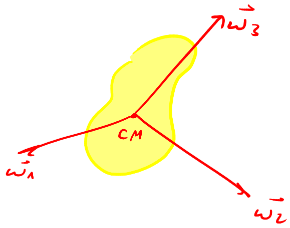
# Ángulos de Euler

- Sistema de ejes principales $\overleftrightarrow{I} = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3) = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$




Los ángulos de Euler son una base de tres giros simultáneos que describen los movimientos alrededor del centro de masa (CM). Hay varias convenciones pero la siguiente los compone los giros en:

$\varphi$: Precesión

$\theta$: Nutación

$\psi$: Rotación

• Sistema fijo $S(x,y,z)$ • Sistema intermedio $S'(x',y',z')$ • Sistema de ejes principales $S(1,2,3)$

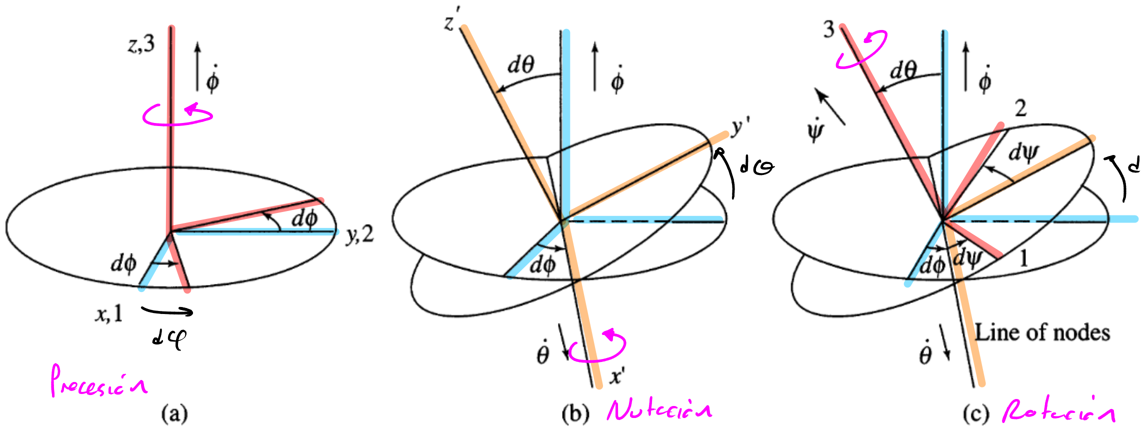



**Figure 9.6.2** Generation of any arbitrary infinitesimal rotation of a rigid body as the vector sum of infinitesimal rotations through the free Eulerian angles, (a) $d\boldsymbol{\phi}$, (b) $d\boldsymbol{\theta}$, and (c) $d\boldsymbol{\psi}$.

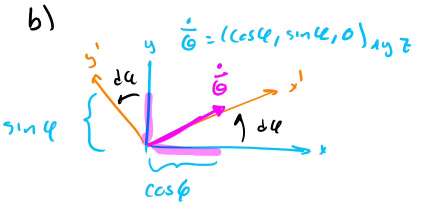
Podemos escribir a las velocidades $\dot{\vec{\varphi}}$, $\dot{\vec{\theta}}$, $\dot{\vec{\psi}}$ en las bases de los tres sistemas. Las expresiones triviales son las siguientes:

| Sistema fijo | Sistema intermedio | Sistema de ejes principales |
| --- | --- | --- |
| $\dot{\vec{\varphi}} = (0, 0, \dot{\varphi})_{xyz}$ | $\dot{\vec{\varphi}} = \dot{\varphi}(0, \sin\theta, \cos\theta)_{x'y'z'}$ | $\dot{\vec{\varphi}} = \dot{\varphi}(\sin\theta\sin\psi, \sin\theta\cos\psi, \cos\theta)_{123}$ |
| $\dot{\vec{\theta}} = \dot{\theta}(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)_{xyz}$ | $\dot{\vec{\theta}} = (\dot{\theta}, 0, 0)_{x'y'z'}$ | $\dot{\vec{\theta}} = \dot{\theta}(\cos\theta, -\sin\psi, 0)_{123}$ |
| $\dot{\vec{\psi}} = \dot{\psi}(\sin\theta\sin\psi, \sin\theta\cos\psi, \cos\theta)_{xyz}$ | $\dot{\vec{\psi}} = (0, 0, \dot{\psi})_{x'y'z'}$ | $\dot{\vec{\psi}} = (0, 0, \dot{\psi})_{123}$ |

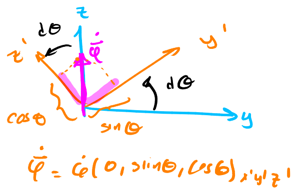
→ Las expresiones subrayadas en negro son "triviales" pues son la definición de los giros

→ Las subrayadas en rosa se obtienen al realizar una rotación alrededor del eje z (de $\varphi$), del eje x' (de $\theta$) y del eje 3 (de $-\psi$), respectivamente

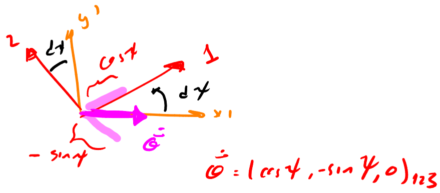
b)




b)

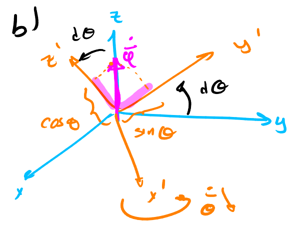



c)



→ Los términos que quedan se obtienen de realizar dos rotaciones a cada uno

- Para $(\dot{\vec{\varphi}})_{123}$, partimos de $(\dot{\vec{\varphi}})_{x'y'z'}$:

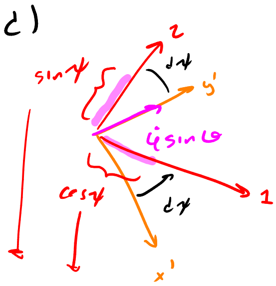
b) 

$\dot{\vec{\varphi}} = \dot{\varphi}(0, \sin\theta, \cos\theta)_{x'y'z'}$

Rotación de $\psi$ respecto a $z' = 3$

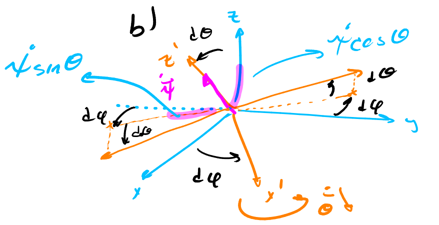
es decir

$\dot{\vec{\varphi}} \cdot \hat{e}_3 = \dot{\varphi}\cos\theta$ → sin cambios

c) 

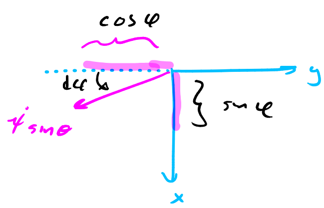
→ $\dot{\vec{\varphi}} = \dot{\varphi}(\sin\theta\cos\psi, \sin\theta\sin\psi, \cos\theta)_{123}$

- Para $(\dot{\vec{\psi}})_{xyz}$, partimos de $(\dot{\vec{\psi}})_{x'y'z'}$ y proyectamos en el plano $\Pi_{xy}$ y el eje $z$

b) 

$\dot{\vec{\varphi}} = \dot{\varphi}(0, \sin\theta, \cos\theta)_{x'y'z'}$

Proyectando en los ejes $x, y$

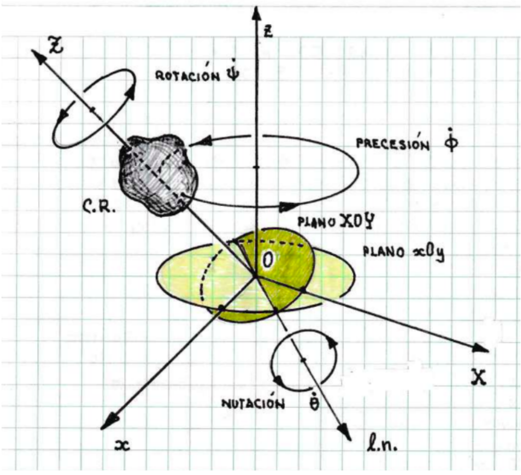


$\Rightarrow \dot{\vec{\psi}} = \dot{\psi}(\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \cos\theta)$

Ahora, podemos escribir cualquier velocidad angular como $\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}} + \dot{\vec{\theta}} + \dot{\vec{\psi}}$

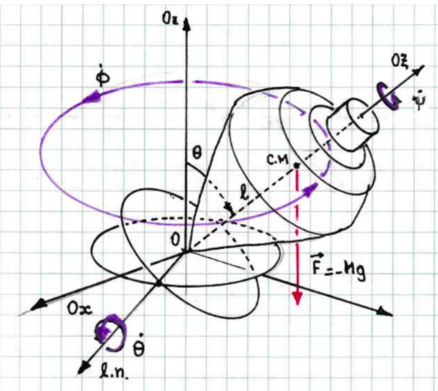
En el sistema de ejes principales

$$(\vec{\omega})_{123} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi \\ -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi \\ \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}_{123} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$




Ejemplo: El trompo simétrico

$$\overleftrightarrow{I} = \mathrm{diag}(I_0, I_0, I_3)$$




El lagrangiano de este sistema es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T \overleftrightarrow{I}\vec{\omega} - V(\varphi, \theta, \psi)$$

$$= \frac{1}{2} I_0(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2} I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 - [Mgl\cos\theta]$$

Por lo tanto vemos que hay dos cantidades conservadas:

1) $\psi$ : $P_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}) = I_3\omega_3$ → Momento angular desde el CM → describe su rotación

2) $\dot{\varphi}$ : $P_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = (I_0 \sin\varphi\, \dot{\varphi})\sin\theta + I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\cos\theta = [I_0 \sin\theta\, \dot{\varphi}]\sin\theta + P_\psi\cos\theta$

Notemos que $(I_0 \dot\varphi \sin^2\theta)$ es el momento angular desde el eje z, perpendicular a este eje y que $P_\psi \cos\theta$ es la proyección de $P_\psi$ en este plano; además ambos están en fase.

$\Rightarrow$ $P_\varphi \rightarrow$ es el momento angular que describe la precesión del trompo

Notemos que de 1) y 2) obtenemos:

3) $\dot\varphi = \dfrac{P_\varphi - P_\psi \cos\theta}{I_0 \sin^2\theta}$ 4) $\dot\psi = \dfrac{P_\psi}{I_3} - \dot\varphi\cos\theta = \dfrac{P_\psi}{I_3} - \dfrac{(P_\varphi - P_\psi\cos\theta)}{I_0\sin^2\theta}\cos\theta$ , 5) $\dot\theta = \dfrac{P_\theta}{I_0}$

Ahora, calculando la última ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) = \frac{\partial L}{\partial\theta} \longrightarrow I_0\ddot\theta = \underline{\dot\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta I_0 - \underline{I_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)}\,\underline{\dot\varphi}\sin\theta + mgl\sin\theta$$

$$= \left(\frac{P_\varphi - P_\psi\cos\theta}{I_0\sin^2\theta}\right)^2 I_0 \sin\theta\cos\theta - P_\psi\left(\frac{P_\varphi - P_\psi\cos\theta}{I_0\sin^2\theta}\right)\sin\theta + mgl\sin\theta$$

$$\Rightarrow I_0\ddot\theta = \left(\frac{P_\varphi - P_\psi\cos\theta}{I_0\sin\theta}\right)\left[\left(\frac{P_\varphi - P_\psi\cos\theta}{\sin\theta}\right)\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - P_\psi\right] + mgl\sin\theta$$

Podemos simplificar aún más la expresión

$$I_0\ddot\theta = \frac{1}{I_0\sin^3\theta}\left[(P_\varphi - P_\psi\cos\theta)^2\cos\theta - P_\psi \underline{\sin^2\theta}(P_\varphi - P_\psi\cos\theta)\right] + mgl\sin\theta$$

$$= \frac{1}{I_0\sin^3\theta}\left\{ \underline{P_\varphi^2\cos\theta} - \underbrace{2P_\varphi P_\psi\cos^2\theta}_{-2} + \cancel{P_\psi^2\cos^3\theta} - P_\psi P_\varphi \underbrace{(1-\cos^2\theta)}_{+1} + P_\psi^2\cos\theta\,(\underline{1} - \cancel{\cos^2\theta})\right\} + mgl\sin\theta$$

$$= \frac{1}{I_0\sin^3\theta}\left\{(P_\varphi^2 + P_\psi^2)\cos\theta - P_\varphi P_\psi\cos^2\theta - P_\psi P_\varphi\right\} + mgl\cos\theta$$

$$\therefore\ I_0\ddot\theta = \frac{(P_\varphi^2 + P_\psi^2)\cos\theta - P_\varphi P_\psi(1+\cos^2\theta)}{I_0\sin^3\theta} + mgl\sin\theta$$

Basta con resolver para $\theta(t)$ para obtener toda la dinámica del sistema.

Sin embargo el formalismo de Hamilton nos da más herramientas

$$H = P_\theta\dot\theta + P_\varphi\dot\varphi + P_\psi\dot\psi - L.$$

Pero notemos que

$$P_\theta\dot\theta + P_\varphi\dot\varphi + P_\psi\dot\psi = P_\theta\left(\frac{P_\theta}{I_0}\right) + P_\varphi\left(\frac{P_\varphi - P_\psi\cos\theta}{I_0\sin^2\theta}\right) + P_\psi\left(\frac{P_\psi}{I_3} - \frac{(P_\varphi - P_\psi\cos\theta)}{I_0\sin^2\theta}\cos\theta\right)$$

$$= \frac{P_\theta^2}{I_0} + \frac{P_\psi^2}{I_3} + \frac{1}{I_0\sin^2\theta}\left(P_\varphi^2 - P_\varphi P_\psi\cos\theta - P_\psi P_\varphi\cos\theta + P_\psi^2\cos^2\theta\right)$$

Por lo que $\quad p_\theta\dot\theta + p_\varphi\dot\varphi + p_\psi\dot\psi = \frac{1}{I_0}p_\theta^2 + \frac{1}{I_3}p_\psi^2 + \frac{1}{I_0\sin^2\theta}\left(p_\varphi - p_\psi\cos\theta\right)^2$

y como $(\dot\varphi\cos\theta - \dot\psi) = \frac{p_\psi}{I_3}$ y $\dot\varphi^2\sin^2\theta = \cancel{\sin^2\theta}\,\frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{\sin^{2\cdot 2}\theta}$, obtenemos que

$$\mathcal{H} = \frac{p_\theta^2}{2I_0} + \underbrace{\frac{p_\psi^2}{2I_3}}_{\text{cte}} + \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I\sin^2\theta} + Mgl\cos\theta = E$$

→ Sistema conservativo
→ Cuadrático en $\dot q^2$
→ $\partial\mathcal{H}/\partial t = 0$

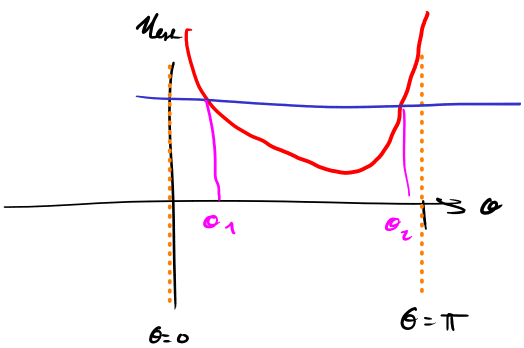
Las ecs. (3-5) son $\dot q_i = \partial\mathcal{H}/\partial p_i$, y sabemos que $\dot p_\psi = \dot p_\varphi = 0$. Entonces: falta $-\dot p_\theta = \partial\mathcal{H}/\partial\theta$

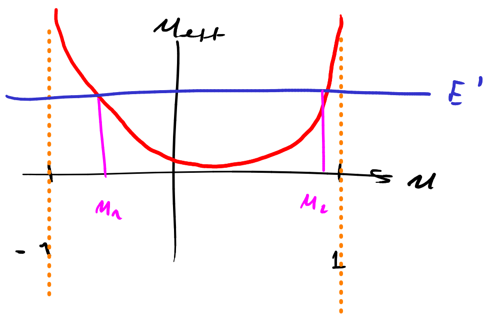
pero recordamos que $\mathcal{H} = E$ es una cantidad conservada.

$$\Rightarrow E' = E - \overbrace{\frac{p_\psi^2}{2I_3}}^{\text{cte}} = \frac{p_\theta^2}{2I_0} + \left(\frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I\sin^2\theta} + Mgl\cos\theta\right) = \frac{p_\theta^2}{2I_0} + \mathcal{U}_{eff}(\theta)$$

Analicemos la dinámica del sistema como función de $\theta$ y de $u = \cos\theta$

$$\mathcal{U}_{eff}(\theta) = \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I_0\sin^2\theta} + Mgl\cos\theta \longrightarrow \mathcal{U}_{eff}(\mu) = \frac{(p_\varphi - p_\psi\mu)^2}{2I(1-\mu^2)} + Mgl\mu$$




Del diagrama, vemos que para una $E'$ fija, el movimiento está acotado a dos ángulos

$$\Rightarrow E' = E - \frac{p_\psi^2}{2I_3} = \frac{p_\theta^2}{2I} + \mathcal{U}_{eff}(\theta) \Rightarrow \quad p_\theta^2 = 2I_0(E' - \mathcal{U}_{eff}) = (I_0\dot\theta)^2$$

$$\Rightarrow \dot\theta^2 = \frac{2}{I_0}(E' - \mathcal{U}_{eff}) = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\theta}{d\mu}\frac{d\mu}{dt}\right)^2 = \left(\frac{1}{\frac{d\mu}{d\theta}}\right)^2\dot\mu^2 = \frac{\dot\mu^2}{1-\mu^2}$$

Entonces

$$\dot\mu^2 = \frac{2}{I_0}\left(E' - \frac{(p_\varphi - p_\psi\mu)^2}{2I(1-\mu^2)} - Mgl\mu\right)(1-\mu^2)$$

$$= \dot\mu^2 = \frac{2}{I_0}(E' - Mgl\mu)(1-\mu^2) - \left(\frac{p_\varphi - p_\psi\mu}{I_0}\right)^2 = f(u) \geq 0$$

si $\quad f(u) = 0 \Rightarrow \dot\mu^2 = 0 = \dot\mu$ → puntos de retorno en la trayectoria adicionalmente

$$\int dt = \int \frac{du}{\sqrt{f(u)}}$$ → Numérico

¿y podemos suponerlo?

Analicemos $f(u)=0$ → Polinomio cúbico, sup. $f(u_i)=0$, $i=\{1,2,3\}$

a) $u_1 \in \mathbb{R}$, $u_2 = u_3^* \in \mathbb{C}$

b) $u_1 = u_2 \neq u_3$, $u_i \in \mathbb{R}$

c) $u_1 \neq u_2 \neq u_3$ $u_i \in \mathbb{R}$

Escribamos

$$f(u) = \frac{2Mgl}{I_0}u^3 - \frac{2}{I_0}\left(E - \frac{p_\psi^2}{2I_3}\right)u^2 + \frac{2}{I_0}\left(E - \frac{p_\psi^2}{2I_3}\right) - \frac{2Mgl}{I_0}u - \left(\frac{p_\varphi}{I_0}\right)^2 - \left(\frac{p_\psi}{I_0}\right)^2 u^2 + 2\left(\frac{p_\varphi}{I_0}\frac{p_\psi}{I_0}\right)u$$

$$= \underbrace{\left(\frac{2Mgl}{I_0}\right)}_{\beta}u^3 - \left[\underbrace{\left(\frac{p_\psi}{I_0}\right)}_{a}^2 + \underbrace{\frac{2}{I_0}\left(E - \frac{p_\psi^2}{2I_3}\right)}_{\alpha}\right]u^2 + \left[\underbrace{2\left(\frac{p_\varphi}{I_0}\right)\left(\frac{p_\psi}{I_3}\right)}_{2ab}^2 - \underbrace{\left(\frac{2Mgl}{I_0}\right)}_{\beta}\right]u + \left[\underbrace{\frac{2}{I_0}\left(E - \frac{p_\psi^2}{2I_3}\right)}_{\alpha} - \underbrace{\left(\frac{p_\varphi}{I_0}\right)^2}_{b}\right]$$

$$f(u) = \beta u^3 - (a^2 - \alpha)u^2 + (2ab - \beta)u + (\alpha - b^2);$$

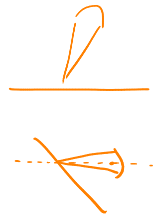
$$= (\alpha - \beta u)(1-u^2) - (b - au)^2$$

$\beta > 0$

$a, b > 0$

$\alpha > 0$ si

$< 0$ si



Supongamos $\beta, a, b, \alpha > 0 \Rightarrow \theta_i \leq \pi/2 \Rightarrow u_i \geq 0$

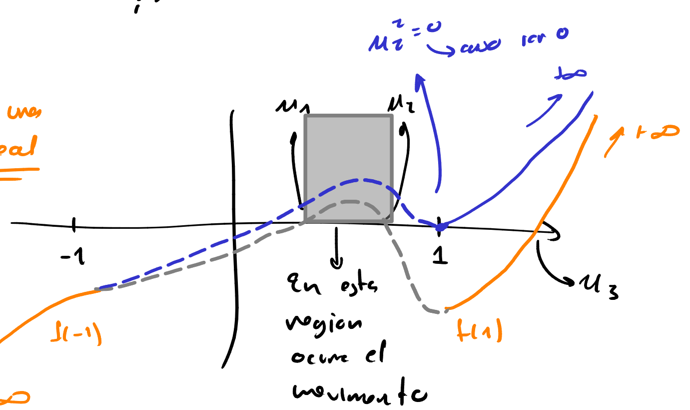
Notemos que

$f(u) \xrightarrow[u \to \pm\infty]{} \pm\infty$ pues $\beta > 0$ → llega al menos una raíz real

$f(u)\Big|_{\pm 1} = -(b \mp a)^2 \leq 0$

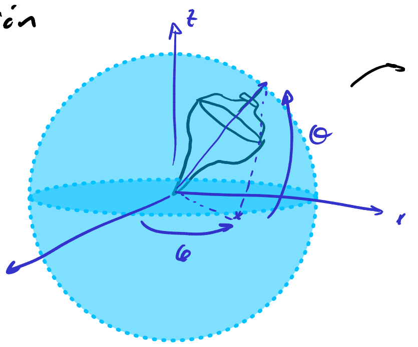
↳ $f(1) = 0$ si $b = a$ ← excepto si

→ al menos una raíz está en $u > 1$, lo que no tiene sentido físico.




→ Las raíces con sentido físico están entre $|u| \leq 1$ y para un tiempo real, además, $u_i > 0$

Podemos estudiar las raíces $u_i$ al mapear todo a un espacio de precesión y Nutación




Recordemos que

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos\theta}{I_0 \sin^2\theta} = \frac{b - au}{1-u^2} = \frac{a(b/a - u)}{1-u^2}$$

$$f(u) = (\alpha - \beta u)(1-u^2) - (b-au)^2 = (\alpha - \beta u)(1-u^2) - a^2\left(\frac{b}{a} - u\right)^2$$

$\underbrace{0 < u_1 < u < u_2 < 1}_{\text{Movimiento}} \longrightarrow$ a) Sup. $u_2 < b/a \Rightarrow \dot{\varphi} = \dfrac{a\left(\frac{b}{a} - u\right)}{1-u^2}$ $\quad \frac{b}{a} - u_1 > \frac{b}{a} - u > \frac{b}{a} - u_2 > 0$ $\quad 1-u^2 \rightarrow > 0$

$\Rightarrow \dot{\varphi} > 0$ y nunca cambia de signo

b) Sup $u_1 < \frac{b}{a} < u_2 \Rightarrow \dot{\varphi}$ sí puede cambiar de signo

c) Sup $u_i = \frac{b}{a} \Rightarrow \dot{\varphi} = 0 = \dot{\theta} \longrightarrow$ Hay un giro abrupto.

* Nota

$\frac{b}{a} = \frac{p_\varphi}{p_\psi}$

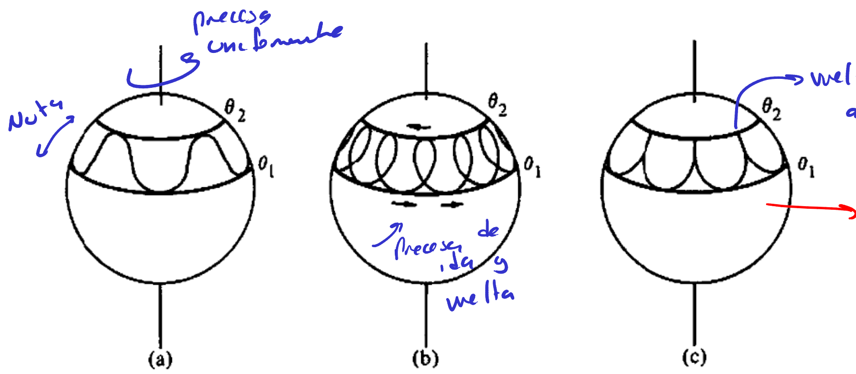



**FIGURE 5.9** The possible shapes for the locus of the figure axis on the unit sphere.

el caso no es tan raro considerando las condiciones iniciales

$t \to t_0$

$\theta(t_0) = \theta_0$

$\underbrace{\dot{\theta}(t_0) = \dot{\varphi}(t_0) = 0}$

Que el cuerpo rote sobre sí mismo, se incline en una dirección y se suelte