Mecánica Lagrangiana

→ Nuevo esquema para describir la evolución temporal de un sistema de N partículas.

↳ Para poder construir este nuevo esquema, debemos explicar dos temas previamente

- "Espacio" de configuraciones $\mathcal{Q}$
  ↳ Cambiar de coordenadas cartesianas a <u>coordenadas generalizadas</u> → Basado en las constricciones del sistema
  ↳ Identificar reglas de diferenciación en este "espacio".

- Principio de D'Alembert
  ↳ Relación entre las variables de un sistema físico y las ecuaciones que se tienen
  → Hace referencia a las fuerzas de constricción

Con estos dos temas es posible construir ecuaciones equivalentes a la 2da ley de Newton, en el "espacio" de configuraciones:

2da ley de Newton

$\downarrow$ $\mathcal{Q}$ + P.d'A

Ecuaciones de Lagrange

Grados de libertad y coordenadas generalizadas

La segunda ley de Newton nos da las ecuaciones de movimiento → Sist. de N partículas

masa constante

$$\vec{F}_{sist} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i^{(ext)} + \vec{F}_i^{(internas)} \right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

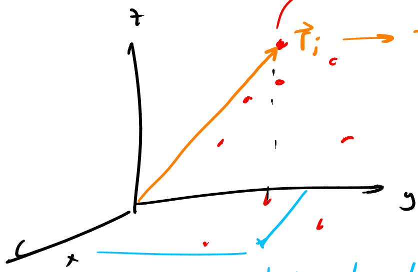
Como estamos en $\mathbb{E}^3$ hay $3N$ ecuaciones que resolver de 2do grado

⇒ Tenemos que realizar $2 \times \underline{(3N)}$ integraciones

= Número de <u>grados</u> de <u>libertad</u> (dof) ← Degrees of freedom

↳ Formas en las que puede evolucionar —o moverse— el sistema.

Espacio físico ($\mathbb{E}^3$) con N partículas



i-ésima partícula

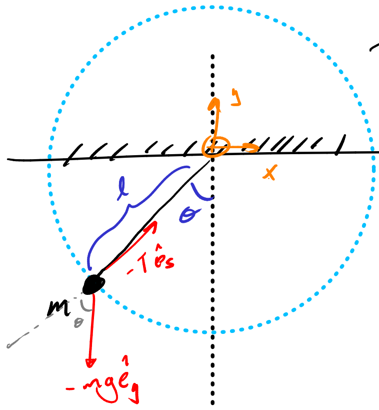
$\vec{r}_i$ → 3 componentes espaciales

↓

$3N$ ecuaciones de movimiento ⇒ $3N$ dof

Unidades longitud → Notemos que en $\mathbb{E}^3$ cada $\vec{r}_i$ tiene <u>necesariamente</u> unidades de longitud ← componentes de las N partículas

Sin embargo hay sistemas en donde tenemos menos ecuaciones de movimiento, por ejemplo: el péndulo simple

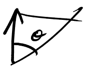


En este caso $N=1 \Rightarrow 3$ dof.

Sin embargo sabemos que:

1) El péndulo está confinado a un plano.

2) Por ser rígido, la masa sigue la trayectoria de un círculo de radio l.



Entonces sólo hay un (1) dof y se relaciona con el movimiento angular θ.

↳ Ecs. de movimiento:

$$m\ddot{\vec{r}} = m(\ddot{s} - s\dot{\theta}^2)\hat{e}_s + m(s\ddot{\theta} + 2\dot{s}\dot{\theta})\hat{e}_\theta + m\ddot{z}\hat{e}_z$$

$$= -T\hat{e}_s - mg(-\cos\theta\,\hat{e}_s + \sin\theta\,\hat{e}_\theta)$$

Por 1) $z = z_0 \Rightarrow \dot{z} = \ddot{z} = 0$

2) $s = l \Rightarrow \dot{s} = \ddot{s} = 0$

Entonces $-m\cancel{s}\dot{\theta}^2\hat{e}_s + m\cancel{s}\ddot{\theta}\hat{e}_\theta = -(T - \cos\theta\, mg)\hat{e}_s + mg\sin\theta\,\hat{e}_\theta$

y de $\hat{e}_\theta \rightarrow m l\ddot{\theta} = mg\cos\theta \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \frac{g}{l}\sin\theta}$ → sólo tenemos una ecuación de movimiento

¡1 dof! ⟸

Notemos que por 1) y 2) se obtuvieron de forma inmediata 2 ecs. de movimiento y por lo tanto sólo nos quedó 1 por resolver (1 dof).

↳ Las condiciones 1) y 2) se conocen como **constricciones** y son limitaciones geométricas sobre el sistema. En particular las podemos escribir como

$$f_1(\vec{r}) = z - z_0 = 0 \quad \text{y} \quad f_2(\vec{r}) = \|\vec{r}\|^2 - l^2 = 0$$

En general identificamos las constricciones del sistema como: $f_j(\{\vec{r}_i\}, \{\dot{\vec{r}}_i\}, t) = 0$

posiciones de las N partículas

Velocidades de las N partículas

Tiempo

y las clasificamos como:

→ Holonómicas* (integrables en griego)

→ Escleronomas → $f(\{\vec{r}_i\}) = 0 \iff \partial f/\partial t = 0$

→ Reónomas → $f(\{\vec{r}_i\}, t) = 0 \iff \partial f/\partial t \neq 0$

→ No holonómicas

→ Escleronomas → $f(\{\vec{r}\}, \{\dot{\vec{r}}\}) = 0$

→ Reónomas → $f(\{\vec{r}_i\}, \{\dot{\vec{r}}\}, t) = 0$

* Adicionalmente:

→ Analíticas (Igualdades) $f(\{\vec{r}\}, \{\dot{\vec{r}}\}, t) = 0$

→ No-analíticas (Desigualdades) $f(\{\vec{r}\}, \{\dot{\vec{r}}\}, t) < 0$

· Nótese que sólo las constricciones holonómicas reducen los dof, pues lo que hacen es escribir una variable en términos de las otras, i.e, si resuelves una coordenada distinta ya obtienes inmediatamente a la primera.

· Las no-holonómicas al relacionar las velocidades, requiere aún una integración por lo que no se disminuyen los grados de libertad.

"Espacio" de configuraciones

↳ Subespacio de $\mathbb{R}^3$ donde ocurre la dinámica del sistema de N partículas

↳ Definido por las constricciones holonómicas

· Un sistema con una constricción holonómica se ve, en el espacio físico, de la siguiente manera

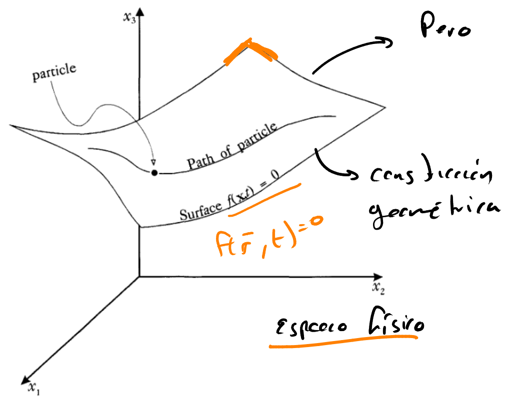


FIGURE 2.1
A particle in 3-space constrained to a two-dimensional surface given by an equation of the form $f(\mathbf{x}, t) = 0$.

Pero como ya sólo es posible moverse en el subconjunto de $\mathbb{E}^3$, nos conviene definir variables únicamente en este lugar.

↳ Por ejemplo, en el péndulo simple, sólo tenemos $\theta = \theta(t)$

Las variables de este lugar son q_i y en conjunto forman a Q ⟶ Espacio de configuraciones

↳ Pero en realidad es una variedad, no un espacio (vectorial).

Variables asociadas a los dof, conocidas como variables generalizadas

Al número de constricciones holonómicas le llamamos ℓ y entonces

$$\dim(Q) = 3N - \ell = (\text{dof iniciales}) - (\text{constricciones})$$

Por ejemplo en el caso del péndulo:

$$\text{dof} = 3N - \ell = 3(1) - 2 = 1$$
$$x = \ell \operatorname{sen}\theta$$
$$y = \ell \cos\theta$$
$$z = z_0$$

Espacio físico ⟶ $(x,y,z) \in \mathbb{E}^3$ t.q. $x,y \in \mathbb{R}$, $z = z_0$

Variedad de configuración ⟶ $\theta \in \{-\pi \leq x \leq \pi \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{S}^1$

→ Notemos que no debe tener necesariamente unidades de longitud

Podemos notar que hay una forma de ir de las 3N variables en $\mathbb{E}^3$ a las de Q.

Entonces, en general vamos a pedir lo siguiente a las coordenadas generalizadas:

1) Definimos: $\{r_i\}_{i=1}^{3N}$ como el vector $(x_1, x_2, \dots, x_N, y_1, y_2, \dots, y_N, z_1, z_2, \dots, z_N)^T = \vec{r}$

$\{q_j\}_{j=1}^{3N-\ell}$ como el vector $(q_1, q_2, \dots, q_{3N-\ell})^T = \vec{q}$

2) Que hay una relación derivable e invertible entre $\vec{r}$ y $\vec{q}$

es decir $r_i = r_i(\{q_j\}) \therefore q_j = q_j(t)$ → En este caso pedimos que $\{q_j\}$ es un conjunto localmente independiente: $\frac{\partial q_k}{\partial q_\ell} = \delta_{k,\ell}$ Kronecker → incluso pueden tener distintas unidades

$$\Updownarrow$$

$q_j = q_j(\{r_i\}) \therefore r_i = r_i(t)$ → $\frac{\partial r_\ell}{\partial r_m} = \delta_{\ell,m}$

3) Dado que Q es una variedad, localmente sí es un espacio vectorial isomorfo a $\mathbb{R}^{3N-\ell}$, entonces:

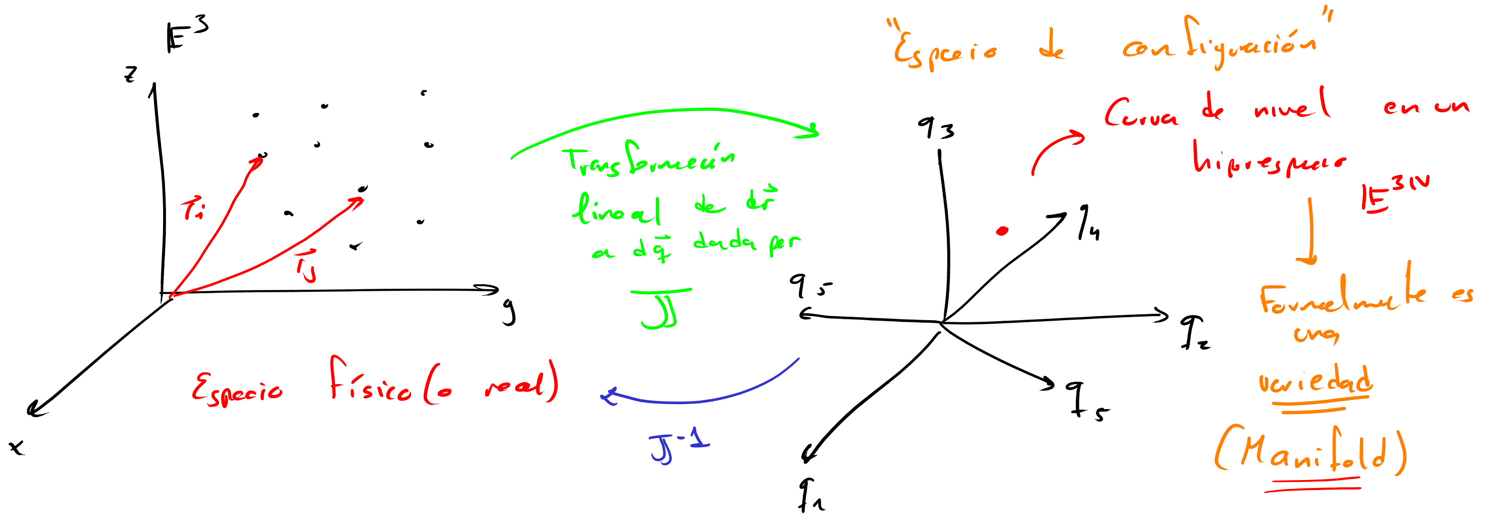
$$dr_i = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} dq_j \iff dq_j = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial q_j}{\partial r_i} dr_i$$

Escribiendo lo anterior en notación vectorial:

$$d\vec{r} = \mathbb{J}\, d\vec{q} \iff d\vec{q} = (\mathbb{J})^{-1} d\vec{r}\ ; \quad (\mathbb{J})_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$$

Matriz jacobiana

Entonces pasamos de 3N variables espaciales a 3N-ℓ generalizadas



- En las siguientes tres páginas se hacen ejemplos donde

    1) Se identifican constricciones, dof y el conjunto Q (Variables y nombre)

    2) Se calcula el jacobiano para un péndulo doble confinado a un plano

- Después de los ejemplos se calculan algunas propiedades de las derivadas en Q

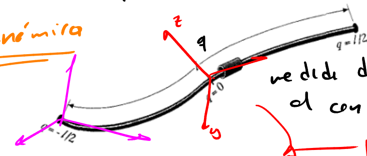
Ejemplos

$N=1 \rightarrow 3$ dof
$l=2 \Rightarrow 3-2=1$ dof

1

$x = q$ = distancia recorrida sobre el alambre

Holonómica



medida desde el centro

$\boxed{\begin{matrix} y=0 \\ z=0 \end{matrix}}$ $\begin{matrix} f_1 \sim y \\ f_2 = z \end{matrix}$

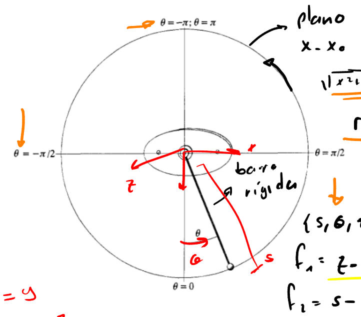
$q = \int_0^q dl = \int_0^q \sqrt{1+\frac{dr}{dt}}\, dt$

$f_1(x,y,z,t) = 0 = y$
$f_2(x,y,z,t) = 0 \sim z$

2

$N=1 \rightarrow 3$ dof
$l=2 \rightarrow 3-2=1$ dof

$y = l\cos\theta$
$y = l\sin\theta$



barra rígida

plano $x = x_0 - f_1(x,y,z,t)$

$\sqrt{x^2+y^2} - l = 0 = f_2(x,y,z,t)$

$r - l = 0 = f_2(r,\theta,\varphi)$

$\varphi - \varphi_0 = f_1(r,\theta,\varphi)$

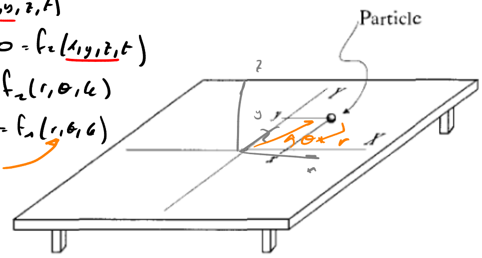
$\{s, \theta, z\}$

$f_1 = z - z_0$
$f_2 = s - L$

3

$N=1$
$l=1 \rightarrow 3-1=2$ def

$f(x,y,z,t) = z - z_0 = 0$

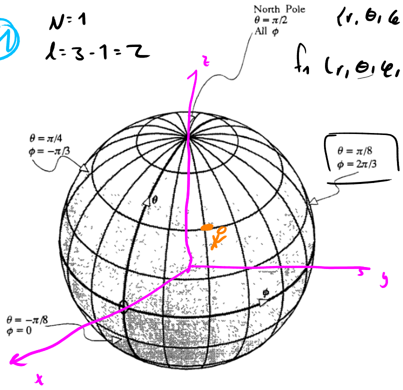


4

$N=1$
$l = 3-1 = 2$

$\{r, \theta, \varphi\}$

$f_1(r,\theta,\varphi,t) = r - R$
$= x^2+y^2+z^2-R^2$

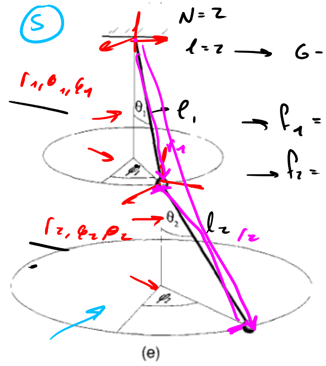


5

$N=2$
$l=2 \rightarrow 6-2=4$ dof

r_1, θ_1, φ_1

r_2, φ_2, θ_2



$\rightarrow f_1 = r_1 - l_1 = 0 = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} - l_1$

$\rightarrow f_2 = r_2 - l_2 = 0 = \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2} - l_2$

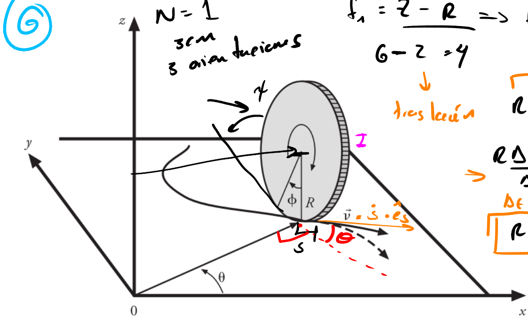
$f_1 = \vec r_1 \cdot \vec r_1 - l_1^2 = 0$
$f_2 = (\vec r_1 - \vec r_2)\cdot(\vec r_1 - \vec r_2) - l_2^2 = 0$

$\{\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2\}$

Moneda que rueda sin resbalar

6

$N=1$
3cm
3 orientaciones



$f_1 = z - R \Rightarrow f_2 = \psi - \psi_0$ (sobre l)

$6-2=4$

tres locación

$R\,d\varphi = ds$

$R\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$

$\Delta t \to 0$

$\boxed{R\dot\varphi = \dot s}$

No holonómica

$\vec v = \dot x \hat e_x + \dot y \hat e_y$

$\rightarrow \dot x = \dot s\cos\theta = R\dot\varphi\cos\theta$

$\rightarrow \dot y = \dot s\sin\theta = R\dot\varphi\sin\theta$

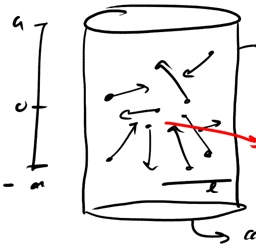
$x = x(\theta, \varphi)$

7

Gas

$N \sim 10^{23}\ cm^3$

$3N$



Ω

$\boxed{\vec r_i \in \Omega}$

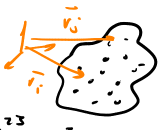
$\Omega = \{\vec r \in \mathbb{R} \mid s \in l, \ldots\}$

Mec. Estadística

con borde de rígido

Cuerpo rígido

8



constricciones

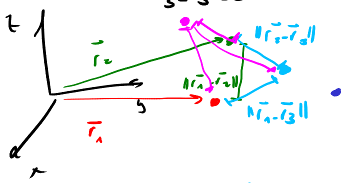
$\|\vec r_i - \vec r_j\| = cte$

Teorema de Chasles

$N = 10^{23}\ cm^3 \longrightarrow 6$ dof $\Rightarrow$ 3 CM $\rightarrow (x,y,z)$

3 rotaciones del CM $\rightarrow (\theta, \varphi, \psi)$

$3-3=0$

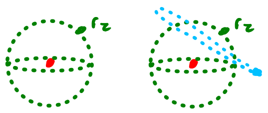


$\|\vec r_1 - \vec r_2\|$

$\|\vec r_2 - \vec r_3\|$

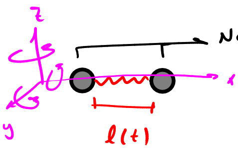
$\|\vec r_1 - \vec r_3\|$

$\mathrm{def} = \underbrace{3+2+1}_{=6} + 0 + 0 \ldots$



9

Molécula de dos átomos



No es un cuerpo rígido

$N=2 \rightarrow 6$ def

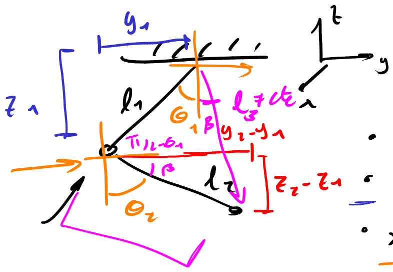
$\hookrightarrow 3$ def de la traslación

$l(t)$

$\|\vec r_1 - \vec r_2\|^2 - l^2(t) = f(x_1, x_2, t) = 0$

$l=1 \Rightarrow 6-1=5$ def

Entonces, la idea es mapear las $3N$ posiciones espaciales en $3N-\ell$ coordenadas generalizadas.



$(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)=\ell_2^2$

$\vec{r}_1\cdot\vec{r}=\ell^2$

$\ell_3^2 = \underbrace{\ell_1^2+\ell_2^2}_{cte} - 2\ell_1\ell_2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1+\beta\right)$

$z_2=\ell_3\cos\beta$

$y_2=\ell_3\sin\beta$

- $x_1=0$
- $z_1^2+y_1^2-\ell_1^2=0$
- $x_2=0$
- $(z_1-z_2)^2+(y_1-y_2)^2-\ell_2^2=0$

$$3N-\ell = 3(2)-(4) = 6-4 = 2 \Rightarrow \vec{q}=(q_1,q_2)=(\theta_1,\theta_2)$$

entonces la idea es pasar de

$$\underbrace{\{x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2\}}_{r_i}\ 3N \longrightarrow \underbrace{\{\theta_1,\theta_2\}}_{q_i}\ 3N-\ell$$

esto lo hacemos como sigue

$$\delta q_i = \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial x_j}\delta x_j \qquad i=\{1,2\} \quad j=\{1,\dots,6\}$$

J^{-1}_{ij} = Matriz Jacobiana inversa

La matriz jacobiana relaciona a las variables

$J^{-1}\in M_{2\times 6}(\mathbb{R})$

↳ Sólo es un cambio de variables

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\delta\theta_1\\ \delta\theta_2\end{pmatrix}_{2\times1} = J^{-1}_{2\times6}\,\delta\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\\x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}_{6\times1} = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial\theta_1}{\partial x_1}}^{0} & \frac{\partial\theta_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\theta_1}{\partial z_1} & \cancel{\frac{\partial\theta_1}{\partial x_2}}^{0} & \frac{\partial\theta_1}{\partial y_2} & \frac{\partial\theta_1}{\partial z_2}\\ \cancel{\frac{\partial\theta_2}{\partial x_1}}^{0} & \frac{\partial\theta_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\theta_1}{\partial z_1} & \cancel{\frac{\partial\theta_2}{\partial x_2}}^{0} & \frac{\partial\theta_2}{\partial y_2} & \frac{\partial\theta_1}{\partial z_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cancel{x_1}^{0}\\y_1\\z_1\\\cancel{x_2}^{0}\\y_2\\z_3\end{pmatrix}$$

Del diagrama vemos que

1) $y_1=\ell_1\cos\theta_1$

2) $z_1=\ell_1\sin\theta_1$

$$\left.\begin{aligned}(y_2-y_1)&=\ell_2\sin\theta_2\\ (z_2-z_1)&=\ell_2\cos\theta_2\end{aligned}\right\}\longrightarrow$$

$y_2=$

3) $y_2=y_1+\ell_2\sin\theta_2 = \ell_1\cos\theta_1+\ell_2\sin\theta_2$

4) $z_2=z_1+\ell_2\cos\theta_2 = \ell_1\sin\theta_1+\ell_2\cos\theta_2$

Éstas son las expresiones que Saraí corrigió en clase

de 1) $\longrightarrow \dfrac{\partial y_1}{\partial\theta_1} = -\ell_1\sin\theta_1 \Rightarrow \dfrac{\partial\theta_1}{\partial y_1} = \dfrac{-1}{\ell_1\sin\theta_1} = -\dfrac{1}{z_1}$

2) $\longrightarrow \dfrac{\partial z_1}{\partial\theta_1} = \ell_1\cos\theta_1 \Rightarrow \dfrac{\partial\theta_1}{\partial z_1} = \dfrac{1}{\ell_1\cos\theta_1} = \dfrac{1}{y_1}$

3) $\longrightarrow \dfrac{\partial y_2}{\partial\theta_1} = +\ell_1\sin\theta_1 = \dfrac{-\partial y_1}{\partial\theta_1} \Rightarrow \dfrac{\partial\theta_1}{\partial y_2} = \dfrac{1}{z_1} \longrightarrow \dfrac{\partial f(\theta_2)}{\partial\theta_1}=0$ porque son independientes θ_1 y θ_2

$\longrightarrow \dfrac{\partial y_2}{\partial\theta_2} = +\ell_2\cos\theta_2 \Rightarrow \dfrac{\partial\theta_2}{\partial y_2} = \dfrac{1}{\ell_2\cos\theta_2} = \dfrac{1}{z_2-z_1}$

4) $\longrightarrow \dfrac{\partial z_2}{\partial\theta_1} = \ell_1\cos\theta_1 = \dfrac{\partial z_1}{\partial\theta_1} \Rightarrow \dfrac{\partial\theta_1}{\partial z_2} = \dfrac{1}{y_1}$

$\dfrac{\partial z_2}{\partial\theta_2} = -\ell_2\sin\theta_2 \Rightarrow \dfrac{\partial\theta_2}{\partial z_2} = -\dfrac{1}{z_2-z_1}$

Entonces

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial\theta_1}{\partial x_1}}^{0} & \frac{\partial\theta_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\theta_1}{\partial z_1} & \cancel{\frac{\partial\theta_1}{\partial x_2}}^{0} & \frac{\partial\theta_1}{\partial y_2} & \frac{\partial\theta_1}{\partial z_2} \\ \cancel{\frac{\partial\theta_2}{\partial x_1}}^{0} & \frac{\partial\theta_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\theta_1}{\partial z_1} & \cancel{\frac{\partial\theta_2}{\partial x_2}}^{0} & \frac{\partial\theta_2}{\partial y_2} & \frac{\partial\theta_1}{\partial z_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{z_1} & \frac{1}{y_1} & 0 & \frac{1}{z_1} & \frac{1}{y_1} \\ 0 & \frac{\partial\theta_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\theta_2}{\partial z_2} & 0 & \frac{1}{z_2-z_1} & \frac{1}{y_1} \end{pmatrix}$$

Derivamos respecto a y_1

para $\frac{\partial\theta_2}{\partial y_1}$ veamos que $y_2-y_1 = l_2 \sin\theta_2 \longrightarrow \cancel{\frac{\partial y_2}{\partial y_1}}^{0} - \cancel{\frac{\partial y_1}{\partial y_1}}^{1} = l_2 \cos\theta_2 \frac{\partial\theta_2}{\partial y_1}$

independientes

$$\Rightarrow -1 = l_2 \cos\theta_2 \frac{\partial\theta_2}{\partial y_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\theta_2}{\partial y_1} = \frac{-1}{l_2\cos\theta_2} = \frac{-1}{z_2-z_1}$$

Asimismo

$$z_2-z_1 = l_2\cos\theta_2 \longrightarrow \cancel{\frac{\partial z_2}{\partial z_1}}^{0} - \cancel{\frac{\partial z_1}{\partial z_1}}^{1} = -l_2\sin\theta_2 \frac{\partial\theta_2}{\partial z_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\theta_2}{\partial z_1} = \frac{1}{l_2\sin\theta_2} = \frac{1}{y_2-y_1}$$

$$\Rightarrow J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{z_1} & \frac{1}{y_1} & 0 & \frac{1}{z_1} & \frac{1}{y_1} \\ 0 & \frac{-1}{z_2-z_1} & \frac{1}{y_2-y_1} & 0 & \frac{1}{z_2-z_1} & \frac{1}{y_1} \end{pmatrix}$$

Entonces ya tenemos la transformación necesaria entre las posiciones reales y las coordenadas generalizadas

$$\delta q_i = \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial x_j}\delta x_j \longrightarrow \delta\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{z_1} & \frac{1}{y_1} & 0 & \frac{1}{z_1} & \frac{1}{y_1} \\ 0 & \frac{-1}{z_2-z_1} & \frac{1}{y_2-y_1} & 0 & \frac{1}{z_2-z_1} & \frac{1}{y_2-y_1} \end{pmatrix} \delta\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

como sabemos que $x_1 = x_2 = 0$, podemos reducirlo a

$$\delta q_i = \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial x_j}\delta x_j \longrightarrow \delta\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{-1}{z_1} & \frac{1}{y_1} & \frac{1}{z_1} & \frac{1}{y_1} \\ \frac{-1}{z_2-z_1} & \frac{1}{y_2-y_1} & \frac{1}{z_2-z_1} & \frac{1}{y_2-y_1} \end{pmatrix}} \delta\begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

ya con esto puedo traducir lo que vea en δq_i a δx_i.

Para el caso del péndulo rígido doble, podemos visualizar el espacio fase (que es un subconjunto de $\mathbb{E}^4 \rightarrow 4$ coordenadas generalizadas) como dos subconjuntos:

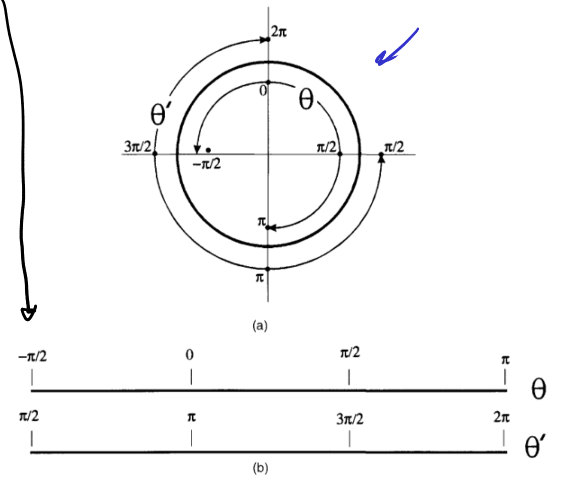


FIGURE 2.12
An atlas for the circle $\mathbb{S}^1$. (a) The circle with coordinates θ and θ' indicated. The overlap regions, namely the second and fourth quadrants, are covered by both coordinates. (b) The atlas itself: two charts on $\mathbb{E}^1$ (the line), one for θ and one for θ'.

· Para una mejor discusión, veen el Saletan, capítulo 2.

Propiedades de derivación en $\mathbb{Q}$

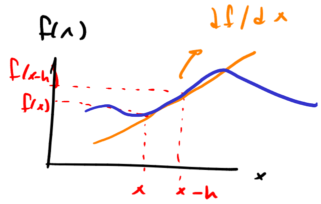
Supóngase una función f tal que $f: \mathbb{Q}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$f = f(\{q_i\}, t)$

Función de las coordenadas generalizadas; y del tiempo; función escalar

Dado que f puede ser una variable dinámica, nos interesa su evolución temporal, es decir

$\frac{d}{dt}f = \dot{f} = ? \longrightarrow$ La respuesta a esto es $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{3N-l} \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t}$. ¿Por qué?

Pensemos en $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, su derivada es $\frac{df(x)}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h}$

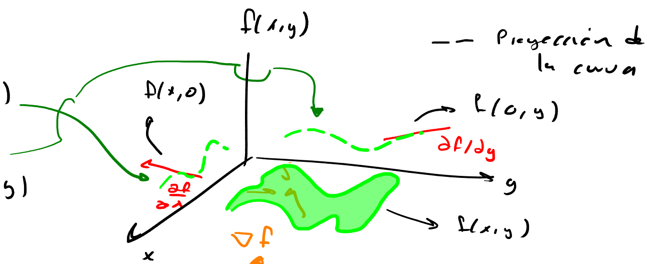


Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, las derivadas parciales son

$$f(x,y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h,y) - f(x,y)}{h}$$

Las derivadas parciales son cambios en una dirección

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y-h) - f(x,y)}{h}$$



La derivada completa es $D[f(x,y)] = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \equiv \nabla f$

y en general $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, entonces $D[f] \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n\times m}$ t.q. $[D[f]]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ Matriz jacobiana

Para el caso de $f(\{q_i\}, t)$, si quiero calcular $\frac{df}{dt}$, tengo que hacer regla de la cadena pues $q_i = q_i(t)$. entonces en 1D $\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$

$$\frac{df}{dt} = \nabla_{(\vec{q},t)} f \cdot \frac{d}{dt}(\vec{q},t) = \left(\frac{\partial f}{\partial q_1}, \frac{\partial f}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial q_{3N-l}}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)\cdot\left(\frac{dq_1}{dt}, \ldots, \frac{dt}{dt}\right) = \sum_{i=1}^{3N-l}\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Una vez especificando esto, procedemos a probar lo siguiente

① $\dfrac{\partial f}{\partial q_i} = \dfrac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{q}_i} = \dfrac{\partial\left(\frac{d}{dt} f\right)}{\partial\left(\frac{d}{dt} q_i\right)}$; suponiendo $f = f(\{q_i\}, t) \rightarrow f \in C^2$ - Es decir puedo poner puntitos arriba y abajo al derivar

② $\dfrac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} = 0$ ⟶ Las velocidades generalizadas y las posiciones generalizadas son linealmente independientes

③ $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial r_i}{\partial q_j}\right) = \dfrac{\partial}{\partial q_j}\left(\dfrac{d}{dt} r_i\right) = \dfrac{\partial}{\partial q_j}\left(\dot{r}_i\right)$; suponiendo $r_i \in C^2$ ⟶ $\frac{\partial}{\partial q_j}$ conmuta con $\frac{d}{dt}$

- Recordemos que las coordenadas generalizadas son linealmente independientes

$\dfrac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij}$ ⟶ Delta de Kronecker ⟹ que también $\dfrac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} = \delta_{ij}$ pues $q_i = q_i(t)$

① ⟶ Sea $f = f(\{q_i\}, t)$ de clase C^2 ⟹ sus derivadas parciales cruzadas conmutan

Derivada total y regla de la cadena

$$\frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{df}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left[\sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j}\cancel{\frac{dq_j}{dt}}^{\dot{q}_j} + \frac{\partial f}{\partial t}\right]$$

Regla del producto de derivadas

$$= \sum_j\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{q}_i \partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial q_j}\cancel{\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_i}}\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{q}_i \partial t}$$

C^2 $\quad$ δ_{ij} por la independencia lineal de q_i $\quad$ C^2

$$= \sum_j \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\cancel{\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}}^{0}\right) + \frac{\partial f}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\cancel{\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}}^{0}\right) \quad \text{pues } f = f(\{q_i\}, t)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial q_i} \quad \blacksquare$$

② $\dot{q}_j$ y q_i son linealmente independientes, i.e. $\dfrac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} = 0$

Primero, notemos que $r_j = r_j(\{q_i\}, t)$, pero en general $r_i = r_i(t)$

⟹ $q_i = q_i(t)$, entonces $\dfrac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i = \dfrac{\partial q_i}{\partial t}$ ⟶ porque sólo depende de t si nos olvidamos de la transformación geométrica

$$\Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{dq_j}{dt}\right) \overset{q_j = q_j(t)}{=} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial q_j}{\partial t}\right) \underset{C^2}{=} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial q_j}{\partial q_i}\right) \underset{\text{l. ind.}}{=} \frac{\partial}{\partial t}\left(\delta_{ij}\right) = 0$$

③ P.D.: $\vec{r}_j = (r_{x_j}, r_{y_j}, r_{z_j})$ y $\forall r_j \in C^2$ ⟹ $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial r_i}{\partial q_n}\right) = \dfrac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_n} = \dfrac{\partial}{\partial q_n}\left(\dfrac{d}{dt} r_i\right)$

Desarrollemos $\dfrac{d}{dt}\underbrace{\left(\dfrac{\partial r_i}{\partial q_n}\right)}_{f} = \sum_j \dfrac{\partial f}{\partial q_j}\dot{q}_j + \dfrac{\partial f}{\partial t} = \sum_j \dfrac{\partial}{\partial q_j}\left(\dfrac{\partial r_i}{\partial q_n}\right)\dot{q}_j + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial r_i}{\partial q_n}\right)$

$r_i \in C^2$

Desarrollemos $\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_n}\right)}_{f} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_j \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_n}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_n}\right)$

$r_i \in C^2$

$$= \sum_j \left[\frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)\right]\dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\partial r_i}{\partial t}\right)$$

$f'g = (fg)' - fg'$

$$= \sum_j \left[\frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right) - \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\cancelto{0}{\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_j}}\right] + \frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\partial r_i}{\partial t}\right)$$

$$= \sum_j \frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right) + \frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\partial r_i}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_n}\left(\sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{dr_i}{dt}\right) = \frac{\partial \dot{r}_j}{\partial q_n}$$

$\longrightarrow$ Notemos que sólo empleamos que $r_j \in C^2$