

2.5.- Solución a la ecuación de Laplace

Hasta el momento hemos considerado el estudio de la ecuación de Poisson:

$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = \rho_{ext}(\vec{r})/\epsilon_0$ y vemos que la función de Green nos suministra una solución general dado $\phi_{ext}(\vec{r})$ y condicione a la fuente.

En particular $\phi(\vec{r}) \rightarrow g(\vec{r}, \vec{r}')$ si $\rho_{ext}(\vec{r}) \rightarrow \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ y además

$$g(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + f(\vec{r}, \vec{r}') \text{ con } \nabla^2 f(\vec{r}, \vec{r}') = 0$$

Entonces queda la opción de calcular $g(\vec{r}, \vec{r}')$ en $f(\vec{r}, \vec{r}')$, que es solución a la ecuación de Laplace. Algunamente, para regiones con $\rho_{ext} = 0$ hay que entregar las soluciones del potencial al caso homogéneo. Para esto recordemos algunas propiedades de las funciones.

Exposición en funciones ortogonales

Sea $\{U_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un conjunto (infinito) de funciones tales que sean

- reales o complejos
- acotadas integrables
- Definidas en un intervalo $[a, b]$

• Ortonormalidad Normalizado a la unidad

$$\int_a^b U_n^*(x) U_m(x) dx = \delta_{n,m}$$

Notemos que este integral es un producto punto (se puede mostrar complejo conjugado)

• Complejos

Sea $f(x)$ una función acotada integrable en $[a, b]$. Sea f_N un aproximación tal que

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N \rightarrow \infty} a_n U_n(x)$$

Son coeficientes que minimizan el error cuadrático promedio M_N

$$M_N = \int_a^b |f(x) - \sum_{n=1}^N a_n U_n(x)|^2 dx$$

, andén $\delta_{nn'}$

$$\text{Notemos que } M_N = \int_a^b dx f(x) f_N(x) - \sum_{n=1}^N a_n^* \int_a^b dx f(x) U_n^*(x) - \sum_{n=1}^N a_n \int_a^b dx f_N(x) U_n(x) + \sum_{n=1}^N a_n a_n^*$$

$$= \int_a^b dx f(x) f_N(x) - \sum_{n=1}^N a_n^* \int_a^b dx f(x) U_n^*(x) - \sum_{n=1}^N a_n \int_a^b dx f_N(x) U_n(x) + \sum_{n=1}^N a_n a_n^*$$

$$\text{Derivando } \frac{\partial M_N}{\partial a_n} = - \int_a^b dx f(x) U_n(x) + a_n^* = 0 = - \int_a^b dx f(x) U_n^*(x) + a_n = \frac{\partial M_N}{\partial a_n^*}$$

De ambas expresiones se tiene que

$$a_n = \int_a^b dx U_n^*(x) f(x)$$

Esperando que más términos se empleen, mejor sea la aproximación de $f(x) \approx f_N(x)$,
Se pide que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - f_N(x)|^2 dx = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Convergencia} \\ \text{en el} \\ \text{punto} \end{array}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n U_n(x)$$

Si se cumple esto para toda f continua-integrable, entonces se dice que la base $\{U_n(x)\}$ es completa

- La prueba para que una base sea completa es, esencialmente, trabajo de metemáticos para las bases empíricas en física ya fueron probadas con esta propiedad.

↳ Una consecuencia de la complejidad es la siguiente:

$$f(x) = \sum_n c_n U_n(x) = \sum_n \left(\int_a^b dx' U_n^{*}(x') f(x') \right) U_n(x) = \int_a^b \left(\sum_n U_n^{*}(x') U_n(x) \right) f(x') dx' = \delta(x-x') \quad \begin{array}{l} \text{Debe cumplirse esta} \\ \text{igualdad} \end{array}$$

Es decir

$$\sum_n U_n^{*}(x') U_n(x) = \delta(x-x'). \quad \begin{array}{l} \text{Corolario, o relación de} \\ \text{complejidad} \end{array}$$

Ejemplo: Series de Fourier; $x \in (-a/2, a/2) \Rightarrow \{U_n(x)\}$ son la familia: $\sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$

$$f(x) = \frac{a}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right], \text{ con } A_n = \int_{-a/2}^{a/2} dx \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) f(x) \quad n \geq 0.$$

$$B_n = \int_{-a/2}^{a/2} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) f(x) dx$$

• Generalización a varias variables

Estos resultados unidimensionales se pueden generalizar sin problema a otros espacios

$$f(x,y) = \sum_n \sum_m c_{nm} U_n(x) V_m(y) \quad \text{con} \quad c_{nm} = \int_a^b dx \int_c^d dy U_n^{*}(x) V_m^{*}(y) f(x,y)$$

• De un intervalo finito a uno infinito

Si $[a,b]$ crece a un conjunto finito, entonces las n funciones discretas pasan a ser un continuo de funciones. Esto significa lo siguientes:

• Cambiamos \sum_n por una variable $k \in \mathbb{Z}$

↳ \sum_n por una integral $\int dk$ → Lo que afecta la complejidad

↳ A_n → coeficiente por una función de $A(k)$.

↳ Condición de ortogonalidad $\delta_{nn'}$ cambia por $\delta(k-k')$

Ejemplo: $U_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \exp(i z \pi n x/a)$ con $n \in \mathbb{Z}$ → si $a \rightarrow \infty$ entonces $\frac{z \pi n}{a} = k$

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k \exp(i z \pi n x/a) \quad \rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp(ikx) dk$$

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-a/2}^{a/2} \exp(-iz \pi n x/a) f(x) dx \quad \rightarrow \quad A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) f(x) dx$$

$$\int dx \frac{\exp(-iz \pi n x/a)}{\sqrt{a}} \exp\left(\frac{iz \pi n' x/a}{\sqrt{a}}\right) = \delta_{n,n'} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ikx)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(ik'x)}{\sqrt{2\pi}} dk = \delta(k-k')$$

$$\sum_n \frac{\exp(-iz \pi n x/a)}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\exp(iz \pi n x'/a)}{\sqrt{a}} = \delta(x-x') \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ikx)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(ik'x)}{\sqrt{2\pi}} dk = \delta(x-x')$$

= Separación de variables =

La idea general de este método es resolver la ecuación de Laplace al proponer una solución con la ventaja de reducir la complejidad del problema original.

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = 0 \longrightarrow \text{Ecuación diferencial parcial de segundo orden}$$

\downarrow El laplaceano tiene distintas expresiones según la dimensión y el sistema coordenado

\downarrow La parcial menor es lineal

Separación de variables
consiste en pasar de ecuaciones parciales a ecuaciones o lineales

Vamos un ejemplo en 1D:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(\vec{r}) \rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) = 0 &\Rightarrow \int_0^x \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) \right) dx = \frac{d}{dx} \phi(x) - \frac{d}{dx} \phi(0) = \frac{d}{dx} \phi(x) - \phi'(0) \\ &\Rightarrow \int_0^x \frac{d}{dx} (\phi(x)) dx - \int_0^x \phi'(x) dx = \phi(x) - \phi(0) - \phi'(0)(x-0) = 0 \\ \therefore \phi(x) &= \phi'(0)x + \phi(0) \longrightarrow \text{Ecuación de Laplace en 1D!} \end{aligned}$$

Vemos cómo el operador ∇^2 se va complicando en otras dimensiones

→ Coordenadas cartesianas 3D: $\nabla^2 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi(x, y, z) = 0$

- 1) Para encontrar una solución vamos a proponer que $\phi(x, y, z) = \underline{X}(x)\underline{Y}(y)\underline{Z}(z)$
- 2) Pedimos que $\phi(x, y, z) \neq 0 \rightarrow$ función no nula.
- 3) Calculamos $\frac{1}{\phi(\vec{r})} \cdot \nabla^2 \phi(\vec{r}) = 0$

Producto de tres funciones que dependen cada una de una variable distinta

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \frac{1}{\underline{X}(x)\underline{Y}(y)\underline{Z}(z)} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \underline{X}(x)\underline{Y}(y)\underline{Z}(z) \\ &= \frac{1}{\underline{X}(x)\underline{Y}(y)\underline{Z}(z)} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\underline{X}(x)\underline{Y}(y)\underline{Z}(z)] - \frac{\partial^2}{\partial y^2} [\underline{X}(x)\underline{Y}(y)\underline{Z}(z)] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\underline{X}(x)\underline{Y}(y)\underline{Z}(z)] \right\} \\ \Rightarrow 0 &= \left[\underbrace{\frac{1}{\underline{X}(x)} \frac{d^2}{dx^2} (\underline{X}(x))}_{f(x)} + \underbrace{\frac{1}{\underline{Y}(y)} \frac{d^2}{dy^2} (\underline{Y}(y))}_{g(y)} + \underbrace{\frac{1}{\underline{Z}(z)} \frac{d^2}{dz^2} (\underline{Z}(z))}_{h(z)} \right] \end{aligned}$$

Se cancelan los términos que no se dividen y los paréntesis pasan a ser divididos entre ellos

Esta es una igualdad entre tres funciones de tres variables distintas

Entonces, una forma de garantizar la igualdad es que cada una de las tres funciones sea igual a una constante. Por ejemplo

$$f(x) = -\alpha^2, g(y) = -\beta^2, h(z) = \underline{\alpha^2 + \beta^2}$$

Se definen los valores al imponer condiciones de frontera

Estas elección de α^2, β^2 es arbitraria y el término cuadrado sólo se pone por comodidad.

Para el caso que estamos analizando vemos que

Ecuación ordinaria a resolver

Solución

Se pueden reescribir los dos conjuntos en términos de los otros al escoger los coeficientes adecuados

$\frac{1}{\Sigma} \frac{d^2 \bar{X}}{dx^2} = -\alpha^2 \rightarrow \bar{X}(x) = A_x \sin(\alpha x) + B_x \cos(\alpha x) = C_x e^{i \alpha x} + D_x e^{-i \alpha x}$

Conjunto de los soluciones linealmente independientes

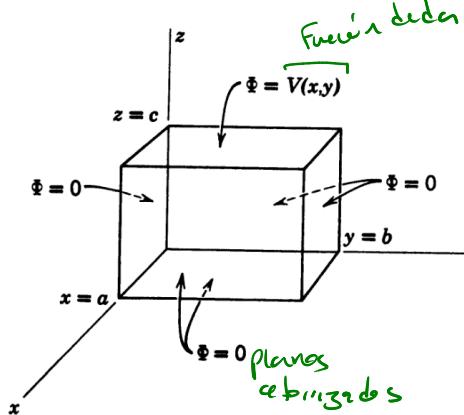
Para el caso de ED en contornos las soluciones son de la misma forma

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2 \rightarrow Y(y) = A_y \sin(\beta y) + B_y \cos(\beta y) = C_y e^{i \beta y} + D_y e^{-i \beta y}$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \alpha^2 + \beta^2 \rightarrow Z(z) = C_z \exp(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z) + D_z \exp(-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z) = A_z \sinh(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z) + B_z \cosh(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z)$$

Entonces, una elección para $\phi(r)$ sería una combinación lineal de ocho (?) términos con el producto de tres funciones (cada una de una variable).

• Ejemplo



Notemos que tenemos las siguientes condiciones a la función

$$\phi(x=0) = \phi(x=a) = 0 \Rightarrow B_x = 0 \text{ y que}$$

$$\sin(\alpha \cdot 0) = 0 = \sin(\alpha a) \Rightarrow \alpha a = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\phi(y=0) = \phi(y=b) = 0 \Rightarrow B_y = 0$$

$$\sin(\beta \cdot 0) = 0 = \sin(\beta b) \Rightarrow \beta b = \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\phi(z=0) = 0 \Rightarrow B_z = 0$$

$$\sinh(\beta_0) = 0 \Rightarrow \beta_0 \neq 0$$

Entonces hasta el momento $\phi(x,y,z) = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2} z)$

Emplando la última condición de frontera:

falta determinar estos coeficientes

$$\phi(x,y,z=c) = V(x,y) = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2} c)$$

Nótese que hay que despejar es un número

Para determinar los valores de A_{mn} , multiplicar por $\sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y)$

Dependiendo de n , m , si no le n, m , entonces se retira en la suma

$$\Rightarrow V(x,y) \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) = \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sum_m \sum_n \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2} c)$$

$$= \sum_m \sum_n \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2} c)$$

y ahora integramos recordando que $\int_0^a dx \sin(\frac{\pi n}{a} x) \sin(\frac{\pi m}{a} x) = \frac{a}{2} \delta_{mn}$ $\int_0^b dy \sin(\frac{\pi n}{b} y) \sin(\frac{\pi m}{b} y) = \frac{b}{2} \delta_{mn}$

Es decir que:

$$\int_0^a dx \int_0^b dy V(x,y) \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) = \sum_m \sum_n \int_0^a dx \sin(\frac{\pi n}{a} x) \sin(\frac{\pi m}{a} x) \int_0^b dy \sin(\frac{\pi n}{b} y) \sin(\frac{\pi m}{b} y) \sinh(\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2} c) A_{mn}$$

$$= \sum_m \sum_n \frac{a}{2} \delta_{mn} \frac{b}{2} \delta_{mn} \sinh(\pi \sqrt{(\frac{n}{a})^2 + (\frac{m}{b})^2} c) A_{mn}$$

$$= \frac{ab \sinh(c \pi \sqrt{(\frac{n}{a})^2 + (\frac{m}{b})^2})}{4} A_{mn}$$

Quitando las $(')$ para solotiria y despejando, se obtiene que

$$A_{mn} = \frac{4}{ab \sinh(c \pi \sqrt{(\frac{n}{a})^2 + (\frac{m}{b})^2})} \int_0^a dx \int_0^b dy V(x,y) \sin(\frac{\pi n}{a} x) \sin(\frac{\pi m}{b} y)$$

→ Sistemas en \mathbb{Z}^2 → Con sentido físico dado que hay sistemas invariantes es \mathbb{Z} , por ejemplo.

Cadenas polares

→ Caso especialmente útil para el estudio de esquinas puntuadas

En este caso, queremos resolver

$$\nabla^2 \phi(s, \epsilon) = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon^2} = 0$$

lapones

Los planos conductores
en contacto

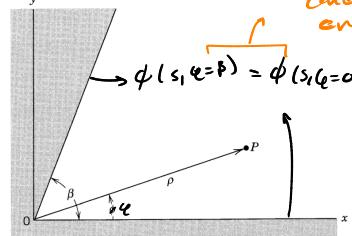


Figure 2.12 Intersection of two conducting planes defining a corner in two dimensions with opening angle β .

$$\text{Realizando separación de variables } \phi(s, \epsilon) = \sigma(s) \Phi(\epsilon)$$

Sustituyendo en el laplaceo y multiplicando por $s^2/\phi(s, \epsilon)$ obtenemos que

Ecuación de Euler e integración directa

$$\underbrace{\frac{s}{\sigma(s)} \frac{d}{ds} \left(s \frac{d\sigma(s)}{ds} \right)}_{= n^2} + \underbrace{\frac{1}{\Phi(\epsilon)}}_{-n^2} \frac{d^2 \Phi(\epsilon)}{d\epsilon^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \sigma(s) = \begin{cases} a_0 s^n + b_0 \bar{s}^{-n} & \text{si } n \neq 0 \\ a_0 + b_0 \ln(s) & \text{si } n=0 \end{cases} \\ \Phi(\epsilon) = \begin{cases} A_0 \sin(n\epsilon) + B_0 \cos(n\epsilon) & \text{si } n \neq 0 \\ A_0 + B_0 \epsilon & \text{si } n=0 \end{cases} \end{cases}$$

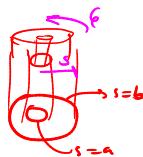
Discutimos algunos casos relevantes:

- Si tenemos el caso con $\Phi(0, 2\pi)$ y $\phi(s=0, \epsilon) = \phi_a(\epsilon)$ y $\phi(s=b, \epsilon) = \phi_b(\epsilon)$

↳ n es negativo, o positivo, o cero, pero no todos

(mas el potencial debe ser univaluado, i.e. $\phi(\epsilon=0) = \phi(\epsilon=2\pi)$)

↳ si $n=0$, entonces $B_0=0$ por lo anterior



$$\Rightarrow \phi(s, \epsilon) = a_0 + b_0 \ln(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n s^n \cdot \sin(n\epsilon) + \frac{b_n}{s^n} \sin(n\epsilon + \beta_n) \right]$$

De resultados de la teoría, esta es la contribución de una densidad lineal de carga en $s=0$ tal que $\lambda = -2\pi \epsilon_0 b_0$

↳ si $s=0$ es un punto del dominio y no hay cargas, entonces $b_n=0 \forall n$
si $s=0$ es care, entonces $a_n=0$
si podemos considerar $b_n \neq 0$.

- Si hay condiciones en ϵ como en la figura de arriba

$$\Phi(0, \beta), \quad \phi(s, \epsilon=0) = \phi(s, \epsilon=\beta) = \phi_0 \rightarrow \text{cte}$$

En este caso $b_0=0, B_0=0$ → potencial debe regresar al mismo valor entre los planos $\forall s$

↳ No hay cargas en el vértice $A_n=0, b_n=0, a_0=\phi_0$

→ mas $\sin(n\beta)=0$

$$\Rightarrow \phi(s, \epsilon) = \phi_0 + \sum_n a_n s^n \sin(n\epsilon) = \phi_0 + \sum_m a_m s^{m\pi/\beta} \sin(m\pi \frac{\epsilon}{\beta})$$

↳ Faltaría tener en cuenta una condición en $\phi(s=s_0)$ pero podemos hacer el análisis de $s \rightarrow 0$, para un caso cercano de los límites.

$$\phi(s \rightarrow 0, \epsilon) \approx \phi_0 + a_1 s^{\pi/\beta} \sin(\pi \epsilon / \beta)$$

↳ supone que si $s \gg 0$, este término va a ser cero, lo que depende de la simetría de las puntas.

Para operar el potencial en la esquina $s \rightarrow 0$, en tres

a partir del potencial, podemos calcular el campo: $\vec{E} = -\nabla \phi = -\frac{\partial}{\partial s} \phi \hat{e}_s - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \phi \hat{e}_\epsilon$

$$\phi(s=a, \epsilon) \approx \phi_0 + a_1 s^{\frac{\pi}{\beta}} \sin(\pi \epsilon / \beta) \Rightarrow E_s = -a_1 \frac{\pi}{\beta} s^{\frac{(\pi/\beta)-1}{\beta}} \sin(\pi \epsilon / \beta) = -\frac{a_1}{s} \frac{\pi}{\beta} s^{\frac{\pi/\beta}{\beta}} \sin(\pi \epsilon / \beta)$$

$$E_\epsilon = -\frac{a_1}{s} \frac{\pi}{\beta} s^{\frac{\pi/\beta}{\beta}} \cos(\pi \epsilon / \beta)$$

También podemos calcular $\frac{\sigma_{int}(s)}{\epsilon_0} \Big|_{\epsilon=0} = E_\epsilon \Big|_{\epsilon=0}$ para $\vec{E} \cdot \hat{n} = \vec{E} \cdot \hat{e}_\epsilon$

$$\text{Para las condiciones de frontera } \sigma_{int}(s) \Big|_{\epsilon=0} = \sigma_{int}(s) \Big|_{\epsilon=\beta} = -\frac{\epsilon_0 a_1 \pi}{r^s} \frac{s^{\frac{\pi/\beta}{\beta}}}{s}$$

→ para $\epsilon=0$ el resultado es directo.
Para $\epsilon=\beta$ no tiene que $\hat{n} = \hat{e}_\epsilon$
y listo.

Caso

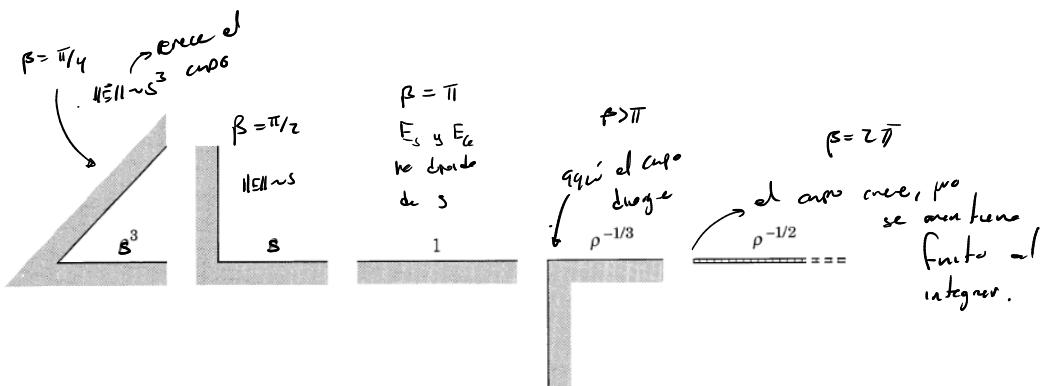


Figure 2.13 Variation of the surface-charge density (and the electric field) with distance ρ from the “corner” or edge for opening angles $\beta = \pi/4, \pi/2, \pi, 3\pi/2$, and 2π .

== Coordenadas esféricas (3D)

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \phi$$

Para este problema vamos a analizar el caso con simetría azimutal y luego el general

. $\phi = \phi(r, \theta)$. En este caso:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0$$

Consideremos $\frac{r^2}{\phi} \nabla^2 \phi = 0$ asumiendo $\phi(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{\phi} \nabla^2 \phi = \underbrace{\frac{r}{R(r)} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r R(r))}_{=+cte} + \underbrace{\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right)}_{=-cte} = 0$$

Por comodidad escribimos $cte = l(l+1)$; l se escogerá como un entero, sin embargo esto lo discutiremos más adelante.

• Parte radial

La ecuación resultante, al desarrollar es la siguiente: $r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - l(l+1)R = 0$

• Parte angular

En este caso, tenemos que

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + l(l+1) \sin \theta \Theta = 0$$

→ Para “resolverla”, hagamos el cambio de variable $u = \cos \theta$

$$\text{Por regla de la cadena } \frac{dF}{d\theta} = \frac{du}{d\theta} \frac{df}{du} = -\sin \theta \frac{df}{du}; f(\theta)$$

* En el Jackson y Griffiths este término es $\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \phi)$, que es equivalente para separación de variables

→ Explicando el método de separación de variables podemos resaltar este acuerdo.

→ aquí aún no hay impresiones sobre el valor de l .

Podemos rescribir la ecuación diferencial para Θ como sigue

$$-\sin\theta \frac{d}{du} \left(-\sin^2\theta \frac{d\Theta(u)}{du} \right) + l(l+1)\sin\theta \Theta(u) = \sin\theta \left[\frac{1}{\sin^2\theta} \left(\sin^2\theta \frac{d\Theta}{du} \right) + l(l+1)\Theta(u) \right] = 0$$

Como $u=\cos\theta$, entonces $\sin^2\theta=1-u^2$, por lo que la ecuación final es la siguiente

$$\frac{d}{du} \left[(1-u^2) \frac{d\Theta(u)}{du} \right] + l(l+1)\Theta(u) = 0 \quad \xrightarrow{\text{Ecuación diferencial de Legendre.}}$$

↓

Las soluciones generales con $l \in \mathbb{N}$ son los polinomios de Legendre de primer y segundo tipo, es decir

$$\Theta = \sum_{l=0}^{\infty} \left(C_l P_l(\cos\theta) + d_l Q_l(\cos\theta) \right)$$

Primer tipo Segundo tipo

$P_l(u=\pm 1)=\pm 1$
Base
ortogonal y
completa

$$Q_l(u=\pm 1) \rightarrow \pm \infty$$

por lo que $d_l=0$ & l

$$(1-u^2) \frac{d^2\Theta}{du^2} + -2u \frac{d\Theta}{du} + l(l+1)\Theta = 0$$

si $u=\pm 1$, entonces tenemos un punto singular.
En este caso $\Theta \rightarrow \pm \infty$, lo que no nos
es conveniente

en aplicaciones para el caso electrostático
la forma de evaluar es si $l \in \mathbb{N}_0$ & $l=0$

para estos deben tener en
cuenta si se resuelve el sistema
sin evaluar en $\theta=0, \pi$.

Por lo tanto, en la mayoría de los casos, el potencial está dado por:

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)$$

→ Puntos a destacar.

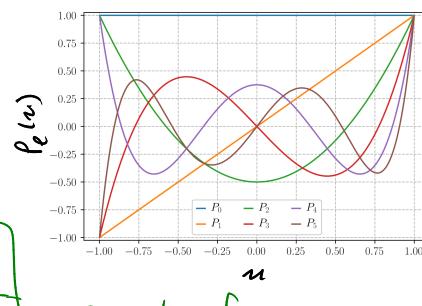
Los polinomios $P_l(u)$ tienen paridad definida

se cumple la → Una forma de calcularlos
relación de es con la fórmula de
ortogonalidad Rodrigues

$$\int_{-1}^1 du P_l(u) P_m(u) = \frac{1}{2^{l+1}} \frac{l!}{(l+1)!} \delta_{l,m}$$

$$P_l(u) = \frac{1}{2^l (l!) \frac{d}{du}^l} [(u^2 - 1)^l]$$

Notemos que no están
normalizados. Esto es por conveniencia
 $P_0(1)=1, P_1(-1)=-1$



De esta forma, se menciona ϕ es un todo
el espacio, que es lo que se pide en cuestiones
de cargas.

Como ejemplo consideremos una esfera
hueca de radio R tal que

$\phi(r=R, \theta) = \phi_R(\theta)$ y calculamos
el potencial en todo el espacio.

Primero notemos que

$$\phi(\vec{r}) = \begin{cases} \sum_l A_l r^l P_l(\cos\theta) & r > R \\ \sum_l \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) & r < R \end{cases}$$

Adicionalmente, sabemos que el potencial es una
función continua, por lo tanto

$$\sum_l A_l r^l P_l(\cos\theta) = \sum_l \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta) \Rightarrow \sum_l \left(A_l R^l - \frac{B_l}{R^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta) = 0$$

$$\Rightarrow A_l R^l - \frac{B_l}{R^{l+1}} = 0 \Rightarrow B_l = A_l R^l R^{-l-1} \quad \xrightarrow{\text{Entonces basta determinar los } A_l.}$$

Dado que los polinomios de
Legendre, son una base ortogonal,
esta igualdad fuerza a que los
coeficientes sean nulos

Extrayendo en la última condición de continuidad

$$\phi(r=R) = \phi_R(\theta) = \sum_l A_l R^l P_l(\cos\theta) \xrightarrow{\text{Multiplicando por } P_l'(\cos\theta) \cdot \sin\theta \text{ integrando en } \theta \in [0, \pi]}$$

$$\int_0^\pi \phi_R(\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \sum_l A_l R^l \int_0^\pi P_l(\cos\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta d\theta$$

Realizando el cambio de variable $x = \cos\theta$, tenemos que

$$\int_0^{\pi} \phi_0(\theta) P_e(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \sum_l A_l r^l \int_0^{\pi} P_e(\cos\theta) P_e(\cos\theta) \sin\theta d\theta \rightarrow \int_{-1}^1 \phi_0(x) P_e(x) dx = \sum_l A_l r^l \int_{-1}^1 P_e(x) P_e(x) dx = \frac{A_l' r^l}{2l+1}$$

Por lo tanto $A_l = \frac{2l+1}{2r^l} \int_{-1}^1 \phi_0(x) P_e(x) dx$ y $\phi(r) = \begin{cases} \sum_l A_l \left(\frac{r}{R}\right)^l P_e(\cos\theta) & r > R \\ \sum_l A_l' \left(\frac{R}{r}\right)^l P_e(\cos\theta) & r < R \end{cases}$

La complicación surge de estos integrals por lo que se propone escribirlos en términos de los polinomios de Legendre

Sup $\phi_0(\theta) = k^2 \sin^2(\frac{\theta}{2}) \rightarrow$ Usando identidad de doble ángulo

$$\text{La expresión anterior puede escribirse como } \phi_0(\theta) = \frac{k}{2}(1 - \cos\theta) = \frac{k}{2}[P_0(\cos\theta) - P_1(\cos\theta)]$$

$$\Rightarrow A_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 \frac{k}{2} [P_0(x) - P_1(x)] P_e(x) dx = \frac{2l+1}{2} \frac{k}{2} \left[\frac{k}{2l+1} \delta_{0,l} - \frac{k}{2l+1} \delta_{1,l} \right] = \frac{k}{2} [\delta_{0,l} - \delta_{1,l}]$$

Sustituyendo en la expresión del potencial $\phi(r, \theta) = \begin{cases} \frac{k}{2} \left(1 - \frac{r}{R} \cos\theta\right) & r < R \\ \frac{k}{2} \left(\frac{R}{r} - \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos\theta\right) & r > R \end{cases}$

→ Notemos que conocemos las relaciones

$\vec{E} = -\nabla\phi$ y $\frac{\partial}{\partial r} = (\vec{E}^x - \vec{E}^y) \cdot \hat{n}$ entonces podemos determinar el problema conociendo la carga sobre la esfera en lugar del potencial.

En este caso, definimos $\phi(r) = \underbrace{\phi_c(r)}_{\text{dentro de la esfera}} \odot (R-r) + \underbrace{\phi_s(r)}_{\text{lumen de la esfera}} \odot (r-R)$

$$\phi_c(r) = \frac{k}{2} \left(1 - \frac{r}{R} \cos\theta\right) \quad \phi_s(r) = \frac{k}{2} \left(\frac{R}{r} - \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos\theta\right)$$

El campo eléctrico es, entonces

$$\vec{E}_c = -\nabla\phi_c = -\left(\hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right)\phi_c = -\frac{k}{2} \left(-\frac{\cos\theta}{R} \hat{e}_r + \frac{1}{R} \sin\theta \hat{e}_\theta\right) = \frac{k}{2R} (\cos\theta \hat{e}_r - \sin\theta \hat{e}_\theta) = \frac{k}{2R} \hat{e}_z$$

$$\vec{E}_s = -\nabla\phi_s = -\frac{k}{2} \left[\hat{e}_r \left(-\frac{R}{r^2} + \frac{2R^2}{r^3} \cos\theta\right) + \hat{e}_\theta \left(\frac{R^2}{r^2} \sin\theta\right)\right] = \frac{k}{2r} \left\{ \left[\frac{R}{r} - 2\left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos\theta\right] \hat{e}_r - \left[\left(\frac{R}{r}\right)^2 \sin\theta\right] \hat{e}_\theta \right\} = \frac{k}{2r} \left\{ \frac{R}{r} \hat{e}_r - \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left[2\cos\theta \hat{e}_r + \sin\theta \hat{e}_\theta\right] \right\}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} \frac{k}{2R} \hat{e}_z & r < R \\ \frac{k}{2R} \left[\left(\frac{R}{r} - \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos\theta\right) \hat{e}_r - \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sin\theta \hat{e}_\theta \right] & r > R \end{cases}$$

y por último, podemos calcular la carga total en $r=R$

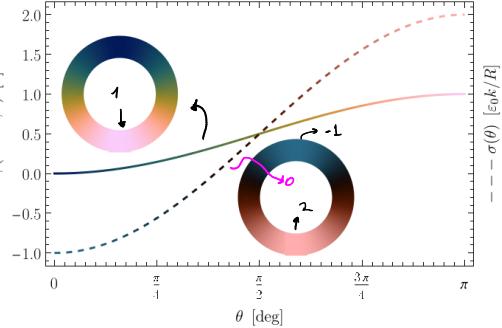
$$\nabla(\phi) = \epsilon_0 \hat{n} \cdot [\vec{E}_s - \vec{E}_c] = \epsilon_0 \left[-\hat{n} \cdot \nabla\phi_s + \hat{n} \cdot \nabla\phi_c \right]; \text{ en este caso } \hat{n} = \hat{e}_r.$$

Dado que ya calculamos el campo, empleamos esta expresión, sin embargo bastaba con calcular $\partial\phi_s/\partial r$.

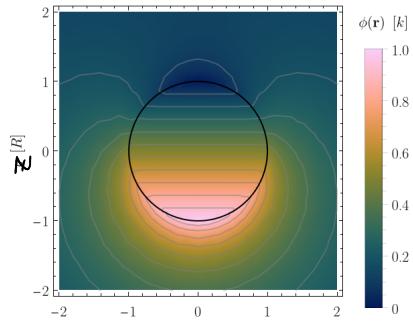
$$\nabla(\phi) = \epsilon_0 \frac{k}{2R} \left[\left(\frac{R}{r} - 2\left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos\theta\right) - \cos\theta \right] \Big|_{r=R} = \frac{\epsilon_0 k}{2R} (1 - 3\cos\theta)$$

Para visualizar los resultados, crearemos los siguientes gráficos

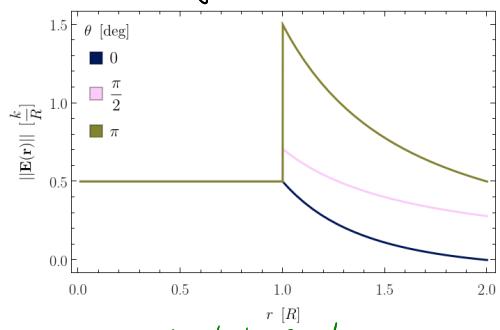
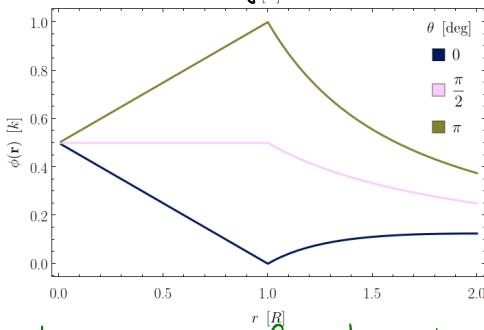
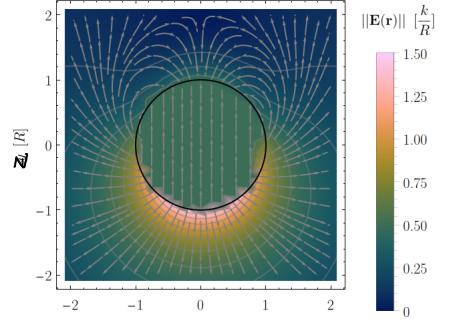
Potencial y densidad de carga en la frontera



Potencial en x=0 (θ=0)



Campo eléctrico en x=0 (θ=0)



El ejemplo siguiente corresponde a un esferoide de radio R con una distribución de carga

Solución:

Let Φ_+ , Φ_- be respectively the potentials outside and inside the shell. Both Φ_+ and Φ_- satisfy Laplace's equation and, on account of cylindrical symmetry, they have the expressions

$$\begin{aligned}\Phi_+ &= \sum_{n=0} b_n r^{-n-1} P_n(\cos\theta), \quad (r > R); \\ \Phi_- &= \sum_{n=0} a_n r^n P_n(\cos\theta), \quad (r < R).\end{aligned}$$

The boundary conditions at $r = R$ for the potential and displacement vector are

$$\Phi_- = \Phi_+,$$

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 P_1(\cos\theta) = \epsilon_0 \left(\frac{\partial \Phi_-}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_+}{\partial r} \right).$$

$$\begin{aligned}\nabla &= \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \\ \vec{E} &= (\vec{E}^{\text{in}} - \vec{E}^{\text{out}}) \cdot \hat{n} = (-\nabla \phi^+ + \nabla \phi^-) \cdot \hat{n} \\ &= \left(-\frac{\partial \phi^+}{\partial r} + \frac{\partial \phi^-}{\partial r} \right)\end{aligned}$$

Substituting in the above the expressions for the potentials and equating the coefficients of $P_n(\cos\theta)$ on the two sides of the equations, we obtain

$$\begin{aligned}a_n = b_n &= 0 \quad \text{for } n \neq 1, \\ a_1 &= \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}, \quad b_1 = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} R^3 \quad \text{for } n = 1.\end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned}\Phi_+ &= \frac{\sigma_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2} \cos\theta, \quad r > R, \\ \Phi_- &= \frac{\sigma_0 r}{3\epsilon_0} \cos\theta, \quad r < R.\end{aligned}$$

From $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ we obtain

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_+ &= \frac{2\sigma_0 R^3}{3\epsilon_0 r^3} \cos\theta \mathbf{e}_r + \frac{\sigma_0 R^3}{3\epsilon_0 r^3} \sin\theta \mathbf{e}_\theta, \quad r > R, \\ \mathbf{E}_- &= -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \mathbf{e}_z, \quad r < R.\end{aligned}$$

= Solución en coordenadas esféricas sin smetria axial

Recordemos el Laplace como sigue:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

Podemos definir este cuadro difinir como $\hat{\mathbb{L}}^2 = \hat{\mathbb{L}}_x^2 + \hat{\mathbb{L}}_y^2 + \hat{\mathbb{L}}_z^2$, con $\hat{\mathbb{L}} = -i(\vec{r} \times \nabla)$, es decir $\hat{\mathbb{L}}^2 = -(\vec{r} \times \nabla)^2$

Con esta respuesta, notemos que la ecuación de Laplace se rescribe como

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \phi - \frac{1}{r^2} \hat{\mathbb{L}}^2 \phi = 0$$

Proporcionamos en este caso.

$$\phi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y(\theta, \varphi) \rightarrow \frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) = \frac{1}{Y(\theta, \varphi)} \hat{\mathbb{L}}^2 Y(\theta, \varphi) = l(l+1)$$

Notemos que esto se simplifica a lo siguiente

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) = l(l+1) R(r) \quad \text{y que}$$

$$\rightarrow R(r) = A_r r^l + B_r r^{-l-1}$$

$$\hat{\mathbb{L}}^2 Y(\theta, \varphi) = l(l+1) Y(\theta, \varphi)$$

Anque podemos seguir separando variables
operador difinir
Un escalar Fueria propia

Si $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$ entonces

$$\hat{\mathbb{L}}^2 Y(\theta, \varphi) = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} = l(l+1) Y(\theta, \varphi)$$

$$= -\frac{\Phi(\varphi)}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + \frac{\Theta(\theta)}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = l(l+1) \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$$

Multiplicando por $\sin^2 \theta / Y(\theta, \varphi)$ y reacomodando términos, podemos ver que

$$\frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + \sin^2 \theta l(l+1) = \frac{-1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = m^2$$

Contante separacion de variables

Desarrollando ahora la parte polar

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + (l(l+1) \sin^2 \theta - m^2) \Theta(\theta) = 0$$

$$\Phi = A_m e^{im\varphi} + B_m e^{-im\varphi}$$

Notemos que $m \neq 0$ para que

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi)$$

y con el cambio de variable $u = \cos \theta \Rightarrow \frac{d}{d\theta} \Theta = \frac{d}{du} \Theta = \frac{d}{du} \frac{d\Theta}{du} = -\sin \theta \frac{d\Theta}{du}$

$$\Rightarrow -\sin^2 \theta \frac{d}{du} \left(-\sin \theta \frac{d\Theta}{du} \right) + [l(l+1) \sin^2 \theta - m^2] \Theta(u) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{du} \left[(1-u^2) \frac{d\Theta}{du} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{(1-u^2)} \right] \Theta(u) = 0$$

Ecuación asociada de Legendre

De nuevo, hay dos familias de soluciones

$$P_e^m(u) + Q_e^m(u)$$

para estos divergen en $u \rightarrow \pm 1$

contener las descontinuidades en la mayoría de los casos

Las soluciones son las funciones asociadas de Legendre y se impone que $|l| \leq |m| \leq l$.

Con todo esto, vemos que en general

$$\phi(r) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) P_e^m(u \cos \theta) e^{im\varphi}$$

Lo más usual es sumar estos dos términos con su adecuada normalización. El resultado es lo que se conoce como los armónicos esféricos (escalares).

→ Armónicas esféricas vectoriales → Hay más de una definición

Convenio del Jackson
↓
Los Productos de funciones asociadas de Legendre y funciones armónicas

• Funciones asociadas de Legendre

$$P_e^m(u); \text{ si } m=0 \text{ entonces } P_e^0(u) = P_e(u)$$

↓ Fórmula de Rodrigues:

$$\text{si } m > 0 \text{ ent. } P_e^m(u) = (-1)^{m/2} (1-u)^{m/2} \frac{d^m}{du^m} P_e(u)$$

$$\text{Para } m < 0 \quad P_e^m(u) = P_e^{-|m|} = (-1)^{|m|} \frac{(|\lambda|-|\lambda|)!}{(\lambda+|\lambda|)!} P_e^{|\lambda|}(u)$$

Ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 du P_e^m(u) P_{e'}^m(u) = \frac{2}{2e+1} \frac{(2e+1)!}{(e-m)!} \delta_{e,e'}$$

Evaluación en los extremos

$$\text{Si } m=0 \quad P_e^0(-1) = P_e^0(1) = 1 \quad \text{y} \quad P_e^0(-1) = (-1)^0 = 1 \quad \text{En general}$$

$$\text{Si } m \neq 0 \quad P_e^m(-1) = 0 \quad (\text{ver Rodrigues})$$

$$P_e(-1) = 1, \quad P_e(-1) = (-1)^1 = -1$$

↓ Claves de paridad de las funciones

↓ Si $e \neq e'$ son las funciones de Legendre

↓ Ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 du P_e(u) P_{e'}(u) = \frac{2}{2e+1} \delta_{e,e'}$$

Evaluación en los extremos

• Funciones armónicas

$$\int_0^{2\pi} d\phi e^{im\phi} e^{-im'\phi} = 2\pi \delta_{m,m'}$$

Armónicas esféricas: Habiendo definido $Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta) \Phi(\phi)$. Como nos conviene normalizarlos,

definimos

$$Y_e^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2e+1}{4\pi}} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_e^m(\cos\theta) e^{im\phi},$$

Esta definición nos permite la siguiente condición de ortogonalidad

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta Y_e^m(\theta, \phi) Y_{e'}^{m'}(\theta, \phi) = \delta_{e,e'} \delta_{m,m'} = \int_{-1}^1 du Y_e^m(\theta, \phi) Y_{e'}^{m'}(\theta, \phi)$$

Además $Y_e^{-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_e^m(\theta, \phi)$ → Relación con el complejo conjugado

$$Y_e^m(\pi-\theta, \pi-\phi) = (-1)^l Y_e^{-m}(\theta, \phi)$$

$$Y_e^m(\pi-\theta, \pi+\phi) = (-1)^l Y_e^m(\theta, \phi) \rightarrow Paridad$$

Notemos que

$$\hat{Y}_e^m(\theta, \phi) = l(l+1) Y_e^m(\theta, \phi)$$

$$\hat{Y}_e^m(\theta, \phi) = m Y_e^m(\theta, \phi)$$

$$\hat{\phi} = -i \partial_\phi$$

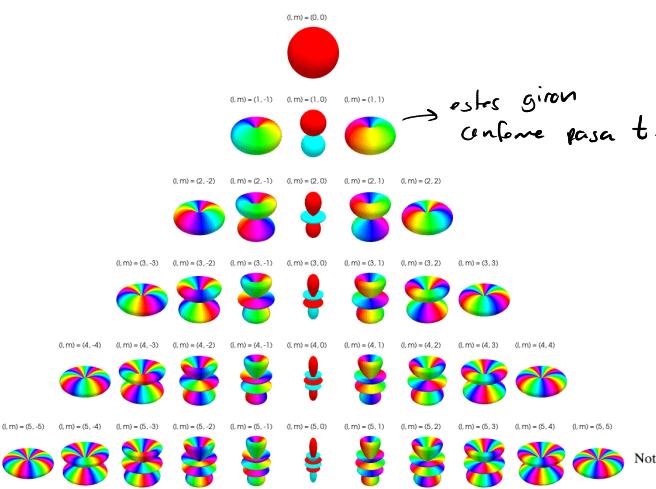
Aunque no se prueba, recordamos que las armónicas esféricas son una base completa y por tanto

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_e^m(\theta, \phi) Y_{e'}^{m'}(\theta', \phi') = \delta(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \delta(\theta-\theta') \delta(\phi-\phi') = \delta(\cos\theta - \cos\theta') \delta(\phi - \phi')$$

Y con todo esto, el potencial que obedece Laplace, está dado por

$$\phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^m} \right) Y_e^m(\theta, \phi) \rightarrow \text{Antes de continuar, veamos el comportamiento de las}$$

$$Y_e^m(\theta, \phi)$$



Spherical Harmonics $Y_{lm}(\theta, \phi)$

$$l=0 \quad Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$l=1 \quad \begin{cases} Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi} \\ Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cos \theta \end{cases}$$

$$l=2 \quad \begin{cases} Y_{22} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi} \\ Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi} \\ Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$l=3 \quad \begin{cases} Y_{33} = -\frac{1}{4\sqrt{35}} \sin^3 \theta e^{3i\phi} \\ Y_{32} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta e^{2i\phi} \\ Y_{31} = -\frac{1}{4\sqrt{21}} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{i\phi} \\ Y_{30} = \sqrt{\frac{7}{32\pi}} (\frac{3}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta) \end{cases}$$

harmonic with $m=0$ is only a constant, $Y_{00}(\theta, \varphi) = (4\pi)^{-1/2}$. For $\ell=1$, the spherical harmonics read as follows,

$$Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} (\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}), \quad (2.63a)$$

$$Y_{11}(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi}, \quad Y_{1-1}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi}. \quad (2.63b)$$

The spherical harmonics with $\ell=2$ are of second order in the trigonometric functions $\sin \theta$ and $\cos \theta$, and Y_{20} is proportional to $P_2(\cos \theta) = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}$,

$$Y_{20}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}), \quad (2.64a)$$

$$Y_{21}(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi}, \quad Y_{2-1}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{-i\varphi}, \quad (2.64b)$$

$$Y_{22}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi}, \quad Y_{2-2}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\varphi}. \quad (2.64c)$$

Note that, for $m=0$,

$$Y_{l0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta)$$

Ahora, como Y_e^m son una base completa, entonces

$$g(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_e^m(\theta, \phi); \text{ con } A_{lm} = \iint_{4\pi} d\Omega Y_e^m(\theta, \phi) g(\theta, \phi)$$

$$\text{Notemos que } g(\theta=0, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_e^m(0, \phi) \xrightarrow{\text{Pero}} Y_e^m(0, \phi) \sim P_e^m(u=1) e^{im\phi}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} P_e^m(1) e^{im\phi} \delta_{m,0} = P_e^m(1) e^{im\phi} \delta_{m,0} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} A_{l0} \underbrace{\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}}_{=1} P_e^m(1) = \sum_{l=0}^{\infty} A_{l0} \underbrace{\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}}_{\text{se va a la derecha}}$$

Por lo general

$$A_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \iint_{4\pi} d\Omega P_e(\cos \theta) g(\theta, \phi)$$

Este resultado nos lleva al teorema de adición

Consideremos el vector \vec{r} y \vec{r}' con direcciones θ, ϕ y θ', ϕ' , tales que $\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}| |\vec{r}'|} = \cos \gamma$

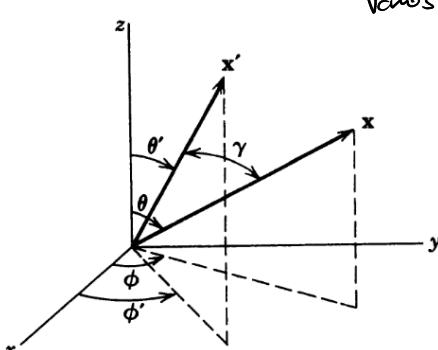
Vamos a probar que

$$P_e(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_e^m(\theta', \phi') Y_e^m(\theta, \phi)$$

$$\text{con } \cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$$

Primero, consideremos a \vec{r}' como un punto fijo en el espacio entonces $P_e(\cos \gamma)$ es una función de θ, ϕ , con parámetros θ', ϕ' .

$$\Rightarrow P_e(\cos \gamma) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{e'm}(\theta', \phi') Y_e^m(\theta, \phi) \xrightarrow{\text{Parámetros}} \text{Dependencia angular}$$



Notemos por un momento que

si $\vec{r}' = r' \hat{e}_z$, entonces γ es el ángulo polar usual y por tanto γ y ϕ serían el azimutal

$$\nabla_{\vec{r}'}^2 P_e(\cos \gamma) + \frac{l(l+1)}{(r')^2} P_e(\cos \gamma) = 0; \text{ donde } \nabla_{\vec{r}'}^2 = \nabla_{\vec{r}'} \cdot (\nabla_{\vec{r}'}),$$

Por lo tanto, $P_e(\cos \gamma)$ sólo puede depender de $l=l'$ y nada más. Este hecho nos lleva a lo siguiente

Como esto es un escalar entonces el resultado anterior es válido para cualquier dirección de \vec{r}' .

$$P_e(\cos\varphi) = \sum_{m=-l}^l A_{em}^{(0', \ell')} Y_\ell^m(\theta, \ell') \rightarrow \text{ya considero que solo } l'=l \text{ contribuye}$$

$$\hookrightarrow A_{em}^{(0', \ell')} = \iint_{4\pi} d\Omega Y_\ell^m(\theta, \ell) P_e(\cos\varphi) \quad \dots \quad (1)$$

Para determinar los coeficientes $A_{em}^{(0', \ell')}$ emplearemos resultados anteriores aplicados a una función $g=g(x, \beta)$ particular

$\xrightarrow{x \rightarrow \text{Polar}} \theta = \theta(x, \beta)$ medidas respecto al sistema tal que $\vec{r}' = r' \hat{e}_r'$, donde

$$\nabla_{\vec{r}'}^2 P_e(\cos\varphi) + \frac{l(l+1)}{(r')^2} P_e(\cos\varphi) = 0$$

$$\begin{aligned} g(x, \beta) &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_\ell^m(\theta, \ell) \rightarrow \text{función a definir} \\ &= \sum_{\ell', m'} A'_{em'} Y_\ell^{m'}(x, \beta) \rightarrow \text{expansión en armónicos esféricicos} \\ &= \sum_{m'} A'_{em'} Y_\ell^{m'}(x, \beta) \quad \dots \quad (2) \end{aligned}$$

\hookrightarrow En general $A'_{em'} = \iint_{4\pi} d\Omega Y_\ell^{m'}(x, \beta) g(x, \beta)$

Sólo contribuye $l'=l$ debido que $\nabla_{\vec{r}'}^2 P_e(\cos\varphi) + \frac{l(l+1)}{(r')^2} P_e(\cos\varphi) = 0$ es válido + sup. de simetría

$$\text{y tenemos } m=0, \text{ entonces } A'_{e0} = \iint_{4\pi} d\Omega Y_\ell^0(x, \beta) g(x, \beta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \iint_{4\pi} d\Omega P_e(\cos\varphi) \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_\ell^0(\theta, \ell)$$

$$\Rightarrow A'_{e0} = \iint_{4\pi} d\Omega P_e(\cos\varphi) Y_\ell^0(\theta, \ell) = A_{em}^{(0', \ell)} \rightarrow \text{los que estamos buscando} \quad (3)$$

$$\text{Pero notemos que } g(x, \beta) \Big|_{\beta=0} = \sum_{m'} A'_{em'} Y_\ell^{m'}(0, \beta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} A'_{e0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} A_{em}^{(0', \ell)}$$

$$\text{Esto es: } g(x, \beta) \Big|_{\beta=0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_\ell^0(\theta, \beta) \Big|_{\beta=0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} A_{em}^{(0', \ell)} \Rightarrow A_{em}^{(0', \ell)} = \frac{4\pi}{2l+1} Y_\ell^0(\theta(x, \beta), \ell) \Big|_{\beta=0} \quad \text{en este caso } \theta \rightarrow \theta' \ell \rightarrow \ell'$$

$$= \frac{4\pi}{2l+1} Y_\ell^0(\theta', \ell)$$

Sustituyendo este resultado en (1) demostremos finalmente

$$P_e(\cos\varphi) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_\ell^m(\theta', \ell) Y_\ell^m(\theta, \ell)$$

θ, θ' ángulo entre los sistemas coordinados

$\cos\varphi = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\ell - \ell')$

Teorema de adición

Un resultado notorio es para $r=0 \Rightarrow P_e(\cos\varphi) = P_e(1)=1$

$$\Rightarrow \theta' \rightarrow 0, \ell \rightarrow \ell'$$

$$\Rightarrow \sum_{m=-l}^l |Y_\ell^m(\theta, \ell)|^2 = \frac{4\pi}{2l+1} \rightarrow \text{Regla de sumación.}$$

Ejemplo de análisis esféricos



$$\phi(r_0, \theta, \phi) = \phi_0 \sin \theta \sin \phi \quad \text{en este caso } \phi(r) = \begin{cases} \phi_e = \sum_{l,m} A_{em} r^l Y_e^m(\theta, \phi) \\ \phi_s = \sum_{l,m} B_{em} r^{l-1} Y_e^{-m}(\theta, \phi) \end{cases}$$

Como el potencial es continuo

$$\phi_e(r=a) - \phi_s(r=a) = \sum_{l,m} (A_{em} a^l - B_{em} a^{l-1}) Y_e^m(\theta, \phi) = 0 \quad \text{por ser una base orthonormal}$$

$$\Rightarrow B_{em} = A_{em} a^{2m}$$

$$z = r \sin \theta \cos \phi =$$

y para determinar A_{em} , rechazos en la esfera

$$\phi(r=a) = \phi_0 \sin \theta \sin \phi = \phi_e(r=a) = \sum_{l,m} A_{em} a^l Y_e^m(\theta, \phi) \Rightarrow A_{em} = \frac{\int \int d\Omega Y_e^m(\theta, \phi) \frac{\phi_0 \sin \theta \sin \phi}{a^l}}{4\pi}$$

$$\text{Notemos que } \begin{cases} Y_1^1(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi} \\ Y_1^{-1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi} \end{cases} \Rightarrow Y_1^1(\theta, \phi) + Y_1^{-1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta (-e^{i\phi} + e^{-i\phi}) = -2i \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta \sin \phi$$

Por lo tanto

$$\phi(r=a) = \phi_0 \left(\frac{Y_1^1(\theta, \phi) + Y_1^{-1}(\theta, \phi)}{-2i} \right) \sqrt{\frac{8\pi}{3}} = \phi_0 \sin \theta \sin \phi$$

$$\Rightarrow A_{em} = \frac{\phi_0}{a^l} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{1}{(-2i)} \int \int d\Omega Y_e^m(\theta, \phi) / (Y_1^1(\theta, \phi) + Y_1^{-1}(\theta, \phi)) \rightarrow \text{Entonces sólo contribuye } l=1, m=\pm 1$$

$$A_{em} = \frac{1}{-2i} \frac{\phi_0}{a^l} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \delta_{l,1} \left[\delta_{m,1} + \delta_{m,-1} \right]$$

Sustituyendo en el potencial

$$\begin{aligned} \phi_e(r, \theta, \phi) &= \sum_{l,m} A_{em} r^l Y_e^m(\theta, \phi) = \frac{\phi_0}{-2i} \sum_{l,m} \left(\frac{r^l}{a^l} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \delta_{l,1} \left[\delta_{m,1} + \delta_{m,-1} \right] \right) Y_e^m(\theta, \phi) \\ &= \frac{\phi_0}{-2i} \left(\frac{r}{a} \right) \sum_m \sqrt{\frac{8\pi}{3}} (Y_1^1(\theta, \phi) \delta_{m,1} + Y_1^{-1}(\theta, \phi) \delta_{m,-1}) \\ &= \phi_0 \left(\frac{r}{a} \right) \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \underbrace{Y_1^1(\theta, \phi) + Y_1^{-1}(\theta, \phi)}_{-2i} \\ &= \phi_0 \left(\frac{r}{a} \right) \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \left[\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta \left(-e^{i\phi} + e^{-i\phi} \right) \right] = \phi_0 \left(\frac{r}{a} \right) \sin \theta \sin \phi \end{aligned}$$

$$\text{y } \phi_s(r, \theta, \phi) = \sum_{l,m} \frac{B_{em}}{r^{l+1}} Y_e^m = \sum_{l,m} \frac{A_{em} a^{2m}}{r^{l+1}} Y_e^m = \sum_{l,m} (A_{em} a^{2l}) \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} Y_e^m(\theta, \phi)$$

y de forma análoga

$$\phi_s(r, \theta, \phi) = \phi_0 \left(\frac{a}{r} \right) \sin \theta \sin \phi$$