El oscilador → Ley de Hooke → $\boxed{\vec{F} = -k\vec{r}}$

22/10/21

↳ se opone al movimiento

Habíamos visto que, en general

$$m\ddot{x} = -kx \to 1\ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{=\omega_0^2}x = 0 \to \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Ecuación de movimiento

$=\omega_0^2$ → Frecuencia angular para generalizar la solución

Obtuvimos dos soluciones

$x_1 = A\cos(\omega_0 t + B)$

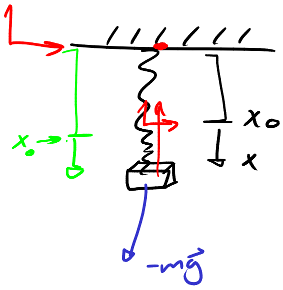
$x_2 = A'\cos(\omega_0 t) + B'\sin(\omega_0 t)$

Probemos que son equivalentes

Recordemos que $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$$\Rightarrow A\cos(\omega t + B) = \underbrace{A\cos B}_{A'}\cos\omega_0 t \mp \underbrace{A\sin B}_{B'}\sin\omega_0 t$$

¿Qué pasa si hay una fuerza cons~~tante~~? El peso, por ejemplo



Ecuación de movimiento

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x + x_0) = -k(x + x_0) - mg$$

Para simplificar $x_0 = 0$, ó $\chi = x + x_0$

Ec. oscilador armónico

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - g \to [\ddot{x} + \omega_0^2 x] = -g \quad \ldots (1)$$

Supongamos que $x(t) = x_h(t) = A\cos(\omega t + B)$

$\ddot{x} = A(-\omega_0^2)\cos(\omega_0 t) = \omega^2 x$

pero $\ddot{x}_h + \omega^2 x_h = 0$ → No nos va a dar el resultado

Propongo $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ → adivinemos $x_p(t)$

Sabemos que si $\ddot{y} = -g \to y = at^2 + bt + c$. Propongamos algo semejante

$x = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$

$\dot{x} = 2a_2 t + a_1$

$\ddot{x} = 2a_2$

$$-g = \ddot{x} + \omega_0^2 x = \underbrace{(a_2 t^2 + a_1 t + a_0)}_{x}\omega^2 + \overbrace{2a_2}^{\ddot{x}}$$

$$0t^2 + 0t + (-g)t^0 = [\omega_0^2 a_2]t^2 + t(\omega_0^2 a_1) + [a_0\omega_0^2 + 2\cancel{a_2}^{0}]$$

$\omega_0^2 a_2 = 0$, $a_2 = 0$ $\qquad$ $\omega_0^2 a_1 = 0$, $a_1 = 0$ $\qquad$ $-g = a_0\omega_0^2 \Rightarrow a_0 = -\frac{g}{\omega_0^2}$ → $x_p(t) = -\frac{g}{\omega_0^2}$

$$\therefore \; x(t) = x_h(t) + x_p(t) = -\frac{g}{\omega_0^2} + A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

↳ desplazamiento de la posición de equilibrio

↳ baja el sistema $\frac{g}{\omega_0^2}$

Esto lo hubiéramos sabido si no sólo resolviéramos la ecuación, sino también hubiéramos considerado la física

Podemos llegar a la misma solución de un forma más fácil:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + g\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} = \ddot{x} + \omega_0^2\left(x + \frac{g}{\omega_0^2}\right) = 0 \qquad \bar{x} = x + c \rightarrow \frac{d}{dt}(\bar{x}) = \frac{d}{dt}(\bar{x}+c) = \frac{d}{dt}\bar{x}$$

$$\ddot{\bar{x}} = \frac{d^2}{dt^2}(\bar{x}+c) = \ddot{\bar{x}}$$

si $\bar{x} = \left(x + \frac{g}{\omega_0^2}\right)$, ent. $\ddot{\bar{x}} + \omega_0^2 \bar{x} = 0$

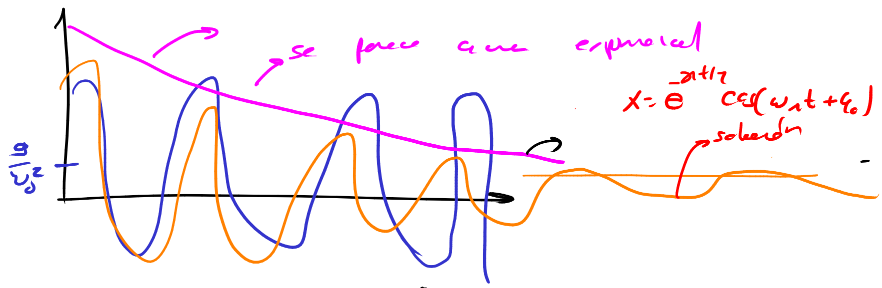
$$\bar{x} = A\cos(\omega_0 t) = x + \frac{g}{\omega_0^2} \rightarrow x = -\frac{g}{\omega_0^2} + A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Ahora, supongamos que además hay fricción $F = -m\gamma\dot{\bar{x}}$ → velocidades bajas → Medios viscosos

$$m\ddot{\bar{x}} = -k\bar{x} - mg - m\gamma\dot{\bar{x}} \longrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\gamma\dot{x}$$

Definimos $x = \bar{x} + \frac{g}{\omega_0^2}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ → Este problema brinda más herramientas matemáticas. → Pasemos en la física

$$\underbrace{\ddot{x} + \omega_0^2 x}_{\text{Oscilaciones}} + \underbrace{\gamma\dot{x}}_{\text{Fricción}} = 0$$



$$\frac{\omega_0 \sin(\omega_0 t)}{\omega_0\gamma t} = \sin(\omega_0 t)\omega_0\gamma$$

Tarea $x(t) = \sin(\omega t)$ → Muestra que no es solución $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0 x = 0$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ $\quad \boxed{x(t) = e^{\lambda t}} \rightarrow \dot{x} = \lambda e^{\lambda t} \rightarrow \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$ $\quad i|\omega_0| \rightarrow \sqrt{-\omega_0^2} = \omega_0\sqrt{-1} = i\omega_0$

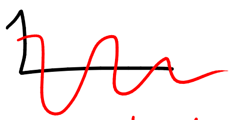
$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0}(\underbrace{\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2}_{=0}) = 0 \qquad \lambda = \frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$

$$x = e^{\gamma t/2}\left(A e^{\sqrt{\ }t} + B e^{-\sqrt{\ }t}\right)$$

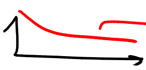
si $\gamma = 0$ → $x = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} = (A+B)\cos(\omega_0 t) + i(A-B)\sin(\omega_0 t)$

$\bar{x} := \mathrm{Re}[x] \rightarrow \ddot{\bar{x}} + \gamma\dot{\bar{x}} + \omega_0^2 = 0$

$\bar{\bar{x}} = \mathrm{Im}[x] \rightarrow \ddot{\bar{\bar{x}}} + \gamma\dot{\bar{\bar{x}}} + \omega_0^2 = 0$



si $\frac{\gamma}{2} = \omega_0$ → $\lambda = \omega_0 \pm \sqrt{1-1} = \omega_0$ $\qquad x = e^{\lambda t} = e^{\omega_0 t}$



→ Sobre amortiguado

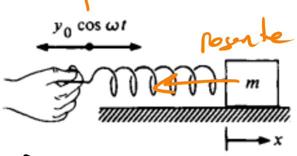
si $\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 < 0 \rightarrow \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} = \sqrt{(-1)\left[\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\right]} = \sqrt{-1}\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} = i\omega_1$

$$e^{a+b} = e^a e^b \longrightarrow e^{\left(\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\ }\right)t},\ x = e^{-\gamma t/2} e^{\pm i\omega_1 t} = A_1 e^{-\gamma t/2}\cos(\omega_1 t + \varphi_0)$$

Resonancia

Qué pasa si hay otros movimientos oscilatorios

Fuerza externa



$$\rightarrow m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + mf\cos(\omega t)$$

"Omega cero" $\omega = \sqrt{k/m}$ → "omega" Puede tomar cualquier valor.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f\cos(\omega t) \qquad x = x_h(t) + x_p(t)$$

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 A\cos(\omega t)$$

$$A\cos(\omega t)\left[-\omega^2 + \omega_0^2\right] = f\cos(\omega t)$$

$$\cos(\omega t)\left[\underbrace{A(\omega_0^2 - \omega^2) - f}_{=0}\right] = 0 \qquad A(\omega) = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

sustituyen

$$x(t) = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t)$$

qué pasa si $\omega_0 = \omega$ $\quad x \xrightarrow[\omega \to \omega_0]{} \infty$

¿Qué pasa si consideramos fricción?

$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f\cos(\omega t) \longrightarrow$ Proponemos lo mismo $\quad x(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \varphi_0)$

$$\Rightarrow -\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) - \gamma\omega \sin(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 \cos(\omega t + \varphi) = \frac{f\cos(\omega t)}{A}$$

$\cos(A+B) \leftarrow \cos(\omega t + \varphi_0) = \cos\varphi_0 \cos(\omega t) - \sin\varphi_0 \sin(\omega t)$

$\sin(\omega t + \varphi_0) = \sin\varphi_0 \cos(\omega t) + \cos\varphi_0 \sin(\omega t)$

$$\Rightarrow -\omega^2[\cos\varphi_0 \cos(\omega t) - \sin\varphi_0 \sin(\omega t)] - \gamma\omega[\sin\varphi_0 \cos(\omega t) + \cos\varphi_0 \sin(\omega t)] +$$
$$+ \omega_0^2[\cos\varphi_0 \cos(\omega t) - \sin\varphi_0 \sin(\omega t)] = \frac{f}{A}\cos(\omega t) + 0\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \cos(\omega t)[\underbrace{-\omega^2\cos\varphi_0 - \gamma\omega\sin\varphi_0 + \omega_0^2\cos\varphi_0}_{= f/A}] + \sin(\omega t)[\underbrace{\sin\varphi_0\,\omega^2 - \gamma\omega\cos\varphi_0 - \omega_0^2\sin\varphi_0}_{=0}] = \frac{f}{A}\cos(\omega t)$$

$$\boxed{\sin\varphi_0(\omega^2 - \omega_0^2) = \gamma\omega\cos\varphi_0}$$

$$\varphi_0 = \arctan\left(\frac{\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)$$

$$\left(-\frac{f}{A}\right)^2 = [\cos\varphi_0(\omega^2 - \omega_0^2) + \gamma\omega\sin\varphi_0]^2$$
$$= \cos^2\varphi_0(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\gamma\omega)^2\sin^2\varphi_0 + 2\cos\varphi_0(\omega^2 - \omega_0^2)\sin\varphi_0(\gamma\omega)$$
$$= \cos^2\varphi_0(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\gamma\omega)^2\sin^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \cos^2\varphi_0(\gamma\omega)^2$$
$$= \cos^2\varphi_0[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega\gamma)^2] + \sin^2\varphi[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega\gamma)^2]$$
$$= [(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega\gamma)^2]\,\cancel{(\sin^2\varphi_0 + \cos^2\varphi_0)}^{\,1}$$

$$A(\omega) = \frac{f}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega\gamma)^2]^{1/2}} \longrightarrow x(t) = A(\omega)\cos\left(\omega t + \arctan\left(\frac{\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)\right)$$

si $\omega = \omega_0 \Rightarrow A(\omega_0) = \dfrac{f}{\omega_0\gamma}$

$\varphi_0(\omega_0) = \pi/2$

$x(t) = \dfrac{f}{\omega_0\gamma}\sin(\omega_0 t)$

$\tan(\pi) = \dfrac{\sin\pi}{\cos\pi} = 0$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sin(\pi/2)}{\cos(\pi/2)} = \infty$

Lorentziana

Distribución de Cauchy

$$\boxed{m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - mg - \gamma\dot{x} + fm\cos(\omega t)}$$

$$x(t) - \frac{g}{\omega_0^2} = A(\omega)\cos\left(\omega t + \arctan\left(\frac{\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)\right)$$

$$F(x) = \underbrace{F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)}_{= -g - kx} + \ldots$$

Ley Hook

$f/\omega_0\gamma$

$\gamma \ll \omega$