Momento magnético

Anteriormente se había obtenido el resultado que $\frac{1}{\|\vec r-\vec r'\|}=\frac{1}{r}+\frac{\vec r'\cdot\vec r}{r^3}+\dots$

y por tanto, para el potencial vectorial

$$\vec A=\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\frac{\vec J(\vec r')}{\|\vec r-\vec r'\|}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\underbrace{\int d^3r'\vec J(\vec r')}+\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\int d^3r'\vec J(\vec r')\vec r'\cdot\vec r+\dots$$

Vamos a probar que este término es nulo pero para esto, probemos el siguiente teorema:

Teorema: Si $\vec J(\vec r)$ es la densidad volumétrica de carga, tal que $\nabla\cdot\vec J=-\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$, entonces para $f(\vec r), g(\vec r)\in C^1$, se cumple que

$$\int d^3r\left[f(\vec r)\vec J(\vec r)\cdot\nabla g(\vec r)+g(\vec r)\vec J(\vec r)\nabla f(\vec r)\right]=0$$

Prueba Notemos que $\nabla\cdot(g(\vec r)f(\vec r)\vec J(\vec r))=[g(\vec r)f(\vec r)]\,\cancelto{0}{\nabla\cdot\vec J(\vec r)}+\vec J(\vec r)\cdot\nabla[g(\vec r)f(\vec r)]$

$$=\vec J(\vec r)\cdot[(\nabla g(\vec r))f(\vec r)+g(\vec r)\nabla f(\vec r)]$$

$$=f(\vec r)\vec J(\vec r)\cdot\nabla g(\vec r)+g(\vec r)\vec J(\vec r)\cdot\nabla f(\vec r)\ .$$

Por teorema de la divergencia $\int_V d^3r\,\nabla\cdot[g(\vec r)f(\vec r)\vec J(\vec r)]=\int_{\partial V}d^2r\,\hat n\cdot(g(\vec r)f(\vec r)\vec J(\vec r))=0$

si $\partial V\to\infty$ pues $\vec J(\vec r\to\infty)=0$

$$\therefore\int_V d^3r\,\nabla\cdot[g(\vec r)f(\vec r)\vec J(\vec r)]=\int_V d^3r\left[f(\vec r)\vec J(\vec r)\cdot\nabla g(\vec r)+g(\vec r)\vec J(\vec r)\cdot\nabla f(\vec r)\right]=0$$

Regresando a la prueba que nos interesa, escojamos $f(\vec r)=1$ y $g(\vec r)=r_i$; $r_i=x,y,z$

$$f(\vec r)\vec J(\vec r)\cdot\nabla g(\vec r)+g(\vec r)\vec J(\vec r)\cdot\cancelto{0}{\nabla f(\vec r)}=\cancelto{1}{f(\vec r)}\vec J(\vec r)\cdot\nabla g(\vec r)=\vec J\cdot\nabla(r_i)=\vec J\cdot\hat e_i$$

$$\Rightarrow\int\left[f(\vec r)\vec J(\vec r)\cdot\nabla g(\vec r)+g(\vec r)\vec J(\vec r)\cdot\nabla f(\vec r)\right]d^3r=\int\vec J\cdot\hat e_i\,d^3r=\int J_i\,d^3r=0$$

$$\Rightarrow\underbrace{\int\vec J(\vec r)\,d^3r=0}$$

pero esta sería la integral que definiría al monopolo magnético

Es decir, este siempre es nulo

Con esto mostramos que el término multipolar que más contribuye en magnetostática es el siguiente:

$$\vec A=\underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec r}{r^3}\cdot\int d^3r'\vec J(\vec r')\vec r'}+\dots$$

Término dipolar magnético

Para definir un análogo a $\vec p$ para magnético, volvamos a emplear el teorema anterior pero ahora con

$$f(\vec r')=r_i'\ \ y\ \ g(\vec r')=r_j'$$

Esto es: $f(\vec r)\vec J(\vec r')\cdot\nabla g(\vec r)+g(\vec r)\vec J(\vec r')\cdot\nabla f(\vec r')=r_j\vec J\cdot\hat e_i+r_i\vec J\cdot\hat e_j=r_jJ_i+r_iJ_j\Rightarrow\int d^3r'(r_iJ_j+r_jJ_i)=0$

por lo tanto $\vec r\cdot\int d^3r'\vec r'\vec J(\vec r')\longrightarrow\vec r\cdot\int d^3r'\vec r'J_i=\sum_j r_j\int d^3r' r_j'J_i$

Ls fijémonos en la i-ésima componente

$$=-\frac{1}{2}\sum_j r_j\int d^3r'\overbrace{(r_iJ_j-r_jJ_i)}$$

Parecen elementos de un producto cruz

$$=-\frac{1}{2}\sum_{j,k}\epsilon_{ijk}r_j\int d^3r'(\vec r'\times\vec J(\vec r'))_k$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\vec r\times\int d^3r'(\vec r'\times\vec J(\vec r'))\right]_i$$

Con este resultado, podemos ver que

$\equiv$ Momento dipolar magnético: $\vec{m}$

$$A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\int d^3r'\,\vec{r}'\,\vec{J}(\vec{r}') + \dots = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\underbrace{\int d^3r'\,\frac{[\vec{r}'\times\vec{J}(\vec{r}')]}{2}}\times\vec{r} + \dots$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_{dip}(\vec{r}) + \dots \qquad \boxed{\vec{A}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}\ ; \quad \vec{m} = \int d^3r'\,\frac{\vec{r}'\times\vec{J}(\vec{r}')}{2}}$$

$\vec{m}$ No es función de $\vec{r}$.

El campo magnético asociado a este dipolo se denomina $\vec{B}_{dip} = \nabla\times\vec{A}_{dip}$ y para calcularlo recordamos que

$$\nabla\times(\psi\vec{A}) = \nabla\psi\times\vec{A} + \psi\nabla\times\vec{A} \qquad y \qquad \nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + \vec{A}\,\nabla\cdot\vec{B} - \vec{B}\,\nabla\cdot\vec{A}$$

$\psi = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}$

$\vec{A} = \vec{m}\times\vec{r}$

$\vec{A} = \vec{m} \to$ que no depende de $\vec{r}$

$\vec{B} = \vec{r}$

$$\vec{B}_{dip} = \nabla\times\vec{A}_{dip} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\times(\vec{m}\times\vec{r}) + \frac{1}{r^3}\nabla\times(\vec{m}\times\vec{r})\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -3r^{-4}\frac{\partial r}{\partial r_i} = -\frac{3}{r^4}\frac{1}{2r}2r_i$$

$$\Rightarrow \nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3\vec{r}}{r^5}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{-\frac{3\vec{r}}{r^5}\times(\vec{m}\times\vec{r}) + \frac{1}{r^3}\left[-(\vec{m}\cdot\nabla)\vec{r} + \vec{m}\,\nabla\cdot\vec{r}\right]\right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{-\frac{3}{r^5}\vec{r}\times(\vec{m}\times\vec{r}) - \frac{1}{r^3}\left[(\vec{m}\cdot\nabla)\vec{r} - \vec{m}\,\underbrace{\nabla\cdot\vec{r}}_{=3}\right]\right\}$$

$$\vec{r}\times(\vec{m}\times\vec{r}) = \vec{m}(\vec{r}\cdot\vec{r}) - \vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{m})$$
$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{3}{r^5}\left(-\cancel{\vec{m}r^2} + \vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{m})\right) + \cancel{\frac{3\vec{m}}{r^3}} - \frac{(\vec{m}\cdot\nabla)\vec{r}}{r^3}\right\}$$

$$\vec{m}\cdot\nabla = \sum_i m_i\frac{\partial}{\partial r_i}$$

$$(\vec{m}\cdot\nabla)\vec{r} = \sum_i m_i\frac{\partial}{\partial r_i}\vec{r} = \sum_i m_i\hat{e}_i = \vec{m}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{m})}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right]$$

$\hookrightarrow$ que es la misma forma que se tenía para el campo de un dipolo eléctrico

= Algunas propiedades del dipolo magnético

Recordemos que $\vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r'\,[\vec{r}'\times\vec{J}(\vec{r}')] \longrightarrow$ Si consideramos que la corriente se distribuye en un circuito cerrado confinado a un plano

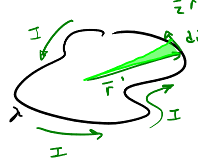
$$\vec{J}(\vec{r}') = I\,\delta^2(\vec{r}-\vec{r}')$$

$\to$ área del circuito

$$\Rightarrow \vec{m} = I\int_\gamma \frac{\vec{r}'\times d\vec{r}'}{2} = I\int_\gamma d\vec{a} = IA\hat{n}$$

altura, base

$$\frac{1}{2}\vec{r}'\times d\vec{r}' \approx \hat{n}\frac{r\,dr}{2} = \hat{n}\,da$$



$\vec{m} = IA\hat{n}$

$\underbrace{\quad}$ momento dipolar magnético de una espira $\hookrightarrow \vec{m} = \lim_{\substack{I\to\infty \\ A\to 0}} IA\hat{n}$

Otro caso de interés es cuando se tiene una colección de partículas cargadas

$$\vec{J}(\vec{r}) = \sum_i q_i\vec{v}_i\,\delta^3(\vec{r}-\vec{R}_i) \Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{2}\sum_j\int d^3r'\,\vec{r}'\times(q_i\vec{v}_i)\,\delta^3(\vec{r}'-\vec{R}_i) = \frac{1}{2}\sum_j q_i\,(\vec{r}_i\times\vec{v}_i)$$

$\hookrightarrow$ El momento angular de cada partícula es $\vec{l}_i = M_i(\vec{r}_i\times\vec{v}_i)$

$$\Rightarrow \vec{m} = \sum_j\frac{q_i}{2m_i}\vec{l}_i \longrightarrow \vec{m} = \frac{q_e}{2m}\sum_i\vec{l}_i = \frac{q_e\vec{L}}{2m}$$

Todas las partículas tienen la misma $q_i/M_i = q_e/m$

$\hookrightarrow$ Relación (clásica) entre momento angular y momento magnético

$\hookrightarrow$ Relación aproximada pues no válida para electrones

Finalmente, cabe destacar que la expresión de $\vec{B}_{dip}(\vec{r})$ es válida para $r \gg r'$, como se obtuvo previamente con $\vec{E}_{dip}(\vec{r})$. Se puede hacer el cálculo análogo para determinar $\vec{B}_{dip}$ en todo el espacio (Jackson Sec. 5.6) pero aquí sólo presentamos los resultados más relevantes:

$$\int_{r<R} \vec{B}\, d^3r' = \frac{2}{3}\mu_0 \vec{B}(\vec{0}) \quad y \quad \vec{B}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r - \vec{m}}{r^3} + \frac{8\pi}{3}\vec{m}\,\delta(\vec{r}\,')\right]$$

$$\vec{m}_e = \frac{q_e \vec{L}}{2m} g \quad g = 2(1.006\ldots)$$

Razón giromagnética. Se requiere un enfoque cuántico.

Fuerza, torca y energía

A partir la expresión de la fuerza de Lorentz $\longrightarrow$ $\vec{F} = \int d^3r' (\vec{J}\times\vec{B})$ y $\vec{M} = \int d^3r' (\vec{r}\,'\times \vec{F}) = \int d^3r' [\vec{r}\,'\times(\vec{J}\times\vec{B})]$

Expandiendo $\vec{B}$ en su serie de potencias $\vec{B}(\vec{r}) \approx \vec{B}(\vec{0}) + (\vec{r}\,'\cdot\nabla_{\vec{r}})\vec{B}(\vec{0}) + \ldots$

Entonces

$$\vec{F} \approx \int d^3r' \left[\vec{J}(\vec{r}\,')\times\left(\vec{B}(\vec{0}) + (\vec{r}\,'\cdot\nabla)\vec{B}(\vec{0})\right)\right] = \left[\cancel{\int d^3r' \vec{J}(\vec{r}\,')}^{\,0}\right]\times\vec{B}(\vec{0}) + \int d^3r' \vec{J}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}\,'\cdot\nabla_{\vec{r}})\vec{B}(\vec{0})$$

$$\Rightarrow \vec{F} \approx \int d^3r' \left[\vec{J}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}\,'\cdot\nabla_{\vec{r}})\vec{B}(\vec{0})\right]$$

Si $\vec{B} = cte$, entonces no puede haber fuerzas sobre las corrientes.

Desarrollando para la i-ésima componente

$$F_i = -\int d^3r' \left[(\vec{r}\,'\cdot\nabla_{\vec{r}})\vec{B}(\vec{0})\times\vec{J}(\vec{r}\,')\right]_i = -\sum_{jk}\epsilon_{ijk}\int d^3r' (\vec{r}\,'\cdot\nabla_{\vec{r}})B_j(\vec{0})\, J_k = -\sum_{jkl}\epsilon_{jkl}\int d^3r'\, r'_l \frac{\partial}{\partial r_l} B_j(\vec{0})\, J_k$$

$$\Rightarrow F_i = -\sum_{jk}\epsilon_{ijk}\int d^3r' \left(\sum_l (J_k r'_l)\frac{\partial}{\partial r_l}B_j(\vec{0})\right) = -\sum_{jk}\epsilon_{ijk}\left(\int d^3r' (J_k \vec{r}\,')\right)\cdot\underbrace{\nabla_{\vec{r}}[B_j(\vec{0})]}_{\text{esto ya está evaluado}}$$

Anteriormente, vimos que

$$\vec{r}\cdot\int d^3r'\, \vec{r}\,'\, \vec{J}(\vec{r}\,') = -\frac{1}{2}\vec{r}\times\int d^3r'\, \vec{r}\,'\times\vec{J}(\vec{r}\,')$$

si consideramos $\vec{r} \to \nabla_{\vec{r}} B_j(\vec{0})$

$$F_i = -\sum_{jk}\epsilon_{ijk}\left\{-\frac{1}{2}\nabla_{\vec{r}}[B_j(\vec{0})]\right)\times\int d^3r'\left(\vec{r}\,'\times\vec{J}(\vec{r}\,')\right)\Big\}_k$$

$$= -\sum_{jk}\epsilon_{ijk}\left\{\vec{m}\times\nabla_{\vec{r}}B_j(\vec{0})\right\}_k = -\sum_{jk}\epsilon_{ijk}\left\{\vec{m}\times\nabla\right\}_k B_j(\vec{0})$$

$$\Rightarrow F_i = +\sum_{jk}\epsilon_{ijk}\{\vec{m}\times\nabla\}_j B_k(\vec{0})$$

Con esto, podemos ver que $\vec{F} \approx (\vec{m}\times\nabla)\times\vec{B} = -\vec{B}\times(\vec{m}\times\nabla) = -[\vec{m}\,\cancel{(\nabla\cdot\vec{B})}^{\,0} - \nabla(\vec{B}\cdot\vec{m})]$

$$\therefore \boxed{\vec{F}_{dip} = \nabla(\vec{m}\cdot\vec{B}) = -\nabla U \Longrightarrow U = -\vec{m}\cdot\vec{B}}$$

análogo al caso de dipolos eléctricos

Para las torcas, vemos que

$$\vec{M} = \int d^3r'\, \vec{r}\,'\times(\vec{J}(\vec{r}\,')\times\underbrace{\vec{B}(\vec{r}\,')}) \approx \int d^3r' \left[\vec{r}\,'\times(\vec{J}(\vec{r}\,')\times\vec{B}(\vec{0}))\right] = \int d^3r' \left\{\vec{J}(\vec{r}\,')[\vec{B}(\vec{0})\cdot\vec{r}\,'] - \underline{\vec{B}(\vec{0})[\vec{r}\,'\cdot\vec{J}(\vec{r}\,')]}\right\}$$

Expandiendo a orden cero: $\vec{B}(\vec{r}\,') \approx \vec{B}(\vec{0})$

Vamos que esta integral se desvanece con el teorema de inicio de la sesión con $f = g = r'$

Esto es: $f(\vec{r})\vec{J}(\vec{r}\,')\cdot\nabla g(\vec{r}) + g(\vec{r})\vec{J}(\vec{r}\,')\cdot\nabla f(\vec{r}) = 2r\vec{J}\cdot(\nabla r) = 2r\vec{J}\cdot\hat{e}_r = 2\vec{J}\cdot\vec{r}\,' \Rightarrow 2\int d^3r'\, \vec{J}(\vec{r}\,')\cdot\vec{r}\,' = 0$

$$\Rightarrow \vec{M} = \int d^3r'\, \vec{J}(\vec{r}\,')[\vec{B}(\vec{0})\cdot\vec{r}\,'] = \int d^3r' (\vec{B}(\vec{0})\cdot\vec{r}\,')\vec{J}(\vec{r}\,') = \vec{B}(\vec{0})\cdot\int d^3r'\, \vec{r}\,'\vec{J}(\vec{r}\,') = -\vec{B}(\vec{0})\times\underline{\int d^3r' \frac{\vec{r}\,'\times\vec{J}(\vec{r}\,')}{2}}$$

$$\therefore \boxed{\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B}}$$