2.5.- Solución a la ecuación de Laplace

Hasta el momento hemos considerado el estudio de la ecuación de Poisson:

$\nabla^2\phi(\vec{r}) = \rho_{tot}(\vec{r})/\varepsilon_0$ y vimos que la función de Green nos permitía encontrar una solución general dado $\rho_{tot}(\vec{r})$ y condiciones a la frontera.

En particular $\phi(\vec{r}) \to G(\vec{r},\vec{r}\,')$ si $\rho_{tot}(\vec{r}) \to \delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,')$ y además

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|} + f(\vec{r},\vec{r}\,') \quad \text{con} \quad \nabla^2 f(\vec{r},\vec{r}\,')=0$$

Entonces queda la opción de calcular $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ con $f(\vec{r},\vec{r}\,')$, que es solución a la ecuación de Laplace. Adicionalmente, para regiones con $\rho_{tot}(\vec{r})=0$ hay que encontrar las soluciones del potencial al caso homogéneo. Para esto recordemos algunas propiedades de las funciones.

Expansión en funciones ortogonales

· Sea $\{U_n(x)\}$ $n\in\mathbb{Z}$ un conjunto (infinito) de funciones tales que sean

→ reales o complejas
→ cuadrado integrables
→ Definidas en un intervalo $[a,b]$

• **Ortonormalidad** (Normalizada a la unidad)

$$\boxed{\int_a^b U_n^*(x)\,U_m(x)\,dx = \delta_{n,m}}$$

complejo conjugado

Notemos que esta integral es un producto punto (se puede mostrar formalmente)

• **Completez**

Sea $f(x)$ una función cuadrado integrable en $[a,b]$. Sea f_N una aproximación tal que

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N<\infty} a_n U_n(x)$$

a_n: Son coeficientes que minimizan el error cuadrado promedio M_N

$$M_N = \int_a^b \Big|f(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n U_n(x)\Big|^2 dx$$

Notemos que

$$M_N = \int dx\, f(x) f^*(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n^* \int_a^b dx\, f(x) U_n^*(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n \int_a^b dx\, f^*(x) U_n(x) + \sum_{n,m'}^{N} \int_a^b dx\, \underbrace{a_n a_{n'}^* U_n U_{n'}^*}_{a_n a_{n'}^* \delta_{n,n'}}$$

$$= \int_a^b dx\, f(x) f^*(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n^* \int_a^b dx\, f(x) U_n^*(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n \int_a^b dx\, f^*(x) U_n(x) + \sum_n a_n a_n^*$$

Derivando

$$\frac{\partial M_N}{\partial a_n} = -\int_a^b dx\, f^*(x)\, U_n(x) + a_n^* = 0 = -\int_a^b dx\, f(x)\, U_n^*(x) + a_n = \frac{\partial M_N}{\partial a_n^*}$$

De ambas expresiones se tiene que

$$\boxed{a_n = \int_a^b dx\, U_n^*(x)\, f(x)}$$

Esperando que mientras más términos se empleen, mejor sea la aproximación de $f_N(x)$ a $f(x)$, se pide que

$$\lim_{N\to\infty} M_N = \lim_{N\to\infty} \int_a^b |f(x) - f_N(x)|^2 dx = 0$$

Convergencia en el promedio

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n U_n(x)}$$

Si se cumple esto para toda f cuadrado-integrable, entonces se dice que la base $\{U_n(x)\}$ es completa

• La prueba para que una base sea completa es, usualmente, trabajo de matemáticos pero las bases empleadas en física ya fueron probadas con esta propiedad y

↳ Una consecuencia de la completés es la siguiente

$$f(x) = \sum_n a_n U_n(x) = \sum_n \left(\int_a^b dx' U_n^*(x') f(x')\right) U_n(x) = \int_a^b \Big(\underbrace{\sum_n U_n^*(x') U_n(x)}_{=\delta(x-x')}\Big) f(x') dx'$$

Debe cumplirse esta igualdad

Es decir

$$\boxed{\sum_n^{\infty} U_n^*(x') U_n(x) = \delta(x-x')}$$

Cerradura, o relación de completés

Ejemplo: Series de Fourier; $x \in (-a/2, a/2) \Rightarrow \{U_n(x)\}$ son la familia: $\sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right), \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)$
$n \geq 0$.

$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)\right], \text{ con } A_n = \int_{-a/2}^{a/2} dx \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) f(x)$$

$$B_n = \int_{-a/2}^{a/2} dx \sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) f(x)$$

• Generalización a varias variables

Estos resultados unidimensionales se pueden generalizar sin problema a otros espacios

$$f(x,y) = \sum_n^{\infty} \sum_m^{\infty} a_{nm} U_n(x) V_m(y) \quad \text{con} \quad a_{nm} = \int_a^b dx \int_c^d dy\, U_n^*(x) V_m^*(y) f(x,y)$$

• De un intervalo finito a uno infinito

Si $[a,b]$ crece a un conjunto finito, entonces las n funciones discretas pasan a ser un continuo de funciones. Esto significa lo siguientes