Transformaciones canónicas

$\vec{\eta} = \begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \xrightarrow{F} \vec{\xi} = \begin{pmatrix} \vec{Q} \\ \vec{P} \end{pmatrix}$

Condiciones necesarias para Hamilton-Jacobi: 1) $\vec{p} = \frac{\partial}{\partial \vec{q}} F \longrightarrow$ lo cumple $F_1 = F_1(\vec{q}, \vec{\alpha})$, $F_2 = F_2(\vec{q}, \vec{P})$

2) $\mathcal{H} + \frac{\partial F}{\partial t} = \mathcal{K}$

3) Si $F = F_1(\vec{q}, \vec{\alpha})$, entonces $\vec{Q} = \frac{\partial}{\partial \vec{P}} F_2$

Si $F = F_2(\vec{q}, \vec{P})$, entonces $\vec{P} = -\frac{\partial}{\partial \vec{\alpha}} F_1$

¿Cuándo las T. Canónicas son útiles?

- i) $\mathcal{H} \xrightarrow{F} \mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ es un problema ya resuelto
- ii) $\vec{q} \longrightarrow \vec{Q}$ t.q. $\frac{\partial}{\partial \vec{\alpha}} \mathcal{H} = \vec{0} \Rightarrow \dot{\vec{P}} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \vec{\alpha}$
- iii) $\vec{q} \to \vec{Q} = \vec{\beta}$, $\vec{p} \to \vec{P} = \vec{\alpha}$

Ecuaciones de Hamilton $\longrightarrow$ Ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\mathcal{H}\left(\vec{q}, \frac{\partial}{\partial \vec{q}} F, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$

= Caso ii) $\vec{q} \longrightarrow \vec{Q}$ t.q. $\vec{Q}$ son variables cíclicas (no aparecen en $\mathcal{K}$)

Queremos lo siguiente: Sup $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{P}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = \vec{\alpha} = $ ctes

$\Rightarrow \mathcal{K} = \mathcal{K}(\vec{\alpha}) \Rightarrow \dot{\vec{Q}} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \vec{P}} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \vec{\alpha}} = \vec{\omega}$

$\Rightarrow \vec{Q} = \vec{\omega} t + \vec{\beta}$

$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \to$ ctes de integración de H.-J.

Método de resolución: Separación de variables (aditiva)

Propongamos $F = F_2(\vec{q}, \vec{P}) \Rightarrow F_2 = S(\vec{q}, \vec{P} = \vec{\alpha}, t) = W(\vec{q}; \vec{\alpha}) + \overbrace{V(t; \vec{\alpha})}^{= V(\vec{\alpha})\, t}$

Si $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 = \frac{d\mathcal{H}}{dt} \Rightarrow \mathcal{H} \equiv$ integral de movimiento

$\Rightarrow \mathcal{H} = \alpha_1 \longrightarrow$ 1 de las $3N - \ell + 1$ constantes de integración

Como $S = S(\vec{q}, \vec{P}) \rightarrow \vec{Q} = \frac{\partial S}{\partial \vec{P}} = \frac{\partial S}{\partial \vec{\alpha}} = \frac{\partial (W + V)}{\partial \vec{\alpha}} = \frac{\partial W}{\partial \vec{\alpha}} + \frac{\partial V(\vec{\alpha})}{\partial \vec{\alpha}} \Delta t$

$\vec{p} = \partial W / \partial \vec{q}$

$\mathcal{H} + \frac{\partial W}{\partial t} + V = \mathcal{K}$

¿Qué pasa si en su lugar proponemos $F_2 = W(\vec{q}; \vec{\alpha})$? $\longrightarrow$ Pues de todos modos nuestro problema es estacionario $\partial \mathcal{H}/\partial t = 0$

entonces $\vec{Q} = \frac{\partial W}{\partial \vec{\alpha}}$, $\vec{p} = \frac{\partial W}{\partial \vec{q}}$, $\mathcal{H} + \cancel{\frac{\partial W}{\partial t}}^{0} = \mathcal{K} = \alpha_1$

$\Rightarrow$ Hamilton-Jacobi $\longrightarrow$ $\boxed{\mathcal{H}\left(\vec{q}, \frac{\partial W}{\partial \vec{q}}\right) = \alpha_1 = \mathcal{K}}$

$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{Q}} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \vec{Q}} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \vec{Q}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{Q}$ son cíclicas

$\Rightarrow \dot{\vec{P}} = \dot{\vec{\alpha}} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \vec{Q}} = \vec{0}$

$\Rightarrow \dot{\vec{P}} = \vec{0}$

$\Rightarrow \underbrace{\vec{P} = \vec{\alpha} = \text{ctes}}$ de integración

$\hookrightarrow$ Momentos conservados

Como $\mathcal{K} = \alpha_1$ ← 1 cte de integración de $3N - \ell + 1$, y $\dot{\vec{Q}} = \partial \mathcal{K} / \partial \vec{P}$

$$\Rightarrow \dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_i} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_i} = \delta_{i1} \longrightarrow \dot{Q}_1 = 1$$

$\hookrightarrow \dot{Q}_i = 0 \; ; \; i \geq 2$

Integrando $Q_1 = \boxed{\Delta t + \beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}}$ (1) y $Q_i = \boxed{\beta_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \; ; i \geq 2}$ (2)

$\beta_j \equiv$ ctes de integración

Notemos que sólo $Q_1 = Q_1(t, \vec{q})$ y $Q_i = Q_i(\vec{q}) \to$ relaciones sólo entre sí

pues $W = W(\vec{q}; \vec{\alpha}) \to$ lo que resta es invertir la relación y aplicar condiciones iniciales.

$\vec{q}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, t)$, $\vec{p}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, t)$

Por (1) hay 1 variable con dependencia temporal

Por (2) hay $3N-1$ que no dependen del tiempo en esta formulación

En todo este procedimiento, de forma natural escogimos $\mathcal{H} = \alpha_1 \to$ cte de integración

pero algunas veces nos conviene utilizar una función de $\vec{\alpha}$ en lugar de α_1 directamente.

Propongamos a otro conjunto de constantes $\to \vec{\gamma} = \vec{\gamma}(\vec{\alpha})$ → constantes → pero funciones de las constantes de integración

tales que la relación sea invertible $\to \vec{\alpha} = \vec{\alpha}(\vec{\gamma})$ → Constantes de integración

Es decir si $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(\vec{\gamma})$, entonces $\alpha_1 = \alpha_1(\vec{\gamma}) = \mathcal{H}(\vec{\alpha}(\vec{\gamma})) = \mathcal{K}(\vec{\gamma})$

$$\Rightarrow \dot{\vec{Q}} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \vec{\gamma}} = \vec{\omega}(\vec{\gamma})$$

→ alguna función $\vec{\omega}$ que depende de $\vec{\gamma}$, es decir, que $\vec{\omega}$ es cte.

Integrando $\Rightarrow \vec{Q} = \vec{\omega}(\vec{\gamma}) \Delta t + \vec{\beta}$ → Notemos que ahora $Q_i = Q_i(t)$, $\forall i$

$$\Rightarrow \dot{\vec{P}} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \vec{Q}} = -\frac{\partial \alpha_1(\vec{\gamma})}{\partial \vec{Q}} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \vec{\gamma}(\vec{\alpha}) \equiv \text{ctes}$$

Por comodidad, identificamos $\gamma_1(\vec{\alpha}) = E(\vec{\alpha})$

Metodología:

1) Plantear $\mathcal{H}$-J $\longrightarrow \mathcal{H}(\vec{q}, \frac{\partial W}{\partial \vec{q}}) = E(\vec{\alpha})$

2) Resolver $\mathcal{H}$-J para $W \longrightarrow W = W(\vec{q}; \vec{\alpha})$

3) Identificar $\vec{P} = \vec{\alpha} \equiv$ ctes

4) Resolver $\mathcal{H}$-J para $\vec{p} \longrightarrow \vec{p} = \vec{p}(\vec{q}; \vec{\alpha}) = \frac{\partial W}{\partial \vec{q}}$ → Integrando en 1) → Derivando en 2)

5) Proponer una forma para $E(\vec{\alpha}) \longrightarrow \dot{\vec{Q}} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \vec{P}} \xrightarrow{F=W} \dot{\vec{\omega}} = \frac{\partial E}{\partial \vec{\alpha}}$

6) Resolver $\to \vec{Q} = \vec{\omega}(\vec{\alpha}) \Delta t + \vec{\beta} = \frac{\partial W}{\partial \vec{\alpha}}(\vec{q}; \vec{\alpha}) \to \vec{q} = \vec{q}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, t)$

$\to \vec{p} = \frac{\partial W}{\partial \vec{q}}(\vec{q}; \vec{\alpha}) \longrightarrow \vec{p} = \vec{p}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, t)$

7) Aplicar condiciones iniciales y despejar $\vec{\eta} = \vec{\eta}(\vec{\eta}_0, t)$

El punto 5) Escoger $E(\vec{\alpha})$ es importante porque podemos pasar a la respuesta

i) de cuándo usar transformaciones canónicas

Ejemplo a) Supongamos $E(\vec{\alpha}) = \sum_j \frac{\alpha_j^2}{2m_j} = \mathcal{H} = K = \text{cte}$

El Hamiltoniano de una partícula libre

$$\Rightarrow \dot{\vec{Q}} = \frac{\partial K}{\partial \vec{\alpha}} = \frac{1}{m}\vec{\alpha} = \vec{\omega}$$

$$\Rightarrow \vec{Q} = \underbrace{\frac{1}{m}\vec{\alpha}}_{\vec{\omega}}\Delta t + \vec{\beta}$$ $\longrightarrow$ ¡ya resolvimos el problema y sólo hay que invertirlo!

b) Supongamos $E(\vec{\alpha}) = \alpha_1 \equiv E$

1 variable de 3N-1M

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1 = \Delta t + \beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}(\vec{q};\vec{\alpha}) \longrightarrow q_i = q_i(\{q_j\}_{j\neq i}, t) \\ Q_j = \beta_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}(\vec{q};\vec{\alpha}) \longrightarrow q_j = q_j(\{q_k\}_{k\neq i}) \end{cases}$$

Ecuación de órbita

Como cuando con Kepler resolvimos $r(\theta)$, en lugar de $r(t)$ y $\theta(t)$