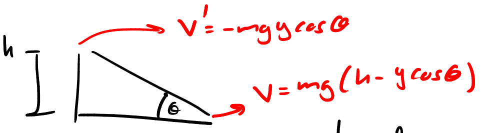
Libertad de Norma del Lagrangiano

En el problema del plano inclinado, dependiendo dónde escogiéramos el punto de referencia de la energía, teníamos dos lagrangianos



$\longrightarrow$ Para la energía da igual porque importa $\Delta U = -\Delta T$

↳ Pero para

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 - mg(h - y\cos\theta) = T - V' - mgh = \mathcal{L}' - mgh$$

y como $L_n = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_n}\cdot\right) - \frac{\partial}{\partial q_n}$, vemos que si $\lambda = mgh = cte$, entonces

las ecuaciones de movimiento no cambian

$$L_n[\mathcal{L}] = L_n[\mathcal{L}' - \lambda] = L_n[\mathcal{L}'] - \cancel{L_n[\lambda]} \longrightarrow L_n[\mathcal{L}] = L_n[\mathcal{L}'] \longrightarrow$$ Se describe la misma dinámica

Esto es cierto para toda transformación

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \underbrace{\frac{df}{dt}}_{\text{Norma mecánica}} \quad \text{si} \quad f = f(\{q_i\}, t) \in C^2$$

Queremos mostrar que $L_n\left[\frac{df}{dt}\right] = 0$ para que $L_n[\mathcal{L}] = L_n[\mathcal{L}'] + \cancel{L_n\left[\frac{df}{dt}\right]}$

Notemos que $L_n\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_n}\left(\frac{df}{dt}\right)}_{=\frac{\partial f}{\partial q_n}}\right] - \frac{\partial}{\partial q_n}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q_n}\right) - \frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{df}{dt}\right)$

por ②

Basta con probar que $\frac{\partial}{\partial q_n}\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_n}$ $\longrightarrow$ La demostración es equivalente a la de ② de los vectores cambiamos que con $r_i \to f$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_n}\right) = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_n} = \frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{d}{dt} r_i\right)$$

$\Rightarrow L_n\left[\frac{df}{dt}(\{q_i\}, t)\right] = 0$

$\therefore$ Si $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \frac{df}{dt}$ y $L_n[\mathcal{L}] = Q_n$, entonces

$$L_n[\mathcal{L}] = L_n[\mathcal{L}'] + \cancelto{0}{L_n[df/dt]} = Q_n$$

$\frac{df}{dt}$ = Norma / Gauge pues es un término que puedo agregar o quitar según me convenga y mi sistema se mantiene igual.

Potenciales generalizados

En las ecuaciones de Lagrange, teníamos que si $\vec{F} = -\nabla V$, con $V = V(\{\vec{r}_i\})$, entonces

$$Q_n = -\frac{\partial}{\partial q_n} V = -\frac{\partial}{\partial q_n} V + \underbrace{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_n} V\right]}_{=0 \text{ pues } \frac{\partial}{\partial \dot{q}_n} V = \frac{\partial V}{\partial q_n}\cancel{\frac{\partial q_n}{\partial \dot{q}_n}}^{0 \text{ dando}} = 0} = \mathbb{L}_n[Q_n] \text{, por lo que}$$

$$\mathbb{L}_n[T] = Q_n = \mathbb{L}_n[V] \Rightarrow \mathbb{L}_n[T] - \mathbb{L}_n[V] = \mathbb{L}_n[\underbrace{T - V}_{\mathcal{L} \equiv \text{Lagrangiano}}] = 0$$

Pensemos en el caso de la Fuerza de Lorenz

carga de una partícula

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \longrightarrow$$

Campo eléctrico; velocidad de una partícula; campo magnético

Notemos que $\vec{F} \neq -\nabla V$, entonces ¿Qué podemos hacer?

Notemos que si $\vec{F} = -\nabla_{\vec{r}} \mathcal{U} + \frac{d}{dt}\left[\nabla_{\dot{\vec{r}}} \mathcal{U}\right]$ con $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\{\vec{r}_i\}, \{\dot{\vec{r}}_i\}, t)$

se cumple que $\mathbb{L}_n[T] = Q_n = \mathbb{L}_n[\mathcal{U}] \Rightarrow \mathbb{L}_n[\underbrace{T - \mathcal{U}}_{\mathcal{L} \equiv \text{Lagrangiano con fuerzas más generales}}] = 0$

$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) \rightarrow$ Potencial generalizado

Lo que vamos a mostrar es que $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = -\nabla_{\vec{r}} \mathcal{U} + \frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{\vec{r}}} \mathcal{U})$

Para esto recordemos que

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A}) = -\nabla \times \left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right) \Rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = -\nabla\phi$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t) =$ Potencial vectorial

$\phi = \phi(\vec{r}, t) =$ Potencial escalar

Entonces

$$\frac{\vec{F}}{e} = (\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}) = \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) + \dot{\vec{r}} \times \overbrace{(\nabla \times \vec{A})}^{\vec{B}}$$

$$= \begin{pmatrix} -\partial_x \phi - \partial_t A_x \\ -\partial_y \phi - \partial_t A_y \\ -\partial_z \phi - \partial_t A_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\partial_x \phi - \partial_t A_x \\ -\partial_y \phi - \partial_t A_y \\ -\partial_z \phi - \partial_t A_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{y} B_z - \dot{z} B_y \\ -\dot{x} B_z + \dot{z} B_x \\ \dot{y} B_x - \dot{x} B_y \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ -\partial_x A_z + \partial_z A_x \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix}$$

por el momento, trabajemos con la componente $\hat{e}_x$ de $\vec{F}$:

$$\frac{\vec{F}}{e}\cdot\hat{e}_x = -\partial_x\phi - \partial_t A_x + \dot{y}B_z - \dot{z}B_y = -\partial_x\phi - \partial_t A_x + \dot{y}(\partial_x A_y - \partial_y A_x) - \dot{z}(-\partial_x A_z + \partial_z A_x)$$

reacomodando los términos notamos que podemos incluir que $\dot{x}\partial_x A_x - \dot{x}\partial_x A_x = 0$

$$\Rightarrow \frac{\vec{F}}{e}\cdot\hat{e}_x = -\partial_x\phi - \partial_t A_x + \dot{y}\partial_x A_y - \dot{y}\partial_y A_x + \dot{z}\partial_x A_z - \dot{z}\partial_z A_x + \dot{x}\partial_x A_x - \dot{x}\partial_x A_x$$

$$= -\partial_x\phi - \left(\partial_x A_x\dot{x} + \partial_y A_x\dot{y} + \partial_z A_x\dot{z} + \partial_t A_x\right) + \left(\dot{x}\partial_x A_x + \dot{y}\partial_x A_y + \dot{z}\partial_x A_z\right)$$

$$= -\partial_x\phi - \frac{d}{dt}A_x + \partial_x\left[\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z\right]$$

$A_x = A_x(x,y,z,t)$ $\qquad$ $\frac{\partial}{\partial x_i}(\dot{x}_j) = 0$

$$\frac{\vec{F}}{e}\cdot\hat{e}_x = -\partial_x\phi - \frac{dA_x}{dt} + \partial_x(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}) = -\partial_x(\phi - \dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}) - \frac{d}{dt}A_x \quad \ldots (1)$$

Recordemos que queremos encontrar un $\mathcal{U}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$ t.q. $\vec{F} = I_{\dot{q}}(\mathcal{U}) = -\nabla_{r}(\mathcal{U}) + \frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{r}}\mathcal{U})$ y un primer candidato es $(\phi - \dot{\vec{r}}\cdot\vec{A})e$, para esto, notemos que lo siguiente es válido:

- $\phi = \phi(\vec{r},t) \Rightarrow \partial_{\dot{x}}\phi = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\partial_{\dot{x}}\phi) = 0 \quad \ldots (2)$

- $\partial_{\dot{x}}(\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}) = \partial_{\dot{x}}(A_x\dot{x} + A_y\dot{y} + A_z\dot{z}) = \partial_{\dot{x}}(A_x\dot{x})$ pues $A_y = A_y(x,y,z;t)$, $A_z = A_z(x,y,z;t)$ y $\frac{\partial}{\partial(\dot{x}_i)}(\dot{x}_j) = \delta_{ij}$

$$\Rightarrow \partial_{\dot{x}}(\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}) = \partial_{\dot{x}}(A_x\dot{x}) = \cancelto{0}{(\partial_{\dot{x}}A_x)}\dot{x} + A_x\cancelto{1}{\partial_{\dot{x}}\dot{x}}$$

$$\Rightarrow \partial_{\dot{x}}(\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}) = A_x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\partial_{\dot{x}}(\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}})\right] = \frac{d}{dt}A_x \quad \ldots (3)$$

Sumando (2) en (1) y sustituyendo con (3), obtenemos que

$$\frac{\vec{F}}{e}\cdot\hat{e}_x = -\partial_x(\phi - \dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}) + \frac{d}{dt}A_x = -\frac{d}{dt}\left[\partial_{\dot{x}}(\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}})\right] + \frac{d}{dt}(\partial_{\dot{x}}\phi) - \partial_x(\phi - \dot{\vec{r}}\cdot\vec{A})$$

$$\Rightarrow \vec{F}\cdot\hat{e}_x = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{x}}\left(e\phi - e\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left(e\phi - e\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}\right)$$

Un procedimiento análogo se puede realizar para $\hat{e}_y$ y $\hat{e}_z$. Por lo tanto:

$$F\cdot\hat{e}_i = I_{q_i}(\mathcal{U}_{EM}), \text{ donde } \mathcal{U}_{EM} = e\phi(\vec{r},t) - e\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)$$

$$\therefore \mathcal{L}_{EM}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = T - \mathcal{U}_{EM}$$

Fuerzas de disipación:

Usualmente, se propone que $Q_i^{dis} \sim \dot{q}_i$, por lo que es conveniente definir:

$$D = \frac{1}{2}\sum_{l,m} \beta_{lm}\dot{q}_l\dot{q}_m \; ; \quad \beta_{lm} = \beta_{ml} \longrightarrow \text{Valores experimentales a determinar}$$

$D \equiv$ Función de disipación de Rayleigh

Se propone esta función dado que

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} D = \frac{1}{2}\sum_{l,m} \beta_{lm}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\dot{q}_l\dot{q}_m\right) = \frac{1}{2}\sum_{lm}\beta_{lm}\left(\underbrace{\frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_k}}_{\delta_{lk}}\dot{q}_m + \dot{q}_l\underbrace{\frac{\partial \dot{q}_m}{\partial \dot{q}_k}}_{\delta_{mk}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} D = \frac{1}{2}\sum_{lm}\beta_{lm}\dot{q}_m\delta_{lk} + \frac{1}{2}\sum_{lm}\beta_{lm}\dot{q}_l\delta_{mk}$$

¡son iguales!

$$= \frac{1}{2}\sum_m \beta_{km}\dot{q}_m + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_l \beta_{lk}\dot{q}_l}_{\text{cambio } l \to m} = \frac{1}{2}\sum_m \beta_{km}\dot{q}_m + \frac{1}{2}\sum_m \beta_{mk}\dot{q}_m$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} D = \sum_m \beta_{km}\dot{q}_m \quad \ldots (1)$$

Por lo tanto, podemos suponer que $Q_i = Q_i^{pot} + Q_i^{dis}$ t.q. $Q_i^{pot} = \mathcal{I}_i[\mathcal{U}]$ y $Q_i^{dis} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} D$

y la ecuación de Lagrange se reescribe como:

$$\mathcal{I}_i[\mathcal{L} = T - \mathcal{U}] = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} D$$

Finalmente, notemos que $dW^{dis} = \sum_i Q_i^{dis} dq_i = \sum_i \overbrace{\left(\sum_m \beta_{im}\dot{q}_m\right)}^{\text{por (1)}} dq_i$

$$\Rightarrow \frac{dW^{dis}}{dt} = \sum_{im}\beta_{im}\dot{q}_m\dot{q}_i = 2D \qquad \text{P.D.: } \frac{d}{dt}(T + \mathcal{U}) = -2D \;\; \text{Tarea}$$

Es decir, la energía que se pierde, es igual al trabajo de las fuerzas disipativas.