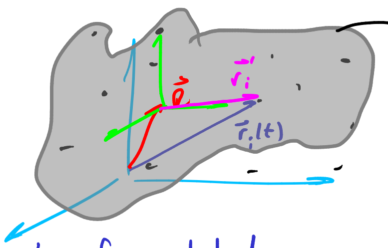
Sistema de N cuerpos y sistemas no-inerciales

↳ Todo lo anterior es válido para una (1) partícula pero se puede generalizar para sistemas de N partículas



→ N partículas

→ Para cada i-ésima partícula se cumple que

$\vec{r}_i: \quad \vec{p}_i = m_i \vec{v}_i \Rightarrow \vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i = m_i \dot{\vec{v}}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$ → 2da ley de Newton con $m_i = cte$

La fuerza total sobre el SISTEMA →

$$\vec{F}_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i^{ext} + \cancel{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij}}\right)$$

→ 0 por 3ra ley de Newton

$$\Rightarrow \vec{F}_{TOT} = \sum_i \vec{F}_i^{ext} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i \overset{?}{=} M\ddot{\vec{R}}$$

2da ley de Newton

→ ¿Podemos hacer una "2da ley" para todo el sistema?

↳ sí, definimos el centro de masa

$$M = \sum_i m_i = \int dm = \int \rho_{masa}(\vec{r})\,dV \quad , \quad \vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm = \frac{1}{M}\int \vec{r}\rho(\vec{r})\,dV$$

Masa total — Centro de masa; Promedio de masa

El centro de masa permite describir al sistema como una partícula puntual con masa M, ubicada en $\vec{R}$. Lo cual es una primera aproximación a conocer la dinámica del sistema, es decir, a todos los $\vec{r}_i(t)$.

→ Lo que resta es ver cómo se mueven las partículas alrededor de $\vec{R}$.

→ Hagamos un cambio de marco de referencia

$$\boxed{\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i'} \xrightarrow{\frac{d^2}{dt^2}} \left[\ddot{\vec{r}}_i = \ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{r}}_i'\right]$$

→ sólo si $\ddot{\vec{R}} = 0$ se cumple que $\ddot{\vec{r}}_i = \ddot{\vec{r}}_i'$, lo que es consistente con la 2da ley de Newton

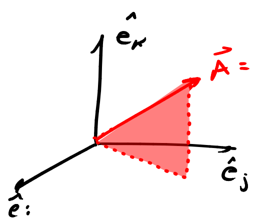
Si $\ddot{\vec{R}} \neq 0$, entonces estamos en un marco de referencia NO inercial

En general $\ddot{\vec{R}} \longrightarrow$ Traslación + Rotaciones. Veamos cómo tratar a cada caso

$\ddot{\vec{R}} \equiv$ Traslaciones $\qquad \left(\ddot{\vec{r}}\right)_{in} = \left(\ddot{\vec{r}}'\right)_{tras} + \ddot{\vec{R}} \Rightarrow \left(\ddot{\vec{r}}'\right)_{tras} = \left(\ddot{\vec{r}}\right)_{in} - \ddot{\vec{R}}$

$\ddot{\vec{R}} \equiv$ Rotaciones $\qquad \left(\ddot{\vec{r}}_i\right)_{in} = \left(\ddot{\vec{r}}'\right)_{rot} + \ddot{\vec{R}} \Rightarrow \left(\ddot{\vec{r}}'\right)_{rot} = \left(\ddot{\vec{r}}\right)_{in} - \ddot{\vec{R}}$

Para ver cómo se modifican las ecuaciones, calculamos $\left(\frac{d}{dt}\vec{A}\right)_{in}$ → vector arbitrario



$$\vec{A} = \sum_i A_i \hat{e}_i \longrightarrow \left(\frac{d}{dt}\vec{A}\right)_{in} = \sum_i \left[\frac{dA_i}{dt}\hat{e}_i + A_i \frac{d\hat{e}_i}{dt}\right]$$ → Regla del producto

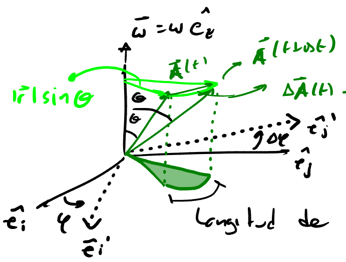
Cambio en las componentes de $\vec{A}$ como si la base del vector no cambiara

Las componentes del vector no cambian pero su base sí lo hace

Como sólo consideramos rotaciones, podemos hacer la siguiente identificación

- $\sum_i \frac{dA_i}{dt}\hat{e}_i = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{rot} \equiv$ El cambio que ve alguien en el sistema que rota, ya que se mueve junto con los ejes.

- $\sum_i A_i \frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{A} \equiv$ El cambio del sistema, que es una rotación.



$\Delta\vec{A}(t) \rightarrow \|\Delta\vec{A}(t)\| \simeq |\vec{A}|\sin\theta\,\Delta\varphi$

$= |\vec{A}|\sin\theta\,\omega\,\Delta t$

$= \left[|\vec{A}||\vec{\omega}|\sin\theta\right]\Delta t$

$\|\vec{\omega}\times\vec{r}\|$

↳ Se escogo esta orden por la dirección del giro

Longitud de arco $\underbrace{\Delta\varphi = \omega\Delta t}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}\right)_{sist} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{sist} = \vec{\omega}\times\vec{A}$$

Entonces, para rotaciones, definimos al operador

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{in} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{rot} + \vec{\omega}\times \longrightarrow$$ aplicándolo al vector de posición

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{in} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{rot} + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

Para calcular la aceleración

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}\right)_{in} = \frac{d}{dt}\Big[\overbrace{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{rot} + \vec{\omega}\times\vec{r}}^{(d\vec{r}/dt)_{in}}\Big]_{rot} + \vec{\omega}\times\Big[\overbrace{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{rot} + \vec{\omega}\times\vec{r}}^{(d\vec{r}/dt)_{in}}\Big]$$

$$= \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{rot} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{rot}\times\vec{r} + \underbrace{2\vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{rot}} + \underbrace{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{rot} = \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{in} \underbrace{-\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{rot}\times\vec{r}}_{\substack{\text{usualmente } d\vec{\omega}/dt\sim 0 \\ \text{y se desprecia}}} \underbrace{-2\vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{rot}}_{\text{Aceleración de Coriolis}} \underbrace{-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{\text{Aceleración centrífuga}}$$

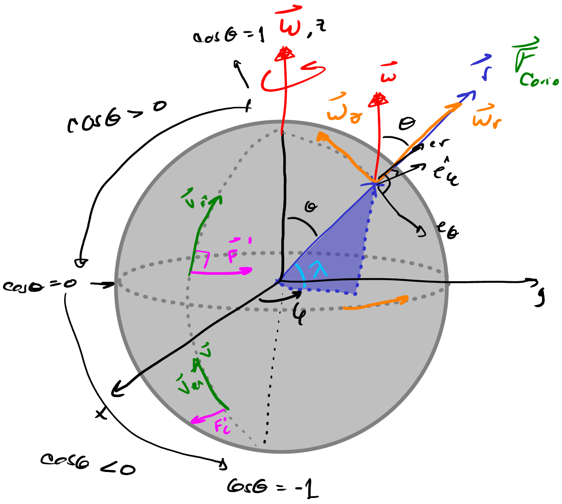
Ejemplo: La Tierra

Supongamos $\vec{\omega} \equiv cte \Rightarrow \dot{\vec{\omega}} = 0$

$$\vec F_{ret} = F_{in} - \underbrace{m2\vec\omega\times\overbrace{\vec v_{ret}}^{\text{velocidad tangencial}}}_{\text{Coriolis}} \underbrace{- m\vec\omega\times(\vec\omega\wedge\vec r)}_{\text{Centrífuga}}$$

Despongamos

$$\vec\omega = \omega\hat e_z = \underbrace{\omega\cos\theta}_{\omega_r}\,\hat e_r - \underbrace{\omega\sin\theta}_{\omega_\theta}\,\hat e_\theta + \underbrace{0}_{\omega_\varphi}\,\hat e_\varphi$$



$$\vec F_{Coriolis} = -2m(\vec\omega\times\vec V_{ret})$$

$\vec V_{ret} = V^\theta_{ret}\hat e_\theta + V^\varphi_{ret}\hat e_\varphi$ ← sólo tangencial a la Tierra

$$= -2m(\omega_r\hat e_r - \omega_\theta\hat e_\theta)\times(V^\theta_{ret}\hat e_\theta + V^\varphi_{ret}\hat e_\varphi)$$

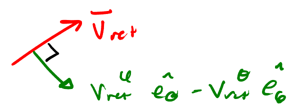
$$= -2m[\omega_r V^\theta_{ret}\underbrace{(\hat e_r\wedge\hat e_\theta)}_{\hat e_\varphi} + \omega_r V^\varphi_{ret}\underbrace{(\hat e_r\wedge\hat e_\varphi)}_{-\hat e_\theta} - \omega_\theta V^\theta_{ret}(\cancel{\hat e_\theta\wedge\hat e_\theta})^{0} - \omega_\theta V^\varphi_{ret}\underbrace{(\hat e_\theta\wedge\hat e_\varphi)}_{\hat e_r}]$$

$$= 2m(-\omega_r V^\theta_{ret}\hat e_\varphi + \omega_r V^\varphi_{ret}\hat e_\theta + \omega_\theta V^\varphi_{ret}\hat e_r)$$

$$= 2m\omega\underbrace{\cos\theta}\underbrace{(V^\varphi_{ret}\hat e_\theta - V^\theta_{ret}\hat e_\varphi)}_{\text{Dirección perpendicular a } \vec V_{ret}} + \underbrace{\omega\sin\theta V^\varphi_{ret}\hat e_r}_{\text{Corrección radial}}$$

$\cos\theta > 0$ si $\theta < \pi/2$

$\cos\theta < 0$ si $\theta > \pi/2$



$$\vec F_{cent} = -m\vec\omega\times[\vec\omega\times\vec r]$$

$$= -m\vec\omega\times[(\omega_r\hat e_r - \omega_\theta\hat e_\theta)\times r\hat e_r]$$

$$= -m\vec\omega\times[r\omega_r\cancel{\hat e_r\times\hat e_r}^{0} - r\omega_\theta\cancel{\hat e_\theta\times\hat e_r}^{-\hat e_\varphi}]$$

$$= -m\vec\omega\times[-r\omega_\theta(-\hat e_\varphi)]$$

$$= -m(\omega_r\hat e_r - \omega_\theta\hat e_\theta)\times(r\omega_\theta\hat e_\varphi)$$

$$= -m[r\omega_r\omega_\theta\cancel{(\hat e_r\times\hat e_\varphi)}^{-\hat e_\theta} - r\omega_\theta^2\cancel{(\hat e_\theta\times\hat e_\varphi)}^{\hat e_r}]$$

$$= -mr\omega_\theta(-\omega_r\hat e_\theta - \omega_\theta\hat e_r)$$

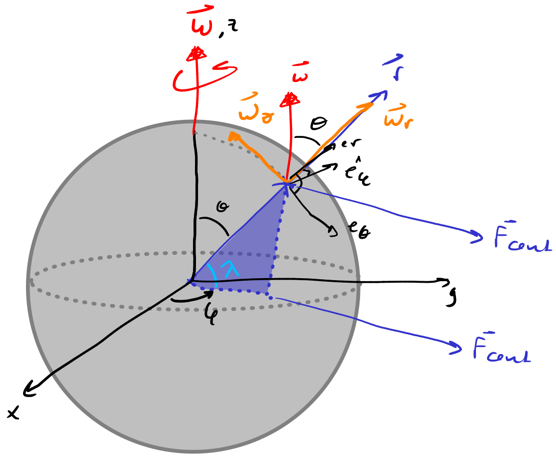
$$= mr\omega^2\sin\theta(\cos\theta\,\hat e_\theta + \sin\theta\,\hat e_r)$$

$$= mr\omega^2\sin\theta\,[\cos\theta(\cos\theta\cos\varphi\,\hat e_x + \cos\theta\sin\varphi\,\hat e_y - \cancel{\sin\theta\,\hat e_z}) + \sin\theta(\sin\theta\cos\varphi\,\hat e_x + \sin\theta\sin\varphi\,\hat e_y + \cancel{\cos\theta\,\hat e_z})]$$

$$= mr\omega^2\sin\theta\,[\cos^2\theta(\cos\varphi\,\hat e_x + \sin\varphi\,\hat e_y) + \sin^2\theta(\cos\varphi\,\hat e_x + \sin\varphi\,\hat e_y)]$$

$$= mr\omega^2\sin\theta\,[\cancel{\cos^2\theta + \sin^2\theta}^{1}]\underbrace{(\cos\varphi\,\hat e_x + \sin\varphi\,\hat e_y)}_{\hat e_s}$$

$\therefore\ \vec F_{cent} = mr\omega^2\sin\theta\,\hat e_s$ → Radial al eje de giro



$$\begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_\varphi \end{pmatrix}$$

¡Podemos hablar de una gravedad efectiva!

$$\vec g_{eff} = \vec g + \frac{\vec F_{cent}}{m} = -g\hat e_r + r\omega^2\sin\theta(\sin\theta\,\hat e_r + \cos\theta\,\hat e_\theta)$$

$\Rightarrow\ \vec g_{eff}\cdot\hat e_r = -g + \omega^2 r\sin^2\theta$

$\vec g_{eff}\cdot\hat e_\theta = +\ \omega^2 r\cos\theta\sin\theta$

$\Rightarrow\ \|\vec g_{eff}\|^2 \simeq g^2 - 2\omega^2 r\sin^2\theta\, g + (\omega^2 r\sin^2\theta)^2 + (\omega^2 r\cos\theta\sin\theta)^2$ agrupamos con $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$= g^2 - 2\omega^2 r\sin^2\theta\, g + (\omega^2 r\sin\theta)^2$$

$$= g^2\left\{1 - \left[2\left(\frac{\omega^2 r}{g}\right) - \left(\frac{\omega^2 r}{g}\right)^2\right]\sin^2\theta\right\}$$