== Transformaciones pasivas y activas ==

Como Q y TQ están relacionados $Q \mapsto Q'$ ent. $TQ \mapsto (TQ)' = TQ'$

Pensemos en una transformación particular

(1)
$$\boxed{\begin{aligned} q'_i &= q_i + \delta_{ik}\,\epsilon \\ \dot q'_i &= \dot q_i \end{aligned}}$$

→ Nuestra transformación desplaza a las coordenadas cíclicas únicamente

$k \equiv$ coordenada cíclica

(2)
$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{L'_{\epsilon}(\{q'_i\},\{\dot q'_i\},t)}_{\text{para recordar la transformación}} = L(\underbrace{\{q_i(q'_i,\dot q'_i)\},\{\dot q_i(q'_i,\dot q'_i)\}}_{\text{Transformación inversa}},t) = \underline{L(\{q_i\},\{\dot q_i\},t)}}$$

L' tiene la misma forma que L pues la transformación es sobre coordenadas cíclicas

⇒ Sólo coordenadas que NO aparecen en el Lagrangiano

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &(3)\ L'_{\epsilon}(\{q_i\},\{\dot q_i\},t) = L(\{q_i\},\{\dot q_i\},t) \\ &(4)\ L'_{\epsilon}(\{q'_i\},\{\dot q'_i\},t) = L(\{q'_i\},\{\dot q'_i\},t) \end{aligned}\right\} \text{Misma forma funcional}$$

Entonces, notemos que de (3)

$$\frac{\partial L'_\epsilon}{\partial \epsilon} = \sum \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \epsilon} + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\frac{\partial \dot q_i}{\partial \epsilon}} = -\sum \frac{\partial L}{\partial q_i}(-\delta_{ik}) = -\sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

$q'_i = q_i + \delta_{ik}\epsilon$

$\Rightarrow q_i = q'_i - \delta_{ik}\epsilon$

$\Rightarrow \frac{\partial q_i}{\partial \epsilon} = -\delta_{ik}$

con (4) sale + en lugar de −

Podemos interpretar a (1) o (2) de dos formas distintas

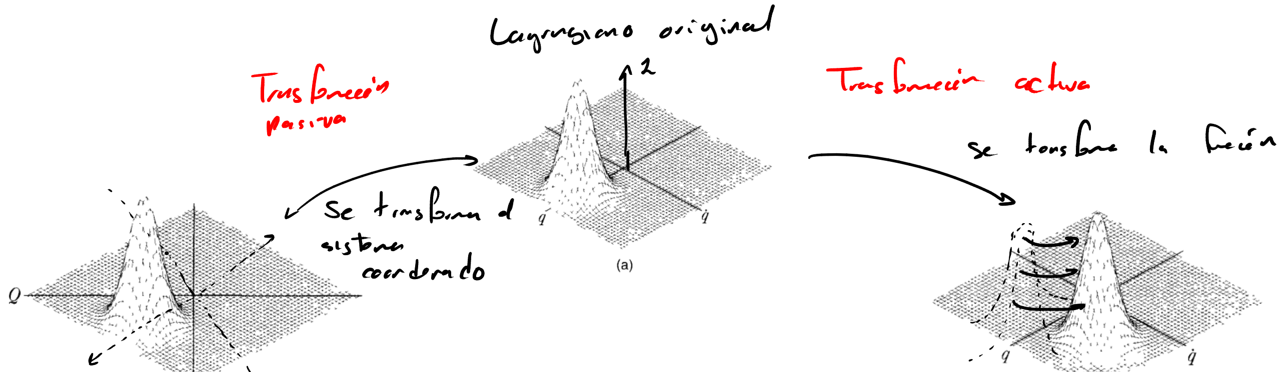

FIGURE 3.3
Active and passive views of the same transformation. (a) A graph of the (quite unrealistic) Lagrangian $L(q,\dot q) = \exp[-(q-\sqrt{2}a)^2 - \dot q^2]$. (b) Under a passive coordinate rotation by the angle $\epsilon = \pi/4$ in $T\mathbb{Q}$ the expression for L in the new coordinates is $L_\epsilon(Q,\dot Q) = \exp[-(Q-a)^2 - (\dot Q - a)^2]$. (c) Under an active transformation L changes to a new function whose expression in terms of the original coordinates is $L_\epsilon(q,\dot q) = \exp[-(q-a)^2 - (\dot q - a)^2]$.

N bueno que si $a=0$ habría siempre la misma montañita ☺

Ahora, vamos a generalizar lo anterior

Generalizemos lo que hemos discutido

Sup que hay una transformación invertible y continua con un parámetro ε

$$q_j' \longrightarrow q_i = q_i(\{q_j'\}, t, \varepsilon)$$
$$q_i \longrightarrow q_j' = q_j'(\{q_i\}, t, \varepsilon)$$

t.q. $\frac{\partial q_j'}{\partial \varepsilon}$ y $\frac{\partial q_i}{\partial \varepsilon}$ existan y que $q_i'\big|_{\varepsilon=0} = q_j$ y $q_i\big|_{\varepsilon=0} = q_i$

Que además deja invariante el Lagrangiano

$$L_\varepsilon'(\{q_j'\}, \{\dot q_j'\}, t, \varepsilon) = L(\{q_i\}, \{\dot q_i\}, t) \quad \forall \varepsilon$$

Calculando $\frac{\partial L_\varepsilon'}{\partial \varepsilon}$, tenemos que

$$\frac{\partial L_\varepsilon'}{\partial \varepsilon} = \sum_j \underbrace{\frac{\partial L_\varepsilon'}{\partial q_j'}}_{= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_\varepsilon'}{\partial \dot q_j'}\right) \to \text{Euler Lagrange}} \frac{\partial q_j'}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L_\varepsilon'}{\partial \dot q_j'} \underbrace{\frac{\partial \dot q_j'}{\partial \varepsilon}}_{\frac{\partial (dq_j'/dt)}{\partial \varepsilon} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_j'}{\partial \varepsilon}\right)} + \frac{\partial L_\varepsilon'}{\partial t}\cancel{\frac{\partial t}{\partial \varepsilon}}^{0} = \sum_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_\varepsilon'}{\partial \dot q_j'}\right)\frac{\partial q_j'}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_j'}{\partial \varepsilon}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L_\varepsilon'}{\partial \varepsilon} = \frac{d}{dt}\left(\sum_j \underbrace{\frac{\partial L_\varepsilon'}{\partial \dot q_j'}}_{p_j'} \frac{\partial q_j'}{\partial \varepsilon}\right)$$

Ahora, evaluamos $\varepsilon = 0$

$$\left.\frac{\partial L_\varepsilon'}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{dt}\left(\sum_j \frac{\partial L_\varepsilon'}{\partial \dot q_j'}\frac{\partial q_j'}{\partial \varepsilon}\right)\Bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{dt}\left(\sum_j \frac{\partial L_\varepsilon'}{\partial \dot q_j}\frac{\partial q_j}{\partial \varepsilon}\right)\Bigg|_{\varepsilon=0}$$

$q_j'\big|_{\varepsilon=0} = q_j$

$\Rightarrow \dot q_j'\big|_{\varepsilon=0} = \dot q_j$

Por nuestra transformación deja invariante al Lagrangiano, entonces $L_\varepsilon'(q', \dot q', t, \varepsilon) = L(q, \dot q, t)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_j \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}}_{p_j}\frac{\partial q_i}{\partial \varepsilon}\right)\Bigg|_{\varepsilon=0} = \underbrace{\left.\frac{\partial L_\varepsilon'}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon}}_{\text{pues como es invariante, no puede depender explícitamente de } \varepsilon} = 0 \longrightarrow \text{Notemos que } \frac{d}{dt}\left(\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\delta q_j\right) = \delta L_\varepsilon = 0$$

Podemos usar el formalismo de variaciones

$$\therefore \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\frac{\partial q_i}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \text{cte}$$

$\longrightarrow$ ¿y qué ganamos con esto?

$\longrightarrow$ Teorema de Noether

Recordemos el caso del potencial central $V = V(r)$

Sabíamos que $\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2\right) - V(r)$

$\Rightarrow$ $\varphi \to$ coordenada cíclica $\Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi} = r^2\sin\theta\,\dot\varphi = L_z = cte$

$\boxed{\varphi = \varphi + \varphi_0}$ deja invariante a nuestro sistema

Pero no era obvio si $\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2\right) - V\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \to$ aún así debe cumplirse que $L_z = cte$

Ahora, supongamos la siguiente transformación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & \sin\varphi_0 & 0 \\ -\sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{R}_{\varphi_0}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

- Si $\varphi_0 = 0$, ent $\mathbb{R} = \mathbb{I}$
- $x = x'\cos\varphi_0 + y'\sin\varphi_0$, $y = -\sin\varphi_0\, x' + \cos\varphi_0\, y'$ $\Big\}$ $x^2 + y^2 = (x')^2 + (y')^2$

$z = z'$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\left(\mathbb{R}_{\varphi_0}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}_{\varphi_0}\begin{pmatrix} \dot x' \\ \dot y' \\ \dot z' \end{pmatrix} \Rightarrow \dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2 = (\dot x')^2 + (\dot y')^2 + (\dot z')^2$$

Entonces $\mathbb{R}_0 = \mathbb{I}$ y $\mathcal{L}(x,y,z) = \mathcal{L}(\dot x, \dot y, \dot z)$, y además $\frac{\partial \mathbb{R}_{\varphi_0}}{\partial \varphi_0}$ existe

$$\Rightarrow \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_j}\frac{\partial q_j}{\partial \varphi_0}\Bigg|_{\varphi_0=0} = cte$$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x} = m\dot x$, $\frac{\partial x}{\partial \varphi_0}\Big|_{\varphi_0=0} = \left(-\sin\varphi_0\, x' + \cos\varphi_0\, y'\right)\Big|_{\varphi_0=0} = y'\Big|_{\varphi_0=0} = y$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot y} = m\dot y$, $\frac{\partial y}{\partial \varphi_0}\Big|_{\varphi_0=0} = \left(-\cos\varphi_0\, x' - \sin\varphi_0\, y'\right)\Big|_{\varphi_0=0} = -x'\Big|_{\varphi_0=0} = -x$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot z} = m\dot z$, $\frac{\partial z}{\partial \varphi_0}\Big|_{\varphi_0} = 0$

$$\Rightarrow \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_j}\underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial \varphi_0}\Bigg|_{\varphi_0}}_{\delta q_j} = m\dot x y - m\dot y x = \left[\vec r \wedge (m\dot{\vec r})\right]\cdot \hat e_z = \underline{L_z = cte}$$

Entonces, vemos que si hay una transformación que deja invariante al Lagrangiano

$$\sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_j}\delta q_j = \sum_j p_j\,\delta q_j = cte$$

$\to$ ya no necesito tener únicamente las coordenadas generalizadas óptimas

$\downarrow$

Encuentro las constantes como sea.

Lo cual no facilita la resolución del sistema

Notemos que esto fue válido para

$\mathcal{L}: Q \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o $\mathcal{L} = TQ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\mathcal{H} = \mathcal{L}_1[\mathcal{L}] = TQ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Entonces: $\mathcal{L}$ es invariante en esa transformación

también $\mathcal{H}$ es invariante en la transformación

$\Rightarrow \mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ tienen las simetrías geométricas/físicas en su forma funcional

↳ Ejemplo: **Cristales**