Coordenadas cíclicas

Las coordenadas cíclicas son aquellas que no aparecen explícitamente lo que implica una cantidad conservada de forma inmediata:

Sup que q_j no aparecen en $\mathcal{L}(\{q_i\},\{\dot q_i\},t)$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}=0 \Rightarrow \mathbb{L}_j[\mathcal{L}]=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot q_j}\mathcal{L}\right)-\cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}}=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(p_j=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_j}\right)=0$$

cantidad conservada

Momento generalizado

$$\{q_i\}=\{r,\theta,\varphi\}\longrightarrow \mathcal{L}=\frac{1}{2}m\left(\dot r^2+r^2\dot\theta^2+r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2\right)-V(r)$$

Notemos que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r}\neq 0$ y $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}\neq 0$ pero $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}=0 \Rightarrow P_\varphi\equiv\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi}\to$ cte

$$P_\varphi=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi}=\underline{mr^2\sin^2\theta\,\dot\varphi} \quad y \quad \dot P_\varphi=0$$

↳ Cantidad conservada

↳ Simetría del sistema (esférica)

↳ Probemos que $P_\varphi=\vec L\cdot\hat e_z$

↳ Momento angular $\vec L=\vec r\times\vec P$

Demostremos que $P_\varphi=\underbrace{\vec L\cdot\hat e_z}_{\text{momento angular}}$

$$\hat e_r\wedge\hat e_\theta=\hat e_\varphi \Rightarrow \hat e_\varphi\wedge\hat e_r=\hat e_\theta$$
$$\Rightarrow \hat e_r\wedge\hat e_\varphi=-\hat e_\theta$$

$$\vec L=\vec r\times\vec p=mr\left[\hat e_r\times\left(\cancel{\dot r\hat e_r}+r\dot\theta\,\hat e_\theta+r\sin\theta\,\dot\varphi\,\hat e_\varphi\right)\right]$$

$$=mr^2\left(\dot\theta\,\underline{\hat e_\varphi}-\underline{\sin\theta\dot\varphi}\,\hat e_\theta\right)$$

$$\begin{pmatrix}\hat e_r\\ \hat e_\theta\\ \hat e_\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat e_x\\ \hat e_y\\ \hat e_z\end{pmatrix}$$

$$=mr^2\dot\theta\left(\underline{-\sin\varphi\,\hat e_x+\cos\varphi\,\hat e_y}\right)+$$
$$-mr^2\sin\theta\dot\varphi\left(\underline{\cos\theta\cos\varphi\,\hat e_x+\cos\theta\sin\varphi\,\hat e_y-\sin\theta\,\hat e_z}\right)$$

$$=\hat e_x\left[-mr^2\left(\sin\varphi\dot\theta+\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\dot\varphi\right)\right]+\hat e_y\left[mr^2\left(\cos\varphi\dot\theta-\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\dot\varphi\right)\right]+$$
$$\hat e_z\left[mr^2\sin^2\theta\dot\varphi\right]$$

$$\Rightarrow \vec L\cdot\hat e_z=mr^2\sin^2\theta\,\dot\varphi=P_\varphi\equiv\text{cte}\longrightarrow \text{Esto ocurre siempre que } \underline{\underline{V=V(r)}}$$

↳ la componente perpendicular del momento angular, se conserva.

Algo semejante ocurre en caída libre

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)+mgz\longrightarrow$$ Hay dos variables cíclicas

$$P_x=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x}=m\dot x\to \dot P_x=0$$
$$P_y=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x}=m\dot y\longrightarrow \dot P_y=0$$

conservadas en el tiro parabólico :)

Sabemos que $\|\vec r\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r$ El campo central es tal que $V=V(\sqrt{x^2+y^2+z^2})=V(r)$

Si $\{q_i\}=\{x,y,z\}\longrightarrow \mathcal{L}=\frac{1}{2}m(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)-V(\sqrt{\ })\longrightarrow$ No hay variables cíclicas