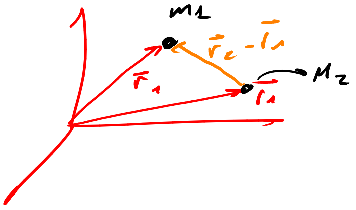
Temas selectos: El campo central

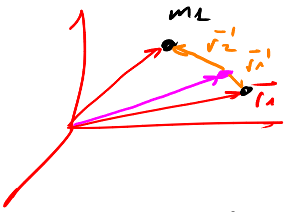
Supongamos el caso de dos cuerpos de masas m_1 y m_2 cuya única interacción es entre ellos:



El lagrangiano del sistema es:

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec r}_1 \cdot \dot{\vec r}_1 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec r}_2 \cdot \dot{\vec r}_2 - \underbrace{V(|\overbrace{\vec r_1 - \vec r_2}^{\text{distancia relativa}}|)}_{\text{Potencial central que}}$$

Estudiemos al sistema desde el centro de masa $\vec R = \dfrac{m_1 \vec r_1 + m_2 \vec r_2}{m_1 + m_2}$



$\longrightarrow$ Del diagrama $\vec r_1 = \vec R + \vec r_1{}'$

$\vec r_1{}'$: posición desde el centro de masa

$\vec r_1$: posición en un marco de referencia inercial

$$\Rightarrow \vec r_1{}' = \vec r_1 - \vec R = \vec r_1 - \frac{m_1 \vec r_1 + m_2 \vec r_2}{m_1 + m_2} = \frac{(\cancel{m_1} + m_2)\vec r_1 - \cancel{m_1 \vec r_1} - m_2 \vec r_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_2 (\vec r_2 - \vec r_1)}{m_1 + m_2}$$

y análogamente $\vec r_2{}' = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}(\vec r_2 - \vec r_1)$

y nombremos $\vec r = (\vec r_2 - \vec r_1) \longrightarrow$ Posición relativa

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \vec r_1{}' &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec r \\ \vec r_2{}' &= \frac{+m_1}{m_1 + m_2}\vec r \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{El centro de masa está entre las dos partículas}$$

Además, tenemos que

$$\frac{1}{2} m_1 \dot{\vec r}_1 \cdot \dot{\vec r}_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec R} \cdot \dot{\vec R} + \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec r}_1{}' \cdot \dot{\vec r}_1{}' + 2\,\frac{1}{2} m_1 \dot{\vec R} \cdot \dot{\vec r}_1{}'$$

$$\frac{1}{2} m_2 \dot{\vec r}_2 \cdot \dot{\vec r}_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec R} \cdot \dot{\vec R} + \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec r}_2{}' \cdot \dot{\vec r}_2{}' + 2\,\frac{1}{2} m_2 \dot{\vec R} \cdot \dot{\vec r}_2{}'$$

y sumando ambas ecuaciones

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec r}_1 \cdot \dot{\vec r}_1 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec r}_2 \cdot \dot{\vec r}_2$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec R} \cdot \dot{\vec R} + \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec r}_1{}' \cdot \dot{\vec r}_1{}' + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec r}_2{}' \cdot \dot{\vec r}_2{}' + \dot{\vec R} \cdot \cancel{(m_1 \dot{\vec r}_1{}' + m_2 \dot{\vec r}_2{}')}$$

El momento total medido desde el centro de masa 0

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec R} \cdot \dot{\vec R} + \frac{1}{2} m_1 \underbrace{\dot{\vec r}_1{}' \cdot \dot{\vec r}_1{}'}_{\frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\vec r} \cdot \dot{\vec r}} + \frac{1}{2} m_2 \underbrace{\dot{\vec r}_2{}' \cdot \dot{\vec r}_2{}'}_{\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\vec r} \cdot \dot{\vec r}}$$

Pues $m_1 \dot{\vec r}_1{}' = m_1\left(\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\right)(-\dot{\vec r})$

$m_2 \dot{\vec r}_2{}' = m_2\left(\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\right)(\dot{\vec r})$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec R} \cdot \dot{\vec R} + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2}\dot{\vec r} \cdot \dot{\vec r} + \frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)}\dot{\vec r} \cdot \dot{\vec r}$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec R} \cdot \dot{\vec R} + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^{\cancel{2}}}\cancel{(m_2 + m_1)}\,\dot{\vec r} \cdot \dot{\vec r}$$

Por lo tanto, podemos reescribir al lagrangiano como

$$\mathcal{L} = T - V = \underline{\frac{1}{2}(m_1+m_2)\,\dot{\vec{R}}\cdot\dot{\vec{R}}} + \frac{1}{2}\mu\,\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} - V(r)$$

$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$, $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$

Masa reducida

Notamos entonces que podemos dividir al lagrangiano en dos contribuciones

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{cm} + \mathcal{L}$$

→ de la distancia relativa, como si tuviéramos una partícula en un potencial $V(r)$

del centro de masa → Partícula libre

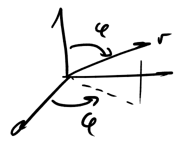
→ En coordenadas polares

Entonces encontrámosnos en $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\,\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} - V(r) = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$

polar — azimutal

Pero notamos que

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times(-\nabla V) = \vec{r}\times\left(-\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r}\right) = 0$$



Es decir que el momento angular es constante en todas sus componentes, no sólo en z.

Por lo tanto sabemos que el sistema se mueve en un sólo plano, entonces escojamos la constricción $\theta = \pi/2$, entonces $\dot{\theta} = 0$, $\sin\theta = 1$ y entonces

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r)$$

→ φ es una coordenada cíclica $\quad P_\varphi = \mu r^2\dot{\varphi} = \ell \equiv cte$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\ell}{\mu r^2}$$

Entonces las ecuaciones de E-L son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \frac{d}{dt}\left(P_\varphi = \mu r^2\dot{\varphi} = \ell\right) = 0$$

→ Notamos que $\mathcal{L} = T - V$ y que $E = T + V$ es la energía

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = \underbrace{\mu\ddot{r} - \left[\frac{2r\dot{\varphi}^2\mu}{2} - \frac{\partial}{\partial r}V(r)\right]} = 0$$

$$\mu\ddot{r} = r\dot{\theta}^2\mu - \frac{\partial}{\partial r}V(r) = r\left(\frac{\ell}{\mu r^2}\right)^2\mu - \frac{\partial}{\partial r}V(r) = \underbrace{\frac{\ell^2}{\mu r^3} - \frac{\partial}{\partial r}V(r)}_{\text{Ec. de movimiento}} = m\ddot{r}$$

y notamos que $\int\frac{1}{r^3}dr = \int r^{-3}dr = \frac{1}{-2}\frac{1}{r^2}$, por lo que

$$\mu\ddot{r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\underline{\frac{\ell^2}{2\mu r^2}} + V(r)\right) = -\frac{\partial}{\partial r}\underline{U_{eff}} \Longrightarrow \mathcal{L} = T - U_{eff}$$

Pero en la clase vimos que esto no ocurría pues lo que hicimos fue lo siguiente

¿Está este signo contrario?

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\dot{\theta} - V = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\left(\frac{\ell^2}{\mu r^2}\right) - V = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - \left(-\frac{\ell^2}{2\mu r^2} + V(r)\right)$$

¿cuál es el error?

Primero vemos que $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot r}\right) = m\ddot r - \frac{\partial L'}{\partial r} = \frac{-l^2}{\mu r^3} - \frac{\partial}{\partial r}V$ → No nos reproduce las ecuaciones de movimiento,

¿Y el error?

¡El error radica en que estoy confundiendo la dependencia de $\dot\varphi$ con P_φ y para hacer eso debería realizar la transformada de Legendre!

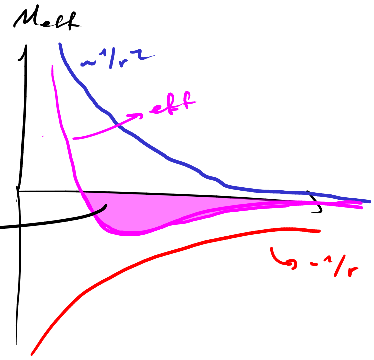
Que nos da este resultado pues en este caso $\mathcal{H} = E$

Entonces, regresando a nuestro sistema equivalente

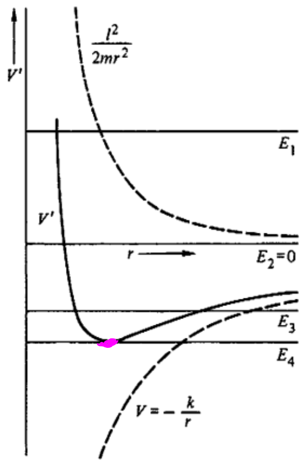
$$L = \frac{1}{2}\mu\dot r^2 - \underbrace{\left(\frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r)\right)}_{U_{eff}} \implies E = \frac{1}{2}\mu\dot r^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

= Problema de Keppler =

Sup que $V(r) = -\frac{k}{r} \implies U_{eff} = \underbrace{\frac{l^2}{2\mu r^2}} - \underbrace{\frac{k}{r}}$



sabemos de ver el potencial que aquí hay trayectorias cerradas.



Para calcularlas regresemos a nuestra ecuación de movimiento original

$$\mu\frac{d^2}{dt^2}r = \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{\partial}{\partial r}V(r) \longrightarrow$$ y en lugar de resolver para t, resolvemos para $r(\varphi)$,

$$\implies \frac{d}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{d}{d\varphi} = \dot\varphi\frac{d}{d\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}\frac{d}{d\varphi}$$

$$\implies \frac{d^2}{dt^2} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{l}{\mu r^2}\frac{d}{d\varphi}\right) = \frac{l^2}{\mu^2}\frac{1}{r^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{d\varphi}\right)$$

$\implies$ Ec. de movimiento es

$$\cancel{\mu}\frac{l^2}{\cancel{\mu^2}}\frac{1}{r^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{d\varphi}r\right) = \frac{l^2}{\cancel{\mu}r^3} - \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{k}{r}\right)\mu = \frac{l^2}{\cancel{\mu}r^3} - \frac{k}{r^2}\mu$$

Como hay muchos $1/r$, hagamos el cambio de variable $\alpha = 1/r$

$$\implies l^2\alpha^2\frac{d}{d\varphi}\left[\alpha^2\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right] = l^2\alpha^3 - k\alpha^2\mu$$

$$\implies \cancel{\alpha^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\cancel{\alpha^2}\left(-\frac{1}{\cancel{\alpha^2}}\right)\frac{d}{d\varphi}\alpha\right) = \alpha^{\cancel{3}} - k\cancel{\alpha^2}\mu/l^2$$

$$\implies \frac{d^2}{d\varphi^2}\alpha = -\alpha + \underbrace{\frac{k\mu}{l^2}}_{cte}$$

Y reacomodando $\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\alpha - \frac{k\mu}{\ell^2}\right) = -\left(\alpha - \frac{k\mu}{\ell^2}\right)$ ← Ecuación de un oscilador armónico

$$\Rightarrow \left(\alpha - \frac{k\mu}{\ell^2}\right) = \overset{\to \text{cte}}{A} \cos(\varphi - \varphi_0)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{r} = \frac{k\mu}{\ell^2}\left(\overset{\to \text{cte}}{\varepsilon} \cos(\varphi - \varphi_0) + 1\right)$$

$$\therefore \quad r = \frac{\ell^2}{k\mu} \frac{1}{\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)+1}$$

→ Cónicas en polares centradas en su "foco"

Ley 2 de Kepler

Si:

$\varepsilon = 0 \longrightarrow r = \frac{\ell^2}{k\mu} \Rightarrow$ círculo

$0 > \varepsilon > 1 \longrightarrow r < \infty \Rightarrow$ elipse

$\varepsilon = 1 \longrightarrow r \longrightarrow \infty \Rightarrow$ parábola, $\varphi \to \varphi_0 + \pi$

$\varepsilon > 1 \longrightarrow r \longrightarrow \pm\infty \Rightarrow$ Hipérbola, $\varphi \to \varphi_0 \pm \pi$

¿Cómo relacionamos ε y la Física?

Como el sistema es conservativo

$$E = T + V = \text{cte}$$

Fijémonos en $r_{min} = r(\varphi_0) = \frac{\ell^2}{k\mu} \frac{1}{\varepsilon + 1} \Rightarrow \frac{1}{r_{min}} = \frac{k\mu}{\ell^2}(\varepsilon+1)$

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 - \frac{k}{r}$$

, pero sabemos que

$\ell = \mu r \dot{r} \longrightarrow$ Momento angular

$$\Rightarrow \dot{r}^2 = \frac{\ell^2}{\mu^2 r^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\cancel{\mu} \frac{\ell^2}{\mu^{\cancel{2}} r^2} - \frac{k}{r}$$

$$= \frac{\ell^2}{2\mu}\frac{1}{r^2} - \frac{k}{r}$$

$$= \frac{\cancel{\ell^2}}{2\mu}\frac{(k\mu)^2}{\ell^{\cancel{4}\,2}}(\varepsilon+1)^2 - \frac{k^2\mu}{\ell^2}(\varepsilon+1)$$

→ Evaluando en r_{min}

$$= \frac{k^2\mu}{2\ell^2}\left[\varepsilon^2 + 2\varepsilon + 1 - 2\varepsilon - 2\right] = \frac{k^2\mu}{2\ell^2}\left(\varepsilon^2 - 1\right)$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu k^2}}$$

← esta es la excentricidad en términos de la energía

→ Solución en el tiempo

Como tenemos un sistema conservativo, recordemos que (tarea 1)

$$E = T + U_{eff} \Rightarrow \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}}\left(E - U_{eff}\right)^{1/2} \Rightarrow \int dt = \Delta t = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{E + \frac{k}{r} - \frac{\ell^2}{2\mu r^2}}}$$

pero como $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\ell}{\mu r^2} \Rightarrow d\varphi = \frac{\ell}{\mu r^2} dt$

entonces $\int d\varphi = \Delta\varphi = \int_{r_0}^{r} \frac{\ell\, dr}{\mu r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{eff})}} = \int_{r_0}^{r} \frac{dr/r^2}{\sqrt{\frac{2\mu}{\ell^2}E - \frac{2\mu}{\ell^2}\left(V - \frac{\ell}{2\mu}\frac{1}{r^2}\right)}}$ $\quad V \to -k/r$

y de nuevo si $u = \frac{1}{r} \Rightarrow \Delta\varphi = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{\ell^2} - \frac{2\mu}{\ell^2}k u - u^2}}$

Caso general

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a+by+cy^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arccos\left(-\frac{b+2cy}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)$$

de aquí también resolvemos la ec. de movimiento de $r(\varphi)$

pero nos conviene más

$$dt = \frac{\mu}{\ell} r^2 d\varphi = \frac{\mu}{\ell}\left(\frac{\ell^2}{k\mu}\frac{1}{\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)+1}\right)^2 d\varphi$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\ell^3}{\mu k^2}\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{[\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)+1]^2}$$

si $\varepsilon = 1$ (parábola)

$1 + \cos\theta = 2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

$u = \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \to du = \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi$

Para órbitas elípticas regresemos a

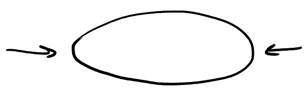
$$\Delta t = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}E - \frac{\ell^2}{\mu^2}\frac{1}{r^2} + \frac{2k}{\mu}\frac{1}{r}}}$$

si $r = a(1 - \varepsilon\cos\psi)$

$dr = a\varepsilon\sin\psi\, d\psi$

con $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{2E\ell^2}{mk^2}}$

y para una elipse sabemos que



en estos puntos $\dot r = 0$ pues es su máximo o mínimo

entonces

$$E = \frac{1}{2}\cancel{\mu \dot r^2} + \frac{\ell^2}{2\mu}\frac{1}{r^2} - \frac{k}{r}$$

$$\Rightarrow r^2 + \frac{k}{E}r - \frac{\ell^2}{2\mu E} = 0$$

$$\Rightarrow r_{1,2} = -\frac{k}{E} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2E}\right)^2 - \frac{\ell^2}{2\mu E}}$$

entonces $2a = r_1 + r_2 = -\frac{k}{E}$

$$\boxed{a = \frac{k}{2E}}$$

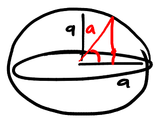
y de $\varepsilon = \sqrt{1 + \ldots} \Rightarrow \underline{\ell^2 = a(1-\varepsilon^2)\mu k}$

$$\Rightarrow r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)+1}$$

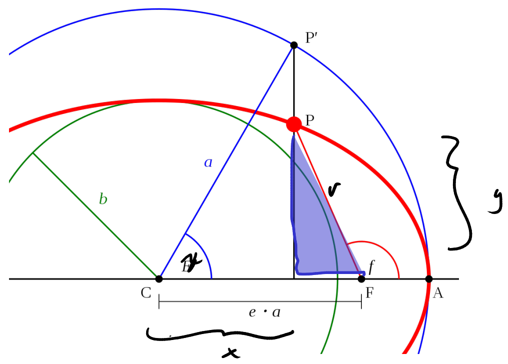
Preludio geométrico: Excentricidad anómala

elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Definimos ψ tal que es un punto que cruza la elipse y llega normal al semi eje mayor



Definimos $\cos\psi = \frac{x}{a}$



$$\Rightarrow \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{a^2} = 1 - \cos^2\psi = \sin^2\psi$$

$$\therefore \sin\psi = \frac{y}{a}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \Rightarrow \varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \Rightarrow b^2 = (1-\varepsilon^2)a^2$$

Del triángulo rectángulo sacamos r

$$r^2 = y^2 + (a\varepsilon - x)^2$$

$$= b^2\sin^2\psi + (a\varepsilon - a\cos\psi)^2$$

$$= b^2\sin^2\psi + a^2\varepsilon^2 - 2a^2\varepsilon\cos\psi + a^2\cos^2\psi$$

$$= (1-\varepsilon^2)a^2\sin^2\psi + a^2(\varepsilon^2 - 2\varepsilon\cos\psi + \cos^2\psi)$$

$$= a^2\left\{(1-\varepsilon^2)(1-\cos^2\psi) + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\cos\psi + \cos^2\psi\right\}$$

$$= a^2\left\{1 - \cancel{\varepsilon^2} - \cancel{\cos^2\psi} + \varepsilon^2\cos^2\psi + \cancel{\varepsilon^2} - 2\varepsilon\cos\psi + \cancel{\cos^2\psi}\right\}$$

$$= a^2(1 - 2\varepsilon\cos\psi + \varepsilon^2\cos^2\psi)$$

$$= a^2(1 - \varepsilon\cos\psi)^2$$

$$\therefore \underline{r = a(1 - \varepsilon\cos\psi)}$$

entonces, vamos a ver que $\Delta t = -\sqrt{\frac{\mu}{2k}} \int_{r_0}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{r - \frac{r^2}{2a} - \frac{a(1-\varepsilon)^2}{2}}}$

$r = a(1-\varepsilon\cos\psi)$

$$\Rightarrow r - \frac{r^2}{2a} - \frac{a(1-\varepsilon^2)}{2} = a(1-\varepsilon\cos\psi) - \frac{1}{2}a(1-\varepsilon\cos\psi)^2 - \frac{a(1-\varepsilon^2)}{2}$$

$$= a - a\varepsilon\cos\psi - \frac{1}{2}a(1-2\varepsilon\cos\psi+\varepsilon^2\cos^2\psi) - \frac{a}{2} + \frac{\varepsilon^2 a}{2}$$

$$= a\left\{\cancel{1} - \cancel{\varepsilon\cos\psi} - \cancel{\tfrac{1}{2}} + \cancel{\varepsilon\cos\psi} - \frac{\varepsilon^2}{2}\cos^2\psi - \cancel{\tfrac{1}{2}} + \frac{\varepsilon^2}{2}\right\}$$

$$= \frac{a}{2}\varepsilon^2(1-\cos^2\psi) = \frac{a}{2}\varepsilon^2\sin^2\psi$$

$$\Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{\mu}{k2}} \int_0^{\psi} \frac{a(1-\varepsilon\cos\psi)\,a\varepsilon\sin\psi}{\sqrt{\frac{a}{2}}\,\varepsilon\sin\psi}\,d\psi = \sqrt{\frac{\mu a^3}{k}} \int_0^{\psi}(1-\varepsilon\cos\psi)\,d\psi$$

si $\psi \to 2\pi \Rightarrow \Delta t = T = \sqrt{\frac{\mu}{k}a^3}\,2\pi \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}\,a^{3/2}}$ 3ra Ley de Kepler

Cantidades conservadas

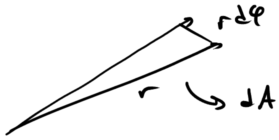
Habíamos visto que $\frac{d}{dt}\left(p_\varphi = mr^2\dot\varphi\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\dot\varphi) = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\dot\varphi\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\dot A) = 0$ 1ra Ley de Kepler!

Siempre se barren áreas iguales en tiempos iguales

y



$dA = \frac{r^2\,d\varphi}{2}$

$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2}\dot\varphi \longrightarrow$ velocidad de área

Vemos que $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot\varphi = \frac{\ell}{2m} \longrightarrow \int_0^T \frac{dA}{dt}\,dt = A_{elipse} = \frac{\ell T}{2m} = \pi ab$

$= \pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}$

$= \pi a^2\sqrt{1-\left(1-\frac{\ell^2}{mka}\right)}$

$\Rightarrow \frac{\cancel{\ell}T}{2m} = \pi a^2\sqrt{\frac{\cancel{\ell^2}}{mka}}$

$\Rightarrow T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{k}}$ 3ra Ley de nuevo ¨

regresemos a $t = -\underbrace{\sqrt{\frac{\mu a^3}{k}}}_{\frac{T}{2\pi} = \frac{1}{\omega}}\int_0^{\psi}(1-\varepsilon\cos\psi)\,d\psi \Rightarrow t = \frac{1}{\omega}\int(1-\varepsilon\cos\psi)\,d\psi$

$= \frac{1}{\omega}(\psi - \varepsilon\sin\psi)$

$\Rightarrow \omega t = \psi - \varepsilon\sin\psi$ → anomalía promedio (mean anomaly)

Otra cantidad: Vector de (Laplace-)Runge-Lenz

$\vec A\times(\vec B\times\vec C) = \vec B[\vec A\cdot\vec C] - \vec C(\vec A\cdot\vec B)$

Sabemos que $\dot{\vec p} = -\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\vec r}{r} = f(r)\frac{\vec r}{r}$

$$\Rightarrow \dot{\vec p}\times\vec L = f(r)\frac{\vec r}{r}\times(m\vec r\times\dot{\vec r}) = \frac{f(r)m}{r}[\vec r\times(\vec r\times\dot{\vec r})]$$

$$= \frac{f(r)m}{r}\left(\vec r(\vec r\cdot\dot{\vec r}) - \dot{\vec r}\overbrace{(\vec r\cdot\vec r)}^{r^2}\right)$$

Recordemos que $\frac{d}{dt}(\vec r\cdot\vec r) = 2\vec r\cdot\dot{\vec r} = \frac{d}{dt}(r^2) = 2r\dot r$ y que $\frac{d}{dt}\vec L = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec p\times\vec L) = \frac{f(r)m}{r}\left[r\dot r\vec r - r^2\dot{\vec r}\right] = f(r)mr^2\left[\frac{\dot r}{r^2}\vec r - \frac{\dot{\vec r}}{r}\right]$$

y como $\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec r}{r}\right) = \vec r\left(-\frac{1}{r^2}\dot r\right) + \frac{\dot{\vec r}}{r} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec p\times\vec L) = -f(r)mr^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec r}{r}\right)$

Si consideras $V = -\frac{k}{r} \Rightarrow f = -\frac{k}{r^2} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec p\times\vec L) = mk\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec r}{r}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{mk}{r}\vec r\right)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\vec p\times\vec L - \frac{mk}{r}\vec r}_{\vec A}\Big) = 0$$

$\vec A \longrightarrow$ vector conservado

Notemos que $\vec A\cdot\vec L = 0$ pues $\vec r\perp\vec L$ y $(\vec p\times\vec L)\cdot\vec L = 0 \Rightarrow \vec A$ está en el plano de movimiento

$$\vec A\cdot\vec r = Ar\cos\varphi = \vec r\cdot(\vec p\times\vec L) - mkr$$
$$= \vec L\cdot(\vec r\times\vec p) - mkr$$
$$= \ell^2 - mkr$$

$$\Rightarrow Ar\cos\varphi = \ell^2 - mkr \Rightarrow r(A\cos\varphi + mk) = \ell^2$$

$$\Rightarrow r = \frac{\ell^2/mk}{\left(\frac{A}{mk}\cos\varphi + 1\right)} \quad // \qquad \frac{A}{mk} = \text{excentricidad}$$

→ Otros potenciales

$U_{eff} = \frac{l^2}{2\mu}\frac{1}{r^2} - \frac{k}{r}$

Vimos que si $V = -\frac{k}{r} \longrightarrow$ tendría órbitas cerradas

¿Qué pasa si V es de otra forma?

Sp $V = -k r^k$

¿Hay órbitas cerradas?

Sp. $V = \alpha r^n \longrightarrow$ Sp. órbitas circulares $\Rightarrow \ddot{r} = 0$

$$\Rightarrow \frac{dU_{eff}}{dr} = 0 = \alpha n r^{n-1} + \frac{l^2}{2\mu}\frac{-2}{r^3}$$

$$\Rightarrow \alpha n r^{n-1} = \frac{l^2}{\mu}\frac{1}{r^3} \longrightarrow r^n = \frac{l^2}{2\mu r^2}\frac{2}{\alpha n}$$

La energía si $\dot{r} = 0$

$$E = \frac{l^2}{2\mu r^2} + \alpha r^n = \frac{l^2}{2\mu r^2}\left(\frac{n+2}{n}\right) \Rightarrow r = \sqrt{\frac{2\mu E}{l^2}\frac{n}{n+2}}$$

↳ $n = -2$!

Ahora, vemos si son estables.

Sabemos que $\mu \ddot{r} = -\frac{\partial}{\partial r} U_{eff}$, si estable $\frac{\partial^2}{\partial r^2} U > 0$

$$-\frac{\partial}{\partial r}(\mu \ddot{r}) = +\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{l^2}{2\mu r^2} + \alpha r^n\right)$$

$$= \frac{l^2}{\mu}\frac{-2(-3)}{2}\frac{1}{r^4} + \alpha n(n-1) r^{n-2}$$

$$= \frac{-3l^2}{\mu}\frac{1}{r^4} - \alpha n(n+1) r^{n-2}$$

Para órbitas circulares $\alpha n r^{n-1} = \frac{l^2}{\mu r^3} \Rightarrow -\alpha n r^{n-1}(n+1) r^{-1} = -\frac{l^2}{\mu r^3}(n+1) r^{-1} = -\frac{l^2}{\mu r^4}(n+1)$

$$\Rightarrow -\frac{\partial}{\partial r}(\mu \dot{r}) = \frac{-3l^2}{\mu r^4}(n+2) \longrightarrow \text{Estable si } n > -2$$