3.- Medios materiales

3.1.- Expansión multipolar

En la sección anterior se determinó que la función de Green de Dirichlet para la ecuación de Laplace es

$$G_D(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}}_{\text{Observando esta función notamos lo siguiente:}} + f_D(\vec{r},\vec{r}\,'), \quad \text{tal que} \quad \nabla^2 f_D(\vec{r},\vec{r}\,') = 0 \text{ en } V \to \text{Volumen a determinar } G_D(\vec{r},\vec{r}\,')$$

$$\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|} = \frac{1}{(r^2+(r')^2-2rr'\cos\gamma)^{1/2}} = \begin{cases} \frac{1}{r}\left(1+(r'/r)^2-2(r'/r)\cos\gamma\right)^{-1/2} \to \text{si } r' \ll r \text{ es conveniente hacer una expansión en serie de potencias} \\ \frac{1}{r'}\left(1+(r/r')^2-2(r/r')\cos\gamma\right)^{-1/2} \to \text{si } r \ll r' \text{ lo mismo} \end{cases}$$

Expresiones iguales pero

γ = ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{r}\,'$!

Definiendo, entonces a $r_< = \min(r,r')$ y $r_> = \max(r,r')$, podemos ver que

$$\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|} = \frac{1}{r_>}\left(1+\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2-2\left(\frac{r_<}{r_>}\right)\cos\gamma\right)^{-1/2} = \frac{1}{r_>}\left(1+t^2-2tu\right)^{-1/2} = \frac{1}{r_>}\left[1+t(t-2u)\right]^{-1/2} = \frac{1}{r_>}\left(1+\epsilon\right)^{-1/2}$$

$t = r_</r_>$, $u = \cos\gamma$; $\epsilon = t(t-2u)$

Realizando la expansión en series de Taylor en ϵ

$$\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|} = \frac{1}{r_>}\left(1-\frac{1}{2}\epsilon+\frac{3}{8}\epsilon^2-\frac{5}{16}\epsilon^3+\dots\right) \longrightarrow f(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^n f(0)}{d\epsilon^n}\epsilon^n$$

$$= \frac{1}{r_>}\left(1-\frac{1}{2}t(t-2u)+\frac{3}{8}t^2(t-2u)^2-\frac{5}{16}t^3(t-2u)^3+\dots\right) \to \epsilon = t(t-2u)$$

$$= \frac{1}{r_>}\Big(\underbrace{1}_{P_0(u)}+t\cdot\underbrace{u}_{P_1(u)}+t^2\underbrace{\left(\frac{3u^2-1}{2}\right)}_{P_2(u)}+t^3\underbrace{\left(\frac{5u^3-3u}{2}\right)}_{P_3(u)}+\dots\Big) \to \text{Agrupamos potencias de } t$$

Por lo tanto, podemos concluir que

$$\boxed{\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|} = \frac{1}{r_>}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l P_l(\cos\gamma) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\gamma)}$$

$\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}$ es la función generadora de los Polinomios de Legendre

Adicionalmente, puede emplearse el teorema de adición para reescribir $P_l(\cos\gamma)$ en términos de los armónicos esféricos. Esto da como resultado

$$\boxed{\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|} = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\underbrace{Y_l^{m*}(\theta',\varphi')}_{\text{Medidos desde } \hat{r}'}\underbrace{Y_l^m(\theta,\varphi)}_{\text{Medidos desde } \hat{r}}}$$

Si se considera una distribución de carga $\rho_{ext}(\vec{r})$ finita, la función de Green cumple en ser

$$G_D(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|} \Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V d^3r'\,\frac{\rho_{ext}(\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}$$

Podemos emplear los resultados anteriores para expandir el potencial

Consideremos el caso donde $r_> = r$ y $r_< = r'$, es decir, medimos el potencial lejos de la fuente.

Descompondremos al potencial en una suma de l-contribuciones: $\phi(\vec{r}) = \sum_l \phi_l(\vec{r})$

Caso $\|\vec{r}-\vec{r}'\|^{-1} = \sum \frac{(r')^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\gamma)$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int_{V'} d^3r' (r')^l P_l(\cos\gamma)\rho(\vec{r}')$$

$\|\vec{r}-\vec{r}'\|^{-1} = 4\pi \sum_l \sum_m \frac{1}{2l+1} \frac{(r')^l}{r^{l+1}} Y_l^{m*}(\theta',\varphi') Y_l^m(\theta,\varphi)$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_l \sum_m \frac{4\pi}{2l+1} \left[\int_V d^3r' \, Y_l^{m*}(\theta',\varphi')(r')^l \rho(\vec{r}') \right] \frac{Y_l^m(\theta,\varphi)}{r^{l+1}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_l \sum_m \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_l^m(\theta,\varphi)}{r^{l+1}}$$

$l=0$: $P_l(\cos\gamma) = 1$

$$\phi_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \int d^3r' \rho(\vec{r}').$$

$Q_{tot} = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \rightarrow$ Momento monopolar

$$\phi_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_{TOT}}{r}$$

$l=0 \Rightarrow m=0 \Rightarrow Y_l^{0*}(\theta',\varphi') = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta) \Big|_{l=0} = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2}$

$q_{00} = \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') Y_l^{0*}(\theta',\varphi') = \frac{q}{\sqrt{4\pi}} \longrightarrow$ Momento monopolar

$l=1$: $P_l(\cos\gamma) = \cos\gamma = \hat{r}\cdot\hat{r}'$

$$\phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \overbrace{P_1(\cos\gamma) r'}^{r'\cos\gamma = \vec{r}'\cdot\hat{r}}$$

$\vec{p} \equiv \int d^3r' \rho(\vec{r}') \vec{r}' \longrightarrow$ Dipolo

$$\Rightarrow \phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}$$

$l=1 \Rightarrow m=-1,0,1 \Rightarrow Y_1^1(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2\cdot1+1}{4\pi}\frac{(1-1)!}{(1+1)!}} \overbrace{P_1^1(\cos\theta)}^{-\sin\theta} e^{i\varphi}$

$q_{l,-m} = (-1)^m q_{l,m}^*$ $\quad \Rightarrow Y_1^1(\theta,\varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \, e^{i\varphi}$

y $\quad Y_1^0(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2\cdot1+1}{4\pi}} P_1(\cos\theta) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$

$q_{1,1} = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \underbrace{\sin\theta' e^{-i\varphi'}}_{} r' \sqrt{\frac{3}{8\pi}}(-1)$

pero notamos que $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$

$\Rightarrow \sin\theta \, e^{-i\varphi} = \sin\theta\cos\varphi - i\sin\theta\sin\varphi$

$\Rightarrow r\sin\theta \, e^{-i\varphi} = r\sin\theta\cos\varphi - ir\sin\theta\sin\varphi$

$= x - iy$

$$\Rightarrow q_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int d^3r' \rho(\vec{r}')(x'-iy')$$

$$= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (P_x - iP_y)$$

con $P_x = \vec{P}\cdot\hat{e}_x$, $P_y = \vec{P}\cdot\hat{e}_y$

↳ Definido como en la izquierda

$$\Rightarrow q_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \underbrace{r'\cos\theta'}_{z'} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} P_z$$

$$\Rightarrow q_{1,-1} = (-1)^1 q_{1,1}^* = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (P_x + iP_y)$$

$l=2$: $P_2(\cos\gamma) = \frac{1}{2}(3\cos^2\gamma - 1)$

$$\phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{(3\cos^2\gamma - 1)}{2}$$

Con esta expresión puede construirse el cuadrupolo sin embargo, esto será más evidente en otro desarrollo, por el momento,

$$\phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^3} \hat{r}^T \mathbb{Q} \cdot \hat{r}$$

↳ Tensor cuadrupolar

$(\mathbb{Q})_{ij}$

$l = 2, m = -2,-1,0,1,2$. Veamos que

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \frac{1}{2}\left[3\left(\frac{z}{r}\right)^2 - 1\right]$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta\cos\theta \, e^{i\varphi} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos\theta \sin\theta e^{i\varphi} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{z}{r}\left(\frac{x+iy}{r}\right)$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\theta \, e^{2i\varphi} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{(x^2-y^2-i2xy)}{r^2}$$

$\sin^2\theta(e^{i\varphi})^2 = \sin^2\theta(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2$
$= \sin^2\theta[\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + i2\sin\varphi\cos\varphi]$
$= [(\sin\theta\cos\varphi)^2 - (\sin\theta\sin\varphi)^2 - i2(\sin\theta\cos\varphi)(\sin\varphi\sin\theta)]$
$= (x^2-y^2-2xy)/r^2$

Realizar las integrales, de como resultado

$$q_{2,0} = \int d^3r' \rho(\vec{r}')(r')^2 Y_2^{0*}(\theta',\varphi')$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int d^3r' \rho(\vec{r}')\left(3(z')^2 - (r')^2\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}} Q_{zz}$$

$$q_{2,1} = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{8}}(Q_{xz} - iQ_{yz}), \quad q_{2,2} = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{15}{4\pi}}(Q_{xx} - 2iQ_{xy} - Q_{yy})$$

En general

$$Q_{ij} = \int d^3r' \rho(\vec{r}')(3r_i'r_j' - (r')^2\delta_{ij}) \rightarrow \sum Q_{ii} = 0$$

↳ Esto se verá más adelante

Otra forma de ver la expansión multipolar es realizando la expansión en serie de Taylor

$$\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} = \frac{1}{r_s}\left(1+\left(\frac{r_c}{r_s}\right)^2 - 2\left(\frac{r_c}{r_s}\right)\cos\gamma\right)^{-1/2}$$ sin embargo, veamos que en general, para campos escalares

Sabemos que si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$

si $\psi: \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$, entonces

$$\psi(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_0) + \underbrace{\sum_{j}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} f(\vec{x}_0)(x_j - x_{0j})}_{\nabla f(\vec{x}_0)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)} + \frac{1}{2}\underbrace{\underbrace{\sum_j\sum_k \frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_j \partial x_k}(x_j - x_{0j})(x_k - x_{0k})}_{\frac{1}{2}(x-x_0)^T\cdot\nabla\nabla f(\vec{x}_0)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)}}_{\frac{1}{2}[(\vec{x}-\vec{x}_0)\cdot\nabla][(\vec{x}-\vec{x}_0)\cdot\nabla]f(\vec{x}_0)} + \cdots$$

El resultado puede, entonces, generalizarse a $\psi(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\nabla)^n}{n!}\psi(\vec{r}_0)$

Haciendo el cambio $\vec{r} \to \vec{r} + \Delta\vec{r}$, la expresión anterior y escogiendo $\vec{r}_0 = \vec{r}$

$$\psi(\vec{r}+\Delta\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\Delta\vec{r}\cdot\nabla)^n \psi(\vec{r}).$$

Si $\psi(\vec{r}') = \frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}$ entonces $\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) + \psi_1(\vec{r}) + \psi_2(\vec{r}) + \cdots$ con $\Delta\vec{r} = -\vec{r}'$ alrededor de $\vec{r}' = \vec{0}$

$\longrightarrow \psi_0(\vec{r}) = \frac{1}{r}$

$\longrightarrow \psi_1 = -\vec{r}'\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = +\vec{r}'\cdot\frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{\vec{r}'\cdot\vec{r}}{r^3}$

$\nabla(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \nabla\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\nabla\vec{b}$

$\longrightarrow \psi_2 = +\frac{(\vec{r}'\cdot\nabla)^2}{2!}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\vec{r}'\cdot\nabla}{2!}\left(\vec{r}'\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right) = \frac{\vec{r}'\cdot\nabla}{2!}\left(\frac{-\vec{r}'\cdot\vec{r}}{r^3}\right) = \vec{r}'\cdot\left[\cancel{\nabla(-\vec{r}')}^{\,0}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} - \vec{r}'\cdot\nabla\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\right]$

$\Rightarrow \psi_2 = -\vec{r}'\cdot\left(\vec{r}'\cdot\nabla\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\right)\frac{1}{2!}$

Para esto, hagamos el desarrollo por índices, lo que puede simplificar las cuentas

$$\left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right)_j = \frac{r_j}{r^3} \Rightarrow \left[\nabla\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\right]_{ij} = \frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{r_j}{r^3}\right) \Rightarrow \left[\vec{r}'\cdot\nabla\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\right]_j = \sum_i r_i'\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{r_j}{r^3}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{r}'\cdot\left(\vec{r}'\cdot\nabla\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\right) = \sum_j r_j'\sum_i r_i'\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{r_j}{r^3}\right) = \sum_j\sum_i r_j' r_i'\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{r_j}{r^3}\right)$$

Desarrollando

$$\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{r_j}{r^3}\right) = \frac{1}{(r^6)}\left[\left(\frac{\partial r_j}{\partial r_i}\right)r^3 - r_j\left(\frac{\partial r^3}{\partial r_i}\right)\right]$$

pero $\frac{\partial(r^3)}{\partial r_i} = 3r^2\frac{\partial(r)}{\partial r_i} = 3r^2\frac{1}{2}\left(\sum_k r_k^2\right)^{-1/2}\sum_k\frac{\partial r_k^2}{\partial r_i}$, con $r = \left(\sum_k r_k^2\right)^{1/2}$

$= 3r^2\frac{1}{2}\frac{1}{r}\sum_k 2r_k\frac{\partial r_k}{\partial r_i}$

$= 3r\sum_k r_k\delta_{ki}$

y sustituyendo con $\partial r_j/\partial r_i = \delta_{ji}$, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{r_j}{r^2}\right) = \frac{1}{r^6}\left(\delta_{ij}r^3 - r_j 3r^2\sum_k\delta_{ki}r_k\right) = \frac{1}{r^5}\left(\delta_{ij}r - 3\sum_k r_j\delta_{ik}r_k\right)$$

$$\Rightarrow \sum_j\sum_i r_j' r_i'\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{r_j}{r^3}\right) = \frac{1}{r^5}\Bigg(r^2\underbrace{\underbrace{\sum_i\sum_j r_j' r_i'\delta_{ij}}_{\sum_i r_i' r_i'}}_{=(r')^2} - 3\sum_i\sum_j\sum_k r_j' r_i' r_j \underbrace{r_k\delta_{ik}}_{r_i}\Bigg) = \frac{1}{r^5}\left((rr')^2 - 3(\vec{r}\cdot\vec{r}')\right)$$

$(\vec{r}\cdot\vec{r}')\ (\vec{r}\cdot\vec{r}')$

Por lo tanto, tenemos que $\phi_2(\vec r) = +\frac{(\vec r'\cdot\nabla)^2}{2!}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{2!}\vec r'\cdot\left(\vec r'\cdot\nabla\left(\frac{\vec r}{r^3}\right)\right)$

$$= \frac{1}{2r^5}\left(3(\vec r\cdot\vec r') - (rr')^2\right).$$

Sin embargo, por claridad quedémonos con la expresión con las sumas:

$$\phi_2(\vec r) = \frac{1}{2r^5}\sum_{ij} r_i\left(3r_i'r_j' - (r')^2\delta_{ij}\right)r_j$$

Ahora, escribiendo el potencial $\phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\vec r')}{\|\vec r-\vec r'\|}d^3r'$ y empleando los resultados anteriores

$\phi(\vec r) = \phi_0(\vec r)+\phi_1(\vec r)+\phi_2(\vec r)+\dots$, donde

$$\phi_0(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int d^3r'\rho(\vec r') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{tot}}{r} \qquad \phi_1(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec r\cdot\Big(\underbrace{\int d^3r'\rho(\vec r')\vec r'}_{=\vec p\ \to\ \text{Momento dipolar}}\Big) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec r\cdot\vec p}{r^2}$$

$$\phi_2(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2r^5}\sum_{ij} r_i\Big[\underbrace{\int d^3r'\rho(\vec r')(3r_i'r_j' - (r')^2\delta_{ij})}_{=Q_{ij}\ \text{elementos del tensor cuadrupolar}}\Big]r_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{r_iQ_{ij}r_j}{r^5} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec r^{\,T}Q\vec r}{2r^5}$$

— Propiedades generales

Monopolo Si $Q_{tot}\neq 0$, el término dominante en $r\gg r'$ es el monopolo $\Rightarrow \phi(\vec r)\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$

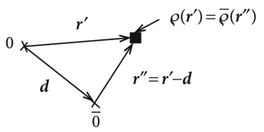
Dipolo Si $Q_{tot}=0$, quien domina es el dipolo

$$\phi(\vec r)\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec p\cdot\vec r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pr\cos\gamma}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\gamma}{r}$$

ángulo entre $\vec r$ y $\vec p$. Si $\vec p\parallel\hat e_z$, es el ángulo polar usual.

Notemos que este término es invariante ante rotaciones en el sistema coordenado

En general $\vec p$ no es invariante ante traslaciones



$$\bar{\vec p} = \int d^3r''\,\vec r''\,\bar\rho(\vec r'')$$

$$= \int d^3r''(\vec r'-\vec d)\bar\rho(\vec r'') = -\int d^3\,\bar\rho(\vec r'')\,\vec d + \int \underbrace{d^3r''}_{=d^3r'}\vec r'\underbrace{\bar\rho(\vec r'')}_{=\rho(\vec r')}$$

$$= \vec p - \underbrace{Q_{Tot}\vec d}$$

Pero si $Q_{tot}=0$, entonces sí es invariante

Si $\rho(\vec r)$ es centro-simétrica

↳ $\rho(-\vec r)=\rho(\vec r)$ entonces $\vec p=\vec 0$ ⟶ $\vec p = \int d^3r'(\vec r')\rho(\vec r') \overset{\vec r'\to-\vec r'}{=} \int d^3r'(-\vec r')\overbrace{\rho(-\vec r')}^{=\rho(\vec r')} = -\vec p$

$\therefore\ \vec p=\vec 0$ ⟶ Si además $Q_{tot}=0$, domina ahora el cuadrupolo

Cuadrupolo

Cantidad invariante ante cambios de sist. de referencia

Notemos que Q tiene traza nula

$$\to Tr(Q) = \sum_i Q_{ii} = \sum_i\int d^3r'\rho(\vec r')(3r_i'r_i' - (r')^2\delta_{ii}) = \int d^3r'\rho(\vec r')\Big(3\underbrace{\sum_i(r_i')^2}_{(r')^2} - (r')^2\underbrace{\sum_i\delta_{ii}}_{=3}\Big) = 0$$

Además es simétrico $Q_{ij}=Q_{ji}$, pues $\delta_{ij}=\delta_{ji}$ y $r_i'r_j'=r_j'r_i'$

$\Rightarrow$ Sólo hay cinco componentes independientes