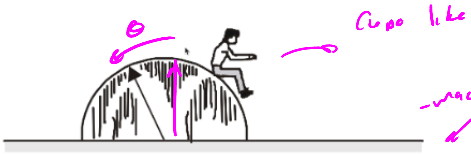
# Solución Tarea 5

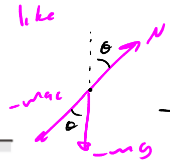
**1.1) Deslizamiento**
Un infante está sentado en la parte superior de un montículo de hielo en forma de semiesfera de radio $R$. Se da a sí mismo un pequeño impulso (despreciable en los cálculos) y comienza a deslizarse hacia abajo. ¿A qué altura, medida desde el piso, el infante deja de tener contacto con el hielo? Considera que no hay fricción.

Suponiendo que en el punto más alto el niño tiene $v=0$, entonces

$$mgR(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv^2 \quad \dots(1)$$

↳ cuando que el piso




$$\longrightarrow \hat{r}: \; N - mg\cos\theta = -ma_c = -mv^2/R \quad \dots(2)$$

(20 puntos)

queremos el instante en el que el niño se separa, es decir $N=0$

de (2) $\Rightarrow \; mg\cos\theta = mv^2/R$

Sustituyendo en (1) $\Rightarrow \; mgR(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv^2 = mRg\frac{\cos\theta}{2}$

$$\Rightarrow mgR\left(1-\cos\theta\,\frac{3}{2}\right)=0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$$

Se separa a una altura $h = R\cos\theta = \frac{2}{3}R$ //

**1.2) Resorte modificado**
Considera un resorte con constante $k$ que une una pared con un bloque de masa $M$, de tal forma que el bloque puede deslizarse por el piso, el cual no genera fricción alguna. Se da un impulso la masa $M$ de tal forma que comienza a oscilar alrededor de su punto de equilibrio con una amplitud $A_0$ y un periodo $T_0 = 2\pi\sqrt{M/k}$.

1) - Supón que, cuando la masa tiene una velocidad cero, se le incrusta un cacho de plastilina de masa $m$ sin modificar su trayectoria o rebotar, sólo se pega. Encuentra el nuevo periodo y amplitud del sistema, así como el cambio de energía cinética.
2) - Repite el inciso anterior pero ahora supón que se incrusta la plastilina cuando la masa $M$ va a su velocidad máxima.

Sabemos que en general, la solución es

sup $\varphi_0 = 0$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \cancel{\varphi_0})$$

$$\Rightarrow v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

con $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\sqrt{\frac{k}{M}}$

(20 puntos)

Consideremos la conservación del momento lineal y la energía

$$P_{\text{con plastilina}} = P_{\text{sin plastilina}} \Rightarrow (M+m)V' = mV$$

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(M+m)(v')^2 + \frac{1}{2}kx'^2$$

1) como la masa tiene $V=0 \Rightarrow V'=0 \Rightarrow \underline{A^2 = (x')^2}$ → Tiene la misma amplitud

Para el periodo, notamos que $T' = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}\left(\frac{M+m}{M}\right)} = T\sqrt{\frac{M+m}{M}}$ //

2) El periodo se modifica como en 1) $T' = T\sqrt{\frac{M+m}{M}}$

Del momento, vemos que $V' = \frac{m}{M+m}V$

y de la energía

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\left[mv^2 - (M+m)v'^2\right] = \frac{1}{2}\left(mv^2 - (M+m)\left(\frac{m}{M+m}\right)^2 v^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}v^2 m\left(1 - \frac{m}{M+m}\right) = \frac{1}{2}mv^2\left(\frac{M}{M+m}\right)$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}k\left(x'^2 - x^2\right)$$

$$\Rightarrow 0 = \Delta E_c - \Delta U = \frac{1}{2} m v^2 \left( \frac{M}{M+m} \right) - \frac{1}{2} k \left( x'^2 - x^2 \right)$$

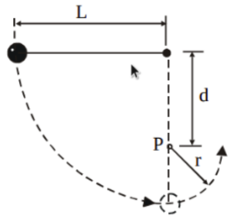
pero queremos $x = 0$, entonces $k x'^2 = m v^2 \left( \frac{M}{M+m} \right)$

pero como $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k x = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow x' \sim A' = A \sqrt{\frac{m}{M+m}}$

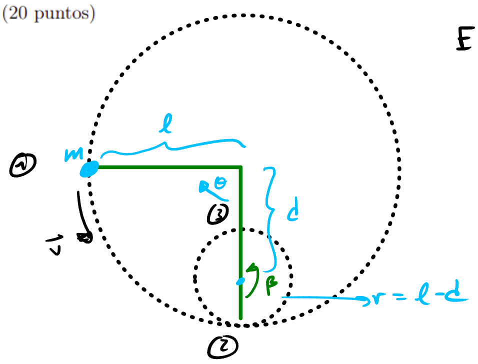
**1.3) Problema clásico**

Un cordón atado a una esfera tiene una longitud $L$ y, si se suelta de forma correcta, la esfera sigue una trayectoria circular. En su camino, el cordón se encuentra con un clavo a una distancia $d$ desde el pivote del cordón.

1. ¿A qué velocidad va la esfera cuando el cordón entre en contacto con el clavo?
2. Después de que el cordón y el clavo se tocan, a qué velocidad va la esfera cuando llegué a su punto máximo?
- Demuestra que si queremos que la trayectoria de la esfera alrededor de la clavija también sea una esfera, se debe cumplir que $d > 3L/5$.




(20 puntos)




$E = T + U = \frac{1}{2} m v^2 + m g h$

De ① — ② $h = \ell(1 - \cos\theta)$

En ① $V = 0,\ \theta = \pi/2 \Rightarrow E = mg\ell$

② $\theta = 0 \Rightarrow E = mg\ell = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v^2 = 2g\ell \rightarrow$ ①

De ② — ③ $h = r(1 - \cos\beta)$

② $v = \sqrt{2g\ell},\ \beta = 0 \Rightarrow E' = mg\ell$

③ $\beta = \pi \Rightarrow E' = mg\ell = \frac{1}{2} m v'^2 + m g r 2$

$$\Rightarrow (v')^2 = 2g\ell - 4gr = 4g\left(\frac{\ell}{2} - r\right) = 4g\left(\frac{\ell}{2} - (\ell - d)\right) = 4g\left(d - \frac{\ell}{2}\right) \geq 0 \quad \dots (3)$$

$V'^2 = 4g(d - \ell/2) \rightarrow$ ②

Si queremos que sea un círculo la trayectoria

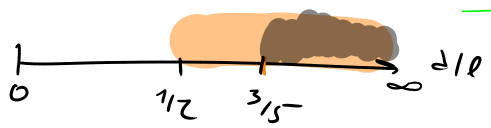
En ③ $a_c = \frac{v'^2}{r} = g \Rightarrow (v')^2 = gr \Rightarrow 4\cancel{g}\left(d - \frac{\ell}{2}\right) = \cancel{g}(\ell - d)$

$\Rightarrow 4d - 2\ell = \ell - d$

$\Rightarrow 5d = 3\ell \Rightarrow d = \frac{3}{5}\ell \quad \dots\dots (4)$

Vemos que de (3)

$d \geq \ell/2$
y $d = \frac{3}{5}\ell$ $\Big\}$ $\frac{d}{\ell} \geq \frac{1}{2}$, $\frac{d}{\ell} = \frac{3}{5}$ → Esta es la condición necesaria → ③



**2.4) Parkour**

Ve el siguiente video. Para que Michael, Andy y Dwight no se lastimen las articulaciones ellos flexionan, por ejemplo, sus rodillas al caer. Suponiendo que Andy salta desde una altura $h$ y, al entrar en contacto con el piso, su centro de masa se desplaza una distancia $s$ al flexionar las rodillas ¿Cuál es la fuerza promedio que siente al caer suponiendo que su desaceleración de frenado es constante? ¿Es buena idea, entonces, flexionar las rodillas al caer o no? (20 puntos)

La fuerza promedio es $\int \vec{F}\,dt \approx \langle \vec{F} \rangle \tau = \Delta \vec{P} \Rightarrow \langle \vec{F} \rangle = \frac{\Delta \vec{P}}{\tau} = \frac{m}{\tau}(\vec{V} - \vec{V}_0)$ como cae $V = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\langle F \rangle = -\frac{m}{\tau} V_0}_{\text{Fuerza que aplica Andy al caer}} \Rightarrow \langle F \rangle = \frac{m}{\tau} V_0 \longrightarrow \text{Fuerza que siente Andy}$$

Suponiendo que la desaceleración de frenado es constante

$$\Delta V = a\tau \quad , \quad \underbrace{s = \Delta x}_{\text{Desplazamiento del CM}} = V_0\tau + \frac{1}{2}a\tau^2 \Rightarrow s = V_0\tau + \frac{1}{2}\tau(\Delta V)$$

$$= V_0\tau + \frac{1}{2}(\cancel{V} - V_0)\tau = \frac{1}{2}\tau V_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2}\frac{V_0}{s}$$

Por conservación de la energía $\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow V_0^2 = 2gh$

Entonces $$\langle F \rangle = \frac{mV_0}{\tau} = \frac{1}{2}\frac{m}{s}V_0^2 = \frac{mgh}{s}.$$ $\longrightarrow$ Mientras más flexione las rodillas, menos fuerza siente.

**2.6) Personas en un carrito**

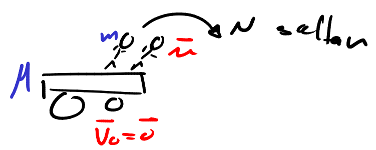
Hay $N$ personas de masa $m$ montadas en un carrito de masa $M$ sobre un riel. Cada persona salta del carro con una velocidad relativa $u$ y el carro comienza a desplazarse en la dirección contraria. Si no consideramos efectos de fricción:

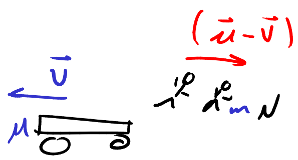
- ¿Cuál es la velocidad final del carro si todos saltan al mismo tiempo?
- ¿Y si saltan de una persona en una? (Puedes dejar el resultado como sumas de términos.

(20 puntos)

Resolución de problemas

1)




$\longrightarrow$ Todos saltan al mismo tiempo

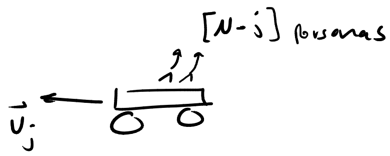
$$P(t_f) = -MV + Nm(u - V)$$
$$= -V(M + Nm) + Nmu$$

$P(t_i) = 0$

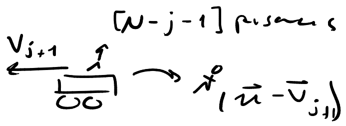
$$\Rightarrow P(t_f) = 0 \Rightarrow V \overset{\text{todos}}{=} u\left(\frac{Nm}{M + Nm}\right) \quad \ldots (1)$$

Saltando de uno en uno

2) Supongamos que ya saltaron $j-1$ personas y el carrito va a $-\vec{V}_{j+1}$




$\Longrightarrow$




$$P(t_j) = -V_j\{M + [N-j]m\}$$

$$P(t_{j+1}) = -V_{j+1}\{M + [N-j-1]m\} + (u - V_{j+1})m$$
$$= -V_{j+1}\{M + m[N - j - \cancel{1} + \cancel{1}]\} + um$$

$$\Rightarrow \quad (V_{j+1} - V_j)\left[M + m(N-j)\right] = um$$

$$\Rightarrow \quad V_{j+1} = V_j + \frac{um}{M + m(N-j)}$$

Hagamos $\quad j+1 = N \Rightarrow j = N-1 \Rightarrow N-j = N-(N-1) = 1$

$$\Rightarrow \quad V_N = V_{N-1} + \frac{um}{M+m}$$

$$j+1 = N-1 \Rightarrow j = N-2 \Rightarrow N-j = N-(N-2) = 2$$

$$\Rightarrow \quad V_N = V_{N-1} + \frac{um}{M+m} = V_{N-2} + u\Big(\underbrace{\frac{m}{M+m}}_{N} + \underbrace{\frac{m}{M+2m}}_{N-1}\Big)$$

entonces

$$V_N^{1\times1} = um\Big(\underbrace{\underbrace{\frac{1}{M+m}}_{\substack{j=0,\ N\\ 1}} + \underbrace{\frac{1}{M+2m}}_{\substack{N-1\\ 2}} + \cdots \underbrace{\frac{1}{M+Nm}}_{\substack{j=N-(N-1)\\ j=1}}}_{N \text{ términos}}\Big) + \underbrace{\cancelto{0}{V_0}}_{j=N-N=0} \quad \cdots (2)$$

Comparemos $\quad (1) \quad$ y $\quad (2)$

$$(1) \rightarrow V^{todos} = Nmu\,\frac{1}{M+Nm} = mu\Big(\overbrace{\frac{1}{M+Nm} + \frac{1}{M+Nm} + \cdots \frac{1}{M+Nm} + \frac{1}{M+Nm}}^{N \text{ términos}}\Big)$$

el mismo

$$(2) \rightarrow V^{1\times1} = mu\Big(\underbrace{\frac{1}{M+m} + \frac{1}{M+2m} + \cdots + \frac{1}{M+(N-1)m} + \frac{1}{M+Nm}}_{N \text{ términos}}\Big)$$

$$\Rightarrow \quad V^{todos} - V^{1\times1} = mu \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{M+Nm} - \frac{1}{M+jm}\right) = mu \sum_{j=1}^{N-1}\left(\frac{1}{M+Nm} - \frac{1}{M+jm}\right)$$

Como $\quad j < N \Rightarrow M + jm < M + Nm \Rightarrow \dfrac{1}{M+Nm} < \dfrac{1}{M+jm}$

$$\Rightarrow \quad V^{todos} - V^{1\times1} < 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{V^{todos} < V^{1\times1}}}$$

**2.5) Cohete**

Un cohete despega desde la Tierra desde el reposo. Si expulsa su combustible a una velocidad $u$, medida desde la nave, a una tasa de $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = \gamma m(t)$, con $\gamma$ una constante, cuál es la velocidad $v(t)$ si además el cohete es frenado por el aire por una fuerza $-b\vec{v}$ de resistencia proporcional a la velocidad?

*Hint:* La velocidad terminal del cohete es $(\gamma u - g)/b$. (20 puntos)

Este problema está mal planteado, entonces todos lo tienen bien

si $-bm(t)\vec{v}$, es soluble

$$-mg - mbv = m\frac{dv}{dt} - u\overbrace{\gamma m}^{dm/dt} \Rightarrow -g - bv = m\frac{dv}{dt} - u\gamma$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = (u\gamma - g) - bv$$

$$\frac{dv}{dt} = -b\left[v - \underbrace{\frac{(u-\gamma g)}{b}}_{k}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dv/dt}{v-k} = -b$$

Integrando $\ln\left(\dfrac{v-k}{\cancel{v_0}^{\,0} - k}\right) = -bt \Rightarrow v - k = -k e^{-bt}$

reposo

$$\Rightarrow v(t) = k(1 - e^{-bt}) = \left(\frac{u-\gamma g}{b}\right)(1 - e^{-bt})$$

$$\lim_{t \to \infty} v(t) = \frac{u - \gamma g}{b}$$