5.- Ley de Ampère

De las ecuaciones de Maxwell, sabemos que el campo magnético cumple en el caso estático

$$\underbrace{\nabla\cdot\vec{B}=0}_{\text{El campo magnético no tiene componentes longitudinales}} \iff \underbrace{\oint_{\partial V}\vec{B}\cdot d\vec{a}=0}_{\text{El flujo en una superficie cerrada es nulo siempre}}$$

El flujo en una superficie cerrada es nulo siempre $\Downarrow$ No existen fuentes equivalentes a las cargas electrostáticas → No existen los monopolos magnéticos

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}_{tot} \iff \underbrace{\int_{\partial S}\vec{B}\cdot d\vec{l}}_{\text{La componente transversal del campo }\vec{B}}=\mu_0\int_S\vec{J}_{tot}\cdot d\vec{a}=\underbrace{\mu I_{tot}^{enc}}_{\text{Carga encerrada por una superficie abierta}}$$

∂S: Circuito ampèriano

Al igual que la ley de Gauss eléctrica, la ley de Ampère nos permite determinar el campo magnético en situaciones con alta simetría.

Antes de continuar con ejemplos, probemos que la Ley de Biot-Savart cumple con las Ecuaciones de Maxwell

$$\nabla\times(f\vec{g})=\underbrace{\nabla f\times\vec{g}+f\,\nabla\times\vec{g}}_{\text{producto ordenado}}$$

Para esto, notemos que

$$\nabla_{\vec{r}}\times\left(\frac{\vec{J}_{tot}(\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}\right)=\nabla_{\vec{r}}\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}\right)\times\vec{J}_{tot}(\vec{r}\,')+\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}\cancel{\nabla_{\vec{r}}\times\vec{J}_{tot}(\vec{r}\,')}^{\,0} \qquad \vec{r}\,'\neq\vec{r}$$

$$=\frac{-(\widehat{\vec{r}-\vec{r}\,'})}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^2}\times\vec{J}_{tot}(\vec{r}\,')=\vec{J}_{tot}(\vec{r}\,')\times\frac{(\widehat{\vec{r}-\vec{r}\,'})}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^2}$$

Por lo tanto, la ley de Biot-Savart se puede reescribir como

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}_{tot}(\vec{r}\,')\times(\widehat{\vec{r}-\vec{r}\,'})}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^2}d^3r'=\nabla_{\vec{r}}\times\overbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}_{tot}(\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}d^3r'}$$

Más adelante denominaremos a esta cantidad como $\vec{A}$.

Con la expresión anterior se obtiene directamente que $\nabla\cdot\vec{B}=0$

Para corroborar con la ley de Ampère, calculemos su rotacional

$\vec{A}\to\vec{J}$, $\vec{B}\to(\widehat{\vec{r}-\vec{r}\,'})/\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^2$

$$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})=\cancel{(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}}^{\,0}-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+\vec{A}\,\nabla\cdot\vec{B}-\cancel{\vec{B}\,\nabla\cdot\vec{A}}^{\,0}$$

Expresión quitando las derivadas de $\vec{J}_{tot}(\vec{r}\,')$

$$\nabla_{\vec{r}}\times\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\nabla_{\vec{r}}\times\left(\vec{J}_{tot}(\vec{r}\,')\times\frac{(\widehat{\vec{r}-\vec{r}\,'})}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^2}\right)d^3r'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\left[\vec{J}_{tot}(\vec{r}\,')\underbrace{\left(\nabla_{\vec{r}}\cdot\frac{(\widehat{\vec{r}-\vec{r}\,'})}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^2}\right)}_{\text{Esto es igual a }4\pi\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,')}-\underbrace{\left(\vec{J}_{tot}(\vec{r}\,')\cdot\nabla_{\vec{r}}\right)\frac{(\widehat{\vec{r}-\vec{r}\,'})}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^2}}_{\text{Esta integral va a cero. Vamos a verificar}}\right]d^3r'$$

Notemos que el cambio de variable de $\vec r \to \vec r\,'$ cambia un signo en la siguiente expresión

$$-\left(\vec J_{Tot}(\vec r\,')\cdot\nabla_{\vec r}\right)\frac{\widehat{(\vec r-\vec r\,')}}{\|\vec r-\vec r\,'\|^2} = \left(\vec J_{Tot}(\vec r\,')\cdot\underbrace{\nabla_{\vec r\,'}\Big)\frac{\widehat{(\vec r-\vec r\,')}}{\|\vec r-\vec r\,'\|^2}}$$

Ilección de lo en una entrada

$$\left\{\ \vec J_{Tot}\cdot\nabla_{\vec r\,'}\left(\frac{x-x'}{\|\vec r-\vec r\,'\|^3}\right) = \nabla_{\vec r\,'}\cdot\left(\frac{(x-x')}{\|\vec r-\vec r\,'\|^3}\vec J_{Tot}(\vec r\,')\right) - \frac{(x-x')}{\|\vec r-\vec r\,'\|^3}\cancelto{0}{\nabla_{\vec r\,'}\cdot\vec J_{Tot}(\vec r\,')}\right.$$

para corrientes estacionarias

Entonces

$$\left[-\left(\vec J_{Tot}(\vec r\,')\cdot\nabla_{\vec r\,'}\right)\frac{\widehat{(\vec r-\vec r\,')}}{\|\vec r-\vec r\,'\|^2}\right]\cdot\hat e_{x_i} = \nabla_{\vec r\,'}\cdot\left(\frac{x_i-x_i'}{\|\vec r-\vec r\,'\|^3}\vec J_{Tot}(\vec r\,')\right)$$

e integrando en V' este término y empleando el teorema de la divergencia:

$$\int_{V'}\nabla_{\vec r\,'}\cdot\left(\frac{x_i-x_i'}{\|\vec r-\vec r\,'\|^3}\vec J_{Tot}(\vec r\,')\right)d^3r' = \int_{\partial V}\frac{x_i-x_i'}{\|\vec r-\vec r\,'\|^3}\vec J_{Tot}(\vec r\,')\cdot d\vec a\,' \longrightarrow 0$$

Si el volumen de integración es lo suficientemente grande para englobar todas las $\vec J_{Tot}(\vec r\,')$ y donde en su frontera se va a cero el su valor.

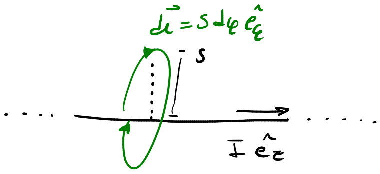
Por lo tanto:

$$\nabla_{\vec r}\,\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\vec J_{Tot}(\vec r\,')\underbrace{\left(\nabla_{\vec r}\cdot\frac{\widehat{(\vec r-\vec r\,')}}{\|\vec r-\vec r\,'\|^2}\right)}_{\text{Esto es igual a } 4\pi\delta^3(\vec r-\vec r\,')}d^3r' = \frac{\mu_0}{\cancel{4\pi}}\int\vec J_{Tot}(\vec r\,')\,\cancel{4\pi}\,\delta^3(\vec r-\vec r\,')\,d^3r' = \mu_0\vec J_{Tot}(\vec r)$$

¡Sí cumple con la ley de Ampère!

Ahora sí, comencemos con ejemplos de ley de Ampère

a) Cable infinito con carga I



La ley de Ampère integral es:

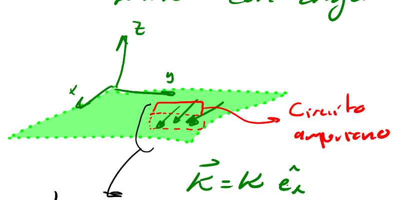
$$\oint_C\vec B\cdot d\vec l = I_{Tot}^{enc}\mu_0 = I\mu_0$$

Por simetría $\vec B(\vec r) = B(s)\,\hat e_\varphi$

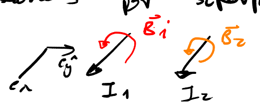
$$\Rightarrow \oint_C\vec B\cdot d\vec l = \int_0^{2\pi}B(s)\,\hat e_\varphi\cdot\hat e_\varphi\, s\,d\varphi = B(s)\cdot s\,2\pi$$

$$\Rightarrow \vec B(s) = \frac{I\mu_0}{2\pi s}\hat e_\varphi$$

b) Plano infinito con carga

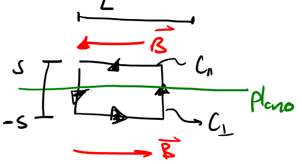


Podemos pensar la $\vec K$ como un conjunto infinito de cables entonces por superposición



.... Entonces al sumar las infinitas I's ....

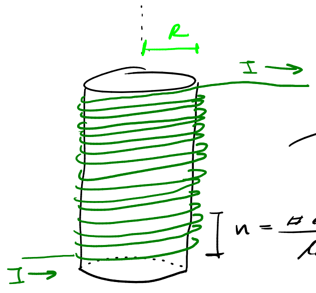
$\vec B \sim \pm\hat e_y$ (Por arriba $z>0$; Por abajo $z<0$) y por invariancia $\|\vec B\| = B(z)$



$$\Rightarrow \oint_{\partial S}\vec B\cdot d\vec l = 2\int_{C_\parallel}B(z)\,\hat e_y\cdot\hat e_y\,dy + 2\int_{C_\perp}B(z)\,\cancelto{0}{\hat e_y\cdot\hat e_z}\,dy = 2B(z)L$$

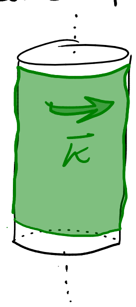
$$\Rightarrow I_{Tot}^{ah} = \int_S\vec K\cdot d\vec a = \int K\,\hat e_x\cdot\hat e_x\,da = KL \quad\Rightarrow \vec B(\vec r) = \frac{\mu_0 K}{2}\overbrace{\frac{z}{|z|}}^{\text{sign}(z)}\hat e_y$$

c) Solenoide Infinito



$n = \dfrac{\#\,espiras}{longitud}$

Podemos pensar el sistema como una $\vec{K}$ en lugar de una I.



$$\vec{K} = nI\,\hat{e}_s$$

· Para emplear la ley de Ampère debemos ver las simetrías

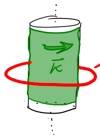
Como hay invarianza en z y φ, vemos que

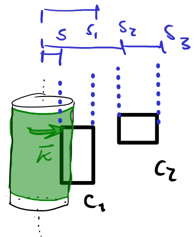
$$\|\vec{B}\| = B(s)$$

y la dirección del campo debe ser

$\vec{B} \sim B_z\,\hat{e}_z$ · $B_s \longrightarrow 0$ Inversión de $I \to -I$ $\Rightarrow B_s \to -B_s$ pero geométricamente sólo se rota el sistema

· $B_\varphi \longrightarrow 0$ $B(\varphi=0) \to B(\varphi=2\pi)$





· Como $\vec{B} = B(s)\,\hat{e}_z$ sólo contribuyen las caras de los cuadrados perpendiculares al cilindro

De C_2 $I_{enc}^{atr} = 0$ y $\oint_{C_2} \vec{B}\cdot d\vec{l} = [B(s_3) - B(s_2)]\,L = 0$

$\Rightarrow B(s_3) = B(s_2) = 0$ pues $B(s \to \infty) = 0$

De C_1 vemos que

$I_{enc}^{atr} = nIL$ y $\oint_{C_2} \vec{B}\cdot d\vec{l} = [B(s) - \cancel{B(s_1)}^{\,0}]\,L = \mu_0 n I L$ $\therefore$ $\vec{B} = \mu_0 n I\,\Theta(-s+R)\,\hat{e}_z$