Vectores

01/10/21

Espacio vectorial $V : (C, +)$ — $C \to$ campo, $+ \to$ operación

Ejemplos son

$V : (\mathbb{R}, +)$ con $V = \mathbb{R}^2$

Parejas ordenadas en el campo de los reales

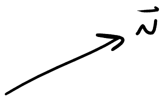
Sea $\vec{v}, \vec{w} \in V$, $\lambda \in C$

Hay distintas operaciones que podemos hacer con vector. En particular hay tres tipos de productos

Producto por escalar $\longrightarrow$ Reescala a un vector

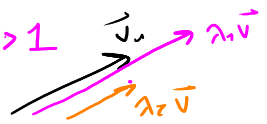
$\lambda \vec{v} \in V$

Sea $\vec{v}$ una flechita

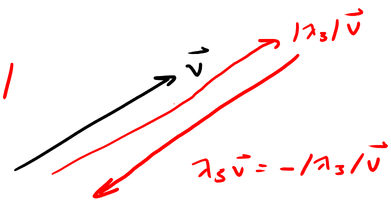


si: $\lambda_1 > 1$

$0 > \lambda_2 > 1$



si $\lambda_3 < 0 \Rightarrow \lambda_3 = -|\lambda_3|$



$\hookrightarrow$ un número negativo invierte la dirección del vector

Ejemplo: Momento lineal $\Rightarrow \vec{p} = m \vec{v}$ (vector, escalar, vector)

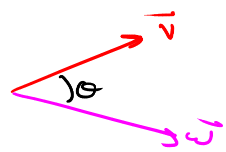
Fuerza (eléctrica) de Lorentz $\Rightarrow \vec{F} = q \vec{E}$ (vector, escalar, vector)

Producto punto = Producto interior = Producto escalar $\longrightarrow$ Proyecciones

$\vec{w}, \vec{v} \in V$ $\longrightarrow$ Definimos la operación $\cdot$ como

$\cdot : V \times V \longrightarrow C$

$$\boxed{\vec{w} \cdot \vec{v} = \underbrace{\|\vec{w}\|}_{} \|\vec{v}\| \cos\theta}$$



$\hookrightarrow$ Magnitud de $\|\vec{w}\| \to$ Tamaño

¿Cómo se calcula?

Ejemplo $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

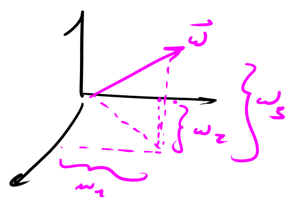
Si escojo una base particular para mis vectores

$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ $\longrightarrow$ con esta representación $\boxed{\|\vec{w}\| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}}$

$\hookrightarrow$ pitágoras

$v_i, w_i \in \mathbb{R}$ y son sus componentes.



Pero la idea de los vectores es que no sea necesario emplear una base particular

¿Cómo defino la magnitud entonces?

$\vec{w} \cdot \vec{w} = \|\vec{w}\| \|\vec{w}\| \cos\theta$, pero $\theta = 0$

$\Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{w} = \|w\|^2 \Rightarrow \boxed{\|\vec{w}\| = (\vec{w} \cdot \vec{w})^{1/2}}$

Combinando ambas expresiones de la misma vemos que

$$\vec{\omega}\cdot\vec{\omega} = \|\vec{\omega}\|^2 = \omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2 = \sum_{i=1}^{3}\omega_i^2 = \sum_{i=1}^{3}\omega_i\omega_i$$

Cambiando un $\vec{\omega}$ por $\vec{v}$, entonces

$$\vec{\omega}\cdot\vec{v} = \sum_{i=1}^{3}\omega_i v_i = \|\vec{\omega}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

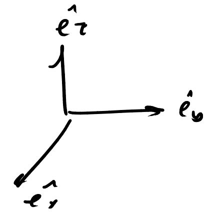
Producto punto

Def. usual → Depende de la base de mis vectores

Independiente de la representación de vectores.

El producto punto tiene una interpretación geométrica relacionada con la ortogonalidad

Supongamos la base canónica cartesiana



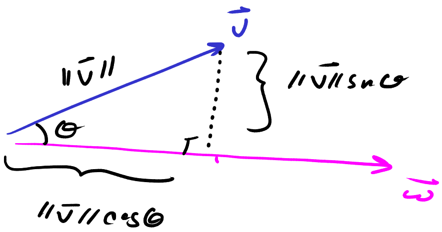
$\hat{e}_x = (1,0,0)$
$\hat{e}_y = (0,1,0)$
$\hat{e}_z = (0,0,1)$

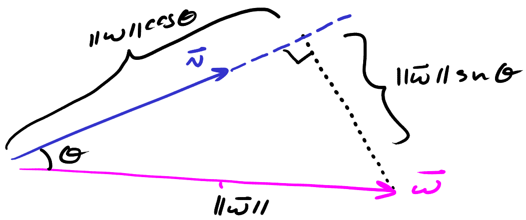
Vemos que $\hat{e}_x\cdot\hat{e}_y = \hat{e}_y\cdot\hat{e}_z = \hat{e}_z\cdot\hat{e}_x = 0$

si $\vec{v}\cdot\vec{\omega} = 0$ decimos que los vectores son ortogonales. Es decir que

$$\vec{v}\cdot\vec{\omega} = 0 = \|\vec{v}\|\|\vec{\omega}\|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = 0$$
$$\theta = \pi/2$$

¿Y si los vectores no son ortogonales?





Si definimos a los vectores unitarios (con magnitud 1) como $\hat{A}$ (→ unitario), vemos que

$$\hat{\omega} = \frac{\vec{\omega}}{\|\vec{\omega}\|},\quad \hat{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \Rightarrow \|\vec{v}\|\cos\theta = \hat{\omega}\cdot\vec{v} \quad y \quad \|\vec{\omega}\|\cos\theta = \hat{v}\cdot\vec{\omega}$$

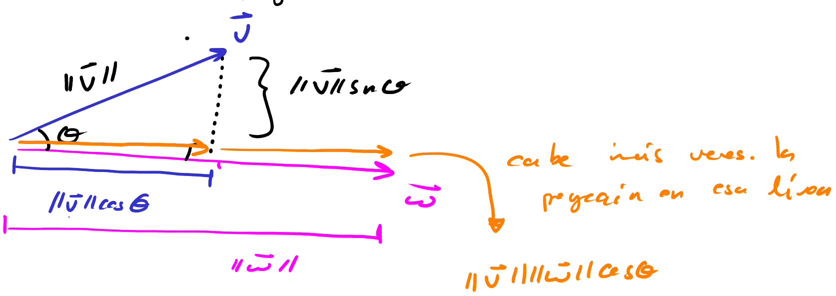
El producto punto con un vector unitario nos dice qué proporción de un vector se proyecta en una dirección dada

Si hacemos el producto sin vectores unitarios

$$\vec{\omega}\cdot\vec{v} = \|\vec{\omega}\|\|\vec{v}\|\cos\theta = \|\vec{v}\|\|\vec{\omega}\|\cos\theta = \vec{v}\cdot\vec{\omega} \longrightarrow \vec{v}\cdot\vec{\omega} = \vec{\omega}\cdot\vec{v}$$

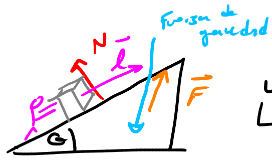
El producto punto es simétrico

Geométricamente nos dice cuántas veces cabe la proyección de un vector sobre de otro



Ejemplos físicos

Trabajo $\longrightarrow$ $W=\vec{F}\cdot\vec{l}$



$W=\vec{l}\cdot\vec{F}$ $\longrightarrow$ Proyección de la fuerza aplicada en la dirección del desplazamiento

↳ Proporción de la fuerza aplicada que generó el movimiento

Rapidez $\longrightarrow$ $\|\vec{v}\|=(\vec{v}\cdot\vec{v})^{1/2}$

↳ $\vec{v}=d\vec{r}/dt$

Producto vectorial = Producto exterior = Producto cruz $\longrightarrow$ Vectores perpendiculares

Definimos

$\times: V\wedge V \longrightarrow V$

↳ Definido para algunas dimensiones nada más.

Sea $\vec{v},\vec{\omega}\in\mathbb{R}^3$

$$\vec{v}\times\vec{\omega}=\underbrace{\begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}}$$

Abuso de notación pues $\hat{e}_i\in\mathbb{R}^3$ y $v_i,\omega_i\in\mathbb{R}$

$\longrightarrow$ Determinante de una matriz

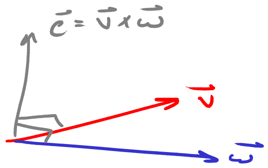
↳ Sólo un algoritmo para calcularlo.

Válido únicamente en la base cartesiana

Haciendo el desarrollo

$$\vec{v}\times\vec{\omega}=\hat{e}_x(v_y\omega_z-v_z\omega_y)+\hat{e}_y(-v_x\omega_z+\omega_x v_z)+(v_x\omega_y-v_y\omega_x)\hat{e}_z$$

y tiene la siguiente representación geométrica



$\vec{v}\times\vec{\omega}$ es un vector perpendicular a $\vec{v}$ y a $\vec{\omega}$

$\Rightarrow$ $\vec{v}\cdot(\vec{v}\times\vec{\omega})=\vec{\omega}\cdot(\vec{v}\times\vec{\omega})=0$

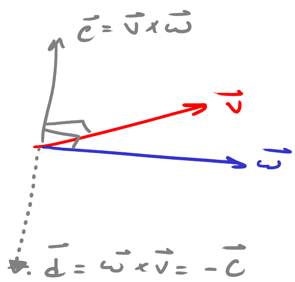
Habíamos visto que $\vec{v}\cdot\vec{\omega}=\vec{\omega}\cdot\vec{v}$, se vale que $\vec{v}\times\vec{\omega}\overset{?}{=}\vec{\omega}\times\vec{v}$?

No, pues por las propiedades de los determinantes

$$\vec{\omega}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}=(-1)(\vec{v}\times\vec{\omega})$$

$\Rightarrow$ $\vec{v}\times\vec{\omega}=\underline{-(\vec{\omega}\times\vec{v})}$ $\longrightarrow$ No es un producto simétrico

↳ Coloquialmente se dice que se calcula con la regla de la mano derecha



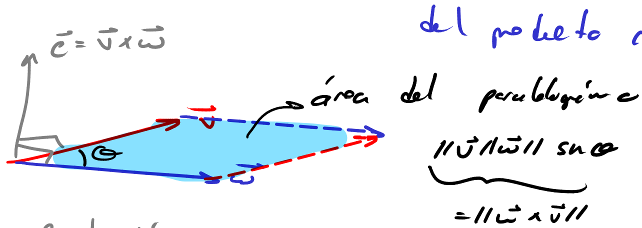
También habíamos visto que

$\vec{\omega} \cdot \vec{v} = \|\vec{\omega}\| \|\vec{v}\| \cos\theta$

↳ Haciendo las cuentas, se puede probar que

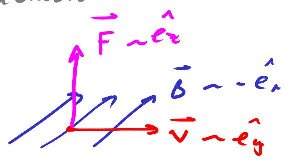
$\vec{\omega} \times \vec{v} = \|\vec{\omega} \times \vec{v}\| \, \hat{c}$, donde $\|\vec{\omega} \times \vec{v}\| = \|\vec{\omega}\| \|\vec{v}\| \sin\theta$ → Esto por la interpretación geométrica del producto cruz

ver dibujo



Ejemplos Campo eléctrico $\vec{E} \sim \vec{r} \times \vec{B}$ → Radiación

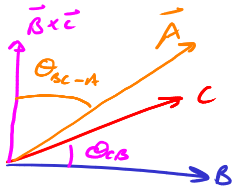
Fuerza (magnética) de Lorentz $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$



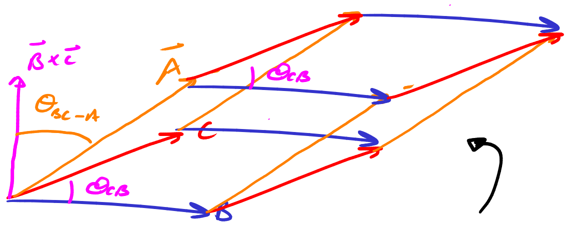
Momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})$ → Indicio de rotaciones en una partícula

— Triple producto escalar → Juntando todos los productos

$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in V$ ↳ $\mathbb{R}^3$ $\qquad \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) \in \mathbb{C}$ → Triple producto escalar

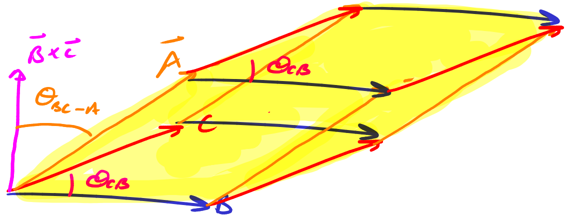


De nuestros tres vectores $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$



Podemos construir un paralelepípedo

Haciendo las cuentas, vemos que $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ es el volumen de dicho paralelepípedo



$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \|\vec{A}\| \|\vec{B} \times \vec{C}\| \cos\theta_{BC-A} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \|\vec{C}\| \sin\theta_{CB} \cos\theta_{BC-A} \sim [m^3]$$

a pesar de que $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ no es simétrico, sí es cíclico

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

= Bases canónicas en $\mathbb{R}^2$ =

Cartesiana

$\hat{e}_x = \hat{x} = \hat{\imath} = (1,0)$

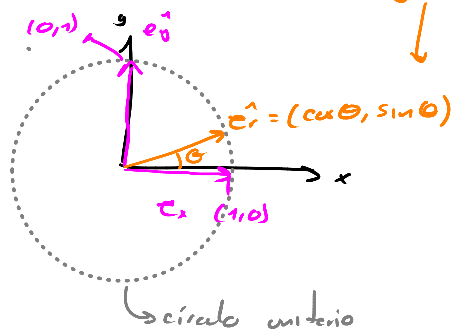
$\hat{e}_y = \hat{y} = \hat{\jmath} = (0,1)$

Polar → se define desde un análisis geométrico

$\hat{e}_r = \hat{r} = (\cos\theta, \sin\theta)$

$\hat{e}_\theta = \hat{\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta)$

↳ En $\mathbb{R}^2$



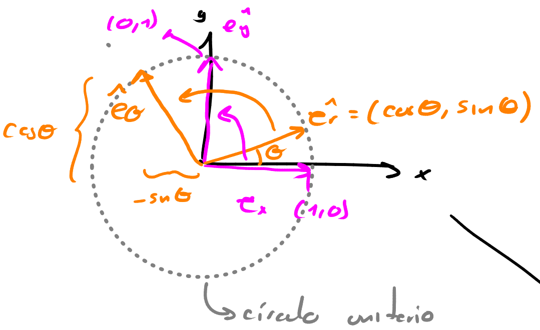
¿Cómo definimos $\hat{e}_\theta$?

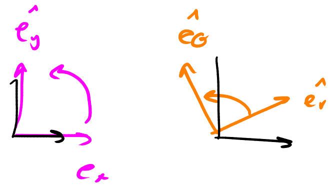
Como $\hat{e}_x \cdot \hat{e}_y = 0$, queremos que $\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\theta = 0$

si $\hat{e}_\theta = (a,b)$ entonces $\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\theta = \cos\theta\, a + \sin\theta\, b = 0$

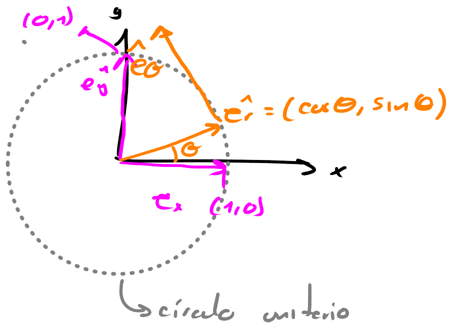
Hay dos posibles soluciones $(a,b) = (-\sin\theta, \cos\theta)$ y $(a,b) = (\sin\theta, -\cos\theta)$

Vamos a escoger esta solución para definir un sistema derecho, es decir que giran en sentido anti-horario





Como los vectores se trasladan paralelamente, lo usual es poner $\hat{e}_\theta$ en la punta de $\hat{e}_r$



Entonces, vemos que se cumple

$$\hat{e}_r = \cos\theta\, \hat{e}_x + \sin\theta\, \hat{e}_y$$

$$\hat{e}_\theta = -\sin\theta\, \hat{e}_x + \cos\theta\, \hat{e}_y$$

Podemos escribir este sistema de ecuaciones como una ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \end{pmatrix}$$

↳ en general $\theta = \theta(t)$, entonces $\hat{e}_r$ y $\hat{e}_\theta$ son vectores variables, y no constantes como lo son $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$

Como sólo la base cartesiana es constante, si se desea integrar o derivar vectores es recomendable ponerlo en la base cartesiana.

Veamos el caso particular de caída libre

Sabemos que si tengo la posición $\vec{r} = (x, y, z)$, se obtiene que

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z) = \frac{dx}{dt}\hat{e}_x + \frac{dy}{dt}\hat{e}_y + \frac{dz}{dt}\hat{e}_z = \vec{v}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{e}_z = \vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

En el caso de la caída libre

$$\vec{a} = -g\hat{e}_z \Rightarrow a_x = a_y = 0 \quad y \quad a_z = -g$$

Cambio de variable

Integrando el primer caso $\quad a_x = 0 = \frac{dV_x}{dt} \Rightarrow \int 0\,dt = 0 = \int_{t_0}^{t} \frac{dV_x}{dt}\,dt = \int_{V(t_0)}^{V_x(t)} dV_x = V_x(t) - V_x(t_0)$

T. Fundamental del cálculo

$$\Rightarrow \text{Si } a_x = 0 \Rightarrow V_x(t) - V_x(t_0) = 0$$
$$\Rightarrow V_x(t) = V_x(t_0) \equiv cte$$

Análogamente para y $\quad a_y = 0 \Rightarrow V_y(t) = V_y(t_0) \equiv cte$

Ahora si $V_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow$

1) $\int_{t_0}^{t} V_x(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} V_x(t_0)\,dt = V_x(t_0)\int_{t_0}^{t} dt = V_x(t_0)\,(t - t_0) = V_x(t_0)\,\Delta t$

2) $\int_{t_0}^{t} \frac{dx}{dt}\,dt = \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = x(t) - x(t_0) = \Delta x$

$$\Rightarrow \Delta x = V(t_0)\,\Delta t \Rightarrow V(t_0) = V(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Análogamente para y $\longrightarrow V_y(t_0) = V_y(t) = \frac{\Delta y}{\Delta t}$

Ahora, $a_z = -g \Rightarrow \int_{t_0}^{t} a_z\,dt = \int_{t}^{t_0} \frac{dV_z}{dt}\,dt \longrightarrow -g\int dt = \int dV_z \longrightarrow -g\,\Delta t = V_z(t) - V_z(t_0)$

$$\Rightarrow V_z(t) = V_z(t_0) - g\Delta t$$

$\Delta t = t - t_0$

$d(\Delta t) = dt$

Como $\frac{dz}{dt} = V_z(t) \longrightarrow \int V_z(t)\,dt = \int [\underbrace{V_z(t_0)}_{cte} - g\Delta t]\,dt = V_z(t_0)\int dt - g\int (t - t_0)\,dt$

$$= V_z(t_0)\,\Delta t - g\int \Delta t\, d(\Delta t)$$

$\int \frac{dz}{dt}\,dt = \int dz = z(t) - z(t_0) = V_z(t_0)\,\Delta t - \frac{1}{2} g (\Delta t)^2$

entonces

$$z(t) = z(t_0) + v_z(t_0)\,\Delta t - \frac{1}{2} g (\Delta t)^2$$

caída libre

si $a = -g$ tenemos el caso general

Notemos que pudimos tratar cada componente de forma independiente ya que

a) Usamos la base cartesiana

b) La integral y la derivada son operadores lineales.