= Ecuaciones de Euler-Lagrange =

Apliquemos el cálculo de variaciones con el principio de Hamilton, es decir, minimicemos la acción:

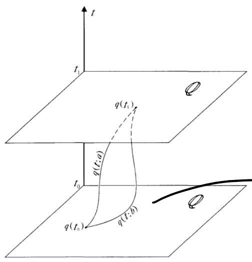


FIGURE 3.1
Two possible trajectories $q(t;a)$ and $q(t;b)$ from $q(t_0)$ to $q(t_1)$. The horizontal planes represent $\mathbb{Q}$ at the two times. A continuous family of possible trajectories would form a surface in this diagram, whose boundaries could be $q(t;a)$ and $q(t;b)$.

$$\text{Acción} \equiv S = \int_{t_a}^{t_b} L(\{q_i\},\{\dot q_i\},t)\,dt$$

algún parámetro

$q = q(t,\varepsilon)$ → Pensemos a t y a ε como independientes

→ La idea es variar este parámetro y minimizar a la acción

Definemos $\delta f = \left.\frac{d}{d\varepsilon} f\right|_{\varepsilon=0}$ → Salchan

$$\Rightarrow \delta S = \delta \int_{t_a}^{t_b} L(\{q_i\},\{\dot q_i\},t)\,dt = \int_{t_a}^{t_b} \delta L\,dt$$

Como $L = L(\{q_i\},\{\dot q_i\},t) \Rightarrow \delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta \dot q_i \right) \xrightarrow{\text{pues}} \frac{dL}{d\varepsilon} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{dq}{d\varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\frac{d\dot q_i}{d\varepsilon} \right) + \cancel{\frac{\partial L}{\partial t}\frac{dt}{d\varepsilon}}^{\,0}$

Vemos que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta \dot q_i = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \underbrace{\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{d}{dt} q_i\right)}\Bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{d\varepsilon} q_i\right)}\Bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i)$$

Pues t y ε son independientes

$(fg)' = f'g + g'f \iff$ Integración por partes

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta \dot q_i = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta q_i\right] - \delta q_i \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right]$$

$$\Rightarrow \delta L = \sum_i \left(\underline{\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta q_i\right] - \underline{\delta q_i \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right]} \right)$$

$$= \sum_i \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\right]\delta q_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta q_i\right) \right\}$$

$$\Rightarrow \delta S = \int_{t_a}^{t_b} \delta L\,dt = \sum_i \left\{ \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\right]\delta q_i\,dt + \underbrace{\int_{t_a}^{t_b} \cancel{\frac{d}{dt}}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta q_i\right]\cancel{dt}}_{\left.\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta q_i\right|_{t_a}^{t_b} =} \right\} = 0$$

Principio extremal

$$\Rightarrow \delta S = \sum_i \int_{t_a}^{t_b} \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\right]}_{\text{Ecuaciones de Lagrange}} \delta q_i\,dt + \sum_i \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}}^{\,0}\delta q_i\Big|_{t_a}^{t_b} = 0$$

Si son independientes

→ queremos que en los extremos $\delta q_i = 0$

¿Qué pasa si no fijo los extremos de la integral?

Nada, sólo no se cumple que $\delta q_i = 0$, sino que debo ver que

Condiciones iniciales y

$$\overbrace{\left.\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right|_{t_a} = \left.\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right|_{t_b}} = 0$$

Multiplicadores de Lagrange

Sea $\{q_i\} = \{\underbrace{q_1, q_2, \ldots, q_{3N-\ell-s}}_{\text{Independientes}}, \underbrace{q_{3N-\ell-s+1}, \ldots, q_{3N-\ell}}_{\text{s-constricciones no-holonómicas lineales}}\}$

N partículas

ℓ constricciones holonómicas

lineales $\rightarrow$ $\sum_i a_{ji}\dot q_i + b_j = 0 \longrightarrow j = \{1, 2, \ldots, s\}$ (a_{ji}: cte)

Vamos estas expresiones

podemos meter esto a la integral

Del principio de Hamilton:

$$\delta S = \sum_i \int_{t_a}^{t_b} \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\right]}_{\text{No son cero pues } \delta q_i \text{ ...}} \delta q_i \, dt = 0$$

$$\sum_i a_{ji}\delta q_i = \sum_i a_{ji}\frac{d}{dt}(\delta q_i) = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\sum_i a_{ji}\,\delta q_i\right) = 0}$$

Para cada j puedo multiplicar λ_j y sumar, de tal forma que la expresión va a seguir siendo igual a cero

$$\lambda_j \frac{d}{dt}\left(\sum_i a_{ji}\delta q_i\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \lambda_j a_{ji}\delta q_i\right) = 0$$

$$\sum_j \frac{d}{dt}\left(\sum_i \lambda_j a_{ji}\delta q_i\right) = 0 = 0 + 0 + 0 + \ldots$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i\,j} \lambda_j a_{ji}\delta q_i\right) = 0$$

Parámetro indeterminado de Lagrange

suma cero a la integral

$$\delta S = \sum_j \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) + \overbrace{\sum_j \lambda_j a_{ji}}\right] \delta q_i \, dt$$

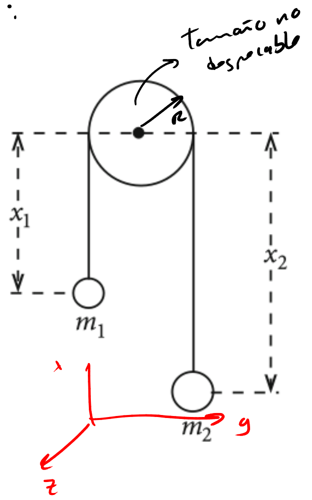
Están indeterminados pero los voy a escoger de tal forma que se anule todo lo que está entre [ ]

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \underbrace{\sum_{j=1}^{s} \lambda_j a_{ji}}_{Q_i} \longrightarrow i = \{1, \ldots, s\}$$

$3N - \ell - s = \#$ de grados de libertad

para el resto de $i = \{s+1, \ldots, 3N-\ell\}$ no hay λ_j's pues en ese caso los δq_i sí son independientes... entonces ya tienes todo el sistema determinado

Ejemplo:



Constricciones

$y_1 = z_1 = z_2 = 0$

$y_2 = 2R$

$\underbrace{x_1 + x_2 + \pi R - l = 0}_{\text{h,lo}} = f_1 \longrightarrow s = 1 \Rightarrow \lambda_j = 1$

$6 - 4 = 2$

$(q_1, q_2) = (x_1, x_2)$

$df_j = dx_1 + dx_2 = 0 \Rightarrow \frac{df_j}{dt} = \sum_i a_{ij}\dot{x}_i \Rightarrow a_{1j} = a_{2j} = 1$

$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2) + g(m_1 x_1 + m_2 x_2)$

$\frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{L} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\mathcal{L}\right) = -\sum_j \lambda_j = -\lambda$

$\Rightarrow m_1 \ddot{x}_1 - m_1 g = \lambda = m_2 \ddot{x}_2 - m_2 g \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$

y $\lambda = -2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$