Electrostática

No hay dependencia temporal

1.- Carga eléctrica, ley de Coulomb y el campo eléctrico

Carga → Propiedad de la materia (q)

- Positiva (+) $q > 0$
- Neutra $q = 0$
- Negativa (−) $q < 0$

Esta cantidad se encuentra cuantizada por la carga del electrón

$$q_e = 1.602 \times 10^{-19}\, C$$

↳ Coulombs

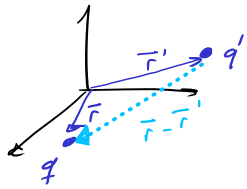
Experimentalmente se observó que las cargas con mismo signo se repelían y las de signo opuesto se atraían. Las cargas neutras no tenían efecto con otras.

En un lenguaje moderno, esta interacción la describe la ley de Coulomb (1785)

$$\vec{F} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}_{\text{Constante de proporcionalidad}} \frac{q q'}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^2} \widehat{(\vec{r}-\vec{r}\,')}$$

Fuerza colineal

Decae con el inverso la distancia al cuadrado

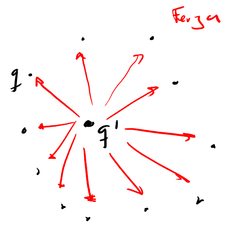


- $\varepsilon_0 \equiv$ Permitividad eléctrica del vacío

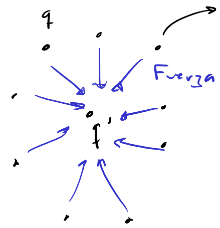
$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\, C^2 N^{-1} m^{-2}$$

Notemos que la fuerza siempre es colineal entre las posiciones de las cargas. Entonces colocando la carga q (carga de prueba) podemos ver cómo se comportaría la fuerza que se mida en distintas configuraciones suponiendo a q' fija en el espacio.

- Caso 1
 $qq' > 0$



- Caso 2
 $qq' < 0$



Normalizando la fuerza por unidad de carga, definimos el campo eléctrico $\vec{E}$

$$\vec{E} \equiv \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q} = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\widehat{(\vec{r}-\vec{r}\,')}}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^2}$$

La carga q' puede ser una partícula puntual, o bien, una distribución continua de carga

↳ Dado que $\vec{r}$ es la posición de la carga muestra y, por tanto, dónde se realiza la medición, entonces

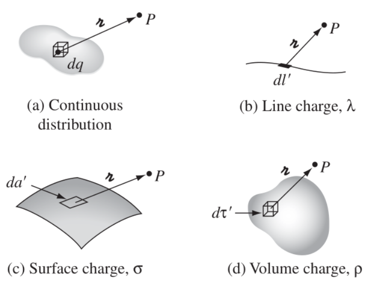
$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$$

Si se tienen distribuciones de carga, entonces:

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{dq'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\widehat{(\vec{r}-\vec{r}\,')}}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^2} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq'\, \widehat{(\vec{r}-\vec{r}\,')}}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}}$$

Ley de Coulomb

Según la geometría, esta puede ser:



(a) Continuous distribution (b) Line charge, λ (c) Surface charge, σ (d) Volume charge, ρ

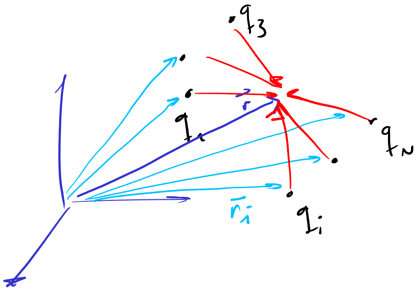
Volumen (3D) $\int dq' = \int_{V'} d^3r'\, \rho(\vec{r}\,')$

Área (2D) $\int dq' = \int_S d^2r'\, \sigma(\vec{r}\,')$

Línea (1D) $\int dq' = \int_c dr'\, \lambda(\vec{r}\,')$

Densidades de carga.

Notemos que la ley de Coulomb es lineal respecto a las cargas q'. Por lo tanto, se puede estudiar un conjunto de cargas de la siguiente forma



En este caso cada q_i está en la posición $\vec r_i$. Entonces

$$dq' = \underbrace{\rho(\vec r')}_{\substack{\text{Densidad}\\ \text{volumétrica}\\ \text{de carga}}} d^3r' = \sum_{i=1}^{N}\Big(q_i \overbrace{\underbrace{\delta(\vec r'-\vec r_i)}_{\substack{\text{Cero si } \vec r' \neq \vec r_i\\ \text{e infinita en } \vec r_i .}}}^{\text{Delta de Dirac}}\Big) d^3r'$$

$$\Rightarrow \vec E(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\widehat{(\vec r-\vec r')}}{\|\vec r-\vec r'\|^2}\sum_{i=1}^{N} q_i\,\delta(\vec r'-\vec r_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{\widehat{(\vec r-\vec r_i)}}{\|\vec r-\vec r_i\|^2}\,q_i = \sum_{i=1}^{N}\vec E_i(\vec r)\,;\quad \vec E_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\widehat{(\vec r-\vec r_i)}}{\|\vec r-\vec r_i\|^2}$$

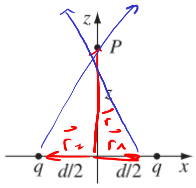
$$\boxed{\therefore\ E(\vec r) = \sum_{i=1}^{N}\vec E_i(\vec r)}$$

→ Principio de superposición → Consecuencia de la linealidad del campo eléctrico.

Ver discusión en el Jackson (Cap. 1)

→ Ejemplos:

1) Campo eléctrico en P debido a dos cargas



Por superposición sabemos que el campo eléctrico en P ($\vec r = z\hat e_z$) es:

$$\vec E(z\hat e_z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{z\hat e_z - \frac{d}{2}\hat e_x}{\|z\hat e_z-\frac{d}{2}\hat e_x\|^3} + \frac{z\hat e_z + \frac{d}{2}\hat e_x}{\|z\hat e_z+\frac{d}{2}\hat e_x\|^3}\right)$$

Notemos que no están normalizados, por lo que se agrega una potencia al denominador. $2 \to 3$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\|z\hat e_z-\frac{d}{2}\hat e_x\|^3}\left(z\hat e_z - \cancel{\tfrac{d}{2}\hat e_x} + z\hat e_z + \cancel{\tfrac{d}{2}\hat e_x}\right)$$

Por ser una base ortogonal $\{\hat e_x, \hat e_y, \hat e_z\}$: $\|z\hat e_z \pm \frac{d}{2}\hat e_x\|^2 = z^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2$

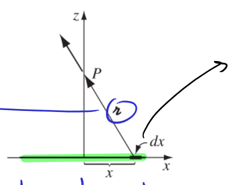
$$\therefore\ \vec E(z\hat e_z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2z\hat e_z}{[z^2+(d/2)^2]^{3/2}}$$

Podemos corroborar con casos límite:
- $d \to 0$
- $z \gg d/2$

→ Si estos no reproducen el caso con $q \to 2q$, entonces el cálculo fue erróneo. Si sí lo hace, no es garantía de que es correcto.

2) Campo eléctrico debido a una barra cargada (uniformemente) de longitud L a una distancia z sobre el centro de la barra.

→ Nota, en el ejercicio original $L \to 2L$



Una notación común en el Griffiths es la "r garigoleada" $\vec{\mathscr{r}} \equiv \vec r - \vec r'$

Como la barra está uniformemente cargada se cumple que

$$dq' = \underbrace{\lambda(\vec r')}_{\substack{\text{Densidad}\\ \text{lineal de}\\ \text{corriente}}} dl' = \underbrace{\lambda}_{\substack{\text{Dado que la}\\ \text{carga es uniforme}\\ \lambda\,\equiv\,\text{cte.}}} dl'$$

→ Pues sin importar qué cacho de la barra agarremos, se concentra una carga proporcional. Si q' es la carga total

$$\lambda = \frac{q'}{L} = \frac{q}{l} \Rightarrow q = q'\frac{l}{L}$$

Por comodidad, empleemos $dl' = dx'$.

Entonces
$$\vec E(z\hat e_z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{\lambda\,(z\hat e_z - x'\hat e_x)}{\|z\hat e_z - x'\hat e_x\|^3}\,dx'$$

$\to \vec r - \vec r'$

$\vec r = z\hat e_z$

$\vec r' = x'\hat e_x$

$x' \in (-L/2, L/2)$

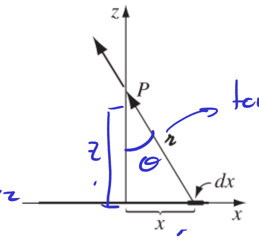
Notemos que $\|\vec r - \vec r\,'\|^3 = \| z\hat e_z - x'\hat e_x\|^3 = (z^2+(x')^2)^{3/2}$, entonces

$$\vec E(z\hat e_z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{\lambda(z\hat e_z - x'\hat e_x)}{\|z\hat e_z - x'\hat e_x\|^3}\,dx' = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[z\hat e_z\underbrace{\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dx'}{(z^2+(x')^2)^{3/2}}}_{\text{Integrando par en intervalo simétrico}} - \cancel{\int_{-L/2}^{L/2}\frac{x'\,dx'}{(z^2+(x')^2)^{3/2}}}^{\,0}\right]$$

Integrando impar en un intervalo simétrico

$$\Rightarrow \vec E(z\hat e_z) = \frac{\lambda z\hat e_z}{4\pi\varepsilon_0}\,2\underbrace{\int_0^{L/2}\frac{dx'}{(z^2+(x')^2)^{3/2}}}$$

Para resolver esta integral, notemos lo siguiente:



$\tan\theta = \dfrac{x'}{z}$

$$\hookrightarrow \frac{dx'}{[z^2+(x')^2]^{3/2}} = \frac{dx'}{z^3}\,\frac{1}{(1+(x'/z)^2)^{3/2}} = \frac{dx'}{z^3}\,\frac{1}{(1+\tan^2\theta)^{3/2}}$$

$$= \frac{dx'}{z^3}\,\frac{1}{(\sec^2\theta)^{3/2}} = \frac{dx'}{z^3}\,\frac{1}{\sec^3\theta} = \frac{\cos^3\theta}{z^3}\,dx'$$

Con el cambio de variable $\tan\theta = x'/z \Rightarrow \sec^2\theta\,d\theta = dx'/z \Rightarrow z\,d\theta = \cos^2\theta\,dx'$

Entonces

$$\frac{dx'}{[z^2+(x')^2]^{3/2}} = \frac{\cos\theta}{z^3}\cdot\cos^2\theta\,dx' = \frac{\cos\theta\cdot z\,d\theta}{z^3} = \frac{\cos\theta\,d\theta}{z^2} = d\left(\frac{\sin\theta}{z^2}\right)$$

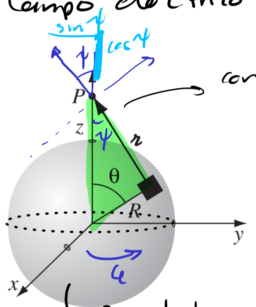
y si $\tan\theta = \dfrac{x'}{z}$, entonces $\sin\theta = \dfrac{x'}{\sqrt{(x')^2+z^2}}$

Por lo tanto

$$\vec E(z\hat e_z) = \frac{\lambda z\hat e_z}{4\pi\varepsilon_0}\,2\int_0^{L/2}\frac{dx'}{((x')^2+z^2)^{3/2}} = \frac{2\lambda\cancel{z}\hat e_z}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{x'}{z^{\cancel{2}}\sqrt{(x')^2+z^2}}\Bigg|_{\cancel{x'=0}\,0}^{x'=L/2}$$

$$\therefore\ \vec E(z\hat e_z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\lambda L\,\hat e_z}{z\sqrt{(x')^2+z^2}}$$

3) Campo eléctrico por un cascarón con carga uniformemente distribuida



con esta elección de Punto P, el ángulo θ corresponde al ángulo polar de coordenadas esféricas.

↳ Densidad superficial de carga uniforme

$\sigma = cte$

$$dq' = \sigma\,\underbrace{da}_{\text{coordenadas esféricas}} = \sigma\,\underbrace{R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}$$

→ Asimismo, haremos uso explícito de la simetría esférica del problema.

• Si el campo eléctrico <u>no</u> apuntase en una dirección radial, entonces ante una rotación del sistema cambia. Es decir:

Si

$\vec E$ ↳ campo no radial

entonces al rotarlo respecto un eje arbitrario

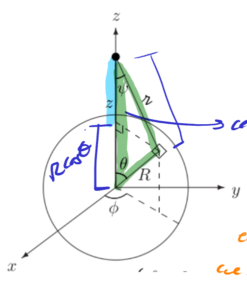
$\vec E$ ↳ El campo se ve distinto, pero la esfera no.

Por lo tanto, el campo eléctrico <u>debe</u> ser radial. y no tener contribuciones en otras direcciones.

Tomando, entonces, el eje z como un punto radial

$$\Rightarrow \vec E(z\hat e_z) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\frac{d\varphi\,d\theta\,R^2\sin\theta}{\|\vec r-\vec r\,'\|^2}\underbrace{\cos\psi}_{\text{contribución radial}}\,\hat e_z$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\,\frac{R^2\sin\theta\,(z-R\cos\theta)}{\|\vec r-\vec r\,'\|^3}\,\hat e_z$$



$\cos\psi = \dfrac{z - R\cos\theta}{\|\vec r-\vec r\,'\|}$

No se pone $z\cdot\cos\psi$ pues esa contribución se toma en cuenta con $d\varphi$

Simplificando: $\vec{E}(z\hat{e}_z) = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0} R^2 \hat{e}_z \int_0^{\pi} \frac{(z-R\cos\theta)\sin\theta\, d\theta}{(z^2+R^2-2zR\cos\theta)^{3/2}}$

ley de cosenos

Del diagrama, podemos ver que $\|\vec{r}-\vec{r}'\|^2 = z^2+R^2-2zR\cos\theta$

Para resolver la integral, notemos que:

$u=\cos\theta$

$du=-\sin\theta\, d\theta$

$$\frac{(z-R\cos\theta)\sin\theta\, d\theta}{(z^2+R^2-2zR\cos\theta)^{3/2}} = \frac{(z-Ru)(-du)}{(z^2+R^2-2zRu)^{3/2}} \longrightarrow zu-R$$

↳ Fracciones parciales:

Definimos $\alpha=(z^2+R^2-2zRu)^{1/2} \Rightarrow \alpha^2 = z^2+R^2-2zRu \Rightarrow u = \frac{z^2+R^2}{2zR} - \frac{\alpha^2}{2zR}$

$\Rightarrow du = -\frac{\alpha}{zR}\,d\alpha$

Entonces: $$\frac{(z-Ru)(-du)}{(z^2+R^2-2zRu)^{3/2}} = \frac{1}{\alpha^{\cancel{3}2}}\left[z-\cancel{R}\left(\frac{z^2+R^2}{2z\cancel{R}}-\frac{\alpha^2}{2z\cancel{R}}\right)\right]\frac{\cancel{\alpha}}{zR}\,d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{2z^2-z^2-R^2}{2z^2R}+\frac{\alpha^2}{2z^2R}\right]d\alpha = \frac{d\alpha}{2z^2R}\left(\frac{z^2-R^2}{\alpha^2}+1\right)$$

Entonces, integrando (indefinida) $$\int\frac{(z-Ru)(-du)}{(z^2+R^2-2zRu)^{3/2}} = \int\frac{d\alpha}{2z^2R}\left(1+\frac{z^2-R^2}{\alpha^2}\right) = \frac{1}{2z^2R}\left(\alpha-\frac{z^2-R^2}{\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{2z^2R}\left(\frac{\alpha^2-z^2+R^2}{\alpha}\right) = \frac{\cancel{z^2}+R^2-2zRu-\cancel{z^2}+R^2}{2z^2R\,\alpha}$$

$$= \frac{\cancel{2}R^{\cancel{2}}-\cancel{2}z\cancel{R}u}{\cancel{2}z^2\cancel{R}\,\alpha} = \frac{R-zu}{z^2(z^2+R^2-2zRu)^{1/2}}$$

$$= \frac{R-z\cos\theta}{z^2(z^2+R^2-2Rz\cos\theta)^{1/2}} \longrightarrow$$ Sólo resta hacer la evaluación

Por lo tanto:

$$\vec{E}(z\hat{e}_z) = \frac{2\pi R^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\hat{e}_z\left(\frac{R-z\cos\theta}{z^2(z^2+R^2-2Rz\cos\theta)^{1/2}}\right)\Bigg|\begin{matrix}\theta=\pi \to \cos\theta=-1\\ \theta=0 \to \cos\theta=1\end{matrix}$$

$$= \frac{2\pi R^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\hat{e}_z\left(\frac{R+z}{z^2(z^2+R^2+2Rz)^{1/2}}-\frac{R-z}{z^2(z^2+R^2-2Rz)^{1/2}}\right)$$

$$\left|(z^2+R^2\pm 2Rz)^{1/2} = (z\pm R)^{2/2} = |z\pm R|\right.$$

$$= \frac{2\pi R^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{e}_z}{z^2}\left(\frac{R+z}{|z+R|}-\frac{R-z}{|R-z|}\right) = \frac{2\pi\sigma R^2}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\hat{e}_z\left(1-\frac{R-z}{|R-z|}\right)$$

Si $z<R$ ent $0<R-z=|R-z| \Rightarrow \vec{E}(z\hat{e}_z)=\vec{0}$

Si $z>R$ ent. $0>R-z=-|R-z| \Rightarrow \vec{E} = \frac{(4\pi\sigma R^2)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{e}_z}{z^2} = \frac{Q\,\hat{e}_z}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$

carga total de la esfera Q

Notemos que, aunque empleamos z, este resultado es válido para cualquier dirección radial $r\hat{e}_r$. Entonces

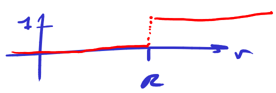
$$\vec{E}(r\hat{e}_r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{e}_r}{r^2}\,\Theta(r-R)$$

Función escalón

Función "theta" de Heaviside

$$\Theta(r-R) = \begin{cases}0 & r<R\\ 1 & r\geq R\end{cases}$$

↳ Dentro del cascarón no hay campo eléctrico pero fuera es "como" una carga puntual.



Fuentes principales:

Capítulo 2 de ambos

1. D. J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, Fourth edition (Pearson, 2013).
2. W. Nolting, Theoretical Physics 3 - Electrodynamics (Springer International Publishing, 2016), Vol. 3.