3.- Medios materiales

3.1.- Expansión multipolar

En la sección anterior se determinó que la función de Green de Dirichlet para la ecuación de Laplace es

$$G_D(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}} + f_D(\vec{r},\vec{r}\,'), \quad \text{tal que} \quad \nabla^2 f_D(\vec{r},\vec{r}\,') = 0 \text{ en } V \rightarrow \text{Volumen a determinar } G_D(\vec{r},\vec{r}\,')$$

Observando esta función notamos lo siguiente:

$$\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|} = \frac{1}{(r^2+(r')^2-2rr'\cos\gamma)^{1/2}} = \begin{cases} \frac{1}{r}\left(1+(r'/r)^2-2(r'/r)\cos\gamma\right)^{-1/2} \\ \frac{1}{r'}\left(1+(r/r')^2-2(r/r')\cos\gamma\right)^{-1/2} \end{cases}$$

γ = ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{r}\,'$

Expresiones iguales pero

→ si $r' \ll r$ es conveniente hacer una expansión en serie de potencias

→ si $r \ll r'$ lo mismo

Definiendo, entonces a $r_< = \min(r,r')$ y $r_> = \max(r,r')$, podemos ver que

$$\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|} = \frac{1}{r_>}\left(1+\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2-2\left(\frac{r_<}{r_>}\right)\cos\gamma\right)^{-1/2} = \frac{1}{r_>}\left(1+t^2-2tu\right)^{-1/2} = \frac{1}{r_>}\left[1+t(t-2u)\right]^{-1/2} = \frac{1}{r_>}\left(1+\epsilon\right)^{-1/2}$$

$t = r_</r_>$, $u = \cos\gamma$, $\epsilon = t(t-2u)$

Realizando la expansión en series de Taylor en ϵ

$$\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|} = \frac{1}{r_>}\left(1-\frac{1}{2}\epsilon+\frac{3}{8}\epsilon^2-\frac{5}{16}\epsilon^3+\dots\right) \longrightarrow f(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^n f(0)}{d\epsilon^n}\epsilon^n$$

$$= \frac{1}{r_>}\left(1-\frac{1}{2}t(t-2u)+\frac{3}{8}t^2(t-2u)^2-\frac{5}{16}t^3(t-2u)^3+\dots\right) \rightarrow \epsilon = t(t-2u)$$

$$= \frac{1}{r_>}\left(\underset{P_0(u)}{1}+t\cdot\underset{P_1(u)}{u}+t^2\underbrace{\left(\frac{3u^2-1}{2}\right)}_{P_2(u)}+t^3\underbrace{\left(\frac{5u^3-3u}{2}\right)}_{P_3(u)}+\dots\right) \rightarrow \text{Agrupamos potencias de } t$$

Por lo tanto, podemos concluir que

$$\boxed{\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|} = \frac{1}{r_>}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{\ell}P_\ell(\cos\gamma) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}}P_\ell(\cos\gamma)}$$

$\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}$ es la función generadora de los Polinomios de Legendre

Adicionalmente, puede emplearse el teorema de adición para reescribir $P_\ell(\cos\gamma)$ en términos de los armónicos esféricos. Esto da como resultado

$$\boxed{\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|} = 4\pi\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\frac{1}{2\ell+1}\frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}}Y_\ell^{m*}(\theta',\varphi')Y_\ell^{m}(\theta,\varphi)}$$

$Y_\ell^{m*}(\theta',\varphi')$: Medidos desde $\hat{r}\,'$

$Y_\ell^{m}(\theta,\varphi)$: Medidos desde $\hat{r}$

Si se considera una distribución de carga $\rho_{carg}(\vec{r})$ finita, la función de Green cumple en ser

$$G_D(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|} \Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V d^3r'\,\frac{\rho_{carg}(\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}$$

→ Podemos emplear los resultados anteriores para expandir el potencial

Consideremos el caso donde $r_> = r$ y $r_< = r'$, es decir, medimos el potencial lejos de la fuente.

Descomponemos al potencial en una serie de l-contribuciones: $\phi(\vec{r}) = \sum_l \phi_l(\vec{r})$

Caso $\|\vec{r}-\vec{r}'\|^{-1} = \sum \frac{(r')^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\gamma)$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int_{V'} d^3r' (r')^l P_l(\cos\gamma) \rho(\vec{r}')$$

$\|\vec{r}-\vec{r}'\|^{-1} = 4\pi \sum_l \sum_m \frac{1}{2l+1} \frac{(r')^l}{r^{l+1}} Y_l^{m*}(\theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi)$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_l \sum_m \frac{4\pi}{2l+1} \left[\int_V d^3r' \, Y_l^{m*}(\theta', \varphi') (r')^l \rho(\vec{r}') \right] \frac{Y_l^m(\theta, \varphi)}{r^{l+1}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_l \sum_m \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_l^m(\theta, \varphi)}{r^{l+1}}$$

$l=0$: $P_l(\cos\gamma) = 1$

$$\phi_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \int d^3r' \rho(\vec{r}').$$

$Q_{tot} = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \rightarrow$ Momento monopolar

$$\phi_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_{TOT}}{r}$$

$l=0 \Rightarrow m=0 \Rightarrow Y_l^{0*}(\theta', \varphi') = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta) \Big|_{l=0} = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2}$

$q_{00} = \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') Y_l^{0*}(\theta', \varphi') = \frac{q}{\sqrt{4\pi}} \longrightarrow$ Momento monopolar

$l=1$: $P_l(\cos\gamma) = \cos\gamma = \hat{r} \cdot \hat{r}'$

$$\phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \overbrace{P_1(\cos\gamma) r'}^{r'\cos\gamma = \vec{r}' \cdot \hat{r}}$$

$\vec{p} \equiv \int d^3r' \rho(\vec{r}') \vec{r}' \longrightarrow$ Dipolo

$$\Rightarrow \phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

$l=1 \Rightarrow m=-1,0,1 \Rightarrow Y_1^1(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\cdot 1+1}{4\pi} \frac{(1-1)!}{(1+1)!}} \, \overbrace{P_1^1(\cos\theta)}^{-\sin\theta} e^{i\varphi}$

$q_{l,-m} = (-1)^m q_{l,m}^*$

$\Rightarrow Y_1^1(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \, e^{i\varphi}$

y $Y_1^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\cdot 1+1}{4\pi}} P_1(\cos\theta) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$

$q_{1,1} = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \underbrace{\sin\theta' e^{-i\varphi'} r'}_{} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (-1)$

pero notemos que $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$

$\Rightarrow \sin\theta \, e^{-i\varphi} = \sin\theta\cos\varphi - i\sin\theta\sin\varphi$

$\Rightarrow r\sin\theta \, e^{-i\varphi} = r\sin\theta\cos\varphi - ir\sin\theta\sin\varphi$

$= x - iy$

$$\Rightarrow q_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int d^3r' \rho(\vec{r}') (x' - iy')$$

$$= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (P_x - iP_y)$$

con $P_x = \vec{P} \cdot \hat{e}_x$, $P_y = \vec{P} \cdot \hat{e}_y$

↳ Lo fundo como en la izquierda

$$\Rightarrow q_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \underbrace{r'\cos\theta'}_{z'} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} P_z$$

$$\Rightarrow q_{1,-1} = (-1)^1 q_{1,1}^* = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (P_x + iP_y)$$

$l=2$: $P_2(\cos\gamma) = \frac{1}{2}(3\cos^2\gamma - 1)$

$$\phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^3} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{(3\cos^2\gamma - 1)}{2}$$

Con esta expresión puede construirse el cuadrupolo sin embargo, esto será más evidente en otro desarrollo, por el momento,

$$\phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^3} \hat{r}^T Q \cdot \hat{r}$$

↳ Tensor cuadrupolar

$(Q)_{ij}$

$l=2, m=-2,-1,0,1,2$. Veamos que

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \frac{1}{2} \left[3\left(\frac{z}{r}\right)^2 - 1\right]$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta\cos\theta \, e^{i\varphi} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos\theta \sin\theta e^{i\theta} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{z}{r}\left(\frac{x+iy}{r}\right)$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\theta \, e^{2i\varphi} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{(x^2 - y^2 - i2xy)}{r^2}$$

$\sin^2\theta(e^{i\varphi})^2 = \sin^2\theta(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2$
$= \sin^2\theta[\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + i2\sin\varphi\cos\varphi]$
$= [(\sin\theta\cos\varphi)^2 - (\sin\theta\sin\varphi)^2 - i2(\sin\theta\cos\theta)(\sin\varphi\sin\theta)]$
$= (x^2 - y^2 - 2xy)/r^2$

Realizar las integrales, dé como resultado

$$q_{2,0} = \int d^3r' \rho(\vec{r}') (r')^2 Y_2^{0*}(\theta', \varphi')$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \left(3(z')^2 - (r')^2\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}} Q_{zz}$$

$$q_{2,1} = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{8}} (Q_{xz} - iQ_{yz}), \quad q_{2,2} = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{15}{4\pi}} (Q_{xx} - 2iQ_{xy} - Q_{yy})$$

En general

$$Q_{ij} = \int d^3r' \rho(\vec{r}') (3r_i' r_j' - (r')^2 \delta_{ij}) \rightarrow \sum Q_{ii} = 0$$

↳ Esto se verá más adelante

Los momentos q_{lm} se conocen como multipolos esféricos y son irreducibles.

⇒ Campo eléctrico

Antes de continuar notemos que con los $q_{\ell m}$ el campo eléctrico se escribe, en general, como

$$\vec{E} = -\nabla\phi \longrightarrow \text{para } \ell \text{ y } m \text{ fijos: } (E_\ell^m)_r = \frac{\ell+1}{2\ell+1}\,\frac{q_{\ell m}}{\varepsilon_0}\,\frac{Y_\ell^m(\theta,\varphi)}{r^{\ell+2}}$$

$$(E_\ell^m)_\theta = -\frac{1}{2\ell+1}\,\frac{q_{\ell m}}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^{\ell+2}}\,\frac{\partial Y_\ell^m(\theta,\varphi)}{\partial\theta}$$

$$(E_\ell^m)_\varphi = -\frac{1}{2\ell+1}\,\frac{q_{\ell m}}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^{\ell+2}}\,\frac{im}{\sin\theta}\,Y_\ell^m(\theta,\varphi)$$

= Expresión multipolar cartesiana

Otra forma de ver la expansión multipolar es realizando la expansión en serie de Taylor

$$\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} = \frac{1}{r_>}\left(1+\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2 - 2\left(\frac{r_<}{r_>}\right)\cos\gamma\right)^{-1/2}$$ sin embargo, veamos que en general, para campos escalares

Sabemos que si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, entonces $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$

si $\psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, entonces

$$\psi(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_0) + \underbrace{\sum_j^m \frac{\partial}{\partial x_j} f(\vec{x}_0)(x_j - x_{0j})}_{\nabla f(\vec{x}_0)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_j\sum_k \frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_j\,\partial x_k}(x_j-x_{0j})(x_k-x_{0k})}_{\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{x}_0)^T\cdot\nabla\nabla f(\vec{x}_0)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)} + \cdots$$

$$\frac{1}{2}\left[(\vec{x}-\vec{x}_0)\cdot\nabla\right]\left[(\vec{x}-\vec{x}_0)\cdot\nabla\right]f(\vec{x}_0)$$

El resultado puede, entonces, generalizarse a $\psi(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{((\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\nabla)^n}{n!}\psi(\vec{r}_0)$

Haciendo el cambio $\vec{r}\to\vec{r}+\Delta\vec{r}$, la expresión anterior y escogiendo $\vec{r}_0=\vec{r}$

$$\psi(\vec{r}+\Delta\vec{r}) = \sum_{n=0}\frac{1}{n!}(\Delta\vec{r}\cdot\nabla)^n\psi(\vec{r}).$$

Si $\psi(\vec{r}') = \frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}$ entonces $\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) + \psi_1(\vec{r}) + \psi_2(\vec{r}) + \dots$ con $\Delta\vec{r} = -\vec{r}'$ alrededor de $\vec{r}'=\vec{0}$

$$\rightarrow \psi_0(\vec{r}) = \frac{1}{r}$$

$$\rightarrow \psi_1 = -\vec{r}'\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = +\vec{r}'\cdot\frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{\vec{r}'\cdot\vec{r}}{r^3}$$

$$\nabla(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \nabla\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\nabla\vec{b}$$

$$\rightarrow \psi_2 = +\frac{(\vec{r}'\cdot\nabla)^2}{2!}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\vec{r}'\cdot\nabla}{2!}\left(\vec{r}'\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right) = \frac{\vec{r}'\cdot\nabla}{2!}\left(\frac{-\vec{r}'\cdot\vec{r}}{r^3}\right) = \vec{r}'\cdot\left[\cancel{\nabla(-\vec{r}')}^{\,0}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} - \vec{r}'\cdot\nabla\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \psi_2 = -\vec{r}'\cdot\left(\vec{r}'\cdot\nabla\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\right)\frac{1}{2!}$$

Para esto, hagamos el desarrollo por índices, lo que puede simplificar las cuentas

$$\left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right)_j = \frac{r_j}{r^3} \Rightarrow \left[\nabla\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\right]_{ij} = \frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{r_j}{r^3}\right) \Rightarrow \left[\vec{r}'\cdot\nabla\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\right]_j = \sum_i r_i'\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{r_j}{r^3}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{r}'\cdot\left(\vec{r}'\cdot\nabla\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\right) = \sum_j r_j'\sum_i r_i'\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{r_j}{r^3}\right) = \sum_j\sum_i r_j' r_i'\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{r_j}{r^3}\right)$$

Desarrollando $\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{r_j}{r^3}\right) = \frac{1}{(r^6)}\left[\left(\frac{\partial r_j}{\partial r_i}\right)r^3 - r_j\left(\frac{\partial r^3}{\partial r_i}\right)\right]$ pero $\frac{\partial(r^3)}{\partial r_i} = 3r^2\frac{\partial(r)}{\partial r_i} = 3r^2\frac{1}{2}\left(\sum_k r_k^2\right)^{-1/2}\sum_k\frac{\partial r_k^2}{\partial r_i}$, $r=\left(\sum_k r_k^2\right)^{1/2}$

$$= 3r^2\frac{1}{2}\frac{1}{r}\sum_k 2r_k\frac{\partial r_k}{\partial r_i}$$

$$= 3r\sum_k r_k\delta_{ki}$$

y sustituyendo con $\partial r_j/\partial r_i = \delta_{ji}$, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{r_j}{r^3}\right) = \frac{1}{r^6}\left(\delta_{ij}r^3 - r_j 3r^2\sum_k\delta_{ki}r_k\right) = \frac{1}{r^5}\left(\delta_{ij}r - 3\sum_k r_j\delta_{ik}r_k\right)$$

$$\Rightarrow \sum_j\sum_i r'_j r'_i\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{r_j}{r^3}\right) = \frac{1}{r^5}\left(r^2\underbrace{\sum_i\sum_j r'_i r'_j\delta_{ij}}_{\underbrace{\sum_i r'_i r'_i}_{=(r')^2}} - 3\sum_i\sum_j\sum_k r'_j r'_i r_j \underbrace{r_k\delta_{ik}}_{r_i}\right) = \frac{1}{r^5}\left((rr')^2 - 3(\vec r\cdot\vec r')\right)$$

$$(\vec r\cdot\vec r')\,(\vec r\cdot\vec r')$$

Por lo tanto, tenemos que $\phi_2(\vec r) = +\frac{(\vec r'\cdot\nabla)^2}{2!}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{2!}\vec r'\cdot\left(\vec r'\cdot\nabla\left(\frac{\vec r}{r^3}\right)\right) = \frac{1}{2r^5}\left(3(\vec r\cdot\vec r') - (rr')^2\right)$

Sin embargo, por claridad quedémonos con la expresión con las sumas:

$$\phi_2(\vec r) = \frac{1}{2r^5}\sum_{ij} r_i\left(3r'_ir'_j - (r')^2\delta_{ij}\right)r_j$$

Ahora, escribiendo el potencial $\phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r'}\frac{\rho(\vec r')}{\|\vec r-\vec r'\|}d^3r'$ y empleando los resultados anteriores

$\phi(\vec r) = \phi_0(\vec r) + \phi_1(\vec r) + \phi_2(\vec r) + \dots$, donde

$$\phi_0(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int d^3r'\rho(\vec r') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{tot}}{r} \qquad \phi_1(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat r\cdot\underbrace{\left(\int d^3r'\rho(\vec r')\vec r'\right)}_{=\vec p\,\to\,\text{Momento dipolar}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat r\cdot\vec p}{r^2}$$

$$\phi_2(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2r^5}\sum_{ij}r_i\underbrace{\left[\int d^3r'\rho(\vec r')\left(3r'_ir'_j - (r')^2\delta_{ij}\right)\right]}_{=Q_{ij}\text{ elementos del tensor cuadrupolar}}r_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{r_iQ_{ij}r_j}{r^5} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec r^{\,T}Q\vec r}{2r^5}$$

— Propiedades generales

Monopolo Si $Q_{tot}\neq 0$, el término dominante en $r\gg r'$ es el monopolo $\Rightarrow \phi(\vec r)\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$

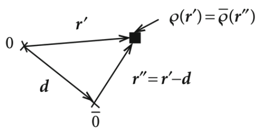
Dipolo Si $Q_{tot}=0$, quien domina es el dipolo

$$\phi(\vec r)\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec p\cdot\hat r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pr\cos\gamma}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\gamma}{r}$$

γ: ángulo entre $\hat r$ y $\vec p$. Si $\vec p\parallel\hat e_z$, es el ángulo polar usual.

Notemos que este término es invariante ante rotaciones en el sistema coordenado

En general $\vec p$ no es invariante ante traslaciones



$$\vec{\bar p} = \int d^3r''\,\vec r''\,\bar\rho(\vec r'')$$

$$= \int d^3r''(\vec r'-\vec d)\bar\rho(\vec r'') = -\int d^3\,\bar\rho(\vec r'')\,\vec d + \int\underbrace{d^3r''}_{=d^3r'}\vec r'\underbrace{\bar\rho(\vec r'')}_{=\rho(\vec r')}$$

$$= \vec p - \underbrace{Q_{Tot}\vec d}$$

↳ Pero si $Q_{tot}=0$, entonces sí es invariante

Si $\rho(\vec r)$ es centro-simétrica

↳ $\rho(-\vec r) = \rho(\vec r)$ entonces $\vec p = \vec 0 \longrightarrow \vec p = \int d^3r'(\vec r')\rho(\vec r') \overset{\vec r'\to-\vec r'}{=} \int d^3r'(-\vec r')\overbrace{\rho(-\vec r')}^{=\rho(\vec r)} = -\vec p$

$\therefore\ \vec p = \vec 0 \longrightarrow$ Si además $Q_{tot}=0$, domina ahora el cuadrupolo

Cuadrupolo

Notemos que Q tiene traza nula ← Cantidad invariante ante cambios de sist. de referencia

$$\rightarrow Tr(Q) = \sum_i Q_{ii} = \sum_i \int d^3r' \rho(\vec{r}') (3 r_i' r_i' - (r')^2 \delta_{ii}) = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \Big(3 \underbrace{\sum_i (r_i')^2}_{(r')^2} - (r')^2 \underbrace{\sum_i \delta_{ii}}_{=3} \Big) = 0$$

Además es simétrico $Q_{ij} = Q_{ji}$, pues $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ y $r_i' r_j' = r_j' r_i'$

$\Rightarrow$ Sólo hay cinco componentes independientes

Consideremos ahora una distribución de carga $\rho(\vec{r})$ con simetría esférica

$$\Rightarrow \rho(\vec{r}) = \rho(r)$$

Como $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$, entonces $Q_{xx} = Q_{yy} = Q_{zz} = \int d^3r' \rho(r') (3 \underbrace{r_i' r_i'}_{x^2, y^2, z^2} - (r')^2 \delta_{ij})$ y la integral será siempre igual

pero como $\sum_i Q_{ii} = Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 3 Q_{xx} = 0 \Rightarrow Q_{ii} = 0$

y para $i \neq j$ $\quad Q_{ij} = \int d^3r' \rho(r') 3 r_i' r_j' = 3 \int_0^\infty dr' r' \rho(r') \int_{-1}^{1} d(\cos\theta') \int_0^{2\pi} d\varphi' r_i' r_j'$

por ejemplo $\quad Q_{xy} = 3 \int_0^\infty dr' r' \rho(r') \int_{-1}^{1} d(\cos\theta') \int_0^{2\pi} d\varphi' x' y'$

pero $x' = r' \cos\varphi' \sin\theta'$, $y' = r' \sin\varphi' \sin\theta'$

$x' y' = (r')^2 \sin^2\theta' \cos\varphi' \sin\varphi'$

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi' \sin\varphi' d\varphi' = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(2\varphi)}{2} d\varphi = 0$$

$\Rightarrow Q_{xy} = 0$

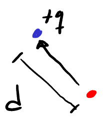
↳ y se puede probar lo análogo para $Q_{xz} = Q_{zy} = 0$

Por lo tanto si $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$ ent. $\underline{Q = 0}$ //

= Más sobre el dipolo!

Vamos a considerar un dipolo físico y a un dipolo puntual como sigue

Dipolo físico ⟶ **Dipolo puntual**



$\vec{d} = \vec{r}_+ - \vec{r}_-$

$\vec{p}_{fis} = q \vec{d}$ ← Momento dipolar

$$\vec{p} = \lim_{\substack{d \to 0 \\ q \to \infty}} q \vec{d} = cte$$

Con una expansión multipolar vemos que

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q}{\|\vec{r} - \vec{r}_+\|} - \frac{q}{\|\vec{r} - \vec{r}_-\|} \right) \approx \cancel{\phi_{mono}(\vec{r})}^{\,0} + \phi_{dip}(\vec{r}) + \dots$$

$$\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\, \vec{r} \cdot (\vec{r}_+ - \vec{r}_-)}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3}$$

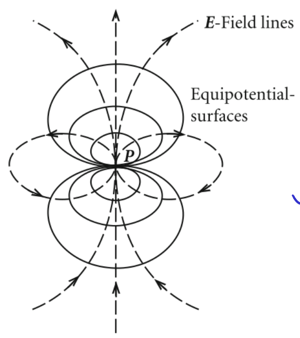
Si escogemos el sistema tal que $\vec{r} \cdot \vec{p} = r p \cos\theta$ ← ángulo polar

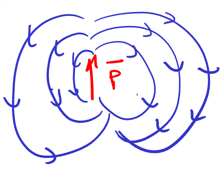
entonces se vale lo siguiente

$$\rightarrow \phi_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p\cos\theta}{r^2}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{dip} = -\nabla \phi_{dip} = -\left(\hat{e_r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e_\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e_\varphi} \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \phi_{dip}$$

$$= \frac{\hat{e_r}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2p\cos\theta}{r^3} - \frac{\hat{e_\theta}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p\sin\theta}{r^3}$$





algo así

Es posible reescribir el campo eléctrico del dipolo con la expansión de Taylor que vimos.

$$\psi = \frac{1}{\|\vec r - \vec r'\|} = \sum_{n=0}^{\infty}(-\vec r'\cdot\nabla)\left(\frac{1}{r}\right) \qquad \text{si } n=1 \quad \psi_1 = -\vec r'\cdot\nabla\left(\frac1r\right)$$

$$\Rightarrow \phi_1 \sim \int d^3r'\,\psi_1 = -\left[\int d^3r'\,\vec r'\rho(\vec r')\right]\cdot\nabla\left(\frac1r\right) = -\vec p\cdot\nabla\left(\frac1r\right)$$

$$\phi_{dip} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\vec p\cdot\nabla\left(\frac1r\right) \Longrightarrow \vec E_{dip} = -\nabla\phi_{dip} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\left[\vec p\cdot\nabla\left(\frac1r\right)\right]$$

$\nabla(\vec a\cdot\vec b) = \nabla\vec a\cdot\vec b + \vec a\cdot\nabla\vec b$

o bien

$\nabla(\vec a\cdot\vec b) = (\vec b\cdot\nabla)\vec a + (\vec a\cdot\nabla)\vec b + \vec b\times(\nabla\times\vec a) + \vec a\times(\nabla\times\vec b)$

$\vec a\to\vec p$

$\vec b\to\nabla(1/r)$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\cancelto{0}{\left(\nabla\left(\tfrac1r\right)\cdot\nabla\right)\vec p} + (\vec p\cdot\nabla)\nabla\left(\tfrac1r\right) + \cancelto{0}{\nabla\left(\tfrac1r\right)\times(\nabla\times\vec p)} + \vec p\times\left(\nabla\times\left(\nabla\left(\tfrac1r\right)\right)\right)\right]$$

pero $\vec p$ es ya una constante, entonces

$$\vec E_{dip}(\vec r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{(\vec p\cdot\nabla)\nabla\left(\frac1r\right) + \vec p\times\left[\cancelto{0}{\nabla\times\left(\nabla\left(\tfrac1r\right)\right)}\right]\right\} \quad \text{y} \quad \nabla\left(\frac1r\right) = -\frac{\hat e_r}{r^2} = -\frac{\vec r}{r^3} \to \text{rotacional nulo}$$

$$= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\left(\vec p\cdot\nabla\left(\frac{\vec r}{r^3}\right)\right) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i p_i\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{\vec r}{r^3}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\vec r\cdot\frac{1}{r^3}\right) = \frac{\partial\vec r}{\partial r_i}\cdot\frac{1}{r^3} + \vec r\,\frac{\partial}{\partial r_i}(r^{-3}) = \frac{\hat e_i}{r^3} + \vec r(-3)r^{-4}\frac{\partial r}{\partial r_i}, \quad r = (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}$$

$$= \frac{\hat e_i}{r^3} - 3\frac{\vec r}{r^4}\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}r_i}{r} = \frac{\hat e_i}{r^3} - \frac{3\vec r}{r^4}\frac{r_i}{r}$$

$$= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i\left(p_i\frac{\hat e_i}{r^3} - \frac{p_i r_i 3\vec r}{r^5}\right)$$

$$\boxed{\therefore\ \vec E_{dip}(\vec r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3(\vec p\cdot\vec r)}{r^5}\vec r - \frac{\vec p}{r^3}\right)}$$

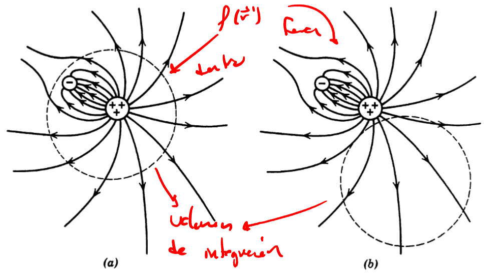
Sin embargo, hay que tener cuidado con esta expresión. Consideremos el campo total en una región del espacio finita

$$\iiint_{r<R}\vec E_{dip}(\vec r)\,d^3r = -\iiint_{r<R}\nabla\phi_{dip}(\vec r)\,d^3r = -\iint_{r=R}\phi_{dip}(\vec r)\,\hat n\,d^2r = -\frac{R^2}{4\pi\epsilon_0}\iiint_{r<R}d^3r'\rho(\vec r')\iint_{r=R}d\Omega\,\frac{\hat n}{\|\vec r-\vec r'\|}$$

para una esfera $\hat n = \hat e_r$: $\hat n = \sin\theta\cos\varphi\,\hat e_x + \sin\theta\sin\varphi\,\hat e_y + \cos\theta\,\hat e_z$

se probó en el tema de teorema de Helmholtz

para un dipolo tenemos dos opciones:



Por la forma de $\hat n$, vemos que $\hat n = \sum_{\ell m} n_{\ell m}Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \sum_m n_m Y_1^m(\theta,\varphi)$

sólo $\ell=1$ contribuye

$$\Rightarrow \frac{\hat n}{\|\vec r-\vec r'\|} = \frac{\hat n}{r_>}\sum_\ell\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^\ell P_\ell(\cos\gamma) = \frac{\hat n\, r_<}{r_>^2}P_1(\cos\gamma) \to \cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$$

$$\Rightarrow \iint_{r=R}d\Omega\,\frac{\hat n}{\|\vec r-\vec r'\|} = \frac{r_<}{r_>^2}\iint_{r=R}d\Omega\,\hat n\cos\gamma = \frac{r_<}{r_>^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\cos\theta\left[\sin\theta\cos\varphi\,\hat e_x + \sin\theta\sin\varphi\,\hat e_y + \cos\theta\,\hat e_z\right](\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi'))$$

Estas cuentas van de tarea

$$= \frac{4\pi}{3}\frac{\vec r'}{r'}\left(\frac{r_<}{r_>^2}\right)$$

y por tanto

$$\int_{r<R}d^3r\,\vec E_{dip}(\vec r) = -\frac{R^2}{3\epsilon_0}\int d^3r'\left(\frac{r_<}{r_>^2}\right)\frac{\vec r'}{r'}\rho(\vec r') = -\vec p/(3\epsilon_0) \qquad = -\frac{R^3}{3\epsilon_0}\int d^3r'\frac{\vec r'}{(r')^3}\rho(\vec r')$$

Si las cargas están en $r'<R$, entonces

Si las cargas están fuera $R<r'$, entonces

Notas que si $R<r'$, entonces

$$\int_{r<R}d^3r\,\vec E_{dip}(\vec r) = -\frac{R^3}{3\epsilon_0}\int d^3r'\frac{\vec r'}{(r')^3}\rho(\vec r')\frac{4\pi}{4\pi} = -\frac{4\pi}{3}R^3\overbrace{\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\frac{\rho(\vec r')\vec r'}{\|\vec r'\|^3}\right)}^{=\vec E(\vec r=0)}$$

$$= -\frac{4\pi}{3}R^3\vec E_{dip}(\vec 0)$$

Con esto, reescribimos el campo dipolar, en general, como

$$\vec E_{dip}(\vec r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3(\vec p\cdot\vec r)\vec r}{\|\vec r-\vec r_p\|^5} - \frac{\vec p}{\|\vec r-\vec r_p\|^3} - \frac{4\pi}{3}\vec p\,\delta(\vec r-\vec r_p)\right]$$

Ahora, ¿qué pasa si tenemos una colección de dipolos puntuales? En este caso se define

$\vec{\Pi}(\vec r) = \sum_{i=1}^{N} \vec p_i\, \delta^3(\vec r - \vec R_i)$ ↱ Posición del i-ésimo dipolo → para el i-ésimo dipolo $\phi^{(i)}_{dip} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\vec p\cdot\nabla_r\left(\frac{1}{\|\vec r-\vec R_i\|}\right)$

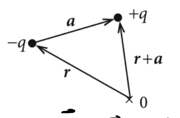
↳ Desplazado del origen

$$\Rightarrow \phi^N_{dip}(\vec r) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^N \vec p_i\cdot\nabla\left(\frac{1}{\|\vec r-\vec R_i\|}\right) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\, \vec\Pi(\vec r')\cdot\nabla_r\left(\frac{1}{\|\vec r-\vec r'\|}\right)$$

Este proceso relaciona dipolos discretos a una distribución continua de dipolos y será relevante para medios materiales

→ Fuerza de un $\vec E$ sobre un dipolo puntual

↳ por simplicidad consideremos el caso de dos cargas $\pm q$ y luego calculemos el límite necesario



→ la fuerza total sobre esta configuración de cargas es:

$\vec E \equiv \vec E$ externo

$$\vec F = -q\vec E(\vec r) + q\vec E(\vec r+\vec a)$$

→ en serie de Taylor $\vec E(\vec r+\vec a) = \vec E(\vec r) + (\vec a\cdot\nabla)\vec E(\vec r) + \frac12(\vec a\cdot\nabla)^2\vec E(\vec r)+\cdots$

↳ Componente a componente del desarrollo que vimos para campos escalares

$$= q\left(-\vec E(\vec r) + \vec E(\vec r+\vec a)\right)$$
$$\approx q\left(-\cancel{\vec E(\vec r)} + \cancel{\vec E(\vec r)} + (\vec a\cdot\nabla)\vec E(\vec r) + \frac{(\vec a\cdot\nabla)^2}{2}\vec E(\vec r)+\cdots\right)$$
$$= (q\vec a\cdot\nabla)\vec E(\vec r) + q(\vec a\cdot\nabla)^2\vec E(\vec r)+\cdots$$

En el límite $a\to 0$, $q\to\infty$ tenemos que $\boxed{\vec F_{dip}(\vec r) = (\vec p\cdot\nabla)\vec E(\vec r)}$ → En particular, si $\vec E$ es homogéneo, no hay una fuerza sobre el dipolo ¿y torcas?

$$\vec N(\vec r) = \vec r\times\vec F = -q\,\cancel{\underbrace{\vec r}_{=\vec 0}\times\vec E(\vec r)} + q\underbrace{\vec r_+}_{=+\vec a}\times\vec E(\vec r+\vec a) = q\vec a\times\vec E(\vec r+\vec a) = q\vec a\times\left(\vec E(\vec r) + (\vec a\cdot\nabla)\vec E(\vec r) + \frac{(\vec a\cdot\nabla)^2}{2}\vec E(\vec r)+\cdots\right)$$

posición de las cargas

y en el límite $a\to 0$, $q\to\infty$ se cumple que $\boxed{\vec N = \vec p\times\vec E(\vec r)}$ → Con que no sean paralelos hay torcas.

Notemos que $\nabla(\vec p\cdot\vec E) = (\vec E\cdot\nabla)\vec p + (\vec p\cdot\nabla)\vec E + \vec E\times(\nabla\times\vec p) + \vec p\times(\nabla\times\vec E)$ y recordemos que $\vec p$ = cte entonces

$$= (\vec p\cdot\nabla)\vec E + \vec p\times\underbrace{(\nabla\times\vec E)}_{=0 \text{ en electrostática}}$$
$$= (\vec p\cdot\nabla)\vec E$$

$\Rightarrow \vec F_{dip} = (\vec p\cdot\nabla)\vec E(\vec r) = \nabla\cdot(\vec p\cdot\vec E(\vec r))$ y como, en general para fuerzas conservativas es válido que $\vec F = -\nabla\mathcal U$ ↳ energía potencial

vemos que $\boxed{\mathcal U_{dip} = -\vec p\cdot\vec E(\vec r)}$ ↳ Este procedimiento es equivalente a que $\mathcal U = q[\phi(\vec r) - \phi(\vec r+\vec a)]$

Lo que nos resta hacer es realizar esta expansión para todos los multipolos.

== Expansión multipolar de la energía para una distribución de cargas y un campo externo ==