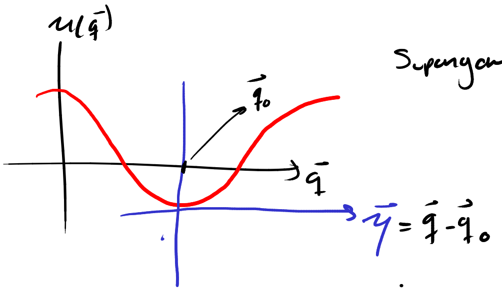
Oscilaciones pequeñas $\longrightarrow$ Solución aproximada alrededor de puntos de equilibrio estables.



Supongamos $\mathcal{U}(\vec{q})$ t.q. $\vec{q}_0$ es un punto de equilibrio estable

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{\vec{q}_0} \geq 0 \quad \forall\, q_i q_j$$

Definiendo $\vec{\eta}=\vec{q}-\vec{q}_0$, como la posición relativa al punto de equilibrio, notemos que

$\dot{\vec{q}}=\dot{\vec{\eta}}$, y $\nabla_{\dot{\vec{\eta}}}=\nabla_{\dot{\vec{q}}}$, $\nabla_{\vec{\eta}}=\nabla_{\vec{q}}$, entonces $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial}{\partial q_i} \longleftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\eta}_i}\right)-\frac{\partial}{\partial \eta_i} \rightarrow$ El operador de Lagrange es el mismo en estas coordenadas

además

$$\mathcal{U}(\vec{\eta}) \simeq \underbrace{\cancel{\mathcal{U}(\vec{0})}}_{\text{elección}}+\underbrace{\cancel{\nabla_{\vec{\eta}}\mathcal{U}(\vec{0})}}_{\text{punto de equilibrio}}\vec{\eta}+\frac{1}{2}\vec{\eta}^T\underbrace{\nabla_{\vec{\eta}}\nabla_{\vec{\eta}}\mathcal{U}(\vec{0})}_{=\mathbb{J}\text{ matriz jacobiana}}\vec{\eta}=\frac{1}{2}\vec{\eta}^T\mathbb{V}\vec{\eta}$$

$\mathbb{V}$: Matriz jacobiana evaluada en el punto de equilibrio

Esto nos permite escribir el Lagrangiano como: $\quad (\mathbb{V})_{ij}=V_{ij}=\frac{\partial^2\mathcal{U}}{\partial \eta_i \partial \eta_j}\geq 0$

$$L=\sum \frac{1}{2}m_i\dot{q}_i^2-\mathcal{U}(\vec{q}) \xrightarrow[\vec{q}\to\vec{\eta}]{} \sum m_i\dot{\eta}_i^2-\mathcal{U}(\vec{\eta}) \simeq \sum m_i\dot{\eta}_i-\frac{1}{2}\vec{\eta}^T\mathbb{V}\vec{\eta} \quad \dots \quad (1)$$

Para escribir todo como matrices, definimos

$\mathbb{T}$, cuyos elementos son $(\mathbb{T})_{ij}=m_i\delta_{ij}\simeq m_i^{(0)}\delta_{ij}$

$m_i^{(0)}$: Términos constantes.

δ_{ij}: Delta de Kronecker

m_i: Coeficientes que acompañan a la energía cinética y que pueden ser función de $\vec{q}$

$\Rightarrow m_i=m_i(\vec{q})\simeq m_i(\vec{q}_0)=m_i(\vec{\eta}=\vec{0})$

De esta forma, sustituyendo en (1)

$$L\simeq\sum_i\frac{m_i}{2}\dot{\eta}_i^2-\frac{1}{2}\vec{\eta}^T\mathbb{T}\vec{\eta}=\sum_{ij}\frac{m_i}{2}\delta_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j-\frac{1}{2}\vec{\eta}^T\mathbb{V}\vec{\eta}\simeq\frac{1}{2}\dot{\vec{\eta}}^T\mathbb{T}\dot{\vec{\eta}}-\frac{1}{2}\vec{\eta}^T\mathbb{V}\vec{\eta}^T$$

$\therefore$ Alrededor de puntos de equilibrio

$$L=\frac{1}{2}\dot{\vec{\eta}}^T\mathbb{T}\dot{\vec{\eta}}-\frac{1}{2}\vec{\eta}^T\mathbb{V}\vec{\eta}\,;\ (\mathbb{T})_{ij}=m_i^{(0)}\delta_{ij}=m_{ij}^{(0)}$$

$$(\mathbb{V})_{ij}=V_{ij}=\frac{\partial^2\mathcal{U}(\vec{0})}{\partial \eta_i\partial \eta_j}\geq 0$$

Ahora, calculemos las ecuaciones de E-L. para η_k

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\eta}_k}L\right)=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{\eta}_k}\left(\frac{1}{2}\sum_{ij}m_{ij}^{(0)}\underbrace{(\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j)}_{\text{Producto}}-\cancel{\frac{1}{2}\sum_{ij}V_{ij}\eta_i\eta_j}\right)\right]=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\sum_{ij}m_{ij}^{(0)}\left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial\dot{\eta}_i}{\partial\dot{\eta}_k}}}_{\delta_{ik}}\dot{\eta}_j+\dot{\eta}_i\underbrace{\cancel{\frac{\partial\dot{\eta}_j}{\partial\dot{\eta}_k}}}_{\delta_{jk}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_k}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\sum_{ij} m_{ij}^{(0)}\left(\delta_{ik}\dot{y}_j + \dot{y}_i\delta_{jk}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\sum_{ij} m_{ij}^{(0)}\underbrace{\delta_{ik}}_{i\to k}\dot{y}_j + \sum_{ij} m_{ij}^{(0)}\dot{y}_i\underbrace{\delta_{jk}}_{j\to k}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\sum_j m_{kj}^{(0)}\dot{y}_j + \sum_i m_{ik}^{(0)}\dot{y}_i\right]$$, pero por construcción $m_{ik}^{(0)} = m_{ki}^{(0)}$ pues $\mathbb{T} = \mathbb{T}^T$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\sum_j m_{kj}^{(0)}\dot{y}_j + \sum_i m_{ki}^{(0)}\dot{y}_i\right]$$,

Reetiquetando $i \to j$

$$= \frac{d}{dt}\sum_j m_{kj}^{(0)}\dot{y}_j = \sum_j m_{kj}^{(0)}\ddot{y}_j = \mathbb{T}\ddot{\vec{y}}$$

De forma análoga, podemos ver que

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\mathcal{L} = -\sum_j V_{ij}y_j = -\mathbb{V}\vec{y}$$

Entonces, las ecuaciones de movimiento son

- $\mathbb{T}\ddot{\vec{y}} + \mathbb{V}\vec{y} = \vec{0}$ ... (2)
- $\sum_j\left(m_{kj}^{(0)}\ddot{y}_j + V_{kj}y_j\right) = 0$

= Solución: Modos normales =

Propongamos como solución de (2) a la siguiente familia de funciones

$$\vec{y} = \vec{a}\exp(i\omega t) \Rightarrow \ddot{\vec{y}} = -\omega^2\vec{a}\exp(i\omega t) = -\omega^2\vec{y}$$, donde en general $\vec{a} \in \mathcal{M}_{1\times(3N-e)}(\mathbb{C})$ y $\omega \in \mathbb{C}$

Con esta solución, la ecuación (2) se reduce a

$$\left(-\omega^2\mathbb{T}\vec{a} + \mathbb{V}\vec{a}\right)\exp(i\omega t) = 0 \Rightarrow -\omega^2\mathbb{T}\vec{a} + \mathbb{V}\vec{a} = \vec{0} \quad \ldots (3)$$

Las soluciones no triviales están dadas por:

$$\det(-\omega^2\mathbb{T} + \mathbb{V}) = 0$$

Para simplificar aún más el problema, veremos que es equivalente a diagonalizar $\mathbb{V}$. Antes de eso, probemos lo siguiente:

i) $\omega^2 \in \mathbb{R}$, ii) $\omega^2 \geq 0$ $\longrightarrow$ i) y ii) Son imposiciones físicas, no matemáticas

<u>Dem.:</u> Sup una colección $\omega_n^2 = \lambda_n$ para cada $\vec{a}_n$ solución de (3).

$\Rightarrow$ $-\lambda_n\mathbb{T}\vec{a}_n + \mathbb{V}\vec{a}_n = \vec{0}$ $\longrightarrow$ Multiplicando $\vec{a}_m^{\dagger}$ por la izq. $\longrightarrow$ $-\lambda_n\vec{a}_m^{\dagger}\mathbb{T}\vec{a}_n + \vec{a}_m^{\dagger}\mathbb{V}\vec{a}_n = \vec{0}$ ... (4)

$-\lambda_m^*\vec{a}_m^{\dagger}\mathbb{T} + \vec{a}_m^{\dagger}\mathbb{V} = \vec{0}$ $\rightarrow$ Multiplicando $\vec{a}_n$ por la der. $\longrightarrow$ $-\lambda_m^*\vec{a}_m^{\dagger}\mathbb{T}\vec{a}_n + \vec{a}_m^{\dagger}\mathbb{V}\vec{a}_n = \vec{0}$ ....(5)

Restando (5)-(4) y factorizando: $(\lambda_n - \lambda_m^*)\vec{a}_m^{\dagger}\mathbb{T}\vec{a}_n = \vec{0}$ ... (6)

Sup. que no hay valores propios degenerados $\Rightarrow \lambda_n \neq \lambda_m$ si $n \neq m$ $\forall n,m$.

Si $n=m$, ent $(\lambda_n - \lambda_n^*)\underbrace{\vec a_n^{\dagger}\, \mathbb{T}\, \vec a_n}_{\text{Energía cinética} >0} = \vec 0 \Rightarrow \lambda_n = \lambda_n^* \Rightarrow \boxed{\lambda_n = \omega_n^2 \in \mathbb{R}}$ ✓ Valores propios reales

$\Rightarrow \vec a_n^{\dagger} = \vec a_n^{T}$ implica vectores propios reales.

Si $n\neq m$, ent $\underbrace{(\lambda_n-\lambda_m)}_{\neq 0}\, \vec a_n^T\, \mathbb{T}\,\vec a_m = 0 \Rightarrow \underbrace{\vec a_n^T\, \mathbb{T}\, \vec a_m = 0}$ si $n\neq m$.

Para tener una relación completa, empleamos

$$\vec a_n^T\, \mathbb{T}\, \vec a_m = \delta_{n,m} \quad \dots (7)$$

Ya con estos resultados podemos ver que $\omega_n^2 \geq 0$. De (4) despejamos λ_n

$$\lambda_n = \frac{\vec a_m^T\, \mathbb{V}\, \vec a_n}{\vec a_m^T\, \mathbb{T}\, \vec a_n} \xrightarrow[n=m]{} \frac{\vec a_n^T\, \mathbb{V}\, \vec a_n \geq 0}{\vec a_n^T\, \mathbb{T}\, \vec a_n > 0} \Rightarrow \boxed{\lambda_n = \omega_n^2 \geq 0}$$

Estabilidad

Energía cinética

Finalmente, para ver que el problema de la Ec (3) es equivalente a diagonalizar $\mathbb{V}$ construyamos

- $\mathbb{A} = (\vec a_1, \vec a_2, \dots, \vec a_{3N-\ell}) \in \mathcal{M}_{(3N-\ell)\times(3N-\ell)}(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathbb{A}^T\, \mathbb{T}\, \mathbb{A} = \mathbb{1} \quad \dots (8)$ Por la Ec. (7)
- $\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{3N-\ell})$

Por lo tanto, las $3N-\ell$ ecuaciones en (3) se escriben como:

$$\mathbb{V}\vec a_n = \lambda_n \mathbb{T}\vec a_n \longrightarrow \mathbb{V}\mathbb{A} = \mathbb{T}\mathbb{A}\lambda$$

$$\mathbb{A}^T\mathbb{V}\mathbb{A} = \underbrace{\mathbb{A}^T\mathbb{T}\mathbb{A}}_{=\mathbb{1}\ \text{por (8)}}\lambda = \lambda \Rightarrow \boxed{\lambda = \mathbb{A}^T\mathbb{V}\mathbb{A}}$$

Matriz de cambio de base

Matriz de la energía potencial

Matriz diagonal

$\lambda_n = \omega_n^2$ son los valores propios del sistema y $\vec a_n$ sus vectores propios!.

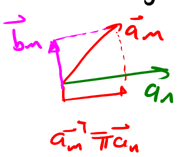
¿Cómo se modifica el formalismo si hay valores propios degenerados?

Solo debemos de construir una base ortogonal. Podemos emplear el

Método de Gram-Schmidt.

- Supongamos que $\vec a_n$ y $\vec a_m$ son vectores propios de λ y queremos que sean ortogonales entre sí. Construyamos $\vec b_n$ y $\vec b_m$ t.q. sean combinación lineal de $\{\vec a_n, \vec a_m\}$ y $\vec b_n \perp \vec b_m$.

Motivación gráfica. • Propongamos $\vec b_n = \vec a_n \longrightarrow \vec b_n = \vec a_n$



• Queremos $\vec b_n \perp \vec b_m \Rightarrow \vec b_n\, \mathbb{T}\, \vec b_m = 0 \longrightarrow$ [por Ec. (8)]

Propongamos $\vec b_m = \vec a_m + c_n \vec a_n \Rightarrow \vec b_n^T\, \mathbb{T}\, \vec b_m = \vec b_n^T\, \mathbb{T}\,\vec a_m + c_n \cancel{\vec b_n^T\, \mathbb{T}\, \vec a_n}^{\,1} = 0$

$\Rightarrow c_n = -\vec b_n^T\, \mathbb{T}\, \vec a_m$ Construimos un vector ortogonal al quitar las proyecciones en cada dirección de vectores anteriores.

Es decir $\vec b_m = \vec a_m - (\vec a_n^T\, \mathbb{T}\, \vec a_m)\,\vec a_n$

= Ejemplos =

$$V_{12} = V_{21}$$

- $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(m\,\dot{x}_1^2 + m\,\dot{x}_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(V_{11}\eta_1^2 + V_{22}\eta_2^2 + 2V_{12}V_{21}\eta_1\eta_2\right) = \frac{1}{2}\left(\dot{\vec{\eta}}^T\,\mathbb{T}\,\dot{\vec{\eta}} - \vec{\eta}^T\,\mathbb{V}\,\vec{\eta}\right)$

con $\mathbb{T} = m\,\mathbb{1}$

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}$$

Diagonalizemos $\mathbb{V}$:

$$\det\begin{pmatrix} V_{11}-\lambda & V_{12} \\ V_{21} & V_{22}-\lambda \end{pmatrix} = 0 = (V_{11}-\lambda)(V_{22}-\lambda) - V_{12}V_{21} = \lambda^2 - \lambda(V_{11}+V_{22}) + (V_{11}V_{22} - V_{21}V_{12})$$

$$= \lambda^2 - \lambda(V_{11}+V_{22}) + \det(\mathbb{V}) = 0$$

Cuyas soluciones son $\lambda_\pm = \frac{(V_{11}+V_{22})}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(V_{11}+V_{22})^2 - 4\det(\mathbb{V})}$

$$= \frac{1}{2}\left\{(V_{11}+V_{22}) \pm \left[V_{11}^2 + V_{22}^2 + \cancel{2V_{11}V_{22}} - \cancel{4}^{\,2}V_{11}V_{22} + 4V_{21}V_{12}\right]^{1/2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(V_{11}+V_{22}) \pm \left[(V_{11}-V_{22})^2 + 4V_{12}V_{21}\right]^{1/2}\right\}$$

$$= \frac{(V_{11}+V_{22})}{2} \pm \frac{(V_{11}-V_{22})}{2}\sqrt{1 + 4\Big(\underbrace{\frac{V_{12}V_{21}}{V_{11}-V_{22}}}_{\delta}\Big)^2} \quad \cdots \quad (1)$$

- Aproximación: $(V_{11}-V_{22}) \gg V_{12} = V_{21} \neq 0$

$$\Rightarrow \lambda_\pm \simeq \frac{(V_{11}+V_{22})}{2} \pm \frac{(V_{11}-V_{22})}{2}\left(1 + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{4}^{\,2}\delta^2\right) = \frac{(V_{11}+V_{22})}{2} \pm \frac{(V_{11}-V_{22})}{2} \pm \delta V_{21}$$

$$\Rightarrow \lambda_+ = V_{11} + \delta V_{21} \quad y \quad \lambda_- = V_{22} - V_{21}\delta \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

Determinemos los valores propios con (1) y comprobemos luego con (2).

a) $\vec{a}_+^T\,\mathbb{T}\,\vec{a}_- = \delta_{(+,-)}$, b) $\begin{pmatrix} V_{11}-\lambda_\pm & V_{12} \\ V_{21} & V_{22}-\lambda_\pm \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{\pm 1} \\ a_{\pm 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ Se deben cumplir estas expresiones

De b) tenemos

$$\begin{pmatrix} V_{11} - \frac{(V_{11}+V_{22})}{2} \mp \frac{(V_{11}-V_{22})}{2}\sqrt{1+4\delta^2} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} - \frac{(V_{11}+V_{22})}{2} \mp \frac{(V_{11}-V_{22})}{2}\sqrt{1+4\delta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{\pm 1} \\ a_{\pm 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{(V_{11}-V_{22})}{2} \mp \frac{(V_{11}-V_{22})}{2}\sqrt{1+4\delta^2} & V_{12} \\ V_{21} & -\frac{(V_{11}-V_{22})}{2} \mp \frac{(V_{11}-V_{22})}{2}\sqrt{1+4\delta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{\pm 1} \\ a_{\pm 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \left(\frac{V_{11}-V_{22}}{2}\right)\left(1 \mp \sqrt{1+4\delta^2}\right) & V_{12} \\ V_{21} & -\left(\frac{V_{11}-V_{22}}{2}\right)\left(1 \pm \sqrt{1+4\delta^2}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{\pm 1} \\ a_{\pm 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad (3)$$

Definimos $\beta_\pm = \left(\frac{V_{11}-V_{22}}{2}\right)\left(1 \pm \sqrt{1+4\delta^2}\right) \Rightarrow$ Ec. (3) se reescribe como $\begin{pmatrix} \beta_\pm & V_{12} \\ V_{21} & -\beta_\mp \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{\pm 1} \\ a_{\pm 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta_\pm a_{\pm1} + V_{12} a_{\pm2} = 0 \\ V_{12} a_{\pm1} - \beta\, a_{\pm2} = 0 \end{cases} \qquad V_{12} = V_{21}$$

y por a) $(a_{\pm1}^2 + a_{\pm2}^2)m = 1$

De aquí

$$a_{\pm1} = \frac{1}{\sqrt{m}} V_{12}, \quad a_{\pm2} = -\frac{1}{\sqrt{m}} \beta_\pm \xrightarrow{\text{sustituyendo}} V_{12}^2 + \beta_\pm^2 = 1$$

$$\Rightarrow a_{\pm1} = \frac{1}{\sqrt{m}}(1-\beta_\pm^2)^{1/2}, \quad a_{\pm2} = -\frac{1}{\sqrt{m}}\beta_\pm$$

Para que $\vec{a}_+^T \mathbb{T} \vec{a}_- = m(a_{+1}a_{-1} + a_{+2}a_{-2}) = 0$ basta con definir $a_{+1} = a_{-2}$, $a_{+2} = -a_{-1}$

$$\Rightarrow \vec{a}_+ = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{pmatrix} -\beta_- \\ -\beta_+ \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_- = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{pmatrix} -\beta_+ \\ -\beta_- \end{pmatrix}$$

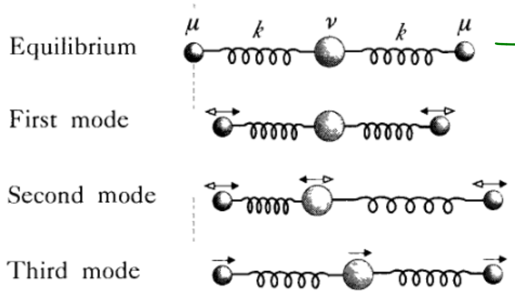
Realizamos nuestra aproximación

$$\Rightarrow \beta_\pm = \left(\frac{V_{11}-V_{22}}{2}\right)\left(1 \pm \sqrt{1+4\delta^2}\right) \approx \left(\frac{V_{11}-V_{22}}{2}\right)\left[1 \pm \left(1 + \frac{1}{2}4\delta^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{2}\right)4\delta^4\right)\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta_+ \approx \left(\frac{V_{11}-V_{22}}{2}\right)\left(1 + 1 + 2\delta^2 - \frac{1}{3}\delta^4\right) \approx (V_{11}-V_{22})(1+\delta^2) \\ \beta_- \approx \frac{(V_{11}-V_{22})}{2}\left(\cancel{1} - \cancel{1} - 2\delta^2 + \frac{1}{3}\delta^2\right) \approx (V_{11}-V_{22})(-\delta^2)\left(1 - \frac{1}{3!}\delta^2\right) \end{cases}$$

$$= -V_{12}\left(\delta - \frac{\delta^3}{3!}\right)$$

- *Molécula triatómica*



$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{2}\nu \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k\left[(x_1-x_2)^2 + (x_2-x_3)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^T \mathbb{T} \dot{\vec{x}} + \frac{1}{2}\vec{x}^T \mathbb{V} \vec{x}; \quad \mathbb{T} = \mathrm{diag}(\mu, \nu, \mu)$$

$$\mathbb{V} = k\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ la ecuación de movimiento es:

$$\mathbb{T}\ddot{\vec{x}} + \mathbb{V}\vec{x} = \vec{0}$$

Pero en este caso, sabemos que $\mathbb{T}^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}, \frac{1}{\mu}\right)$, entonces

$$\mathbb{T}\ddot{\vec{x}} = -\mathbb{V}\vec{x} \Rightarrow \ddot{\vec{x}} = \mathbb{T}^{-1}\mathbb{V}\vec{x} = k\underbrace{\begin{pmatrix} 1/\mu & -1/\mu & 0 \\ -1/\nu & 2/\nu & -1/\nu \\ 0 & -1/\mu & 1/\mu \end{pmatrix}}_{\mathbb{B}}\vec{x}$$

si $\vec{x} = \vec{a}e^{i\omega t}$, ent. $\omega^2\vec{x} = \mathbb{B}\vec{x} \longrightarrow$ Hay que diagonalizar $\mathbb{B}$ con los valores propios $\lambda = \omega^2$

$$\Rightarrow \quad 0 = \begin{vmatrix} \frac{k}{m}-\lambda & -k/m & 0 \\ -k/M & \frac{2k}{M}-\lambda & -k/M \\ 0 & -k/m & \frac{k}{m}-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{k}{m}-\lambda\right) \begin{vmatrix} \frac{2k}{M}-\lambda & -k/M \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m}-\lambda \end{vmatrix} - \left(-\frac{k}{m}\right) \begin{vmatrix} -\frac{k}{M} & -\frac{k}{M} \\ 0 & \frac{k}{m}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{k}{m}-\lambda\right)\left(\frac{2k}{M}-\lambda\right)\left(\frac{k}{m}-\lambda\right) - \left(\frac{k}{m}-\lambda\right)\left(-\frac{k}{m}\right)\left(-\frac{k}{M}\right) + \left(\frac{k}{m}\right)\left(-\frac{k}{M}\right)\left(\frac{k}{m}-\lambda\right)$$

$$= \left(\frac{k}{m}-\lambda\right)\left[\underbrace{\left(\frac{2k}{M}-\lambda\right)\left(\frac{k}{m}-\lambda\right) - \left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{k}{M}\right) + \left(\frac{k}{m}\right)\left(-\frac{k}{M}\right)}\right]$$

$$= \left(\frac{k}{m}-\lambda\right)\left[\cancel{\frac{2k}{M}\left(\frac{k}{m}\right)} - \lambda\left(\frac{2k}{M}+\frac{k}{m}\right) + \lambda^2 - \cancel{2\left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{k}{M}\right)}\right]$$

$$= \left(\frac{k}{m}-\lambda\right)\lambda\left[\lambda - \left(\frac{2k}{M}+\frac{k}{m}\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \lambda_2 = \omega_2^2 = 0, \quad \lambda_3 = \omega_3^2 = k\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{M}\right)$$