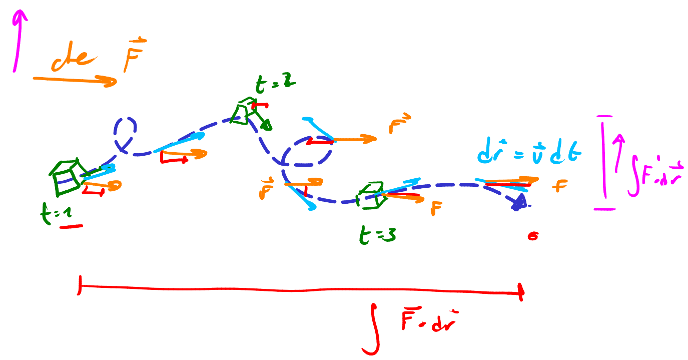
Energía → "Primera integración"

$\vec F = \dot{\vec p} \rightarrow \vec r \rightarrow$ Dos integrales $\dot{\vec p} \sim \ddot{\vec r}$

↳ Relacionado con el trabajo W



$$dW = \vec F \cdot d\vec r = \vec F \cdot \vec v(t)\, dt$$

$$\int_{1}^{2} dW = W_{12} = \int_{r(t_1)}^{r(t_2)} \vec F \cdot d\vec r = \int_{t_1}^{t_2} \vec F(t) \cdot \vec v(t)\, dt$$

$m = cte$

$$\rightarrow \vec F = m\vec a = m\dot{\vec v} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec F \cdot \vec v\, dt = m \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec v} \cdot \vec v\, dt$$

$$\boxed{\vec v \cdot \vec v = v^2}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec v \cdot \vec v) = \dot{\vec v} \cdot \vec v + \vec v \cdot \dot{\vec v} = 2\, \dot{\vec v} \cdot \vec v$$

$$= \frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(\vec v \cdot \vec v)\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2} \vec v \cdot \vec v\right) dt = \Delta\Big(\overbrace{\tfrac{1}{2} m\, \vec v \cdot \vec v}^{T}\Big) = \Delta T$$

$$\Rightarrow W_{12} = [T(t_2) - T(t_1)] = \Delta T \longrightarrow \text{Teorema de energía-Trabajo}$$

Fuerzas conservativas

$$\rightarrow \vec F \rightarrow \oint \vec F \cdot d\vec r = 0 \rightarrow \vec F = -\nabla V \rightarrow \nabla \times \vec F = 0$$

↳ convención

T.F.C

$$\int \vec F \cdot d\vec r = \Delta V$$

↳ En 1D $\quad \int F \cdot dx = \int dV = \Delta V$ → Energía Potencial

T.F.

$$W_{12} = \int_{1}^{2} \vec F \cdot d\vec r = \int_{1}^{2} (-\nabla V) \cdot d\vec r = -\Delta V$$

Recordando el T. de Energía-trabajo $\quad \Delta U = -\Delta T$

$$V(t_2) - V(t_1) = -[T(t_2) - T(t_1)]$$

$$\Rightarrow V(t_1) + T(t_1) = V(t_2) + T(t_2) = E = \text{Energía total}$$

$$\Rightarrow E = T(t) + V(t) = cte$$

↳ $\vec F(t)$

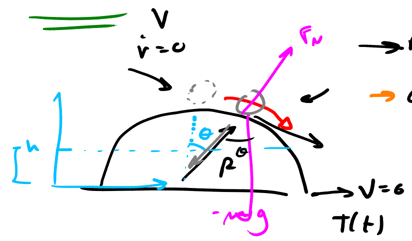
si $\vec F$ no es conservativa $\quad \Delta E = \Delta U + Q$ ← calor

1ª ley de la termo

Ejemplo

→ Definir el sistema

→ No hay fricción ⇒ La energía se conserva



→ r: $\cancel{F_N} - mg\cos\theta = -v^2/R\ m$

→ θ: $mg\sin\theta = \dot v m$

Válida mientras estamos en contacto con la esfera

— Movimiento circ.

↳ $a = a_c = \frac{V^2}{R}$

E: $E = T(t) + V(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) + mg\underbrace{R\cos(\theta)}_{h(t)}$

→ $h = R\cos\theta$ = altura

→ $E(\theta=0) = mgR = E(\theta) = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2(\theta) + mgR\cos\theta}$

$= \frac{1}{2}m(\underbrace{Rg\cos}_{v^2}) + mgR\cos\theta$

$V(t), \theta(t) \rightarrow V|\theta(t)|$

$mgR = \frac{3}{2}mgR\cos\theta$

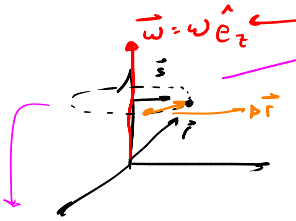
$\Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$

¿De dónde sale la fuerza centrípeta $\bar a_c = (-\hat e_r)\, v^2/r$?

Momento angular

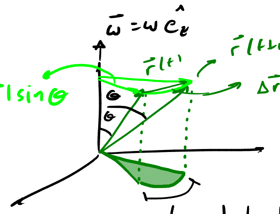
Definamos una rotación rígida mediante el vector $\vec\omega$

$\vec\omega = \omega\hat e_z$



La partícula está confinada a un plano y se mueve en un círculo

¿Cómo podemos describir al giro?



$\Delta\vec r(t) \rightarrow \|\Delta\vec r(t)\| \approx |\vec r|\sin\theta\,\Delta\varphi$

$= |\vec r|\sin\theta\,\omega\,\Delta t$

$= [|\vec r||\vec\omega|\sin\theta]\,\Delta t$

$\underbrace{\Delta\varphi = \omega\Delta t}$

$\Rightarrow \frac{\|\Delta\vec r(t)\|}{\Delta t} = \|\vec r\|\|\vec\omega\|\sin\theta = \|\vec\omega\times\vec r\| = \|\vec r\times\vec\omega\|$

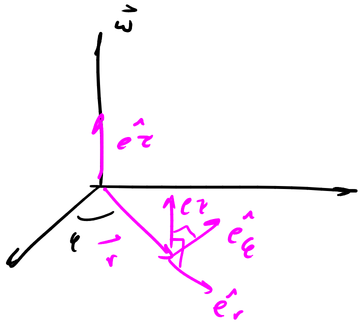
$\downarrow \Delta t \to 0$

$\Rightarrow \frac{d\vec r}{dt} = \vec\omega\times\vec r$ → Transformación para rotaciones rígidas

→ Giro perpendicular a $\vec\omega$

Para entender la dirección escogida, empleamos la Base cilíndrica

Escogemos $\vec\omega\times\vec r$ para definir una rotación con signo positivo



$\hat e_r = r\cos\varphi\,\hat e_x + r\sin\varphi\,\hat e_y$

$\hat e_\varphi = -r\sin\varphi\,\hat e_x + r\cos\varphi\,\hat e_y$

$\hat e_z = \hat e_z$

sistema coordenado derecho

- $\hat e_r\times\hat e_\varphi = \hat e_z$
- $\hat e_\varphi\times\hat e_z = \hat e_r$
- $\hat e_z\times\hat e_r = \hat e_\varphi$

Entonces vemos que $\vec\omega\times\hat e_r = \omega r(\hat e_z\times\hat e_r) = \omega r\,\hat e_\varphi = \vec V \Rightarrow \underline{V = \omega r}$

$\vec\omega\times\vec V = \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r) = \omega^2 r(\hat e_z\times\hat e_\varphi) = \omega^2 r(-\hat e_r) = \vec a$

$\Rightarrow \vec a = \omega^2 r(-\hat e_r) = \frac{V^2}{V}(-\hat e_r)$ ✓