2.- Problemas con condiciones de frontera

2.1.- Condiciones de frontera de los campos electromagnéticos

Sabemos que deben cumplirse las ecuaciones de Maxwell para cualquier V y S en $\mathbb{R}^3$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \rho_{tot}/\varepsilon_0 \longrightarrow \oint_{\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho_{tot}\, d^3r$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \longrightarrow \oint_{\partial V}\vec{B}\cdot d\vec{a} = 0$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t \longrightarrow \int_{\partial S}\vec{E}\cdot d\vec{l} = \cancel{-\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a}}^{\,0}$$

En el caso estático

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}_{tot} + \varepsilon_0\mu_0\,\partial\vec{E}/\partial t \longrightarrow \int_{\partial S}\vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\int_S \vec{J}_{tot}\cdot d\vec{a} + \cancel{\varepsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot d\vec{a}}^{\,0}$$

En el caso estático

Entonces consideremos una interfaz arbitraria que separa dos medios:

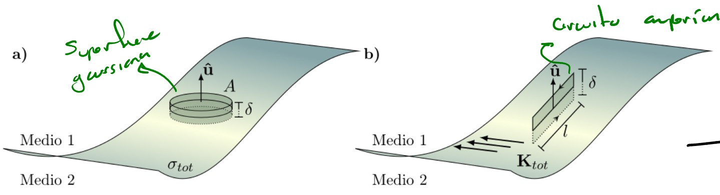

Fig. 1.1: Esquema de una interfaz entre dos medios distintos y arbitrarios con **a)** una densidad de carga superficial σ_{tot} y **b)** una densidad de corriente superficial $\mathbf{K}_{tot}$. Los campos EMs son evaluados en **a)** en el cilindro de área A y altura $\delta \to 0$ y en **b)** en el circuito de largo l y altura $\delta \to 0$. En ambas figuras el vector normal a la superficie es $\hat{\mathbf{u}}$.

En el límite donde $\delta \to 0$ sólo hay contribución de la superficie del cilindro

En el límite $\delta \to 0$ $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son constantes

En este caso si $\delta \to 0$ no hay contribuciones de las componentes perpendiculares a la interfaz, por lo tanto

$$\Rightarrow \left[\vec{E}(1) - \vec{E}(2)\right]A\cdot\hat{u} = \frac{Q_{tot}^{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{tot}A}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \left[\vec{E}(1) - \vec{E}(2)\right]\cdot\hat{u} = \frac{\sigma_{tot}}{\varepsilon_0} \quad \ldots (1)$$

De forma análoga $\quad \left[\vec{B}(1) - \vec{B}(2)\right]\cdot\hat{u} = 0 \quad \ldots (2)$

$$\Rightarrow l\left[\vec{B}(1) - \vec{B}(2)\right]\times\hat{u} = \mu_0 \vec{I}_{tot}^{\,atr} = \mu_0 l\,\vec{k}_{tot}$$

$$\Rightarrow \left[\vec{B}(1) - \vec{B}(2)\right]\times\hat{u} = \mu_0\vec{k}_{tot} \quad \ldots (3)$$

y equivalentemente

$$\left[\vec{E}(1) - \vec{E}(2)\right]\times\hat{u} = \vec{0} \quad \ldots (4)$$

Cabe mencionar que aún en el caso dinámico las condiciones anteriores se cumplen pues si $\delta \to 0$ antes la superficie de integración de b) se hace de medida cero.

En particular la ecuación 1 se puede reescribir en términos del potencial dado que

$$\vec{E} = -\nabla\phi \Rightarrow \vec{E}\cdot\hat{u} = -\frac{\partial\phi}{\partial n}$$

Derivada en la dirección normal.

Con esto definimos el problema de condiciones de frontera tal que

· Determinar $\phi(\vec{r})$, que cumple la ecuación $\nabla^2\phi = -\rho_{tot}(\vec{r})/\varepsilon_0$, en V

si $\rho_{tot}(\vec{r}\,')$ se define en V y se conoce $\phi\big|_{\partial V}$ o $\left.-\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{\partial V}$