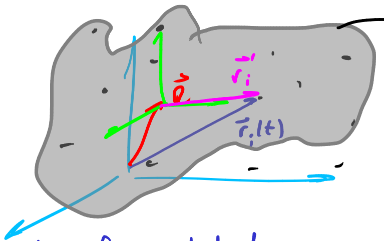
Sistema de N cuerpos y el momento lineal

↳ Todo lo anterior es válido para una (1) partícula pero se puede generalizar para sistemas de N partículas



→ N partículas

→ Para cada i-ésima partícula se cumple que

$$\vec{r}_i : \ \vec{p}_i = m_i \vec{v}_i \Rightarrow \vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i = m_i \dot{\vec{v}}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

→ 2da ley de Newton con m_i = cte

La fuerza total sobre el SISTEMA →

$$\vec{F}_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i^{\,ext} + \vec{F}_i^{\,int}\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i^{\,ext} + \cancel{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{f}_{ij}}\right)$$

→ 0 por 3ra ley de Newton

$$\Rightarrow \vec{F}_{TOT} = \sum_i \vec{F}_i^{\,ext} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i \overset{?}{=} M \ddot{\vec{R}}$$

(2ª ley de Newton)

→ ¿Podemos hacer una "2da ley" para todo el sistema?

↳ sí, definimos el centro de masa

$$\underbrace{M = \sum_i m_i = \int dm = \int \rho_{masa}(\vec{r})\, dV}_{\text{Masa total}} \ , \quad \underbrace{\vec{R} = \overbrace{\frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i}^{\text{Promedio de } \vec{r}_i} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm = \frac{1}{M}\int \vec{r}\rho(\vec{r})\, dV}_{\text{Centro de masa; Promedio de masa}}$$

El centro de masa permite describir al sistema como una partícula puntual con masa M, ubicada en $\vec{R}$. Lo cual es una primera aproximación a conocer la dinámica del sistema, es decir, a todos los $\vec{r}_i(t)$.

→ Lo que resta es ver cómo se mueven las partículas alrededor de $\vec{R}$.

→ Hagamos un cambio de marco de referencia

$$\boxed{\vec{r}_i = \vec{r}_i\,' + \vec{R}} \xrightarrow[\ \frac{d^2}{dt^2}\ ]{} \left[\ddot{\vec{r}}_i = \ddot{\vec{r}}_i\,' + \ddot{\vec{R}}\right]$$

→ sólo si $\ddot{\vec{R}} = 0$ se cumple que $\ddot{\vec{r}}_i = \ddot{\vec{r}}_i\,'$, lo que es consistente con la 2da ley de Newton

$\vec{r}_i$ ≡ Medidas en el sist. fuera del CM (inercial)

$\vec{r}_i\,'$ ≡ Medidas desde el CM

$\vec{R}$ ≡ CM

$$\boxed{\vec{r}_i\,' = \vec{r}_i - \vec{R}}$$

→ multiplicando por m_i

$$m_i \vec{r}_i\,' = m_i \vec{r}_i - m_i \vec{R}$$

→ derivando $\frac{d}{dt}$

$$m_i \dot{\vec{r}}_i\,' = m_i \dot{\vec{r}}_i - m_i \dot{\vec{R}}$$

Sumar sobre i

$$\sum_i \vec{p}_i\,' = \sum_i \vec{p}_i - \underbrace{\left(\sum_i m_i\right)}_{M} \dot{\vec{R}}$$

$$\vec{P}\,' = \vec{P} - M\dot{\vec{R}} = \vec{0}$$

Empleando la definición del CM

$$\sum_i \cancel{m_i \dot{\vec{r}}_i} - \cancel{M}\left(\frac{1}{\cancel{M}} \cancel{\sum m_i \dot{\vec{r}}_i}\right)$$

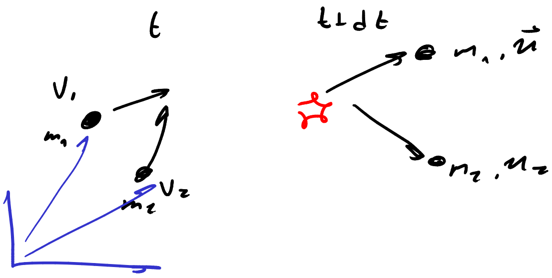
¡Siempre!

$$\boxed{\vec{P}\,' = \sum_i \vec{p}_i\,' = \vec{0}}$$

$$\boxed{\dot{\vec{P}}\,' = \vec{0}}$$

→ Es una cantidad conservada

Ejemplo: Colisiones $N=2$



Sup. que la energía se conserva

Desde el CM.

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{R} = \vec{r}_1 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$$

$$\vec{r}_1' = \frac{\cancel{(m_1}+m_2)\vec{r}_1 - \cancel{(m_1\vec{r}_1)} - (m_2\vec{r}_2)}{m_1+m_2}$$

$$= \frac{m_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{m_1+m_2}$$

$$\vec{r}_2' = -\frac{m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{m_1+m_2}$$

Posiciones relativas basta con que $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{r}$ posición relativa

$$T(t) = T(t+dt)$$

$$\frac{1}{2}m_1 V_1^2 + \frac{1}{2}m_2 V_2^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2$$

conservación de la energía

$$\vec{P}'(t) = \vec{0} \longrightarrow m_1 V_1 + m_2 V_2 = 0$$

$$\vec{P}'(t+dt) = \vec{0} \longrightarrow m_1 u_1 + m_2 u_2 = 0$$

$$\left.\right\} \quad V_2 = -\frac{m_1}{m_2}V_1, \qquad u_2 = -\frac{m_1}{m_2}u_1$$

Momento nulo desde el CM

Sustituyendo en la energía:

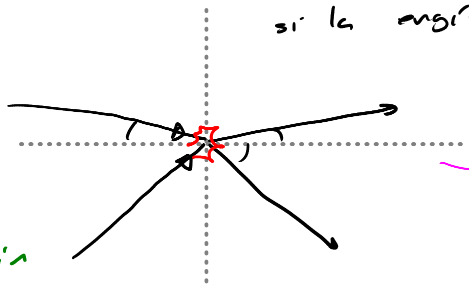
$$\frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2\frac{m_1^2}{m_2^2}V_1^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{m_2}u_1\right)^2$$

$$\frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right)V_1^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right)u_1^2$$

Haciendo lo mismo con si $1 \longrightarrow 2$

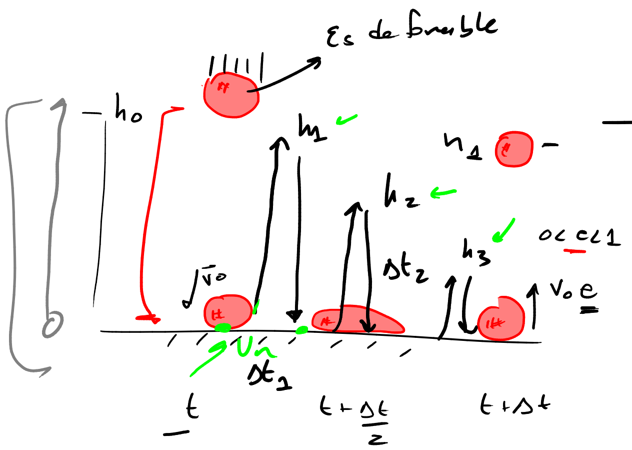
$$\left.\begin{aligned} V_1^2 &= u_1^2 \\ V_2^2 &= u_2^2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} V_1 &= \pm u_1 \\ V_2 &= \pm u_2 \end{aligned}$$

si la energía se conserva



En el CM, todas las colisiones son simétricas

Ejemplo: Coeficiente de restitución



Vamos los choques en intervalos distintos

$$\text{Antes} \quad P(t) = -mV_0 \qquad V_i = V_0$$

$$P(t+\Delta t) = mV_0 e \qquad V_n = V_0 e^n$$

$$\text{Bote 1} \quad P(t' = t+\Delta t) = -mV_0' = -m(V_0 e) \qquad \boxed{V_0' = V_1}$$

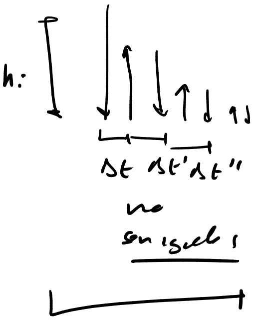
$$P(t'+\Delta t = t+2\Delta t) = +mV_0' e = mV_0 e^2$$

$$\text{Bote 2} \quad P(t'') = -mV_0 e^2$$

$$P(t''+\Delta t) = mV_0 e^3$$

$$\vdots$$

cuando la pelota rebota, pierde energía con una tasa de e.



$$\boxed{h_i = v_i \Delta t_i - \frac{1}{2} g \Delta t_i^2 = 0} \to \text{raíces}$$ → Cada subida y bajada de la pelota

$$\to \underbrace{\Delta t_i}_{=0}\underbrace{\left(v_i - \frac{1}{2} g \Delta t_i\right)}_{=0} = 0$$

$$\to \Delta t_n = \frac{2v_n}{g} = \frac{2 v_0 e^n}{g} \quad (\text{cte})$$ → Para la subida-bajada n-ésima

$$\underline{\underline{\tau}} = \sum_n \Delta t_n = \frac{2v_0}{g} \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}} e^n - \frac{1}{2}\left(\frac{2v_0 e^0}{g}\right)$$ → Para calcular el tiempo total

→ quitamos la mitad de la subida y calculamos con $n=0$, hasta $n \to \infty$

$$\boxed{\tau = \frac{2v_0}{g}\frac{1}{1-e} - \frac{v_0}{g}}$$

↳ Tiempo total que transcurre la pelota rebotando

$$S_n = 1 + e + e^2 + \dots + e^{n-1} + e^n$$

$$eS_n = \underbrace{e + e^2 + e^3 + \dots + e^n}_{= S_n - 1} + e^{n+1} \underbrace{+1-1}_{=0}$$

$$eS_n = S_n + e^{n+1} - 1$$

$$(e-1)S_n = e^{n+1} - 1$$

$$\boxed{S_n = \frac{e^{n+1}-1}{e-1} = \frac{1-e^{n+1}}{1-e}}$$ Suma geométrica

$$\lim S_n = \frac{1 - \cancel{\lim e^{n+1}}^{\,0}}{1-e}$$ pues $e<1$