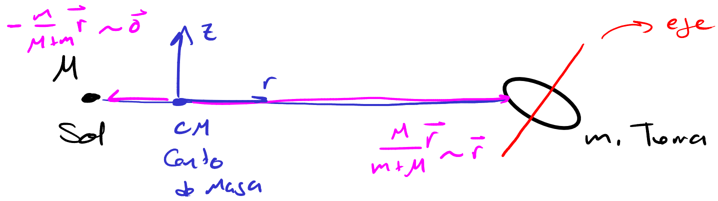
Campo central y correcciones no esféricas

Supongamos el problema de dos cuerpos con el Sol y la Tierra. Ambos tienen densidades homogéneas y uniformes pero la Tierra no es perfectamente esférica (el Sol sí lo es).

Como el Sol es una esfera, podemos considerarla como una partícula puntual. Entonces, el sistema a resolver es:

Donde $M_{sol} \gg m_{Tierra}$

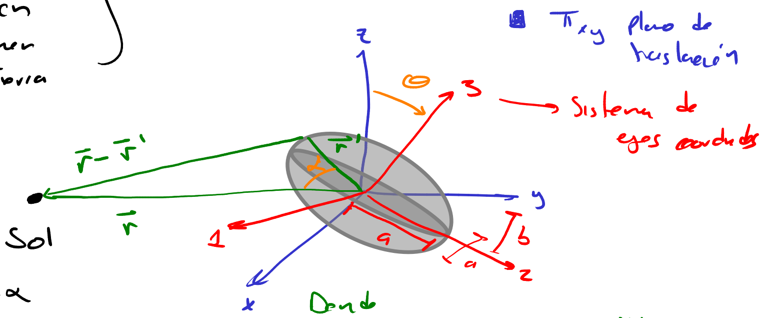


→ Sabemos que la dinámica de dos partículas están confinadas en un plano, pero falta ver qué pase si se tiene un volumen finito

Sabemos que la interacción gravitatoria está dada por

$$dU = -G\frac{M\,dm}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}, \text{ donde } \begin{cases} \vec{r} \to \text{punto al CM (sol)} \\ \vec{r}\,' \to \text{posiciones en el volumen de la Tierra} \end{cases}$$

Escogemos la siguiente geometría



Donde $\|\vec{r}\| = r \gg r' = \|\vec{r}\,'\|$

Notemos que

$$\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^2 = r^2 + r'^2 - 2\,\vec{r}\cdot\vec{r}\,' = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\alpha$$

Por lo tanto, la interacción gravitatoria es:

$$U(\vec{r}) = -GM\int_{V'} dm\, \|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^{-1/2} = -GM\int_{V'} \frac{dm}{r^2}\left\{1 + \underbrace{\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right]}_{\text{Número pequeño pues } r \gg r'}\right\}^{-1/2}, \ \ldots \quad (1)$$

donde $dm = \rho\, d^3r'$ y $\rho = cte$

→ Método largo

Notemos que $\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2} = \left(\frac{r'}{r}\right)\cos\alpha'$, es decir, es de orden lineal en (r'/r). Usando una expansión en series de Taylor de $(1+\epsilon)^n = 1 + n\epsilon + n(n-1)\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3)$

$$U(\vec{r}) = -\frac{GM}{r}\int_{V'} dm\left\{1 + \left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right]\right\}^{-1/2} \approx -\frac{GM}{r}\int_{V'} dm\left\{1 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right] + \frac{3}{8}\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right]^2\right\}$$

$$= -\frac{GM}{r}\int_{V'} dm\left\{1 + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \frac{3}{8}\,4\,\frac{(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')^2}{r^4} + \mathcal{O}\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^3\right]\right\}$$

$$\approx -\frac{GM}{r}\int_{V'} dm\left(1 + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2} + \frac{1}{2}\left[3\left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right)^2 - \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right]\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}(r) \simeq -\frac{GM}{r}\int_{v'} dm \left(\underbrace{1}_{\text{Contribución como de partícula puntual}} + \cancelto{0}{\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[3\left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right)^2 - \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right]}_{\text{Correcciones no esféricas}}\right)$$

$$\sim \int dm\,(\vec{r}\cdot\vec{r}') = \vec{r}\cdot\underbrace{\int dm\,\vec{r}'}_{\text{CM medido desde el CM.}} = 0$$

Entonces $\mathcal{U}(r) = -\frac{GMm}{r} + \tilde{\mathcal{U}}(r)$; $\tilde{\mathcal{U}}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r}\int_{v'} dm\,\frac{1}{2}\left[3\frac{(\vec{r}\cdot\vec{r}')^2}{r^4} - \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right]$

Intentemos simplificar $\tilde{\mathcal{U}}(\vec{r})$.

$$\tilde{\mathcal{U}}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^3}\int_{v'}\frac{dm}{2}\left[3\frac{(\vec{r}\cdot\vec{r}')^2}{r^2} - r'^2\right] = -\frac{GM}{r^3}\int_{v'}\frac{dm}{2r^2}\left(3(\vec{r}\cdot\vec{r}')^2 - r'^2r^2\right)$$

La integral a resolver es en todo el volumen, por lo que nos enfocamos en el sistema de ejes principales, por lo que $\vec{r}' = (x_1, x_2, x_3)$ y $\vec{r} = (x, y, z)$

entonces $\vec{r}\cdot\vec{r}' = x x_1 + y x_2 + z x_3$, $r^2 = x^2+y^2+z^2$, $r'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$$\Rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(\vec{r}) = -\frac{GM}{2r^5}\int_{v'} dm\left[3(\underbrace{x x_1 + y x_2 + z x_3}_{})^2 - (x^2+y^2+z^2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\right]$$

los términos de la forma $-(x_1 x)^2$ se cancelan con $3(x_1 x)^2$ dando $2(x_1 x)^2$ en total

Vemos que el sistema tiene dos ejes de simetría por lo que

$$\underbrace{\int dm\, x_1 x_2 = \int dm\, x_1 x_3 = \int dm\, x_3 x_2}_{} = 0$$

que coinciden con ser las componentes no diagonales de $(\overleftrightarrow{I})_{123}$ ↳ sistema de ejes principales

$$\Rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(\vec{r}) = -\frac{GM}{2r^5}\int_{v'} dm\left[2(x x_1)^2 + 2(y x_2)^2 + 2(z x_3)^2 - (x x_2)^2 - (x x_3)^2 - (y x_1)^2 - (y x_3)^2 - (z x_1)^2 - (z x_2)^2\right]$$

Notemos que las integrales $\int dm\, x_2^2 = \int dm\, x_1^2$, por la simetría a lo largo del eje 3. Por lo que cambiamos $x_2 \to x_1$ en la integral

$$\Rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(\vec{r}) = -\frac{GM}{2r^5}\int dm\left[\cancel{2}\,x_1^2(x^2+y^2) + 2(z x_3)^2 - \cancel{x_1^2(x^2+y^2)} - (y x_3)^2 - (x x_3)^2 - 2(z x_1)^2\right]$$

$$= -\frac{GM}{2r^5}\int dm\left[x_1^2(x^2+y^2-2z^2) + x_3^2(2z^2-y^2-x^2)\right]$$

$$= -\frac{GM}{2r^5}\int dm\,(x^2+y^2-2z^2+z^2-z^2)(x_1^2-x_3^2) = -\frac{GM}{2r^5}\int dm\,(r^2-3z^2)(x_1^2-x_3^2+x_2^2-x_2^2)$$

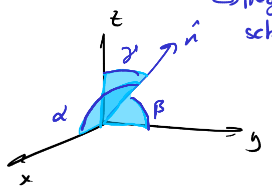
$$\Rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(\vec{r}) = -\frac{GM}{2r^5}(r^2-3z^2)\left[\underbrace{\int dm\,(x_1^2+x_2^2)}_{I_3} - \underbrace{\int dm\,(x_2^2+x_3^2)}_{I_1 - I_2}\right] = -\frac{GM}{r^3}(I_1-I_3)\frac{3(z/r)^2-1}{2}$$

¿Quién es $\frac{z}{r}$?

Podemos reproducir los mismos cálculos de una forma más ilustrativa, pero para esto, recordemos lo siguiente

- Cosenos directores

↳ Proyección sobre cada eje



$\hat{n} = (\cos\beta, \cos\gamma, \cos\theta)$

$\|\hat{n}\|^2 = 1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$

- Momento de inercia relativo a un eje arbitrario

$$T = \tfrac{1}{2}\vec{\omega}^T \overleftrightarrow{I}\vec{\omega} = \tfrac{1}{2} I_n \omega^2, \quad \text{donde} \quad \vec{\omega} = \hat{n}\omega \quad \text{y}$$

$$I_{\hat{n}} = \hat{n}^T \overleftrightarrow{I} \hat{n} = \hat{n}^T \int dm\, (\mathbb{1} r^2 - \vec{r}\vec{r})\, \hat{n}$$

$$= \int dm \Big[\underbrace{\hat{n}^T \mathbb{1} \hat{n}}_{= \hat{n}^T \mathbb{1}\hat{n} = \hat{n}^T\hat{n} = \vec{n}\cdot\vec{n} = 1} r^2 - \underbrace{\hat{n}^T \vec{r}\vec{r}\hat{n}}_{\sum_{ij} n_j r_i r_j n_i = \sum_{ij}(r_i n_i)(r_j n_j) = [\sum_i r_i n_i]^2 = (\vec{r}\cdot\hat{n})^2}\Big]$$

$$I_{\hat{n}} = \int dm \left[r^2 - (\vec{r}\cdot\hat{n})^2\right]$$

- Traza de una matriz

La traza es la suma de los elementos de la diagonal de una matriz:

$Tr\,\mathbb{A} \to$ Igual para cualquier base pues es un escalar

$$\mathbb{A}' = \mathbb{U}^T \mathbb{A}\, \mathbb{U} \;;\; \mathbb{U}\mathbb{U}^T = \mathbb{U}^T\mathbb{U} = \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow Tr(\mathbb{A}') = \sum a'_{ii} = \sum_i (\mathbb{U}^T\mathbb{A}\mathbb{U})_{ii} = \sum_i \Big(\sum_{jk} U_{ij} a_{jk} U_{ki}\Big)$$

$$= \sum_{jk} a_{jk} \sum_i U_{ij} U_{ki} = \sum_{jk} a_{jk}\delta_{ij} = \sum_k a_{kk}$$

- Polinomios de Legendre $\{P_\ell(x)\}$

↳ Base completa $|x| \le 1$

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(x) P_{\ell'}(x)\, dx = \frac{\delta_{\ell\ell'}}{2\ell+1}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1 \underbrace{-2xt + t^2}_{\epsilon}}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} t^\ell P_\ell(x) \Big\} \text{ Función generadora}$$

$$\Rightarrow P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$$

En coordenadas esféricas con simetría azimutal (no dependen en ϕ)

$$\nabla^2\phi = 0 \Rightarrow \phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right) P_\ell(\cos\theta')$$

Ahora, regresemos al caso de la ley de gravitación

$$U(\vec{r}) = -GM\int \frac{dm}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} = -\frac{GM}{r}\int \frac{dm}{\sqrt{1 - 2(\frac{r'}{r})\cos\theta' + (\frac{r'}{r})^2}} = -\frac{GM}{r}\int dm \left(\frac{r'}{r}\right)^\ell P_\ell(\cos\theta')$$

$$\Rightarrow U(\vec{r}) = \underbrace{-\frac{GM}{r}\int P_0(\cos\theta)\, dm}_{\text{partícula puntual}} - \underbrace{\frac{GM}{r^2}\int \cancel{P_1(\cos\theta')}^{\,0}\, r'\, dm}_{\text{pues si } \vec{p} = cte} - \underbrace{\frac{GM}{r^3}\int dm\, r'^2 P_2(\cos\theta)}_{\tilde{U}(\vec{r})}$$

$$\int dm = \int_{-1}^{1} (\cos\theta)\, d(\cos\theta)\, d\phi\, dr = 0$$

Entonces $\tilde{U}(\vec{r}) = -\dfrac{GM}{r^3}\displaystyle\int dm\, r'^2\left(\frac{3(\cos\theta')^2 - 1}{2}\right) = -\dfrac{GM}{r^3}\displaystyle\int \frac{dm}{2}\left(3(r'\cos\theta')^2 - r'^2 + 3r'^2 - 3r'^2\right)$

$$\Rightarrow \tilde{U}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^3}\int \frac{dm}{2}\left\{3\left[(r'\cos\theta')^2 - r'^2\right] + 2r'^2\right\}$$

Notemos que en el sistema de ejes principales

$$\overleftrightarrow{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \text{ donde } I_3 = \int dm\,(x_1'^2 + y_1'^2),\ I_1 = \int dm\,(x_2^2 + x_3^2),\ I_2 = \int dm\,(x_1^2 + x_3^2)$$

es decir $Tr\,\overleftrightarrow{I} = I_1 + I_2 + I_3 = \int dm\,(x_1^2 + x_2^2 + x_2^2 + y_3^2 + x_1^2 + y_3^2) = \int dm\, 2(x_1^2 + x_2^2 + y_3^2) = \int dm\, 2r'^2$

Además $\int dm[r'^2 - (r'\cos\theta')^2] = \int dm[r'^2 - (\vec{r}'\cdot\hat{r})^2] = I_{\hat{r}}$ → Momento de inercia relativo a $\vec{r}$

$$\Rightarrow \tilde{U}(\vec{r}) = -\frac{GM}{2r^3}(tr\,\overleftrightarrow{I} - 3I_r) = -\frac{GM}{2r^3}(2I_1 + I_3 - 3I_r)$$

↳ y como $I_1 = I_2$

Sin embargo, veamos que

$$I_r = \int dm[r'^2 - (\vec{r}'\cdot\hat{r})^2] = \int dm\,(r'^2 - [x_1\cos\alpha + x_2\cos\beta + x_3\cos\gamma]^2)$$

→ los términos cruzados se eliminan como habíamos visto

Proyectando $\hat{r}$ en los ejes principales $\hat{r} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$$= \int dm[r'^2 - x_1^2\cos^2\alpha - x_2^2\cos^2\beta - x_3^2\cos^2\gamma]$$

Recordemos que $x_1^2 = r'^2 - (x_2^2 + x_3^2)$

$$= \int dm\,(r'^2 - r'^2\cos^2\alpha + (x_2^2 + x_3^2)\cos^2\alpha + - r'^2\cos^2\beta + (x_1^2 + x_3)\cos^2\beta + - r'^2\cos^2\gamma + (x_1^2 + x_2^2)\cos^2\gamma]$$

$$\Rightarrow I_r = \int dm\,(\cancel{r'^2} - \cancel{r'^2(\underbrace{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}_{1})} + (x_2^2 + y_3^2)\cos^2\alpha + (x_1 + x_3)\cos^2\beta + (x_1^2 + x_2^2)\cos^2\gamma)$$

$$\Rightarrow I_r = I_1\cos^2\alpha + I_2\cos^2\beta + I_3\cos^2\gamma = I_1(\underbrace{\cos^2\alpha + \cos^2\beta}_{1-\cos^2\gamma}) + I_3\cos^2\gamma$$

↳ $I_1 = I_2$

$$\therefore I_r = I_1 + (I_3 - I_1)\cos^2\gamma$$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Por lo que

$$\tilde{U}(\vec{r}) = -\frac{GM}{2r^3}(\cancel{2I_1} + I_3 - \cancel{3}I_1 - 3(I_3 - I_1)\cos^2\gamma)$$

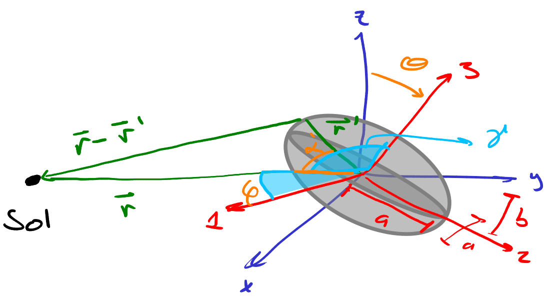
$$= -\frac{GM}{2r^3}(I_3 - I_1 - 3(I_3 - I_1)\cos^2\gamma)$$

$$= -\frac{GM}{2r^3}(I_1 - I_3)(3\cos^2\gamma - 1)$$

$$= -\frac{GM}{r^3}(I_1 - I_3)\left(\frac{3\cos^2\gamma - 1}{2}\right)$$

→ pero quién es γ?

Veamos del diagrama que



$\cos\alpha$ es la proyección a lo largo de $\vec{r}$ en el plano Π_{xy}, es decir que

$\cos\gamma = \cos\varphi\,\sin\Theta$ → Nutación

↳ precesión

Entonces, de ambos métodos habíamos obtenido que

$$\tilde{u}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^3}(I_1 - I_3)\, P_2\left(\frac{z}{r}\right) = -\frac{GM}{r^3}(I_1 - I_3)\, P_2\left(\cos\varphi \sin\theta\right)$$

Donde $\frac{z}{r} = \cos\varphi\sin\theta \longrightarrow$ la proyección de $\vec{r}$ en el eje principal de rotación.

Las precesiones son muy lentas en la Tierra por lo que

$$\langle \tilde{u}(\vec{r}) \rangle_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\vec{r})\, d\varphi = -\frac{GM}{r^3}\frac{(I_1 - I_3)}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{(3\cos^2\varphi \sin^2\theta - 1)}{2}$$

$$= -\frac{GM}{r^3}(I_1 - I_3)\left(\frac{3\sin^2\theta}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{2\pi}}_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}}_{1}\right)$$

$$= -\frac{GM}{r^3}\frac{(I_1 - I_3)}{2}\,\frac{3(1 - \cos^2\theta) - 2}{2} = -\frac{GM}{2r^3}(I_3 - I_1)\left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \langle \tilde{u}(\vec{r}) \rangle_\varphi = -\frac{1}{2}\frac{GM}{2r^3}(I_3 - I_1)\, P_2(\cos\theta)$$

↳ genera un torque perpendicular al eje 3 y a la normal al plano

Es como la fuerza de un trompo que mantiene un punto fijo.