Ecuaciones de Hamilton

Anteriormente se discutió que el Lagrangiano $\mathcal{L}$ es una función de estado que describe un sistema dinámico y que se define en la variedad de configuraciones Q. De forma adicional, con $\mathcal{L}$ se describe la dinámica de cada uno de los $3N-\ell$ grados de libertad mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$q_i \in Q \quad \text{t.} \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\mathcal{L}}_{=p_i}\Big) - \frac{\partial}{\partial q_i}\mathcal{L} = Q_i \quad \ldots (1)$$

Q_i → Fuerza generalizada.

o equivalente $\dot{p}_i - Q_i = \partial \mathcal{L}/\partial q_i \ldots (1.a)$

También se discutió que se puede definir al Hamiltoniano $\mathcal{H}$, que también es una función de estado, que es la transformada de Legendre de $\mathcal{L}$ respecto a $\dot{q}_i$, por lo que $\mathcal{H}$ depende de q_i y $\partial \mathcal{L}/\partial \dot{q}_i = p_i$, definiendo lo que se conoce como espacio fase:

$$\mathcal{H} \equiv T_{\mathcal{L}}^{\dot{q}_i}[\mathcal{L}] = \sum_{i=1}^{3N-\ell} \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{3N-\ell} \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}$$

↳ y por las propiedades de la transformada de Legendre

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\{q_i\}, \{p_i\}, t)$$

Pero cuáles son las ecuaciones que describen la dinámica en el caso del Hamiltoniano. Para deducirlas, recordamos que

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\{q_i\}, \{p_i\}, t) \Rightarrow d\mathcal{H} = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \quad \ldots (2)$$

$$\mathcal{H} = T_{\mathcal{L}}^{\dot{q}_i}[\mathcal{L}] = \sum_{i=1}^{3N-\ell} \dot{q}_i p_i - \mathcal{L} \Rightarrow d\mathcal{H} = \sum_i d(\dot{q}_i p_i) - d\mathcal{L}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t)$$

pues $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$

$$= \sum_i (\cancel{p_i d\dot{q}_i} + \dot{q}_i dp_i) - \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

Ec. (1.a)

$$= \sum_i \left(\dot{q}_i dp_i - (\dot{p}_i - Q_i) dq_i \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \quad \ldots (3)$$

Dado que $\{q_i\}$ y $\{p_i\}$ son linealmente independientes, comparando los coeficientes de los diferenciales de las Ecs. (2) y (3) se obtiene lo siguiente:

$$dH = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\, dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\, dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t}\, dt$$

$$dH = \sum_i \left(\dot q_i\, dp_i - (\dot p_i - Q_i)\, dq_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t}\, dt$$

Ecuaciones de Hamilton

- $\dot q_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$
- $\dot p_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i$
- $\dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\partial L}{\partial t}$

Estas son las ecuaciones que rigen el movimiento.

Notemos que son $2\cdot(3N-\ell)$ ecuaciones, pero de primer orden. Entonces sigue siendo necesario realizar $2\cdot(3N-\ell)$ integraciones.

- Por último, notemos que de (2):

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial t} \right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$= \sum_i \left[(Q_i - \cancel{\dot p_i})\,\dot q_i + \cancel{\dot q_i \dot p_i} \right] + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\boxed{\text{Si } Q_i = 0, \text{ entonces } \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}}$$