Electrodinámica

→ Algo básico de electrónica

Con el estudio de las corrientes eléctricas, descubrimos la ley de ohm como:

$\vec{J} = \rho \vec{v}$; $\vec{J} = \sigma \vec{E} = -\sigma \nabla \phi$ $\xrightarrow[\text{Más conocida como}]{}$ $I = \frac{1}{R} V \rightarrow V = RI$ con $I = \frac{dQ}{dt}$

velocidad ($\vec{v}$)

$V = -\Delta \phi$

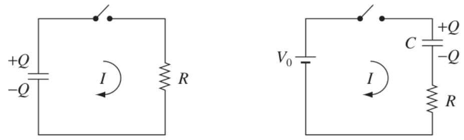
Otra cantidad importante es $P = \frac{dW}{dt} = -\int d^3r\, \vec{j}\cdot\vec{E} \longrightarrow P = IV = I^2R$

↳ ley de Joule

Para un capacitor $C = \frac{Q}{\Delta\phi}$ y sabemos que podemos calcular cómo almacena energía

↳ $dW = \phi\, dq \Rightarrow W = \int \phi\, dq = \int \frac{1}{C} q\, dq = \frac{1}{2}\frac{1}{C} q^2 = \frac{1}{2} C \phi^2$ ← Energía almacenada en un capacitor. Regresaremos a ésta, más adelante.

Con esta información: ley de ohm y capacitores podemos analizar ya el siguiente problema



→ Carga y descarga del capacitor. Para esto hay que plantear la ecuación diferencial

↳ Caída de voltaje : $V = RI = R\dot{Q} < 0$

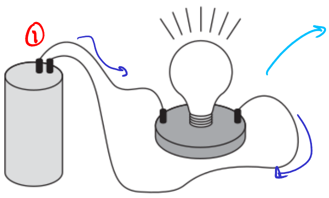
↳ Debido al capacitor: $V = Q/C$

↳ Fuente externa: V_0

$V_{ohm} + V_{cap} = V_0 \longrightarrow$ Fuente

↳ $R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = V_0$ ← ¿Cómo se resuelve este sistema? "

→ Ahora, pensemos en las implicaciones físicas en los circuitos

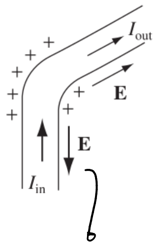


1) La corriente en este circuito es la misma en todo el alambre

① La única fuerza para mover las cargas está en la pila por la diferencia de potencial

② La fuerza que genera la corriente, cómo se empalma con la de la batería.

La respuesta a las preguntas es que hay procesos intermedios hasta llegar al equilibrio que planteamos.



Los cúmulos de carga que se ocasionan en algunas regiones generan una corriente en sentido contrario a la corriente inicial.

↳ Esta corriente detiene a la inicial hasta alcanzar el estado estacionario

Entonces, en realidad

$\vec{f} = \vec{f}_{fuente} + \vec{E}$

↳ Debido a interacciones dentro del circuito

$\vec{f}_{fuente}$: Fuente, como baterías piezo-eléctricas etc.

Entonces, sin importar el origen de las fuerzas, en el caso estacionario

$$\oint \vec{f}\cdot d\vec{l} = \oint (\vec{f}_{fuente} + \vec{E})\cdot d\vec{l} = \oint \vec{f}_{fuente}\cdot d\vec{l} = \mathcal{E}$$

↳ Fuerza electromotriz (FEM)

• Ejemplo con una batería.

↳ En una pila ideal no hay resistencia alguna, entonces $\vec{f} = 0 = \vec{f}_{fuen} + \vec{E}$. y en este caso

$$\Delta\phi = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b (\vec{f}_{fuente})\cdot d\vec{l} = \oint \vec{f}_{fuente}\cdot d\vec{l} = \mathcal{E}$$

↳ Se cierra el circuito fuera del alambre donde $\vec{f}_{fuente} = \vec{0}$.

Si la batería no es ideal, entonces tiene una resistencia R tal que $\Delta\phi = \mathcal{E} - \underline{IR}$

↳ Por el comportamiento óhmico.

⟶ Ley de Faraday-Lenz

↳ De esta ley, experimental, vemos que

$$\nabla\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \longrightarrow \int_S \nabla\wedge\vec{E}\cdot d\vec{a} = \oint_{\partial S}\vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{a} = \frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = \frac{d}{dt}\Phi_B$$

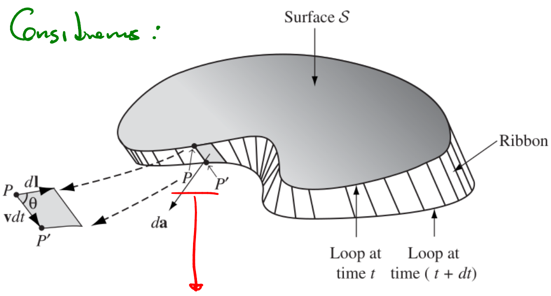
→ Flujo de $\vec{B}$ sobre s

Pero, vimos que

$$\boxed{\mathcal{E} = \oint_{\partial S}\vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt}\Phi_B}$$

⟶ Es otra forma de ver esta ley sin embargo hay varios pasos que se obvian y resolveremos ahora. Por ejemplo, ¿Cómo tener en cuenta si el área se mueve, o no?

Consideremos:



P ⟶ P'
en t   t+dt

→ Una superficie al tiempo t y $t+dt$

El flujo de $\vec{B}$ en la superficie a esos tiempos cumple con que

$$d\Phi_B(t+dt) - d\Phi_B(t) = \int_{lazo}\vec{B}\cdot d\vec{a}$$

• Considere que $\vec{v} \rightarrow$ vel del circuito

$\vec{u} \rightarrow$ vel de la carga en el circuito

$\Rightarrow \vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$ es la vel. total de la carga

Notamos que el cambio de área en el lazo es entonces

$$d\vec{a} = (\vec{v}\times d\vec{l})\,dt \quad \text{.... (ver dibujito)}$$

Como $\vec{u} \parallel d\vec{l}$ entonces $\vec{u}\times d\vec{l} = \vec{0}$ y por tanto $d\vec{a} = (\vec{w}\times d\vec{l})\,dt$

Con todo esto

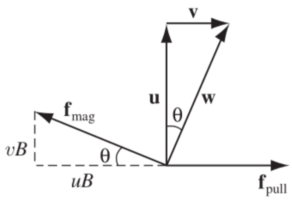
$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \oint_{lazo}\vec{B}\cdot(\vec{w}\times d\vec{l}) = -\oint_{lazo}(\vec{w}\wedge\vec{B})\cdot d\vec{l}$$

→ Recordemos que $\vec{F}_{mg} = q\,\vec{w}\times\vec{B}$

→ Fuerza magnética por unidad de carga

$$\Rightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} = -\oint \vec{f}_{mag}\cdot d\vec{l}$$

↳ hay que tener cuidado con este término pues el campo magnético no genera trabajo! Este término en realidad manifiesta el trabajo ejercido en que se mueven el circuito



$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -\oint \vec{f}_{mag}\cdot d\vec{l}$$

Que es igual a la fuerza $\|\vec{u}\|\|\vec{B}\|\sin\theta$

→ Vemos que $\vec{f}_{pull} = uB$ y $\int \vec{f}_{pull}\cdot d\vec{l} = (uB)\,\dfrac{h}{\cos\theta}\cdot\sin\theta = \underbrace{vBh}_{\text{"Trabajo" de la fuerza magnética}}$

Entonces, es conveniente definir $\underbrace{\oint \vec{f}_{mag}\cdot d\vec{l} \equiv \mathcal{E}}$

↳ ¡Definición!

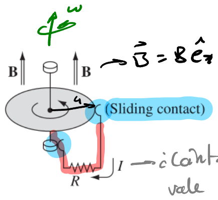
↳ Abierto a una interpretación

∴ y por tanto

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mathcal{E} \longrightarrow \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Flujo definido por $d\vec{a}$ — Integral de línea definida por $d\vec{l}$ en ∂V → La integral de línea y la de área están relacionadas por la regla de la mano derecha.

Ejemplo:



$\vec{\omega}$

$\vec{B} = B\hat{e}_z$

→ ¿Cuánto vale la corriente?

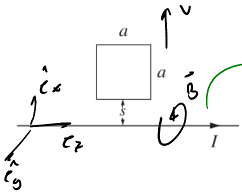
Si se emplean coordenadas cilíndricas $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{s} = \omega s\,\hat{e}_\varphi$

$\Rightarrow \vec{f}_{mag} = \vec{v}\times\vec{B} = \omega s B\,\hat{e}_s$

Entonces $\mathcal{E} = \oint \vec{f}_{mag}\cdot d\vec{l} = \int_0^a \vec{f}_{mag}\cdot d\vec{s} + \underbrace{\int \vec{f}_{mag}\cdot d\vec{l}}_{\text{alambre}} = \omega B\int_0^a s\,ds = \dfrac{\omega B a^2}{2}$

y por ley de Ohm $I = \mathcal{E}/R = \omega B a^2/2R$

Ejemplo 2



$\vec{v}$, $\hat{e}_x$, $\hat{e}_z$, $\hat{e}_y$, $\vec{B}$

$\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi s}\,\hat{e}_\varphi$

1) El flujo de $\vec{B}$ en el circuito es $\int_\square \vec{B}\cdot d\vec{a} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^a\int_s^{s+a} \dfrac{ds}{s}\,dz\,\hat{e}_\varphi\cdot\hat{e}_\varphi = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\,a\ln\left(1+\dfrac{a}{s}\right)$

2) Si se aleja el circuito a una velocidad $\vec{v} = v\hat{e}_s$

$\mathcal{E} = \oint \vec{f}_{mag}\cdot d\vec{l}$; $\vec{f}_{mag} = \vec{v}\times\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I v}{2\pi s}\,\hat{e}_s\times\hat{e}_\varphi = \dfrac{\mu_0 I v}{2\pi s}\,\hat{e}_z$

$\Rightarrow \mathcal{E} = \oint \vec{f}_{mag}\cdot d\vec{l} = \int_0^a \vec{f}_{mag}\cdot dz\,\hat{e}_z\Big|_{s=s} + \int_a^0 \vec{f}_{mag}\cdot dz\,\hat{e}_z\Big|_{s=s+a} \pm \cancel{\int_s^{s+a} \vec{f}\cdot ds\,\hat{e}_s}\Big|_{z=0,a} = \dfrac{\mu_0 I v}{2\pi}\left(\dfrac{a}{s} - \dfrac{a}{s+a}\right)$

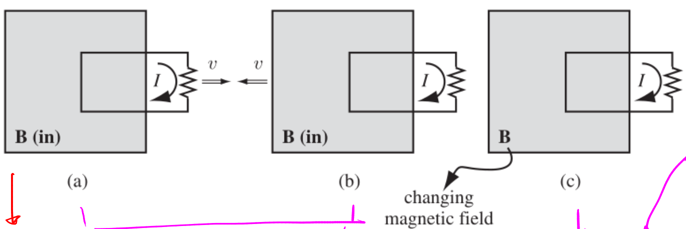
↳ Sentido anti-horario

Notemos que $\mathcal{E} = \dfrac{\mu_0 I v}{2\pi}\,\dfrac{a(s+a)-as}{s(s+a)} = \dfrac{\mu_0 I v}{2\pi}\,\dfrac{a^2}{s(s+a)}$ y que $\dfrac{d\Phi_B}{dt} = \dfrac{d\Phi_B}{ds}\overbrace{\dfrac{ds}{dt}}^{=v} = \dfrac{\mu_0 I v}{2\pi}\,a\,\dfrac{1}{1+a/s}\left(\dfrac{a}{-s^2}\right) = -\dfrac{\mu_0 I v}{2\pi}\,\dfrac{a^2}{s(s+a)} = -\mathcal{E}$

3) Si $\vec{v} = v\hat{e}_z$, entonces $\vec{v}\times\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I v}{2\pi s}(-\hat{e}_s) \Rightarrow \mathcal{E} = \int_s^{s+a} \vec{f}_{mag}\cdot ds\,\hat{e}_s\Big|_{z=0} + \int_{s+a}^{a} \vec{f}_{mag}\cdot ds\,\hat{e}_s\Big|_{z=a} = \dfrac{\mu_0 I v}{2\pi}\left[\ln\left(\dfrac{s}{s+a}\right) + \ln\left(\dfrac{s+a}{s}\right)\right] = 0$

y en este caso $\dfrac{d\Phi_B}{dt} = \dfrac{d\Phi}{dz}\dfrac{dz}{dt} = 0 = -\mathcal{E}$ ✓

Discusión de los mecanismos de la ley de Faraday-Lenz



En los tres casos anteriores se cumple que

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\Phi_B \longleftrightarrow \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

1) En a) [b)] se mueve el circuito (campo magnético) y en ambos casos hay una fem

→ Lo importante es el cambio relativo entre los sistemas

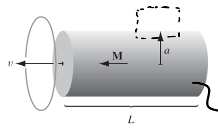
En cualquier caso la expresión de la ley de Faraday-Lenz es correcta y esta fue la que llevó a la formulación de la relatividad especial.

"Fuerza magnética" Es la que induce la fem. Pero es el trabajo de quien jala el alambre

↳ En los tres casos, cambios en cómo se observa $\vec{B}$ induce un campo eléctrico

En estos casos es necesario introducir a un campo eléctrico inducido por variaciones en $\vec{B}$, pero notemos que las fuerzas generando el trabajo son distintas

Ahora, hablemos del signo negativo de la ley de Faraday-Lenz con un ejemplo

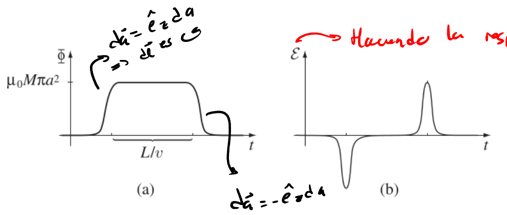


Consideremos el sistema de la izquierda considerando que esta barra se mueve dentro de la espira a una velocidad $\vec{v}$.

si $\vec{M} = M\hat{e}_z$ ent. $\vec{J}_{ind} = \vec{0}$ pero $\vec{K} = M\hat{e}_z \times (\hat{e}_s) = M\,\hat{e}_\varphi \Rightarrow \vec{B} = B\hat{e}_z$

Despreciando efectos de bordes $\int \vec{B}\cdot d\vec{l} = Bl = \mu_0 M l \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 M\hat{e}_z = \mu_0 \vec{M}$

Como el área del cilindro es πa^2 (de las tapas), podemos ver que



Haciendo la respectiva integral de línea obtendríamos estas curvas. Con esto verificamos que en efecto $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$, sin embargo es más fácil si observamos lo siguiente

¡la fem se opone al cambio en el flujo!

Notemos que si estamos en una región sin cargas ($\rho_{tot} = 0$) entonces, en general

Que se ve como

$\nabla\cdot\vec{E} = 0 \longrightarrow \nabla\cdot\vec{B} = 0$

$\nabla\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \longrightarrow \nabla\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{J}_{tot} \xrightarrow[\text{donde se verifica que}]{} \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}\,d\tau'$

$\longrightarrow \oint_{\partial V}\vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\int\vec{J}\cdot d\vec{a} = \Phi_{(\mu_0\vec{J})}$

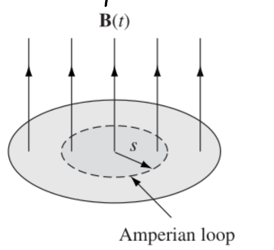
Por lo tanto, debe verificarse que $\vec{E} = \frac{1}{4\pi}\int\frac{(-\partial\vec{B}/\partial t)\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}\,d^3r'$

Que se compara con $\oint\vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\Phi_B$

Nota: Aunque con esto tenemos más relaciones y opciones para el cálculo de $\vec{E}, \vec{B}$, cabe mencionar que omitimos $\partial\vec{E}/\partial t$. Entonces todos estos cálculos son una aproximación. De cualquier forma, se obtiene un buen empalme con mediciones considerando el caso cuasi-estático $\longrightarrow$ Cuando $\frac{d}{dt}$ afecta lentamente a los campos.

Ejemplo 1)

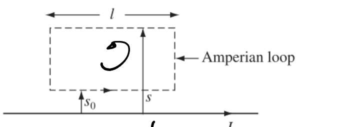
$\vec{B} = B(t)\hat{e}_z \Rightarrow \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial t}\hat{e}_z$ y por la equivalencia con la ley de Biot-Savart $\vec{E} = -E\hat{e}_\varphi$



$\oint\vec{E}\cdot d\vec{l} = E\,2\pi s = -\frac{d}{dt}\int\vec{B}\cdot d\vec{a} = -\frac{d}{dt}(\pi s^2 B) \Rightarrow \vec{E}(t) = -\frac{s}{2}\frac{dB}{dt}\hat{e}_\varphi \longrightarrow$ En este caso, la conducción de $\vec{E}$ sería básicamente este resultado

Ejemplo 2)

Sabemos que $\vec{B}(t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi s}\hat{e}_\varphi$ entonces



↳ Cable infinito con $I = I(t)$

$\oint\vec{E}\cdot d\vec{l} = l[E(s_0) - E(s)] = -\frac{d}{dt}\int\vec{B}\cdot\underbrace{d\vec{a}}_{da\,\hat{e}_\varphi} = -\frac{\mu_0 l}{2\pi}\frac{dI}{dt}[\ln(s/s_0)] \Rightarrow \vec{E}(s) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{dI}{dt}\left[\ln\left(\frac{s}{s_0}\right) + \underbrace{K}_{\text{cte}}\right]\hat{e}_z$

Dada por $I(t)$

El problema con este resultado es que $\|\vec{E}\| \xrightarrow[s\to\infty]{} \infty \longrightarrow$ ¿Energía infinita?

El problema es que estamos evaluando $E(t)$ y $I(t)$ al mismo tiempo pero reconocemos que la información de los campos se transmite a una velocidad finita y por lo tanto se tardará un tiempo t en llegar a s. Entonces, se debe cumplir el caso con $s \ll ct$ para mantener este límite cuasiestático

$\longrightarrow$ Regresemos a los elementos de circuitos

$\downarrow$

Sabemos que $\frac{d}{dt}\Phi_B$ produce campos eléctricos y por tanto se modifica el sistema. Entonces planteemos la situación con dos espiras con una corriente dada

Por ley de Biot-Savart $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}$