13/10/21

Función de Lagrange $\mathcal{L}=\mathcal{L}(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t)$

→ Función de estado

↓

Contiene toda la información del sistema en sus variables dinámicas → $\{q_i,\dot{q}_i,t\}$

↓

En sistemas dinámicos, vemos la interacción con fuerzas externas

Por ejemplo en termodinámica una función de estado se define con las presiones, volúmenes, energía y temperatura de un cuerpo material.

Mecánica de Lagrange → Enfoque más abstracto que el de Newton

→ Coordenadas generalizadas ⟷ "Espacio de configuraciones" → Que en realidad es una variedad

↓

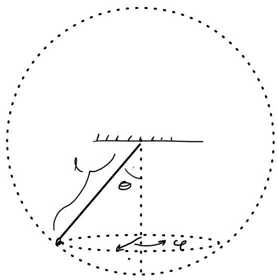
Dimensión de $3N-\ell$

$N$ → # de partículas

$\ell$ → constricciones

$3N-\ell$ ↓ grados de libertad del sistema

Ejemplo: Péndulo esférico




$x^2+y^2+z^2-R^2=0$

→ 1 constricción → $\ell=1$

1 partícula → $N=3$

$\Rightarrow 3N-\ell=2$ → # de grados de libertad

Espacio de configuración

Coordenadas generalizadas $\begin{cases}\theta\in(0,\pi)\\ \varphi\in(0,2\pi)\end{cases}$

Para el cuerpo rígido

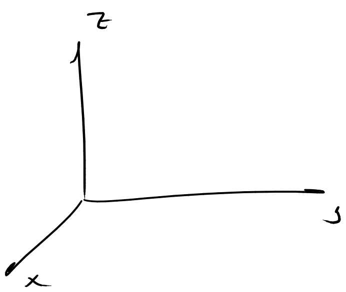
constricciones $\|\vec{r}_i-\vec{r}_j\|=cte\ \forall i,j$ → Podemos pasar a sólo seis grados de libertad

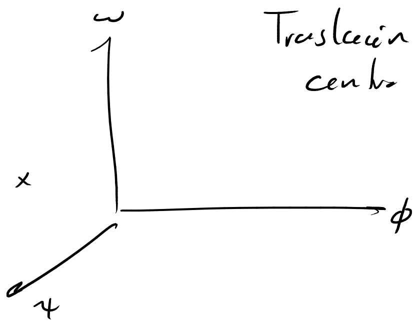
→ $10^{23}$ partículas/cm³

· 3 de traslación + 3 de rotaciones

↓ Traslación del centro de masa

↓ Ángulos de Euler

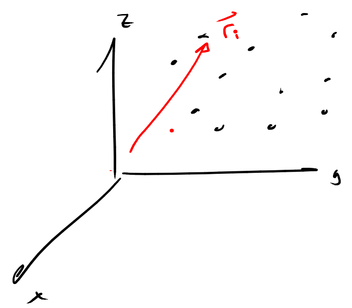


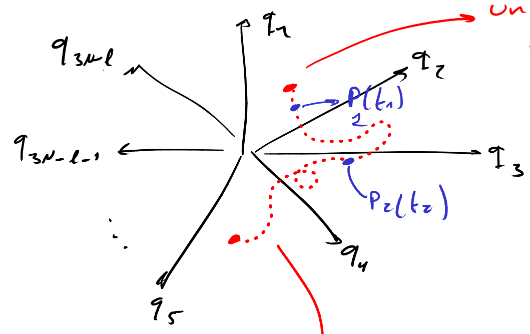
Consideremos un sistema con $N$ partículas y $l$ constricciones holonómicas

- Espacio de configuraciones de $3N-l$ dimensiones

Espacio físico




Espacio de configuraciones

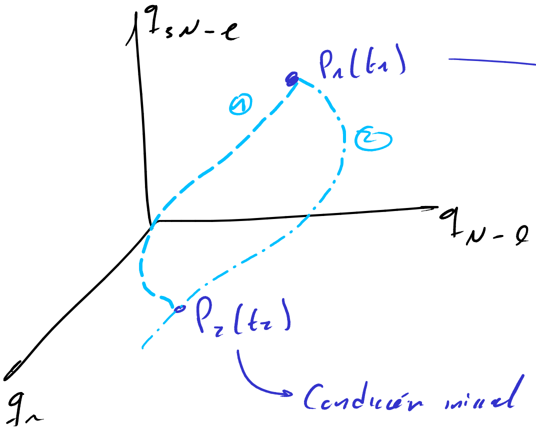



un punto que es equivalente a una configuración

Representa a todo el sistema a un tiempo $t$

Trayectoria de la configuración parametrizada por el tiempo

En general no conocemos la trayectoria del sistema en el espacio de configuraciones. Sin embargo, supongamos que conozco dos puntos de la trayectoria en dos tiempos distintos




Condición inicial

Esto es equivalente a dar las condiciones iniciales que impongo al resolver las ecuaciones de movimiento.

↳ Necesito dos porque son ecuaciones de segundo grado

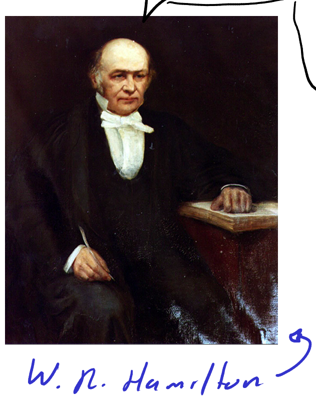
Propongamos trayectorias posibles

① - - - - Propuesta 1
② -·-·- Propuesta 2

} Es poco probable que esas trayectorias sean las que sí sigue el sistema

A cada trayectoria le puedo asociar una función Lagrangiana $\longrightarrow L^{(1)}, L^{(2)}, \ldots L^{(i)}$ y así a para cada posible trayectoria.

¿Cómo sé cuál es la trayectoria correcta de las que puedo proponer?



W. R. Hamilton

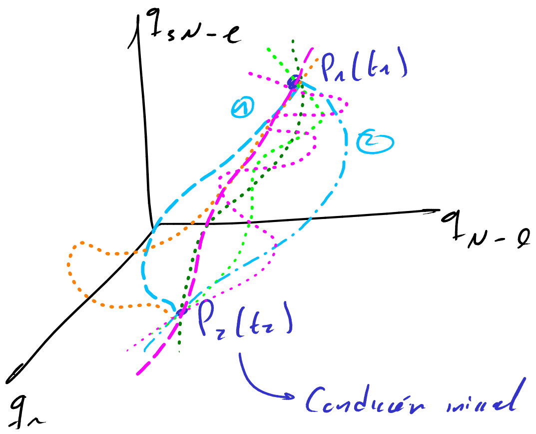
$\longrightarrow$ Propuso El principio de Hamilton.

La trayectoria correcta es aquella que haga extremal a la acción.

$$\text{Acción} \equiv A = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{L(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t)}_{\text{Función de Lagrange}}\, dt$$

Si $[T]=[V]=[\text{Joules}]$ y $L = T-V \Rightarrow [L]=[\text{Joules}]$ → Unidades de la acción.

$\Rightarrow [A]=[L][\text{tiempo}]=[\text{Joules}\cdot\text{segundo}] = Js$




Supongamos que podemos calcular la acción de cada curva

$$A^{(i)} = \int_{t_1}^{t_2} L^{(i)}\, dt$$

→ y así para muchas trayectorias posibles que pasan por $P_1(t_1)$ y $P_2(t_2)$

Cuando haga todas las integrales puedo escoger a la trayectoria tal que

$$Min\{A^{(i)}\} \cup Máx\{A^{(i)}\} \longrightarrow$$

y el que cumple eso es la trayectoria que necesito.

## Resumen

En el espacio de configuraciones

- Un punto describe al sistema a un tiempo $t$
- Una trayectoria describe la evolución temporal del sistema
- Dos puntos fijos $\Longleftrightarrow$ Condiciones iniciales
- Entre dos puntos fijos, hay una infinidad de posibles trayectorias
  - ↳ Para escoger la trayectoria correcta, debo escoger la que tenga la acción $A^{(i)}$ más chica o más grande
    - ↳ Principio de Hamilton → Principio de acción extremal

Éste es un antecedente del de Hamilton

Este principio tiene equivalencias en otras ramas de la Física

→ Óptica: Principio de Fermat → Camino óptico es extremal

→ Cuántica → Con modificaciones

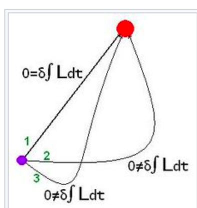
→ Termo: Segunda ley de la termodinámica

→ Teoría de la información → Pero con otra interpretación de la entropía

$$\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} n(\vec r)\, ds = \overline{OP} \qquad \delta(\overline{OP})=0$$

→ Puede deducir la ley de Snell

Si $n(\vec r) \equiv n = cte$ la trayectoria más corta es la línea recta




De todos los caminos posibles de la luz, solo son caminos reales cuyo camino óptico sea máximo o mínimo.

## Tenemos dos enfoques de la mecánica

- Newton
  - ↳ Vectorial
  - ↳ Espacio euclídeo
- Lagrange/Hamilton
  - ↳ Escalar
  - ↳ Variedad de configuraciones