→ Repaso de vectorial

- Preludio matemático (vectores)

Un vector es un elemento de un conjunto que junto con una operación cumple con la definición de un espacio vectorial.

Suma $+: \quad V \times V \rightarrow V$
$\qquad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u}+\mathbf{v}$

operación interna tal que:

- Tenga la propiedad conmutativa:
  $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}, \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
- Tenga la propiedad asociativa:
  $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}, \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$
- Exista el elemento neutro:
  $\exists\, \mathbf{e} \in V: \mathbf{u}+\mathbf{e}=\mathbf{u}, \forall\, \mathbf{u} \in V$
- Exista el elemento opuesto:
  $\forall\, \mathbf{u} \in V, \quad \exists -\mathbf{u} \in V: \mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{e}$

Producto $\cdot: \quad K \times V \rightarrow V$
$\qquad (a, \mathbf{u}) \mapsto a \cdot \mathbf{u}$

operación externa tal que:

- Tenga la propiedad asociativa:
  $a \cdot(b \cdot \mathbf{u})=(a \cdot b) \cdot \mathbf{u}, \forall\, a, b \in K, \forall\, \mathbf{u} \in V$
- Exista el elemento neutro:
  $\exists\, e \in K: e \cdot \mathbf{u}=\mathbf{u}, \forall\, \mathbf{u} \in V$
- Tenga la propiedad distributiva respecto de la suma vectorial:
  $a \cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a \cdot \mathbf{u}+a \cdot \mathbf{v}, \forall\, a \in K, \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
- Tenga la propiedad distributiva respecto de la suma escalar:
  $(a+b) \cdot \mathbf{u}=a \cdot \mathbf{u}+b \cdot \mathbf{u}, \forall a, b \in K, \forall\, \mathbf{u} \in V$

Ejemplos → Parejas ordenadas $\quad (x, y) = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y$

Funciones tales que $\quad f:[-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$

Funciones armónicas $\quad \sin(m\varphi), \cos(m\varphi)$

Para construir un vector, basta con conocer la base → Conjunto l.i.

Todo vector lo podemos escribir como una combinación lineal (c.l.) de la base

Elementos de la base

$$\vec{v} = \sum_i v_i \hat{e}_i \quad , \quad f(x) = \sum_\ell a_\ell P_\ell(x)$$

coeficientes

Una base es ortogonal si

$$\{\hat{e}_i, \hat{e}_j, \hat{e}_k\} \text{ t.q. } \langle \hat{e}_i, \hat{e}_j \rangle = \delta_{ij}$$

→ Hay que definir un producto interior

→ Delta de Kronecker

→ Para triadas o parejas ordenadas, basta con el usual $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_i u_i v_i$

Para conjuntos "más abstractos" como $f:[-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$, este producto punto no nos es útil. Por lo tanto vamos a definir los más

→ $f:[-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$

Motivación: Ecuación de Laplace → Proponemos $\Phi(\vec{r}) = R(r)\,\Theta(\theta)$

$\nabla^2 \Phi = 0$

- Coordenadas esféricas
- Simetría azimutal (en φ)

Solución

$|\cos\theta| \leq 1 \quad \forall \theta$

$$\phi(\vec{r}) = A_\ell(r)\, P_\ell(x = \cos\theta)$$

Polinomios de Legendre

Base ortogonal

Una base para Cremos puede ser los polinomios de $\underline{\text{Legendre}}$ $P_\ell(x)$

con el producto $\langle P_\ell(x), P_{\ell'}(x)\rangle = \int_{-1}^{1} P_\ell(x) P_{\ell'}(x)\, dx = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell,\ell'}$

Si tenemos $\phi|_{r=a} = \phi_0 \cos(\theta)$, podemos igualar

$$\underbrace{\phi_0 \cos(\theta) \sim \phi_0 P_1(\cos\theta)}_{\text{sólo hay } l=1} = \sum_\ell \underbrace{A_\ell(a)}_{\text{Número}} P_\ell(\cos\theta) \longrightarrow \text{todos los } \ell$$

Como son P_ℓ una base $\underline{\text{l.i.}}$ sé que $A_\ell(a)=0$ si $\ell \neq 1$

¿Qué otras bases hay?

Podemos pensar en las series de Taylor

$$f(x) = \sum_n \underbrace{\left(\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}f(0)\right)}_{a_n \equiv \text{cout.}} x^n = \sum a_n x^n$$

→ Aquí la base es $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$

↳ Sin embargo $\langle x^n, x^m\rangle \neq \delta_{n,m}$

↳ Esta base $\underline{\text{no es}}$ ortogonal. Menos sencilla pero más intuitiva

→ Pero sigue siendo $\underline{\text{base}}$

→ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.q. $f(\varphi) = f(\varphi + 2\pi)$ (Funciones periódicas)

Motivación: Series de Fourier

Base: $\{\sin(n\varphi), \cos(n\varphi)\}$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$

Producto punto: $\langle \sin(n\varphi), \sin(m\varphi)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \sin(m\varphi)\sin(n\varphi) = \delta_{n,m}$ → igual con $\sin \to \cos$

$\langle \sin(n\varphi), \cos(m\varphi)\rangle = 0$

Función: $f(\varphi) = \sum_n \left(a_n \sin(n\varphi) + b_n \cos(n\varphi)\right)$

Esto es útil pues en el curso definiremos a las coordenadas generalizadas, que son un conjunto linealmente independiente pero $\underline{\text{no}}$ son espacios vectoriales.

Si aún hay dudas, revisen el Griffiths, el Arfken o el Friedberg.