El Lagrangiano

$j \in \{1, \dots, \ell\}$

$f_j(\{\vec{r}_i\}, t) = 0$

Consideremos un sistema con N partículas y ℓ constricciones holonómicas

$$\Rightarrow \{q_i\} \longrightarrow \dim\{q_i\} = 3N - \ell \quad \text{Coordenadas generalizadas}$$

Consideremos la segunda ley de Newton y el principio de d'Alembert:

Segunda ley de Newton $\longrightarrow$ $\vec{F}_i^{\,ext} = \vec{F}_i^{\,(aplicadas)} + \vec{F}_i^{\,(constricción)} = \dot{\vec{P}}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$

Despejando a cero $\longrightarrow$ $(\vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(c)} - m\ddot{\vec{r}}_i) = \vec{0}$

Sumando sobre i y multiplicando $\longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i^{(a)} + \cancel{\vec{F}_i^{(c)}}^{\,0} - m\ddot{\vec{r}}_i \right) \cdot \underbrace{\delta \vec{r}_i}_{\text{desplazamiento virtual}} = 0$

Principio de d'Alembert.

Todo lo anterior está en coordenadas espaciales. Para escribirlo en coordenadas generalizadas, recordemos que

$$r_j = r_j(\underbrace{q_1, q_2, \dots, q_{3N-\ell}}_{\text{Conjunto linealmente independiente}}, t) \qquad \underset{3N}{\delta \vec{r}} = \mathbb{J}\, \delta \vec{q}_{3N-\ell} \longrightarrow \delta r_j = \sum_n^{3N-\ell} \frac{\partial r_j}{\partial q_n} \delta q_n$$

$\mathbb{J}$: Matriz Jacobiana

$\mathbb{J} \in \mathcal{M}_{3N \times (3N-\ell)}(\mathbb{R})$

Sustituyendo $\delta \vec{r}$ en la 2da Ley de Newton

$$\sum_{j=1}^{3N} \left(F_j^{(a)} - m\ddot{r}_j \right) \delta r_j = \sum_{j=1}^{3N} \sum_{n=1}^{3N-1} \left(F_j^{(a)} - m_j \ddot{r}_j \right) \overbrace{\frac{\partial r_j}{\partial q_n} \delta q_n}^{\delta r_j} = 0$$

Desarrollemos el producto punto

$$= \sum_{n=1}^{3N-\ell} \Bigg[\underbrace{\sum_j F_j^{(a)} \frac{\partial r_j}{\partial q_n}}_{Q_n} - \sum_j m_j \ddot{r}_j \frac{\partial r_j}{\partial q_n} \Bigg] \delta q_n = 0 \quad \dots (1)$$

Emplearemos las siguientes identidades o las probaremos más adelante.

① $\dfrac{\partial r_i}{\partial q_i} = \dfrac{\partial \dot{r}_j}{\partial \dot{q}_i} = \dfrac{\partial}{\partial q_i}\left(\dfrac{dr_j}{dt} \right)$

② $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial r_i}{\partial q_i} \right) = \dfrac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j}$

③ $\dfrac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} = 0$ $\longrightarrow$ Las velocidades generalizadas y las posiciones generalizadas son linealmente independientes

④ Recordemos que las coordenadas generalizadas son linealmente independientes

$\dfrac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij} \rightarrow$ Delta de Kronecker

De (1), notemos definimos

$$Q_n = \underbrace{\sum_{j=1}^{3N} F_j^{(a)} \frac{\partial r_j}{\partial q_n}}_{} = \underbrace{(\vec{F}^{(a)})^T}_{} \cdot \mathbb{J} = \text{Fuerzas generalizadas}$$

Transformación geométrica de las fuerzas aplicadas en el espacio de configuraciones

De (1) vemos que

$$-\sum_j m_j \ddot{r}_j \frac{\partial r_j}{\partial q_n} = -\sum_j m_j \left(\frac{d\dot{r}_j}{dt} \right) \frac{\partial r_j}{\partial q_n} \qquad \overbrace{fg' = (fg)' - gf'}$$

$$= -\sum_j m_j \frac{d}{dt}\Bigg(\dot{r}_j \underbrace{\frac{\partial r_j}{\partial q_n}}_{\text{por ① } = \partial \dot{r}_j / \partial \dot{q}_n} \Bigg) + \sum_j m_j \dot{r}_j \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_j}{\partial q_n} \right)}_{\text{por ② } = \partial \dot{r}_j / \partial q_n}$$

Entonces $-\sum_j m_j \ddot{r}_j \frac{\partial r_j}{\partial q_n} = -\sum_j m_j \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\dot{r}_j \frac{\partial \dot{r}_j}{\partial \dot{q}_n}}\right) + \sum_j m_j \underbrace{\dot{r}_j \frac{\partial \dot{r}_j}{\partial q_n}}$ ... (2)

y notamos que $\frac{\partial \dot{r}_j^2}{\partial \dot{q}_n} = 2\frac{\partial \dot{r}_j}{\partial \dot{q}_n}\dot{r}_j$, $\frac{\partial \dot{r}_j^2}{\partial q_n} = 2\frac{\partial \dot{r}_j}{\partial q_n}\dot{r}_j$

Por lo que (2) se reescribe como

$$-\sum_j m_j \ddot{r}_j \frac{\partial r_j}{\partial q_n} = -\sum_j \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_n}\left(\frac{1}{2}m_j \dot{r}_j^2\right)\right] + \sum_j \frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{1}{2}m_j \dot{r}_j^2\right)$$

$$= -\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_n}\underbrace{\left(\sum_j \frac{1}{2}m_j \dot{r}_j^2\right)}_{=T \equiv \text{Energía cinética}} + \frac{\partial}{\partial q_n}\underbrace{\left(\sum_j \frac{1}{2}m_j \dot{r}_j^2\right)}_{=T}$$

Por lo tanto, (1) se reescribe como

$$\sum_n^{3N-\ell}\underbrace{\left[Q_n - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_n}T\right) + \frac{\partial}{\partial q_n}T\right]}_{\text{coeff.}=0}\delta q_n = 0$$

Como $\{q_i\}$ es un conjunto linealmente independiente, todos sus coeficientes deben ser nulos

Entonces, tenemos $3N-\ell$ ecuaciones de la forma

Función de las velocidades generalizadas y del tiempo

$$\underbrace{\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_n}\cdot\right) - \frac{\partial}{\partial q_n}\cdot\right]}T(\{q_i\},t) = L_n\left[T(\{\dot{q}_n\},t)\right] = Q_n \quad \dots (2)$$

Q_n → Fuerzas generalizadas

L_n : Operador diferencial de la ecuación de Lagrange

¿Qué pasa si tenemos fuerzas conservativas?

Regla de la cadena

$$F_j^{(a)} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial r_j}}V(\{r_i\}) \Rightarrow Q_n = \sum_j F_j^{(a)}\frac{\partial r_j}{\partial q_n} = -\sum_j \frac{\partial V}{\partial r_j}\frac{\partial r_j}{\partial q_n} = -\frac{\partial}{\partial q_n}V(\{q_i\})$$

Menos el gradiente de un potencial

$\vec{F}^{(a)} = -\nabla_{\vec{r}}V(\vec{r}_i)$

menos el gradiente de un potencial pero en términos de las coordenadas generalizadas

$\vec{Q} = -\nabla_{q_i}V(\vec{q}_i)$

Como $V(\{q_i\}) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial V(\{q_i\})}{\partial q_i}\cancel{\frac{\partial q_i}{\partial \dot{q}_i}} = 0$ por (3)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_n}V = 0$$

Entonces, para fuerzas conservativas, se cumple que $Q_n = L_n[V(\{q_i\})]$

Por lo que la ecuación de Lagrange se escribe como

$$L_n[T] = L_n[V] \Rightarrow L_n\left[\underbrace{T(\{\dot{q}_i\},t) - V(\{q_i\})}\right] = 0$$

$= L = L(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t) \equiv$ Lagrangiano

Notamos que hay dos tipos de ecuaciones de Lagrange

Si $L_{q_n} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_n} \cdot\right) - \frac{\partial}{\partial q_n}$, entonces $L_{q_n}[\mathcal{L} = T] = Q_n \longrightarrow$ 1er tipo : No homogénea

caso general

Sol = Sol homogénea + particular

$L_{q_n}[\mathcal{L} = T - V] = 0 \longrightarrow$ 2do tipo : Homogénea

↳ Fuerzas conservativas.

¿Qué ganamos con este formalismo?

Newton ⟵ Formalismo ⟶ Lagrange

$\frac{\vec{F}}{m} - \frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \vec{0}$ ⟵ Ecuación de movimiento a resolver ⟶ $\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \cdot\right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \cdot\right]\mathcal{L} = 0$

Ecuación de segundo grado para $\vec{r}_i$

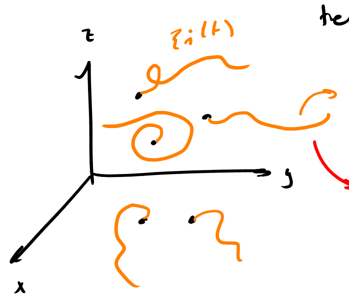
Ecuación de segundo grado para $\vec{q}$

$3N$ ⟵ Número de ecuaciones ⟶ $3N - \ell$

↳ $N \equiv$ # partículas

↳ $\ell \equiv$ # constricciones

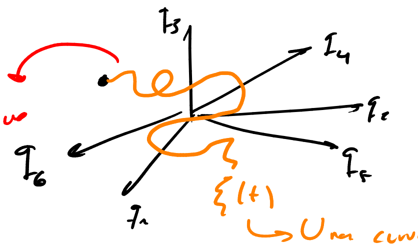
$\vec{r}_i$: N funciones vectoriales de tres entradas ⟵ Información del sistema ⟶ $\mathcal{L}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t)$: Una función escalar en el espacio de configuraciones



N curvas parametrizadas por t

Curvas que obedecen que

$\underbrace{\frac{d^2}{dt^2}(m\vec{r}) - \vec{F}_i = \vec{0}}$



Curva que obedece que $L_{q_n}(\mathcal{L}) = 0$

$\vec{q}(t)$ ↳ Una curva parametrizada en el tiempo.

¿Qué hace especial al Lagrangiano?

$\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i$ ⟵ Interacciones en el sistema ⟶ $\mathcal{L} = T - V$

agentes externos ($\vec{F}_i$) ; propiedades de la partícula ($\dot{\vec{p}}_i$)

propiedades de las partículas (T) ; agentes externos (V)

→ $\mathcal{L}$ = Función de estado

↳ Función escalar que describe al sistema dinámicamente

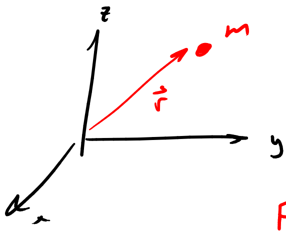
→ $\mathcal{L}$ es tan importante como la Energía, la Entropía, Entalpía y el resto de los potenciales termodinámicos.

→ Recordemos que $\mathcal{L}$ es una función del "espacio" de configuraciones

$\mathcal{L} : Q \longrightarrow \mathbb{R}$

↳ variedad definida por los $\{q_i\}$

Ejemplo: Partícula libre



Física

→ Constricciones → No hay

→ Grados de libertad → 3

→ Coordenadas generalizadas → $\{x, y, z\}$, $\{r, \theta, \varphi\}$

→ Escribir la energía cinética → $T = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec r}{dt} \cdot \frac{d\vec r}{dt} \right)$

$= \frac{1}{2} m \left(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2 \right)$

$= \frac{1}{2} m \left(\dot r^2 + r^2 \dot\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot\varphi^2 \right)$

→ Energía potencial → $V = 0$

→ Lagrangiano → $\mathcal{L} = T - V = T$

→ Ec. de Lagrange

Matemáticas

↳ Resultados

$\dot{\vec r} = (\dot x, \dot y, \dot z)$

$\vec r = (x, y, z)$

$\dot{\vec r} =$

$\vec r = r\,\hat e_r$

$\dot{\hat e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\hat e_x + \sin\theta\sin\varphi\,\hat e_y + \cos\theta\,\hat e_z$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot q_n} \mathcal{L} \right) - \frac{\partial}{\partial q_n}\mathcal{L} = 0 \qquad \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2 \right) \qquad \frac{\partial \dot q_n}{\partial q_m} = 0$$

$$x: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot x} \mathcal{L} \right) - \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L} = \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{1}{2} m \frac{\partial \dot x^2}{\partial \dot x}}_{2m\dot x} \Big) - \cancel{\left(\frac{1}{2} \frac{\partial \dot x^2}{\partial x} \right)}^{0}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(m \dot x \right) = \frac{d}{dt} p_x = 0$$

Considerando y, z → $\frac{d}{dt}\left(m \dot{\vec r} \right) = \vec 0$ Ec. de Newton

Solución → $\Delta \vec r(t) = \dot{\vec r}(t = t_0)\,\Delta t$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\dot r^2 + r^2 \dot\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot\varphi^2 \right)$$

$$r: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot r} \left(\frac{1}{2} m \dot r^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{m}{2} \left(r^2 \dot\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot\varphi^2 \right) \right)$$

$$= m \ddot r - m r \left(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\, \dot\varphi^2 \right) = 0$$

$$\theta: \quad 0 = m r^2 \ddot\theta - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(r^2 \sin^2\theta\, \dot\varphi^2 \right) \frac{m}{2}$$

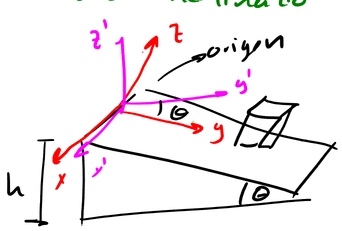
$$= m r^2 \ddot\theta - r^2 \dot\varphi^2 m \sin\theta\cos\theta = 0$$

$$\varphi: \quad 0 = m r^2 \ddot\varphi$$

Notemos que escogiendo las coordenadas cartesianas, fue más sencillo resolver las ecuaciones de Lagrange. Sin embargo, ambas elecciones son equivalentes.

También vimos que la solución fue equivalente con la de Newton, aunque, en este caso parece más complicado. Veamos otro ejemplo

Plano inclinado



Constricciones

$x = 0$

$z = 0$

1 dof → $\{y\}$

→ $T = \frac{1}{2} m \dot y^2$

→ $V = m g z' = m g (y\cos\theta - h)$

Tenía un error de signo que ya se corrigió.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot y^2 - m g (y\cos\theta - h)$$

$$= \frac{1}{2} m \dot y^2 - m g y \cos\theta + m g h \quad \ldots\ (3)$$

$$L_n[\mathcal{L}] = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot y} \left(\frac{1}{2} m \dot y^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[-m g y \cos\theta \right] = m \ddot y - m g \cos\theta = 0$$

$$\ddot y = -g\cos\theta \quad \Rightarrow \quad y(t) = y_0 + \dot y(t_0)\,\Delta t - \frac{1}{2} g \cos\theta\, (\Delta t)^2$$

Para terminar, probemos las propiedades que utilizamos

(1) $\frac{\partial r_j}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot r_j}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{dr_j}{dt}\right)$ (2) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial \dot r_i}{\partial q_j}$ (3) $\frac{\partial \dot q_i}{\partial q_j} = 0$ → Las velocidades generalizadas y las posiciones generalizadas son linealmente independientes

(1) → Sea $f = f(\{q_i\}, t)$ de clase C^2 ⇒ sus derivadas parciales cruzadas conmutan

Derivada total y regla de la cadena

$$\frac{\partial \dot f}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial}{\partial \dot q_i}\left(\frac{df}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial \dot q_i}\left[\sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j}\cancel{\frac{dq_j}{dt}}^{\dot q_j} + \frac{\partial f}{\partial t}\right]$$

Regla del producto de derivadas

$$= \sum_j \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \dot q_i \partial q_j}\dot q_j + \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial \dot q_j}{\partial \dot q_i}\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial \dot q_i \partial t}$$

C^2 C^2

δ_{ij} por la independencia lineal de q_i

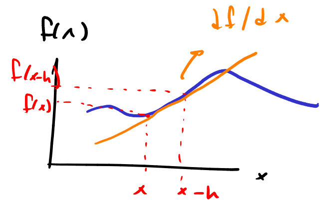
$$= \sum_j \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\cancel{\frac{\partial f}{\partial \dot q_i}}^{0}\right) + \frac{\partial f}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\cancel{\frac{\partial f}{\partial \dot q_i}}^{0}\right)$$

pues $f = f(\{q_i\}, t)$

$$= \frac{\partial f}{\partial q_i} \quad \blacksquare$$

¿Cómo llegamos a que $\frac{d}{dt} f(\{q_i\},t) = \sum_{i=1}^{3N-k} \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot q_i + \frac{\partial f}{\partial t}$?

Pensemos en $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, su derivada es $\frac{df(x)}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}$

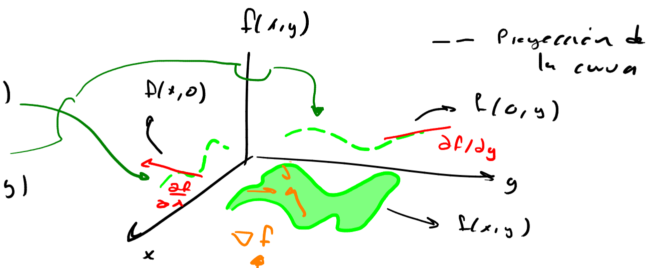


Si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, las derivadas parciales son

$$f(x,y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y-h)-f(x,y)}{h}$$

Las derivadas parciales son cambios en una dirección



La derivada completa es $D[f(x,y)] = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \equiv \nabla f$

y en general $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, entonces $D[f]\in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ t.q. $[D[f]]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ — Matriz jacobiana

Para el caso de $f(\{q_i\},t)$, si quiero calcular $\frac{df}{dt}$, tengo que hacer regla de la cadena, pues $q_i = q_i(t)$. entonces

En 1D $\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$, entonces en general

$$\frac{df}{dt} = \nabla_{(\vec q,t)} f \cdot \frac{d}{dt}(\vec q, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial q_1}, \frac{\partial f}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial q_{3N-k}}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)\cdot\left(\frac{dq_1}{dt},\dots,\cancel{\frac{dt}{dt}}^{1}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{3N-k}\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

② P.D.: $\vec{r_j} = (r_{1_j}, r_{2_j}, r_{3_j})$ y $\forall r_j \in C^2 \implies \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_n}\right) = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_n} = \frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{d}{dt} r_i\right)$

Desarrollemos
$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_n}\right)}_{f} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_j \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_n}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_n}\right)$$

$r_i \in C^2$

$$= \sum_j \left[\frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)\right]\dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\partial r_i}{\partial t}\right)$$

$f'g = (fg)' - fg'$

$$= \sum_j \left[\frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right) - \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\cancel{\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_j}}^{\,0}\right] + \frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\partial r_i}{\partial t}\right)$$

falta probarlo

$$= \sum_j \frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right) + \frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\partial r_i}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_n}\left(\sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{d r_i}{dt}\right) = \frac{\partial \dot{r}_j}{\partial q_n} \longrightarrow$$ Notemos que sólo empleamos que $r_j \in C^2$

③ $\dot{q}_j$ y q_i son linealmente independientes, i.e. $\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} = 0$

Primero, notemos que $r_j = r_j(\{q_i\}, t)$, pero en general $r_i = r_i(t)$

$\implies q_i = q_i(t)$, entonces $\frac{d q_i}{dt} = \dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t} \longrightarrow$ porque sólo depende de t si nos olvidamos de la transformación geométrica

$q_j = q_j(t)$

$$\implies \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d q_j}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial q_j}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial q_j}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\delta_{ij}) = 0$$

C^2 l.ind.

↓ Sigue abajo