1.2.- Ley de Gauss

Ley de Gauss → Basada en resultados experimentales
↳ Aunque hay una construcción en el caso electrostático a partir de la Ley de Coulomb.

↳ Primera ecuación de Maxwell del curso

· Entendemos primero el concepto físico de esta ley

Versión diferencial

$$\underbrace{\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r},t)}_{\text{Divergencia del campo eléctrico}} = \frac{\rho_{Tot}(\vec{r},t)}{\varepsilon_0}$$

ρ_{Tot}: Densidad de carga total

ε_0: Constante asociada al vacío ("medio" de propagación)

Divergencia del campo eléctrico → Qué tanto se aleja el campo eléctrico de un punto dado

$\longleftrightarrow$

Versión integral

$$\underbrace{\oint_S \vec{E}(\vec{r},t)\cdot d\vec{a}}_{\text{Flujo del campo eléctrico en una superficie } S} = \frac{Q^{enc}_{Tot}(t)}{\varepsilon_0}$$

Q^{enc}_{Tot}: Carga encerrada por la superficie S.

Flujo del campo eléctrico en una superficie S ↳ Cuánto campo eléctrico penetra una región del espacio

Para pasar entre representaciones integral y diferencial, empleamos el teorema de la divergencia

$$\nabla\cdot\vec{E} = \rho_{Tot}/\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow \int_V \nabla\cdot\vec{E}\,dv = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho_{Tot}\,dV = \frac{Q^{enc}_{Tot}}{\varepsilon_0} \longrightarrow$$ Se integró en V
Se definió la carga total encerrada en V.

$$\Rightarrow \int \nabla\cdot\vec{E}\,dv = \oint_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{Q^{enc}_{Tot}}{\varepsilon_0} \longrightarrow$$ Teo. de la divergencia

Teorema de la divergencia

V: Volumen en $\mathbb{R}^3$
∂V: Su frontera, una superficie cerrada
$\vec{A}$: Campo vectorial de clase C^2

$$\int_V \nabla\cdot\vec{A}\,\partial V = \oint_{\partial V} \vec{A}\cdot d\vec{a}$$

$d\vec{a}$: Vector normal a la superficie

⇒ Notemos que en el caso electrostático podemos construir la Ley de Gauss mediante la de Coulomb. Para esto, debemos probar las siguientes propiedades:

a) $$\frac{(\hat{\vec{r}-\vec{r}'})}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^2} = \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} = \nabla_{\vec{r}}\left(\frac{-1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right)$$

$\nabla_{\vec{r}}$ → Derivada respecto de la variable no primada

b) $$\nabla_r\cdot\frac{(\hat{\vec{r}-\vec{r}'})}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} = 4\pi\,\delta(r-r')$$

→ Caso particular de coordenadas esféricas y ya integrando en una superficie.

$\delta(r-r')$ ↳ Delta de Dirac en $\mathbb{R}^3$

Demostración a)

$$\nabla_{\vec{r}}\left(\frac{-1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{-1\,\hat{e}_{x_i}}{\left[(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2\right]^{1/2}}\right) = \sum_{i=1}^{3}\left(\cancel{-}\frac{1}{\cancel{2}}\right)\frac{\cancel{(-1)}\cancel{2}(x_i-x_i')}{[\quad]^{3/2}}\hat{e}_{x_i}$$

$$\therefore \nabla_{\vec{r}}\left(\frac{-1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right) = \frac{(\hat{\vec{r}-\vec{r}'})}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^2} \quad \blacksquare$$

Demostración b) (Marsden: Cálculo vectorial)

Primero, calculemos la divergencia de $\vec{A} = \frac{(\hat{\vec{r}-\vec{r}'})}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^2}$

Si $\vec{\mathcal{R}} = \vec{r}-\vec{r}'$, $d\vec{\mathcal{R}} = d\vec{r}$, $\vec{A} = \hat{\mathcal{R}}/\mathcal{R}^2$

En esféricas

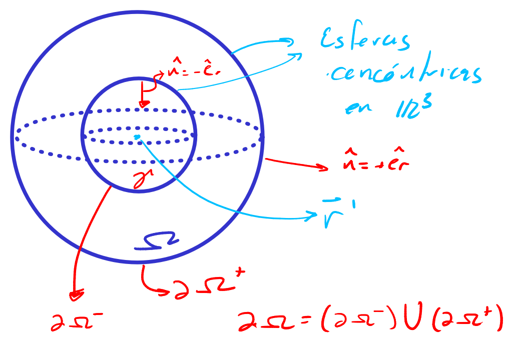
$$\vec{A} = A_r\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{\mathcal{R}^2}\frac{\partial}{\partial\mathcal{R}}\left(\mathcal{R}^2\left(\frac{1}{\mathcal{R}^2}\right)\right) = \frac{1}{\mathcal{R}^2}\frac{\partial}{\partial\mathcal{R}}(1) = 0$$ si $\vec{\mathcal{R}} \neq \vec{0}$ ó $\vec{r}\neq\vec{r}'$. Si $\vec{r}=\vec{r}'$ $\nabla\cdot\vec{A}\longrightarrow\infty$.

. Notemos que No es de clase $\mathcal{C}^2$ en $\vec{r}=\vec{r}\,'$ y por tanto no posible emplear el teorema de la divergencia sin embargo, podemos usar un volumen que no lo contenga al punto $\vec{r}\,'$!



. En este caso $\vec{A}\in\mathcal{C}^2$ en Ω y por tanto

$$\int_{\Omega}\nabla\cdot\frac{(\hat{\vec{r}-\vec{r}\,'})}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^2}\,dv=\underbrace{\oint_{\partial\Omega}\frac{(\hat{\vec{r}-\vec{r}\,'})}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^2}\cdot d\vec{a}}$$

Esta integral se divide en dos contribuciones

$$\oint_{\partial\Omega}d\vec{a}=\int_{\partial\Omega^+}d\vec{a}_+ +\int_{\partial\Omega^-}d\vec{a}_-$$

con $d\vec{a}_\pm=\underbrace{\pm(\hat{\vec{r}-\vec{r}\,'})}_{\text{Dirección normal a las superficies}}\underbrace{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}_{\text{Jacobiano en esféricas con radio } R=\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}$

$$\oint_{\partial\Omega^\pm}\frac{(\hat{\vec{r}-\vec{r}\,'})}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^2}\cdot d\vec{a}_\pm=\pm\int_{\partial\Omega^\pm}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=\pm4\pi$$

Entonces:

$$\int_{\Omega}\nabla\cdot\overbrace{\frac{(\hat{\vec{r}-\vec{r}\,'})}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^2}}^{=\vec{A}}\,dv=\int_{\partial\Omega^+}\vec{A}\cdot d\vec{a}_+ +\int_{\partial\Omega^-}\vec{A}\cdot d\vec{a}_-=+4\pi-4\pi=0$$

Este resultado es consistente con el cálculo previo.

Por otro lado en γ, donde $\vec{r}\,'\in\gamma$, vemos que

$$\int_{\partial\gamma}\vec{A}\cdot d\vec{a}=-\int_{\partial\Omega^-}\vec{A}\cdot d\vec{a}=-(-4\pi)=4\pi$$ y por tanto, podemos generalizar que

$$\nabla\cdot\frac{(\hat{\vec{r}-\vec{r}\,'})}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^2}=\underbrace{4\pi\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,')}=\begin{cases}0 & \vec{r}\neq\vec{r}\,'\\ \infty & \vec{r}=\vec{r}\,'\end{cases}$$

Resultado que nos permite ser consistentes con que $\int_V\nabla\cdot\frac{(\hat{\vec{r}-\vec{r}\,'})}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^2}\,dv=4\pi$ siempre.

Una vez, demostrado lo anterior, hagamos el cálculo de la divergencia de $\vec{E}$

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}d^3r'\,\frac{\rho_{Tot}(\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^2}(\hat{\vec{r}-\vec{r}\,'})\xrightarrow[\nabla\cdot]{}\nabla_{\vec{r}}\cdot\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}d^3r'\,\rho_{Tot}(\vec{r}\,')\,\nabla_{\vec{r}}\cdot\left(\frac{(\hat{\vec{r}-\vec{r}\,'})}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^2}\right)$$

No depende de $\vec{r}\,'$, que son las variables de integración.

$$\Rightarrow\nabla_{\vec{r}}\cdot\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\int_V d^3r'\,\rho_{Tot}(\vec{r}\,')\,\cancel{4\pi}\,\underbrace{\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,')}$$

Al integrar en $\vec{r}\,'$, se hace el cambio $\vec{r}\,'\to\vec{r}$ y se quita la integral.

$$\Rightarrow\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_{Tot}(\vec{r})$$

. Nota sobre la ley de Gauss

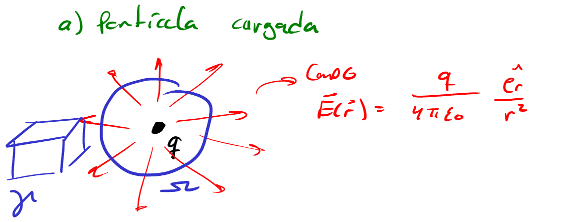
→ Resultado general y siempre válido

→ Si un campo $\vec{E}(\vec{r})$ y su fuente $\rho_{Tot}(\vec{r})$ no la cumplen, entonces $\vec{E}(\vec{r})$ no es un campo electromagnético

→ La ley de Gauss es útil para determinar el campo eléctrico con situaciones de alta simetría.

→ La ley de Gauss, integral, nos expresa el flujo de $\vec{E}$ en una superficie cerrada. Si el flujo es cero, no significa que el campo $\vec{E}$ sea cero

a) Partícula cargada



Por ley de Gauss

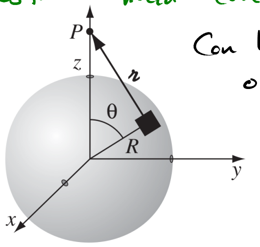
En Ω: $\oint\vec{E}\cdot d\vec{a}=q/\varepsilon_0$
En γ: $\oint\vec{E}\cdot d\vec{a}=0$

} Pero en ambos casos sabemos que $\vec{E}\neq\vec{0}$

→ Ejemplos con Ley de Gauss:

Empleando la expresión integral, podemos determinar el campo eléctrico bajo alta simetría.

a) Esfera hueca con σ uniforme



Con la ley de Coulomb obtuvimos que

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{e}_r}{r^2}\,\Theta(r-R)$$

$$Q = 4\pi R^2 \sigma$$

→ Para este resultado, analizamos que por simetría $\vec{E} = E(r)\hat{e}_r$

Con este hecho y la ley de Gauss podemos obtener el mismo resultado

Como superficie Gaussiana escojemos una esfera centrada con la esfera cargada. de radio R. Por lo tanto

$$d\vec{a}' = \hat{e}_r\, da' \Rightarrow \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a}' = \oint_S E(\vec{r})\,\hat{e}_r\cdot\hat{e}_r\, da' = \oint_S E(r)\, da' = \frac{1}{\varepsilon_0} Q^{enc}_{tot}$$

donde

$$Q^{tot}_{enc} = \int_V \rho(\vec{r}')\,dv' = \int dr' \int da\, \underbrace{\overbrace{\sigma(\vec{r}')}^{\text{cte por ser homogénea la carga}}\,\delta(r'-R)}_{\text{Dado que sólo hay carga en el cascarón}}$$

$$\Rightarrow Q^{tot}_{enc} = \int_0^r dr'\,\delta(r'-R)\,4\pi(r')^2\sigma$$

Si $r<R$ entonces $Q^{tot}_{enc} = 0$ y si $r \geq R$ $Q^{tot}_{enc} = 4\pi R^2\sigma$ → Propiedad de $\delta(r-r')$

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} dx\, f(x)\,\delta(x-x_0) = f(x_0)$$

$$\Rightarrow Q^{tot}_{enc} = 4\pi R^2\sigma\,\Theta(r-R)$$

Finalmente

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a}' = \oint_S E(r)\,da' = \int_{S'} \underbrace{E(r)}_{\text{Constante para las variables de integración}}\, r^2 \sin\theta' d\theta' d\varphi'$$

$$\Rightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{a}' = E(r)\int_S da' = E(r)\,4\pi r^2 = \frac{(4\pi R^2\sigma)}{\varepsilon_0}\Theta(r-R)$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(4\pi R^2\sigma)\,\Theta(r-R)}{r^2} \qquad \therefore\ \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(4\pi R^2\sigma)}{r^2}\hat{e}_r$$

b) Esfera sólida con ρ = cte.

Empleando el mismo procedimiento se obtiene el campo eléctrico. La diferencia surge en la expresión de la carga encerrada.

$$Q^{tot}_{enc} = \int_V \rho\, dv' = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} d\theta' \sin\theta' \int_0^r dr' (r')^2\, \Theta(R-r')$$

→ No es una delta, sino una función escalón reflejada dado que para $r' > R$ la densidad de carga es nula, y para $r' < R$ es constante.

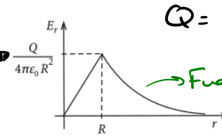
$$= 4\pi\rho \int_0^r dr'(r')^2\,\Theta(R-r')$$

$$= \frac{4\pi\rho}{3}\Big[\underbrace{r^3\,\Theta(R-r)}_{\text{Dentro de la esfera}} + \underbrace{R^3\,\Theta(r-R)}_{\text{Fuera de la esfera}}\Big]$$

Juntando este resultado con la integral de superficie cerrada: $\oint \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{a}' = E(r)\,4\pi r^2$

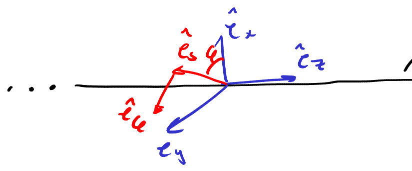
$$Q = \frac{4\pi R^3}{3}\rho$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\hat{e}_r}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\underbrace{\frac{4\pi}{3}\rho\, r\,\Theta(R-r)}_{\text{Crece linealmente con } r} + \frac{4\pi R^3}{3}\underbrace{\frac{1}{r^2}\,\Theta(r-R)}_{\text{Decae como } r^{-2}}\Big]$$



→ Fuera, la veo como una partícula puntual.

c) Línea infinita cargada homogéneamente

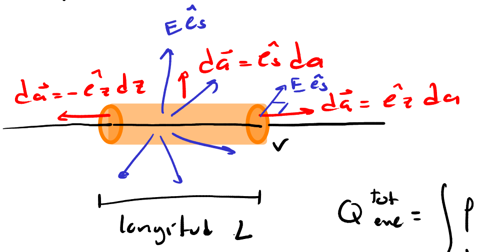


$dq=\lambda\, dl;\ \lambda=cte$

Para este caso emplearemos coordenadas y la base ortonormal cilíndrica, pues es la simetría que presenta el problema: No hay cambios en rotaciones y traslaciones respecto al eje z.

$\Rightarrow \vec E(\vec r)=\vec E(s,\varphi,z)=E(s)\hat e_s$

Empleando la ley de Gauss con una superficie cilíndrica concéntrica a la línea de carga



$$\oint_{\partial V}\vec E(\vec r)\cdot d\vec a=\oint_{\partial V}E(s)\,\hat e_s\cdot d\vec a=\int_{cara}E(s)\,\hat e_s\cdot\hat e_s\, da+\int_{Tapas}E(s)\cancelto{0}{\hat e_s\cdot(\pm\hat e_z)}da=E(s)2\pi s L$$

$$Q^{tot}_{enc}=\int_{V'}\rho(\vec r')dv'=\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_0^s ds'\, s'\int_0^L dz\ \lambda\,\delta(\vec r-\vec 0)=\int_0^{2\pi}d\varphi\underbrace{\int_0^s ds'\cancel{s'}\left(\frac{\delta(s'-0)}{\cancel{s'}}\right)}_{=1}\int_0^L dz\,\lambda$$

Delta de Dirac en coordenadas curvilíneas $\longrightarrow \delta^n(\vec r-\vec r_0)=\underbrace{\left(\frac{\partial\vec r}{\partial\vec q}\right)^{-1}_{\vec r_0}}_{\text{Jacobiano del cambio de coordenadas}}\prod_{i=1}^{n}\delta(q_i-q_{i0})$

$\therefore\ Q^{tot}_{enc}=2\pi L\lambda$

Juntando ambas expresiones

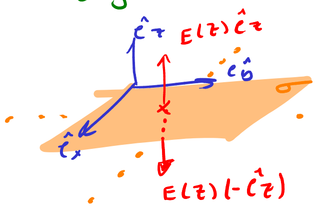
$$E(s)2\pi s\cancel{L}=2\pi\cancel{L}\lambda/\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow\ \vec E(\vec r)=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi\lambda}{s}\hat e_s$$

$\hat e_s=\cos\varphi\,\hat e_x+\sin\varphi\,\hat e_y$

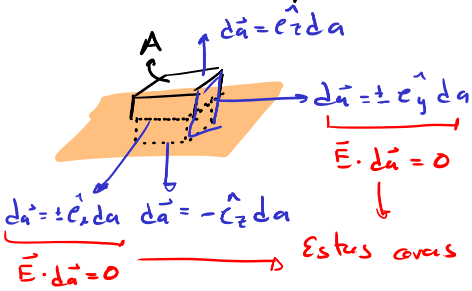
En este caso el campo decae como s^{-1}

d) Plano cargado infinito con $\sigma=cte$



Simetría traslacional en x,y. $\Rightarrow \vec E(\vec r)=E(z)\hat e_z$

Como superficie gaussiana, emplemos un cubo que se corta por el plano



Estas áreas no contribuyen

Entonces

$$\oint\vec E(\vec r)\cdot d\vec a=\int_{\text{Tapa superior}}E(z)\,\hat e_z\cdot\hat e_z\, da+\int_{\text{Tapa inferior}}E(z)(-\hat e_z)\cdot(-\hat e_z)da=2E(z)\int_{\text{Tapas}}da=2E(z)A$$

En el caso de la carga: $Q^{tot}_{enc}=\int_{cubo}dv'\rho(\vec r')=\underbrace{\int dx\int dy}_{=A}\int dz\,\sigma\,\delta(z)=\sigma A$

$$\Rightarrow\ 2E(z)\cancel{A}=\sigma\cancel{A}/\varepsilon_0\qquad\therefore\ \vec E(\vec r)=E(z)\hat e_z=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\Big(\underbrace{\hat e_z\Theta(z)}_{\text{Arriba del plano}}-\underbrace{\hat e_z\Theta(-z)}_{\text{abajo del plano}}\Big)$$

Referencias principales

1. D. J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, Fourth edition (Pearson, 2013).
2. W. Nolting, Theoretical Physics 3 - Electrodynamics (Springer International Publishing, 2016), Vol. 3.
3. J. E. Marsden and A. Tromba, Vector Calculus, 5th ed (W.H. Freeman, 2003).