6.- Potencial vectorial

De secciones anteriores vimos que en el caso estacionario

$$\vec{B} = \nabla \times \underbrace{\left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|} d^3 r' \right]}_{\vec{A}(\vec{r}) \,\to\, \text{Potencial vectorial}} \longrightarrow$$

De aquí, vemos que $\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$ ✓ aunque, se vale para todo $\vec{A}$.

Notemos que $\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}_{tot}$

↳ Como podemos redefinir $\vec{A}$ siempre y cuando $\vec{B}$ se mantenga invariante

Entonces $\vec{A} \longrightarrow \underbrace{\vec{A}' + \nabla \lambda}_{\text{Libertad de norma}} \Rightarrow \nabla \times \vec{A} \longrightarrow \nabla \times (\vec{A}' + \nabla \lambda) = \nabla \times \vec{A}'$

Libertad de norma → Para ϕ también ocurre pero es una constante

$-\nabla \phi \longrightarrow -\nabla(\phi' + cte)$

Esto nos permite escoger un $\lambda(\vec{r})$ que se asocie a la $\nabla \cdot \vec{A}$ pues ésta no da información a los campos → Norma de Coulomb $\underline{\nabla \cdot \vec{A} = 0}$

$$\boxed{\text{Si } \nabla \cdot \vec{A} = 0 \text{ ent } \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}_{tot}}$$

Ecuación de Laplace vectorial

Notemos que $\nabla^2 \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{A})$

↳ No necesariamente es entrada-entrada.

Para mostrar esto, supongamos

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \nabla \lambda \Rightarrow \nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}_0 + \nabla \cdot \nabla \lambda$$
$$= \nabla \cdot \vec{A}_0 + \nabla^2 \lambda$$

Si forzamos $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ entonces se debe tener $\nabla^2 \lambda = -\nabla \cdot \vec{A}_0$

$\Rightarrow \lambda$ cumple Laplace escalar con la fuente $-\nabla \cdot \vec{A}$, entonces

$$\lambda = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla \cdot \vec{A}_0}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^2} d^3 r' \quad \text{si } \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r} \to \infty) = 0$$

↳ Entonces, siempre podemos hacer $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ y

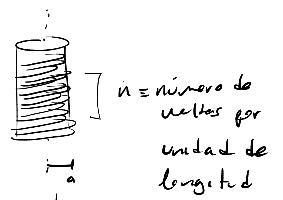
Entonces, verificamos que

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}_{tot} \Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}_{tot}(\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|} d^3 r' \quad \text{si } \vec{A} \xrightarrow[\vec{r} \to \infty]{} \vec{0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \displaystyle\int_C \frac{I \, d\vec{l}\,'}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}, \\[2ex] \vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \displaystyle\int_S \frac{\vec{K} \, da}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|} \end{array} \right.$$

Ejemplos:

a) Solenoide infinito

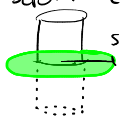


Para este caso notemos que podemos explotar el teorema de Stokes:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \Longrightarrow \int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = \int_S \nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{a} = \int_{\partial S} \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

Vimos que $\vec{B} = \mu_0 I n \hat{e}_z \Theta(a-s)$

Como $\vec{A} \sim \vec{J}_{Tot} = n I \delta(s-a)\hat{e}_\varphi$, es conveniente emplear la siguiente superficie



pues $\int_{\partial S} \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int A\hat{e}_\varphi \cdot (\hat{e}_\varphi \cdot s\, d\varphi) = A s \int d\varphi = 2\pi A s$ .... (1)

Como ya se conoce $\vec{B}$, se tiene que $\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = \int_0^{2\pi}\int_0^{s} B(s')\hat{e}_z (\hat{e}_z s' d\varphi ds') = 2\pi\int_0^s B(s')\, s' ds'$

si $s<a$, ent. $\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = 2\pi\int_0^s \mu_0 I n\, s' ds' = 2\pi\mu_0 I n \frac{s^2}{2}$

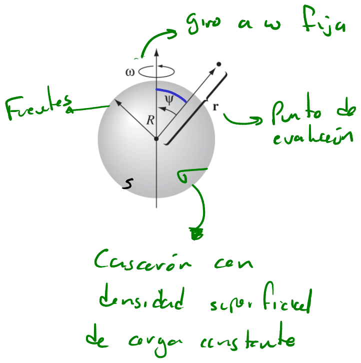
si $s>a$ ent. $\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = 2\pi\int_0^a \mu_0 I n\, s' ds' = 2\pi\mu_0 I n \frac{a^2}{2}$ ..... (2)

Juntando (1) con (2):

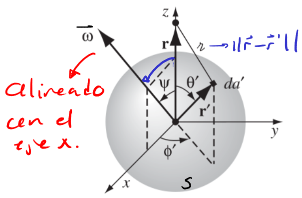
$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \mu_0 I n (s/2)\hat{e}_\varphi & s<a \\ \mu_0 I n (a^2/s)\hat{e}_\varphi & s>a \end{cases}$$

En este caso fue posible calcular $\vec{A}$ con este método pues $\vec{B}$ conocido aunque no siempre es el caso

b) Esfera cargada girando a $\omega = cte$



→ Aunque pudiera ser cómodo definir $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_z$, nos es más conveniente alinear $\vec{r}$ en el eje $\hat{e}_z$, pues al realizar la integral en $\vec{r}'$, ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{r}'$ será θ' (ángulo polar).



Queremos resolver $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^2} d^2r'$

donde $\vec{K} = \sigma\vec{v} = \sigma(\vec{\omega}\times\vec{r}')$

$d^2r' = R^2 \sin\theta' d\theta' d\varphi'$

$\|\vec{r}-\vec{r}'\|^2 = R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta'$

Notemos que $\vec{r}' = R\hat{e}_r = R(\sin\theta'\cos\varphi'\hat{e}_x + \sin\theta'\sin\varphi'\hat{e}_y + \cos\theta'\hat{e}_z)$

$\vec{\omega} = \omega(\sin\psi\,\hat{e}_x + \cos\psi\,\hat{e}_z)$

$$\frac{\vec{r}'\times\vec{\omega}}{\omega R} = \sin\theta'\cos\varphi'\cos\psi\underbrace{(\hat{e}_x\times\hat{e}_z)}_{-\hat{e}_y} + \sin\theta'\sin\varphi'\left[\sin\psi\underbrace{\hat{e}_x\times\hat{e}_y}_{\hat{e}_z} + \cos\psi\underbrace{\hat{e}_y\times\hat{e}_z}_{\hat{e}_x}\right] + \cos\theta'\sin\psi\underbrace{(\hat{e}_z\times\hat{e}_x)}_{\hat{e}_y}$$

Cuidado, están al revés

$$\Rightarrow \frac{\vec{\omega}\times\vec{r}'}{\omega R} = \hat{e}_x(-\sin\theta'\underline{\sin\varphi'}\cos\psi) + \hat{e}_y[\sin\theta'\underline{\cos\varphi'}\cos\psi - \cos\theta'\sin\psi] - \hat{e}_z(\sin\theta'\underline{\sin\varphi'}\sin\psi)$$

Dado que $\|\vec{r}-\vec{r}'\|$ no depende de φ y que se integra en esta variable de 0 a 2π, los términos de $\vec{\omega}\times\vec{r}'$ proporcionales a $\underline{\sin\varphi \text{ y } \cos\varphi}$ no contribuyen a la integral pues $\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\sin\varphi\, d\varphi = 0$

Por lo ~~tanto~~

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}2\pi\int_0^\pi \frac{-\omega R\cos\theta'\sin\psi\,\sigma}{(r^2+R^2-2rR\cos\theta')^{1/2}} R^2\sin\theta' d\theta'\hat{e}_y = -\hat{e}_y\frac{\mu_0\omega R^3\sin\psi\,\sigma}{2}\underbrace{\int_0^\pi \frac{\cos\theta'(\sin\theta' d\theta')}{\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\theta'}}}_{I}$$

Para resolver I empleemos que $u=\cos\theta'$ $\Rightarrow$ $du=-\sin\theta'\,d\theta'$ entonces

$u \xrightarrow[\theta\to 0]{} 1$, $u \xrightarrow[\theta\to\pi]{} -1$ $\Big\}$ Se invierten por un signo menos adicional

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{u\,du}{(R^2+r^2-2Rru)^{1/2}}$$

para resolver esto, notemos que: $\frac{d}{du}(R^2+r^2-2Rru)^{1/2} = \frac{1}{2}\frac{-2Rr}{(r^2+R^2-2Rru)^{1/2}}$

Proponemos $R^2+r^2-2Rru=t^2 \Rightarrow u = \frac{R^2+r^2-t^2}{-2Rr}$ $\Rightarrow$ $I = \int \frac{-u(t)\cdot \cancel{t}dt/Rr}{\cancel{(t^2)^{1/2}}} = \frac{-1}{Rr}\int \frac{R^2+r^2-t^2}{-2Rr}dt = \frac{1}{(Rr)^2}\int \frac{[(R^2+r^2)-t^2]}{2}dt$

$-2rR\,du = 2t\,dt$

$\Rightarrow$ $du = -\frac{t\,dt}{Rr}$

$$\Rightarrow I = \frac{(R^2+r^2-t^2/3)\,t}{(Rr)^2\,2}$$

Finalmente, sustituyendo con u: $I = \left(R^2+r^2 - \frac{r^2+R^2-2Rru}{3}\right)\frac{\sqrt{R^2+r^2-2rRu}}{(Rr)^2\,2}\Bigg|_{u=-1}^{u=+1}$

$$= \frac{r^2+R^2+2Rru}{3(Rr)^2}\sqrt{R^2+r^2-2rRu}\,\Bigg|_{u=-1}^{u=+1}$$

$$= \frac{1}{3(Rr)^2}\Big[(r^2+R^2+2rR)\,|R-r| - (r^2+R^2-2rR)(R+r)\Big]$$

si $r<R$ ent: $0<R-r=|R-r|$ y por lo tanto $I = \frac{2r}{3(Rr)^2}$

si $r>R$ ent $0>R-r=-|R-r|$ y por lo tanto $I = 2R/3r^2$

Es decir:

$$\vec{A} = \begin{cases} (-\mu_0 R^{\cancel{3}}\sigma\omega\sin\psi/\cancel{2})(\cancel{2}r/3\cancel{R^2})\,\hat{e}_y & r<R \\ (-\mu_0 R^3\sigma\omega\sin\psi/\cancel{2})(\cancel{2}R/3r^2)\,\hat{e}_y & r>R \end{cases} = \begin{cases} -\omega r\sin\psi\,\hat{e}_y\cdot\frac{\mu_0 R\sigma}{3} & r<R \\ \underbrace{-\omega r\sin\psi\,\hat{e}_y}_{\vec{\omega}\times\vec{r}\text{ por la alineación propuesta}}\cdot\frac{\mu_0 R^4}{r^3}\sigma & r>R \end{cases}$$

Notemos que es conveniente reescribirlo en notación vectorial pues podemos hacer el cambio de sistema en el que $\vec{\omega}$ sea paralelo a z de forma "sencilla":

$$\vec{\omega}\times\vec{r} = \omega\hat{e}_z\times r\hat{e}_r = \omega r[\overbrace{\hat{e}_z\times(\sin\theta\,\hat{e}_s}^{\hat{e}_\varphi} + \underbrace{\cos\theta\,\hat{e}_z)]}_{\text{son cero}} = \omega r\sin\theta\,\hat{e}_\varphi \quad \text{por tanto}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R\omega\sigma}{3}\,r\sin\theta\,\hat{e}_\varphi & r<R \\ \frac{\mu_0 R^4\omega\sigma}{3}\,\frac{\sin\theta}{r^2}\,\hat{e}_\varphi & r>R \end{cases}$$