Magnetización macroscópica

De forma análoga al caso eléctrico, asumiremos que las ecuaciones de Maxwell son válidas para el caso microscópico y realizaremos promedios fenomenológicos:

$$\langle f(\vec r,t)\rangle = \frac{1}{V(\vec r)}\int_{V(\vec r)} d^3r'\, f(\vec r\,',t) = \frac{1}{V(\vec 0)}\int_{V(\vec 0)} d^3r'\, f(\vec r\,'+\vec r,t)$$

→ Volumen pequeño a escala macroscópica pero muy grande a escala microscópica

↳ Por la linealidad de los operadores diferenciales e integrales se cumple que

$$\begin{matrix}\nabla\cdot\vec b = 0\\ \nabla\times\vec b = \mu_0\vec j_m\end{matrix} \quad \text{—}\ \langle\vec b\rangle = \vec B \longrightarrow \begin{matrix}\nabla\cdot\vec B = 0 \Rightarrow \vec B = \nabla\times\vec A\\ \nabla\times\vec B = \mu_0\langle\vec J_m\rangle\end{matrix}$$

Esta densidad de corriente se va a descomponer como sigue:

$$\langle\vec J_m\rangle = \underbrace{\vec J_{ext}}_{\rho_{ext}\vec v} + \underbrace{\langle\vec J_{ind}\rangle}_{\vec J_{pol}+\vec J_{mag}}$$

$\vec J_{pol}$: Asociada a la polarización (o reacomodo) de las cargas

Recordando la conservación de la carga

$$\vec J_{ext} = \rho_{ext}\vec v \longrightarrow \nabla\cdot\vec J_{ext} + \frac{\partial}{\partial t}\rho_{ext} = 0$$

$$\langle\vec J_{ind}\rangle = \langle\vec J_{mag}\rangle + \langle\vec J_{pol}\rangle$$

$$\hookrightarrow \langle\vec J_{pol}\rangle = \vec v\langle\rho_{pol}\rangle \longrightarrow \nabla\cdot\vec J_{pol} + \frac{\partial}{\partial t}\rho_{pol} = \langle\nabla\cdot\vec J_{pol}\rangle - \nabla\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec P\right) = 0 \Rightarrow \langle\vec J_{pol}\rangle = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\vec P}$$

0 por esto en el caso estático, pero se retomará más adelante

Esta corriente ($\langle\vec J_{mag}\rangle$) es el resultado de las corrientes microscópicas dentro del material debido, en una primera aproximación, a los momentos dipolares magnéticos → En el caso estacionario para la i-ésima partícula

- $\nabla\cdot\vec J^{(i)}_{mag} = 0$
- $\vec m_i = \frac{1}{2}\int d^3r\, [(\vec r-\vec R_i)\times\vec J^{(i)}_{mag}]$

. . . (1) → ¿Qué forma tiene esta corriente?

De las ecuaciones de Maxwell (promediadas) vemos que

$$\left.\begin{matrix}\vec B = \nabla\times\vec A\\ \nabla\times\vec B = \mu_0\langle\vec J_m\rangle\end{matrix}\right\} \nabla\times(\nabla\times\vec A) = \nabla(\underbrace{\cancel{\nabla\cdot\vec A}}_{0\ \text{libertad de norma}}) - \nabla^2\vec A = \mu_0\langle\vec J_m\rangle$$

$$\Rightarrow \nabla^2\vec A = -\mu_0\langle\vec J_m\rangle \longrightarrow \vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\langle\vec J_m(\vec r\,')\rangle}{\|\vec r-\vec r\,'\|}$$

$$\langle\vec J_m(\vec r\,')\rangle = \vec J_{ext} + \cancel{\vec J_{pol}} + \langle\vec J_{mag}\rangle$$

Para que se cumplan las condiciones en (1), nos basta con proponer:

$$\vec J^{(i)}_{mag}(\vec r) = -\vec m_i\times\nabla f_i(\vec r) = \nabla f_i(\vec r)\times\vec m_i = \nabla\times(\vec m_i\, f_i(\vec r))$$

$f_i(\vec r)$ → Se interpreta como la función de distribución de la j-ésima partícula $\Rightarrow \int d^3r\, \underbrace{f_i(\vec r)}\, = 1$ y $f_i(\infty) = 0$

↳ Probabilidad de encontrar la partícula en $\vec r + d\vec r$

con esto, es inmediato que $\nabla\cdot\vec J^{(i)}_{mag} = 0$

Ahora, desarrollemos la segunda propiedad

$$I = \frac{1}{2}\int d^3r\,(\vec r-\vec R_i)\times\vec J^{(i)}_{mag} = \frac{1}{2}\int d^3r'\,(\vec r-\vec R_i)\times\left[\nabla\times(\vec m_i f_i(\vec r))\right] = \frac{1}{2}\int d^3r\left\{\vec m_i[(\vec r-\vec R_i)\cdot\nabla f_i] - \nabla f_i\,[(\vec r-\vec R_i)\cdot\vec m_i]\right\}$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2}\vec m_i\int d^3r\,(\vec r-\vec R_i)\cdot\nabla f_i(\vec r) + \frac{1}{2}\int d^3r\,\nabla f_i(\vec r)[(\vec r-\vec R_i)\cdot\vec m]$$

$$= -\frac{1}{2}\vec m_i\int d^3r\,\nabla\cdot[(\vec r-\vec R_i)f_i(\vec r)] + \frac{1}{2}\vec m_i\int d^3r\, f_i(\vec r)\nabla\cdot(\vec r-\vec R_i) +$$

$$+\frac{1}{2}\int d^3r\,\nabla[f_i(\vec r)(\vec r-\vec R_i)\cdot\vec m] - \frac{1}{2}\int d^3r\, f_i(\vec r)\nabla[(\vec r-\vec R_i)\cdot\vec m_i]$$

} Integrando por partes con

$$\nabla\cdot(\psi\vec A) = \nabla\psi\cdot\vec A + \psi\nabla\cdot\vec A$$

$$\nabla(fg) = (\nabla f)g + f\nabla g$$

Notemos que:

$$I = -\frac{1}{2}\vec{m}_i \underbrace{\int d^3r\, \nabla\cdot[(\vec{r}-\vec{R}_i) f_i(\vec{r})]}_{\substack{\text{Teo divergencia} \\ \oint_{\partial V\to\infty} d^2r\, \hat{n}\cdot(\vec{r}-\vec{R}_i)\cancel{f_i(\vec{r})}^{\,0}}} + \frac{1}{2}\vec{m}_i \underbrace{\int d^3r\, f_i(\vec{r})\, \cancel{\nabla\cdot(\vec{r}-\vec{R}_i)}^{\,3}}_{\int d^3r \cancel{f_i(\vec{r})}^{\,1}\, 3 = 3} + \frac{1}{2}\underbrace{\int d^3r\, \nabla[f_i(\vec{r})(\vec{r}-\vec{R}_i)\cdot\vec{m}]}_{\substack{\text{Teo. divergencia con } \nabla\cdot(\vec{A}\phi) \\ \oint_{\partial V\to\infty} d^2r\, \hat{n}\, \cancel{f_i(\vec{r})}^{\,0}(\vec{r}-\vec{R}_i)\cdot\vec{m}}} - \frac{1}{2}\int d^3r\, f_i(\vec{r})\, \underbrace{\nabla\cancel{[(\vec{r}-\vec{R}_i)\cdot\vec{m}_i]}^{\,\vec{m}}}$$

$$\nabla[(\vec{r}-\vec{R}_i)\cdot\vec{m}] = \nabla(\vec{r}\cdot\vec{m}) = \sum_{ij} \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial r_i} r_j m_j = \sum_{ij}\hat{e}_i m_j \delta_{ij} = \sum m_i \hat{e}_i = \vec{m}$$

$$\Rightarrow I = \frac{3}{2}\vec{m}_i - \frac{1}{2}\int d^3r\, \cancel{f_i(\vec{r})}^{\,1}\, \vec{m} = \vec{m}_i\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right) = \vec{m}_i$$

Con esto, vemos que $\therefore\ I = \vec{m}_i$ → Propiedad cumplida.

$$\vec{J}^{(i)}_{mag} = \nabla\times[\vec{m}_i f_i(\vec{r})]$$

$$\Rightarrow \vec{J}_{mag} = \sum_i \vec{J}^{(i)}_{mag} = \nabla\times\left(\sum_i \vec{m}_i f_i(\vec{r})\right)$$

$$\Rightarrow \langle \vec{J}_{mag}(\vec{r})\rangle = \nabla\times\left\langle \sum_i \vec{m}_i f_i(\vec{r})\right\rangle \longrightarrow$$

$$\langle \vec{J}_{mag}(\vec{r})\rangle \equiv \nabla\times\vec{M} \quad \text{(magnetización)}$$

$$\vec{M} = \frac{1}{V}\int d^3r' \left(\sum_i \vec{m}_i f_i(\vec{r}')\right) = \frac{1}{V}\sum_i \vec{m}_i$$

momento dipolar magnético por unidad de volumen.

Entonces

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \left(\frac{\vec{J}_{ext}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} + \frac{\nabla_{\vec{r}'}\times\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int d^3r' \frac{\vec{J}_{ext}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} + \underbrace{\int d^3r'\, \nabla_{\vec{r}'}\times\left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right)}_{\text{Teo divergencia con } \nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{b}(\vec{r}))} - \int d^3r'\, \underbrace{\nabla_{\vec{r}'}\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right)}_{(\vec{r}-\vec{r}')/\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3}\times\vec{M}(\vec{r}')\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int d^3r' \frac{\vec{J}_{ext}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} + \oint d^2r \frac{\vec{M}(\vec{r}')\times\hat{n}}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} + \int d^3r' \frac{\vec{M}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3}\right] \longrightarrow$$

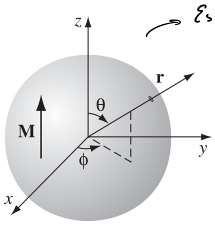
$$\vec{K}_{ind} = \vec{M}\times\hat{n} \quad \text{(Densidad superficial de carga)}$$

Resumiendo, el campo magnético macroscópico cumple con las siguientes ecuaciones:

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \longrightarrow \vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\langle\vec{J}_m(\vec{r})\rangle = \mu_0\vec{J}_{ext} + \mu_0\frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \mu_0\langle\vec{J}_{mag}(\vec{r})\rangle \longrightarrow \nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}_{ext} + \mu_0\nabla\times\vec{M}$$

De nuevo, definiremos un campo auxiliar para describir o atender materiales con una $\vec{M}$. Sin embargo, antes resolvemos el siguiente problema:



Esfera con magnetización constante $\vec{M} = M\hat{e}_z \Rightarrow \vec{J}_{mag} = \nabla\times\vec{M} = 0$, pero $\vec{K}_{mag} = \vec{M}\times\hat{n} = M\hat{e}_z\times\hat{e}_r = M\sin\theta\,\hat{e}_\varphi$

Notemos que el cálculo es análogo al de una esfera que rota a velocidad angular $\omega\hat{e}_z$ tal que $\vec{K} = \sigma\vec{v} = \sigma\vec{\omega}\times R\hat{e}_r = \underbrace{\sigma\omega}_{\text{ahora } M} R\sin\theta\,\hat{e}_\varphi$

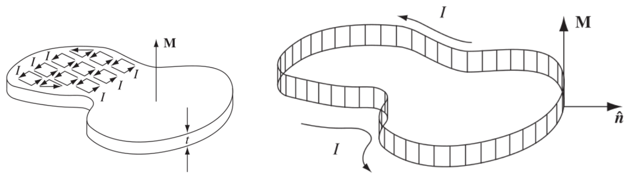
Entonces

$$\vec{B}_< = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}$$

$$\vec{B}_> = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\hat{e}_r(\hat{e}_r\cdot\vec{m}) - \vec{m}}{r^3}\right] \quad \text{con} \quad \vec{m} = \frac{4}{3}\pi R^3\vec{M}$$

al final de la sección se verá un enfoque alternativo para este problema.

¿Y cómo se interpreta $\vec{J}_{mag}$ y $\vec{K}_{mag}$ ↪



= Campo $\mathcal{H}$ =

Para el caso eléctrico, la ley de Gauss se reescribió como $\varepsilon_0 \nabla\cdot\vec{E} = \rho_{tot} = \rho_{ext} + \rho_{ind} = \rho_{ext} - \nabla\cdot\vec{P}$

$\Rightarrow \nabla\cdot(\vec{P}+\varepsilon_0\vec{E}) = \rho_{ext} = \nabla\cdot\vec{D}$

$\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0\vec{E}$ ↳ Vector de desplazamiento

En el caso magnético puede hacerse lo análogo con la ley de Ampère

$$\frac{\nabla\times\vec{B}}{\mu_0} = \vec{J}_{tot} = \vec{J}_{ext} + \vec{J}_{mag} + \cancel{\vec{J}_{pol}}^{\,0\; = \partial\vec{P}/\partial t} = \vec{J}_{ext} + \nabla\times\vec{M}$$

$$\Rightarrow \nabla\times\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right) = \vec{J}_{ext} = \nabla\times\vec{\mathcal{H}} \longrightarrow \boxed{\vec{\mathcal{H}} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}} \text{ campo "hache"}$$

$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0(\vec{\mathcal{H}} + \vec{M})$

De igual forma que para el caso eléctrico, se pueden proponer comportamientos de $\vec{M}$ como función de un campo externo. En este caso, propondremos:

$$\vec{M} = \underbrace{\chi_m}_{\text{Susceptibilidad magnética}}\vec{\mathcal{H}}$$

→ Medios - lineales
- homogéneos
- isótropos.

Entonces $\vec{B} = \mu_0(\vec{\mathcal{H}} + \vec{M}) = \underbrace{\mu_0(1+\chi_m)}\vec{\mathcal{H}} = \underbrace{\mu}\vec{\mathcal{H}}$ → Permeabilidad magnética del material

↳ si $\chi_m = 0$ ent $\mu = \mu_0$ y se tiene un medio no magnético

→ Tipos de magnetismo
↳ Estas descripción son fenomenológicas y en general, requieren de un enfoque cuántico para un mejor entendimiento de los fenómenos.

¿Existen dipolos magnéticos permanentes en el material?

NO (lineal) → Diamagnetismo
- Todos los materiales presentan este comportamiento
- Se requiere un campo magnético extra $\vec{M} \sim -\vec{B}_{ext}$
- $\chi_m < 1$
  - ↳ $|\chi_m| \sim 10^{-5}$ — Muy débil
  - ↳ Independiente de la temperatura

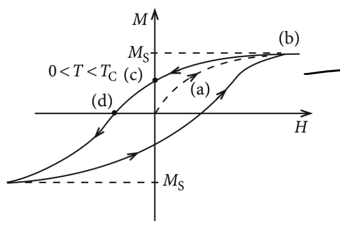
SI →

Paramagnetismo (lineal)
- Clásico: Materiales con su última capa electrónica no llena
  $\Rightarrow \vec{m} = \frac{q}{2M}\sum\vec{l}_i = \frac{q}{2M}\vec{L}$
  $\rightarrow \chi_m = \chi_m(T) \xrightarrow[T\to\infty]{} \chi_m(T) = \frac{C}{T}$ — Ley de Curie
- Cuántico: Materiales con capa electrónica llena
  $\Rightarrow \vec{m} = \frac{q}{M}\vec{S}$
  $0 \neq \chi_m \neq \chi_m(T)$ — Magnetismo de Pauli (Sin dependencia con T)

Magnetismo colectivo (Cuántico) (No lineal)
- No requiere un campo $\mathcal{H}_{ext}$ en todo momento, necesariamente: $\chi_m = \chi_m(\vec{\mathcal{H}}, T)$

Ferromagnetismo
- Debajo de la temperatura de Curie $T^* = T_c$ → alineamiento permanente de los $\vec{m}_i$

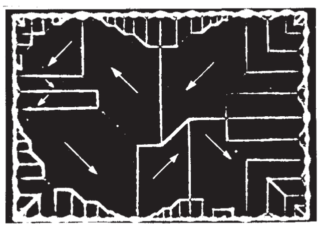
Con un $\vec{\mathcal{H}}_{ext}$ se alinean dipolos y al apagar éste, no hay un reacomodo de estos, por lo que el metal se mantiene magnético



→ Curva de histéresis $t_a < t_b < t_c < t_d$

Ferrimagnetismo
- Hay magnetización en diversas regiones de la red cristalina del material, de tal forma que $\vec{M} = \vec{M}_A + \vec{M}_B \neq \vec{0}$

Antiferrimagnetismo
- A la temperatura de Néel $T^* = T_N$ se cumple que $\vec{M}_A = -\vec{M}_B \Rightarrow \vec{M} = \vec{0}$



Ferromagnetic domains. (Photo courtesy of R. W. DeBlois)

→ Dominios de Weiss

→ Alineación de $\vec{m}_i$ con direcciones preferenciales en diversas zonas según la estructura cristalina

= Condiciones de frontera y el potencial escalar magnético =

Habíamos visto que, para $\vec{B}$, se cumplía que

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \longrightarrow \oint_{\partial V}\vec{B}\cdot d\vec{a}=0 \longrightarrow (\vec{B}_> - \vec{B}_<)\cdot\hat{n}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}_{tot} \rightarrow \oint_{\partial S}\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I^{enc}_{tot} \longrightarrow \hat{n}\times(\vec{B}_> - \vec{B}_<)=\mu_0\vec{K}_{tot}$$

Si consideramos medios lineales, homogéneos e isótropos $\vec{B}=\mu\vec{H}$ y por tanto

$$\boxed{(\vec{B}_> - \vec{B}_<)\cdot\hat{n}=(\mu_>\vec{H}_> - \mu_<\vec{H}_<)\cdot\hat{n}=0}$$

Pero

$$\nabla\times\vec{B}=\vec{J}_{tot}\mu_0 \longrightarrow \nabla\times\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\right)=\vec{J}_{ext}+\nabla\times\vec{M}$$

$$\longrightarrow \nabla\times\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{M}\right)=\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_{ext} \longrightarrow \oint_{\partial S}\vec{H}\cdot d\vec{l}=I^{enc}_{ext} \longrightarrow \boxed{\hat{n}\times(\vec{H}_> - \vec{H}_<)=\vec{K}_{ext}=\hat{n}\times\left(\frac{\vec{B}_>}{\mu_>}-\frac{\vec{B}_<}{\mu_<}\right)}$$

Si consideramos medios lineales, homogéneos e isótropos $\vec{B}=\mu\vec{H}$ y entonces

$$\underline{\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_{ext}} \rightarrow \nabla\times\left(\frac{\vec{B}}{\mu}\right)=\vec{J}_{ext} \rightarrow \nabla\times(\vec{B})=\mu\vec{J}_{ext}$$

como $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ $\longrightarrow$ $-\nabla^2\vec{A}=\mu\vec{J}_{ext}$ con $\nabla\cdot\vec{A}=0$ → Vemos cómo podemos sacar provecho a las técnicas del potencial electrostático que hemos aprendido

Si estamos en una región tal que $\vec{J}_{ext}=\vec{0}$

$$\Rightarrow \nabla\times\vec{H}=\vec{0} \Rightarrow \vec{H}=-\nabla\underbrace{\phi_m}_{\text{Potencial escalar magnético}}=\frac{1}{\mu}\vec{B} \Rightarrow \nabla\cdot\vec{B}=\nabla\cdot(\mu\vec{H})=\nabla\cdot(-\mu\nabla\phi_m)=0$$

si $\mu=cte$ $\longrightarrow$ $\nabla^2\phi_m=0$ → Podemos emplear las soluciones a la ecuación de Laplace con $\vec{B}=-\mu\nabla\phi_m$ en las condiciones de frontera

Supongamos $\vec{M}$ conocida y $\vec{J}_{ext}=\vec{0}$

En este caso, aún es válido $\vec{H}=-\nabla\phi_m=\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{M}$ ← la conocemos

$$\Rightarrow \vec{B}=\mu_0\vec{M}-\mu_0\nabla\phi_m$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot\vec{B}=\mu_0\nabla\cdot\vec{M}-\mu_0\nabla^2\phi_m=0 \Rightarrow \nabla^2\phi_m=\underbrace{\nabla\cdot\vec{M}}$$

la podemos pensar como una "carga" magnética $\rho_{mag}=-\nabla\cdot\vec{M}$

$\hat{n}\cdot\nabla\phi_m=-\cancel{\hat{n}\cdot\vec{B}/\mu_0}+\hat{n}\cdot\vec{M}$

Adicionalmente

$$\nabla\times\vec{H}=\nabla\times\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{M}\right)=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \nabla\times\vec{B}=\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\mu_0\nabla\times M=-\nabla^2\vec{A}$$

Entonces, la solución general es

$$\phi_m(\vec{r})=\frac{-1}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\nabla_{\vec{r}'}\cdot\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}+\frac{1}{4\pi}\underbrace{\oint d^2r'\,\frac{\hat{n}\cdot\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}}_{\text{Considerando condiciones de Dirichlet}}$$

→ Una suerte de σ_m

Si $\vec{M}\in\mathcal{C}$ y acotada

$$\phi_m(\vec{r})=\frac{-1}{4\pi}\int_V d^3r'\,\frac{\nabla_{\vec{r}'}\cdot\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}+0$$

La integral de superficie se desvanece

$$=\frac{-1}{4\pi}\left[\cancel{\int_V d^3r'\,\nabla_{\vec{r}'}\cdot\left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right)}-\int_V d^3r'\,\vec{M}\cdot\underbrace{\nabla_{\vec{r}'}\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right)}_{=\nabla_{\vec{r}}\left(\frac{-1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right)}\right]=\frac{-1}{4\pi}\nabla_{\vec{r}}\cdot\int d^3r'\,\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}$$

Por teorema de la divergencia en un volumen lejano

Considerando una expansión de $1/\|\vec{r}-\vec{r}'\|\simeq 1/r+\mathcal{O}(r^{-2})$

$$\Rightarrow \phi_m(\vec{r})\approx-\frac{1}{4\pi}\nabla_{\vec{r}}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\int\vec{M}(\vec{r}')d^3r'=\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{4\pi r^3}\quad;\text{ con }\quad\vec{m}=\int\vec{M}d^3r$$

↳ Misma forma que el potencial de un dipolo eléctrico

$$\Rightarrow \vec{H}=-\nabla\phi_m\approx\frac{1}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{m}}{r^3}\right]$$

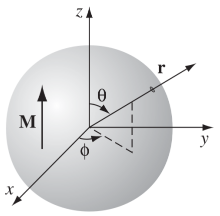
y de forma análoga al caso de electrostática

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\nabla_{\vec{r}'}\times\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}+\frac{\mu_0}{4\pi}\oint d^2r'\,\frac{\vec{M}\times\hat{n}}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}$$

→ Que es como arrancamos toda la discusión.

= Ejemplo: Esfera con magnetización uniforme =

De nuevo, consideramos $\vec{M} = M\hat{e_z}$ y notamos que $\nabla\cdot\vec{M} = 0$ y $\vec{M}\cdot\hat{n} = \vec{M}\cdot\hat{e_r} = M\sin\theta$



Entonces, sabemos que