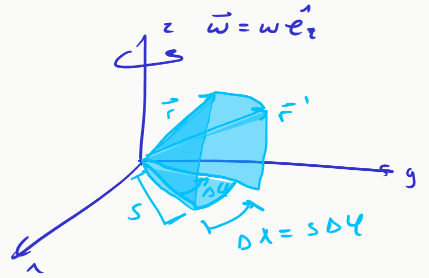
Anteriormente

Sistema de interés

Variables lineales —— Variables "de rotaciones"

$\Delta x \longrightarrow \Delta x = s\Delta\varphi$

$\vec{v} \longrightarrow \vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$ → resultado general



$\vec{p} = m\vec{v} \longrightarrow \vec{L} = I\vec{\omega} = \vec{r}\wedge\vec{p}$

$\vec{F} = \dot{\vec{p}} \longrightarrow \vec{\tau} = \dot{\vec{L}} = \vec{r}\times\vec{F}$

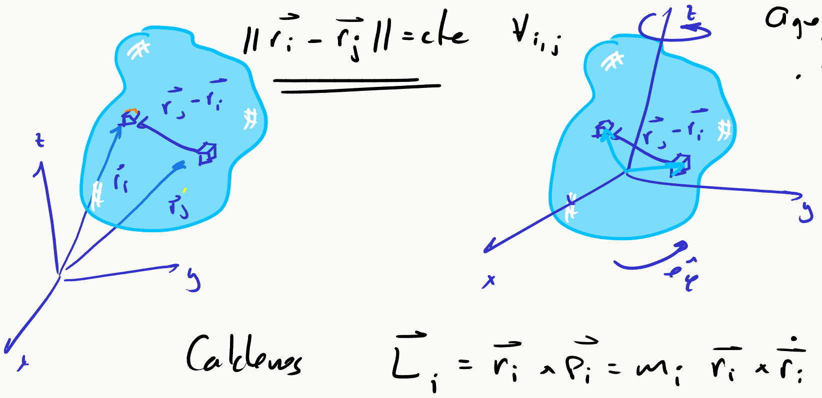
$\vec{\omega} = \omega_x\hat{e}_x + \omega_y\hat{e}_y + \omega_z\hat{e}_z$

Para una partícula

$I = ms^2$

= Cuerpo rígido =

$\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\| = cte \quad \forall_{i,j}$



Agregamos una rotación al cuerpo

· Supongamos al O dentro del cuerpo

$\vec{\omega} = \omega\hat{e}_z$

$\Rightarrow \vec{r}_i \ \text{-}\partial\text{-}\ \|\vec{r}_i\| = r_i = cte$

$\Rightarrow \dot{\vec{r}}_i = \vec{\omega}\wedge\vec{r}_i = \omega r_\perp \hat{e}_\varphi = \omega s\,\hat{e}_\varphi$

Calculamos $\vec{L}_i = \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i = m_i\,\vec{r}_i\times\dot{\vec{r}}_i \Rightarrow \vec{L}_i\cdot\hat{e}_z = m_i\dot{r}_i s_i$

$\Rightarrow \vec{L} = \sum_i \vec{L}_i \Rightarrow \vec{L}\cdot\hat{e}_z = \sum_i \vec{L}_i\cdot\hat{e}_z = \sum m_i\dot{r}_i s_i$

p.o $\dot{r}_i = \omega s_i \Rightarrow \vec{L}\cdot\hat{e}_z = \left(\sum m_i s_i^2\right)\omega = I\omega$

$I = \sum m_i s_i^2 \xrightarrow[\text{continuo}]{} \int s^2\,dm$

Depende del eje de giro

Depende de l origen O

Depende de la distribución de masa

$I \equiv$ Momento de inercia

Se puede generalizar el concepto del momento de inercia al elevarlo a un tensor.

$\vec{L} = \int dm\,(\vec{r}\wedge\dot{\vec{r}}) = \int dm\left(\vec{r}\times\frac{d}{dt}\vec{r}\right) = \int dm\left[\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\right]$

$\vec{A}\times(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$

$\Rightarrow \vec{L} = \int dm\left[\vec{\omega}(\vec{r}\cdot\vec{r}) - \vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{\omega})\right]$ → definimos $\vec{A}\vec{B} = \vec{A}\cdot\vec{B}^T$

si $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$

$= \underbrace{\int dm\left[(\vec{r}\cdot\vec{r})\mathbb{1} - \vec{r}\vec{r}\right]}\vec{\omega}$

ent $\vec{A}\vec{B} = \vec{A}\cdot\vec{B}^T = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_x & B_y & B_z \end{pmatrix}$

$\equiv \overleftrightarrow{I}$ ⟶ Tensor de inercia

↳ generalización de la masa $\quad \vec{L} = \overleftrightarrow{I}\,\vec{\omega} \longleftrightarrow \vec{p} = m\vec{v}$

$= \begin{pmatrix} A_x\vec{B}^T \\ A_y\vec{B}^T \\ A_z\vec{B}^T \end{pmatrix}$

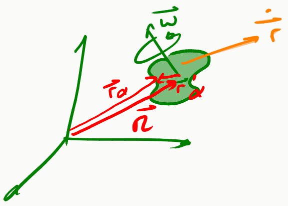
$\Rightarrow \vec{L} = \overleftrightarrow{I}\cdot\vec{\omega}$

$= \begin{pmatrix} A_xB_x & A_xB_y & A_xB_z \\ A_yB_x & A_yB_y & A_yB_z \\ A_zB_x & A_zB_x & A_zB_z \end{pmatrix}$

Si empleamos notación por componentes $I_{ij} = \int (r^2\delta_{ij} + r_i r_j)\,dm$

Una forma equivalente para deducir esta expresión es mediante la energía

= Energía =



$$\vec{r}_\alpha = \vec{R} + \vec{r}_\alpha'$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \dot{\vec{r}}_\alpha = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha (\dot{\vec{r}}_\alpha' + \dot{\vec{R}})\cdot(\dot{\vec{r}}_\alpha' + \dot{\vec{R}}) = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha (\|\dot{\vec{r}}_\alpha'\|^2 + \|\dot{\vec{R}}\|^2 + \cancel{2\dot{\vec{r}}_\alpha'\cdot\dot{\vec{R}}})$$

$$\Rightarrow T = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \dot{R}^2}_{\frac{1}{2}M\dot{R}^2 = T_{cm}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum m_\alpha \|\dot{\vec{r}}_\alpha'\|^2}_{¿\, T_{rot} = I\omega^2\, ?}$$

$\dot{\vec{r}}_\alpha' = \vec{\omega}\times\vec{r}_\alpha'$ por ser una rotación

$$\Rightarrow T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \underbrace{\|\vec{\omega}\times\vec{r}_\alpha'\|^2}$$

$$\|\vec{\omega}\times\vec{r}_\alpha'\|^2 = \|\vec{\omega}\|^2\|\vec{r}_\alpha'\|^2\sin^2\theta \qquad \theta \measuredangle\ \vec{\omega}\ y\ \vec{r}_\alpha'$$

$$= \|\vec{\omega}\|^2\|\vec{r}_\alpha'\|^2(1-\cos^2\theta) \qquad \cos\theta = \frac{\vec{\omega}\cdot\vec{r}_\alpha'}{\|\vec{\omega}\|\,\|\vec{r}_\alpha'\|}$$

$$= \|\vec{\omega}\|^2\|\vec{r}_\alpha'\|^2 - (\vec{\omega}\cdot\vec{r}_\alpha')^2$$

$$\Rightarrow \|\vec{\omega}\times\vec{r}_\alpha'\| = \|\vec{\omega}\|^2\|\vec{r}_\alpha'\| - (\vec{\omega}\cdot\vec{r}_\alpha')^2$$

$$= (\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2)(x_\alpha'^2+y_\alpha'^2+z_\alpha'^2) - (\omega_x x_\alpha' + \omega_y y_\alpha' + \omega_z z_\alpha')^2$$

- Se cancelan los términos $\omega_\beta^2\beta^2$
- Hay términos de la forma $-2\omega_\beta\omega_\gamma\beta\gamma$
- Hay términos de la forma $\omega_\beta^2(\gamma^2+y^2)$

$$\Rightarrow T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha\|\vec{\omega}\times\vec{r}_\alpha'\|^2 = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha\Big[\omega_x^2(y_\alpha'^2+z_\alpha'^2) - \omega_x\omega_y x_\alpha' y_\alpha' - \omega_x\omega_z x_\alpha' z_\alpha' +$$
$$- \omega_y\omega_x y_\alpha' x_\alpha' + \omega_y^2(x_\alpha'^2+z_\alpha'^2) - \omega_y\omega_z y_\alpha' z_\alpha' +$$
$$- \omega_z\omega_x z_\alpha' x_\alpha' - \omega_z\omega_y z_\alpha' y_\alpha' + \omega_z^2(x_\alpha'^2+y_\alpha'^2)\Big]$$

Vemos que $T_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 \longrightarrow T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\omega_i I_{ij}\omega_j$

si $\vec{\omega} = \omega_x\hat{e}_x + \omega_y\hat{e}_y + \omega_z\hat{e}_z = \begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}$ $\qquad \overleftrightarrow{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz}\\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz}\\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz}\end{pmatrix} \rightarrow I_{ij}$

$\vec{\omega}^T = (\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z)$

$$\vec{r}_\alpha' = \begin{pmatrix} r_{\alpha x}\\ r_{\alpha y}\\ r_{\alpha z}\end{pmatrix}$$

$$I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha(\|\vec{r}_\alpha'\|^2\delta_{ij} - r_{\alpha i}r_{\alpha j})$$

$$= \int(\|\vec{r}_\alpha\|^2\delta_{ij} - r_{\alpha i}r_{\alpha j})\,dm$$

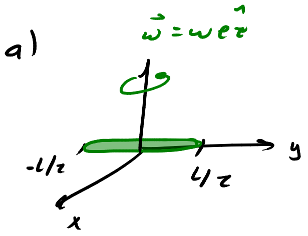
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

Depende de los ejes de giro

Ejemplo: Varilla delgada → Problema en 1D

Hipótesis:
- Distribución de masa constante
- Longitud L, masa M
- Giro perpendicular a la varilla
  a) Centro de Masa
  b) Extremo de la varilla

a)



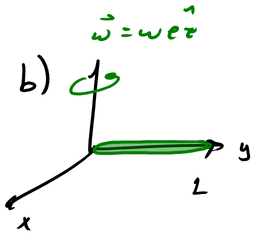
$$I=\int s^2\,dm$$

$$s^2=\cancel{x^2}^{\,x=0}+y^2=y^2\ ,\quad \frac{\Delta m}{\Delta y}=\frac{M}{L}\Rightarrow \Delta m=\frac{M}{L}\Delta y$$

$$\Rightarrow dm=\frac{M}{L}dy$$

$$I_{cM}=\frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2}y^2dy=\frac{M}{L}\,2\int_0^{L/2}y^2dy=\frac{M}{L}\,\frac{2}{3}\left(\frac{L}{2}\right)^3=\frac{1}{12}ML^2 ✓$$

b)

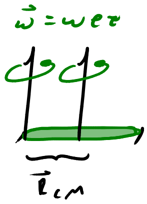


$$I'=\frac{M}{L}\int_0^L y^2dy=\frac{M}{L}\frac{1}{3}L^3=\frac{1}{3}ML^2 ✓$$

$I_{cM}\neq I'$

↳ ¿Cómo los relaciono?

* Nota: Ejes de giro paralelos

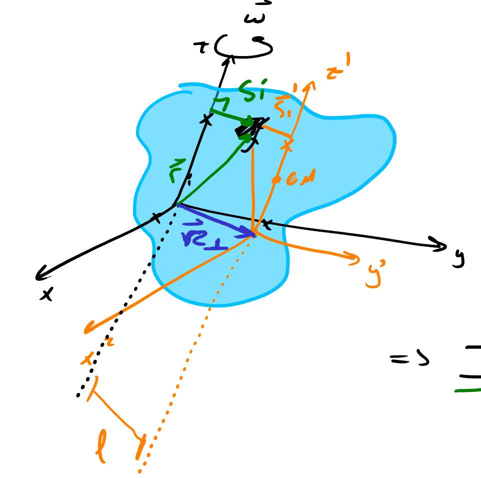


Teorema de Steiner (ejes paralelos)

- Relaciona I_{cM} y I' si los ejes de giro son paralelos entre sí

↳ Momento de inercia medido desde el cM

Sup $\vec{\omega}=\omega\hat{e}_z$



$$\vec{s}_i=x_i\hat{e}_x+y_i\hat{e}_y\ ;\quad I=\sum m_is_i^2=\sum m_i\vec{s}_i\cdot\vec{s}_i$$

$$\vec{R}_\perp=X\hat{e}_x+Y\hat{e}_y\ \longrightarrow\ \ell^2=X^2+Y^2\Rightarrow I_{cM}=\sum m_i\ell^2=M\ell^2$$

$$\vec{s}_i'=x_i'\hat{e}_x+y_i'\hat{e}_y\ ;\quad I'=\sum m_i\vec{s}_i'\cdot\vec{s}_i'$$

$$\vec{R}_\perp=\vec{s}_i-\vec{s}_i'\ \Rightarrow\ \vec{s}_i=\vec{s}_i'+\vec{R}_\perp$$

$$\Rightarrow \underline{I}=\sum_i m_i\vec{s}_i\cdot\vec{s}_i=\sum_i m_i(\vec{s}_i'+\vec{R}_\perp)\cdot(\vec{s}_i'+\vec{R}_\perp)$$

$$=\sum_i m_i\Big(\underbrace{\vec{s}_i'\cdot\vec{s}_i'}_{I'}+\underbrace{2\vec{s}_i'\cdot\vec{R}_\perp}_{0}+\underbrace{\vec{R}_\perp\cdot\vec{R}_\perp}_{I_{cM}}\Big)$$

$$\sum m_i\vec{s}_i'\cdot\vec{R}_\perp=\sum_i m_i(\vec{s}_i-\vec{R}_\perp)=\sum_i m_i\vec{s}_i-M\vec{R}_\perp=M\vec{R}_\perp-M\vec{R}_\perp=0$$

$$\therefore\ I=I_{cM}+I'=M\ell^2+I'$$

Sistema de ejes principales

Recordemos que, en general, el tensor de inercia es: $I_{ij} = \int dm\,(r^2\delta_{ij} - r_i r_j)$

y que se relaciona con la energía como

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T \overleftrightarrow{I}\vec{\omega} = \frac{1}{2}\sum_{l,m} \omega_l I_{lm}\omega_m$$

$\Rightarrow$ si $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ entonces $\vec{\omega}^T \overleftrightarrow{I}\vec{\omega} = 2T > 0$ → Esto la hace una matriz definida positiva

$\Rightarrow \exists\, \overleftrightarrow{I}^{-1}$ y que $\overleftrightarrow{I}$ es diagonalizable

Eso quiere decir que hay una base tal que $\overleftrightarrow{I} = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$

y que $\underbrace{\overleftrightarrow{I}\vec{\omega}_i = I_i\vec{\omega}_i}$ → $\vec{\omega}_i$ son los vectores propios y corresponden a ejes de giro particulares.

Para encontrar este sistema, basta con:

$$\det(\overleftrightarrow{I} - I_i \mathbb{1}) = \vec{0}$$

Esta representación del tensor de inercia es útil para calcular las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido. Para calcularlas recordemos que en sistemas de referencia no inerciales, las derivadas temporales se escriben como:

$$\boxed{\left(\frac{d}{dt}\cdot\right)_{in} = \left(\frac{d}{dt}\cdot\right)_{rot} + \vec{\omega}\times\cdot}$$

sist. inercial; sist. que rota; vel. de rotación del sistema

aplicándole a $\vec{L}$:

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt}\vec{L} = \left(\frac{d}{dt}\vec{L}\right)_{rot} + \vec{\omega}\times\vec{L}$$

$$= \frac{d}{dt}(\overleftrightarrow{I}\vec{\omega})_{rot} + \vec{\omega}\times(\overleftrightarrow{I}\vec{\omega})$$

$\overleftrightarrow{I}$ es constante en el tiempo

$$= \overleftrightarrow{I}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega}\times(\overleftrightarrow{I}\vec{\omega})$$

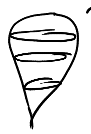
Ahora, supongamos que $\overleftrightarrow{I} = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$, $\vec{\omega}^T = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ $\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{I}\vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_1\omega_1 \\ I_2\omega_2 \\ I_3\omega_3 \end{pmatrix}$

Entonces

$$\begin{pmatrix}\tau_1\\ \tau_2\\ \tau_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1\dot{\omega}_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 \\ I_3\dot{\omega}_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} I_1\omega_1 \\ I_2\omega_2 \\ I_3\omega_3\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix}\tau_1\\ \tau_2\\ \tau_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1\dot{\omega}_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 \\ I_3\dot{\omega}_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\omega_2\omega_3(I_3 - I_2)\\ \omega_1\omega_3(-I_3 + I_1)\\ \omega_1\omega_2(I_2 - I_1)\end{pmatrix}}$$

Ecuaciones de Euler

= Ejemplo: Trompo simétrico sin fuerzas =



$\overleftrightarrow{I} = \mathrm{diag}(I_0, I_0, I_3)$

Sup $\vec{\tau} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} I_1\dot{\omega}_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 \\ I_3\dot{\omega}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega_2\omega_3(I_2 - I_3)\\ \omega_1\omega_3(I_3 - I_1)\\ \omega_1\omega_2(I_2 - I_1)\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\dot{\omega}_1\\ \dot{\omega}_2\\ I_3\dot{\omega}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega_1\omega_2(I_0 - I_3)/I_0\\ \omega_1\omega_3(I_3 - I_0)/I_0\\ \omega_1\omega_2(I_0 - I_0)\end{pmatrix}$$

De esas ecuaciones, vemos que $\dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow \omega_3 = cte$

$$\dot{\omega}_i \pm \omega_j\underbrace{\left(\omega_3\frac{I_3 - I_0}{I_0}\right)}_{=\Omega} \Rightarrow \begin{array}{l}\dot{\omega}_1 + \omega_2\Omega = 0\\ \dot{\omega}_2 - \omega_1\Omega = 0\end{array}$$

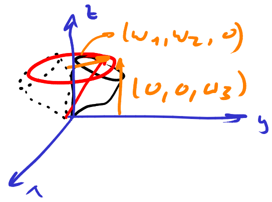
Para resolver el sistema de ecuaciones, derivemos una de las expresiones:

$$\dot{\omega}_1 + \omega_2 \Omega = 0 \Rightarrow \ddot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2 \Omega = \ddot{\omega}_1 + (\omega_1 \Omega)\Omega = 0$$

↳ cuya solución es

$$\omega_1 = \omega_0 \cos(\Omega t + \phi_0)$$

$$\Rightarrow \omega_2 = -\frac{\dot{\omega}_1}{\Omega} = \omega_0 \sin(\Omega t + \phi_0)$$



Entonces, podemos observar que $\vec{\omega}$ es un vector que dibuja un cono que rota a una frecuencia $\Omega = \omega_3 \frac{I_0 - I_3}{I_0}$