= Ondas vectores =

4/10/21

Vectores vs. Pseudovectores (vectores axiales y polares)

↳ aplicaciones físicas ↲

Recordemos qué es el producto cruz

$\mathbb{R}^3 \to (a_i, b_i, c_i)$

$\times : V \times V \longrightarrow V$

$a \times b \longmapsto (a\times b)\cdot b = (a\times b)\cdot a = 0$

Definamos la transformación de inversión

$T(\vec r) = -\vec r$ → Inversión

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}}_{\text{Matriz}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$ → Transformación lineal

Vamos a definir a los vectores como $T(\vec a) = -\vec a$

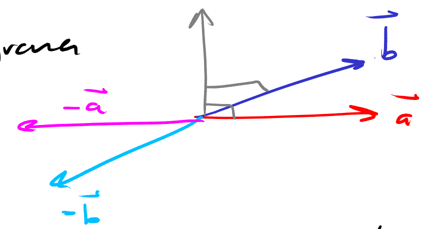
y a los pseudovectores como $T(\vec c) = \vec c$ → Es decir, son invariantes ante la inversión.

Lo que queremos probar es que

si $\vec a, \vec b \in \mathbb{R}^3$ y $T(\vec a) = -\vec a$ y $T(\vec b) = -\vec b$, entonces

$\vec a \times \vec b = (-\vec a)\times(-\vec b)$

$T(\vec a \times \vec b) = \vec a \times \vec b$. → Diagrama



Recordando que $\vec a \times \vec b$ puede escribirse como un determinante y que esto es una operación lineal en cada renglón.

$$\det(\vec a, \vec b, \vec c) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \Rightarrow \det(\lambda \vec a, \beta \vec b, \gamma \vec c) = \lambda\beta\gamma \det(\vec a, \vec b, \vec c)$$

Demostración directa

Entonces, proponemos que $\vec a \times \vec b = \det[(\hat e_x, \hat e_y, \hat e_z), \vec a, \vec b]$

Por lo tanto $T(\vec a \times \vec b) = T(\vec a)\times T(\vec b) = (-\vec a)\times(-\vec b) = (-1)(-1)(\vec a \times \vec b) = \vec a \times \vec b$

$\therefore T(\vec a \times \vec b) = \vec a \times \vec b$ ∎

Si hacemos lo análogo

Sean $\vec{C}$ y $\vec{D}$ tal que $T(\vec{C})=\vec{C}$, $T(\vec{D})=\vec{D}$

Calcular $T(\vec{a}\times\vec{C}) \longrightarrow$ Producto de vector y pseudovector

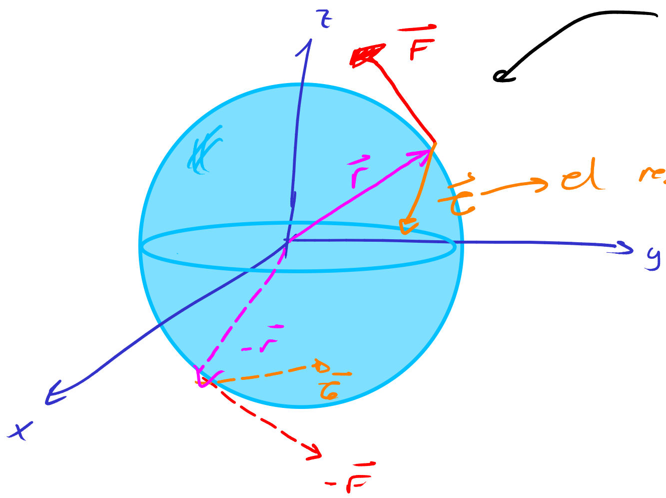
$T(\vec{C}\times\vec{D}) \longrightarrow$ Producto de pseudovectores

---

¿Por qué definimos esta clasificación de vectores?

En Física son útiles debido a los argumentos de simetría.

Pensemos en una esfra que va a empezar a girar y se le aplica una fuerza



La esfra es simétrica ante inversiones entonces, sin hacer cuentas, podemos ver que si $\vec{F}$ se aplica del otro lado, aún así $\vec{\tau}$ sale de la pantalla, lo que nos dice que tenemos el mismo giro pues

$$T(\vec{r})=-\vec{r},\quad T(\vec{F})=-\vec{F} \Rightarrow T(\vec{\tau})=\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F} \checkmark$$

Lo mismo se puede decir del campo magnético pues

$$\vec{B}\sim\hat{r}\times\vec{E} \longrightarrow \text{vector}$$

$\hookrightarrow$ Pseudovector