18/10/21

= Cálculo de variaciones $\longrightarrow$ $I[y] = \int_{x_a}^{x_b} f(y, y', x)\,dx$

$\hookrightarrow$ Funcional = Función de Funciones

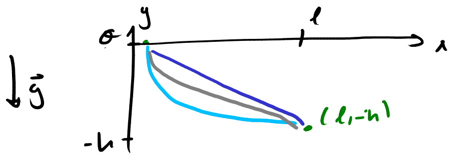
Cálculo $\rightarrow$ Optimizar $\rightarrow$ $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}=0 \Rightarrow f(x_0)$ $\rightarrow$ un punto máximo o mínimo

$\hookrightarrow$ función de una o varias variables

Optimizar $\longrightarrow$ Encontrar $y(x)$ tal que la funcional tenga un valor máximo o mínimo

$\downarrow$ Encontrar toda una función.

Pensemos en dos ejemplos prácticos



1) ¿Cuál es la distancia más corta entre los dos puntos?

$$I_1 = \int_0^{(l,-h)} ds = \int \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}\,dx = \int_0^l \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

longitud de arco; sup. $y=y(x)$

la idea es buscar la distancia mínima entre dos puntos

2) Si sólo hubiera gravedad, ¿cuál trayectoria sería la más rápida para llegar?

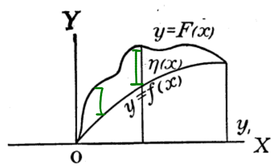
$$I_2 = \int_0^{(l,-h)} dt = \int \frac{ds}{v}\frac{dx}{dx}$$ pero $E(0) = E(l,-h)$

$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 + \cancel{m}gy \Rightarrow I_2 = \int \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,\frac{dx}{\sqrt{-2gy}}$

$\Rightarrow v = \sqrt{-2gy}$ ($y<0$)

$$= \frac{1}{\sqrt{2g}}\int \frac{\sqrt{1+(dy/dx)^2}}{\sqrt{-y}}\,dx$$

Para encontrar $y(x)$ óptima, notemos



$I_i = I_i[y(x)] \longrightarrow$ Repondremos $I_i[y(x)+\alpha\eta(x)]$

α: parámetro que no depende de x

$\hookrightarrow \eta|_{x=\text{extremos}}=0$

y definimos $I_i = I_i[\alpha]$ $\hookrightarrow$ función de α.

$\Rightarrow$ Para optimizar sólo tenemos que $\left.\frac{dI_i}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=0$

$\hookrightarrow$ Optimizamos la función para α y eso debe ocurrir para $\alpha=0$ pues así tenemos nuestra solución de interés.

1) $$I_1(\alpha) = I_1[y(x)+\alpha\eta(x)] = \int_0^l \sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}[y+\alpha\eta]\right)^2}\,dx$$

$$= \int_0^l \left[1+\left(\frac{dy}{dx}+\alpha\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right]^{1/2}dx$$

$$= \int_0^l \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\alpha\frac{dy}{dx}\frac{d\eta}{dx}+\alpha^2\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right]^{1/2}dx$$

Calculamos $\frac{dI_1(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^\ell \frac{d}{d\alpha}\left[1+(y')^2+2\alpha y'\eta'+\alpha^2(\eta')^2\right]^{1/2} dx$

$$= \int_0^\ell \frac{1}{2}\left[\quad\right]^{-1/2}\left(2y'\eta'+2\alpha(\eta')^2\right)dx$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dI_1(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_0^\ell \frac{y'(x)}{\sqrt{1+(y')^2}}\,\eta'(x)\,dx = \cancel{\left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1+(y')^2}}\,\eta(x)\right)\Bigg|_0^\ell} - \int_0^\ell \frac{d}{dx}\left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1+(y'(x))^2}}\right)\eta(x)\,dx$$

$$= -\int_0^\ell \frac{d}{dx}\left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1+(y'(x))^2}}\right)\eta(x)\,dx = 0$$

→ $\eta(x)$ es arbitraria, por lo que $\left.\frac{dI_1(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$ sin importar cómo sea $\eta(x)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1+(y'(x))^2}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{y'(x)}{\sqrt{1+(y'(x))^2}} = C \Rightarrow (y')^2 = c^2 + c^2(y')^2$$

$$\Rightarrow (y')^2(1-c^2) = c^2$$

$$\Rightarrow y' = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \equiv m$$

$$\Rightarrow y = mx+b$$

Es decir la distancia más corta es

$y = mx+b$

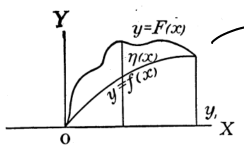
y como queremos que $(0,0)$, $(l,-h)$, obtenemos que

$$y = -\frac{h}{\ell}x$$

→ Detalles de la notación

→ Función que optimiza el funcional $I[y]$

$y=f$ es la mejor solución



definimos $\varepsilon\eta(x) \equiv \underbrace{F(x)}_{\text{Función arbitraria}} - f(x)$

Variación de y

$$\delta y(x) = \varepsilon\eta(x) \Rightarrow \varepsilon\eta'(x) = \boxed{\frac{d}{dx}(\delta y(x)) = \delta\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) = \delta y'}$$

si $\phi = \phi(y(x))$, entonces $\delta\phi \approx \frac{d\phi}{dy}\delta y$ → aproximación si $\delta y \ll 1$

si tuviéramos más coordenadas $\delta\phi(y,y',x) = \frac{\partial\phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\phi}{\partial(y')}\delta(y') + \frac{\partial\phi}{\partial x}\delta x$.

si $\delta \to d$, obtenemos que $d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial y'}dy' + \frac{\partial\phi}{\partial x}dx$ ← Podemos emplear el cálculo usual

¿Cuál es la diferencia dy, δy? → Variación cuando fijamos x y variamos y.

→ Variación cuando y está fijo y modificamos x.

Pensemos en $I_z[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{\ell} \sqrt{\frac{1+(y')^2}{-y}}\, dx \longrightarrow \delta I_z = 0 = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{\ell} \delta \sqrt{\frac{1+(y')^2}{-y}}\, dx$.

$$\delta\Big(\underbrace{\sqrt{\frac{1+(y')^2}{-y}}}_{\sqrt{\ }}\Big) = \underbrace{\sqrt{1+(y')^2}\left(-\frac{1}{2}\,\frac{-1}{(-y)^{3/2}}\right)}_{\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{\ }}\delta y + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{-y}}\,\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}}_{\frac{\partial \sqrt{\ }}{\partial y'}}\,\underbrace{\delta y'}_{\frac{d}{dx}\delta y}$$

$$I_z[y] = \int_0^{\ell} \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{\ }\,\delta y\, dx + \int_0^{\ell} \frac{\partial \sqrt{\ }}{\partial y'}\,\frac{d}{dx}\delta y\, dx = \int_0^{\ell} \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{\ }\,\delta y\, dx + \left(\frac{\partial \sqrt{\ }}{\partial y'}\,\delta y\right)\Big|_0^{\ell} \to 0 - \int_0^{\ell} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \sqrt{\ }}{\partial y'}\right)\delta y\, dx$$

$$= \int_0^{\ell} \underbrace{\left[\frac{\partial \sqrt{\ }}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \sqrt{\ }}{\partial y'}\right)\right]}_{=0} \delta y\, dx$$

$\longrightarrow$ Ecuación de Lagrange !!

Pero notamos que $\sqrt{\ }$ no depende de x explícitamente

Si $f = f(x,y,y')$ y $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{d}{dx} f - \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$

$$= \underbrace{\cancel{\frac{\partial f}{\partial x}}}_{\text{hipótesis}} \to 0 + \frac{\partial f}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{y'} + \cancel{\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y'}} - y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

$$= y'\underbrace{\cancel{\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]}}_{\text{Euler-Lagrange}} \to 0 = 0$$

$\Rightarrow f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} \equiv cte$

Entonces. si $f = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{-y}}$

$$\overset{cte}{a} = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{-y}} - \frac{y'}{\sqrt{-y}}\,\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{1+\cancel{(y')^2} - \cancel{(y')^2}}{\sqrt{-y}\,\sqrt{1+(y')^2}}$$

$$\Rightarrow 2a = -y\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{2a}{-y} - 1\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2a+y}{-y}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{-y}{2a+y}}\, dy = dx \Rightarrow x = \int \sqrt{\frac{-y}{2a+y}}\, dy$$

sup $y = -a(1+\cos\theta)$ //

$dy = +a\sin\theta\, d\theta$

$$\Rightarrow x - 0 = \int \sqrt{\frac{\cancel{a}(1+\cos\theta)}{2\cancel{a} - \cancel{a}(1+\cos\theta)}}\, a\sin\theta\, d\theta = a(\theta - \sin\theta)$$

$$= a\int \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}\,\sin\theta\, d\theta = a$$

$$= a\int (1+\cos\theta)\, d\theta = a(\theta - \sin\theta)$$

que $(1+\cos\theta)^{1/2}\sin\theta = \left[(1+\cos\theta)(1-\cos^2\theta)\right]^{1/2}$

$= (1+\cos\theta)\ (1-\cos\theta)^{1/2}$

$\Rightarrow x = a(\theta - \sin\theta)$ //