Teorema de Chasles

→ "Todo movimiento se puede describir como:

- Traslación del Centro de Masa (CM)
- Rotaciones alrededor del CM.

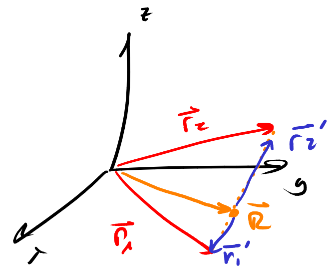
- Def.: Cuerpo rígido

↳ Es una colección de N partículas $\vec{r}_i$ → $\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\| = cte \quad \forall ij$

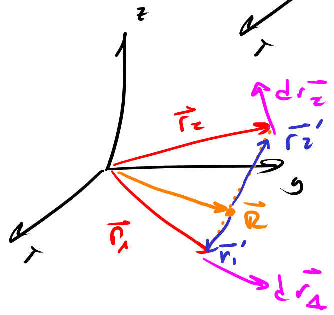
Dem: Supongamos un cuerpo rígido con $N=2$ y definimos el CM y las coordenadas relativas al CM

$$\underbrace{\vec{r}_i = \underbrace{\vec{R}}_{\text{CM}} + \underbrace{\vec{r}_i\,'}_{\text{relativo al CM}}}$$

→



Supongamos que hay un desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}_i$ en cada entorno pero como es un cuerpo rígido →



$$\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\cdot(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = cte$$

Calculando la condición anterior de forma diferencial

$$\Rightarrow \quad d(\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|) = 2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\cdot d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = d(cte) = 0$$

$\Rightarrow$ Hay dos formas de que se cumpla esto

1) $d\vec{r}_1 = d\vec{r}_2$ 2) $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \perp (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2)$

Fijémonos en el CM y los desplazamientos relativos al CM

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} \Rightarrow d\vec{R} = \frac{m_1 d\vec{r}_1 + m_2 d\vec{r}_2}{m_1+m_2}$$

$$\vec{r}_1\,' = \vec{r}_1 - \vec{R} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \Rightarrow d\vec{r}_1\,' = d\vec{r}_1 - d\vec{R} = \frac{-m_2}{m_1+m_2}(d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1)$$

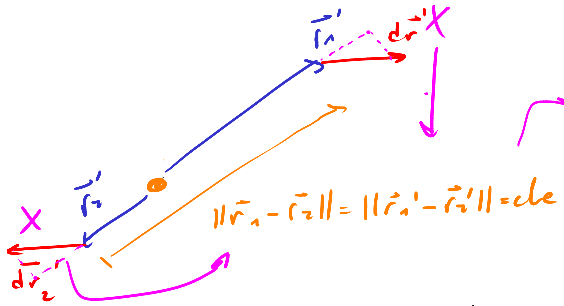
$$\vec{r}_2\,' = \vec{r}_2 - \vec{R} = \frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \Rightarrow d\vec{r}_2\,' = d\vec{r}_2 - d\vec{R} = \frac{m_1}{m_1+m_2}(d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1)$$

- Si $d\vec{r}_1 = d\vec{r}_2 \Rightarrow d\vec{r}_1\,' = d\vec{r}_2\,' = \vec{0}$

↳ No hay movimientos relativos al CM

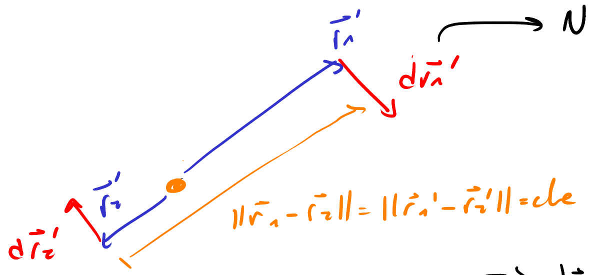
→ Sólo hay traslación del CM

Observemos el CM y sus posicions relativas



$d\vec{r}_i \perp \vec{r}_i'$ para que se cumpla la condición de cuerpo rígido, p.o vamos si es cierto

Vamos a demostrarlo:



Notemos que $d\vec{r}_1'\cdot(\vec{r}_1'-\vec{r}_2')$ se escribe como $= (\vec{r}_1-\vec{r}_2')$

Pero $d\vec{r}_1' = \dfrac{-M_2}{M_1+M_2}(d\vec{r}_2-d\vec{r}_1)$

$(d\vec{r}_2-d\vec{r}_1)\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=0$ Son perpendiculares!

$$\Rightarrow \underbrace{d\vec{r}_1'\cdot(\vec{r}_1'-\vec{r}_2')}_{\text{sí son perpendiculares}} = \frac{-M_2}{M_1+M_2}(d\vec{r}_2-d\vec{r}_1)\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=\vec{0}$$

y lo análogo para $d\vec{r}_2'\cdot(\vec{r}_1'-\vec{r}_2')=\vec{0}$

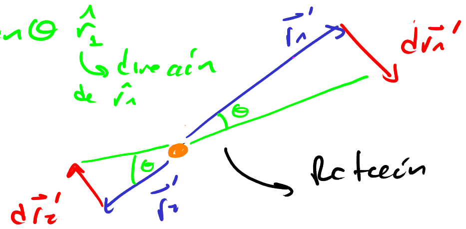
Finalmente, notemos que

$$\left.\begin{aligned} d\vec{r}_1' &= d\vec{r}_1 - d\vec{R} = \frac{-M_2}{M_1+M_2}(d\vec{r}_2-d\vec{r}_1) \\ d\vec{r}_2' &= d\vec{r}_2 - d\vec{R} = \frac{M_1}{M_1+M_2}(d\vec{r}_2-d\vec{r}_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{d\vec{r}_1'}{r_1'} = -\frac{M_2}{M_1}\frac{d\vec{r}_2'}{r_1'}$$

y si nos paramos en el CM $\vec{R}'=\vec{0} \Rightarrow m_1\vec{r}_1' = -m_2\vec{r}_2' \Rightarrow \overbrace{m_1 r_1' = m_2 r_2'}^{\text{como magnitudes}}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}_1'}{r_1'} = -\frac{d\vec{r}_2'}{r_2'} = \tan\theta\ \hat{r}_\perp$$

dirección de $\hat{r}_1$



Rotación respecto al CM.

∴ Hay dos opciones para el movimiento de un cuerpo rígido

1) $d\vec{r}_1=d\vec{r}_2 \longrightarrow$ Traslación del CM
2) $(d\vec{r}_1-d\vec{r}_2)\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2) \longrightarrow$ Rotación respecto al CM.