2.2.- Teoremas de Green y de Helmholtz

Para poder emplear el formalismo de Green, haremos la demostración de las siguientes propiedades

2.2.1.- Teoremas de Green

· Sean dos funciones escalares $\phi(\vec{r})$ y $\psi(\vec{r})$ de clase C^2 en V, entonces

$$1^{ra}) \int_V [\phi \nabla^2\psi + (\nabla\psi \cdot \nabla\phi)] d^3r = \oint_{\partial S} \phi \nabla\psi \cdot \hat{n}\, d^2r \quad \ldots (G1)$$

$$2^{da}) \int_V (\phi \nabla^2\psi - \psi \nabla^2\phi) d^3r = \oint_{\partial V} (\phi \nabla\psi - \psi \nabla\phi) \cdot \hat{n}\, d^2r \quad (G2)$$

Identidades o teoremas de Green

Corolarios del teorema de la divergencia

Muchos libros definen

$$\frac{\partial f}{\partial n} \equiv \hat{n} \cdot \nabla f \rightarrow$$ la derivada en la dirección normal que define ∂V

Para probar estas identidades, apliquemos el teorema de la divergencia como sigue

$$\text{Si } \vec{A} = \phi \nabla\psi \text{ ent } \nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot (\phi \nabla\psi) = \nabla\phi \cdot \nabla\psi + \phi\, \nabla \cdot (\nabla\psi)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\phi \nabla\psi) = \nabla\phi \cdot \nabla\psi + \phi \nabla^2\psi \quad \ldots (1)$$

Aplicando el Teorema de la divergencia y sustituyendo con (1) obtenemos que

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A}\, d^3r = \oint_{\partial V} \vec{A} \cdot \hat{n}\, d^2r$$

$$\Rightarrow \int_V (\nabla\phi \cdot \nabla\psi + \phi \nabla^2\psi) d^3r = \oint_{\partial V} \phi (\hat{n} \cdot \nabla\psi) d^2r$$

Primera identidad de Green

Si se intercambian $\psi \rightarrow \phi$, $\psi \rightarrow \phi$ en $\vec{A} \rightarrow \vec{A} = \psi \nabla\phi$, entonces

$$\nabla \cdot (\psi \nabla\phi) = \nabla\psi \cdot \nabla\phi + \psi \nabla^2\phi \quad \ldots (2)$$

Restando (1) y (2) $\Rightarrow$

$$\underbrace{\nabla \cdot (\phi \nabla\psi) - \nabla \cdot (\psi \nabla\phi)}_{\nabla \cdot (\phi \nabla\psi - \psi \nabla\phi)} = \phi \nabla^2\psi - \psi \nabla^2\phi$$

Integrando en V y empleando teorema de la divergencia

$$\int_V (\phi \nabla^2\psi - \psi \nabla^2\phi) d^3r = \oint_{\partial V} [\phi (\hat{n} \cdot \nabla\psi) - \psi (\hat{n} \cdot \nabla\phi)] d^2r$$

Segunda identidad de Green

• Ejemplos particulares

a) $\phi = 1$ Tanto con (G1) y (G2) se obtiene que $\int_V \nabla^2\psi\, d^3r = \oint_{\partial V} \hat{n} \cdot \nabla\psi\, d^2r$

b) Reescribir la ecuación de Poisson. Antes de entrar, recordemos que

$\phi = \phi(\vec{r}) \rightarrow$ Potencial electrostático

$$\psi = \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

$$\nabla^2\phi = -\rho_{tot}/\varepsilon_0$$

$$\nabla\psi = -\frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla\psi) = \nabla^2\psi = -4\pi\, \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$$

Sustituyendo $\nabla^2\phi = -\rho_{tot}/\varepsilon_0$ y $\nabla^2\psi = -4\pi\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$, $\phi=\phi$ y $\psi = \frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}$ en G2, se tiene lo siguiente

$$\int_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\, d^3r = \oint_{\partial V} \left[\phi(\hat{n}\cdot\nabla\psi) - \psi(\hat{n}\cdot\nabla\phi)\right] d^2r$$

Todo como función de $\vec{r}'$

se cancelan

$$\Rightarrow \int_V \left\{ \underbrace{\left[\phi(\vec{r}')\left[-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')\right]\right]}_{\text{Esta integral es igual a } -\phi(\vec{r})4\pi} - \frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\left(\frac{-\rho_{tot}(\vec{r}')}{\varepsilon_0}\right)\right\} d^3r' = \int_{\partial V}\left[\phi(\vec{r}')\,\hat{n}\cdot\nabla\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right) - \frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\,\hat{n}\cdot\nabla\phi(\vec{r}')\right] d^2r'$$

Despejando $\phi(\vec{r})$:

Básicamente $-\vec{E}$ en ∂V

ϕ en ∂V

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_{tot}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\, d^3r' + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V}\left[\frac{\hat{n}\cdot\nabla\phi(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} - \phi(\vec{r}')\,\hat{n}\cdot\nabla\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right)\right] d^2r'$$

Si $V \rightarrow$ Todo el espacio, y ρ es una fuente acotada entonces esta integral es nula y se recupera que $\phi(r\to\infty)=0$

Si el volumen es tal que no hay fuentes ($\rho=0$) entonces $\underbrace{\phi \text{ en } V}_{\text{Solución a } \nabla^2\phi=0}$ se determina por el comportamiento de $\nabla\phi\big|_{\partial V}$ y $\phi\big|_{\partial V}$

Esto no es una solución física, sino una sobre determinación del problema

Antes de enfocarnos en las condiciones de frontera, debemos probar el teorema de descomposición de Helmholtz.

2.2.3.- Teorema de descomposición de Helmholtz

Un campo $\vec{A}$ se determina con $\nabla\cdot\vec{A}$ y $\nabla\wedge\vec{A}$

Sea $\vec{A}\in C^2$ tal que $\|\vec{A}\|$ sea cuadrado integrable, así como $\|\nabla\vec{A}\|$.

entonces $\vec{A}$ se puede reescribir como la suma de una contribución longitudinal y una transversal. Es decir

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_L(\vec{r}) + \vec{A}_T(\vec{r}) \quad \text{t.q.} \quad \begin{array}{ll} \nabla\cdot\vec{A}_L \neq 0 & \text{pero} \quad \nabla\times\vec{A}_L = \vec{0} \\ \nabla\cdot\vec{A}_T = 0 & \text{pero} \quad \nabla\times\vec{A}_L \neq \vec{0} \end{array}$$

donde
$$\vec{A}_L(\vec{r}) = -\nabla a_L(\vec{r}) = \nabla\left[\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\, \frac{\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right]$$
$$\vec{A}_T(\vec{r}') = \nabla\times\vec{a}_T(\vec{r}) = \nabla\left[\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\, \frac{\nabla\wedge\vec{A}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right]$$

__Prueba__: Esto va a consistir en construir las funciones a_L y $\vec{a}_T$ junto con las propiedades

$$\nabla\times(\nabla\wedge\vec{A}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} \quad \ldots\ldots (1)$$
$$\nabla\cdot(\phi\vec{A}) = \phi\nabla\cdot\vec{A} + \nabla\phi\cdot\vec{A} \quad \ldots\ldots (2)$$

Derivada respecto de $\vec{r}$

Primero, reescribimos a $\vec{A}(\vec{r})$ como $\vec{A}(\vec{r}) = \int_V \vec{A}(\vec{r}')\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\, d^3r' = \int_V \vec{A}(\vec{r}')\left[\frac{-1}{4\pi}\nabla_{\vec{r}}^2\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right)\right] d^3r'$

Dado que la integral es en $\vec{r}'$ y no en $\vec{r}$, se cumple que

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\nabla_{\vec{r}}^2\Big(\underbrace{\int_V \frac{\vec{A}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}d^3r'}_{\text{campo } B}\Big)$$

$-\nabla^2\vec{B} = \nabla(\nabla\cdot\vec{B}) - \nabla\times(\nabla\times\vec{B}) \rightarrow$ Ecuación (1)

$$= -\frac{1}{4\pi}\left\{\nabla_{\vec{r}}\left(\nabla_{\vec{r}}\cdot\int_V \frac{\vec{A}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}d^3r'\right) - \nabla_{\vec{r}}\times\left[\nabla_{\vec{r}}\times\left(\int_V \frac{\vec{A}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}d^3r'\right)\right]\right\}$$

Como operan con $\vec{r}$, pueden regresar a la integral y sólo afectan a $1/\|\vec{r}-\vec{r}'\|$ y

$\nabla\times(\vec{A}\phi) = (\nabla\times\vec{A})\phi + \nabla\phi\times\vec{A}$
$= (\nabla\times\vec{A})\phi - \vec{A}\times\nabla\phi$

$$= \frac{-1}{4\pi}\left[\nabla_{\vec{r}}\left(\int_V \vec{A}(\vec{r}')\cdot\nabla_{\vec{r}}\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right)d^3r'\right) + \nabla_{\vec{r}}\times\left(\int_V \vec{A}(\vec{r}')\times\nabla_{\vec{r}}\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right)d^3r'\right)\right]$$

$\nabla_{\vec{r}} = -\nabla_{\vec{r}'}$

$$= \frac{-1}{4\pi}\left[-\nabla_{\vec{r}}\left(\underbrace{\int_V \vec{A}(\vec{r}')\cdot\nabla_{\vec{r}'}\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right)d^3r'}_{\text{Por la Ec. (2)}}\right) - \nabla_{\vec{r}}\times\left(\underbrace{\int_V \vec{A}(\vec{r}')\times\nabla_{\vec{r}'}\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right)d^3r'}\right)\right]$$

$\vec{A}\cdot\nabla\phi = -\phi\nabla\cdot\vec{A} + \nabla\cdot(A\phi)$ $\qquad$ $\vec{A}\times\nabla\phi = (\nabla\times\vec{A})\phi - \nabla\times(\vec{A}\phi)$

Por lo tanto, $\vec{A}$ se reescribe como

Teorema de la divergencia

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi}\left[-\nabla_{\vec{r}}\left(\int_V \frac{-\nabla_{\vec{r}'}\cdot\vec{A}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^2}d^3r'\right) - \nabla_{\vec{r}}\left(\int_V \nabla_{\vec{r}'}\cdot\left(\frac{\vec{A}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right)d^3r'\right) + \right.$$
$$\left. -\nabla_{\vec{r}}\times\left(\int_V \frac{\nabla_{\vec{r}'}\times\vec{A}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}d^3r'\right) - \nabla_{\vec{r}}\times\left(\int_V -\nabla_{\vec{r}'}\times\left(\frac{\vec{A}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right)d^3r'\right)\right]$$

Corolario del Teo de la divergencia Ec. 1.57 Nolting.

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\left[\nabla_{\vec{r}}\left(\int_V \frac{\nabla_{\vec{r}'}\cdot\vec{A}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^2}d^3r' - \cancel{\oint_{\partial V}\frac{\hat{n}'\cdot\vec{A}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}d^2r'}\right) + \right.$$
$$\left. -\nabla_{\vec{r}}\times\left(\int_V \frac{\nabla_{\vec{r}'}\times\vec{A}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}d^3r' - \cancel{\oint_{\partial V}\frac{\hat{n}\times\vec{A}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^2}d^2r'}\right)\right]$$

Incluso si no se fueran a cero, se pueden acomodar las condiciones a la frontera.

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = -\nabla_{\vec{r}}\underbrace{\left(\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla_{\vec{r}'}\cdot\vec{A}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}d^3r'\right)}_{a_L(\vec{r})} + \nabla_{\vec{r}}\times\underbrace{\left(\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla\times\vec{A}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}d^3r'\right)}_{\vec{a}_T} = -\nabla_{\vec{r}}a_L + \nabla\times\vec{a}_T$$
$$= \vec{A}_L + \vec{A}_T$$

Donde se corrobora que $\nabla\times\vec{A}_L = \nabla\times(\nabla a_L) = 0$ y que $\nabla\cdot\vec{A}_R = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{a}_T) = 0$

- Prueba de la Ec. 1.57 del Nolting $\int_V \nabla\times\vec{B}\,d^3r = \oint_{\partial V} d\vec{a}\times\vec{B}$

Sea $\vec{A} = \vec{b}\times\vec{B}$; con $\vec{b}$ un vector constante y $\vec{B}$ un campo vectorial

$$\Rightarrow \nabla\cdot(\vec{b}\times\vec{B}) = \cancel{\nabla\times\vec{b}}^{\,0}\cdot\vec{B} + \vec{b}\cdot(\nabla\times\vec{B})$$
$\vec{b}$ = cte

relación cíclica

Empleando el teorema de la divergencia con A: $\int_V \nabla\cdot(\vec{b}\times\vec{B})\,d^3r = -\oint_{\partial V}(\vec{b}\times\vec{B})\cdot d\vec{a} = -\oint_{\partial V}(\vec{B}\times d\vec{a})\cdot\vec{b}$

Pero con el resultado anterior: $\int_V \nabla\cdot(\vec{b}\times\vec{B})\,d^3r = \vec{b}\cdot\int_V \nabla\times\vec{B}\,d^3r$

De las dos últimas expresiones $\vec{b}\cdot\int_V \nabla\times\vec{B}\,d^3r = -\vec{b}\oint_{\partial V}\vec{B}\times d\vec{a} \Rightarrow \int_V \nabla\times\vec{B}\,d^3r = \oint d\vec{a}\times\vec{B}$ //

2.2.4.- Teorema de unicidad

↳ Descomposición de Helmholtz

Si se conocen $\nabla\cdot\vec{A}$ y $\nabla\times\vec{A}$, el campo vectorial $\vec{A}$ esta determinado en su totalidad

Supongamos $\vec{A}_1$ y $\vec{A}_2$ tales que $\nabla\cdot\vec{A}_1=\nabla\cdot\vec{A}_2$ y $\nabla\times\vec{A}_1=\nabla\times\vec{A}_2$ y definimos

$$\vec{D}\equiv\vec{A}_2-\vec{A}_1 \Rightarrow \nabla\cdot\vec{D}=0 \quad y \quad \nabla\times\vec{D}=\vec{0}$$

Como $\nabla\times\vec{D}=\vec{0}$ entonces es de la forma $\vec{D}=-\nabla\psi$; ψ una función escalar

Como $\nabla\cdot\vec{D}=0$, entonces $\nabla\cdot\vec{D}=-\nabla\cdot(\nabla\psi)=-\nabla^2\psi=0$

Empleando la 1ra identidad de Green con $\phi=\psi$ y $V\equiv$ Esfera de $R\to\infty$

$$\int_V(\phi\nabla^2\psi+(\nabla\psi\cdot\nabla\phi))d^3r=\oint_{\partial V}(\phi\hat{n}\cdot\nabla\psi)d^2r \longrightarrow \int_{T.E}(\nabla\psi)^2d^3r=\oint_{r\to\infty}\psi\hat{n}\cdot\nabla\psi\, d^2r=0$$

Suponiendo que ψ es cuadrado integrable

$$\Rightarrow \int_{T.E.}(\nabla\psi)^2d^3r=0 \Rightarrow \nabla\psi=\vec{D}=\vec{A}_2-\vec{A}_1=\vec{0}$$

$$\therefore \underline{\vec{A}_1=\vec{A}_2}$$