1.3.- Potencial escalar

Anteriormente se comentó que de forma experimental, el campo eléctrico $\vec{E}$ cumple con lo siguiente.

$$\underbrace{\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r})}\ = \rho_{tot}/\varepsilon_0 \qquad \underbrace{\nabla\times\vec{E}(\vec{r})} = -\partial\vec{B}/\partial t$$

Por el teorema de descomposición de Helmholtz, esto es suficiente para determinar el campo eléctrico.

En el caso estático $\partial\vec{B}/\partial t = \vec{0}$ y por tanto

$$\underbrace{\nabla\times\vec{E} = \vec{0}}$$

Dado que el rotacional es un operador lineal, se sigue valiendo el principio de superposición para $\vec{E}$ y por lo tanto para el potencial escalar

Matemáticamente, esto es equivalente a lo siguiente:

$$\underbrace{\nabla\times\vec{E}=\vec{0}} \Rightarrow \underbrace{\vec{E} = -\nabla\phi} \Rightarrow \underbrace{\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0} \Rightarrow \nabla\times\vec{E}=\vec{0}$$

a) No hay componentes tangenciales del campo

b) Existe una función escalar ϕ asociada al campo

$$\boxed{\phi = \phi(\vec{r}) = \text{Potencial escalar}}$$

c) La integral de línea en un circuito cerrado es nula

El campo $\vec{E}$ crea fuerza conservativa

Si $\vec{E}$ no cumple estas expresiones, entonces no puede ser un campo electrostático.

El potencial escalar se define por la propiedad d), es decir:

$$\phi(\vec{r}) = -\int_{\mathcal{O}}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}')\cdot d\vec{\ell}' \Rightarrow \Delta\phi = \phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}')\cdot d\vec{\ell}' = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (-\nabla\phi)\cdot d\vec{\ell}'$$

Punto donde finaliza la trayectoria

Parametrización de la trayectoria

Origen de la trayectoria

Las diferencias de $\phi(\vec{r})$ sí tienen sentido físico.

No está univocamente definido pues depende de $\mathcal{O}$.

Unidades de

$$\frac{N}{q}\cdot m = \frac{J}{Q} = V\,[\text{Volts}]$$

Energía por unidad de carga

- $\underbrace{\vec{E}(\vec{r})} = -\underbrace{\nabla\phi(\vec{r})}$

Esto es una medición de fuerzas por unidad de carga

Es un potencial auxiliar que simplifica el tratamiento matemático

¿Tiene sentido físico?

¿Cómo se reescribe la ley de Gauss en términos de $\phi(\vec{r})$?

$$\nabla\cdot\vec{E} = \rho_{tot}/\varepsilon_0 \Rightarrow \nabla\cdot(-\nabla\phi) = \rho_{tot}/\varepsilon_0 \rightarrow \boxed{\nabla^2\phi = -\rho_{tot}/\varepsilon_0}$$

$\rho_{tot} \neq 0$ Ecuación de Poisson

$\rho_{tot} = 0$ Ecuación de Laplace

Entonces, la electrostática puede codificarse de la siguiente manera

- Campo $\vec{E}(\vec{r})$ · Potencial $\phi(\vec{r})$

- $\nabla \cdot \vec{E} = \rho_{tot}/\varepsilon_0$
- $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$

$$\left\{ \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq'\,(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3} \right.$$

- $\underbrace{\nabla^2 \phi}_{} = \rho_{tot}/\varepsilon_0$. ¿ϕ?

↳ PDE lineal de segundo orden.

Para encontrar la solución de la ecuación de Poisson, notemos lo siguiente

En la sección anterior se probó que

i) $\nabla_{\vec{r}}\left(\frac{-1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}\right) = \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^2}$

ii) $\nabla_{\vec{r}} \cdot \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^2} = 4\pi\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,')$

Dado que $\nabla^2 f = \nabla\cdot(\nabla f)$ entonces

iii) $\nabla^2_{\vec{r}}\left(\frac{-1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}\right) = 4\pi\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,')$

Por el momento, propongamos una solución a la ecuación de Poisson y corroborémosla con iii)

Propuesta:

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_{tot}(\vec{r}\,')\,d^3r'}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}}$$

→ Se parece a la del campo eléctrico pero sin carácter vectorial

Calculando el laplaciano:

$$\nabla^2_{\vec{r}}\,\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\nabla^2_{\vec{r}}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')\,d^3r'}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}$$

→ La derivada es respecto a $\vec{r}$ y la integral a $\vec{r}\,'$. Por lo tanto puede introducirse el operador $\nabla^2_{\vec{r}}$ a la integral

Con condiciones de frontera $\phi(r\to 0)=0$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\nabla^2_{\vec{r}}\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}\right)$$

⟶ Se sustituye con el resultado en iii)

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\vec{r}\,'\,\rho(\vec{r}\,')\left[-4\pi\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,')\right]$$

⟶ Propiedad de la delta

$$= \frac{-4\pi\,\rho(\vec{r})}{4\pi\varepsilon_0} = -\rho(\vec{r})/\varepsilon_0 \;\blacksquare$$

Ejemplos

· Potencial de una carga puntual centrada en el origen

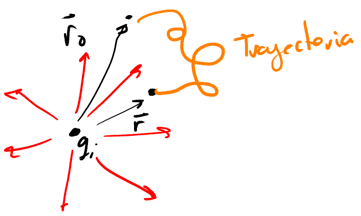
En este caso

$$\vec{E}_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{e}_r}{r^2} \Rightarrow \phi_i(\vec{r}) = -\int_{r_0}^{r} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{e}_r\cdot d\vec{l}\,'}{(r')^2}$$

→ Escogemos una trayectoria arbitraria

$d\vec{l}\,' = dr'\hat{e}_r + r'd\theta\,\hat{e}_\theta + r'\sin\theta'\,d\varphi'\,\hat{e}_\varphi$

$\Rightarrow d\vec{l}\,'\cdot\hat{e}_r = dr'$



$$= -\int_{r_0}^{r} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr'}{(r')^2}$$

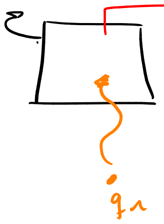
$$= -\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{r} - \left(\frac{-1}{r_0}\right)\right]$$

Si $r_0 \to \infty$ y $\phi \to 0$ $\Rightarrow \phi_i(r) = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r}$

→ Energía y trabajo en electrostática

Se vió que el potencial ϕ es la energía por unidad de carga, dado un campo eléctrico. Veamos qué tanta energía se necesita para construir una colección de N cargas estáticas

1) Espacio

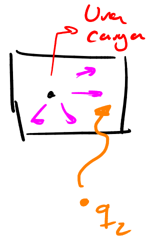


$\vec{E}=\vec{0} \Rightarrow \phi_0 = 0$

Puedo traer una carga desde infinito y como no se opone a ningún campo

$$W_1 = q_1 \phi_0 = 0$$

2) Una carga $\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\widehat{\vec r-\vec r'})}{\|\vec r-\vec r'\|^2}$



Dado que ya hay un campo eléctrico

$$\phi_1(\vec r_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{\|\vec r_2-\vec r_1\|} \Rightarrow W_2 = q_2\phi_1(\vec r_2) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{\|\vec r_2-\vec r_1\|}\right)$$

Fuente

Carga traída de infinito

Si se sigue este procedimiento para una tercer y cuarta carga

$$W_3 = q_3\left(\phi_2(\vec r_3)+\phi_1(\vec r_3)\right) = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_2}{\|\vec r_2-\vec r_3\|}+\frac{q_1}{\|\vec r_1-\vec r_3\|}\right)$$

$$\Rightarrow W_4 = q_4\sum_{i=1}^{4-1}\phi_i(\vec r_4) = \frac{q_4}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_3}{\|\vec r_4-\vec r_3\|}+\frac{q_2}{\|\vec r_4-\vec r_2\|}+\frac{q_1}{\|\vec r_4-\vec r_1\|}\right)$$

$$\Rightarrow W_j = q_j\sum_{i=1}^{j-1}\phi_i(\vec r_j)$$

Para calcular la energía para traer toda la configuración debemos sumar W_j

$$W = \sum_{j=1}^{N} W_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{q_j q_i}{\|\vec r_i-\vec r_j\|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i>j}^{N}\frac{q_j q_i}{\|\vec r_i-\vec r_j\|}$$

Así contamos las interacciones entre las cargas

La expresión anterior es equivalente a la siguiente

Contamos dos veces la interacción y sólo removemos la autointeracción

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\frac{q_i q_j}{\|\vec r-\vec r'\|}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} q_j\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\|\vec r_j-\vec r_i\|}\right)$$

(A)

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} q_j\,\phi_{tot}(\vec r_j)} \ldots$$

Energía almacenada en la configuración de cargas q_i

El resultado anterior se generaliza como

ley de Gauss

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec r')\phi(\vec r')\,d^3r' = \frac{\epsilon_0}{2}\int_V\left(\nabla_{\vec r'}\cdot\vec E(\vec r')\right)\phi(\vec r')\,d^3r'$$

Recordemos que

$$\nabla\cdot(f\vec A) = \nabla f\cdot\vec A + f\,\nabla\cdot\vec A$$

Realizando una integración por partes y empleando el teorema de la divergencia

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\left[-\int_V \vec E(\vec r')\cdot\nabla_{\vec r'}\phi(\vec r')\,d^3r' + \int_V \nabla_{\vec r'}\cdot\left(\vec E(\vec r')\phi(\vec r')\right)d^3r'\right]$$

(B)

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{\epsilon_0}{2}\left[\int_V \vec E(\vec r')\cdot\vec E(\vec r')\,d^3r' + \oint_{\partial V}\phi(\vec r')\vec E(\vec r')\cdot d\vec a'\right]}$$

Pero ¿qué volumen V se emplea?

Basta con escoger V tal que todas las cargas estén dentro de dicho volumen.

En el caso de configuraciones de cargas finitas:

$\|\vec{E}\| \sim r^{-2}$ y $\phi \sim r^{-1}$ $\Rightarrow$ $\phi \vec{E} \sim \hat{e}_r / r^3$ mientras que dV crece como r^2

Entonces si $V =$ Todo el espacio

C

$$\boxed{W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\substack{\text{Todo} \\ \text{el espacio}}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot \vec{E}(\vec{r}') \, d^3 r'}$$

Notemos que:

- En A $W<0$ ó $W \geq 0$ según los valores de q_i
- En C $W>0$ siempre

Pero una ecuación se derivó de la otra.

A Considera la energía que aportan las cargas

B La de las cargas y sus campos en una región finita

C Considera la energía que aportan los campos en todo el espacio incluida la energía para crear las cargas.

→ Es la expresión más completa de las tres.