# 4.3 Los campos internos y esparcidos[1]

### 4.3.3 Coeficientes de Esparcimiento

Nos gustaría saber como las cantidades observables varían con el tamaño, las propiedades ópticas de la esfera y la naturaleza del medio que la rodea. Para esto el primer paso es obtener expresiones explícitas de los coeficientes de esparcimiento $a_n$ y $b_n$. Para un "n" dado hay cuatro coeficientes desconocidos $a_n$, $b_n$, $c_n$ y $d_n$, por lo tanto necesitamos cuatro ecuaciones independientes, las cuales se obtienen de las condiciones de frontera en la interfase de la esfera

$$(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s - \mathbf{E}_1) \times \hat{\mathbf{e}}_r = (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s - \mathbf{H}_1) \times \hat{\mathbf{e}}_r = 0 \tag{1}$$

y sus componentes cuando el radio de la esfera es r=a són :

$$\bullet\, E_{i\theta} + E_{s\theta} = E_{1\theta} \mid \bullet H_{i\theta} + H_{s\theta} = H_{1\theta} \tag{2}$$

$$\bullet E_{i\phi} + E_{s\phi} = E_{1\phi} \mid \bullet H_{i\phi} + H_{s\phi} = H_{1\phi}$$

Para la deducción de los coeficientes de esparcimiento hacemos uso de las condiciones de ortogonalidad de las funciones seno y coseno a demás de las expresiones para el campo Eléctrico y Magnético incidente/esparcido/interno los cuales se expresan con ayuda de las funciones generadoras :

$$\Psi_{e1n} = cos\phi P_n^1(cos\theta) z_n(kr) \bullet \Psi_{o1n} = sen\phi P_n^1(cos\theta) z_n(kr)$$

las cuales cumplen las relaciones

$$\mathbf{M}_{e1n} = \nabla \times (\mathbf{r}\Psi_{e1n}); \mathbf{M}_{o1n} = \nabla \times (\mathbf{r}\Psi_{o1n})$$

$$\mathbf{N}_{e1n} = \frac{\nabla \times \mathbf{M}_{e1n}}{k}; \mathbf{N}_{o1n} = \frac{\nabla \times \mathbf{M}_{o1n}}{k}$$

Con estas expresiones equivalentes a la ecuación (6) escribimos los campos :
Campo Incidente

$$\mathbf{H}_i = \frac{-k}{\omega\mu} \Sigma_{n=1}^{\infty} E_n(\mathbf{M}_{e1n}^1 + i\mathbf{N}_{o1n}^1) \tag{3}$$

$$\mathbf{E}_i = \Sigma_{n=1}^{\infty} E_n(\mathbf{M}_{o1n}^1 - i\mathbf{N}_{e1n}^1)$$

Campo Esparcido

$$\mathbf{H}_s = \frac{k}{\omega\mu} \Sigma_{n=1}^{\infty} E_n(ib_n\mathbf{N}_{o1n}^3 + a_n\mathbf{M}_{e1n}^3) \tag{4}$$

$$\mathbf{E}_s = \Sigma_{n=1}^{\infty} E_n(ia_n\mathbf{N}_{e1n}^3 - b_n\mathbf{M}_{o1n}^3)$$

Campo Interno

$$\mathbf{H}_1 = \frac{-k_1}{\omega\mu_1} \Sigma_{n=1}^{\infty} E_n(d_n\mathbf{M}_{e1n}^1 + ic_n\mathbf{N}_{o1n}^1) \tag{5}$$

$$\mathbf{E}_1 = \Sigma_{n=1}^{\infty} E_n(c_n\mathbf{M}_{o1n}^1 - id_n\mathbf{N}_{e1n}^1)$$

donde : $E_n = i^n E_0 \frac{2n+1}{n(n+1)}$ y las expresiones para los campos **M** y **N** son :

$$\mathbf{M}_{o1n} = cos\phi \pi_n z_n(\rho)\hat{\mathbf{e}}_\theta - sen\phi \tau_n z_n(\rho)\hat{\mathbf{e}}_\phi \tag{6}$$

$$\mathbf{M}_{e1n} = -sen\phi \pi_n z_n(\rho)\hat{\mathbf{e}}_\theta - cos\phi \tau_n z_n(\rho)\hat{\mathbf{e}}_\phi$$

$$\mathbf{N}_{o1n} = sen\phi n(n+1) sen\theta \pi_n \frac{z_n}{\rho}\hat{\mathbf{e}}_r + sen\phi \tau_n \frac{[\rho z_n(\rho)]'}{\rho}\hat{\mathbf{e}}_\theta + cos\phi \pi_n \frac{[\rho z_n(\rho)]'}{\rho}\hat{\mathbf{e}}_\phi$$

$$\mathbf{N}_{e1n} = cos\phi n(n+1)sen\theta\pi_n \frac{z_n}{\rho}\hat{\mathbf{e}}_r + cos\phi\tau_n \frac{[\rho z_n(\rho)]'}{\rho}\hat{\mathbf{e}}_\theta - sen\phi\pi_n \frac{[\rho z_n(\rho)]'}{\rho}\hat{\mathbf{e}}_\phi$$

Los índices en las funciones $\mathbf{M}^i$ y $\mathbf{N}^i$ denotan la clase de función esférica de Bessel.
$z_n$ : (i=1) $j_n(k,r)$ ; (i=3) $h_n^1(kr)$ ; $\pi_n = \frac{P_n}{sen\theta}$ ; $\tau_n = \frac{dP_n}{d\theta}$.
De tal forma que considerando x=ka=$\frac{2\pi Na}{\lambda}$, $m = \frac{k1}{k} = \frac{N_1}{N}$ la ecuación (2) nos queda :
•$E_{i\theta} + E_{s\theta} = E_{1\theta}$

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} E_n(cos\phi\pi_n j_n(x) - icos\phi\tau_n \frac{[xj_n(x)]'}{x}) + \Sigma_{n=1}^{\infty} E_n(ia_n cos\phi\tau_n \frac{[xh_n^1(x)]'}{x} - b_n cos\phi\pi_n h_n^1(x)) = \quad (7)$$

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} E_n(c_n cos\phi\pi_n j_n(mx) - id_n cos\phi\tau_n \frac{[mxj_n(mx)]'}{mx})$$

•$H_{i\theta} + H_{s\theta} = H_{1\theta}$

$$\frac{k}{\omega\mu}\Sigma_{n=1}^{\infty} E_n(sen\phi\pi_n j_n(x) - isen\phi\tau_n \frac{[xj_n(x)]'}{x}) + \frac{k}{\omega\mu}\Sigma_{n=1}^{\infty} E_n(ib_n sen\phi\tau_n \frac{[xh_n^1(x)]'}{x} - a_n sen\phi\pi_n h_n^1(x)) = \quad (8)$$

$$\frac{k_1}{\omega\mu_1}\Sigma_{n=1}^{\infty} E_n(d_n sen\phi\pi_n j_n(mx) - ic_n sen\phi\tau_n \frac{[mxj_n(mx)]'}{mx})$$

De la ecuación (7) pasamos restando el campo interno :

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} E_n[cos\phi\pi_n j_n(x) - icos\phi\tau_n \frac{[xj_n(x)]'}{x} + ia_n cos\phi\tau_n \frac{[xh_n^1(x)]'}{x} - b_n cos\phi\pi_n h_n^1(x) - c_n cos\phi\pi_n j_n(mx) \quad (9)$$

$$+id_n cos\phi\tau_n \frac{[mxj_n(mx)]'}{mx}] = 0$$

Agrupando

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} E_n[\pi_n[cos\phi j_n(x) - b_n cos\phi h_n^1(x) - c_n cos\phi j_n(mx)] + \tau_n[-icos\phi \frac{[xj_n(x)]'}{x} + ia_n cos\phi \frac{[xh_n^1(x)]'}{x} + id_n cos\phi \frac{[mxj_n(mx)]'}{mx}]] = 0 \quad (10)$$

Cómo $E_n \neq 0$

$$\pi_n[cos\phi j_n(x) - b_n cos\phi h_n^1(x) - c_n cos\phi j_n(mx)] + \tau_n[-icos\phi \frac{[xj_n(x)]'}{x} + ia_n cos\phi \frac{[xh_n^1(x)]'}{x} + id_n cos\phi \frac{[mxj_n(mx)]'}{mx}] = 0 \quad (11)$$

Las funciones dependientes del ángulo :

$$\pi_n = \frac{2n-1}{n-1}\mu\pi_{n-1} - \frac{n}{n-1}\pi_{n-2}; \tau_n = n\mu\pi_n - (n+1)\pi_{n-1}$$

$\pi_0 = 0$ y $\pi_1 = 1$
Entonces para $\pi$ y $\tau$ tenemos respectivamente :

$$[cos\phi j_n(x) - b_n cos\phi h_n^1(x) - c_n cos\phi j_n(mx)] = 0 \quad (12)$$

$$[-icos\phi \frac{[xj_n(x)]'}{x} + ia_n cos\phi \frac{[xh_n^1(x)]'}{x} + id_n cos\phi \frac{[mxj_n(mx)]'}{mx}] = 0 \quad (13)$$

Multiplicando por $cos\phi'$ e integrando de 0 a $2\pi$ obtenemos las primeras dos ecuaciones lineales de los vectores armónicos que contienen a los coeficientes de expansión

$$\odot\ j_n(mx)c_n + h_n^1(x)b_n = j_n(x) \quad (14)$$

$$\odot\ [mxj_n(mx)]'d_n + m[xh^1_n(x)]'a_n + = m[xj_n(x)]' \tag{15}$$

De forma similar para la ecuación (8)

$$\pi_n[\frac{k}{\omega\mu}(sen\phi j_n(x) - a_n sen\phi h^1_n(x)) - \frac{k_1}{\omega\mu_1}d_n sen\phi j_n(mx)] + \tau_n[\frac{k}{\omega\mu}(-isen\phi\frac{[xj_n(x)]'}{x} + ib_n sen\phi\frac{[xh^1_n(x)]'}{x}) + \frac{k_1}{\omega\mu_1}ic_n sen\phi\frac{[mxj_n(mx)]'}{mx}] = 0 \tag{16}$$

entonces tenemos :

$$[\frac{k}{\omega\mu}(sen\phi j_n(x) - a_n sen\phi h^1_n(x)) - \frac{k_1}{\omega\mu_1}d_n sen\phi j_n(mx)] = 0 \tag{17}$$

$$[\frac{k}{\omega\mu}(-isen\phi\frac{[xj_n(x)]'}{x} + ib_n sen\phi\frac{[xh^1_n(x)]'}{x}) + \frac{k_1}{\omega\mu_1}ic_n sen\phi\frac{[mxj_n(mx)]'}{mx}] = 0 \tag{18}$$

Multiplicando por sen$\phi'$ e integrando de 0 a $2\pi$ obtenemos las segundas ecuaciones lineales de los vectores armónicos que tienen a los coeficientes de expansión

$$\odot\ \mu m j_n(mx)d_n + \mu_1 h^1_n(x)a_n = \mu_1 j_n(x) \tag{19}$$

$$\odot\ \mu[mxj_n(mx)]'c_n + \mu_1[xh^1_n(x)]'b_n = \mu_1[xj_n(x)]' \tag{20}$$

Llegamos a las expresiones (14,15,19,20) que contienen a los coeficientes de expansión utilizando únicamente las condiciones de frontera (2) en la componente $\theta$ para **E** y **H**, las mismas ecuaciones resultan si analizamos la componente $\phi$, es decir, la información de las cuatro ecuaciones son redundantes, sólo dos son linealmente independientes.

$$j_n(mx)c_n + h^1_n(x)b_n = j_n(x)$$

$$\mu[mxj_n(mx)]'c_n + \mu_1[xh^1_n(x)]'b_n = \mu_1[xj_n(x)]'$$

$$\mu m j_n(mx)d_n + \mu_1 h^1_n(x)a_n = \mu_1 j_n(x)$$

$$[mxj_n(mx)]'d_n + m[xh^1_n(x)]'a_n + = m[xj_n(x)]'$$

Las cuatro ecuaciones lineales se pueden resolver para los coeficientes tanto de los campos dentro de la partícula

$$c_n = \frac{\mu_1 j_n(x)[xh^1_n(x)]' - \mu_1 h^1_n(x)[xj_n(x)]'}{\mu_1 j_n(mx)[xh^1_n(x)]' - \mu h^1_n(x)[mxj_n(mx)]'} \tag{21}$$

$$d_n = \frac{\mu_1 m j_n(x)[xh^1_n(x)]' - \mu_1 m h^1_n(x)[xj_n(x)]'}{\mu m^2 j_n(mx)[xh^1_n(x)]' - \mu_1 h^1_n(x)[mxj_n(mx)]'} \tag{22}$$

y los campos esparcidos

$$a_n = \frac{\mu m^2 j_n(mx)[xj_n(x)]' - \mu_1 j_n(x)[mxj_n(mx)]'}{\mu m^2 j_n(mx)[xh^1_n(x)]' - \mu_1 h^1_n(x)[mxj_n(mx)]'} \tag{23}$$

$$b_n = \frac{\mu_1 j_n(mx)[xj_n(x)]' - \mu j_n(x)[mxj_n(mx)]'}{\mu_1 j_n(mx)[xh^1_n(x)]' - \mu h^1_n(x)[mxj_n(mx)]'} \tag{24}$$

Para una "n" la frecuencia es tal que el denominador de $a_n$ o $b_n$ es muy pequeño , el modo normal correspondiente dominara en el campo esparcido. Las condiciones para que $a_n$ y $b_n$ sean modos dominantes se cumplen respectivamente cuando :

$$\frac{[xh^1_n(x)]'}{h^1_n(x)} \simeq \frac{\mu_1[mxj_n(mx)]'}{\mu m^2 j_n(mx)} \tag{25}$$

$$\frac{[xh^1_n(x)]'}{h^1_n(x)} \simeq \frac{\mu[mxj_n(mx)]'}{\mu_1 j_n(mx)} \tag{26}$$

En general el campo esparcido es una superposición de modos normales

Los coeficientes de esparcimiento ecuaciones (23 y 24) pueden escribirse de una forma más simple considerando las funciones de Riccati-Bessel

$$\Psi_n(\rho) = \rho j_n(\rho), \xi(\rho) = \rho h_n^1(\rho) \tag{27}$$

$$\Psi_n(mx) = mxj_n(mx), \xi(mx) = mxh_n^1(mx) \tag{28}$$

$$\Psi_n(x) = xj_n(x), \xi(x) = xh_n^1(x) \tag{29}$$

Considerando que $\mu$=$\mu_1$, tenemos que el coeficiente $a_n$

$$a_n = \frac{m\frac{\Psi_n(mx)}{x}\Psi_n'(x) - \frac{\Psi_n(x)}{x}\Psi_n'(mx)}{m\frac{\Psi_n(mx)}{x}\xi_n'(x) - \frac{\xi_n(x)}{x}\Psi_n'(mx)} \tag{30}$$

de forma análoga para $b_n$ ; lo que resulta en :

$$a_n = \frac{m\Psi_n(mx)\Psi_n'(x) - \Psi_n(x)\Psi_n'(mx)}{m\Psi_n(mx)\xi_n'(x) - \xi_n(x)\Psi_n'(mx)} \tag{31}$$

$$b_n = \frac{\Psi_n(mx)\Psi_n'(x) - m\Psi_n(x)\Psi_n'(mx)}{\Psi_n(mx)\xi_n'(x) - m\xi_n(x)\Psi_n'(mx)} \tag{32}$$

Si m tiende a la unidad los coeficientes de esparcimiento desaparecen, es decir, la partícula desaparece por lo tanto también el campo esparcido

Las frecuencias para las cuales las ecuaciones 25 y 26 se cumplen de forma exacta son llamadas frecuencias naturales de la esfera, su valor es complejo, dichos modos son llamados modos virtuales.Para esferas iónicas estos modos recaen naturalmente en tres clases : modos de baja frecuencias, modos de alta frecuencia y modos de superficie.

## Références

[1] Absorption and Scattering of Light by Small Partcicles, Craig F. Bohren, Donald R.Huffman, edit. Wiley-vch, 1998