notas

YAMIL

22 de mayo de 2019

4.4 Secciones transversales y elementos de matriz.

Aunque en las secciones anteriores hemos considerado esparcimiento únicamente ondas electromagnéticas incidentes polarizadas en la dirección x, el campo de esparcimiento para luz con una polarización lineal arbitraria y por lo tanto también con un estado de polarización cualquiera [1], se obtiene de la simetría de la partícula.

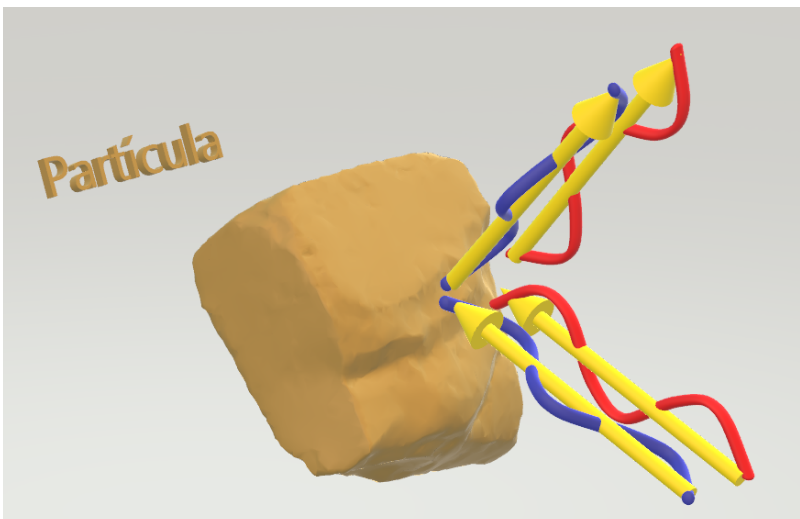

Figura 1: Partícula pequeña sin simetría.

Por ejemplo relacionamos los campos eléctricos de esparcimiento con igual amplitud pero una polarizada en dirección x y otra en y como:[2]

$$\vec{E}_{esparcimiento}(\Phi, \rightarrow) = \vec{E}_{esparcimiento}(\Phi + \frac{\pi}{2}, \uparrow) \tag{1}$$

Por lo cual como en la sección anterior obtuvimos los coeficientes del campo de esparcimiento a_n y b_n ahora es posible determinar las secciones transversales y la matriz de esparcimiento.

4.4.1 Secciones Transversales.

Recordando las expresiones de la sección 3.4 para el vector de Poynting:

$$\vec{S} = \frac{1}{2}Re\left(\vec{E} \times \vec{H}^*\right) = \frac{1}{2}Re\left((E_{inci} \vec{+} E_{esp}) \times (H_{inci} \vec{+} H_{esp})^*\right) \tag{2}$$

[1] A partir de la polarización lineal se puede construir la polarización circular y elíptica.

[2] Las flechas indican polarización en x y y respectivamente

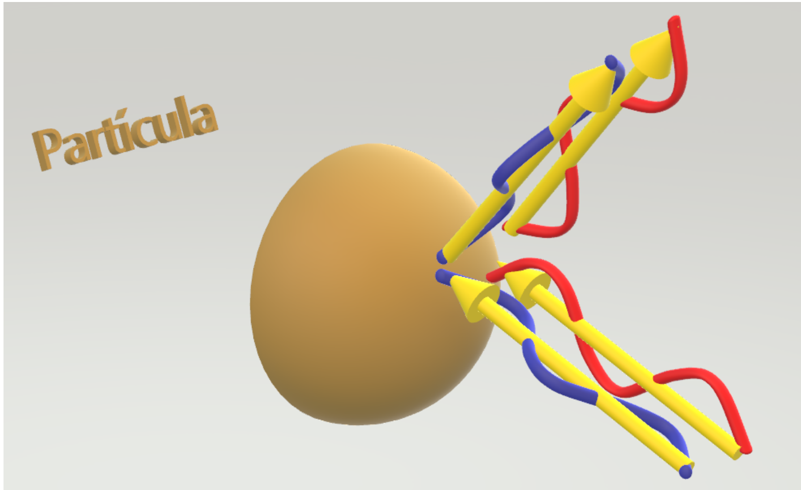

Figura 2: Partícula pequeña con simetría esférica.

$$\vec{S} = \frac{1}{2} Re \left(\vec{E_{inci}} \times \vec{H^*_{inci}} + \vec{E_{esp}} \times \vec{H^*_{esp}} + \vec{E_{inci}} \times \vec{H^*_{esp}} + \vec{E_{esp}} \times \vec{H^*_{inci}} \right) \tag{3}$$

Asi podemos relacionar cada termino de la siguiente manera: $\vec{S} = \vec{S_{inc}} + \vec{S_{esp}} + \vec{S_{extinc}}$ donde los dos últimos términos son los que pertenecen al campo de extinción tal que:

$$\vec{S_{ext}} = \frac{1}{2} Re \left(\vec{E_{inci}} \times \vec{H^*_{esp}} + \vec{E_{esp}} \times \vec{H^*_{inci}} \right) \tag{4}$$

Nuestro objetivo es calcular la energía electromagnética (W_a) que cruza una esfera imaginaria centrada en nuestra partícula. con ello es necesario calcular:

$$W_a = -\int_{esfera} \vec{S} \cdot \vec{da} = -\int_{esfera} \vec{S_i} + \vec{S_{esp}} + \vec{S_{ext}} \cdot \vec{da} = W_i + W_{ext} - W_{esp} \tag{5}$$

Suponiendo que el medio en el que se encuentra la partícula es no absorbente W_i será cero. Así mismo W_a no dependerá del radio de nuestra esfera imaginaria, por lo cual podemos hacer la aproximación de campo lejano. A continuación se derivará una expresión para las secciones transversales de una partícula esférica

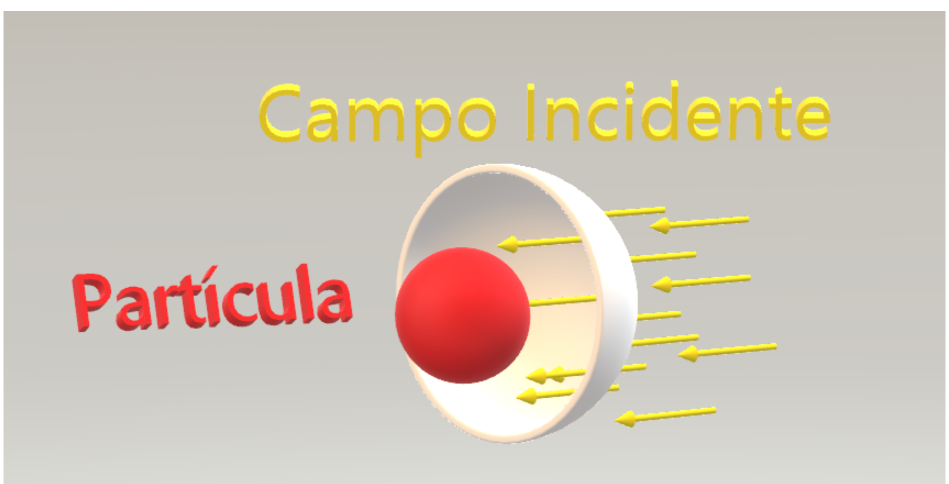

Figura 3: Esfera imaginaria para el cálculo de la energía electromagnética y el campo incidente.

de manera exacta. Veremos algunas propiedades de las funciones esféricas de Bessel y exploraremos mas el

teorema óptico.
Cabe mencionar que como se integrará sobre una esfera imaginaria el termino $\vec{da}$ estará en dirección $\vec{e_r}$ por lo cual tenemos que:

$$(\vec{E_{inc}} \times \vec{H_{esp}}) \cdot \vec{da} = \begin{vmatrix} da\vec{e_r} & 0 & 0 \\ E_{inc,r} & E_{inc,\theta} & E_{inc,\phi} \\ H_{esp,r} & H_{esp,\theta} & H_{esp,\phi} \end{vmatrix} = E_{inc,\theta}H_{esp,\phi} - E_{inc,\phi}H_{esp,\theta}$$

Recordemos que:

$$\vec{E_{inc}} = \sum_{i=1}^{\infty} E_0 \frac{2n+1}{n(n+1)} i^n \left[\vec{M_{o1n}^{(1)}} - i\vec{N_{e1n}^{(1)}} \right]$$

$$\vec{E_{inc}} = \sum_{i=1}^{\infty} E_n \left(E_r\vec{e_r} + \left[\cos\Phi\pi_n j_n(\rho) - i(\cos\Phi\tau_n \frac{(j_n(\rho)\rho)^{'}}{\rho}) \right] \vec{e_\theta} + \left[-\sin\Phi\tau_n j_n(\rho) + i(\sin\Phi\pi_n \frac{(j_n(\rho)\rho)^{'}}{\rho}) \right] \vec{e_\phi} \right)$$

$$\vec{H_{inc}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-E_n k}{\omega\mu} \left(H_r\vec{e_r} + \left[-\sin\Phi\pi_n j_n(\rho) + i(\sin\Phi\tau_n \frac{(j_n(\rho)\rho)^{'}}{\rho}) \right] \vec{e_\theta} + \left[-\cos\Phi\pi_n j_n(\rho) + i(\cos\Phi\tau_n \frac{(j_n(\rho)\rho)^{'}}{\rho}) \right] \vec{e_\phi} \right)$$

$$\vec{E_{esp}} = \sum_{i=1}^{\infty} E_n \left(E_r\vec{e_r} + \left[ia_n\cos\phi\tau_n \frac{(h_n(\rho)\rho)^{'}}{\rho} - (b_n\cos\phi\tau_n h_n(\rho)) \right] \vec{e_\theta} - \left[ia_n\sin\phi\pi_n \frac{(h_n(\rho)\rho)^{'}}{\rho} + (b_n\sin\phi\tau_n h_n(\rho)) \right] \vec{e_\phi} \right)$$

$$\vec{H_{esp}} = \sum_{i=1}^{\infty} H_n \left(H_r\vec{e_r} + \left[ib_n\sin\phi\tau_n \frac{(h_n(\rho)\rho)^{'}}{\rho} - (a_n\sin\phi\pi_n h_n(\rho)) \right] \vec{e_\theta} + \left[ib_n\cos\phi\pi_n \frac{(h_n(\rho)\rho)^{'}}{\rho} - (a_n\cos\phi\tau_n h_n(\rho)) \right] \vec{e_\phi}$$

Es importante tener en cuenta el siguiente cambio de variable.

$$\psi_n(\rho) = \rho j_n(\rho) \quad , \quad \xi_n(\rho) = \rho h_n(\rho) \tag{6}$$

Ahora podemos escribir las componentes del campo incidente tenemos:

$$E_{i,\theta} = \frac{\cos\phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n(\psi_n\pi_n - i\psi_n^{'}\tau_n)$$

$$E_{i,\phi} = \frac{\sin\phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n(i\psi_n^{'}\pi_n - i\psi_n\tau_n)$$

$$H_{i,\theta} = \frac{k}{\omega\mu} \tan\phi E_{i,\theta} \quad , \quad H_{i,\phi} = \frac{-k}{\omega\mu} \cot\phi E_{i,\phi}$$

Para las componentes del campo esparcido tenemos:

$$E_{s,\theta} = \frac{\cos\phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n(ia_n\xi_n^{'}\tau_n - b_n\xi_n\pi_n)$$

$$E_{s,\phi} = \frac{\sin\phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n(b_n\xi_n\tau_n - ia_n\xi_n^{'}\pi_n)$$

$$H_{s,\theta} = \frac{k}{\omega\mu} \frac{\sin\phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n(ib_n\xi_n^{'}\tau_n - a_n\xi_n\pi_n)$$

$$H_{s,\phi} = \frac{k}{\omega\mu} \frac{\cos\phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n(ib_n\xi_n^{'}\pi_n - a_n\xi_n\tau_n)$$

Podemos calcular ahora el trabajo realizado por el campo electromagnético de esparcimiento y de extinción.

$$W_s = \frac{1}{2} Re \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (E_{s,\theta} H^*_{s,\phi} - E_{s,\phi} H^*_{s,\theta}) r^2 \sin\theta d\theta d\phi \right) \tag{7}$$

Desarrollando cada uno de estos términos:

$$E_{s,\theta} H^*_{s,\phi} = -\frac{\cos^2\phi}{\rho^2} \frac{k}{\omega\mu} \sum_{m=1}^{\infty} E_n (i a_n \xi'_n \tau_n - b_n \xi_n \pi_n) \sum_{n=1}^{\infty} E^*_m (i b^*_m \xi'^*_m \pi_m + a^*_m \xi^*_m \tau_m)$$

$$-E_{s,\phi} H^*_{s,\theta} = -\frac{\sin^2\phi}{\rho^2} \frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (b_n \xi_n \tau_n - i a_n \xi'_n \pi_n) \sum_{m=1}^{\infty} E^*_m (i b^*_m \xi'^*_m \tau_m + a^*_m \xi^*_m \pi_m)$$

Integrando respecto a ϕ primero y recordando que:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\phi d\phi = \pi = \int_0^{2\pi} \cos^2\phi d\phi \tag{8}$$

$$W_{esp} = r^2 Re \int_0^{\pi} \frac{\pi k \sin\theta}{\omega\mu\rho^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} E_n E^*_m [(a_n b^*_m \xi'_n \xi'^*_m \tau_n \pi_m + b_n a^*_m \xi_n \xi^*_m \pi_n \tau_m + b_n a^*_m \xi_n \xi^*_m \tau_n \pi_m$$

$$+ a_n b^*_m \xi'_n \xi'^*_m \pi_n \tau_m) + i(-a_n a^*_m \xi'_n \xi^*_m \tau_n \tau_m + b_n b^*_m \xi_n \xi'^*_m \pi_n \pi_m - a_n a^*_m \xi'_n \xi^*_m \pi_n \pi_m + b_n b^*_m \xi_n \xi'^*_m \tau_n \tau_m)] d\theta$$

Utilizando las siguientes relaciones:

$$\int_0^{\pi} \pi_n \tau_m + \tau_n \pi_m \sin\theta d\theta = \int_0^{\pi} (\frac{P^1_n}{\sin\theta} \frac{dP^1_m}{d\theta} + \frac{P^1_m}{\sin\theta} \frac{dP^1_n}{d\theta}) \sin\theta d\theta =$$

$$P^1_n(\cos\theta) P^1_m(\cos\theta)|_0^{\pi} = P^1_n(-1) P^1_m(-1) - P^1_n(1) P^1_m(1) = 0$$

Podemos ver este resultado de

$$P^m_l(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} (P_l(x))$$

Así como:

$$\int_0^{\pi} \pi_n \pi_m + \tau_n \tau_m \sin\theta d\theta = \delta_{nm} \frac{2n^2(n+1)^2}{2n+1}$$

$$W_{esp} = \frac{\pi}{\omega\mu k} \sum_{n,m=1}^{\infty} E_n E^*_m Re((a_n b^*_m \xi'_n \xi'^*_m + b_n a^*_m \xi_n \xi^*_m)(\int_0^{\pi} \pi_n \tau_m + \tau_n \pi_m \sin\theta d\theta) +$$

$$i(a_n a^*_m \xi'_n \xi^*_m + b_n b^*_m \xi_n \xi'^*_m)(\int_0^{\pi} \tau_n \tau_m + \pi_n \pi_m \sin\theta d\theta))$$

$$W_{esp} = \frac{\pi}{\omega\mu k} \sum_{n,m=1}^{\infty} |E_o \frac{i^n(2n+1)}{n(n+1)}|^2 Re(-i\xi^*_n \xi'_m |a_n|^2 + i\xi_n \xi'^*_m |b_n|^2) \frac{2n^2(n+1)^2}{2n+1}$$

$$W_{esp} = \frac{\pi |E_0|^2}{\omega\mu k} \sum_{n,m=1}^{\infty} (2n+1)(|a_n|^2 + |b_n|^2) \tag{9}$$

La ecuación anterior se obtuvo ya que tenemos la siguientes definiciones de las funciones de Riccati-Bessel:

$$\chi_n = \rho y_n(\rho) \qquad \xi_n = \psi_n - i\chi_n \tag{10}$$

Desarrollando la multiplicación de las funciones ξ_n obtenemos:

$$-i\xi^*_n \xi'_m = -i(\psi^*_n + i\chi^*_n)(\psi'_n - i\chi'_n) = (\chi^*_n \psi'_n - \psi^*_n \chi'_n) - i(\psi^*_n \psi'_n + \chi^*_n \chi'_n)$$

$$i\xi_n\xi_m^{'*} = i(\psi_n - i\chi_n)(\psi_n^{'*} + i\chi_n^{'*}) = (\chi_n\psi_n^{'*} - \psi_n\chi_n^{'*}) - i(\psi_n\psi_n^{'*} + \chi_n\chi_n^{'*})$$

Como ξ_n y χ_n son funciones reales los conjugados se pueden omitir por lo cual de la ecuación diferencial de Riccati-Bessel:

$$\rho^2\frac{d^2 z_n(\rho)}{d\rho^2} + [\rho^2 - n(n+1)]z(\rho) = 0 \implies W(\rho) = \chi_n\psi_n^{'} - \psi_n\chi_n^{'} = 1 \tag{11}$$

Para calcular la energía de extinción tenemos que resolver la siguiente integral:

$$W_{ext} = \frac{Re}{2}\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(E_{i,\phi}H_{s,\theta}^{*} - E_{i,\theta}H_{s,\phi}^{*} - E_{s,\theta}H_{i,\phi}^{*} + E_{s,\phi}H_{i,\theta}^{*})r^2\sin\theta d\theta d\phi\right) \tag{12}$$

$$= \frac{2\pi}{\omega\mu k}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)Re(a_n + b_n)$$

Obteniendo las secciones transversales de extinción y de esparcimiento obtenidas son:

$$C_{esp} = \frac{W_{esp}}{I_{inc}} = \frac{2\pi}{k^2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)(|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

$$C_{ext} = \frac{W_{ext}}{I_{inc}} = \frac{2\pi}{k^2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)Re(a_n + b_n)$$

Con ello recordamos el teorema óptico el cual nos menciona que la extinción solo depende de la amplitud de esparcimiento en la dirección de propagación.

Referencias

[1] Referencia 1. .