

Esparcimiento y absorción por una partícula arbitraria^{*}

Urrutia Anguiano, Jonathan Alexis

Considérese el caso de una partícula arbitraria inmersa en un medio homogéneo y no absorbente, y una onda plana con una longitud de onda λ . El cálculo de los campos electromagnéticos (EMs) totales fuera la partícula, es decir $\vec{\mathbf{E}}^f$ y $\vec{\mathbf{H}}^f$, es la suma de los campos EMs que inciden en la partícula $\vec{\mathbf{E}}^i$ y los campos esparcidos $\vec{\mathbf{E}}^s$. Los campos EMs dentro de la partícula $\vec{\mathbf{E}}^d$ son calculados mediante las condiciones a la frontera.

Suponiendo campos EMs armónicos en el tiempo, las ecuaciones de Maxwell adoptan la forma

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0, \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{H}} = 0, \quad (1b)$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = i\omega\mu\vec{\mathbf{H}}, \quad (1c)$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = -i\omega\varepsilon\vec{\mathbf{E}}, \quad (1d)$$

en donde la permitividad eléctrica ε y la permeabilidad magnética μ del material son funciones continuas y se supone además que no hay densidad de carga total ($\rho_{tot} = 0$) ni densidad de corriente externa ($\vec{\mathbf{J}}_{ext} = \vec{\mathbf{0}}$), así como $\nabla \cdot \vec{\mathbf{M}} = 0$, donde $\vec{\mathbf{M}}$ es la magnetización del material. Desacoplando las ecs. (1) mediante el empleo de la identidad $\nabla \times \nabla \times \vec{\mathbf{F}} = \nabla(\nabla \cdot \vec{\mathbf{F}}) - \nabla \cdot (\nabla \vec{\mathbf{F}})$, se obtiene que los campos EMs cumplen con la ecuación de Helmholtz inhomogénea¹

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} - k^2 \vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}, \quad (2a)$$

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{H}} - k^2 \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{0}}, \quad (2b)$$

con k la norma del vector de onda $\vec{\mathbf{k}}$, la cual cumple con la relación de dispersión

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu = k_0^2 n^2, \quad (3)$$

en donde k_0 es el número de onda si la onda EM estuviera en el vacío, es decir $\omega = ck$, y $n^2 = \varepsilon\mu/\varepsilon_0\mu_0$ es el índice de refracción del medio por donde se propaga la onda; ε_0 es la permitividad eléctrica del vacío y μ_0 la permeabilidad magnética del vacío.

1. Condiciones en la frontera

La manera usual de llegar a las condiciones en la frontera que cumplen los campos EM en una interfaz es mediante el empleo de las ecuaciones de Maxwell [ecs. (1)] con circuitos amperianos y superficies gaussianas infinitesimales; de este proceso se concluye que las componentes tangenciales de los campos EM deben ser continuas en la interfaz, es decir,

$$(\vec{\mathbf{E}}^f - \vec{\mathbf{E}}^d) \times \hat{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{0}}, \quad (4a)$$

$$(\vec{\mathbf{H}}^f - \vec{\mathbf{H}}^d) \times \hat{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{0}}. \quad (4b)$$

^{*}Bohren, C. & Huffman, D. *Absorption and Scattering of Light by Small Particles* Chapter 3

¹El laplaciano ∇^2 es una abreviación para la operación $\nabla \cdot (\nabla \cdot)$ que opera sobre funciones escalares y vectoriales. Un expresión para definir este operado en el caso de funciones vectoriales es $\nabla \times \nabla \times = \nabla(\nabla \cdot) - \nabla \cdot (\nabla) = \nabla(\nabla \cdot) - \nabla^2$

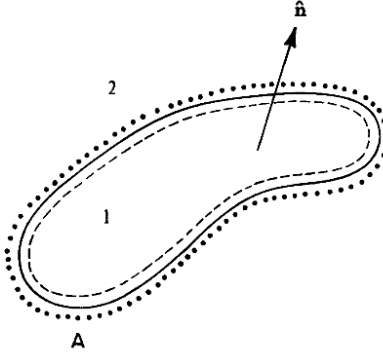


Figura 1: Superficie cerrada delimitando una region dentro d y una afuera a

Al considerar el vector de Poynting \vec{S} , dado por la expresión

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}, \quad (5)$$

que cuantifica el flujo de energía EM por unidad de tiempo, por unidad de área, y la conservación de la energía se verifican las condiciones a la frontera [ecs. (4)]. La potencia, o energía por unidad de tiempo P , dentro de la superficie mostrada en la fig. 1 es denotada por P^d , mientras que la potencia justo fuera de la superficie se denota por P^f . Utilizando la ec. (5), estas cantidades están dadas en términos de los campos EM como

$$P^d = \int_A (\vec{E}^d \times \vec{H}^d) \cdot \hat{n} da,$$

$$P^f = \int_A (\vec{E}^f \times \vec{H}^f) \cdot \hat{n} da,$$

y empleando la propiedad $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} = (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A}$, y las condiciones a la frontera [ecs. (4)]

$$P^d = \int_A (\hat{n} \times \vec{E}^d) \cdot \vec{H}^d da \stackrel{\text{C.F.}}{=} \int_A (\hat{n} \times \vec{E}^f) \cdot \vec{H}^d da,$$

$$P^f = \int_A (\vec{H}^f \times \hat{n}) \cdot \vec{E}^f da \stackrel{\text{C.F.}}{=} (\vec{H}^d \times \hat{n}) \cdot \vec{E}^f da = \int_A (\hat{n} \times \vec{E}^f) \cdot \vec{H}^d da,$$

por lo que se concluye que $P^f = P^d$ si las condiciones a la frontera impuestas son utilizadas, es decir, las ecs. (4) son necesarias para que se cumpla la conservación de la energía.

2. Matriz de amplitud de esparsamiento

Para el estudio del esparsamiento por una partícula arbitraria, se considera que ésta es iluminada por una onda plana, cuya dirección de propagación define la dirección z , es decir,

$$\vec{E}^i = (E_x^i \hat{e}_x + E_y^i \hat{e}_y) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (6)$$

donde $k = 2\pi n_m / \lambda$ es el número de onda y n_m es el índice de refracción del medio donde se encuentra la partícula, denominado matriz.

En la fig. 2 se muestra una partícula iluminada —sobre la cual se posiciona el origen del sistema coordenado cartesiano (x, y, z) —, así como las bases de vectores ortonormales rectangulares $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$ y

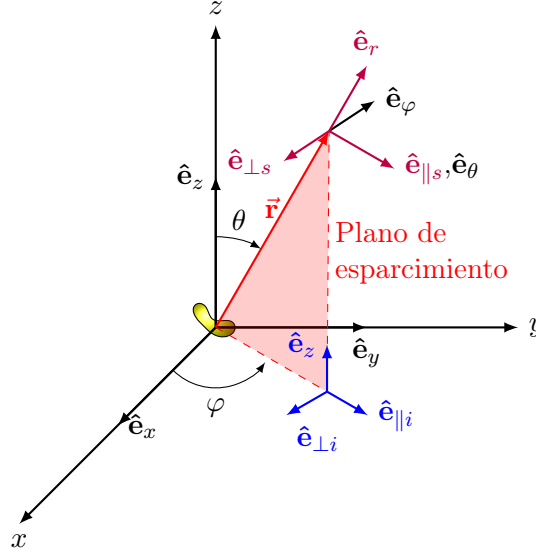


Figura 2: Partícula arbitraria iluminada por una onda plana. Con base en el plano de incidencia (en rojo) se definen las direcciones perpendiculares y paralelas de la onda incidente (azul) y los campos EMs esparsidos (morado).

polares $\{\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_\varphi\}$. Como análogo al plano de incidencia² se define el *plano de esparsimiento* con el vector de dirección del esparsimiento $\hat{\mathbf{e}}_r$ y la dirección del haz incidente $\hat{\mathbf{e}}_z$. Con base en el plano de esparsimiento se define la dirección ortogonal \perp y paralela \parallel de polarización.

Como se muestra en la fig. 2, los vectores unitarios perpendicular y paralelo de la onda incidente, $\hat{\mathbf{e}}_{\perp i}$ y $\hat{\mathbf{e}}_{\parallel i}$ respectivamente, están dados por

$$\hat{\mathbf{e}}_{\perp i} = -\hat{\mathbf{e}}_\varphi = \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_x - \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (7a)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{\parallel i} = \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_r + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta = \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_x + \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (7b)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{e}}_{\perp i} \times \hat{\mathbf{e}}_{\parallel i}, \quad (7c)$$

y a su vez, la base de vectores ortonormales con la que se describirán los campos EMs esparsidos $\{\hat{\mathbf{e}}_{\perp s}, \hat{\mathbf{e}}_{\parallel s}, \hat{\mathbf{e}}_r\}$ por la partícula son

$$\hat{\mathbf{e}}_{\perp s} = -\hat{\mathbf{e}}_\varphi, \quad (8a)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{\parallel s} = \hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad (8b)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{e}}_{\perp s} \times \hat{\mathbf{e}}_{\parallel s}. \quad (8c)$$

Despejando $\hat{\mathbf{e}}_x$ y $\hat{\mathbf{e}}_y$ de las ecs. (7), y reescribiéndolos en la base de los vectores unitarios en la dirección perpendicular y normal de la onda incidente como

$$\hat{\mathbf{e}}_x = \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_{\perp i} + \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_{\parallel i},$$

$$\hat{\mathbf{e}}_y = -\cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_{\perp i} + \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_{\parallel i},$$

se obtiene que $\vec{\mathbf{E}}^i$ [ec. (6)] se puede escribir como

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}^i &= (\cos \varphi E_x^i + \sin \varphi E_y^i) \hat{\mathbf{e}}_{\perp i} + (\sin \varphi E_x^i - \cos \varphi E_y^i) \hat{\mathbf{e}}_{\parallel i} \\ &= E_{\perp i} \hat{\mathbf{e}}_{\perp i} + E_{\parallel i} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel i}, \end{aligned}$$

²En el problema de un haz de luz incidente a una superficie plana, el plano de incidencia se define por el vector normal a la superficie y la dirección de propagación del haz.

en donde se obvia el término de la fase $e^{i(kz-\omega t)}$.

En el problema de esparcimiento por una partícula, la cantidad que se mide experimentalmente es la intensidad de la luz, que es una cantidad proporcional al vector de Poynting [ec. (5)] en la región de campo lejano, es decir que las expresiones de los campos EMs se calculan considerando $kr \gg 1$. Para calcular a los campos EMs producidos por una fuente oscilante en la región de campo lejano se considera³, bajo la norma de Lorentz, el potencial vectorial $\vec{\mathbf{A}}$ que está dado por

$$\vec{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{\mathbf{J}}(r') \frac{e^{ik\|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'\|}}{\|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'\|} dV' e^{-i\omega t}, \quad (9)$$

y a su vez, el campo $\vec{\mathbf{H}}$ se escribe en términos del potencial vectorial $\vec{\mathbf{A}}$ como

$$\vec{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{\mathbf{A}}. \quad (10)$$

Según la ec. (1d), el campo eléctrico es entonces

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{i}{k} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \nabla \times \vec{\mathbf{H}}, \quad (11)$$

en donde campos armónicos en el tiempo fueron asumidos. Dado que $kr \gg 1$, entonces $\|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'\| \approx r - \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \vec{\mathbf{r}}' \approx r$, sustituyendo este resultado en la ec. (9), se obtiene

$$\vec{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_{V'} \vec{\mathbf{J}}(r') dV',$$

e integrando por partes y empleando el teorema de la divergencia, el potencial vectorial es

$$\vec{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left[\int_{V'} -\vec{\mathbf{r}}' (\nabla' \cdot \vec{\mathbf{J}}(r')) dV' + \int_{A'} (\vec{\mathbf{J}}(r') \vec{\mathbf{r}}') \cdot d\vec{\mathbf{a}}' \right],$$

y dado que se está integrando el todo el espacio⁴ la integral de área es igual a cero, entonces

$$\vec{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_{V'} -\vec{\mathbf{r}}' (\nabla' \cdot \vec{\mathbf{J}}(r')) dV',$$

y empleando la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \vec{\mathbf{J}} = i\omega\rho$ y la definición momento dipolar⁵ $\vec{\mathbf{p}}$, cantidad que no depende de $\vec{\mathbf{r}}$, el potencial vectorial en el campo lejano está dado por

$$\vec{\mathbf{A}} = -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi} \vec{\mathbf{p}} \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (12)$$

Para calcular el campo $\vec{\mathbf{H}}$ se calcula el rotacional de la ec. (9), que es proporcional a

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{e^{ikr}}{r} \vec{\mathbf{p}} \right) &= \nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \times \vec{\mathbf{p}} + \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \times \vec{\mathbf{p}}, \\ &= \left[e^{ikr} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \nabla (e^{ikr}) \right] \times \vec{\mathbf{p}} + \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \times \vec{\mathbf{p}}, \\ &= \left[e^{ikr} \left(-\frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{r^2} \right) + \frac{1}{r} (ik\vec{\mathbf{r}} e^{ikr}) \right] \times \vec{\mathbf{p}} + \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \times \vec{\mathbf{p}}, \\ &= \frac{e^{ikr}}{r} \left[\left(-\frac{1}{r} + ik \right) \hat{\mathbf{e}}_r \times \vec{\mathbf{p}} + \nabla \times \vec{\mathbf{p}} \right], \end{aligned}$$

³Véase *Classical Electrodynamics* de J.D. Jackson, Sec. 9.1

⁴ $\vec{\mathbf{J}}(r') = 0$ cuando se evalúa fuera del volumen, por lo que el resultado no cambia.

⁵ $\vec{\mathbf{p}} = \int_{V'} \vec{\mathbf{r}}' \rho(\vec{\mathbf{r}}') dV'$

y dado que $\nabla \times \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{0}}$, se obtiene que

$$\nabla \times \left(\frac{e^{ikr}}{r} \vec{\mathbf{p}} \right) = \frac{e^{ikr}}{r} \left[\left(-\frac{1}{r} + ik \right) \hat{\mathbf{e}}_r \times \vec{\mathbf{p}} \right]. \quad (13)$$

Sustituyendo la ec. (13) en la ec. (10) y empleando la relación de dispersión [ec. (3)]

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{H}} &= -\frac{i\omega}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{e^{ikr}}{r} \vec{\mathbf{p}} \right), \\ &= -\frac{ick^2}{4\pi k} \nabla \times \left(\frac{e^{ikr}}{r} \vec{\mathbf{p}} \right), \\ &= \frac{ck^2}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \hat{\mathbf{e}}_r \times \vec{\mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Calculando el rotacional de la ec. (14) como el producto de una función de r y el término $\hat{\mathbf{e}}_r \times \vec{\mathbf{p}}$, y sustituyendo en la ec. (11), se encuentra una expresión para el campo eléctrico dada por

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}} &= \frac{i}{k} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left\{ \frac{ck^2}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \nabla \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times \vec{\mathbf{p}}) + \nabla \left[\frac{ck^2}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \right] (\hat{\mathbf{e}}_r \times \vec{\mathbf{p}}) \right\}, \\ &= \frac{ik}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \nabla \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times \vec{\mathbf{p}}) + \frac{d}{dr} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \right] \hat{\mathbf{e}}_r \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times \vec{\mathbf{p}}) \right\}, \end{aligned}$$

y dado que⁶

$$\nabla \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times \vec{\mathbf{p}}) = -\frac{1}{r} [\vec{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{e}}_r (\vec{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)] \quad (15)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_r \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times \vec{\mathbf{p}}) = -\vec{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{e}}_r (\vec{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r) \quad (16)$$

el campo eléctrico se reescribe como

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{ik}{4\pi\varepsilon_0} e^{ikr} \left[\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{ikr^3} \right) [-\vec{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{e}}_r (\vec{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)] + \left(-\frac{2}{r^2} + \frac{ik}{r} + \frac{2}{ikr^3} \right) [-\vec{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{e}}_r (\vec{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)] \right], \quad (17)$$

$$= \frac{e^{ikr}}{4\pi\varepsilon_0} \left[\left(\frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} \right) [-\vec{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{e}}_r (\vec{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)] + \left(-\frac{i2k}{r^2} - \frac{k^2}{r} + \frac{2}{r^3} \right) [-\vec{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{e}}_r (\vec{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)] \right]. \quad (18)$$

Agrupando la ec.(18) en potencias de r y empleando la ec. (15), se obtiene la expresión del campo eléctrico

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{e^{ikr}}{4\pi\varepsilon_0} \left[\underbrace{\frac{k^2}{r} (\hat{\mathbf{e}}_r \times \vec{\mathbf{p}}) \times \hat{\mathbf{e}}_r}_{transversal} + \underbrace{[3\hat{\mathbf{e}}_r (\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \vec{\mathbf{p}}) - \vec{\mathbf{p}}] \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right)}_{radial} \right]. \quad (19)$$

Si de la ec. (19) se consideran únicamente los términos que corresponden al campo lejano, es decir, el término con componentes transversales y que decae como r^{-1} , el campo esparcido $\vec{\mathbf{E}}^s$ puede escribirse como

$$\vec{\mathbf{E}}^s \propto \frac{e^{ikr}}{-ikr} \vec{\mathbf{E}}_0, \quad (20)$$

en donde $\vec{\mathbf{E}}_0 \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = 0$. De esta forma, es posible relacionar a los campos esparcidos $\vec{\mathbf{E}}^s$ con los incidentes $\vec{\mathbf{E}}^i$ mediante la siguiente relación

$$\begin{pmatrix} E_{\parallel}^s \\ E_{\perp}^s \end{pmatrix} = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr} \begin{pmatrix} S_2 & S_3 \\ S_4 & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\parallel}^i \\ E_{\perp}^i \end{pmatrix}, \quad (21)$$

en donde, de forma general, $S_j = S_j(\theta, \varphi)$. A la matriz \mathbf{S} se le conoce como matriz de esparcimiento.

⁶ $\nabla \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times \vec{\mathbf{p}}) = \hat{\mathbf{e}}_r (\nabla \cdot \vec{\mathbf{p}}) - \vec{\mathbf{p}} (\nabla \cdot \hat{\mathbf{e}}_r) + (\vec{\mathbf{p}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{e}}_r - (\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \nabla) \vec{\mathbf{p}}$

3. Matriz de fase de esparcimiento

Considérese ahora el promedio temporal⁷ del vector de Poynting [ec. (5)] en el medio donde se encuentra inmersa la partícula,

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \vec{E}^f \times \vec{H}^{a*} \right\} = \vec{S}_i + \vec{S}_s + \vec{S}_{ext}, \quad (22a)$$

en donde

$$\vec{S}_i = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \vec{E}_i \times \vec{H}_i^* \right\}, \quad (22b)$$

$$\vec{S}_s = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \vec{E}_s \times \vec{H}_s^* \right\}, \quad (22c)$$

$$\vec{S}_{ext} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \vec{E}_i \times \vec{H}_s^* + \vec{E}_s \times \vec{H}_i^* \right\}, \quad (22d)$$

siendo i , s y ext los subíndices denotando que se trata del vector de Poynting incidente, el esparcido y el extinto, respectivamente. El término de extinción puede interpretarse como la interacción entre el campo incidente y el esparcido.

Suponiendo que se ilumina una muestra (ver fig. 3), la luz capturada por un detector de área ΔA , no alineado en la dirección de la luz incidente, será únicamente la luz esparcida por la partícula y la cantidad detectada corresponde a la cantidad $\vec{S}_s \cdot \hat{e}_r \Delta A$. Empleando la ec. (20), con \vec{X} la amplitud del campo eléctrico, y la ley de Faraday-Lenz [ec. (1c)] se obtiene que

$$\begin{aligned} \vec{S}_s \cdot \hat{e}_r \Delta A &\propto \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{e^{ikr}}{-ikr} \vec{X} \times \left(\frac{i\vec{k} \times \vec{E}_s}{i\mu\omega} \right)^* \right\} \cdot \hat{e}_r \Delta A, \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{e^{ikr}}{-ikr} \vec{X} \times \left(\frac{e^{-ikr}}{-kr\mu\omega} \vec{k} \times \vec{X} \right) \right\} \cdot \hat{e}_r \Delta A, \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{k^2 r^2 \omega \mu} \text{Re} \left\{ \vec{X} \times (\vec{k} \times \vec{X}) \right\} \cdot \hat{e}_r \Delta A, \end{aligned}$$

y como $\vec{X} \cdot \hat{e}_r = 0$, entonces $\vec{k} \times \vec{X} = k ||\vec{X}|| \hat{n}$ y $\vec{X} \times \hat{n} \propto \vec{k}$, es decir que

$$\vec{S}_s \cdot \hat{e}_r \Delta A \propto \frac{k}{2\omega\mu} \frac{||\vec{X}||^2}{k^2} \left(\frac{\Delta A}{r^2} \right),$$

⁷Este tipo de promedio es tomado en cuenta ya que de manera experimental, la dependencia oscilatoria de la luz (en el visible) no puede ser determinada por los detectores debido a la frecuencia de oscilación. Los detectores reciben varios periodos de la onda EM, por lo que se obtiene un promedio.

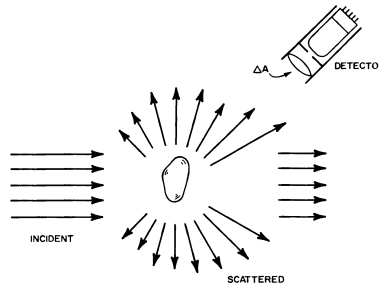


Figura 3: Medición de la luz que ilumina una muestra con forma y tamaño arbitrario

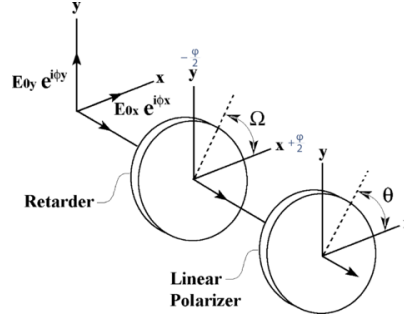


Figura 4: Medición de la luz que ilumina una muestra con forma y tamaño arbitrario

y definiendo el ángulo sólido $\Delta\Omega = \Delta A/r^2$, se obtiene la cantidad

$$\vec{S}_s \cdot \hat{e}_r \Delta A \propto \frac{k}{2\omega\mu} \frac{||\vec{X}||^2}{k^2} \Delta\Omega. \quad (23)$$

A partir de la cantidad definida por la ec. (23), de manera experimental se puede encontrar la relación entre $||\vec{A}||$ como función del ángulo sólido $\Delta\Omega$ e identificar los *parámetros de Stokes*.

Los parámetros de Stokes aprovechan la aditividad de la irradiancia para describir los estados de polarización de la luz. El experimento se plantea como se propone en la fig. 4, haciendo mediciones de la intensidad de la luz detectada con distintos estados de polarización. Si la onda EM medida es

$$\vec{E} = E_{\parallel} \hat{e}_{\parallel} + E_{\perp} \hat{e}_{\perp} = a_{\parallel} e^{i\delta_{\parallel}} \hat{e}_{\parallel} + a_{\perp} e^{i\delta_{\perp}} \hat{e}_{\perp}, \quad (24)$$

donde los vectores \hat{e}_{\parallel} y \hat{e}_{\perp} son ortogonales entre sí. Se mide la irradiancia I cuando no hay un polarizador de por medio y, omitiendo el término $k/2\mu\omega$, se obtiene que

$$\begin{aligned} I &= E_{\parallel} E_{\parallel}^* + E_{\perp} E_{\perp}^*, \\ &= a_{\parallel}^2 + a_{\perp}^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Colocando el eje de los polarizadores paralelos a los vectores \hat{e}_{\perp} y \hat{e}_{\perp} , se calcula una irradiancia paralela $I_{\parallel} = E_{\parallel} E_{\parallel}^*$ y una perpendicular $I_{\perp} = E_{\perp} E_{\perp}^*$, y se define⁸ la cantidad Q , dada por

$$\begin{aligned} Q &= I_{\parallel} - I_{\perp}, \\ &= a_{\parallel}^2 - a_{\perp}^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Alineando el eje del polarizador a 45° , se puede calcular la irradiancia de la luz que cruza al polarizador definiendo $\hat{e}_{\pm} = (\hat{e}_{\parallel} \pm \hat{e}_{\perp})/\sqrt{2}$ y $E_{\pm} = (E_{\parallel} \pm E_{\perp})/\sqrt{2}$; entonces $I_{\pm} = (E_{\parallel} E_{\parallel}^* \pm E_{\parallel} E_{\perp}^* \pm E_{\perp} E_{\parallel}^* + E_{\perp} E_{\perp}^*)/2$ y definimos la cantidad U dada por

$$\begin{aligned} U &= I_{+} - I_{-}, \\ &= E_{\parallel} E_{\perp}^* + E_{\perp} E_{\parallel}^*, \\ &= 2a_{\parallel} a_{\perp} \cos(\delta_{\parallel} - \delta_{\perp}). \end{aligned} \quad (27)$$

Finalmente empleando polarizadores circulares en a fig. 4 y definiendo los vectores $\hat{e}_R = (\hat{e}_{\parallel} + i\hat{e}_{\perp})$ y $\hat{e}_L = (\hat{e}_{\parallel} - i\hat{e}_{\perp})$, de forma análoga a la ec. (27), se define la cantidad V , dada por

$$\begin{aligned} V &= I_R - I_L, \\ &= i(E_{\parallel} E_{\perp}^* - E_{\perp} E_{\parallel}^*), \\ &= 2a_{\parallel} a_{\perp} \sin(\delta_{\parallel} - \delta_{\perp}). \end{aligned} \quad (28)$$

⁸Las siguientes cantidades se definen como restas ya que si se sumaran, la información obtenida de la medición sería la misma que la de la ec. (25)

Entonces se pueden medir y calcular los parámetros de Stokes para determinar de forma experimental los campos EM esparcidos en términos del incidente, mediante la relación dada por la matriz de fase para esparcimiento S_{jk} , dada por

$$\begin{pmatrix} I_s \\ Q_s \\ U_s \\ V_s \end{pmatrix} = \frac{1}{k^2 r^2} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_i \\ Q_i \\ U_i \\ V_i \end{pmatrix}, \quad (29)$$

en donde sólo hay 7 cantidades independientes: cuatro módulos y tres fases. Para conocer las expresiones de los términos de la ec. (29) véase el artículo de Abhyankar (1969)⁹

4. Esparcimiento, extinción y absorción

Si un haz de luz cruza por un medio donde se encuentran partículas arbitrarias (ver fig. 5) la intensidad medida por un detector es U . Si, por el contrario, no se encontrase la partícula la intensidad medida sería U_0 , con $U_0 > U$. Esto quiere decir que la presencia de las partículas devino en la extinción del haz. La extinción $U_0 - U$ es atribuida tanto a la absorción de las partículas (conversión de la energía EM en otras formas), como al esparcimiento de la luz en direcciones distintas a la posición del detector.

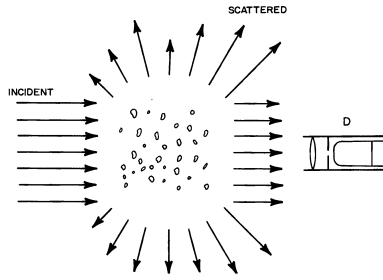


Figura 5: Extinción de un haz de luz a causa de las partículas inmersas en un medio no dispersor.

Considérese el caso de la extinción de una sola partícula, inmersa en un medio no dispersor, e iluminada por una onda plana, como se muestra en la fig. 6. Definiendo la esfera A de radio r que contiene a la partícula (ver fig. 6), la energía por unidad de tiempo que cruza la superficie A , es

$$W_a = - \int_A \vec{S} \cdot \hat{e}_r dA, \quad (30)$$

donde el vector de Poynting se define para el medio de afuera (a). Si $W_a > 0$, energía es absorbida dentro de la esfera, y si $W_a < 0$ entonces energía es generada en la partícula, aunque a lo largo de este texto se

⁹Journal of Mathematical Physics **10** , 1935 (1969); doi:<http://dx.doi.org/10.1063/1.1664786>

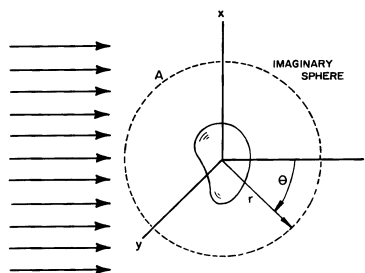


Figura 6: Extinción por una sola partícula en un medio no dispersor.

excluye este caso. Dado que el medio no absorbe, se puede emplear la ec. (22), por lo que

$$W_a = W_i - W_s + W_{ext}, \quad (31a)$$

con

$$W_i = - \int_A \vec{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_r dA, \quad (31b)$$

$$W_s = \int_A \vec{\mathbf{S}}_s \cdot \hat{\mathbf{e}}_r dA, \quad (31c)$$

$$W_{ext} = - \int_A \vec{\mathbf{S}}_{ext} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r dA, \quad (31d)$$

y recordando que el medio es no absorbente $W_i = 0$. Despejando entonces W_{ext} se llega a la expresión

$$W_{ext} = W_a + W_s. \quad (32)$$

Supóngase que la onda incidente a la partícula está dada por $\vec{\mathbf{E}}_i = E\hat{\mathbf{e}}_x$, donde E es la amplitud del campo eléctrico. Puesto que el medio de la matriz no es absorbente, es posible estudiar el comportamiento de los campos EM en el límite de campo lejano ($kr \gg 1$). Empleando entonces la ec. (20) para la expresión del campo $\vec{\mathbf{E}}_s$ y a partir de éste, mediante la ley de Faraday-Lenz [ec. (1c)] se calcula $\vec{\mathbf{H}}_s$, como

$$\vec{\mathbf{E}}_s \propto \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikz} E \vec{\mathbf{X}}, \quad (33a)$$

$$\vec{\mathbf{H}}_s \propto \frac{e^{ik(r-z)}}{kz\mu\omega} E \left(\hat{\mathbf{e}}_r \times \vec{\mathbf{X}} \right), \quad (33b)$$

con $\vec{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = 0$. Escribiendo $\vec{\mathbf{X}}$ en la base de los vectores de esparcimiento [ecs. (8)] se obtiene la expresión

$$\vec{\mathbf{X}} = (S_2 \cos \varphi + S_3 \sin \varphi) \hat{\mathbf{e}}_{\parallel s} + (S_4 \cos \varphi + S_1 \sin \varphi) \hat{\mathbf{e}}_{\perp s} \quad (34)$$

Para calcular la energía por unidad de tiempo extinta W_{ext} [ec. (31d)], es necesario calcular el vector de Poynting dado por

$$\vec{\mathbf{S}}_{ext} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \vec{\mathbf{E}}_i \times \vec{\mathbf{H}}_s^* + \vec{\mathbf{E}}_s \times \vec{\mathbf{H}}_i^* \right\}.$$

Considerando que para calcular la W_{ext} se emplea la ec. (33), se calcula

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}_i \times \vec{\mathbf{H}}_s^* &= E \hat{\mathbf{e}}_x \times \left(\frac{k}{\omega\mu} \hat{\mathbf{e}}_r \times \vec{\mathbf{E}}_s \right)^*, \\ &= E \hat{\mathbf{e}}_x \times \left[\left(\frac{k}{\omega\mu} \hat{\mathbf{e}}_r \right) \times \left(\frac{e^{ik(r-z)}}{-ikz} E \vec{\mathbf{X}} \right) \right]^*, \\ &= \frac{k}{\mu\omega} \frac{||E||^2}{ikr} e^{-ik(r-z)} \left[\hat{\mathbf{e}}_x \times \left(\hat{\mathbf{e}}_r \times \vec{\mathbf{X}}^* \right) \right], \\ &= \frac{k}{\mu\omega} \frac{||E||^2}{ikr} e^{-ik(r-z)} \left[\hat{\mathbf{e}}_r \left(\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \vec{\mathbf{X}}^* \right) - \vec{\mathbf{X}}^* \left(\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \right) \right], \end{aligned} \quad (35)$$

y análogamente

$$\vec{\mathbf{E}}_s \times \vec{\mathbf{H}}_i^* = \frac{k}{\mu\omega} \frac{||E||^2}{-ikr} e^{ik(r-z)} \left[\hat{\mathbf{e}}_z \left(\vec{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x \right) - \hat{\mathbf{e}}_x \left(\vec{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z \right) \right]. \quad (36)$$

Empleando entonces las ecs. (35) y (36) para calcular \vec{S}_{ext} se obtiene la expresión

$$\vec{S}_{ext} = \frac{k}{2\mu\omega} ||E||^2 \text{Re} \left\{ \frac{e^{-ikr}}{ikr} e^{ikz} \left[\hat{\mathbf{e}}_r \left(\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \vec{\mathbf{X}}^* \right) - \vec{\mathbf{X}}^* \left(\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \right) \right] + \frac{e^{ikr}}{ikr} e^{-ikz} \left[-\hat{\mathbf{e}}_z \left(\vec{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x \right) + \hat{\mathbf{e}}_x \left(\vec{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z \right) \right] \right\} \quad (37)$$

y sustituyendo la ec. (37) en la ec. (31d)

$$\begin{aligned} W_{ext} &= - \int_A \left\{ \frac{k}{2\mu\omega} ||E||^2 \text{Re} \left\{ \frac{e^{-ikr}}{ikr} e^{ikz} \left[\hat{\mathbf{e}}_r \left(\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \vec{\mathbf{X}}^* \right) - \vec{\mathbf{X}}^* \left(\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \right) \right] + \frac{e^{ikr}}{ikr} e^{-ikz} \left[-\hat{\mathbf{e}}_z \left(\vec{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x \right) + \hat{\mathbf{e}}_x \left(\vec{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z \right) \right] \right\} \right\} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r dA, \\ &= - \frac{k}{2\mu\omega} ||E||^2 \text{Re} \left\{ \frac{e^{-ikr}}{ikr} \int_A e^{ikz} \left[\hat{\mathbf{e}}_r \left(\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \vec{\mathbf{X}}^* \right) - \vec{\mathbf{X}}^* \left(\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \right) \right] \cdot \hat{\mathbf{e}}_r dA + \frac{e^{ikr}}{ikr} \int_A e^{-ikz} \left[-\hat{\mathbf{e}}_z \left(\vec{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x \right) + \hat{\mathbf{e}}_x \left(\vec{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z \right) \right] \cdot \hat{\mathbf{e}}_r dA \right\}, \end{aligned}$$

y calculando el producto punto dentro de las integrales y recordando que $\vec{\mathbf{X}}$ es perpendicular a $\hat{\mathbf{e}}_r$, se obtiene el resultado

$$\begin{aligned} W_{ext} &= - \frac{k}{2\mu\omega} ||E||^2 \text{Re} \left\{ \frac{e^{-ikr}}{ikr} \int_A e^{ikz} \left(\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \vec{\mathbf{X}}^* \right) dA + \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{ikr}}{ikr} \int_A e^{-ikz} \left(\vec{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x \right) \cos \theta dA + \frac{e^{ikr}}{ikr} \int_A e^{-ikz} \left(\vec{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z \right) \cos \varphi \sin \theta dA \right\}. \quad (38) \end{aligned}$$

Puesto que $z = r \cos \theta$ y se considera $kr \gg 1$, la ec. (38) contiene integrales de la forma

$$\int_{-1}^1 e^{ikr\mu} f(\mu) d\mu = \frac{f(1)e^{ikr} - f(-1)e^{-ikr}}{ikr} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{k^2 r^2} \right),$$

con $\mu = \cos \theta$ y cuya solución está dada por el teorema de fase estacionaria¹⁰. Si además se calcula el límite $kr \rightarrow \infty$ en la ec. (38), se concluye que

$$W_{ext} = I_i \frac{4\pi}{k^2} \text{Re} \left\{ \left(\vec{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x \right)_{\theta=0} \right\}, \quad (39)$$

donde I_i es la irradiancia incidente. El término por el cual la irradiancia es multiplicada cuenta con unidades de área, por lo que se define como la sección transversal de extinción como

$$C_{ext} = \frac{W_{ext}}{I_i} = \frac{4\pi}{k^2} \text{Re} \left\{ \left(\vec{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x \right)_{\theta=0} \right\}. \quad (40)$$

¹⁰Sean f y g funciones que permita su expansión en series de Taylor en el intervalo $[a, b]$, (g con valores en los reales) y que en $c \in [a, b]$ se cumpla que $g'(c) = 0, g''(c) \neq 0, f(c) \neq 0$ y que g sea distinto de cero en todo el intervalo. Si $\alpha \gg 1$, entonces

$$\int_a^b f(t) e^{i\alpha g(t)} \approx f(c) e^{i\alpha g(c)} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha |g''(c)|}} e^{i\pi\mu/4},$$

con $\mu = \text{sign}(g''(c))$

Haciendo uso de la relación entre la potencia de extinción y la de esparcimiento y absorción [ec. (32)] se define entonces la

$$C_{ext} = C_a + C_s, \quad (41)$$

en donde C_s es la sección transversal de esparcimiento, dada por la expresión $C_s = W_s/I_i$, y C_a es la sección transversal de absorción definida como $C_a = W_a/I_i$.

Para el cálculo C_s se emplean las expresiones de los campos EM lejanos [ecs. (33)] y el hecho de que se asumió que $\vec{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = 0$. Bajo estas consideraciones y sustituyendo $I_i = E^2$ se obtiene el resultado

$$C_{sca} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{||\vec{\mathbf{X}}||^2}{k^2} \sin \theta d\theta d\phi = \int_{4\pi} \frac{||\vec{\mathbf{X}}||^2}{k^2} d\Omega.$$

El integrando de la ec. (42), denominado como la sección transversal diferencial de esparcimiento y denotada simbólicamente como $dC_s/d\Omega \equiv ||\vec{\mathbf{X}}||^2/k^2$, define la distribución angular de luz esparcida, por unidad de irradiancia, por unidad de ángulo sólido, en una dirección específica.

Existe asimismo una relación multiplicativa entre la distribución angular de la luz esparcida y la sección transversal de la partícula. Ésta es conocida como la función de fase p –o bien diagrama de esparcimiento– y cumple con las propiedades

$$p = \frac{||\vec{\mathbf{X}}||^2}{k^2} C_s, \quad (42)$$

$$\int_{4\pi} p d\Omega = 1, \quad (43)$$

es decir, es una función normalizada. Para clasificar el esparcimiento de una partícula según la distribución angular de la luz, se emplea el parámetro de asimetría g , dado por

$$g = \langle \cos \theta \rangle = \int_{4\pi} p \cos \theta d\Omega, \quad (44)$$

que además define el promedio del coseno del ángulo de esparcimiento. Si la partícula esparce la luz de manera isótropa, el parámetro de asimetría toma el valor de cero; lo mismo ocurre si el esparcimiento es simétrico al rededor del ángulo $\theta = \pi/2$. Dado el caso en el que la partícula esparza más luz en la dirección frontal ($\theta = 0$), g toma valores positivos. Por otro lado, un mayor esparcimiento en la dirección posterior ($\theta = \pi$) corresponde a valores negativos de g .

Un parámetro que cuantifica la relación entre la sección transversal de esparcimiento C_s , de absorción C_a y de extinción C_{ext} con la partícula es la eficiencia, definida como

$$Q_i = \frac{C_i}{G}, \quad (45)$$

en donde i hace referencia al tipo de sección transversal correspondiente y G es la sección transversal geométrica proyectada en un plano perpendicular a la luz incidente; en el caso de partículas esféricas de radio R , $G = \pi R^2$. De manera intuitiva, la eficiencia de extinción Q_{ext} debería ser idéntica a la unidad sin embargo, dicho resultado es válido únicamente en el régimen de la óptica geométrica. Dado que existen partículas que absorben y esparce más luz en comparación a la proyección geométrica, las eficiencias pueden ser estudiadas como una sección transversal adimensional.

Todas las expresiones y cálculos desarrollados hasta el momento se llevaron acabo bajo la suposición de luz polarizada en la dirección x [ver ecs. (33)]. En el caso de polarización arbitraria, el campo eléctrico

se escribe como $\vec{\mathbf{E}}_i = E_x \hat{\mathbf{e}}_x + E_y \hat{\mathbf{e}}_y$ y las expresiones obtenidas para las secciones transversales de extinción y esparcimiento son

$$C_{ext} = \frac{4\pi}{k^2 ||E_i||^2} \text{Re} \left\{ \left(\vec{\mathbf{E}}_i^* \cdot \vec{\mathbf{T}} \right)_{\theta=0} \right\}, \quad (46)$$

$$C_s = \int_{4\pi} \frac{||\vec{\mathbf{T}}||^2}{k^2 ||E_i||^2} d\Omega, \quad (47)$$

donde $\vec{\mathbf{T}} = E_x \vec{\mathbf{X}} + E_y \vec{\mathbf{Y}}$, con $\vec{\mathbf{Y}}$ el vector de amplitud de esparcimiento con polarización en la dirección Y . Para el caso particular de luz no polarizada se cumple que

$$\begin{aligned} \langle E_x E_x^* \rangle &= \langle E_y E_y^* \rangle, \\ \langle E_x E_y^* \rangle &= \langle E_y^* E_x \rangle = 0, \end{aligned}$$

por lo que las expresiones para las secciones transversales de extinción y esparcimiento son

$$C_{ext} = \frac{1}{2} (C_{ext,x} + C_{ext,y}), \quad (48)$$

$$C_{ext} = \frac{1}{2} (C_{s,x} + C_{s,y}), \quad (49)$$

donde los subíndices x y y indican la polarización de la luz en dichas direcciones.

5. Teorema óptico

En todos los fenómenos de esparcimiento, ya sea de ondas acústicas, EM o de partículas elementales, se presenta una dependencia en la extinción únicamente en el esparcimiento delantero. Esto ocurre a pesar de que la extinción considera tanto la absorción de la partícula y el esparcimiento en todas las direcciones. Este comportamiento es impuesto por el *Teorema Óptica*, del cual es la ec. (40) un caso particular. Para una mejor comprensión de este fenómeno, se desarrolla a detalle el proceso de medición de la extinción, que a su vez desarrolla de forma intuitiva el teorema óptico.

Considérese una partícula arbitraria posicionada entre una fuente luminosa y un detector D (vease fig. 3); se supone además que la luz se encuentra polarizada en la dirección x . La potencia U que incide dentro del detector está dada por

$$U = \iint_D \left(\vec{\mathbf{S}}_i + \vec{\mathbf{S}}_s + \vec{\mathbf{S}}_{ext} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z dx dy = U_i + U_s + U_{ext},$$

en donde los vectores de Poynting $\vec{\mathbf{S}}_j$ están dados por las ecs. (22). Los términos U_j identifican la contribución de cada vector de Poynting. El término U_i es igual a la intensidad incidente por el área del detector $A(D)$, es decir

$$U_i = I_i A(D), \quad (50)$$

por otro lado, para el término de esparcimiento U_s se asume que la distancia de la partícula al detector es suficientemente grande ($kz \ll 1$) para poder emplear la ec. (33), por lo que

$$U_s = I_i \iint_D \frac{||\vec{\mathbf{X}}||^2}{(kr)^2} \cos \theta dx dy.$$

Suponiendo además que $R \ll z$, con R distancia linear máxima del detector, todas las cantidades en el integrando son constantes. Esto conduce a la expresión para la potencia de la luz esparcida

$$U_s = I_i \frac{||\vec{\mathbf{X}}||_{\theta=0}^2}{(kz)^2} A(D) = I_i \frac{||\vec{\mathbf{X}}||_{\theta=0}^2}{k^2} \Omega(D). \quad (51)$$

El término de extinción se calcula a partir de la ec. (37), al sustituirla en la ec. (53), de donde se sigue que

$$\begin{aligned}
U_{ext} = I_i \operatorname{Re} \bigg\{ & \iint_D \frac{e^{-ik}}{ikr} e^{ikz} \cos \theta \left(\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \vec{\mathbf{X}}^* \right) dx dy \\
& - \iint_D \frac{e^{-ik}}{ikr} e^{ikz} \sin \theta \cos \varphi \left(\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \vec{\mathbf{X}}^* \right) dx dy \\
& - \iint_D \frac{e^{-ik}}{ikr} e^{ikz} \left(\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \vec{\mathbf{X}} \right) \bigg\} dx dy
\end{aligned} \tag{52}$$

donde $I_i = \frac{k}{2\mu\omega} \|E\|^2$. Para resolver las integrales de la ec. (52) se hace uso de la aproximación propuesta por el teorema de la fase estacionaria¹¹. En éste se establece que el valor de la integral está determinado por la vecindad de un punto crítico dentro de la frontera, la cual es tal que $4\pi \ll kR^2/z$ para poder contener el mayor número de máximos y mínimos en el dominio de integración. Identificando los que el punto crítico que cumple con las condiciones del teorema de la fase estacionaria es el origen ($x, y = 0$) con la fase $1 - r/z$ y el término $\alpha = kz$, se concluye que

$$U_{ext} = -I_i C_{ext}, \tag{53}$$

Por lo que la potencia total capturada por el detector es la contribución de las ecs. (50)-(53), es decir

$$U = I_i \left[A(D) - C_{ext} + \frac{\|\vec{\mathbf{X}}\|_{\theta=0}^2}{k^2} \Omega(D) \right], \tag{54}$$

y si el ángulo sólido detectado es suficientemente pequeño, es decir, que se cumpla que $4\pi \ll kR^2/z$, entonces

$$U \approx I_i [A(D) - C_{ext}]. \tag{55}$$

A partir de la ec. (55), se establece que la sección transversal de extinción es una variable experimentalmente determinable, dado que U es la medición realizada sin la partícula. La medición con ella introduce únicamente el término de C_{ext} , que es definida positiva. El efecto neto es el de reducir el área del detector mediante una obstrucción o *sombra*, sin olvidar que no es la proyección del área geométrica de la partícula, pues el área dada por C_{ext} puede ser mayor a ésta. La interpretación de C_{ext} es entonces la reducción del área de detección. Considerando que la ec. (40) dicta el valor máximo de C_{ext} y que éste no puede ser mayor a C_a según la ec. (54), la sección transversal de extinción observada en el experimento C'_{exp} yace en el intervalo

$$C_a \leq C'_{exp} \leq C_{ext},$$

La extinción maxima, o total, se cumple cuando el detector cuenta con un ángulo sólido lo suficientemente pequeño. Por otro lado, si la partícula se encuentra cerca el detector la extinción observada es menor. Más adelante se verá que la luz esparcida por partículas tiende a concentrar en la dirección posterior a la partícula si su radio es mayor a la longitud de onda de la luz incidente. Para esto hay que recordar que el término de extinción es la manifestación de la interferencia de la luz incidente y la esparcida (ver ecs. (37) y (53)); asimismo se puede estudiar este fenómeno como la combinación de absorción y esparcimiento por la partícula, o bien como interferencia por la partícula. Ambos acercamientos son válidos para una sola partícula sin embargo, en la práctica la medición es realizada por una colección de estas y el resultado bajo ciertas condiciones establece que las secciones transversales son aditivas.

¹¹Véase 10

6. Extinción por una placa delgada

Finalmente, se analiza un caso particular de la extinción por muchas partículas. Supongamos una colección de partículas colocadas en la región semi infinita definida por los intervalos $0 < z < h$, $-\infty < x < \infty$ y $-\infty < y < \infty$, en donde las partículas se encuentran distribuidas *casi* uniformemente. Si una onda plana polarizada dada por

$$E_i = E_0 e^{ikz} \hat{e}_x, \quad (56)$$

incide de forma normal a la placa de partículas (ver fig. 7), el campo eléctrico transmitido \vec{E}_t , en el punto P , es la suma del campo incidente y el campo esparcido por cada una de las partículas en el punto \vec{R}_j , denotado por \vec{E}_{sj} . Esto es

$$\vec{E}_t = \vec{E}_i + \sum_j \vec{E}_{sj}, \quad (57)$$

donde se considera que

$$\vec{E}_{sj} = \frac{e^{kR_j}}{-ikR_j} \vec{X}_j(\hat{e}_j) E_0 e^{ikz_j}, \quad (58)$$

$$\vec{R}_j = -[x_j \hat{e}_x + y_j \hat{e}_y + (z_j - d) \hat{e}_z] = R_j \hat{e}_j. \quad (59)$$

Asimismo, $\vec{X}_j(\hat{e}_j) = (S_2 \cos \varphi_j + S_3 \sin \varphi_j) \hat{e}_{\parallel sj} + (S_4 \cos \varphi_j + S_1 \sin \varphi_j) \hat{e}_{\perp sj}$ y en coordenadas polares depende de las variables φ_j y θ_j , ya que $\hat{e}_{\parallel sj} = \hat{e}_{\theta_i}$ y $\hat{e}_{\perp sj} = \hat{e}_{\varphi_j}$

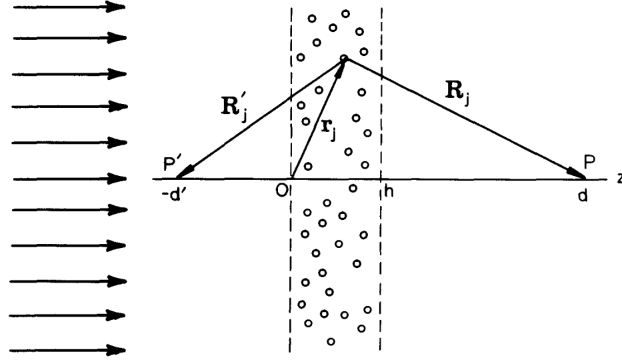


Figura 7: Placa semi infinita de espesor h . El punto P se encuentra a una distancia d del origen.

Suponiendo además que el número de partículas por volumen n es tal que permite aproximar la suma de la ec. ((57)) mediante una integral, que todas las partículas en la placa son idénticas y, dado que la onda plana incide de manera normal a la placa, $\vec{X}_j(\hat{e}_j) = \vec{X}(\hat{e})$. Entonces el campo esparcido se escribe como

$$\sum_j \vec{E}_{sj} \approx E_0 n \int_0^h dz e^{ikz} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\vec{X}(\hat{e})}{-ikR} e^{ikR}, \quad (60)$$

$$= E_0 n \int_0^h dz e^{ikz} \int_{-\infty}^{\infty} dy I_x(y, z), \quad (61)$$

$$= E_0 n \int_0^h dz e^{ikz} I_y(z), \quad (62)$$

donde I_x es el resultado de la integral en la variable x y a su vez I_y el resultado de la integral en la variable y . Sustituyendo la ec. (59) en (60) se obtiene que

$$\sum_j \vec{\mathbf{E}}_{sj} \approx E_0 n \int_0^h dz e^{ikz} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\vec{\mathbf{X}}(\hat{e}) e^{ik\sqrt{x^2+y^2+(d-z)^2}}}{-ik\sqrt{x^2+y^2+(d-z)^2}}. \quad (63)$$

En secciones anteriores se supuso que $kr \gg 1$ pero como $r = d$, entonces $k \gg 1$. Entonces es posible calcular I_x mediante el teorema de fase estacionaria (véase 10), identificando

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow k, \\ g(x) &\rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + (d-z)^2}, \\ f(x) &\rightarrow \frac{\vec{\mathbf{X}}(\hat{e})}{-ik\sqrt{x^2 + y^2 + (d-z)^2}}, \end{aligned}$$

y como $g'(x) = 0$ si $x = 0$ y $g''(0) = \frac{1}{\sqrt{y^2+(d-z)^2}}$, se obtiene que

$$I_x(y, z) = \frac{(\vec{\mathbf{X}}(\hat{e}))_{x=0}}{-ik(y^2 + (d-z)^2)^{1/4}} \sqrt{\frac{2\pi}{k}} e^{i\pi/4} e^{ik\sqrt{y^2+(d-z)^2}}. \quad (64)$$

Como $I_y(z) = \int_{-\infty}^{\infty} I_x(y, z) dy$, se puede utilizar nuevamente el teorema de fase estacionaria, identificando

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow k, \\ g(y) &\rightarrow \sqrt{y^2 + (d-z)^2}, \\ f(y) &\rightarrow \frac{(\vec{\mathbf{X}}(\hat{e}))_{x=0}}{-ik(y^2 + (d-z)^2)^{1/4}} \sqrt{\frac{2\pi}{k}} e^{i\pi/4}, \end{aligned}$$

y como $g'(y) = 0$ si $y = 0$ y $g''(0) = \frac{1}{|d-z|}$, entonces

$$\begin{aligned} I_y(z) &= \left(\frac{(\vec{\mathbf{X}}(\hat{e}))_{x,y=0}}{-ik((d-z)^2)^{1/4}} \sqrt{\frac{2\pi}{k}} e^{i\pi/4} \right) \sqrt{\frac{2\pi|z-d|}{k}} e^{i\pi/4} e^{ik|d-z|} \\ &= -\frac{2\pi}{k^2} (\vec{\mathbf{X}}(\hat{e}))_{x,y=0} e^{ik|d-z|}, \end{aligned} \quad (65)$$

por lo que el campo esparcido está dado por la expresión

$$\sum_j \vec{\mathbf{E}}_{sj} \approx -E_0 n \frac{2\pi}{k^2} (\vec{\mathbf{X}}(\hat{e}))_{x,y=0} \int_0^h e^{ikz} e^{ik|d-z|} dz, \quad (66)$$

y dado que $0 < z < h < d$

$$\sum_j \vec{\mathbf{E}}_{sj} \approx -E_0 n \frac{2\pi}{k^2} (\vec{\mathbf{X}}(\hat{e}))_{\theta=0} \int_0^h e^{ikz} e^{ik(d-z)} dz, \quad (67)$$

$$= -E_0 n \frac{2\pi}{k^2} (\vec{\mathbf{X}}(\hat{e}))_{\theta=0} h e^{ikd}. \quad (68)$$

Antes de continuar notemos que como $\vec{\mathbf{X}}(\hat{e}) = X_{\parallel} \hat{e}_{\parallel} + X_{\perp} \hat{e}_{\perp} = X_{\parallel} \hat{e}_{\theta} + X_{\perp} \hat{e}_{\varphi}$, en coordenadas cartesianas, $\vec{\mathbf{X}}$ se escribe como

$$\vec{\mathbf{X}} = (X_{\parallel} \cos \theta \cos \varphi + X_{\perp} \sin \varphi) \hat{e}_x + (X_{\parallel} \cos \theta \sin \varphi - X_{\perp} \cos \varphi) \hat{e}_y + X_{\parallel} \sin \theta \hat{e}_z \quad (69)$$

por lo que, si se evalúa en $x, y = 0$ y $z > 0$, o lo que es equivalente en $\theta > 0$, $\vec{\mathbf{X}}(\hat{e})$ sólo cuenta con componentes x y y . Finalmente, sustituyendo las ecs. (56) y (68) en la ec. (57), se obtiene la expresión del campo transmitido por la placa a una distancia d

$$\vec{\mathbf{E}}_t = E_0 e^{ikd} \left\{ \left[1 - \frac{2\pi}{k^2} nh(\vec{\mathbf{X}} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0} \right] \hat{e}_x - \frac{2\pi}{k^2} nh(\vec{\mathbf{X}} \cdot \hat{e}_y)_{\theta=0} \hat{e}_y \right\}. \quad (70)$$

A pesar de que la onda incidente estaba polarizada linealmente en la dirección x , es campo esparcido puede presentar componentes en la dirección y , por lo que en general, el ángulo de polarización es rotado al atravesar la placa de partículas. Suponiendo que $\vec{\mathbf{X}} \cdot \hat{e}_y = 0$ y que $|2\pi k^{-2} nh(\vec{\mathbf{X}} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0}| \ll 1$, puesto que $k \gg 1$, el campo eléctrico transmitido es entonces

$$\vec{\mathbf{E}}_t = \vec{\mathbf{E}}_i e^{-\frac{2\pi}{k^2} nh(\vec{\mathbf{X}} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0}} \quad (71)$$

Recordemos que el coeficiente de amplitud de transmisión t_{slab} de una placa de un medio continuo lineal, homogéneo e isotrópico de grosor h con índice de refracción \tilde{N} inmersa en un medio con índice de refracción N , donde además $\tilde{N} \approx N$, está dado por

$$t_{slab} \approx e^{ih(\tilde{k}-k)} \quad (72)$$

con $\tilde{k} = 2\pi\tilde{N}/\lambda_0$. Comparando las ecs. (71) y (72), observamos que el caso de la placa de partículas es semajante al del medio continuo si se cumple la relación

$$\frac{\tilde{N}}{N} = 1 + i \frac{2\pi}{k^3} n(\vec{\mathbf{X}} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0}. \quad (73)$$

Para poder tratar una placa de partículas como un medio continuo a través de un índice de refracción \tilde{N} , encontremos la expresión del campo *reflejado*, mostrado en la fig. 7. Es decir, se realizará el mismo cálculo que para el campo transmitido pero ahora

$$\vec{\mathbf{R}}_j = -[x_j \hat{e}_x + y_j \hat{e}_y + (d + z_j) \hat{e}_z] = R_j \hat{e}_j, \quad (74)$$

por lo que las expresiones calculadas en las ecs. (64) y (65) son las mismas, sustituyendo $(d - z) \rightarrow (d + z)$. Por lo tanto el campo esparcido por las partículas detrás de la placa es

$$\begin{aligned} \sum_j \vec{\mathbf{E}}_{sj} &\approx -E_0 n \frac{2\pi}{k^2} (\vec{\mathbf{X}}(\hat{e}))_{\theta=\pi} \int_0^h e^{ikz} e^{ik(d+z)} dz, \\ &= iE_0 n \frac{\pi}{k^3} (\vec{\mathbf{X}}(\hat{e}))_{\theta=\pi} e^{ikd} \left(e^{i2kh} - 1 \right), \end{aligned}$$

y sustituyendo la ec. (56) en este resultado, se obtiene que

$$\vec{\mathbf{E}}_r = -\vec{\mathbf{E}}_i \frac{in\pi}{k^3} \left(1 - e^{i2kh} \right) (\vec{\mathbf{X}}(\hat{e}))_{\theta=\pi}, \quad (75)$$

donde se utilizó que evaluar en $x, y = 0$ y $z < 0$ es equivalente a evaluar en $\theta = \pi$. Por la ec. (69) y suponiendo que $\vec{\mathbf{X}} \cdot \hat{e}_y = 0$, el campo eléctrico de la ec. (75) sólo tiene componentes distintas de cero en la componente x .

Dado que el coeficiente de amplitud de reflexión r_{slab} para una placa de un medio continuo lineal, homogéneo e isotrópico de grosor h con índice de refracción \tilde{N} inmersa en un medio con índice de refracción N , donde además $\tilde{N} \approx N$, está dado por

$$r_{slab} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\tilde{N}}{N} \right) \left(1 - e^{i2kh} \right). \quad (76)$$

y sustituyendo en la ec. (73) en (76) y comparándola con la ec. (75), se concluye que una requisito para tratar a una placa de partículas como un medio continuo es que

$$\vec{\mathbf{X}}_{\theta=0} = \vec{\mathbf{X}}_{\theta=\pi}, \quad (77)$$

asumiendo que no hay componente en y en los campos esparcidos. Para partículas esféricas con un diámetro menor a la longitud de onda del campo eléctrico incidente la ec. (77) se satisface sin embargo, no es correcto considerar a \tilde{N} como un índice de refracción debido a que la extinción para un medio continuo se debe a la absorción y ésta se relaciona con la parte imaginaria del índice de refracción, mientras que para \tilde{N} la extinción se debe total o parcialmente al esparcimiento y, aún teniendo materiales no absorbentes, la parte imaginaria de \tilde{N} es distinta de cero.

El coeficiente de extinción α_{ext} dada por $I_t = I_i e^{-\alpha_{ext}h}$, la ec. (71) y considerando el teorema óptico que da una expresión para la sección transversal de extinción mediante la relación

$$C_{ext} = \frac{4\pi}{k^2} \text{Re}[(\vec{\mathbf{X}} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0}] \quad (78)$$

se concluye que

$$\alpha_{ext} = nC_{ext} = nC_{abs} + nC_{sca}. \quad (79)$$

Cabe mencionar que a pesar de que se asumieron partículas idénticas, el resultado se generaliza a una mezcla de partículas mediante el principio de superposición, siempre que la densidad de partículas por columnen permita aproximar la ec. (60) mediante una integral.