

# Sección 3.4.1

## Extinción por una placa de partículas

Urrutia Aguiano, Jonathan Alexis

Supongamos una colección de partículas colocadas en la región semi infinita definida por los intervalos  $0 < z < h$ ,  $-\infty < x < \infty$  y  $-\infty < y < \infty$ , en donde las partículas se encuentran distribuídas *casi* uniformemente. Si una onda plana polarizada dada por

$$E_i = E_0 e^{ikz} \hat{e}_x, \quad (1)$$

incide de forma normal a la placa de partículas (ver fig. 1), el campo eléctrico transmitido  $\vec{E}_t$ , en el punto  $P$ , es la suma del campo incidente y el campo esparcido por cada una de las partículas en el punto  $\vec{R}_j$ , denotado por  $\vec{E}_{sj}$ . Esto es

$$\vec{E}_t = \vec{E}_i + \sum_j \vec{E}_{sj}, \quad (2)$$

donde se considera que

$$\vec{E}_{sj} = \frac{e^{kR_j}}{-ikR_j} \vec{X}_j(\hat{e}_j) E_0 e^{ikz_j}, \quad (3)$$

$$\vec{R}_j = -[x_j \hat{e}_x + y_j \hat{e}_y + (z_j - d) \hat{e}_z] = R_j \hat{e}_j. \quad (4)$$

Asimismo,  $\vec{X}_j(\hat{e}_j) = (S_2 \cos \varphi_j + S_3 \sin \varphi_j) \hat{e}_{\parallel sj} + (S_4 \cos \varphi_j + S_1 \sin \varphi_j) \hat{e}_{\perp sj}$  y en coordenadas polares depende de las variables  $\varphi_j$  y  $\theta_j$ , ya que  $\hat{e}_{\parallel sj} = \hat{e}_{\theta_i}$  y  $\hat{e}_{\perp sj} = \hat{e}_{\varphi_j}$

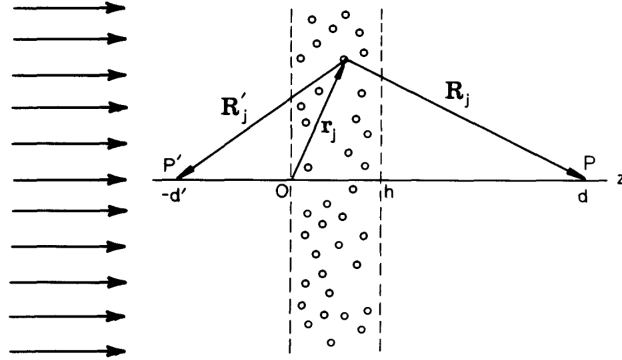


Figura 1: Placa semi infinita de grosor  $h$ . El punto  $P$  se encuentra a una distancia  $d$  del origen.

Suponiendo además que el número de partículas por volumen  $n$  es tal que permite aproximar la suma de la ec. ((2)) mediante una integral, que todas las partículas en la placa son idénticas y, dado que la onda plana incide de manera normal a la placa,  $\vec{X}_j(\hat{e}_j) = \vec{X}(\hat{e})$ . Entonces el campo esparcido se escribe como

$$\sum_j \vec{E}_{sj} \approx E_0 n \int_0^h dz e^{ikz} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\vec{X}(\hat{e})}{-ikR} e^{ikR}, \quad (5)$$

$$= E_0 n \int_0^h dz e^{ikz} \int_{-\infty}^{\infty} dy I_x(y, z), \quad (6)$$

$$= E_0 n \int_0^h dz e^{ikz} I_y(z), \quad (7)$$

donde  $I_x$  es el resultado de la integral en la variable  $x$  y a su vez  $I_y$  el resultado de la integral en la variable  $y$ . Sustituyendo la ec. (4) en (5) se obtiene que

$$\sum_j \vec{E}_{sj} \approx E_0 n \int_0^h dz e^{ikz} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\vec{X}(\hat{e}) e^{ik\sqrt{x^2+y^2+(d-z)^2}}}{-ik\sqrt{x^2+y^2+(d-z)^2}}. \quad (8)$$

En secciones anteriores se supuso que  $kr \gg 1$  pero como  $r = d$ , entonces  $k \gg 1$ . Entonces es posible calcular  $I_x$  mediante el teorema de fase estacionaria<sup>1</sup>, identificando

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow k, \\ g(x) &\rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + (d-z)^2}, \\ f(x) &\rightarrow \frac{\vec{X}(\hat{e})}{-ik\sqrt{x^2 + y^2 + (d-z)^2}}, \end{aligned}$$

y como  $g'(x) = 0$  si  $x = 0$  y  $g''(0) = \frac{1}{\sqrt{y^2+(d-z)^2}}$ , se obtiene que

$$I_x(y, z) = \frac{(\vec{X}(\hat{e}))_{x=0}}{-ik(y^2 + (d-z)^2)^{1/4}} \sqrt{\frac{2\pi}{k}} e^{i\pi/4} e^{ik\sqrt{y^2+(d-z)^2}}. \quad (10)$$

Como  $I_y(z) = \int_{-\infty}^{\infty} I_x(y, z) dy$ , se puede utilizar nuevamente el teorema de fase estacionaria, identificando

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow k, \\ g(y) &\rightarrow \sqrt{y^2 + (d-z)^2}, \\ f(y) &\rightarrow \frac{(\vec{X}(\hat{e}))_{x=0}}{-ik(y^2 + (d-z)^2)^{1/4}} \sqrt{\frac{2\pi}{k}} e^{i\pi/4}, \end{aligned}$$

y como  $g'(y) = 0$  si  $y = 0$  y  $g''(0) = \frac{1}{|d-z|}$ , entonces

$$\begin{aligned} I_y(z) &= \left( \frac{(\vec{X}(\hat{e}))_{x,y=0}}{-ik((d-z)^2)^{1/4}} \sqrt{\frac{2\pi}{k}} e^{i\pi/4} \right) \sqrt{\frac{2\pi|z-d|}{k}} e^{i\pi/4} e^{ik|d-z|} \\ &= -\frac{2\pi}{k^2} (\vec{X}(\hat{e}))_{x,y=0} e^{ik|d-z|}, \end{aligned} \quad (11)$$

por lo que el campo esparcido está dado por la expresión

$$\sum_j \vec{E}_{sj} \approx -E_0 n \frac{2\pi}{k^2} (\vec{X}(\hat{e}))_{x,y=0} \int_0^h e^{ikz} e^{ik|d-z|} dz, \quad (12)$$

---

<sup>1</sup>Sean  $f$  y  $g$  funciones que permita su expansión en series de Taylor en el intervalo  $[a, b]$ , ( $g$  con valores en los reales) y que en  $c \in [a, b]$  se cumpla que  $g'(c) = 0, g''(c) \neq 0, f(c) \neq 0$  y que  $g$  sea distinto de cero en todo el intervalo. Si  $\alpha \gg 1$ , entonces

$$\int_a^b f(t) e^{\alpha g(t)} \approx f(c) e^{i\alpha g(c)} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha |g''(c)|}} e^{i\pi\mu/4}, \quad (9)$$

con  $\mu = \text{sign}(g''(c))$

y dado que  $0 < z < h < d$

$$\sum_j \vec{E}_{sj} \approx -E_0 n \frac{2\pi}{k^2} (\vec{X}(\hat{e}))_{\theta=0} \int_0^h e^{ikz} e^{ik(d-z)} dz, \quad (13)$$

$$= -E_0 n \frac{2\pi}{k^2} (\vec{X}(\hat{e}))_{\theta=0} h e^{ikd}. \quad (14)$$

Antes de continuar notemos que como  $\vec{X}(\hat{e}) = X_{\parallel} \hat{e}_{\parallel} + X_{\perp} \hat{e}_{\perp} = X_{\parallel} \hat{e}_{\theta} + X_{\perp} \hat{e}_{\varphi}$ , en coordenadas cartesianas,  $\vec{X}$  se escribe como

$$\vec{X} = (X_{\parallel} \cos \theta \cos \varphi + X_{\perp} \sin \varphi) \hat{e}_x + (X_{\parallel} \cos \theta \sin \varphi - X_{\perp} \cos \varphi) \hat{e}_y + X_{\parallel} \sin \theta \hat{e}_z \quad (15)$$

por lo que, si se evalúa en  $x, y = 0$  y  $z > 0$ , o lo que es equivalente en  $\theta > 0$ ,  $\vec{X}(\hat{e})$  sólo cuenta con componentes  $x$  y  $y$ . Finalmente, sustituyendo las ecs. (1) y (14) en la ec. (2), se obtiene la expresión del campo transmitido por la placa a una distancia  $d$

$$\vec{E}_t = E_0 e^{ikd} \left\{ \left[ 1 - \frac{2\pi}{k^2} n h (\vec{X} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0} \right] \hat{e}_x - \frac{2\pi}{k^2} n h (\vec{X} \cdot \hat{e}_y)_{\theta=0} \hat{e}_y \right\}. \quad (16)$$

A pesar de que la onda incidente estaba polarizada linealmente en la dirección  $x$ , el campo esparcido puede presentar componentes en la dirección  $y$ , por lo que en general, el ángulo de polarización es rotado al atravesar la placa de partículas. Suponiendo que  $\vec{X} \cdot \hat{e}_y = 0$  y que  $|2\pi k^{-2} n h (\vec{X} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0}| \ll 1$ , puesto que  $k \gg 1$ , el campo eléctrico transmitido es entonces

$$\vec{E}_t = \vec{E}_i e^{-\frac{2\pi}{k^2} n h (\vec{X} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0}} \quad (17)$$

Recordemos que el coeficiente de amplitud de transmisión  $t_{slab}$  de una placa de un medio continuo lineal, homogéneo e isótropo de grosor  $h$  con índice de refracción  $\tilde{N}$  inmersa en un medio con índice de refracción  $N$ , donde además  $\tilde{N} \approx N$ , está dado por

$$t_{slab} \approx e^{ih(\tilde{k}-k)} \quad (18)$$

con  $\tilde{k} = 2\pi\tilde{N}/\lambda_0$ . Comparando las ecs. (17) y (18), observamos que el caso de la placa de partículas es semajente al del medio continuo si se cumple la relación

$$\frac{\tilde{N}}{N} = 1 + i \frac{2\pi}{k^3} n (\vec{X} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0}. \quad (19)$$

Para poder tratar una placa de partículas como un medio continuo a través de un índice de refracción  $\tilde{N}$ , encontremos la expresión del campo *reflejado*, mostrado en la fig. 1. Es decir, se realizará el mismo cálculo que para el campo transmitido pero ahora

$$\vec{R}_j = -[x_j \hat{e}_x + y_j \hat{e}_y + (d + z_j) \hat{e}_z] = R_j \hat{e}_j, \quad (20)$$

por lo que las expresiones calculadas en las ecs. (10) y (11) son las mismas, sustituyendo  $(d - z) \rightarrow (d + z)$ . Por lo tanto el campo esparcido por las partículas detrás de la placa es

$$\begin{aligned} \sum_j \vec{E}_{sj} &\approx -E_0 n \frac{2\pi}{k^2} (\vec{X}(\hat{e}))_{\theta=\pi} \int_0^h e^{ikz} e^{ik(d+z)} dz, \\ &= iE_0 n \frac{\pi}{k^3} (\vec{X}(\hat{e}))_{\theta=\pi} e^{ikd} (e^{i2kh} - 1), \end{aligned}$$

y sustituyendo la ec. (1) en este resultado, se obtiene que

$$\vec{E}_r = -\vec{E}_i \frac{in\pi}{k^3} (1 - e^{i2kh}) (\vec{X}(\hat{e}))_{\theta=\pi}, \quad (21)$$

donde se utilizó que evaluar en  $x, y = 0$  y  $z < 0$  es equivalente a evaluar en  $\theta = \pi$ . Por la ec. (15) y suponiendo que  $\vec{X} \cdot \hat{e}_y = 0$ , el campo eléctrico de la ec. (21) sólo tiene componentes distintas de cero en la componente  $x$ .

Dado que el coeficiente de amplitud de reflexión  $r_{slab}$  para una placa de un medio continuo lineal, homogéneo e isotrópico de grosor  $h$  con índice de refracción  $\tilde{N}$  inmersa en un medio con índice de refracción  $N$ , donde además  $\tilde{N} \approx N$ , está dado por

$$r_{slab} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\tilde{N}}{N} \right) (1 - e^{i2kh}). \quad (22)$$

y sustituyendo en la ec. (19) en (22) y comparándola con la ec. (21), se concluye que una requisito para tratar a una placa de partículas como un medio continuo es que

$$\vec{X}_{\theta=0} = \vec{X}_{\theta=\pi}, \quad (23)$$

asumiendo que no hay componente en  $y$  en los campos esparcidos. Para partículas esféricas con un diámetro menor a la longitud de onda del campo eléctrico incidente la ec. (23) se satisface sin embargo, no es correcto considerar a  $\tilde{N}$  como un índice de refracción debido a que la extinción para un medio continuo se debe a la absorción y ésta se relaciona con la parte imaginaria del índice de refracción, mientras que para  $\tilde{N}$  la extinción se debe total o parcialmente al esparcimiento y, aún teniendo materiales no absorbentes, la parte imaginaria de  $\tilde{N}$  es distinta de cero.

El coeficiente de extinción  $\alpha_{ext}$  dada por  $I_t = I_i e^{-\alpha_{ext}h}$ , la ec. (17) y considerando el teorema óptico que da una expresión para la sección transversal de extinción mediante la relación

$$C_{ext} = \frac{4\pi}{k^2} \text{Re}[(\vec{X} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0}] \quad (24)$$

se concluye que

$$\alpha_{ext} = nC_{ext} = nC_{abs} + nC_{sca}. \quad (25)$$

Cabe mencionar que a pesar de que se asumieron partículas idénticas, el resultado se generaliza a una mezcla de partículas mediante el principio de superposición, siempre que la densidad de partículas por volumen permita aproximar la ec. (5) mediante una integral.