

Solución de Mie

Jonathan e Isabel

27 de agosto de 2021

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Índice de figuras | v |
| Índice de tablas | vii |
| 1. Conceptos de electromagnetismo | 1 |
| 1.1. Las ecuaciones de Maxwell | 1 |
| 1.2. Condiciones a la frontera | 3 |
| 1.3. Campos electromagnéticos armónicos | 6 |
| 1.4. Vector de Poynting | 8 |
| 1.5. Permitividad eléctrica y permeabilidad magnética | 9 |
| 2. Teoría general de esparcimiento | 11 |
| 2.1. Matriz de amplitud de esparcimiento | 11 |
| 2.2. Esparcimiento, extinción y absorción | 14 |
| 2.3. Teorema óptico | 19 |
| 2.4. Ejercicios sugeridos | 22 |
| 3. Los armónicos esféricos vectoriales | 27 |
| 3.1. Solución con geometría esférica | 28 |
| 3.2. Relaciones de ortogonalidad | 31 |

| | |
|--|----|
| 3.3. Expansión de una onda plana | 33 |
| 3.4. Ejercicios sugeridos | 35 |
| 4. Esparcimiento y absorción de una esfera | 37 |
| 5. Casos particulares | 39 |
| A. Teorema Óptico: Deducción de van de Hulst | 41 |

Índice de figuras

| | |
|--|----|
| 1.1. Condiciones de frontera | 5 |
| 1.2. Campo electromagnético armónico | 8 |
| 2.1. Diagrama del plano de esparcimiento (en verde) definido por el vector \mathbf{r} , posición donde se evalúan los campos EMs, y el vector $\hat{\mathbf{e}}_z$, cuando una onda plana monocromática propagándose en dirección z (en rojo) ilumina a una partícula arbitraria. La base cartesiana para vectores se muestra en azul, mientras que la base esférica se muestra en negro. Las direcciones paralelas \parallel y perpendiculares \perp al plano de incidencia para el campo eléctrico incidente, denotado por el subíndice i y el esparcido, denotado por el subíndice s , se muestran en morado; el haz incidente se muestra en rojo. | 11 |
| 2.2. Diagrama de la extinción de luz por una nube de partículas esparcidoras. La energía que mide el detector en la ausencia de partículas es U_0 sin embargo, al interactuar la luz con las partículas, la lectura de energía es U . La energía $U - U_0$ corresponde a la energía que no llega al detector asociada tanto al esparcimiento de luz, como a la absorbida por las partículas; al conjunto de estos fenómenos se le denomina extinción. | 15 |

Índice de tablas

*Dedicado a todos nosotros que estudiamos esto y
lo escribimos porque nos odiamos un poquito :)*

Introduction

Aquí iría el texto que todos vamos a escribir al final, en donde hablamos del propósito del libro y esas cosas.

Capítulo 1

Conceptos de electromagnetismo

Con el propósito de desarrollar la solución de Mie, se comenzará por una breve revisión de algunos conceptos del electromagnetismo. Se establecerán las convenciones que se usarán lo largo de estas notas y servirá como un punto de partida para el desarrollo del problema de esparcimiento.

1.1. Las ecuaciones de Maxwell

Los fenómenos electromagnéticos son descritos completamente a través las cuatro *ecuaciones de Maxwell* junto con la fuerza de Lorentz. Con ellas se describe el comportamiento y la propagación de los campos electromagnéticos (EMs) y cómo son influenciados por fuentes externas [jackson1999electrodynamics](#). Considerando que los campos eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{B} se propagan en el vacío, las ecuaciones de Maxwell se escriben como [jackson1999electrodynamics](#):

Ecuaciones de Maxwell en el SI

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0}, \quad \text{Ley de Gauss eléctrica} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \text{Ley de Gauss magnética} \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{Ley de Faraday-Lenz} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{tot} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \text{Ley de Ampère-Maxwell} \quad (1.4)$$

en donde ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío, mientras que μ_0 es la per-

meabilidad magnética del vacío; ρ_{total} se refiere a la densidad volumétrica de carga total y \mathbf{J}_{tot} a la densidad volumétrica de corriente total. Las ecuaciones de Maxwell son el resultado de observaciones experimentales y son verificables en un amplio rango de sistemas macroscópicos [reitz1993foundations](#).

En medios materiales se presentan cargas y corrientes inducidas que modifican al campo externo aplicado. Este tipo de cargas y corrientes están asociadas a las moléculas y átomos dentro del material [purcell2011electricity](#). Es conveniente definir al vector de desplazamiento, definido como [jackson1999electrodynamics](#):

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (1.5)$$

con \mathbf{P} la polarización del material, y al campo \mathbf{H} , cuya relación con el campo magnético es [griffiths2013electrodynamics](#):

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}. \quad (1.6)$$

donde \mathbf{M} corresponde a la magnetización del medio material. Por tanto, las ecuaciones de Maxwell en medios materiales son [jackson1999electrodynamics](#):

Ecuaciones de Maxwell en medios materiales

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{ext}, \quad (1.7a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.7b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.7c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{ext} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.7d)$$

en donde ρ_{ext} corresponde a la densidad de carga volumétrica externa y \mathbf{J}_{ext} es la densidad de corriente volumétrica externa. Las cargas y corrientes externas son todas aquellas distintas a las cargas y corrientes inducidas, respectivamente [griffiths2013electrodynamics](#).

Las ecuaciones de Maxwell en para medios materiales [Ecs. (1.7a)–(1.7d)] contienen la información del material a través de dos cantidades conocidas como polarización, \mathbf{P} , y magnetización, \mathbf{M} [griffiths2013electrodynamics](#). Por ello, es preciso contar con relaciones que describan el comportamiento de los materiales bajo la influencia de los campos EMs. En general, la polarización y magnetización no se pueden describir en una forma reducida y simple. Sin embargo, pueden realizarse algunas suposiciones sobre el material en cuestión. El caso más sencillo consiste en un medio material que cumple con ser *homogéneo* (sus propiedades son iguales en cada punto), *isótropo* (sus propiedades ópticas en cada punto son independientes de la dirección) y tiene una respuesta ante los campos EMs de tipo *lineal*. Por tanto, las *relaciones constitutivas*, que establecen la conexión entre los cuatro campos vectoriales \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} y \mathbf{H} , la polarización

y la magnetización cumplen son [griffiths2013electrodynamics](#):

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad (1.8)$$

respectivamente, donde se ha utilizado que χ_e (χ_m) es la susceptibilidad eléctrica (magnética). De esta forma, al sustituir las Ecs. (1.8) en las expresiones para los campos \mathbf{D} [Ec. (1.5)] y \mathbf{H} [Ec. (1.6)], se llega a [griffiths2013electrodynamics](#)

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \text{y} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}, \quad (1.9)$$

donde $\epsilon \equiv \epsilon_0 (1 + \chi_e)$ y $\mu \equiv \mu_0 (1 + \chi_m)$ son la permitividad y permeabilidad características del medio material, respectivamente. En general, ϵ es una cantidad compleja que depende de la frecuencia angular asociada a los campos EMs. A partir de ambas propiedades se expresa el índice de refracción del material en cuestión [griffiths2013electrodynamics](#)

$$n \equiv \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (1.10)$$

1.2. Condiciones a la frontera

Las ecuaciones de Maxwell son ecuaciones diferenciales aplicadas localmente en cada punto del espacio [jackson1999electrodynamics](#). A partir de éstas se pueden calcular el comportamiento de los campos EMs cuando cruzan la interfaz entre dos medios. En su versión integral se escriben como sigue [griffiths2013electrodynamics](#)

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{tot}, \quad (1.11a)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0, \quad (1.11b)$$

$$\oint_P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}, \quad (1.11c)$$

$$\oint_P \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{tot} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a}, \quad (1.11d)$$

donde Q_{tot} es la carga total, es decir, la suma de las cargas inducidas y las externas.

Con el propósito de estudiar la continuidad de los campos EMs en una interfaz, primero, se suponen dos medios, cada uno caracterizado por sus propiedades EMs: ϵ_1, μ_1 para el medio 1 y ϵ_2, μ_2 para el medio 2. La interfaz que separa ambos medios tienen densidad superficial de carga σ_{tot} y una densidad superficial de corriente \mathbf{K}_{tot} . En particular, para analizar las componentes de \mathbf{D} ortogonales a la interfaz, se realiza la integral en la Ec. (1.11a). Para ello, se elige un prisma rectangular como el que se muestra en la Fig. 1.1(a) (conocido como *Gaussian*

pillbox); se supone que su altura es δ y que sus caras paralelas a la superficie tienen un área A . Una parte del volumen se encuentra por encima de la interfaz y el resto por debajo. El vector normal a la superficie está denotado por $\hat{\mathbf{n}}$. Puesto que la integral en la Ec. (1.11a) es de superficie, se realiza sobre todas las caras del volumen. En el límite donde la altura de la caja es infinitesimalmente pequeña ($\delta \rightarrow 0$), el flujo de campo eléctrico en las caras perpendiculares a la superficie es nulo. Por tanto, sólo las caras de área A contribuyen, dando como resultado [griffiths2013electrodynamics](#):

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = (D_1^\perp - D_2^\perp) A = Q_{enc}, \quad (1.12)$$

donde D_1^\perp y D_2^\perp corresponden a las componentes del vector de desplazamiento ortogonales a la interfaz en los medios 1 y 2, respectivamente. Además, Q_{enc} es la carga encerrada por el volumen de la caja. Recordando que $Q_{enc} = \sigma_{enc}A$, se puede reescribir a la Ec. (1.12) en términos de la densidad de carga superficial:

$$D_1^\perp - D_2^\perp = \sigma_{tot}. \quad (1.13)$$

Por tanto, la componente perpendicular del campo \mathbf{D} es discontinua en la frontera entre dos medios. En la Ec. (1.12) se supone que la magnitud de ambas componentes del campo es constante, de forma similar, se está suponiendo que σ_{enc} es constante. En el caso donde se presenten variaciones espaciales ya sea de la magnitud del campo o de σ_{enc} , el volumen elegido para hacer la integración puede ser lo suficientemente pequeño para que sólo encierre una región donde ambas cantidades puedan ser consideradas constantes.

A través de un procedimiento similar y usando a la Ec. (1.11b), se deduce que [griffiths2013electrodynamics](#)

$$B_1^\perp - B_2^\perp = 0, \quad (1.14)$$

donde B_i^\perp denota la componente del campo \mathbf{B} perpendicular a la interfaz dentro del medio $i = 1, 2$. Es decir, la componente perpendicular del campo \mathbf{B} es continua a través de la frontera. Por otro lado, a partir de la Ec. (1.11c) es posible describir la continuidad de las componentes del campo eléctrico paralelas a la interfaz. Con ese fin, la integral de trayectoria en la Ec. (1.11c) se calcula utilizando un circuito rectangular como el mostrado en la Fig. 1.1(b); su altura es δ y el ancho l . Nuevamente, la mitad del circuito se encuentra inmerso en el medio 1 (sobre la interfaz) y el resto en el medio 2 (debajo de la interfaz). Se considerará el límite $\delta \rightarrow 0$, por tanto, la integral queda como

$$\oint_P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (E_1^\parallel - E_2^\parallel)l = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{l} - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{l}, \quad (1.15)$$

siendo E_1^\parallel y E_2^\parallel las componentes del campo eléctrico paralelas a la superficie de la interfaz en los medios 1 y 2, respectivamente. Por otra parte, al considerar que la altura del circuito es infinitamente pequeña la contribución del campo magnético a la Ec. (1.11c) es despreciable. Esto último puede entenderse al considerar que la integral de superficie del campo \mathbf{B} da como resultado $B_\perp A^*$,

con A^* el área del circuito. Al realizar el límite $\delta \rightarrow 0$, el área también tiende a cero. Por tanto, se concluye que [griffiths2013electrodynamics](#)

$$\mathbf{E}_1^{\parallel} - \mathbf{E}_2^{\parallel} = \mathbf{0}, \quad (1.16)$$

es decir, los componentes del campo eléctrico paralelas a la interfaz son continuas sobre la frontera.

De la Ec. (1.11d) se deduce una relación para las componentes del campo \mathbf{H} . Utilizando el circuito ya descrito, se realiza la integral de contorno [griffiths2013electrodynamics](#):

$$\oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (H_1^{\parallel} - H_2^{\parallel})l = \mathbf{H}_1^{\parallel} \cdot \mathbf{l} - \mathbf{H}_2^{\parallel} \cdot \mathbf{l}, \quad (1.17)$$

donde H_1^{\parallel} y H_2^{\parallel} son las componentes del campo eléctrico paralelas a la superficie de la interfaz en los medios 1 y 2, respectivamente. Se debe notar que la contribución del campo \mathbf{D} a la Ec. (1.11d) es despreciable debido a que, al considerar $\delta \rightarrow 0$, el área del circuito es infinitesimalmente pequeña. Por otra parte, la corriente encerrada por el circuito es I_{enc} . Puesto que para este caso sólo la densidad de corriente superficial contribuye, la corriente se escribe como [griffiths2013electrodynamics](#):

$$I_{tot} = \mathbf{K}_{tot} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{l}) = (\mathbf{K}_{tot} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{l} \quad (1.18)$$

donde, $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario y normal a la interfaz. De esta forma, se llega a que [griffiths2013electrodynamics](#)

$$\mathbf{H}_1^{\parallel} - \mathbf{H}_2^{\parallel} = \mathbf{K}_{tot} \times \hat{\mathbf{n}}. \quad (1.19)$$

Las componentes paralelas de \mathbf{H} son discontinuas en la frontera por una cantidad proporcional a la densidad de corriente superficial.

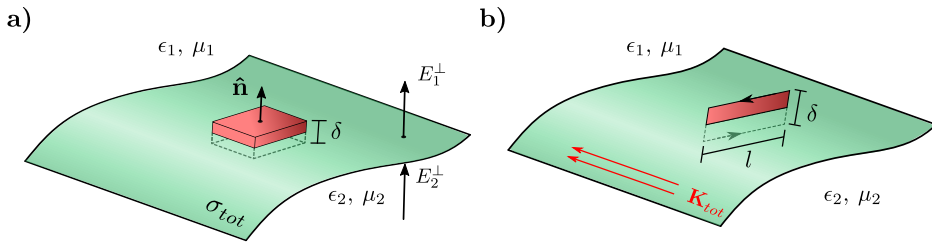


Fig. 1.1: Diagrama de una interfaz (superficie en verde) que separa dos medios homogéneos, lineales e isótropos. El *medio 1* tiene propiedades EM ϵ_1, μ_1 , mientras que las del *medio 2* son ϵ_2, μ_2 . **a)** Prisma rectangular con altura δ y cuyas caras paralelas a la superficie tiene un área A . Sobre la superficie que separa a los medios hay una densidad de carga superficial total σ_{tot} . **b)** Circuito rectangular con altura δ y ancho l . En la interfaz entre los medios hay una densidad de corriente superficial \mathbf{K}_{tot} .

En particular, cuando los medios son lineales, las condiciones de frontera son [griffiths2013electrodynamics](#):

Condiciones de frontera para materiales lineales

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp &= \sigma_{tot}, & \mathbf{E}_1^\parallel - \mathbf{E}_2^\parallel &= \mathbf{0}, \\
B_1^\perp - B_2^\perp &= 0, & \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel &= \mathbf{K}_{tot} \times \hat{\mathbf{n}}.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

En las Ecs. (1.20) es posible notar que, si no hay fuentes externas, tanto componentes paralelas como perpendiculares de los campos EMs son continuas en la frontera entre ambos medios.

1.3. Campos electromagnéticos armónicos

Las ecuaciones de Maxwell son cuatro relaciones entre los campos \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} y \mathbf{H} acopladas, sien embargo es posible separarlas y obtener una ecuación para sólo uno de los campos. Para ello, primero, se observa que, en el vacío y sin fuentes externas, es decir, $\mathbf{J}_{ext} = \mathbf{0}$, $\rho_{ext} = 0$, se cumple que

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \text{y} \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}, \tag{1.21}$$

Por otro lado, se calcula el rotacional de la Ec. (1.7d)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{\partial \nabla \times \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{1.22}$$

donde se utilizó la relación [griffiths2013electrodynamics](#)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \tag{1.23}$$

y que $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$. Además, se cumple también que $\nabla \times \mathbf{D} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$. Me hiciste la observación de agregar que $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$, pero no creo que sea necesario si desde la Ec (1.21) no estoy incluyendo a \mathbf{M} y \mathbf{P} , o estoy entendiendo algo mal? Por tanto, sustituyendo en la Ec. (1.22), se obtiene que [griffiths2013electrodynamics](#)

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0, \tag{1.24}$$

A través de un procedimiento análogo se llega a

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \tag{1.25}$$

Las Ecs. (1.24) y (1.25) son la ecuación de onda vectorial para el campo \mathbf{H} y \mathbf{E} , respectivamente. Cada una de las componentes de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} debe satisfacer a la ecuación de onda en su versión escalar. A partir de las Ecs. (1.24) y (1.25), la velocidad de la luz se expresa en términos de la permitividad y permeabilidad $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$.

Una de las soluciones más sencillas a la ecuación de onda escalar está dada por [griffiths2013electrodynamics](#)

$$f(\mathbf{r}, t) = Ae^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (1.26)$$

donde \mathbf{k} es el vector de onda, asociado a la dirección de propagación de la onda, y ω es la frecuencia angular, da el número de vibraciones en 2π segundos [born2005principles](#). La amplitud A es una cantidad compleja. La Ec. (1.26) también pudo ser escrita en términos de las funciones seno y coseno, sin embargo, es preferible el uso de exponenciales complejas puesto que es más sencillo de manipular para hacer cálculos. Al final, sólo se considera la parte real de la función de onda [griffiths2013electrodynamics](#).¹

Debido a la forma de la dependencia temporal en la Ec. (1.26) se dice que el campo es armónico en el tiempo. Por ello, los campos EMs armónicos se escriben como [griffiths2013electrodynamics](#)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (1.27)$$

para que los campos en la Ec. (1.27) puedan ser soluciones a las ecuaciones de Maxwell deben cumplir la relación de dispersión $\omega = kc$. En ausencia de fuentes externas los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} son ortogonales entre sí y respecto al vector de onda \mathbf{k} (ver Fig. 1.2). Se relacionan entre sí a través de la siguiente ecuación [griffiths2013electrodynamics](#):

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad (1.28)$$

Debido a la forma de los campos EMs [Ecs. (1.27)], las ecuaciones de Maxwell se reescriben como [bohren1998absorption](#)

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E}_c = 0, \quad (1.29)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (1.30)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}_c, \quad (1.31)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\epsilon\mathbf{E}_c. \quad (1.32)$$

Nuevamente, es posible desacoplar las ecuaciones de Maxwell. Para ello calculamos el rotacional de las Ecs. (1.31) y (1.32):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = i\omega\mu\nabla \times \mathbf{H} = \omega^2\epsilon\mu\mathbf{E}, \quad (1.33)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -i\omega\epsilon\nabla \times \mathbf{E} = \omega^2\epsilon\mu\mathbf{H}. \quad (1.34)$$

Usando la propiedad en la Ec. (1.23), se reescriben a las Ecs. (1.33) y (1.34) como sigue

¹A partir de la Ec. (1.26) se distingue a la onda plana; se obtiene cuando $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ es constante, por tanto, en cada instante de tiempo V es constante en cada plano definido por $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ [griffiths2013electrodynamics](#).

Ecuación vectorial de Helmholtz

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \epsilon \mu \mathbf{E} = 0, \quad (1.35a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \omega^2 \epsilon \mu \mathbf{H} = 0, \quad (1.35b)$$

en donde $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$.

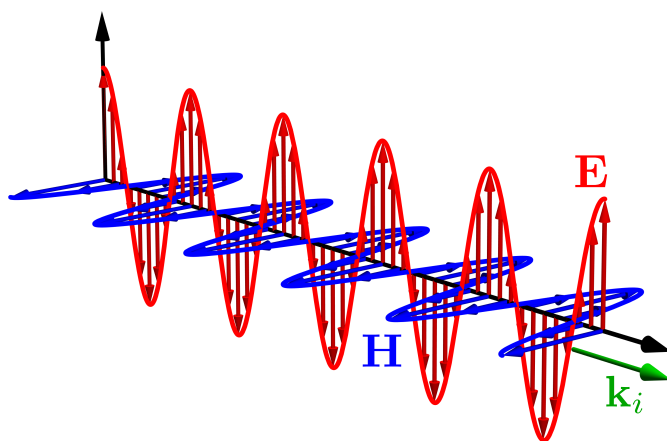


Fig. 1.2: Representación de los campos EMs armónicos. En rojo se encuentra el campo eléctrico \mathbf{E} y en azul el campo \mathbf{H} , para cada uno, las flechas indican la orientación de su oscilación. La flecha verde indica la dirección de propagación de la onda, dada por \mathbf{k}_i .

1.4. Vector de Poynting

El vector de Poynting es una cantidad que indica la energía por unidad de tiempo, por unidad de área, transportada por los campos EMs, de forma general, se define como [griffiths2013electrodynamics](#):

$$\mathbf{S} = (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \quad (1.36)$$

La energía por unidad de tiempo que cruza una superficie infinitesimal $d\mathbf{a}$ es $\mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}$, y es llamado flujo de energía [griffiths2013electrodynamics](#).

En el caso de la luz, las longitudes de onda, definidas como $\lambda = 2\pi/k$, son cortas ($\sim 5 \times 10^{-7}$ m), y tiene un periodo de oscilación ($2\pi/\omega$) aproximado de 10^{-15} s, por lo que las mediciones macroscópicas involucran muchos ciclos. Por ello no es viable medir directamente al vector de Poynting. Por lo tanto, se utiliza el promedio temporal, denotado con $\langle \dots \rangle$ [griffiths2013electrodynamics](#). Retomando el caso de campos EMs armónicos, el vector de Poynting luce de la siguiente forma

$$\mathbf{S} = \text{Re}\{\mathbf{E}\} \times \text{Re}\{\mathbf{H}\}, \quad (1.37)$$

cuyo promedio temporal es [born2005principles](#)

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*), \quad (1.38)$$

en donde el asterisco * indica el complejo conjugado. El cálculo del promedio temporal se realiza sobre un ciclo completo. Ahora es posible calcular la potencia promedio por unidad de área transportada por una onda EM, es decir, la intensidad [griffiths2013electrodynamics](#)

$$I = \langle S \rangle \quad (1.39)$$

Con el vector de Poynting también se determina la magnitud y dirección de la tasa de transferencia de energía electromagnética en cualquier punto del espacio [bohren1998absorption](#). Es posible cuantificar la tasa neta con la que la energía EM cruza la frontera de una superficie cerrada A que encierra un volumen V [bohren1998absorption](#):

$$W = - \int_A \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA, \quad (1.40)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector unitario normal a la superficie. Es importante notar que se agrega un signo menos en la Ec. (1.40) puesto que se ha elegido el vector normal que apunta hacia afuera del volumen. Entonces, si \mathbf{S} es tal que apunta en la dirección contraria a $\hat{\mathbf{n}}$, W será positiva. Lo cual indica que la energía se absorbe.

1.5. Permitividad eléctrica y permeabilidad magnética

La permitividad eléctrica y permeabilidad magnética son cantidades esenciales para conocer el comportamiento de los campos EMs en medios materiales. Hasta ahora se han utilizado como escalares, sin embargo, en el caso más general, la permitividad y la permeabilidad son tensores. En el caso de materiales no ferroeléctricos o ferromagnéticos, la presencia de campos eléctricos o magnéticos con intensidad baja induce una polarización o magnetización proporcional a la magnitud del campo aplicado, es decir, la respuesta del medio es lineal. Las componentes cartesianas de \mathbf{D} y \mathbf{H} se escriben como [jackson1999electrodynamics](#)

$$D_i(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{ij} \epsilon_{ij} E_j(\mathbf{k}, \omega), \quad H_i(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{ij} \mu'_{ij} B_j(\mathbf{k}, \omega) \quad (1.41)$$

donde los tensores ϵ_{ij} y μ'_{ij} corresponden a la permitividad eléctrica y al inverso de la permeabilidad magnética, respectivamente [jackson1999electrodynamics](#). Además, $\mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega)$ y $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ son las transformadas de Fourier de los campos $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, respectivamente. Si se supone que ϵ es independiente del vector de onda, al calcular su transformada de Fourier, se llega a que es proporcional

a la delta de Dirac $\delta(\mathbf{r})$. Lo cual indica que $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ es local, es decir, $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ depende sólo del campo aplicado en el punto \mathbf{r} . En caso contrario, cuando es no local, la transformada de Fourier es función de $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ [yu2010fundamentals](#). Los tensores de permeabilidad y permitividad son funciones de la frecuencia y el vector de onda. Dentro del rango visible o radiación electromagnética con longitudes de onda mayores, la no localidad en el espacio es despreciable. Entonces, ϵ_{ij} y μ_{ij} dependen solo de la frecuencia [jackson1999electrodynamics](#).

Las Ecs. (1.41) representan la respuesta lineal del material y dependen de las estructuras molecular y cristalina dentro de cada material, al igual que de propiedades como la densidad y la temperatura. Los materiales lineales suelen ser isótropos, por tanto, ϵ_{ij} y μ_{ij} son diagonales con todos los elementos iguales, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ y $\mathbf{H} = \mu' \mathbf{B} = \mathbf{B}/\mu$, que corresponden a las relaciones usadas en las secciones anteriores [jackson1999electrodynamics](#). Puesto que la permitividad y permeabilidad son parte de la relación de dispersión de las ondas EM planas, es posible anticipar la respuesta general de un material ante una onda EM según la forma de ϵ . La relación de dispersión indica que [kittel1996introduction](#)

$$\epsilon(\omega, \mathbf{k}) \epsilon_0 \mu \omega^2 = k^2, \quad (1.42)$$

de donde se concluye que [kittel1996introduction](#)

- Si ϵ es un número **real y positivo**, para ω real, k es real y una onda EM transversal se propaga en el material.
- Si ϵ es un número **real y negativo**, para ω real, k es imaginario y la onda es amortiguada con una longitud característica $1/|k|$.
- Si ϵ es un número **complejo**, para ω real, \mathbf{k} es complejo y las ondas son amortiguadas en el espacio.

Capítulo 2

Teoría general de esparcimiento

2.1. Matriz de amplitud de esparcimiento

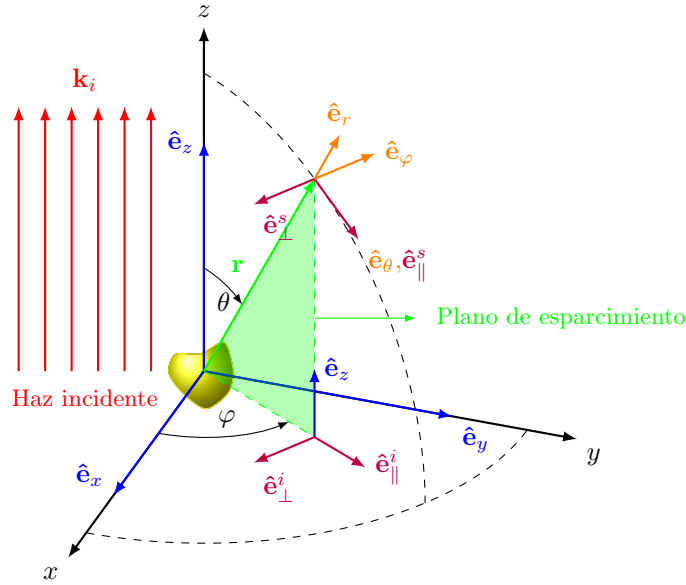


Fig. 2.1: Diagrama del plano de esparcimiento (en verde) definido por el vector \mathbf{r} , posición donde se evalúan los campos EMs, y el vector $\hat{\mathbf{e}}_z$, cuando una onda plana monocromática propagándose en dirección z (en rojo) ilumina a una partícula arbitraria. La base cartesiana para vectores se muestra en azul, mientras que la base esférica se muestra en negro. Las direcciones paralelas \parallel y perpendiculares \perp al plano de incidencia para el campo eléctrico incidente, denotado por el subíndice i y el esparcido, denotado por el subíndice s , se muestran en morado; el haz incidente se muestra en rojo.

Para el estudio del esparcimiento por una partícula arbitraria inmersa en

un medio con índice de refracción n_m , denominado matriz, se considera que la partícula es iluminada por una onda plana monocromática con una longitud de onda λ , cuya dirección de propagación define la dirección z , es decir,

$$\mathbf{E}^i = (E_x^i \hat{\mathbf{e}}_x + E_y^i \hat{\mathbf{e}}_y) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (2.1)$$

donde $k = 2\pi n_m / \lambda$ es el número de onda. En la Fig. 2.1 se muestra una partícula localizada en el origen, iluminada por una onda plana monocromática [Ec. (2.1)] que se propaga en la dirección z ; sobre la partícula se posiciona el origen del sistema coordenado cartesiano (x, y, z) . Adicionalmente, en la Fig. 2.1 se muestran en las bases de vectores ortonormales rectangulares $\{\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z\}$ en azul, y los polares $\{\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_\varphi\}$ en naranja. De forma análoga al plano de incidencia¹, se construye el plano de esparcimiento (en verde en la Fig. 2.1), con el vector de la dirección de esparcimiento $\hat{\mathbf{e}}_r$ y la dirección del haz incidente $\hat{\mathbf{e}}_z$, que define las componentes ortogonales \perp y paralelas \parallel de los campos EMs, así como su polarización. Los vectores unitarios perpendicular y paralelo al plano de esparcimiento de la onda plana incidente, $\hat{\mathbf{e}}_\perp^i$ y $\hat{\mathbf{e}}_\parallel^i$, respectivamente se muestran en morado en la Fig. 2.1 y están dados por

$$\hat{\mathbf{e}}_\perp^i = -\hat{\mathbf{e}}_\varphi = \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_x - \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (2.2a)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\parallel^i = \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_x + \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (2.2b)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_z = \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_x + \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_y. \quad (2.2c)$$

Asimismo, los vectores unitarios de los campos electromagnéticos (EMs) esparcidos por la partícula en la dirección perpendicular y paralela al campo de esparcimiento, $\hat{\mathbf{e}}_\perp^s$ y $\hat{\mathbf{e}}_\parallel^s$, son

$$\hat{\mathbf{e}}_\perp^s = -\hat{\mathbf{e}}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_\perp^i, \quad (2.3a)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\parallel^s = \hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad (2.3b)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{e}}_\perp^s \times \hat{\mathbf{e}}_\parallel^s. \quad (2.3c)$$

Al despejar $\hat{\mathbf{e}}_x$ y $\hat{\mathbf{e}}_y$ de las Ecs. (2.2) y reescribirlos en la base de los vectores unitarios en la dirección perpendicular y normal al plano de esparcimiento, como $\hat{\mathbf{e}}_x = \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_\perp^i + \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_\parallel^i$ y $\hat{\mathbf{e}}_y = -\cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_\perp^i + \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_\parallel^i$, se obtiene que el campo eléctrico incidente \mathbf{E}^i [Ec. (2.1)] se puede escribir como

$$\mathbf{E}^i = [(\cos \varphi E_x^i + \sin \varphi E_y^i) \hat{\mathbf{e}}_\perp^i + (\sin \varphi E_x^i - \cos \varphi E_y^i) \hat{\mathbf{e}}_\parallel^i] e^{ikz} \quad (2.4)$$

$$= E_\perp^i \hat{\mathbf{e}}_\perp^i + E_\parallel^i \hat{\mathbf{e}}_\parallel^i, \quad (2.5)$$

en donde se omite el término de la fase temporal $e^{-i\omega t}$ y la fase espacial e^{ikz} se incluye en los coeficientes E_\perp^i y E_\parallel^i .

En el problema de esparcimiento por una partícula, la cantidad que se mide experimentalmente es la intensidad de la luz, que es una cantidad proporcional al vector de Poynting [Ec. (1.36)] en la región de campo lejano, es decir que las expresiones de los campos EMs se calculan considerando $kr \gg 1$. Para calcular a los campos EMs producidos por una fuente oscilante en la región de campo

¹En el problema de un haz de luz incidente a una superficie plana, el plano de incidencia se define por el vector normal a la superficie y la dirección de propagación del haz.

lejano, consideremos el potencial vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ con la norma de Lorentz ² dado por la expresión

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{e^{ik\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} d^3r' e^{-i\omega t}, \quad (2.6)$$

y a su vez, los campos \mathbf{H} y \mathbf{E} , que asumimos armónicos en el tiempo, están dados por

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{E} = \frac{i}{k} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \nabla \times \mathbf{H}. \quad (2.8)$$

Dado que nos interesa la región del espacio tal que $kr \gg 1$, entonces $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| \approx r - \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{r}' \approx r$. Sustituyendo este resultado en la Ec. (2.6), obtenemos que

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3r' \quad (2.9)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left[\int_{V'} -\mathbf{r}' \left(\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right) d^3r' + \int_{V'} \nabla' \cdot \left(\mathbf{J}(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \right) d^2r' \right], \quad (2.10)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left[\int_{V'} -\mathbf{r}' \left(\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right) d^3r' + \int_{\partial V'} \left(\mathbf{J}(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} d^2r' \right], \quad (2.11)$$

donde realizamos una integración por partes y empleamos el teorema de la divergencia. Si consideramos nuestro volumen de integración como todo el espacio, y dado que nuestra fuentes de un tamaño finito, la integral de superficie en la Ec.(2.11) es cero. Finalmente, sustituyendo con la ecuación de continuidad ($\nabla \cdot \mathbf{J} = i\omega\rho$, con ρ la densidad de carga) podemos escribir el potencial vectorial como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \approx -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{p}, \quad \text{con} \quad \mathbf{p} = \int_{V'} \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3r', \quad (2.12)$$

en donde \mathbf{p} es el momento dipolar.

Al emplear la Ec. (2.12) para calcular el campo magnético con la Ec. (2.7) (**Ejercicio 2.1**) obtenemos que

$$\mathbf{H} = \frac{ck^2}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{p}. \quad (2.13)$$

El campo eléctrico se calcula empleando la Ec. (2.8) con el resultado de la Ec. (2.13); tras una manipulación algebraica (**Ejercicio 2.2**) podemos reescribir al campo eléctrico en una contribución de campo lejano (que decae como r^{-1}) y de campo cercano (que decae como r^{-n} con $n \geq 2$) como **jackson1999electrodynamics** como

$$\mathbf{E} = \frac{e^{ikr}}{4\pi\varepsilon_0} \left[\underbrace{\frac{k^2}{r} (\hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{p}) \times \hat{\mathbf{e}}_r}_{\text{Campo lejano}} + \underbrace{[3\hat{\mathbf{e}}_r (\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}] \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right)}_{\text{Campo cercano}} \right]. \quad (2.14)$$

²Ver sección 9.1 de **jackson1999electrodynamics**.

Al considerar para el campo eléctrico esparcido \mathbf{E}^s únicamente los términos que corresponden al campo lejano de la Ec. (2.14), el campo esparcido cumple con que $kr \ll 1$, además de ser transversal a la dirección de propagación. Por lo tanto, el campo esparcido puede escribirse como [bohren1998absorption](#)

$$\mathbf{E}^{sca} \propto \frac{e^{ikr}}{-ikr} \mathbf{E}_0^{sca} = \frac{e^{ikr}}{-ikr} (E_{\perp}^s \hat{\mathbf{e}}_{\perp}^s + E_{\parallel}^s \hat{\mathbf{e}}_{\parallel}^s), \quad (2.15)$$

en donde \mathbf{E}_0^{sca} es la amplitud del campo esparcido, E_{\perp}^s y E_{\parallel}^s sus componentes en la base de los vectores paralelo y perpendicular al plano de esparcimiento [Ec. (2.3)]. Asimismo, es posible relacionar al campo eléctrico esparcido \mathbf{E}^{sca} por una partícula localizada en el centro de coordenadas [Ec. (2.15)] con el campo eléctrico incidente \mathbf{E}^i [Ec. (2.5)], mediante el operador de esparcimiento de campo lejano $\mathbb{F}(\hat{\mathbf{k}}^i, \hat{\mathbf{k}}^s)$ [tsang2000scattering](#)

$$\mathbf{E}^{sca} = \frac{e^{i\mathbf{k}^s \cdot \mathbf{r}}}{r} \mathbb{F}(\hat{\mathbf{k}}^i, \hat{\mathbf{k}}^s) \mathbf{E}^i, \quad (2.16)$$

donde \mathbb{F} depende de la dirección de la onda plana incidente $\hat{\mathbf{k}}^i$ y de la dirección del campo eléctrico esparcido $\hat{\mathbf{k}}^s$. El operador \mathbb{F} denota que, en general, el campo esparcido puede tener una polarización distinta a la de la onda plana incidente y también puede tener una fase distinta. Al considerar la forma asintótica del campo eléctrico esparcido [Ec. (2.15)] y su relación con el campo eléctrico incidente [Ec. (2.16)], se pueden relacionar las componentes perpendiculares del campo esparcido y el campo incidente de una onda plana en la base de los vectores perpendiculares y paralelos al plano de incidencia mediante la matriz de amplitud esparcimiento \mathbb{S} [bohren1998absorption](#)

Matriz de amplitud de esparcimiento \mathbb{S}

$$\begin{pmatrix} E_{\parallel}^s \\ E_{\perp}^s \end{pmatrix} = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr} \begin{pmatrix} S_2 & S_3 \\ S_4 & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\parallel}^i \\ E_{\perp}^i \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

en donde los elementos de matriz $S_j = S_j(\theta, \varphi)$ con $j = 1, 2, 3$ y 4 , son funciones complejas que dependen de la geometría de la partícula iluminada por la onda plana.

2.2. Esparcimiento, extinción y absorción

En la sección anterior, se estudió cómo se relaciona el campo eléctrico que incide en una partícula arbitraria con el campo eléctrico esparcido por esta, dando como resultado la relación de la Ec. (2.17). En esta sección, se estudia el balance de energía al presentarse el fenómeno de esparcimiento.

Supóngase un haz de luz cruza por un medio donde se encuentran partículas arbitrarias (ver Fig. 2.2) y que la energía medida por un detector colocado detrás de las partículas es U . En el caso donde no hubiera partículas, la energía que

mediría el detector sería U_0 , con $U_0 > U$. La diferencia de energía $U_0 - U$ entre ambos casos es atribuida tanto a la absorción de las partículas (conversión de la energía EM en otras formas de energía, como calor), como al esparcimiento de la luz en direcciones distintas a la posición del detector. Al efecto en conjunto de la absorción y del esparcimiento se denomina extinción.

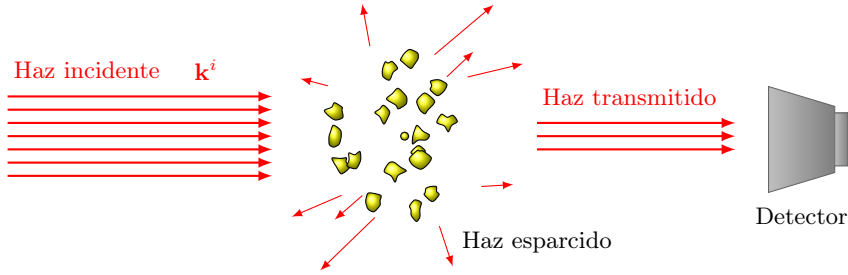


Fig. 2.2: Diagrama de la extinción de luz por una nube de partículas esparcidoras. La energía que mide el detector en la ausencia de partículas es U_0 sin embargo, al interactuar la luz con las partículas, la lectura de energía es U . La energía $U - U_0$ corresponde a la energía que no llega al detector asociada tanto al esparcimiento de luz, como a la absorbida por las partículas; al conjunto de estos fenómenos se le denomina extinción.

Ahora, considérese el caso de una sola partícula (de tamaño forma arbitraria) inmersa en un medio dispersor e iluminada por una onda plana; debido a la onda plana, la partícula esparce luz. Para cuantificar la energía esparcida por la partícula, defínase una esfera A de radio r que contenga a la partícula. La energía total por unidad de tiempo que cruza la superficie de A se calcula como

$$W_{abs} = - \int_A \langle \mathbf{S} \rangle_t \cdot \hat{\mathbf{e}}_r da, \quad (2.18)$$

donde $\langle \cdot \rangle_t$ denota el promedio temporal, y donde el vector de Poyntig \mathbf{S} puede descomponerse en tres contribuciones:

$$\langle \mathbf{S} \rangle_t = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] = \langle \mathbf{S}^i \rangle_t + \langle \mathbf{S}^{sca} \rangle_t + \langle \mathbf{S}^{ext} \rangle_t, \quad (2.19)$$

$$\langle \mathbf{S}^i \rangle_t = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E}^i \times \mathbf{H}^{i*}], \quad (2.20)$$

$$\langle \mathbf{S}^{sca} \rangle_t = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E}^{sca} \times \mathbf{H}^{sca*}], \quad (2.21)$$

$$\langle \mathbf{S}^{ext} \rangle_t = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E}^i \times \mathbf{H}^{sca*} + \mathbf{E}^{sca} \times \mathbf{H}^{i*}], \quad (2.22)$$

siendo i y sca los subíndices que denotan a los campos EMs incidentes y esparcidos (*scattering* en inglés), respectivamente, mientras que ext corresponde al campo EMs resultado de la interferencia entre la onda incidente y los campos esparcidos; a este término lo asociaremos a la extinción.

Según la Ec (2.18), si $W_{abs} > 0$ entonces la energía es absorbida dentro de la esfera, y si $W_{abs} < 0$ entonces energía es generada en la partícula, aunque a lo largo de este texto se excluye este caso. Al descomponer a W_{abs} en las mismas contribuciones que al vector de Poynting en la Ec. (2.19), obtenemos que

$$W_{abs} = W_i - W_{sca} + W_{ext}, \quad (2.23)$$

con

$$W_i = - \int_A \langle \mathbf{S}^i \rangle_t \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \, da = 0, \quad (2.24)$$

$$W_{sca} = \int_A \langle \mathbf{S}^{sca} \rangle_t \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \, da, \quad (2.25)$$

$$W_{ext} = - \int_A \langle \mathbf{S}^{ext} \rangle_t \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \, da, \quad (2.26)$$

donde $W^i = 0$ dado que la partícula se encuentra en un medio no disipativo. Es decir, que la energía extinta por unidad de tiempo es

$$W_{ext} = W_{abs} + W_s, \quad (2.27)$$

como se describió al inicio de esta sección.

Como caso particular, supóngase que la onda plana incidente está polarizada en la dirección x , es decir que $\mathbf{E}^i = E_0 \hat{\mathbf{e}}_x$, con E_0 la amplitud del campo eléctrico incidente. Empleando la expresión para el campo eléctrico esparcido \mathbf{E}^{sca} como función del campo incidente [Ec. (2.17)] y empleando la Ec. (2.4), así como la ley de Faraday-Lenz, los campos EMs esparcidos se escriben como

$$\mathbf{E}^{sca}(\mathbf{r}) = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr} E_0 \mathbf{X}(\theta, \varphi), \quad (2.28)$$

$$\mathbf{H}^{sca}(\mathbf{r}) = \frac{e^{ik(r-z)}}{kr\omega\mu} E_0 \hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{X}(\theta, \varphi), \quad (2.29)$$

con $\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = 0$ dada por

$$\mathbf{X}(\theta, \varphi) = (S_2 \cos \varphi + S_3 \sin \varphi) \hat{\mathbf{e}}_{\parallel}^s + (S_4 \cos \varphi + S_1 \sin \varphi) \hat{\mathbf{e}}_{\perp}^s, \quad (2.30)$$

donde $S_j = S_j(\theta, \varphi)$.

Para calcular la energía por unidad de tiempo W_{ext} asociada a la extinción que cruza a una superficie esférica A de radio r , se emplean las Ecs. (2.22), (2.28) y (2.29) (**Ejercicio 2.3**), dando como resultado que

$$\begin{aligned} W_{ext} &= - \int_A \langle \mathbf{S}^{ext} \rangle_t \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \, da \\ &= \frac{kE_0^2}{2\mu\omega} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{-ikr}}{-ikr} \int_A e^{ikz} (\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \mathbf{X}^*) \, da \right. \\ &\quad + \frac{e^{ikr}}{ikr} \int_A e^{-ikz} (\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x) \cos \theta \, da \\ &\quad \left. - \frac{e^{ikr}}{ikr} \int_A e^{-ikz} (\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z) \sin \theta \cos \varphi \, da \right\}, \quad (2.31) \end{aligned}$$

donde $ikz = ikr \cos \theta$ y $da = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$. Para resolver las integrales de la Ec. (2.31), empleemos dos veces la integración por partes el siguiente caso general con $\mu = \cos \theta$

$$\int_{-1}^1 e^{\pm ikr\mu} f(\mu) \, d\mu = \pm f(\mu) \frac{e^{\pm ikr\mu}}{ikr} \Big|_{-1}^1 - \frac{\mp 1}{(kr)^2} \left(\frac{df(\mu)}{d\mu} e^{\pm ikr\mu} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^2 f(\mu)}{d\mu^2} e^{\pm ikr\mu} \, d\mu \right). \quad (2.32)$$

Dado que consideramos una región del espacio tal que $kr \gg 1$, la expresión de la Ec. (2.32) se aproxima a

$$\int_{-1}^1 e^{\pm ikr\mu} f(\mu) d\mu \approx \frac{\pm 1}{ikr} (f(1)e^{\pm ikr} - f(-1)e^{\mp ikr}). \quad (2.33)$$

Escogiendo $f_1(\mu) = 1$, $f_2(\mu) = \mu$ y $f_3(\mu) = \sqrt{1 - \mu^2}$ para los integrandos de la Ec. (2.31) y empleando la aproximación de la Ec. (2.33), vemos que la integral con el término f_3 se anula, por lo que la única contribución es³

$$W_{ext} = \frac{2\pi k E_0^2}{2\mu\omega k^2} \operatorname{Re} \left\{ e^{-ikr} \left[e^{ikr} (\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \mathbf{X}^*) \right]_{\theta=0} - e^{-ikr} (\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \mathbf{X}^*) \right]_{\theta=\pi} + e^{ikr} \left[e^{-ikr} (\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x) \right]_{\theta=0} + e^{ikr} (\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x) \right]_{\theta=\pi} \right\}, \quad (2.34)$$

$$= \frac{2\pi k E_0^2}{2\mu\omega k^2} \operatorname{Re} \left\{ \left[(\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x) \right]_{\theta=0} + (\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \mathbf{X}^*) \right]_{\theta=0} + \left[e^{2ikr} (\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x) \right]_{\theta=\pi} - e^{-2ikr} (\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \mathbf{X}^*) \right]_{\theta=\pi} \right\}. \quad (2.35)$$

Los términos entre paréntesis pueden reescribirse como $2 \operatorname{Re}\{\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x\}$, evaluado en $\theta = 0$, y $2i \operatorname{Im}\{e^{2ikr}(\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x)\}$, evaluado en $\theta = \pi$, por lo que al calcular la parte real, concluimos que la energía asociada a la extinción por unidad de tiempo que cruza una superficie esférica es

$$W_{ext} = \left(\frac{k E_0^2}{2\mu\omega} \right) \frac{4\pi}{k^2} \operatorname{Re} \left[(\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x) \right]_{\theta=0} = I_i \frac{4\pi}{k^2} \operatorname{Re} \left[(\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x) \right]_{\theta=0}, \quad (2.36)$$

donde I_i es la irradiancia (energía por unidad de tiempo por unidad de área) de la onda plana incidente. El término que multiplica a I_i en la Ec. (2.36) tiene unidades de área y se le conoce como la sección transversal de extinción, dada por la expresión

$$C_{ext,x} = \frac{4\pi}{k^2} \operatorname{Re} \left[(\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x) \right]_{\theta=0}, \quad (2.37)$$

con el subíndice x denotando explícitamente la polarización de la onda plana incidente. Se forma semejante, se definen las secciones transversales de absorción $C_{abs} = W_{abs}/I_i$ y de esparcimiento $C_s = W_s/I_i$, que se relacionan por medio de la Ec. (2.18) cumpliendo que

$$C_{ext} = C_{abs} + C_{sca}. \quad (2.38)$$

Para obtener una expresión de C_{sca} , calculemos W_{sca} [Ec. (2.25)] con los campos EMs esparcidos [Ecs. (2.28) y (2.29)] considerando, nuevamente, una onda plana incidente polarizada en la dirección x . Al dividir W_{sca} por la irradiancia de una onpla plana, obtenemos que

$$C_{sca,x} = \int_A \frac{\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^*}{(kr)^2} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r da = \int_{4\pi} \frac{\|\mathbf{X}\|^2}{k^2} d\Omega, \quad (2.39)$$

³Al escribir \mathbf{X} en la base cartesiana canónica, esta cantidad no depende de φ , por lo que la integral en esta variable es 2π .

donde $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ es el diferencial de ángulo sólido y el 4π en el símbolo de la integral denota que se realiza la integral en toda la esfera. El integrando de la Ec. (2.39), denominado sección transversal diferencial de esparcimiento y denotado simbólicamente como $dC_{sca}/d\Omega$, define la distribución angular de luz esparcida, por unidad de irradiancia, en una unidad de ángulo sólido, en una dirección específica **bohren1998absorption**.

Asimismo, existe una relación multiplicativa entre la distribución angular de la luz esparcida y la sección transversal de esparcimiento de la partícula. Ésta es conocida como la función de fase p –o bien diagrama de esparcimiento–

$$p = \frac{\|\mathbf{X}\|^2}{k^2} C_{sca}, \quad \text{tal que} \quad \int_{4\pi} p d\Omega = 1, \quad (2.40)$$

es decir, p es una función normalizada. Para clasificar el esparcimiento de una partícula según la distribución angular de la luz, se emplea el parámetro de asimetría g , dado por

$$g = \langle \cos\theta \rangle_p = \int_{4\pi} p \cos\theta d\Omega, \quad (2.41)$$

que es el promedio de la proyección de la luz esparcida sobre la dirección de propagación de la onda plana incidente. Si la partícula esparce la luz de manera isotropa, el parámetro de asimetría toma el valor de cero; lo mismo ocurre si el esparcimiento es simétrico al rededor del ángulo $\theta = \pi/2$ (es decir, esparce lo mismo hacia delante que hacia atrás. Dado el caso en el que la partícula esparza más luz en la dirección frontal ($\theta = 0$), g toma valores positivos. Por otro lado, un mayor esparcimiento en la dirección posterior ($\theta = \pi$) corresponde a valores negativos de g .

Todas las expresiones y cálculos desarrollados hasta el momento se realizaron acabo bajo la suposición de luz polarizada en la dirección x , sin embargo se pueden generalizar suponiendo una onda plana incidente de la forma $\mathbf{E}^i = E_x \hat{\mathbf{e}}_x + E_y \hat{\mathbf{e}}_y$. Para este caso, el campo eléctrico esparcido se escribe según la Ec. (2.17) como

$$\mathbf{E}^{sca} = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikz} (E_x \mathbf{X} + E_y \mathbf{Y}) = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikz} \mathbf{T}, \quad (2.42)$$

donde \mathbf{X} y \mathbf{Y} dependen de los coeficientes de la matriz de esparcimiento \mathbb{S} . Haciendo los procedimientos análogos a las Ecs. (2.39) y (2.37), obtenemos que

Secciones transversales de extinción, absorción y esparcimiento

$$C_{ext} = C_{abs} + C_{sca}, \quad (2.43)$$

$$C_{ext} = \frac{4\pi}{k^2 \|\mathbf{E}^i\|} \operatorname{Re} \left\{ (\mathbf{E}^{i*} \cdot \mathbf{T}) \Big|_{\theta=0} \right\}, \quad (2.44)$$

$$C_{sca} = \int_{4\pi} \frac{\|\mathbf{T}\|^2}{k^2 \|\mathbf{E}^i\|^2} d\Omega. \quad (2.45)$$

Para el caso particular de luz no polarizada, se cumple que

$$\langle E_x E_x^* \rangle = \langle E_y E_y^* \rangle, \quad \text{y} \quad \langle E_x e_y^* \rangle = \langle E_y e_x^* \rangle = 0, \quad (2.46)$$

es decir que no hay términos cruzados. Por lo tanto, las expresiones para las secciones transversales de extinción y esparcimiento se pueden dividir en dos componentes, dando como resultado

$$C_{ext} = \frac{1}{2}(C_{ext,x} + C_{ext,y}), \quad (2.47)$$

$$C_{abs} = \frac{1}{2}(C_{abs,x} + C_{abs,y}), \quad (2.48)$$

donde los subíndices denotan la polarización de la luz esparcida.

Para poder comparar la cantidad de luz extinta por partículas de distintos tamaños y formas, se emplean las eficiencias de absorción, esparcimiento y extinción, denotadas por la letra Q . Este parámetro se calcula a través de las secciones transversales de absorción, esparcimiento y extinción al normalizarlas por la sección transversal geométrica C_{geo} proyectada en un plano perpendicular a la luz incidente, dando como resultado

$$\frac{C_{ext}}{C_{geo}} = \frac{C_{abs}}{C_{geo}} + \frac{C_{sca}}{C_{geo}} \quad \longrightarrow \quad Q_{ext} = Q_{abs} + Q_{sca}. \quad (2.49)$$

De manera intuitiva, la eficiencia de extinción Q_{ext} debería ser idéntica a la unidad sin embargo, dicho resultado es válido únicamente en el régimen de la óptica geométrica. **Mencionar que esto se estudiará más adelante una vez que tengamos la solución de Mie??**

2.3. Teorema óptico

En el estudio del esparcimiento de ondas EMs por una partícula, desarrollado en la sección anterior, se concluyó que la sección transversal de extinción depende únicamente en el esparcimiento delantero [ver Ec. (2.44)] a pesar de que se consideró la absorción de la partícula y el esparcimiento en todas las direcciones. Este resultado, conocido como el *Teorema Óptico*, no sólo es válido para ondas EMs, sino para cualquier fenómeno ondulatorio **krasavin2018generalization; newton1976optical**. El teorema óptico ha sido deducido y generalizado en el contexto de Mecánica Cuántica, Física de Partículas y Acústica, sin embargo debe su nombre a que la parte imaginaria del índice de refracción (relacionado con la absorción) de un medio con esparcidores es proporcional a la amplitud de esparcimiento en la dirección frontal **newton1976optical** (ver apéndice A); fenómeno estudiado, entre otros, por Lord Rayleigh en su trabajo sobre el color y la polarización del cielo **strutt1871On**.

Por su relación con el índice de refracción y la matriz de amplitud de esparcimiento, el Teorema Óptico brinda información sobre la importancia de las mediciones de esparcimiento en la dirección frontal (ver **Ejercicio 2.5**) y, en

el formalismo de la Mecánica Cuántica⁴ define la fase de de la onda esparcida desde un punto de vista experimental **newton1976optical**. En el contexto de la Óptica, del Teorema Óptico también puede determinarse una forma de determinar experimentalmente las secciones transversales de extinción, como se muestra a continuación.

Considérese una partícula arbitraria posicionada entre una fuente luminosa y un detector de área D (ver Fig. ??) suponiendo que la onda plana incidente se encuentra polarizada en la dirección x y cuya dirección de propagación es z ; supóngase además que el detector está centrado en el eje $x = y = 0$ y colocado a una distancia z de la partícula. La energía por unidad de tiempo $W(D)$ que incide dentro del área del detector está dada por

$$W(D) = \int_D (\langle \mathbf{S}^i \rangle_t + \langle \mathbf{S}^{sca} \rangle_t + \langle \mathbf{S}^{ext} \rangle_t) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z da = W_i(D) + W_{sca}(D) + W_{ext}(D) \quad (2.50)$$

donde los subíndices i , sca y ext hacen referencia a los campos EMs incidente, esparcidos y los asociados a la extinción. El término $W_i(D)$ es proporcional al área del detector $A(D)$, por lo que

$$W_i(D) = I_i A(D). \quad (2.51)$$

Por otro lado, para el término de esparcimiento $W_{sca}(D)$ se asume que la distancia de la partícula al detector es suficientemente grande ($kz \gg 1$), de tal forma que las expresiones de los campos EMs esparcidas dadas por las Ecs. (2.28) y (2.29) son válidas. Por lo tanto, al calcular $W_{sca}(D)$ para el sistema de interés, se obtiene que

$$W_{sca}(D) = I_i \int_D \frac{\|\mathbf{X}\|^2}{(kr)^2} \cos \theta da. \quad (2.52)$$

Si definimos L como la longitud máxima que biyecta el área del sensor D , y suponemos que esta área es chica ($z \gg L/2$), entonces el integrando de la Ec. (2.52) puede considerarse como constante con el valor que toman en el centro geométrico de D , es decir en $x = y = 0$ y $r = z$. Por lo tanto, la Ec. (2.52) se aproxima como

$$W_{sca}(D) \approx I_i \frac{\|\mathbf{X}\|^2|_{\theta=0}}{k^2} \frac{A(D)}{z^2} = I_i \frac{\|\mathbf{X}\|^2|_{\theta=0}}{k^2} \Omega(D), \quad (2.53)$$

con $\Omega(D)$ el ángulo sólido que subtiende al detector. Finalmente, para calcular $W_{ext}(D)$, la integral a resolver es⁵

$$W_{ext}(D) = I_i \operatorname{Re} \left\{ - \int_D e^{-ik(r-z)} \frac{(\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \mathbf{X}^*)}{ikr} \cos \theta da + \int_D e^{ik(r-z)} \frac{(\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x)}{ikr} da \right\}. \quad (2.54)$$

⁴La deducción del Teorema Óptico surge, en Mecánica Cuántica, del hecho de que la matriz de amplitud de esparcimiento en fenómenos de esparcimiento es una matriz unitaria, es decir, que los cambios de fase son cantidades observable que, en principio, pueden medirse.

⁵Ver solución al **Ejercicio 2.3** para la expresión de $\langle \mathbf{S}^{ext} \rangle$. Con este resultado se obtiene $dW_{ext} = \langle \mathbf{S}^{ext} \rangle \cdot \hat{\mathbf{e}}_z da$, dando como resultado la Ec. (2.54).

Para resolver integrales como las de la Ec. (2.54), cuyo integrando es una función distinta de cero en el intervalo de integración modulado por una función oscilatoria con un periodo corto ($kz \gg 1$), es posible emplear el método de la fase estacionaria [hermans2011waterappendices](#), en la que se establece que el resultado de la integral se aproxima por el valor del integrando en una vecindad cerca de un punto estacionario de la fase. Para emplear este método, adicional a la aproximación de campo lejano $kz \gg 1$ y de área de detección chica $z/(L/2) \gg 1$, debemos garantizar que esta área permita la evaluación de un número grande de máximos y mínimos de la función oscilatoria, es decir que $kL/2 \gg 2\pi$. Resolviendo la integral de esta forma (ver [Ejercicio 2.4](#)) obtenemos que $W_{ext}(D)$ se aproxima como

$$W_{ext}(D) \approx -I_i \frac{4\pi}{k^2} \operatorname{Re} \left[(\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x) \Big|_{\theta=0} \right] = -I_i C_{ext}. \quad (2.55)$$

Al sumar las Ecs. (2.51), (2.53) y (2.55) se calcula la energía por unidad de tiempo capturada por el detector:

$$W(D) = I_i \left(A(D) - C_{ext} + \frac{\|\mathbf{X}\|^2|_{\theta=0}}{k^2} \Omega(D) \right) \approx I_i (A(D) - C_{ext}), \quad (2.56)$$

donde se volvió a considerar la aproximación de área chica $z \gg L/2$, o bien que $1 \gg \Omega(D)$, es decir que la luz esparcida en la dirección frontal no contribuye a la medición del detector en comparación a los otros términos.

El resultado de $W(D)$ de la Ec. (2.56) no solo da una expresión por la energía por unidad de tiempo capturada por el detector, sino también establece que la sección transversal de extinción es una variable que puede determinarse experimentalmente puesto que $U_0 = I_0 A(D)$ es la medición realizada por el detector cuando la partícula no está presente. Es decir, la partícula reduce el área del detector mediante *sombra*, que no es necesariamente igual a la sombra geométrica de la partícula, y de hecho puede ser mucho mayor o mucho menor [bohren1998absorption](#). Dado que la sección transversal de esparcimiento C_{sca} es una cantidad positiva [Ec. (2.45)], se cumple que

$$C_{abs} = C_{ext} - C_{sca} \leq C_{ext}^{exp} \leq C_{ext}, \quad (2.57)$$

donde C_{ext}^{exp} es la cantidad medida experimentalmente, mientras que C_{ext} es el valor teórico máximo dado por la Ec. (2.44). La extinción máxima, o total, se cumple cuando el detector cuenta con un ángulo sólido lo suficientemente pequeño, y la mínima cuando decrece la distancia entre la partícula y el detector. Como conclusión, se puede decir que la extinción de luz, caracterizada experimentalmente por la sección transversal de extinción C_{ext} , puede estudiarse con dos enfoques: mediante la conservación de la energía [Ec. (2.43)], o bien, como la manifestación del fenómeno de interferencia entre la onda plana incidente y el campo esparcido [Ec. (2.22)] por la partícula en la dirección de medición.

2.4. Ejercicios sugeridos

Ejercicio 2.1 A partir de las Ecs. (2.7) y (2.12), muestre que el campo \mathbf{H} , para una fuente oscilante en el tiempo, está dado por la Ec. (2.13).

Solución: Notemos que

$$\nabla \times \left(\frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{p} \right) = \nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \times \mathbf{p} + \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \times \mathbf{p},$$

y como \mathbf{p} no depende de \mathbf{r} , entonces $\nabla \times \mathbf{p} = \mathbf{0}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{p} \right) &= \left[e^{ikr} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \nabla (e^{ikr}) \right] \times \mathbf{p} \\ &= \left[e^{ikr} \left(-\frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{r^2} \right) + \frac{ik}{r} e^{ikr} \hat{\mathbf{e}}_r \right] \times \mathbf{p} \\ &= \frac{e^{ikr}}{r} \left(-\frac{1}{r} + ik \right) \hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{p}. \end{aligned}$$

Multiplicando el resultado anterior por $-i\omega k/4\pi k$ y recordando que la relación de dispersión para ondas electromagnéticas en el vacío es $\omega = ck$, obtenemos que

$$\mathbf{H} = \frac{ck^2}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{p}.$$

Ejercicio 2.2 Muestre que el campo eléctrico para una fuente oscilante en el tiempo está dada por la Ec. (2.14). Hágalo calculando el rotacional de la Ec. (2.13).

Solución: Calculando el rotacional de la Ec. (2.13) como el producto de una función escalar que depende de r y el término vectorial $\hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{p}$, se obtiene que el campo eléctrico es

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{i}{k} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{ck^2}{4\pi} \left\{ \left[\frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \right] \nabla \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{p}) + \nabla \left[\frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \right] \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{p}) \right\} \\ &= \frac{ik}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \left[\frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \right] \nabla \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{p}) + \frac{d}{dr} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \right] \hat{\mathbf{e}}_r \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{p}) \right\}. \end{aligned}$$

Al descomponer el momento dipolar \mathbf{p} en una componente longitudinal y una transversal como $\mathbf{p} = (\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r) \hat{\mathbf{e}}_r + (\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{e}}_r) \times \hat{\mathbf{e}}_r$, se obtiene que

$$\hat{\mathbf{e}}_r \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{p}) = -\mathbf{p} + (\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r) \hat{\mathbf{e}}_r,$$

y al calcular el rotacional de $\hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{p}$, ésta expresión se reduce a⁶

$$\begin{aligned}\nabla \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{p}) &= \hat{\mathbf{e}}_r(\nabla \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}(\nabla \cdot \hat{\mathbf{e}}_r) + (\mathbf{p} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{e}}_r - (\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \nabla)\mathbf{p} \\ &= -\mathbf{p}(\nabla \cdot \hat{\mathbf{e}}_r) + (\mathbf{p} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{e}}_r \\ &= -\mathbf{p}\frac{2}{r} + \frac{1}{r}[\mathbf{p} - \hat{\mathbf{e}}_r(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)] \\ &= -\frac{1}{r}[\mathbf{p} + \hat{\mathbf{e}}_r(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)].\end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones y desarrollando la derivada respecto a r , el campo eléctrico se reescribe como

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{ike^{ikr}}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{ikr^3} \right) [-\mathbf{p} - \hat{\mathbf{e}}_r(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)] + \left(-\frac{2}{r^2} + \frac{ik}{r} + \frac{2}{ikr^3} \right) [-\mathbf{p} + \hat{\mathbf{e}}_r(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)] \right] \\ &= \frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} \right) [-\mathbf{p} - \hat{\mathbf{e}}_r(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)] + \left(-\frac{2ik}{r^2} - \frac{k^2}{r} + \frac{2}{r^3} \right) [-\mathbf{p} + \hat{\mathbf{e}}_r(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)] \right],\end{aligned}$$

y, finalmente, agrupando términos se obtiene la expresión

$$\mathbf{E} = \frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{k^2}{r} (\hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{p}) \times \hat{\mathbf{e}}_r + [3\hat{\mathbf{e}}_r(\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}] \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) \right].$$

Ejercicio 2.3 Calcule el vector de Poynting asociado a la extinción [Ec. (2.22)] para una partícula esparcidora arbitraria iluminada por una onda plana monocromática polarizada en la dirección x y que se propaga en la dirección z . Con este resultado, calcule la energía por unidad de tiempo W_{ext} que fluye por una superficie esférica A . *Hint:* Emplee las Ecs. (2.28) y (2.29).

Solución: Empleando la Ec. (2.29) y que $\mathbf{E}^i = E_0\hat{\mathbf{e}}_x$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^i \times \mathbf{H}^{sca*} &= E_0\hat{\mathbf{e}}_x \times \left(\frac{k}{\omega\mu} \hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{E}^{sca} \right)^* \\ &= E_0\hat{\mathbf{e}}_x \times \left[\left(\frac{k}{\omega\mu} \hat{\mathbf{e}}_r \right) \times \left(\frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr} E_0\mathbf{X} \right) \right]^* \\ &= \frac{k}{\mu\omega} \frac{E_0^2}{ikr} e^{-ik(r-z)} [\hat{\mathbf{e}}_x \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{X}^*)] \\ &= \frac{k}{\mu\omega} \frac{E_0^2}{ikr} e^{-ik(r-z)} [\hat{\mathbf{e}}_r(\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \mathbf{X}^*) - \mathbf{X}^*(\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)],\end{aligned}$$

y análogamente con la Ec. (2.28)

$$\mathbf{E}^{sca} \times \mathbf{H}^{i*} = \frac{k}{\mu\omega} \frac{E_0^2}{-ikr} [\hat{\mathbf{e}}_z(\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x) - \hat{\mathbf{e}}_x(\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z)],$$

⁶Si \mathbf{a} es un vector constante y $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = f(r)\hat{\mathbf{e}}_r$, entonces [jackson1999electrodynamics](#)

$(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{f} = [f(r)/r][\mathbf{a} - \hat{\mathbf{e}}_r(\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)] + \hat{\mathbf{e}}_r(\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r) \partial f / \partial r$.

por lo que

$$\langle \mathbf{S}^{ext} \rangle_t = \frac{kE_0^2}{2\mu\omega} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{-ikr}}{ikr} e^{ikz} [\hat{\mathbf{e}}_r(\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \mathbf{X}^*) - \mathbf{X}^*(\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)] + \frac{e^{ikr}}{-ikr} e^{-ikz} [\hat{\mathbf{e}}_z(\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x) - \hat{\mathbf{e}}_x(\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z)] \right\}.$$

Dado que $\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = 0$, $\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_z = \cos \theta$ y $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_x = \cos \varphi \sin \theta$, la energía que cruza una superficie esférica A de radio r W_{ext} es

$$W_{ext} = - \int_A \langle \mathbf{S}^{ext} \rangle_t \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \, da = \frac{kE_0^2}{2\mu\omega} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{-ikr}}{-ikr} \int_A e^{ikz} (\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \mathbf{X}^*) \, da + \frac{e^{ikr}}{ikr} \int_A e^{-ikz} (\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x) \cos \theta \, da - \frac{e^{ikr}}{ikr} \int_A e^{-ikz} (\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z) \sin \theta \cos \varphi \, da \right\}.$$

Ejercicio 2.4 Calcule la energía por unidad de tiempo $W_{ext}(D)$ que lee un detector D suponiendo que la onda plana incidente está polarizada en la dirección x , se propaga en la dirección z e incide perpendicularmente al área del detector. Suponga, además, que la distancia entre la partícula esparcidora y el detector es z y que $kz \gg 1$ (es decir se mide el campo lejano).

Hint: Resuelva la integral de la Ec. 2.54 empleando el método de la fase estacionaria⁷ realizando la integración en un área cuadrada de lado L .

Solución: Agrupando los argumentos de las exponenciales en la Ec. (2.54), se obtiene que energía por unidad de tiempo $W_{ext}(D)$ es

$$W_{ext}(D) = I_i \operatorname{Re} \left\{ - \int_D e^{ikz[-(r/z-1)]} \frac{(\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \mathbf{X}^*)}{ikr} \cos \theta \, da + \int_D e^{ikz(r/z-1)} \frac{(\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x)}{ikr} \, da \right\},$$

con $I_i = kE_0^2/2\mu\omega$ la irradiancia de la onda plana incidente y D el área del detector. Escojamos como D una región cuadrada centrada en el eje $x = y = 0$ colocada a una distancia z tal que $kz \gg 1$. Entonces todas las integrales a resolver son de la forma

$$J_j = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} dx \, dy \, e^{ikzf(x,y)} g_j(x,y),$$

⁷Sean f y g funciones que permitan su expansión en series de Taylor en el intervalo $a \leq x \leq b$, con $f(x) \in \mathbb{R}$, y $\alpha \gg 1$ un parámetro fijo. Si $c \in (a, b)$ es tal que $f'(c) = 0$, $g(c) \neq 0$ y $f''(c) \neq 0$, entonces

$$\int_a^b g(x) e^{i\alpha f(x)} \, dx \approx g(c) e^{i\alpha f(c)} \sqrt{\frac{2\pi i}{\alpha f''(c)}}.$$

Para una demostración de este teorema consulte [hermans2011waterappendices](#).

con

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \pm \left(\frac{r}{z} - 1 \right) = \pm \left(\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{z^2}} + 1 - 1 \right), \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \pm \frac{1}{z} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &= \pm \frac{1}{z} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right). \end{aligned}$$

Notemos que con $x = 0$ se cumplen las hipótesis para emplear el método de fase estacionaria, por lo que

$$J_j \approx \int_{-L/2}^{L/2} dy e^{ikzf(0,y)} g_j(0, y) \sqrt{\frac{2\pi i}{(kz) \partial^2 f(0, y) / \partial x^2}}.$$

Ahora, veamos que

$$\begin{aligned} f(0, y) &= \pm \left(\sqrt{\frac{y^2}{z^2}} + 1 - 1 \right), \\ \frac{\partial f(0, y)}{\partial y} &= \pm \frac{1}{z} \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \\ \frac{\partial^2 f(0, y)}{\partial y^2} &= \pm \frac{1}{z} \left(\frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} - \frac{y^2}{(y^2 + z^2)^{3/2}} \right), \end{aligned}$$

por lo que con $y = 0$ se vuelven a cumplir las hipótesis para el método de fase estacionaria identificando

$$g_j(0, y) \longrightarrow g_j(0, y) \sqrt{\frac{2\pi i}{(kz) \partial^2 f(0, y) / \partial x^2}},$$

dando como resultado que

$$J_j \approx e^{ikzf(0,0)} \frac{2\pi i g_j(0,0)}{kz \partial^2 f(0,0) / \partial x^2} = \pm g_j(0,0) \frac{2i\pi z}{k}.$$

Como $z > 0$, la evaluación de g_j en $x = y = 0$ es equivalente a evaluar en $\theta = 0$ y $r = z$, por lo que

$$\begin{aligned} W_{ext}(D) &\approx I_i \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{ikz} \left(-\frac{2\pi iz}{k} \hat{\mathbf{e}}_x \cdot \mathbf{X}^* \right) \Big|_{\theta=0} + \frac{1}{ikz} \left(\frac{2\pi iz}{k} \mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x \right) \Big|_{\theta=0} \right\} \\ &= -I_i \frac{2\pi}{k^2} \operatorname{Re} \left\{ (\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \mathbf{X}^*) \Big|_{\theta=0} + (\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x) \Big|_{\theta=0} \right\}. \end{aligned}$$

Dado que el término entre corchetes es igual a dos veces la parte real de $\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x$, obtenemos que para $kz \gg 1$, la energía por unidad de tiempo asociada a la extinción sensada por un detector es

$$W_{ext}(D) \approx -I_i \frac{4\pi}{k^2} \operatorname{Re} \left[(\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x) \Big|_{\theta=0} \right] = -I_i C_{ext}.$$

Ejercicio 2.5 Emplee las relaciones de Krammers-Kronig para relacionar las partes real e imaginaria del coeficiente de amplitud de esparcimiento en la dirección frontal.

Solución: **Poner solución**

Capítulo 3

Los armónicos esféricos vectoriales

Para encontrar una solución al problema de esparcimiento y absorción de luz por una partícula esférica, consideremos una región del espacio libre de fuentes y campos electromagnéticos (EMs) armónicos en el tiempo, como se presentan en las Ecs. (1.29)-(1.32). Asimismo, planteemos una base de funciones vectoriales que permitan escribir a los campos EMs como una combinación lineal de ellos. Propongamos, entonces, un campo vectorial \mathbf{M} tal que [bohren1998absorption](#)

$$\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{r}\psi), \quad (3.1)$$

donde ψ es una función escalar y \mathbf{r} el vector de posición; dado que \mathbf{M} es el rotacional de $\mathbf{r}\psi$, se cumple que $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$, y que \mathbf{M} y \mathbf{r} son vectores perpendiculares ([Ejercicio 3.1](#)). La ecuación de Helmholtz para \mathbf{M} , dado que el operador laplaciano y el rotacional conmutan ([Ejercicio 3.2](#)), es

$$\nabla^2 \mathbf{M} + k^2 \mathbf{M} = \nabla \times [\nabla^2 (\mathbf{r}\psi) + k^2 (\mathbf{r}\psi)],$$

y dado que se cumple tanto $\nabla^2 (\mathbf{r}\psi) = 2\nabla\psi + \mathbf{r}\nabla^2\psi$ ([Ejercicio 3.3](#)) como $\nabla \times (\nabla\psi) = 0$, la ecuación de Helmholtz para \mathbf{M} puede reescribirse como

$$\nabla^2 \mathbf{M} + k^2 \mathbf{M} = \nabla \times [\mathbf{r}(\nabla^2\psi + k^2\psi)]. \quad (3.2)$$

Adicional a \mathbf{M} , se define el vector \mathbf{N} como [bohren1998absorption](#)

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla \times \mathbf{M}}{k}, \quad (3.3)$$

cuyo laplaciano es $\nabla^2 \mathbf{N} = \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{M}/k) = \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{M}/k)$, y por tanto la ecuación de Helmholtz para \mathbf{N} es

$$\nabla^2 \mathbf{N} + k^2 \mathbf{N} = \nabla \times \left(\frac{\nabla^2 \mathbf{M}}{k} \right) + k \nabla \times \mathbf{M} = \frac{1}{k} \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{M} + k^2 \mathbf{M}). \quad (3.4)$$

De las Ecs. (3.2) y (3.4) concluimos que los campos \mathbf{M} y \mathbf{N} cumplen con la ecuación de Helmholtz vectorial si, y sólo si, la función escalar ψ cumple con la ecuación de Helmholtz escalar. Si este es el caso, entonces, el rotacional de \mathbf{N} está dado por

$$\nabla \times \mathbf{N} = \nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{M}}{k} \right) = -\frac{\nabla^2 \mathbf{M}}{k} = \frac{k^2 \mathbf{M}}{k} = k\mathbf{M}. \quad (3.5)$$

Los campos vectoriales \mathbf{M} y \mathbf{N} son conocidos como los *armónicos esféricos vectoriales*, ψ como su función generadora y \mathbf{r} como el vector de guía o vector piloto **bohren1998absorption**. Los armónicos esféricos vectoriales \mathbf{M} y \mathbf{N} cumplen con tener divergencia nula y que el rotacional de uno es proporcional al otro [Ecs. (3.3) y (3.5)], es decir, que cumplen con las ecuaciones de Maxwell sin fuentes [Ecs. (1.31)-(1.34)] siempre que se cumpla que

ψ : Función generadora de los armónicos esféricos vectoriales

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0. \quad (3.6)$$

3.1. Solución con geometría esférica

Para poder encontrar las soluciones del campo esparcido por una esfera basta entonces con encontrar las soluciones de la Ec. (3.6) con la geometría deseada e imponer las condiciones a la frontera de los campos EMs. Suponiendo una partícula esférica es conveniente emplear coordenadas esféricas (r, θ, φ) , en las que la función generadora de los armónicos vectoriales debe cumplir con la ecuación

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + k^2 \psi = 0. \quad (3.7)$$

Al resolver la Ec. (3.7) es posible construir un conjunto de funciones linealmente independientes que sean una base para los campos EMs incidente, esparcido y dentro de la esfera, lo que permite determinar, mediante las condiciones a la frontera de los campos EMs, la forma de la matriz de esparcimiento [Ec. (2.17)].

Para resolver la Ec. (3.7) se emplea el método de separación de variables donde se propone que ψ sea el producto de tres funciones y cada una de éstas depende únicamente en una variable, es decir,

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi). \quad (3.8)$$

Sustituyendo la Ec. (3.8) en la Ec. (3.7), multiplicando por $r^2/R\Theta\Phi$ y despejando los términos que dependen únicamente de r , se obtiene como resultado que una función con dependencia radial es igual a una función con dependencia

angular, por lo tanto se igualan a una constante $\ell(\ell + 1)$, es decir

$$\overbrace{\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2}^{\text{radial}} = \ell(\ell + 1) = \underbrace{-\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}}_{\text{angular}}. \quad (3.9)$$

Si la parte angular de la Ec. (3.9) se multiplica por $\sin^2 \theta$, y se despejan los términos que dependen de θ , se obtiene que una función que depende únicamente de θ es igual a una que depende únicamente de φ , por lo que ambas partes se igualan a la constante m^2 . Tanto ℓ en la Ec. (3.9), como m son constantes que se determinan ante condiciones impuestas a ψ . Tras este procedimiento se concluye que las funciones $R(r)$, $\Theta(\theta)$, y $\Phi(\varphi)$ cumplen con las ecuaciones

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + m^2 \Phi = 0. \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + [k^2 r^2 - \ell(\ell + 1)] R = 0. \quad (3.12)$$

Dado que ψ debe ser una función con periodicidad 2π en φ , es decir que $\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$, las soluciones linealmente independientes de la Ec. (3.10) son

$$\Phi_e(\varphi) = \cos(m\varphi), \quad (3.13)$$

$$\Phi_o(\varphi) = \sin(m\varphi), \quad (3.14)$$

con m un número natural (incluido el cero) y donde los subíndices e y o hacen referencia a que son funciones pares (*even*, e) e impares (*odd*, o), respectivamente. Las funciones $\sin(m\varphi)$ y $\cos(m\varphi)$ obedecen las relaciones de ortogonalidad

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\varphi) \cos(m'\varphi) d\varphi = 0 \quad \forall m, m', \quad (3.15)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\varphi) \sin(m'\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos(m\varphi) \cos(m'\varphi) d\varphi = \delta_{m,m'} \frac{\pi}{2}, \quad (3.16)$$

en donde $\delta_{m,m'}$ es la delta de Kronecker.

Al realizar el cambio de variable $\mu = \cos \theta$ en la Ec. (3.11), ésta se reescribe como

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 \Theta}{d\mu^2} - 2\mu \frac{d\Theta}{d\mu} + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{(1 - \mu^2)} \right] \Theta = 0,$$

cuyas soluciones son las *funciones asociadas de Legendre* $P_\ell^m(\cos \theta)$ de grado ℓ y orden m [arfen2001methods](#), imponiendo que $\ell = m, m + 1, m + 2, \dots$ para que la Ec. (3.11) sea finita en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ —o bien $\mu = \pm 1$ —. Las funciones asociadas de Legendre cumplen con la relación de ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 P_\ell^m(\mu) P_{\ell'}^m d\mu = \delta_{\ell,\ell'} \frac{2}{2\ell + 1} \frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!}. \quad (3.17)$$

Asimismo, las funciones asociadas de Legendre se reducen a los polinomios de Legendre cuando $m = 0$, además de que las funciones asociadas y los polinomios de Legendre se relacionan mediante la identidad [arfken2001methods](#)

$$P_\ell^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{m/2} \frac{d^m P_\ell(\mu)}{d\mu^m}, \quad (3.18)$$

de donde se deduce que $P_\ell^m(\pm 1) = 0$ para toda m distinta de cero.

Para resolver la Ec. (3.12) se emplea el cambio de variable $\rho = kr$ y se define la función $Z = R\sqrt{\rho}$, por lo que la ecuación radial se reescribe como

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dZ}{d\rho} \right) + \left[\rho^2 - \left(\ell + \frac{1}{2} \right)^2 \right] Z = 0, \quad (3.19)$$

cuyas soluciones son las *funciones esféricas de Bessel* j_ℓ y y_ℓ o cualquier combinación lineal de ellas, por lo que de forma general las soluciones de la Ec. (3.19) son [arfken2001methods](#)

$$j_\ell(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} J_{\ell+1/2}(\rho), \quad (3.20a)$$

$$y_\ell(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} Y_{\ell+1/2}(\rho), \quad (3.20b)$$

$$h_\ell^{(1)}(\rho) = j_\ell(\rho) + iy_\ell(\rho), \quad (3.20c)$$

$$h_\ell^{(2)}(\rho) = j_\ell(\rho) - iy_\ell(\rho), \quad (3.20d)$$

en donde J_ℓ y Y_ℓ son las *funciones de Bessel del primer y segundo tipo*, respectivamente, y h_ℓ son las *funciones esféricas de Bessel del tercer tipo*, también denominadas como *funciones esféricas de Hankel*. Todas las funciones esféricas de Bessel z_ℓ —donde z_ℓ es cualquier función de las Ecs. (3.20)— puede ser calculada mediante relaciones de recurrencia¹ [arfken2001methods](#).

Dado que las soluciones para la ecuación azimutal son las Ecs. (3.14) y (3.13), para la polar, Ec. (3.18) y para la radial, Ecs. (3.20), las funciones generadoras de los armónicos esféricos vectoriales son

$$\psi_{em\ell} = \cos(m\varphi) P_\ell^m(\cos\theta) z_\ell(kr), \quad (3.21)$$

$$\psi_{om\ell} = \sin(m\varphi) P_\ell^m(\cos\theta) z_\ell(kr). \quad (3.22)$$

Al emplear las Ecs. (3.21) y (3.22) en la Ec. (3.1) se obtiene como resultado $\mathbf{M}_{em\ell}$ y $\mathbf{M}_{om\ell}$, dados por las expresiones

¹Todas las funciones esféricas de Bessel cumplen: $z_{\ell-1}(\rho) + z_{\ell+1}(\rho) = (2\ell+1)z_\ell(\rho)/\rho$ y $(2\ell+1) dz_\ell(\rho)/d\rho = \ell z_{\ell-1}(\rho) - (\ell+1)z_{\ell+1}(\rho)$, con $j_0(\rho) = \sin \rho/\rho$ y $j_1(\rho) = \sin \rho/\rho^2 - \cos \rho/\rho$, $y_0(\rho) = -\cos \rho/\rho$ y $y_1(\rho) = -\cos \rho/\rho^2 - \sin \rho/\rho$.

Armónicos esféricos vectoriales $\mathbf{M}_{em\ell}$ y $\mathbf{M}_{om\ell}$

$$\mathbf{M}_{em\ell} = -m \sin(m\varphi) z_\ell(kr) \frac{P_\ell^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta - \cos(m\theta) z_\ell(kr) \frac{dP_\ell^m(\cos \theta)}{d\theta} \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \quad (3.23a)$$

$$\mathbf{M}_{om\ell} = m \cos(m\varphi) z_\ell(kr) \frac{P_\ell^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin(m\theta) z_\ell(kr) \frac{dP_\ell^m(\cos \theta)}{d\theta} \hat{\mathbf{e}}_\varphi. \quad (3.23b)$$

Para el cálculo $\mathbf{N}_{em\ell}$ y $\mathbf{N}_{om\ell}$ se sustituyen las Ecs. (3.23a) y (3.23b) en la Ec. (3.3). Para simplificar las expresiones de las componentes radiales de $\mathbf{N}_{em\ell}$ y $\mathbf{N}_{om\ell}$, se agrupan los términos que dependen de φ y kr y, dado que las funciones asociadas de Legendre cumplen con la relación

$$-\ell(\ell+1)P_\ell^m(\cos \theta) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_\ell^m(\cos \theta)}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} P_\ell^m(\cos \theta),$$

que es una consecuencia de la Ec. (3.11), las expresiones de $\mathbf{N}_{em\ell}$ y $\mathbf{N}_{om\ell}$ son

Armónicos esféricos vectoriales $\mathbf{N}_{em\ell}$ y $\mathbf{N}_{om\ell}$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{em\ell} = & \cos(m\varphi) \frac{z_\ell(kr)}{kr} \ell(\ell+1) P_\ell^m(\cos \theta) \hat{\mathbf{e}}_r \\ & + \cos(m\varphi) \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} \left[kr z_\ell(kr) \right] \frac{dP_\ell^m(\cos \theta)}{d\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ & - m \sin(m\varphi) \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} \left[kr z_\ell(kr) \right] \frac{P_\ell^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \end{aligned} \quad (3.23c)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{om\ell} = & \sin(m\varphi) \frac{z_\ell(kr)}{kr} \ell(\ell+1) P_\ell^m(\cos \theta) \hat{\mathbf{e}}_r \\ & + \sin(m\varphi) \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} \left[kr z_\ell(kr) \right] \frac{dP_\ell^m(\cos \theta)}{d\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ & + m \cos(m\varphi) \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} \left[kr z_\ell(kr) \right] \frac{P_\ell^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \hat{\mathbf{e}}_\varphi. \end{aligned} \quad (3.23d)$$

3.2. Relaciones de ortogonalidad

Los armónicos esféricos vectoriales son solución a la ecuación de Helmholtz, por lo que cualquier solución de los campos EMs puede escribirse como una serie infinita en términos de las Ecs. (3.23). Para resolver el problema de los campos EMs esparcidos por una partícula esférica, esto es, determinar las componentes de la matriz de esparcimiento \mathbb{S} de la Ec. (2.17), se expande una onda plana \mathbf{E}^i en la base de los armónicos esféricos vectoriales. Para esto, calculemos las relaciones de ortogonalidad de los armónicos esféricos vectoriales. Para facilitar

la notación, definamos el producto $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle_{\theta, \varphi}$ entre dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} como

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle_{\theta, \varphi} \equiv \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Las funciones $\sin(m\varphi)$ y $\cos(m\varphi)$ obedecen las relaciones de ortogonalidad de la Ec. (3.15), por lo que el producto entre $\mathbf{M}_{em\ell}$ y $\mathbf{M}_{om'\ell'}$, y $\mathbf{N}_{em\ell}$ y $\mathbf{N}_{om'\ell'}$ es

$$\langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{M}_{om'\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = \langle \mathbf{N}_{em\ell}, \mathbf{N}_{om'\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = 0 \quad \forall m, m', \ell, \ell', \quad (3.24)$$

así como también

$$\langle \mathbf{M}_{om\ell}, \mathbf{N}_{em'\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = \langle \mathbf{M}_{om\ell}, \mathbf{N}_{om'\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = \langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{N}_{em'\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = 0 \quad \forall m, m', \ell, \ell'. \quad (3.25)$$

pues \mathbf{M} tiene componente nula en $\hat{\mathbf{e}}_r$ y en los demás términos se encuentra la Ec. (3.16). Las Ecs. (3.15) y (3.16) implican que todos los armónicos esféricos vectoriales orden m distinto son ortogonales entre sí.

El producto interior entre $\mathbf{M}_{em\ell}$ y $\mathbf{N}_{om\ell'}$, empleando el resultado de la Ec. (3.16) con $m = m'$, está dado por

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{N}_{om\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} &= -\frac{\pi}{2} \frac{z_\ell(\rho)}{\rho} \frac{dz_{\ell'}(\rho)}{d\rho} m \int_0^\pi \left[P_\ell^m(\cos \theta) \frac{dP_{\ell'}^m(\cos \theta)}{d\theta} + \frac{dP_\ell^m(\cos \theta)}{d\theta} P_{\ell'}^m(\cos \theta) \right] d\theta \\ &= -\frac{\pi}{2} \frac{z_\ell(\rho)}{\rho} \frac{dz_{\ell'}(\rho)}{d\rho} m \int_0^\pi \frac{d}{d\theta} [P_\ell^m(\cos \theta) P_{\ell'}^m(\cos \theta)] d\theta \\ &= -\frac{\pi}{2} \frac{z_\ell(\rho)}{\rho} \frac{dz_{\ell'}(\rho)}{d\rho} m \left[P_\ell^m(\cos \theta) P_{\ell'}^m(\cos \theta) \right]_0^\pi. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Mediante un procedimiento semejante se obtiene que $\langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{N}_{om\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = \langle \mathbf{M}_{om\ell}, \mathbf{N}_{em\ell'} \rangle_{\theta, \varphi}$. Haciendo uso de la relación entre las funciones asociadas de Legendre con los polinomios de Legendre [Ec. (3.18)] se obtiene que $P_\ell^m(\cos \theta) = 0$ para $\theta = 0, \pi$ y $m \neq 0$. Sin embargo, si en la Ec. (3.26) m es igual a cero, el producto interior también es nulo, por lo que se cumple que

$$\langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{N}_{om\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = \langle \mathbf{M}_{om\ell}, \mathbf{N}_{em\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = 0 \quad \forall \ell, \ell' m. \quad (3.27)$$

Para calcular $\langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{M}_{em\ell'} \rangle_{\theta, \varphi}$, se emplean las relaciones de ortogonalidad del coseno [Ec. (3.16)], así como las de las funciones asociadas de Legendre [Ec. (3.17)], dando como resultado que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{M}_{em\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} &= \frac{\pi}{2} z_\ell(\rho) z_{\ell'}(\rho) \\ &\times \int_0^\pi \left[\frac{m^2}{\sin^2 \theta} P_\ell^m(\cos \theta) P_{\ell'}^m(\cos \theta) + \frac{dP_\ell^m(\cos \theta)}{d\theta} \frac{dP_{\ell'}^m(\cos \theta)}{d\theta} \right] \sin \theta d\theta, \end{aligned}$$

donde adicionalmente se cumple que $\langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{M}_{em\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = \langle \mathbf{M}_{om\ell}, \mathbf{M}_{om\ell'} \rangle_{\theta, \varphi}$. Mediante un procedimiento análogo, se determinan las expresiones del producto interior de $\langle \mathbf{N}_{em\ell}, \mathbf{N}_{em\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = \langle \mathbf{N}_{om\ell}, \mathbf{N}_{om\ell'} \rangle_{\theta, \varphi}$, dando como resultado que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N}_{em\ell}, \mathbf{N}_{em\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = & \frac{\pi}{2} \left[\frac{z_\ell(\rho)}{\rho} \ell(\ell+1) \right]^2 \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_\ell^{\ell'} + \frac{\pi}{2} \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} [\rho z_\ell(\rho)] \frac{d}{d\rho} [\rho z_{\ell'}(\rho)] \\ & \times \int_0^\pi \left[\frac{m^2}{\sin^2 \theta} P_\ell^m(\cos \theta) P_{\ell'}^m(\cos \theta) + \frac{dP_\ell^m(\cos \theta)}{d\theta} \frac{dP_{\ell'}^m(\cos \theta)}{d\theta} \right] \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Al sustituir $P_\ell^m(\cos \theta)$ en la Ec. (3.11) y multiplicándola por $P_{\ell'}^m(\cos \theta)$, operando de la misma forma intercambiando los papeles de $P_\ell^m(\cos \theta)$ y $P_{\ell'}^m(\cos \theta)$ y sumando ambos resultados se llega a la expresión

$$\begin{aligned} 2 \frac{m^2}{\sin^2 \theta} P_\ell^m P_{\ell'}^m \sin \theta = & P_\ell \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{dP_{\ell'}^m}{d\theta} \right] P_{\ell'} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{dP_\ell^m}{d\theta} \right] + \ell(\ell+1) P_\ell^m P_{\ell'}^m \sin \theta \\ & + \ell'(\ell'+1) P_\ell^m P_{\ell'}^m \sin \theta, \end{aligned} \quad (3.28)$$

en donde se obvia el argumento $\cos \theta$. Dado que

$$\frac{d}{d\theta} \left[P_{\ell'}^m \sin \theta \frac{dP_\ell^m}{d\theta} \right] = P_{\ell'}^m \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{dP_\ell^m}{d\theta} \right] + \sin \theta \frac{dP_{\ell'}^m}{d\theta} \frac{dP_\ell^m}{d\theta},$$

sumando $2 \sin \theta dP_{\ell'}^m d\theta dP_\ell^m d\theta$ de ambos lados de la Ec. (3.28) y agrupando términos, se obtiene que el integrando presente en los productos interiores de $\mathbf{M}_{em\ell}$ y $\mathbf{M}_{em\ell'}$, y $\mathbf{N}_{em\ell}$ y $\mathbf{N}_{em\ell'}$ es

$$\begin{aligned} \left[\frac{m^2}{\sin^2 \theta} P_\ell^m P_{\ell'}^m + \frac{dP_\ell^m}{d\theta} \frac{dP_{\ell'}^m}{d\theta} \right] \sin \theta = & \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{dP_{\ell'}^m}{d\theta} P_\ell^m + \sin \theta \frac{dP_\ell^m}{d\theta} P_{\ell'}^m \right] + \frac{1}{2} \ell(\ell+1) P_\ell^m P_{\ell'}^m \sin \theta \\ & + \frac{1}{2} \ell'(\ell'+1) P_\ell^m P_{\ell'}^m \sin \theta, \end{aligned}$$

en donde el primer término de la suma se desvanece al evaluarse en $\theta = 0, \pi$ y los últimos cumplen con la relación de ortogonalidad de la Ec. (3.17). Por lo tanto

$$\langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{M}_{em\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = \langle \mathbf{M}_{om\ell}, \mathbf{M}_{om\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = \delta_\ell^{\ell'} \pi z_\ell(\rho)^2 \frac{\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \quad \forall \ell, \ell', m, \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N}_{em\ell}, \mathbf{N}_{em\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = & \langle \mathbf{N}_{om\ell}, \mathbf{N}_{om\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} \\ = & \delta_\ell^{\ell'} \pi \frac{\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \left\{ \left[\frac{z_\ell(\rho)}{\rho} \right]^2 \ell(\ell+1) + \left[\frac{1}{\rho} \frac{d[\rho z_\ell(\rho)]}{d\rho} \right]^2 \right\} \quad \forall \ell, \ell', m. \end{aligned} \quad (3.30)$$

3.3. Expansión de una onda plana

Sea una onda plana con longitud de onda λ , polarizada en la dirección x , y caracterizada por el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}^i$ propagándose en la dirección z en

un medio con índice de refracción n_m . En la base de los vectores ortonormales polares la onda plana se escribe como

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{E}}^i &= E_0 e^{ikz} \hat{\mathbf{e}}_x \\ &= E_0 e^{ikr \cos \theta} (\sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_r + \cos \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi),\end{aligned}\quad (3.31)$$

donde E_0 es la magnitud del campo eléctrico y $k = 2\pi n_m/\lambda$. La expansión de la Ec. (3.31) en términos de los armónicos esféricos vectoriales [Ecs. (3.23)] es

$$\vec{\mathbf{E}}^i = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=m}^{\infty} \left[B_{em\ell} \vec{\mathbf{M}}_{em\ell} + B_{om\ell} \vec{\mathbf{M}}_{om\ell} + A_{em\ell} \vec{\mathbf{N}}_{em\ell} + A_{om\ell} \vec{\mathbf{N}}_{om\ell} \right]. \quad (3.32)$$

Con las expresiones de los armónicos esféricos vectoriales [Ec. (3.23)] y con sus relaciones de ortogonalidad se pueden calcular los coeficientes de la expansión de una onda plana en esta base [Ec. (3.32)]. Dado que en la componente radial hay dependencia con $\cos \varphi$, se sigue que $m = 1$ al comparar con las expresiones de $\mathbf{N}_{em\ell}$ [Ec. (3.23c)] y $\mathbf{N}_{om\ell}$ [Ec. (3.23d)] —únicos elementos con componente radial—, y además que $A_{om\ell} = 0$ pues $\mathbf{N}_{om\ell}$ es proporcional a $\sin \varphi$ en esta componente. Asimismo, por la dependencia con $\sin \varphi$ en la componente $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$, $B_{em\ell} = 0$ pues $\mathbf{M}_{em\ell}$ es proporcional a $\cos \varphi$ en dicha entrada.

La onda plana no tiene ninguna divergencia, por lo que se escoge $z_\ell = j_\ell$. Esto se denota en los armónicos esféricos vectoriales con el superíndice (1). Se escribe entonces a la onda plana como

$$\mathbf{E}^i = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left[B_{o1\ell} \mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)} + A_{e1\ell} \mathbf{N}_{e1\ell}^{(1)} \right], \quad (3.33)$$

con

$$\begin{aligned}B_{o1\ell} &= \frac{\langle \mathbf{E}^i, \mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)} \rangle_{\theta, \varphi}}{\langle \mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)}, \mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)} \rangle_{\theta, \varphi}}, \\ A_{e1\ell} &= \frac{\langle \mathbf{E}^i, \mathbf{N}_{e1\ell}^{(1)} \rangle_{\theta, \varphi}}{\langle \mathbf{N}_{e1\ell}^{(1)}, \mathbf{N}_{e1\ell}^{(1)} \rangle_{\theta, \varphi}}.\end{aligned}\quad (3.34)$$

Empleando la Ec. (3.29) con $m = 1$, se calcula el denominador del coeficiente $B_{o1\ell}$, como

$$\langle \mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)}, \mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)} \rangle_{\theta, \varphi} = \pi \frac{[j_\ell(\rho)\ell(\ell+1)]^2}{2\ell+1}, \quad (3.35)$$

y con la Ec. (3.23b) y la Ec. (3.31) se calcula

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{E}^i, \mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)} \rangle_{\theta, \varphi} &= \frac{E_0 \pi}{2} j_\ell(\rho) \int_0^\pi \left(\cos \theta P_\ell^1(\cos \theta) + \sin \theta \frac{dP_\ell^1(\cos \theta)}{d\theta} \right) e^{i\rho \cos \theta} d\theta, \\ &= \frac{E_0 \pi}{2} j_\ell(\rho) \int_0^\pi \frac{d}{d\theta} [\sin \theta P_\ell^1(\cos \theta)] e^{i\rho \cos \theta} d\theta.\end{aligned}\quad (3.36)$$

Considerando la relación entre las funciones asociadas de Legendre y los polinomios de Legendre [Ec. (3.18)] con $m = 1$, se cumple que $P_\ell^1(\mu) = -dP_\ell(\mu)/d\theta$.

Además, los polinomios de Legendre cumplen con la Ec. (3.11) con $m = 0$, es decir,

$$\frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{dP_\ell(\cos \theta)}{d\theta} \right] = -\ell(\ell+1)P_\ell(\cos \theta) \sin \theta,$$

por lo que la Ec. (3.36) es

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}^i, \mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)} \rangle_{\theta, \varphi} &= \frac{E_0 \pi}{2} j_\ell(\rho) \int_0^\pi -\frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{dP_\ell(\cos \theta)}{d\theta} \right] e^{i\rho \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{E_0 \pi}{2} j_\ell(\rho) \ell(\ell+1) \int_0^\pi P_\ell(\cos \theta) \sin \theta e^{i\rho \cos \theta} d\theta. \end{aligned} \quad (3.37)$$

La generalización de las integrales de Poisson de Gegenbauer relaciona a los polinomios de Legendre con la función esférica de Bessel de primer tipo mediante la relación

$$j_\ell(\rho) = \frac{1}{2i^\ell} \int_0^\pi P_\ell(\cos \theta) \sin \theta e^{i\rho \cos \theta} d\theta,$$

por lo que la Ec. (3.37) se reescribe como

$$\langle \mathbf{E}^i, \mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)} \rangle_{\theta, \varphi} = E_0 \pi [j_\ell(\rho)]^2 \ell(\ell+1) i^\ell. \quad (3.38)$$

Calculando el cociente de la Ec. (3.38) con (3.35), se calcula el coeficiente $B_{o1\ell}$, dado por la expresión

$$B_{o1\ell} = i^\ell E_0 \frac{(2\ell+1)}{\ell(\ell+1)}. \quad (3.39)$$

El denominador del coeficiente $A_{e,1,\ell}$, empleando la Ec. (3.30), es

$$\langle \mathbf{N}_{e1\ell}^{(1)}, \mathbf{N}_{e1\ell}^{(1)} \rangle_{\theta, \varphi} = \pi \frac{[\ell(\ell+1)]^2}{2\ell+1} \left\{ \left[\frac{z_\ell(\rho)}{\rho} \right]^2 \ell(\ell+1) + \left[\frac{1}{\rho} \frac{d[\rho z_\ell(\rho)]}{d\rho} \right]^2 \right\} \quad (3.40)$$

Falta calcular el numerador del coeficiente Al emplear las Ecs. (3.29) y (3.30) con $m = 1$, y las condiciones de ortogonalidad de los armónicos esféricos vectoriales, se calcula la expresión de la onda plana en una base esférica, dada por

$$\mathbf{E}^i = E_0 \sum_{\ell=1}^{\infty} i^\ell \frac{2\ell+1}{\ell(\ell+1)} \left(\mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)} - i \mathbf{N}_{e1\ell}^{(1)} \right). \quad (3.41a)$$

El campo magnético incidente se calcula empleando la Ley de Farady-Lenz [Ec. (??)], cuyo resultado es

$$\mathbf{H}^i = \frac{-k_m}{\omega \mu_m} \sum_{\ell=1}^{\infty} E_\ell \left(\mathbf{M}_{e1\ell}^{(1)} + i \mathbf{N}_{o1\ell}^{(1)} \right), \quad (3.41b)$$

con $E_\ell = E_0 i^\ell (2\ell+1)/[\ell(\ell+1)]$.

3.4. Ejercicios sugeridos

Ejercicio 3.1 Demostrar que el campo vectorial $\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{r}\psi)$ es ortogonal a \mathbf{r} suponiendo que ψ es una función suave.

Solución: Empleando la convención de la suma de Einstein con ϵ_{ijk} el símbolo de Levi-Civita y $\partial_j \equiv \partial/\partial x_j$, se calcula la componente i de \mathbf{M} como

$$\begin{aligned} M_i &= [\nabla \times (\mathbf{r}\psi)]_i = \epsilon_{ijk} \partial_j (r_k \psi) \\ &= \psi \epsilon_{ijk} \partial_j (r_k) - \epsilon_{ijk} r_k \partial_j \psi \\ &= \psi [\nabla \times \mathbf{r}]_i - [\mathbf{r} \times \nabla \psi]_i \\ &= -[\mathbf{r} \times \nabla \psi]_i. \end{aligned}$$

Por lo que se demuestra que $\mathbf{M} \cdot \mathbf{r} = 0$.

Ejercicio 3.2 Demostrar que el operador rotacional $\nabla \times$ y el laplaciano ∇^2 conmutan al aplicarse a un campo vectorial \mathbf{A} arbitrario, pero con segundas derivadas continuas.

Solución: Para un campo vectorial arbitrario \mathbf{A} se cumple que

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}),$$

por lo que el rotacional del laplaciano de \mathbf{A} es

$$\nabla \times (\nabla^2 \mathbf{A}) = \nabla \times [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})] - \nabla \times [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})] = -\nabla \times [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})]$$

ya que el rotacional del gradiente de cualquier función es nulo. Además, al sustituir $\mathbf{A} \rightarrow \nabla \times \mathbf{A}$ en la expresión del laplaciano de \mathbf{A} y considerando que la divergencia del rotacional de cualquier función es nulo, se obtiene que

$$\nabla^2(\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla[\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})] - \nabla \times [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})] = -\nabla \times [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})].$$

Por tanto, ∇^2 y $\nabla \times$ son operadores que conmutan.

Ejercicio 3.3 Demostrar que $\nabla^2(\mathbf{r}\psi) = 2\nabla\psi + \mathbf{r}\nabla^2\psi$, suponiendo que ψ es una función suave.

Solución: Empleando la convención de la suma de Einstein

$$\begin{aligned} [\nabla^2(\mathbf{r}\psi)]_i &= \partial_{jj}^2 (r_i \psi) \\ &= \partial_j [\partial_j (r_i) \psi + r_i \partial_j \psi] \\ &= \partial_{jj} r_i + 2\partial_j r_i \partial_j \psi + r_i \partial_{jj}^2 \psi, \end{aligned}$$

donde $\partial_j r_i = \delta_{ij}$ con δ_{ij} la delta de Kronecker. Dado que $\partial_{jj} r_i$ y que $\delta_{ij} \partial_j \psi = \partial_i \psi$, concluimos que

$$[\nabla^2(\mathbf{r}\psi)]_i = 2\partial_i \psi + r_i \partial_{jj}^2 \psi,$$

que es la igualdad que se quería demostrar.

Capítulo 4

Esparcimiento y absorción de una esfera

Esta parte corresponde a **Eduardo**. El contenido propuesto es

- Citar a las Condiciones a la frontera de la esfera
- Cálculo del campo dentro y fuera de la esfera (Coefficientes de Mie)
- Matriz de esparcimiento
- Análisis de a_n , b_n y las $S_{1,2}$

Capítulo 5

Casos particulares

Esta parte aún no tiene autor asignado. El contenido propuesto es

- Gota de agua
- Modelo de Drude (material plasmónico)
- Oro y plata (con experimento)
- Tungsteno (con experimento)

Apéndice A

Teorema Óptico: Deducción de van de Hulst

Poner deducción y luego justificar con el texto de la continuación

Supongamos una colección de partículas colocadas en la región semi infinita definida por los intervalos $0 < z < h$, $-\infty < x < \infty$ y $-\infty < y < \infty$, en donde las partículas se encuentran distribuidas *casi* uniformemente. Si una onda plana polarizada dada por

$$E_i = E_0 e^{ikz} \hat{e}_x, \quad (\text{A.1})$$

incide de forma normal a la placa de partículas (ver fig. ??), el campo eléctrico transmitido \vec{E}_t , en el punto P , es la suma del campo incidente y el campo esparcido por cada una de las partículas en el punto \vec{R}_j , denotado por \vec{E}_{sj} . Esto es

$$\vec{E}_t = \vec{E}_i + \sum_j \vec{E}_{sj}, \quad (\text{A.2})$$

donde se considera que

$$\vec{E}_{sj} = \frac{e^{kR_j}}{-ikR_j} \vec{X}_j(\hat{e}_j) E_0 e^{ikz_j}, \quad (\text{A.3})$$

$$\vec{R}_j = -[x_j \hat{e}_x + y_j \hat{e}_y + (z_j - d) \hat{e}_z] = R_j \hat{e}_j. \quad (\text{A.4})$$

Asimismo, $\vec{X}_j(\hat{e}_j) = (S_2 \cos \varphi_j + S_3 \sin \varphi_j) \hat{e}_{\parallel sj} + (S_4 \cos \varphi_j + S_1 \sin \varphi_j) \hat{e}_{\perp sj}$ y en coordenadas polares depende de las variables φ_j y θ_j , ya que $\hat{e}_{\parallel sj} = \hat{e}_{\theta_j}$ y $\hat{e}_{\perp sj} = \hat{e}_{\varphi_j}$

Suponiendo además que el número de partículas por volumen n es tal que permite aproximar la suma de la ec. ((A.2)) mediante una integral, que todas las partículas en la placa son idénticas y, dado que la onda plana incide de

manera normal a la placa, $\vec{X}_j(\hat{e}_j) = \vec{X}(\hat{e})$. Entonces el campo esparcido se escribe como

$$\sum_j \vec{E}_{sj} \approx E_0 n \int_0^h dz e^{ikz} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\vec{X}(\hat{e})}{-ikR} e^{ikR}, \quad (\text{A.5})$$

$$= E_0 n \int_0^h dz e^{ikz} \int_{-\infty}^{\infty} dy I_x(y, z), \quad (\text{A.6})$$

$$= E_0 n \int_0^h dz e^{ikz} I_y(z), \quad (\text{A.7})$$

donde I_x es el resultado de la integral en la variable x y a su vez I_y el resultado de la integral en la variable y . Sustituyendo la ec. (A.4) en (A.5) se obtiene que

$$\sum_j \vec{E}_{sj} \approx E_0 n \int_0^h dz e^{ikz} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\vec{X}(\hat{e}) e^{ik\sqrt{x^2+y^2+(d-z)^2}}}{-ik\sqrt{x^2+y^2+(d-z)^2}}. \quad (\text{A.8})$$

En secciones anteriores se supuso que $kr \gg 1$ pero como $r = d$, entonces $k \gg 1$. Entonces es posible calcular I_x mediante el teorema de fase estacionaria¹, identificando

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow k, \\ g(x) &\rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + (d-z)^2}, \\ f(x) &\rightarrow \frac{\vec{X}(\hat{e})}{-ik\sqrt{x^2 + y^2 + (d-z)^2}}, \end{aligned}$$

y como $g'(x) = 0$ si $x = 0$ y $g''(0) = \frac{1}{\sqrt{y^2+(d-z)^2}}$, se obtiene que

$$I_x(y, z) = \frac{(\vec{X}(\hat{e}))_{x=0}}{-ik(y^2 + (d-z)^2)^{1/4}} \sqrt{\frac{2\pi}{k}} e^{i\pi/4} e^{ik\sqrt{y^2+(d-z)^2}}. \quad (\text{A.10})$$

Como $I_y(z) = \int_{-\infty}^{\infty} I_x(y, z) dy$, se puede utilizar nuevamente el teorema de fase estacionaria, identificando

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow k, \\ g(y) &\rightarrow \sqrt{y^2 + (d-z)^2}, \\ f(y) &\rightarrow \frac{(\vec{X}(\hat{e}))_{x=0}}{-ik(y^2 + (d-z)^2)^{1/4}} \sqrt{\frac{2\pi}{k}} e^{i\pi/4}, \end{aligned}$$

y como $g'(y) = 0$ si $y = 0$ y $g''(0) = \frac{1}{|d-z|}$, entonces

¹Sean f y g funciones que permita su expansión en series de Taylor en el intervalo $[a, b]$, (g con valores en los reales) y que en $c \in [a, b]$ se cumpla que $g'(c) = 0, g''(c) \neq 0, f(c) \neq 0$ y que g sea distinto de cero en todo el intervalo. Si $\alpha \gg 1$, entonces

$$\int_a^b f(t) e^{\alpha g(t)} \approx f(c) e^{i\alpha g(c)} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha |g''(c)|}} e^{i\pi\mu/4}, \quad (\text{A.9})$$

con $\mu = \text{sign}(g''(c))$

$$\begin{aligned}
I_y(z) &= \left(\frac{(\vec{X}(\hat{e}))_{x,y=0}}{-ik((d-z)^2)^{1/4}} \sqrt{\frac{2\pi}{k}} e^{i\pi/4} \right) \sqrt{\frac{2\pi|z-d|}{k}} e^{i\pi/4} e^{ik|d-z|} \\
&= -\frac{2\pi}{k^2} (\vec{X}(\hat{e}))_{x,y=0} e^{ik|d-z|},
\end{aligned} \tag{A.11}$$

por lo que el campo esparcido está dado por la expresión

$$\sum_j \vec{E}_{sj} \approx -E_0 n \frac{2\pi}{k^2} (\vec{X}(\hat{e}))_{x,y=0} \int_0^h e^{ikz} e^{ik|d-z|} dz, \tag{A.12}$$

y dado que $0 < z < h < d$

$$\sum_j \vec{E}_{sj} \approx -E_0 n \frac{2\pi}{k^2} (\vec{X}(\hat{e}))_{\theta=0} \int_0^h e^{ikz} e^{ik(d-z)} dz, \tag{A.13}$$

$$= -E_0 n \frac{2\pi}{k^2} (\vec{X}(\hat{e}))_{\theta=0} h e^{ikd}. \tag{A.14}$$

Antes de continuar notemos que como $\vec{X}(\hat{e}) = X_{\parallel} \hat{e}_{\parallel} + X_{\perp} \hat{e}_{\perp} = X_{\parallel} \hat{e}_{\theta} + X_{\perp} \hat{e}_{\varphi}$, en coordenadas cartesianas, \vec{X} se escribe como

$$\vec{X} = (X_{\parallel} \cos \theta \cos \varphi + X_{\perp} \sin \varphi) \hat{e}_x + (X_{\parallel} \cos \theta \sin \varphi - X_{\perp} \cos \varphi) \hat{e}_y + X_{\parallel} \sin \theta \hat{e}_z \tag{A.15}$$

por lo que, si se evalúa en $x, y = 0$ y $z > 0$, o lo que es equivalente en $\theta > 0$, $\vec{X}(\hat{e})$ sólo cuenta con componentes x y y . Finalmente, sustituyendo las ecs. (A.1) y (A.14) en la ec. (A.2), se obtiene la expresión del campo transmitido por la placa a una distancia d

$$\vec{E}_t = E_0 e^{ikd} \left\{ \left[1 - \frac{2\pi}{k^2} nh (\vec{X} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0} \right] \hat{e}_x - \frac{2\pi}{k^2} nh (\vec{X} \cdot \hat{e}_y)_{\theta=0} \hat{e}_y \right\}. \tag{A.16}$$

A pesar de que la onda incidente estaba polarizada linealmente en la dirección x , el campo esparcido puede presentar componentes en la dirección y , por lo que en general, el ángulo de polarización es rotado al atravesar la placa de partículas. Suponiendo que $\vec{X} \cdot \hat{e}_y = 0$ y que $|2\pi k^{-2} nh (\vec{X} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0}| \ll 1$, puesto que $k \gg 1$, el campo eléctrico transmitido es entonces

$$\vec{E}_t = \vec{E}_i e^{-\frac{2\pi}{k^2} nh (\vec{X} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0}} \tag{A.17}$$

Recordemos que el coeficiente de amplitud de transmisión t_{slab} de una placa de un medio continuo lineal, homogéneo e isótropo de grosor h con índice de refracción \tilde{N} inmersa en un medio con índice de refracción N , donde además $\tilde{N} \approx N$, está dado por

$$t_{slab} \approx e^{ih(\tilde{k}-k)} \tag{A.18}$$

con $\tilde{k} = 2\pi\tilde{N}/\lambda_0$. Comparando las ecs. (A.17) y (A.18), observamos que el caso de la placa de partículas es semajante al del medio continuo si se cumple la relación

$$\frac{\tilde{N}}{N} = 1 + i \frac{2\pi}{k^3} n (\vec{X} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0}. \tag{A.19}$$

Para poder tratar una placa de partículas como un medio continuo a través de un índice de refracción \tilde{N} , encontremos la expresión del campo *reflejado*, mostrado en la fig. ???. Es decir, se realizará el mismo cálculo que para el campo transmitido pero ahora

$$\vec{R}_j = -[x_j \hat{e}_x + y_j \hat{e}_y + (d + z_j) \hat{e}_z] = R_j \hat{e}_j, \quad (\text{A.20})$$

por lo que las expresiones calculadas en las ecs. (A.10) y (A.11) son las mismas, sustituyendo $(d - z) \rightarrow (d + z)$. Por lo tanto el campo esparcido por las partículas detrás de la placa es

$$\begin{aligned} \sum_j \vec{E}_{sj} &\approx -E_0 n \frac{2\pi}{k^2} (\vec{X}(\hat{e}))_{\theta=\pi} \int_0^h e^{ikz} e^{ik(d+z)} dz, \\ &= iE_0 n \frac{\pi}{k^3} (\vec{X}(\hat{e}))_{\theta=\pi} e^{ikd} (e^{i2kh} - 1), \end{aligned}$$

y sustituyendo la ec. (A.1) en este resultado, se obtiene que

$$\vec{E}_r = -\vec{E}_i \frac{in\pi}{k^3} (1 - e^{i2kh}) (\vec{X}(\hat{e}))_{\theta=\pi}, \quad (\text{A.21})$$

donde se utilizó que evaluar en $x, y = 0$ y $z < 0$ es equivalente a evaluar en $\theta = \pi$. Por la ec. (A.15) y suponiendo que $\vec{X} \cdot \hat{e}_y = 0$, el campo eléctrico de la ec. (A.21) sólo tiene componentes distintas de cero en la componente x .

Dado que el coeficiente de amplitud de reflexión r_{slab} para una placa de un medio continuo lineal, homogéneo e isótropo de grosor h con índice de refracción \tilde{N} inmersa en un medio con índice de refracción N , donde además $\tilde{N} \approx N$, está dado por

$$r_{slab} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\tilde{N}}{N} \right) (1 - e^{i2kh}). \quad (\text{A.22})$$

y sustituyendo en la ec. (A.19) en (A.22) y comparándola con la ec. (A.21), se concluye que una requisito para tratar a una placa de partículas como un medio continuo es que

$$\vec{X}_{\theta=0} = \vec{X}_{\theta=\pi}, \quad (\text{A.23})$$

asumiendo que no hay componente en y en los campos esparcidos. Para partículas esféricas con un diámetro menor a la longitud de onda del campo eléctrico incidente la ec. (A.23) se satisface sin embargo, no es correcto considerar a \tilde{N} como un índice de refracción debido a que la extinción para un medio continuo se debe a la absorción y ésta se relaciona con la parte imaginaria del índice de refracción, mientras que para \tilde{N} la extinción se debe total o parcialmente al esparcimiento y, aún teniendo materiales no absorbentes, la parte imaginaria de \tilde{N} es distinta de cero.

El coeficiente de extinción α_{ext} dada por $I_t = I_i e^{-\alpha_{ext}h}$, la ec. (A.17) y considerando el teorema óptico que da una expresión para la sección transversal de extinción mediante la relación

$$C_{ext} = \frac{4\pi}{k^2} \text{Re}[(\vec{X} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0}] \quad (\text{A.24})$$

se concluye que

$$\alpha_{ext} = nC_{ext} = nC_{abs} + nC_{sca}. \quad (\text{A.25})$$

Cabe mencionar que a pesar de que se asumieron partículas idénticas, el resultado se generaliza a una mezcla de partículas mediante el principio de superposición, siempre que la densidad de partículas por columnen permita aproximar la ec. (A.5) mediante una integral.

Bibliografía

- jackson1999electrodynamics** John David Jackson. *Classical electrodynamics*. 3°. John Wiley & Sons, 1999 (vid. págs. [1-3](#), [9](#), [10](#), [13](#), [23](#)).
- reitz1993foundations** John R. Reitz, Frederick J. Milford y Robert W Christy. *Foundations of Electromagnetic Theory*. 4.ª ed. Addison-Wesley Pub. Co., 1993 (vid. [pág. 2](#)).
- purcell2011electricity** Edward M. Purcell. *Electricity and Magnetism*. Cambridge University Press, 2011 (vid. [pág. 2](#)).
- griffiths2013electrodynamics** David Jeffrey Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. 4°. Pearson, 2013 (vid. págs. [2-9](#)).
- born2005principles** Max Born y Wolf Emil. *Principle of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. 7.ª ed. Cambridge University Press, 2005 (vid. págs. [7](#), [9](#)).
- bohren1998absorption** Craig F Bohren y Donald R Huffman. *Absorption and scattering of light by small particles*. John Wiley & Sons, 1998 (vid. págs. [7](#), [9](#), [14](#), [18](#), [21](#), [27](#), [28](#)).
- yu2010fundamentals** Peter Y. Yu y Manuel Cardona. *Fundamentals of semiconductors. Physics and materials properties*. 4.ª ed. Springer, 2010 (vid. [pág. 10](#)).
- kittel1996introduction** Charles Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. 7.ª ed. John Wiley & Sons, 1996 (vid. [pág. 10](#)).
- tsang2000scattering** Leung Tsang, Jin Au Kong y Kung-Hau Ding. *Scattering of electromagnetic waves: theories and applications*. John Wiley & Sons, 2000 (vid. [pág. 14](#)).
- krasavin2018generalization** Alexey V. Krasavin y col. “Generalization of the optical theorem: experimental proof for radially polarized beams”. En: *Light: Science & Applications* 7.1 (dic. de 2018), [pág. 36](#). ISSN: 2047-7538. DOI: [10.1038/s41377-018-0025-x](#). URL: <http://www.nature.com/articles/s41377-018-0025-x> (vid. [pág. 19](#)).
- newton1976optical** Roger G. Newton. “Optical theorem and beyond”. En: *American Journal of Physics* 44.7 (1976), [págs. 639-642](#). ISSN: 0002-9505, 1943-2909. DOI: [10.1119/1.10324](#). URL: <http://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.10324> (visitado 04-12-2020) (vid. págs. [19](#), [20](#)).
- strutt1871On** “XV. On the light from the sky, its polarization and colour”. En: () (vid. [pág. 19](#)).

hermans2011waterappendices A. J. Hermans. “Appendices: Mathematical Methods”. En: *Water Waves and Ship Hydrodynamics*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2011, págs. 155-164. ISBN: 978-94-007-0095-6 978-94-007-0096-3 (vid. págs. [21](#), [24](#)).

arfken2001methods George Brown Arfken y Hans J Weber. *Mathematical methods for physicists*. Harcourt Academic Press, 2001 (vid. págs. [29](#), [30](#)).

Índice alfabético

- Armónicos esféricos vectoriales, [28](#)
 - M** y **N**, [31](#)
 - función generadora
 - solución azimutal de la, [29](#)
 - solución general, [30](#)
 - solución polar de la, [29](#)
 - solución radial de la, [30](#)
 - función generadora de los, [28](#)
- Bessel
 - ecuación esférica de, [30](#)
 - funciones esféricas de, [30](#)
 - relaciones de recurrencia de las, [30](#)
- Ecuaciones de Maxwell, [1](#)
- Ecuación
 - asociada de Legendre, [29](#)
 - esférica de Bessel, [30](#)
- Electromagnéticos
 - campos
 - lejano, [14](#)
 - operador de campo lejano, [14](#)
- Esparcimiento
 - matriz de, [14](#)
- Hankel, *véase* Bessel
 - funciones esféricas de, [30](#)
- Kronecker
 - Delta de, [29](#)
- Legendre
 - ecuación asociada de, [29](#)
 - funciones asociadas de, [30](#)
 - relaciones de ortogonalidad de las, [30](#)
 - polinomios de, [30](#)
- Ortogonalidad
 - funciones asociadas de
 - Legendre, relaciones de, [30](#)
 - seno y coseno, relaciones de, [29](#)
- Plano
 - de esparcimiento, [12](#)
- Polarización
 - respecto al plano de esparcimiento, [12](#)
 - paralela (\parallel), [12](#)
 - perpendicular (\perp), [12](#)
- Separación de variables, [28](#)
- Teorema
 - Óptico, [19](#)