

Resultados de cálculos de reflectancia empleando el Modelo de Esparcimiento Coherente

Urrutia Anguiano, Jonathan Alexis

Las propiedades físicas de los materiales dependen en general del tamaño del sistema [1], por ejemplo, a escala nanométrica —de 1 a 100nm [1]—, la respuesta electromagnética (EM) de bulto de los metales es menos relevante que los efectos de superficie [2]. La *nanoplasmónica* estudia la respuesta EM a esta escala y el interés en la respuesta EM de nanopartículas (NPs) se ha renovado debido a la diversidad de posibles aplicaciones que emplean las resonancias plasmónicas de superficie (SPRs). Áreas como la espectroscopía [3–6], el sensado [4–6], la litografía [5, 6], y la biología y medicina [4], son ejemplos del creciente interés en las NPs.

Las SPRs son ~~las superficiales~~ resultado del acoplamiento ~~de~~ la radiación EM ~~y los electrones libres en la superficie de algún metal~~ [6]. La clasificación de las SPRs comprende dos tipos: propagantes y localizadas. Cuando las SPRs se propagan a lo largo de una una interfaz entre un medio dieléctrico y uno metálico se denomina *plasmón-polaritón de superficie* (SPP) [5]. Si la SPR toma lugar en la superficie de una nanoestructura metálica, se le conoce como *resonancia de plasmón de superficie localizado* (LSPR) [5]; ~~las SPRs también son llamadas modos normales~~ [7].

En el área de biosensores se emplean SPRs por la respuesta que tienen a cambios en el índice de refracción de la matriz [8], que es el medio que rodea la estructura metálica. Los sensores comerciales se caracterizan por el uso de SPPs en una configuración de incidencia interna atenuada (ATR), en la cual, para determinadas combinaciones de ángulos de incidencia θ_i y longitud de onda λ (ver Fig. 7b), se presenta un mínimo en las mediciones de reflectancia [9]. Los sensores basados en LSPs han sido propuestos como mejora sobre los detectores comerciales, ya que son al menos un orden de magnitud más sensibles a cambios de índice de refracción de la matriz [4, 8].

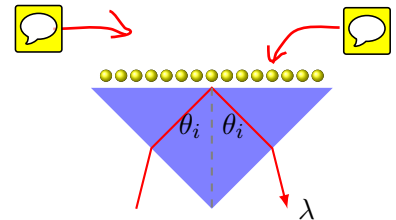


Figura 1: Arreglo de NPs esféricas iluminado por un haz de longitud de onda λ a un ángulo de incidencia θ_i , en configuración ATR

En el 2009 se publicó el artículo [8] donde se propone un arreglo ordenado de NPs plasmónicas para la mejora en resolución del biosensado. En el artículo se reportó un modo plasmónico distinto a los modos normales de las NPs individuales, que permite el sen del índice de refracción de la matriz. En el 2018 se publicó que este modo es una respuesta colectiva del arreglo periódico [9] y depende del parámetro de red de éste. Dado que la fabricación de arregos ordenados de NPs presenta una complicación técnica de alto costo y largo tiempo de producción, se propone un arreglo bidimensional desordenado de NPs esféricas que presente una respuesta colectiva semejante a la reportada en [8] y [9].

Para caracterizar la respuesta óptica de un arreglo bidimensional desordenado de NPs esféricas se presenta primero el comportamiento del arreglo ordenado. Más adelante, se presentan los cálculos de la reflectancia y transmitancia de una monocapa desordenada de NPs esféricas bajo el formalismo del modelo de esparcimiento coherente (CSM), que proporciona expresiones analíticas para los coeficientes de amplitud reflexión y transmisión para estos sistemas. Asimismo, se expone la solución de los campos

EMs de radiación de la solución de Mie —para la construcción del CSM—, y los modos normales de NPs esféricas, con la finalidad de distinguir la respuesta individual de las NPs con la respuesta colectiva a caracterizar.

1. Arreglos ordenados

Por su potencial como biosensor basado en LSPRs, un sistema de NPs cilíndricas de oro, colocadas en arreglos periódicos bidimensionales ha sido estudiado [8, 9]. Las dimensiones de los nanocilindros y el parámetro de red del arreglo son menores que la longitud de onda con la que se ilumina el arreglo [8, 9]. En la Fig. 2a se presentan los resultados de reflectancia en ATR, obtenidos mediante una simulación numérica para un arreglo cuadrado de nanocilindros, simulados por nanoesferoides empleando una modificación del modelo de Maxwell Garnett [10] —que es una teoría de medio efectivo¹— para la función dieléctrica $\varepsilon(\omega) = n^2(\omega)$. En la Fig. 2b se muestran los resultados de reflectancia para distintos valores de la proyección perpendicular del vector de onda k_z como función de la energía de la onda incidente; esto se conoce como relación de dispersión. En la Fig. 2c se grafican los resultados experimentales de los parámetros elipsométricos² Ψ y Δ como función de λ .

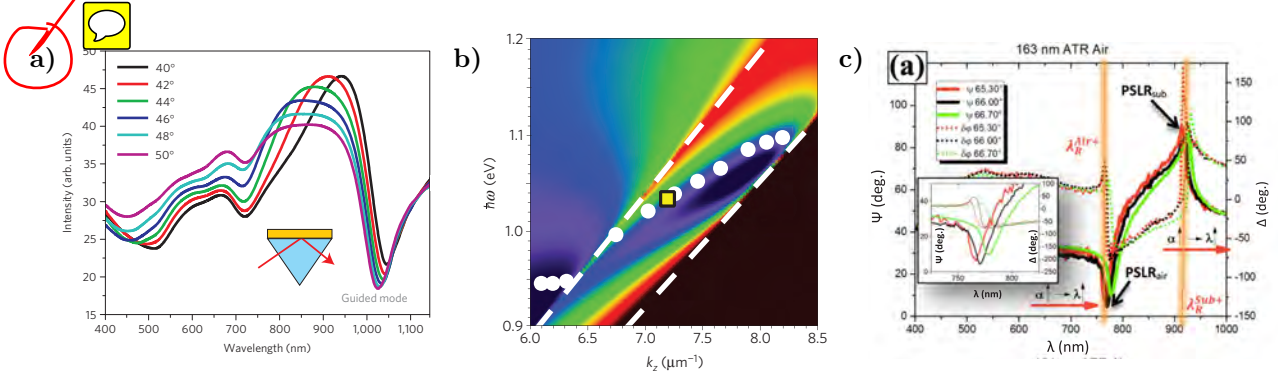


Figura 2: Gráficas de [a,b)] reflectancia (extraídas de [8]) y c) parámetros elipsométricos (extraída de [9]) de un sistema de nanocilindros en un arreglo cuadrado periódico en configuración ATR. La reflectancia se grafica como a) función del ángulo de incidencia θ_i y la longitud de onda λ , y b) la energía $\hbar\omega$ y la proyección normal al arreglo del vector de onda k_z . Los parámetros elipsométricos c) se grafican en función de λ . Las dimensiones de los nanocilindros en a), b) son 360nm de largo, 25nm de diámetro y una separación de 60nm entre ellos y se encuentran en una matriz de aire ($n = 1$) y sobre un sustrato de vidrio ($n = 1.5$).

En la Fig. 2a se observa, además de los modos normales (al rededor de 500nm y 720nm), una excitación en el infrarojo denominada *modo guiado* [8], que sufre un corrimiento al azul conforme el ángulo de incidencia aumenta. En la Fig. 2b se grafica la relación de dispersión del modo guiado, donde los puntos blancos en la Fig. 2b son los mínimos en el infrarojo de la Fig. 2a. La región delimitada por las líneas punteadas blancas corresponde al medio efectivo simulado, mientras que la región oscura engloba a las combinaciones de energía y vector de onda sin sentido físico. La región fuera del área entre las líneas corresponde a los resultados más allá del ángulo crítico entre la matriz y el medio efectivo. En la Fig. 2c aparecen dos modos distintos a los modos normales y son llamados *resonancia de red del plasmón de superficie* (PSLR) [9], en donde uno se asocia a una onda que se propaga a lo largo de la interfaz sobre el sustrato y otra sobre la matriz [9]. Estos modos se encuentran en 900nm y 760nm respectivamente y dependen del ángulo de incidencia y la periodicidad del arreglo [9].

¹Proceso de homogenización en donde se sustituye el medio heterogéneo por un medio continuo equivalente. Este proceso se basa en la respuesta promedio del medio original cuando la longitud de onda de la luz incidente es grande en comparación a las dimensiones del sistema [11].

² $R_s/R_p = \tan \Psi e^{i\Delta}$, con R_p la reflectancia en polarización P y R_s la reflectancia en polarización S [9].

2. Arreglos desordenados

Las ventajas de un sistema ordenado como sensor es la posibilidad de ajuste del parámetro de red del sistema para optimizar la medición del sensor a la muestra y su posible compatibilidad con equipos basados en SPR actuales [8]. En trabajos recientes se han estudiado de forma experimental la respuesta de arreglos ordenados [8, 9] sin embargo, el empleo de arreglos desordenados como sensores contribuye a una reducción en los precios de producción de los sensores por contar con menores dificultades técnicas en su elaboración.

En las siguientes secciones se presentan el modelo de Drude-Sommerfeld para simular materiales plasmónicos [5], así como resultados experimentales para la respuesta óptica del oro y la plata. Igualmente, se expone la matriz de esparcimiento dada por la solución de Mie —que resuelve los campos EMs esparcidos por una esfera iluminada por una onda plana [7]— puesto que es empleada en el formalismo del CSM. Finalmente se introducen las expresiones para los coeficientes de amplitud de reflexión y de transmisión del CSM, con la finalidad de estudiar la respuesta óptica de una monocapa de NPs esféricas plasmónicas desordenadas y caracterizar una excitación equivalente a la PSLR, es decir, una respuesta colectiva del arreglo, para sistemas desordenados.

2.1. Respuesta electromagnética de materiales plasmónicos

Los materiales plasmónicos tienen, en su estructura electrónica, electrones de conducción que pueden ser modelados como un gas de electrones libres [3]. El modelo de Drude-Sommerfeld³, desde un enfoque clásico, es la solución a la ecuación de movimiento de los electrones libres en un material ante la presencia de un campo eléctrico externo oscilante [12]. En su deducción, se considera la respuesta de todos los electrones libres del material para determinar la función dieléctrica $\varepsilon(\omega)$, que se relaciona con el índice de refracción $n(\omega)$ mediante la expresión $\varepsilon(\omega) = n^2(\omega)$.

El efecto de un campo eléctrico externo \mathbf{E} es el cambio de posición de los electrones del material respecto a su posición original, por lo se presentan momentos dipolares $\mathbf{p} = q_e \mathbf{r}$; con q_e , la carga del electrón y \mathbf{r} , su posición. El efecto neto en el material es la polarización $\mathbf{P} = n_v \mathbf{p}$, donde n_v es la densidad volumétrica electrónica [3]. La respuesta óptica del material, caracterizada por la función dieléctrica ε , depende de \mathbf{E} y \mathbf{P} como [3]

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\mathbf{E},$$

donde ε_0 es la permitividad eléctrica del vacío⁴, y donde se asume que el material es isótropo, es decir, la polarización ocurre en la dirección del campo eléctrico [3]. En términos de la posición \mathbf{r} , se obtiene que

$$n_v q_e \mathbf{r} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\mathbf{E}. \quad (1)$$

Al asumir que el material se encuentra ante la presencia de un campo eléctrico oscilante $\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$, la ecuación de movimiento que obedece un electrón libre es [12, 13]

$$m_e \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} + m_e \gamma \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = q_e \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad (2)$$

³Con este modelo, Paul Drude describe correctamente las propiedades térmicas de los metales (Ley de Wiedermann-Franz) y la ley de Ohm sin embargo, lo hace bajo suposiciones falsas sobre el comportamiento de los electrones [12]. Arnold Sommerfeld corrige el modelo de Drude al considerar un gas de fermiones que obedecen la ecuación de Schrödinger y el principio de exclusión de Pauli [12].

⁴ $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}$ [14]

donde m_e es la masa efectiva del electrón [12], y donde se introduce un término de amortiguamiento. Éste es descrito por γ , denominada *constante fenomenológica* [13], que es el inverso del tiempo promedio entre eventos de colisiones [3, 12], causados por la interacción con fonones, defectos de la red cristalina y por las dimensiones del sistema [12, 13]. Al multiplicar la Ec. (2) por $n_v q_e$, resolverla con el *Ansatz* $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}$, y compararla con la Ec. (1), se despeja la función dieléctrica, expresada por

$$n^2(\omega) = \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}, \quad (3)$$

en donde se evidencia que la función dieléctrica es, en general, una cantidad compleja. El término ω_p es la frecuencia de plasma dada por [3, 12]

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_v e^2}{m_e \varepsilon_0}}.$$

La constante fenomenológica de bulto γ_∞ es [3, 12, 13]

$$\gamma_\infty = \frac{v_F}{L},$$

donde v_F es la velocidad de Fermi⁵, que es la velocidad electrónica, y L es el camino libre medio, que representa la distancia promedio que recorren los electrones entre eventos de colisiones [12]. Para materiales de bulto $\gamma = \gamma_\infty$ en la Ec. (3) sin embargo, para partículas con dimensiones menores al camino libre medio, se presentan efectos de superficie que lo modifican [13]. Para corregir γ_∞ , se calcula un camino libre medio efectivo que, para partículas esféricas, es proporcional a su radio a , y por tanto se calcula un término de amortiguamiento adicional [13]

$$\gamma_a = A \frac{v_F}{a},$$

donde A es un parámetro que depende de las propiedades del material y es del orden de 1 [13]. Entonces, para nanopartículas esféricas modeladas por una función dieléctrica tipo Drude [ec. (3)] se emplea la constante fenomenológica

$$\gamma = \gamma_\infty + \gamma_a = v_F \left(\frac{1}{L} + \frac{A}{a} \right). \quad (4)$$

La frecuencia de plasma ω_p , en el modelo de Drude-Sommerfeld, delimita regímenes donde el material plasmónico se comporta como un metal o como un dieléctrico [15]. En la Fig. 3 se muestran las funciones dieléctricas (Fig. 3a) y los índices de refracción (Fig. 3b) modelados por una función tipo Drude con $\omega_p = 4.3\text{eV}$ (líneas continuas) y 10eV (líneas punteadas), y $\gamma = 0.15\text{eV}$; la parte real se presenta en azul, mientras que la imaginaria lo hace en rojo. En estas gráficas se observa que para $\omega < \omega_p$ la parte real de la función dieléctrica cumple que $\text{Re}[\varepsilon(\omega)] < 0$, por lo que el índice de refracción, en la misma región, es complejo: el material presenta una respuesta metálica. Para $\omega > \omega_p$, se cumple que $\text{Re}[\varepsilon(\omega)] > 0$ y $\text{Im}[\varepsilon(\omega)] \approx 0$, por lo que el índice de refracción se comporta como un material transparente en dicha región.

Los materiales reales, como el oro (Au) y la plata (Ag), se ajustan al modelo de Drude-Sommerfeld para frecuencias bajas como el infrarojo [3] ($0.8\text{--}1000\mu\text{m}$ [16]). Sin embargo, en el espectro visible ($400\text{--}780\text{nm}$ [16] o $1.59\text{--}3.10\text{eV}$) el modelo de Drude-Sommerfeld debe complementarse pues la radiación EM más energética excita electrones ligados a la banda de conducción [3], lo que modifica la respuesta del material. En la Fig. 4 se muestran los resultados experimentales para el índice de refracción de bulto del

⁵En un sistema con N electrones, que obedecen el principio de exclusión de Pauli, la energía de Fermi E_F es la máxima en la que todos los niveles energéticos menores están ocupados [12]. La energía de Fermi es $E_F = (\hbar^2/2m_e)k_F^2$; con k_F , el vector de onda de Fermi. De ésta, se calcula la velocidad de Fermi $v_F = p_F/m_e = \hbar k_F/m$. Para un gas de electrones libres, $k_F = (3\pi n_v)^{1/3}$, y en metales típicos $v_F \approx 10^8\text{cm s}^{-1}$ [12].

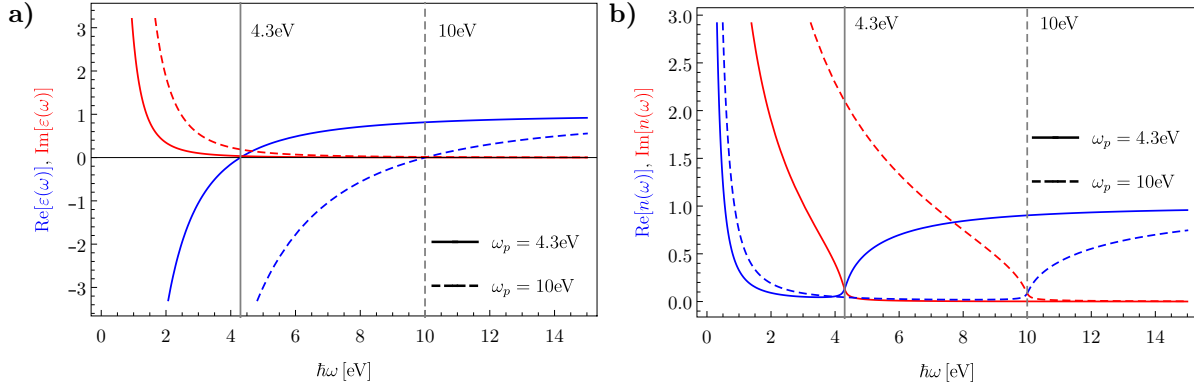


Figura 3: Gráficas de **a)** la función dieléctrica y **b)** del índice de refracción del modelo de Drude-Sommerfeld, para dos frecuencias de plasma $\omega_p = 4.3\text{eV}$ (líneas continuas) y $\omega_p = 10\text{eV}$ (líneas punteadas). Ambas líneas grises verticales corresponden a las frecuencias de plasma empleadas, que es donde la parte real (azul) tiene el mismo valor que la parte imaginaria (rojo).

oro (Fig. 4a) y de la plata (Fig. 4b), obtenidos de [17]. Los datos experimentales muestran una respuesta cualitativa semejante al modelo de Drude-Sommerfeld (Fig. 3b) para energías bajas: energías menores a 2.50eV para Au y menores a 3.5eV para Ag. En las regiones con energías mayores la parte imaginaria del índice de refracción no tiende a cero, como sí lo hace en el modelo de Drude-Sommerfeld.

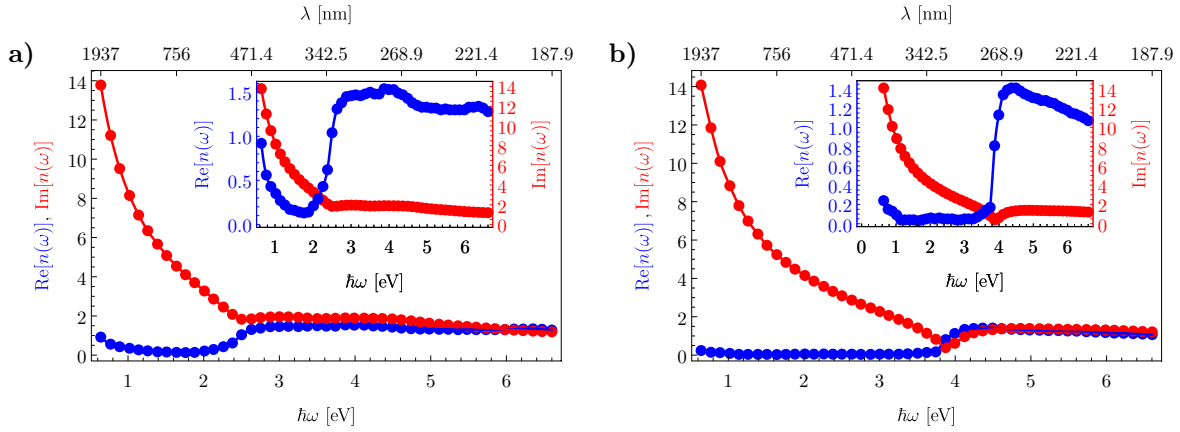


Figura 4: Gráficas del índice de refracción —parte real, en azul; parte imaginaria, en rojo— de **a)** Au y **b)** Ag, como función de la energía. En el marco superior se observa su dependencia en longitud de onda λ . Los puntos en ambas gráficas son los datos experimentales obtenidos de [17].

2.2. Solución de Mie: respuesta óptica de partículas esféricas

El problema de la absorción y el esparcimiento de luz por una partícula esférica fue resuelto por el físico alemán Gustav Mie en 1908 [18]. La solución de Mie consiste en la expansión de una onda plana, que ilumina una esfera, en una base esférica que cumple con las ecuaciones de Maxwell, y en las condiciones de continuidad que los campos EMs satisfacen en la superficie de la esfera [7, 18, 19]. Existen publicaciones previas a la de Mie en donde el mismo enfoque es empleado [19] sin embargo, en el trabajo de Mie se desarrollan relaciones recursivas para la solución general, que facilitan el cálculo numérico, y se discute la convergencia de este resultado [19]. Esto permitió que Mie expusiera diez casos prácticos, a diferencia de otros textos que se limitaban a pocos problemas experimentales [19].

Para la solución de los campos EMs esparcidos por una partícula esférica no magnética de radio a con un índice de refracción n_p e inmersa en una matriz con índice de refracción real n_m , se supone que ésta

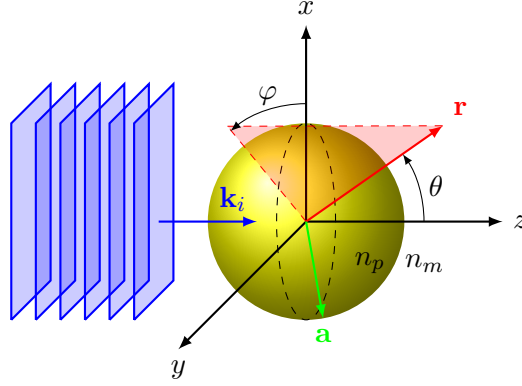


Figura 5: Esfera de radio a e índice de refracción n_p , inmersa en una matriz con índice n_m . La esfera es iluminada por una onda plana de luz con vector de onda \mathbf{k}_i que viaja en la dirección \hat{e}_z .

es iluminada por una onda plana \mathbf{E}^i con longitud de onda λ [7]. La onda plana, que se asume polarizada en el eje x y con propagación en la dirección \hat{e}_z (ver Fig. 5), está dada por [7]

$$\mathbf{E}^i = E_0 \sum_{\ell=1}^{\infty} i^{\ell} \frac{2\ell+1}{\ell(\ell+1)} \left(\mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)} - i\mathbf{N}_{e1\ell}^{(1)} \right), \quad (5)$$

en donde E_0 es la magnitud del campo eléctrico de la onda plana incidente. Los términos $\mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)}$ y $\mathbf{N}_{e1\ell}^{(1)}$ son dos elementos de los armónicos esféricos vectoriales, que son una base esférica vectorial y ortogonal [7]. Al considerar la continuidad de las componentes paralelas a la superficie de la esfera del campo eléctrico, el campo esparcido es [7]

$$\mathbf{E}^s = E_0 \sum_{\ell=1}^{\infty} i^{\ell} \frac{2\ell+1}{\ell(\ell+1)} \left(ia_{\ell} \mathbf{N}_{e1\ell}^{(3)} - b_{\ell} \mathbf{M}_{o1\ell}^{(3)} \right), \quad (6)$$

donde $\mathbf{M}_{o1\ell}^{(3)}$ y $\mathbf{N}_{e1\ell}^{(3)}$ son dos elementos de los armónicos esféricos vectoriales [7].

Los coeficientes a_{ℓ} y b_{ℓ} en las Ecs. (5) y (6) son los coeficientes de Mie, cuyas expresiones son [7]

$$a_{\ell} = \frac{m\psi_{\ell}(mx)\psi'_{\ell}(x) - \psi_{\ell}(x)\psi'_{\ell}(mx)}{m\psi_{\ell}(mx)\xi'_{\ell}(x) - \xi_{\ell}(x)\psi'_{\ell}(mx)}, \quad (7a) \quad b_{\ell} = \frac{\psi_{\ell}(mx)\psi'_{\ell}(x) - m\psi_{\ell}(x)\psi'_{\ell}(mx)}{\psi_{\ell}(mx)\xi'_{\ell}(x) - m\xi_{\ell}(x)\psi'_{\ell}(mx)}, \quad (7b)$$

en donde $m = n_p/n_m$ es el contraste entre los índices de refracción, $x = ka = an_m(2\pi/\lambda)$ es el parámetro de tamaño, y ψ_{ℓ} y ξ_{ℓ} son las funciones de *Riccati-Bessel* [7]

$$\psi_{\ell}(\rho) = \rho j_{\ell}(\rho), \quad \xi_{\ell}(\rho) = \rho h_{\ell}^{(1)}(\rho),$$

donde $j_{\ell}(\rho)$ es la función de Bessel esférica de primer tipo y $h_{\ell}^{(1)}(\rho)$, la función de Hankel de primer tipo [20]. Las derivadas en las Ecs. (7) de las funciones de Riccati-Bessel se calculan respecto al argumento de la función. Los coeficientes de Mie representan los términos de una expansión multipolar de la respuesta EM de las partículas esféricas: a_{ℓ} , los multipolos eléctricos; b_{ℓ} , los magnéticos [13].

El campo eléctrico incidente \mathbf{E}^i [ec. (5)] se relaciona con el campo eléctrico esparcido \mathbf{E}^s [ec. (6)] mediante la matriz de esparcimiento \mathbb{S} , es decir, se cumple que

$$\begin{pmatrix} E_{\parallel}^s \\ E_{\perp}^s \end{pmatrix} = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr} \begin{pmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\parallel}^i \\ E_{\perp}^i \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Los elementos de la matriz de esparcimiento S_1 y S_2 son [7]

$$S_1(\theta) = \sum_{\ell} \frac{2\ell + 1}{\ell(\ell + 1)} [a_{\ell}\pi_{\ell}(\cos \theta) + b_{\ell}\tau_{\ell}(\cos \theta)], \quad (9a)$$

$$S_2(\theta) = \sum_{\ell} \frac{2\ell + 1}{\ell(\ell + 1)} [a_{\ell}\tau_{\ell}(\cos \theta) + b_{\ell}\pi_{\ell}(\cos \theta)], \quad (9b)$$

donde θ es el ángulo donde se evalúan los campos EMs medido desde la dirección de propagación de la onda plana (ver Fig. 5), y π_{ℓ} y τ_{ℓ} son las funciones dadas por

$$\pi_{\ell}(\cos \theta) = \frac{P_{\ell}^1(\cos \theta)}{\sin \theta}, \quad \tau_{\ell}(\cos \theta) = \frac{dP_{\ell}^1(\cos \theta)}{d\theta},$$

con las *funciones asociadas de Legendre*⁶ P_{ℓ}^m de grado ℓ y orden m [7, 20]. Las relaciones de recurrencia de las funciones asociadas de Legendre [20] permiten expresar a π_{ℓ} y τ_{ℓ} de una forma recursiva al definir $\pi_0 = 0$ y $\pi_1 = 1$; esta forma recursiva es

$$\pi_{\ell}(\mu) = \frac{2\ell - 1}{\ell - 1} \mu \pi_{\ell-1}(\mu) - \frac{\ell}{\ell - 1} \pi_{\ell-2}(\mu), \quad \tau_{\ell}(\mu) = \ell \mu \pi_{\ell}(\mu) - (\ell + 1) \pi_{\ell-1}(\mu)$$

en donde se empleó el cambio de variable $\mu = \cos \theta$.

El campo esparcido [Ec. (6)] está en términos de los coeficientes a_{ℓ} y b_{ℓ} [Ecs. (7)], que dependen, entre otros parámetros, del índice de refracción de la partícula. De la Ec. (6) se observa que, para un multipolo ℓ fijo, la contribución del campo eléctrico es máxima cuando el denominador de los coeficientes de Mie es nulo [3], es decir,

$$\psi_{\ell}(mx)\xi'_{\ell}(x) - m\xi_{\ell}(x)\psi'_{\ell}(mx) = 0.$$

Si se considera que la respuesta óptica de la partícula está dada por $\varepsilon_p(\omega) = \sqrt{n_p(\omega)}$, y se fijan los parámetros a , n_m y λ , entonces la frecuencia ω_{ℓ} , donde el denominador de las Ecs. (7) es mínimo, es el *modo normal* de orden ℓ [7, 21]. En el límite de partícula pequeña ($x \ll 1$) para esferas inmersas en vacío ($n_m = 1$), y haciendo un desarrollo en serie de Taylor de las funciones de Bessel y Hankel al rededor del origen, se obtiene que los modos normales son [21]

$$\varepsilon_p(\omega_{\ell}) = -\frac{\ell - 1}{\ell}. \quad (10)$$

Sustituyendo la función dieléctrica del modelo de Drude-Sommerfeld [Ec. (3)] evaluado en ω_{ℓ} en la Ec. (10) y despejando ω_{ℓ} , tras considerar además el límite $\gamma \rightarrow 0$, la expresión para la frecuencia de resonancia del modo normal del multipolo ℓ es [21]

$$\omega_{\ell} = \omega_p \sqrt{\frac{\ell}{2\ell + 1}}. \quad (11)$$

En el modelo de Drude-Sommerfeld, pero fuera del límite de partícula pequeña, la razón de la frecuencia de resonancia con la frecuencia de plasma ω_{ℓ}/ω_p depende de la cantidad $\omega_p a/c$ [22], en donde

⁶Se toma la convención de que estas funciones no están normalizadas, es decir, se cumple que la relación de ortogonalidad es $\int_{-1}^1 P_{\ell}^m(\mu) P_{\ell'}^m(\mu) d\mu = \delta_{\ell, \ell'} \frac{2}{\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}$, con $\mu = \cos \theta$

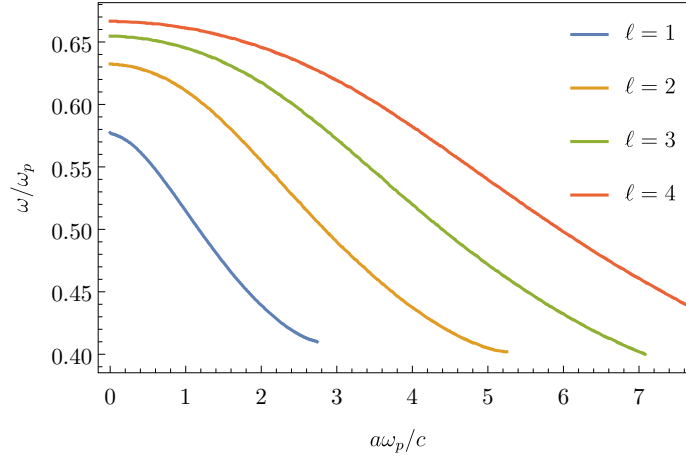


Figura 6: Modos multipolares con efecto de retardo debido al tamaño de la partícula esférica para una función tipo Drude con una frecuencia de plasma ω_p . La posición del modo multipolar es graficada como función del parámetro adimensional $\omega_p a/c$.

a/c es el tiempo que tarda la interacción de la esfera al acoplarse con la densidad de carga inducida que corresponde al plasmón de superficie [22], con c la velocidad de la luz. La solución de los modos normales se presenta en la Fig. 6, en donde se observa que el límite de partícula pequeña [Ec. (11)] se recupera cuando $a \rightarrow 0$. En general, sin considerar una función tipo Drude como respuestas óptica, los modos normales se calculan como la frecuencia máxima a la que la partícula extingue⁷ la mayor cantidad de luz [13]

2.3. Modelo de esparcimiento coherente

La nanoplasmónica estudia la respuesta EM a escala nanométrica [3] y, por sus crecientes aplicaciones, se busca entender y manipular los mecanismos físicos a esta escala [23]. En el modelado de la respuesta EM de materiales nanométricos heterogéneos —como una monocapa de NPs esféricas— existen enfoques como la aproximación cuasi-estática [11], la cual es apta para partículas pequeñas ($x \ll 1$) y permite la homogenización del material mediante una teoría de medio efectivo donde las partículas son tratadas como dipolos puntuales [11, 24]. Para partículas grandes, la respuesta EM espacial no se desacopla de la respuesta temporal por lo que se consideran, además, ordenes multipolares mayores [11], es decir, se emplea una teoría de esparcimiento [24].

El modelo de esparcimiento coherente es una teoría de esparcimiento pues calcula el campo eléctrico total esparcido por una monocapa de NPs esféricas desordenadas, suspendida en un medio no absorbente, ante la incidencia de una onda plana [25]. Expresiones de reflectancia y transmitancia se calculan, bajo el formalismo del CSM, al descomponer el campo eléctrico esparcido en una componente coherente —respuesta promedio con una dirección de propagación bien definida— y una componente difusa —causada por las fluctuaciones y cuya propagación es en todas las direcciones— [25]; la dirección de la componente coherente para la reflexión y la transmisión obedece la ley de la reflexión ($\theta_i = \theta_t$) y la ley de Snell ($n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$), respectivamente [26]. Para definir los coeficientes de amplitud de reflexión y transmisión de la manera usual, se toma en cuenta únicamente la componente coherente [25].

El CSM considera la componente coherente del esparcimiento de cada una de los NPs presentes en una monocapa, según la solución de Mie, y dota de propiedades ópticas a una superficie matemática de grosor nulo que sustituyen a la monocapa de NPs. Las NPs son tratadas como esparcidores puntuales ante la presencia de un campo eléctrico promedio [25], que incluye la contribución del esparcimiento multiple

⁷Extinción se entiende como la pérdida de luz ocasionada por la absorción y esparcimiento de luz de la partícula; esta relación es conocida como el *teorema óptico* [7].

debido a la interacción entre las NPs [26]. Para calcular la respuesta óptica de la superficie matemática, se considera primero una monocapa suspendida (FSM), inmersa en un dieléctrico, y luego se incluye la contribución del sustrato mediante procesos de múltiples reflexiones [25].

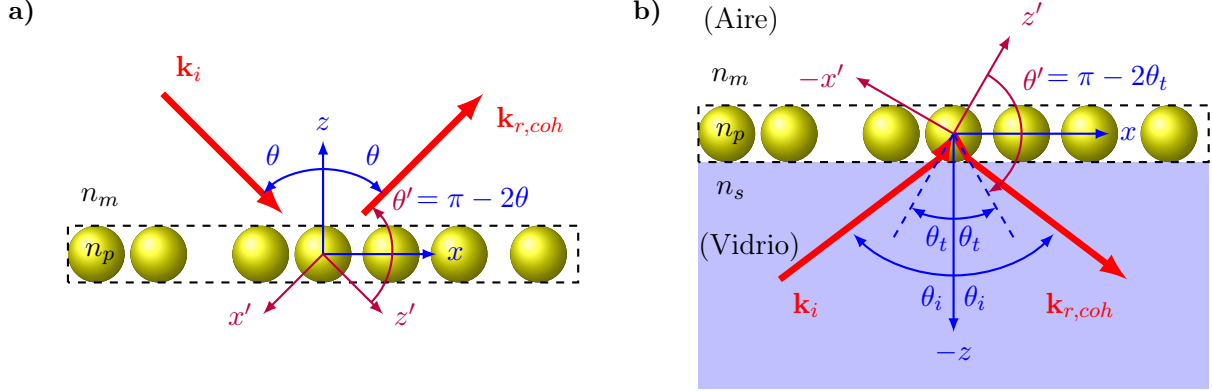


Figura 7: Esquema de la reflexión coherente de una monocapa de NPs esféricas **a)** suspendida en una matriz con índice de refracción n_m , y **b)** sobre un sustrato con índice de refracción n_s , en configuración ATR. EL sistema coordenado azul se coloca sobre la monocapa y con el eje z normal a ésta; el sistema coordenado se alinea en su dirección z con la dirección de propagación de la luz al incidir sobre la NP, por lo que es el sistema coordenado empleado en la solución de Mie.

Las expresiones para los coeficientes de amplitud de reflexión y de transmisión para una FSM, inmersa en una matriz con índice de refracción n_m , donde incide una onda plana con un ángulo θ medido desde la dirección normal a la monocapa (Ver Fig. 7a), son [25]

$$r_{coh}(\theta) = \frac{-\alpha S_n(\pi - 2\theta)}{1 + \alpha S(0) + \frac{1}{4}\alpha^2 [S^2(0) - S_n^2(\pi - 2\theta)]}, \quad (12)$$

$$t_{coh}(\theta) = \frac{1 - \frac{1}{4}\alpha^2 [S^2(0) - S_n^2(\pi - 2\theta)]}{1 + \alpha S(0) + \frac{1}{4}\alpha^2 [S^2(0) - S_n^2(\pi - 2\theta)]}, \quad (13)$$

donde $\alpha = 2\Theta/x^2 \cos \theta$, con $x = k_0 a n_m$ el parámetro de tamaño y Θ la fracción superficial de cubierta, y donde $S_n(\theta)$ — $n = 1$ para polarización s y $n = 2$ para p — son los elementos de la matriz de esparcimiento, dados por las ecs. (9). Los elementos de la matriz de esparcimiento se evalúan en $(\pi - 2\theta)$ pues ésta es la dirección del ángulo de reflexión medido desde el sistema coordenado empleado en la solución de Mie (morado en la Fig. 7a); el término $S(0)$ es independiente de la polarización, pues se cumple que $S(0) = S_1(0) = S_2(0)$ según las Ecs. (9).

Los coeficientes de amplitud del sistema sustrato-matriz-monocapa se resuelve al considerar múltiples reflexiones en la interfaz entre las superficies dadas por la interfaz sustrato-matriz y matriz-monocapa (ver Fig. 7b). Este acercamiento evita el cálculo de la contribución de partículas *imagen* causadas por la interfaz entre los dieléctricos, es consistente con la aproximación de campo efectivo —en donde el campo eléctrico local es aproximado por el campo eléctrico promedio—, y contempla el esparcimiento múltiple [25]. Al realizar este procedimiento con la presencia de un sustrato con un índice de refracción n_s y al considerar una medición en una configuración ATR (ver Fig. 7b), se obtienen las expresiones

$$r = \frac{r_{sm}(\theta_i) + r_{coh}(\theta_t)e^{i\beta}}{1 + r_{sm}(\theta_i)r_{coh}(\theta_t)e^{i\beta}}, \quad (14)$$

$$t = \frac{t_{sm}(\theta_i) + t_{coh}(\theta_t)e^{i\beta/2}}{1 + r_{sm}(\theta_i)r_{coh}(\theta_t)e^{i\beta/2}}, \quad (15)$$

donde θ_i es el ángulo de incidencia a la interfaz, θ_t el ángulo de transmisión dado por la ley de Snell, $\beta = 2k_0 a n_m \cos \theta_t$ el cambio de fase de la luz al cruzar la monocapa, y r_{sm} y t_{sm} los coeficientes de amplitud de reflexión y transmisión de Fresnel para una interfaz sustrato-matriz.

La cantidad experimental medida en el laboratorio no son los coeficientes de amplitud [Ecs. (14)]

y (15)], sino la reflectancia R y transmitancia T . La reflectancia (transmitancia) es la potencia medida reflejada (transmitida) dividida por la potencia incidente [14]. Dado que la potencia es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo eléctrico [14], la reflectancia y transmitancia son

$$R = rr^*, \quad (16)$$

$$t = \frac{n_m \cos \theta_t}{n_s \cos \theta_i} tt^*, \quad (17)$$

donde el operador $*$ es la operación complejo conjugado, y el cociente en la Ec. (17) es el término de impedancia (para materiales no magnéticos) originado por el cambio de medio material en la interfaz.

3. Resultados numéricos

Para estudiar la respuesta óptica de una monocapa de NPs plasmónicas, se empleó el formalismo del CSM. Las NPs se modelaron mediante una función dieléctrica tipo Drude [Ec. (3)], dado que se caracterizó una resonancia semejante a la SPLR, pero distinta a los modos normales. Ya que para el modelo de Drude-Sommerfeld las resonancias plasmónicas para cualquier radio están caracterizadas (ver Fig. 6), se evita la confusión entre éstas, y una respuesta colectiva como la PSLR. En la primera sección se analiza el comportamiento de una FSM, más adelante se muestran los resultados al considerar una configuración ATR, en donde se variaron distintos parámetros de la monocapa. Finalmente se presentan los resultados de una monocapa empleando datos experimentales del índice de refracción.

3.1. Reflectancia de una monocapa suspendida en aire

Para el cálculo de la reflectancia de una FSM, en una matriz de aire ($n_m = 1$), se empleó la Ec. (16) con el coeficiente de amplitud de reflexión coherente [Ec. (12)]. En la Fig. 8 se muestran los resultados de la reflectancia R como función de la longitud de onda λ y el ángulo de incidencia θ_i . La frecuencia de plasma empleada para la función dieléctrica fue $\omega_p = 4.3\text{eV}$ y la constante fenomenológica $\gamma = 0.15\text{eV}$ (los valores en λ corresponden a 288.5nm y 8,270nm respectivamente), graficada en la Fig. 3, con NPs

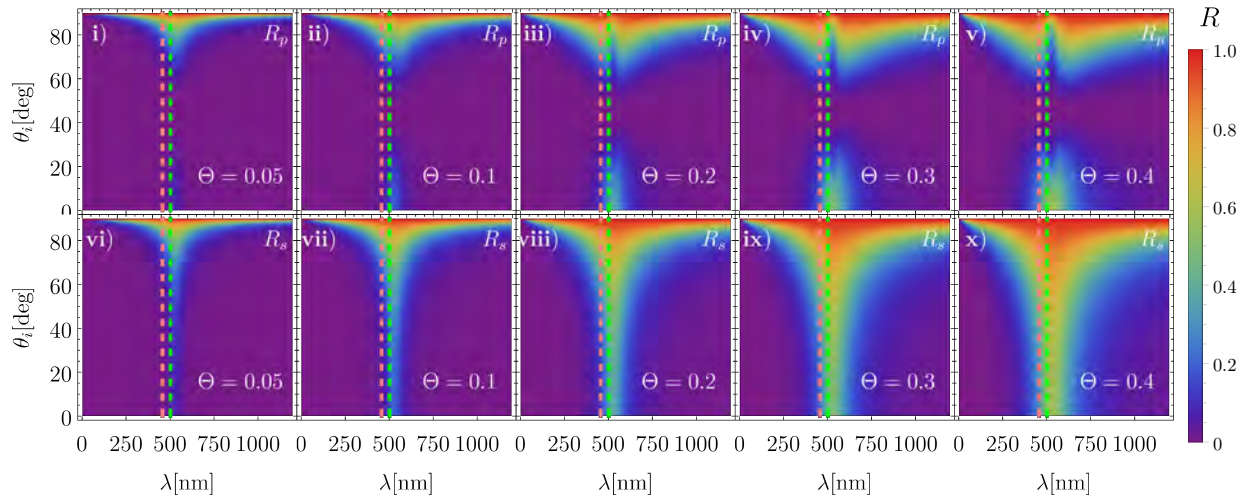


Figura 8: Gráficas de reflectancia para una FSM como función del ángulo de incidencia θ_i y de la longitud de onda λ para una función dieléctrica tipo Drude con $\omega_p = 4.3\text{eV}$ y $\gamma = 0.15\text{eV}$. Las gráficas {pol. p [i) – v)] y pol. s [vi) – x)] muestran los resultados para NPs de un radio de $a = 30\text{nm}$ y distintas fracciones de cubierta Θ : 0.05, 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4.

de radio $a = 30\text{nm}$. Se calcularon los casos para las fracciones de cubierta Θ : 0.05, 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4, en polarización p [en la Fig. 8, **i**) – **v**)] y en polarización s [en la Fig. 8, **vi**) – **x**)]. El modo normal dipolar ($\ell = 2$) corresponde a la línea verde punteada en $\lambda = 502.034\text{nm}$, y el modo cuadrupolar ($\ell = 3$), a la línea rosa en $\lambda = 456.208\text{nm}$; ambas resonancias fueron calculadas según la Fig. 6.

La reflectancia, para ambas polarizaciones, es distinta de cero en dos regiones: a ángulos de incidencia rasantes ($\theta_i \approx 90^\circ$), y en las SPRs. El comportamiento a incidencia rasante es semejante a la reflectancia de una interfaz plana, en donde hay un máximo en R . En la región cercana a los modos normales, la reflectancia de la FSM toma valores distintos de cero, a excepción del ángulo de Brewster en la polarización p , que es un fenómeno característico de esta polarización.

3.2. Reflectancia de una monocapa en configuración ATR

Si se considera la presencia de un sustrato con índice de refracción $n_s = 1.5$, que sostiene una monocapa de NPs en una matriz de aire ($n_m = 1$), se emplea la Ec. (16) con el coeficiente de amplitud de reflexión de la Ec. (14). En las Figs. 9 y 10 se muestran los resultados de la reflectancia R como función de la longitud de onda λ y el ángulo de incidencia θ_i . La frecuencia de plasma empleada para la función dieléctrica de la Fig. 9 fue $\omega_p = 4.3\text{eV}$ ($\lambda_p = 288.5\text{nm}$); para la Fig. 10, $\omega_p = 10\text{eV}$ ($\lambda_p = 123.98\text{nm}$). En ambos casos se consideró la constante fenomenológica como $\gamma = 0.15\text{eV}$ ($\gamma_\lambda = 8, 270\text{nm}$) y NPs de radio $a = 30\text{nm}$. Se calcularon los casos para las fracciones de cubierta Θ : 0.05, 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4, en polarización p [en las Fig. 9 y 10, **i**) – **v**)] y en polarización s [en las Fig. 9 y 10, **vi**) – **x**)].

Al igual que para la FSM, la respuesta óptica de la monocapa en la configuración ATR reproduce atributos de la reflectancia entre dos interfaces planas. El fenómeno del ángulo de Brewster para la polarización p se manifiesta en este caso, al igual que el fenómeno de reflexión total interna. Para ángulos mayores al ángulo crítico θ_c , es decir, $\theta_i > \theta_c = 41.8^\circ$, la luz es totalmente reflejada; ángulo crítico, al igual que el de Brewster, coincide con el del caso de interfaces planas. Esta aseveración es válida para regiones alejadas de los modos normales, como se observa en las Figs. 9 y 10.

La reflectancia al rededor de las SPR (marcadas con líneas verdes y rosas en las Figs. 9 y 10) aumenta

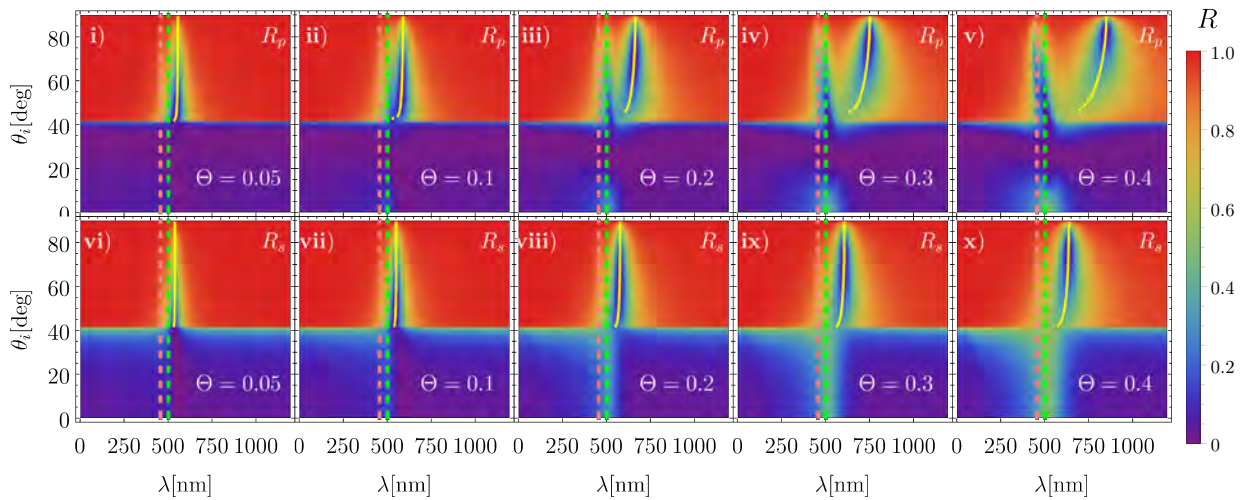


Figura 9: Gráficas de reflectancia de una monocapa en configuración ATR como función del ángulo de incidencia θ_i y de la longitud de onda λ para una función dieléctrica tipo Drude con $\omega_p = 4.3\text{eV}$ y $\gamma = 0.15\text{eV}$. Las gráficas {pol. p [**i**) – **v**)] y pol. s [**vi**) – **x**)] muestran los resultados para NPs de un radio de $a = 30\text{nm}$ y distintas fracciones de cubierta Θ : 0.05, 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4.

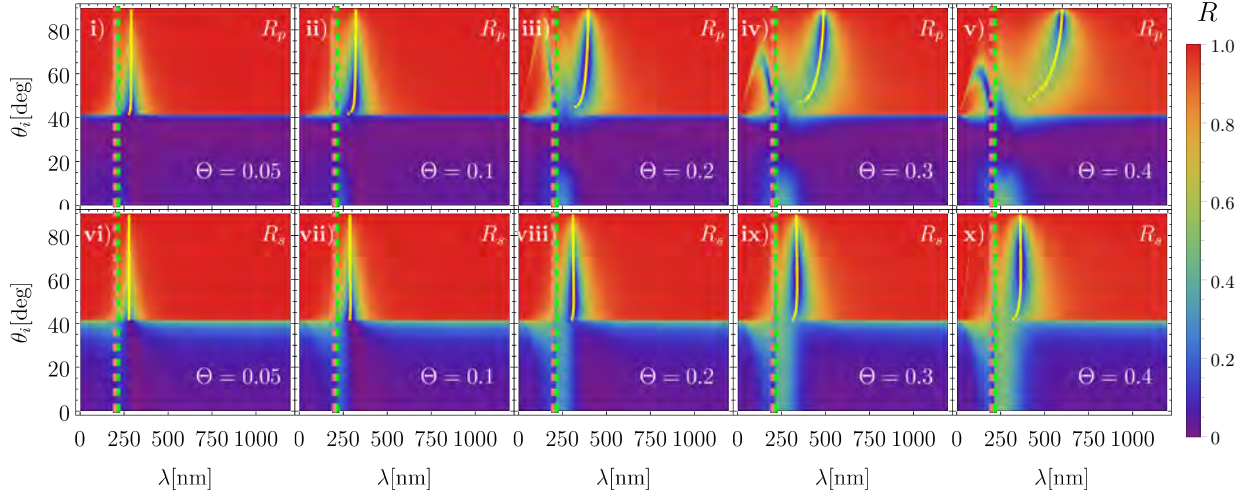


Figura 10: Gráficas de reflectancia de una monocapa en configuración ATR como función del ángulo de incidencia θ_i y de la longitud de onda λ para una función dieléctrica tipo Drude con $\omega_p = 10\text{eV}$ y $\gamma = 0.15\text{eV}$. Las gráficas {pol. p [i) – v)] y pol. s [vi) – x)] muestran los resultados para NPs de un radio de $a = 30\text{nm}$ y distintas fracciones de cubierta Θ : 0.05, 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4. Los mínimos en la reflectancia ajenos a las SPRs se señalizan mediante los puntos amarillos.

para ángulos de incidencia menores al ángulo crítica, mientras que disminuye para ángulos mayores. La extinción es el resultado del esparcimiento y la absorción; la contribución del esparcimiento se observa antes del ángulo crítico por el contraste que hay en regiones vecinas, donde $R \approx 0$. La contribución de la absorción a la extinción es evidente para ángulos mayores al crítico pues en zonas vecinas $R \approx 1$, mientras que en las SPR hay mínimo en la reflectancia. Este mínimo sobresale en las Figs. 9 y 10 en iv) y v).

En las Figs. 9 y 10, para ángulo mayores al crítico, se manifestó una región donde $R < 1$ y que no coincide con las SPRs. Esta región marcada por los puntos amarillos, que corresponden a los mínimos de R . El comportamiento de esta región cambia según la fracción de cubierta Θ y la polarización sin embargo, en los materiales simulados por el modelo de Drude-Sommerfeld ($\omega_p = 4.3\text{eV}$ y $\omega_p = 10\text{eV}$) se observa que se presenta a energías más bajas (correspondiente con longitudes de onda más grandes) respecto a las SPRs. Asimismo, la separación de los mínimos generados por las SPRs y los mínimos anómalos aumenta conforme lo hace Θ . Este comportamiento ocurre en ambas polarizaciones mas en la polarización p la separación es mayor que en polarización s .

Al responder los mínimos anómalos a cambios en Θ , se analiza, además, si el comportamiento es semejante a cambios en el radio a de las NPs. Este analisis se realiza ya que ambas cantidades modifican el volumen neto de material plasmónico, por lo que la cantidad de electrones libres aumenta. De esta manera, se atribuyen los mínimos en R anómalos a un efecto colectivo de las NPs, al igual que las PSLR.

En la Fig. 11 se muestran los resultados de reflectancia como función de la longitud de onda λ y el ángulo de incidencia θ_i para una monocapa (con $\Theta = 0.3$) en configuración ATR inmersa en aire ($n_m = 1$) y colocada sobre un sustrato con índice de refracción $n_s = 1.5$. Los parámetros de la función tipo Drude empleada para simular a las NPs en la Fig. 11 son $\omega_p = 4.3\text{eV}$ ($\lambda_p = 288.5\text{nm}$) y $\gamma = 0.15\text{eV}$ ($\gamma_\lambda = 8, 270\text{nm}$). Se calcularon los casos para los radios a : 3nm, 5nm, 10nm y 20nm, en polarización p [en la Fig. 11, i) – iv)] y en polarización s [en la Fig. 11, v) – viii)].

La respuesta anómala de la reflectancia en la Fig. 11 es señalada por los puntos amarillos. La distancia entre ésta y las SPRs aumenta conforme crece el radio de las NPs a , al igual que lo hacía al incrementar la fracción de cubierta Θ en las Figs. 9 y 10. De igual forma, se vuelve presentar una respuesta más evidente para la polarización p que para la polarización s . Dado que los dos parámetros que modifican el número de electrones libres modifican la respuesta en reflectancia en zonas alejadas de las SPRs, se

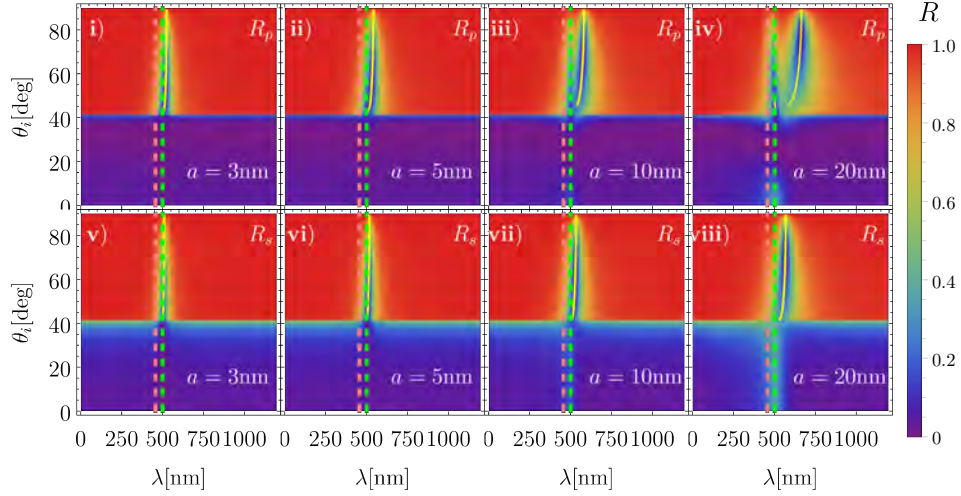


Figura 11: Gráficas de reflectancia de una monocapa en configuración ATR ($\Theta = 0.3$) como función del ángulo de incidencia θ_i y de la longitud de onda λ para una función dieléctrica tipo Drude con $\omega_p = 4.3\text{eV}$ y $\gamma = 0.15\text{eV}$. Las gráficas {pol. p [i) – iv)] y pol. s [v) – viii)] muestran los resultados para NPs de radio a : 3nm, 5nm, 10nm y 20nm. Los mínimos en la reflectancia ajenos a las SPRs se señalizan mediante los puntos amarillos.

especula la existencia de un modo plasmónico semejante al PSLR reportado en [8] y [9].

Finalmente, se muestra en la Fig. 12 la respuesta óptica de una monocapa con fracción de llenado $\Theta = 0.3$ y NPs de radio $a = 30\text{nm}$. El índice de refracción del sustrato es $n_s = 1.5$ y el de la matriz $n_m = 1$ sin embargo, la respuesta óptica de las NPs son los datos experimentales, obtenidos de [17], del Au (ver Fig. 12a) y la Ag (ver 12b). En la Fig. 12a se presentan los resultados numéricos para el Au, para ambas polarizaciones y en la Fig. 12b para la Ag.

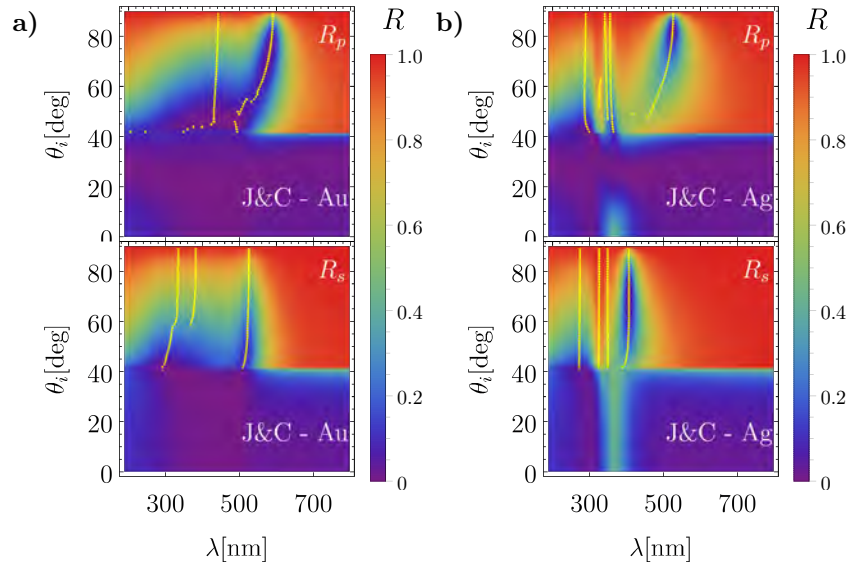


Figura 12: Gráficas de reflectancia de una monocapa en configuración ATR ($\Theta = 0.3$) como función del ángulo de incidencia θ_i y de la longitud de onda λ para NPs de **a)** Au y **b)** Ag, calculados con los datos experimentales del índice de refracción tomados de [17]. Los mínimos en la reflectancia se señalizan mediante los puntos amarillos.

En la Fig. 12 están en amarillo todos los mínimos en R para distintos cortes en ángulos de incidencia. En el caso del Au (Fig. 12a) se presenta a $\theta_i = 70^\circ$ la resonancia dipolar a 438nm para polarización p y a 379nm a polarización s ; la resonancia cuadrupolar no fue detectada para polarización p mas a polarización s se localiza a 332nm. El mínimo atípico en la reflexión se encuentra a $\theta_i = 70^\circ$ en 576nm para polarización

p y a 524nm para polarización s . En el caso de la Ag (Fig. 12b) se presenta a $\theta_i = 70^\circ$ la resonancia dipolar a 356nm para polarización p y a 349nm a polarización s ; la resonancia cuadrupolar a 344nm en polarización p y a 325nm en polarización s . El mínimo atípico en la reflexión se encuentra a $\theta_i = 70^\circ$ en 523nm para polarización p y a 406nm para polarización s .



Referencias

- [1] R. Boverhof, C.M. Bramante, J.H. Butala, S.F. Clancy, M. Lafronconi, J. West, y S.C. Gordon, "Comparative assessment of nanomaterial definitions and safety evaluation considerations," *Regul. Toxicol. Pharmacol.* **73**(1), 137–150 (2015).
- [2] J. Zhao, A.O. Pinchuk, J.M. McMahon, S. Li, L.K. Ausman, A.L. Atkinson, y G.C. Schatz, "Methods for describing the electromagnetic properties of silver and gold nanoparticles," *Accounts. Chem. Res.* **41**(12), 1710–1720 (2008).
- [3] L. Novotny, y B. Hecht. *Principles of Nano-Optics* (Cambridge University Press, 2006).
- [4] P. K. Jain, X. Huang, I. H. El-Sayed, y M. A. El-Sayed, "Noble metals on the nanoscale: Optical and photothermal properties and some applications in imaging, sensing, biology, and medicine," *Accounts. Chem. Res.* **41**(12), 1578–1586 (2008).
- [5] S. A. Maier, *Plasmonics: fundamentals and applications* (Springer Science & Business Media, 2007).
- [6] M.I. Stockman, "Nanoplasmonics: The physics behind the applications," *Phys. Today* **64**(2), 39–44 (2011).
- [7] C. F. Bohren, y D.R. Huffman, *Absorption and scattering of light by small particles* (John Wiley & Sons, 1998)
- [8] A. V. Kabashin, P. Evans, S. Pastkovsky, W. Hendren, G. A. Wurtz, R. Atkinson, R. Pollard, V. A. Podolskiy, y A. V. Zayats, "Plasmonic nanorod metamaterials for biosensing," *Nat. Mater.* **8**(11), 867–871 (2009).
- [9] A. Danilov, G. Tselikov, F. Wu, V. G. Kravets, I. Ozerov, F. Bedu, A. N. Grigorenko, y A. V. Kabashin, "Ultra-narrow surface lattice resonances in plasmonic metamaterial arrays for biosensing applications," *Biosens. Bioelectron.* **104**, 102–112 (2018).
- [10] R. Atkinson, W. R. Hendren, G. A. Wurtz, W. Dickson, A.V. Zayats, P. Evans, y R. J. Pollard, "Anisotropic optical properties of arrays of gold nanorods embedded in alumina," *Phys. Rev. B* **73** (23), 235402 (2006).
- [11] A. H. Sihvola, *Electromagnetic mixing formulas and applications*, (Iet., 1999).
- [12] R. Gross, y A. Marx, *Festkörperphysik* (Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2014).
- [13] U. Kreibig y M. Vollmer. *Optical Properties of Metal Clusters* (Springer, 1995).
- [14] J. D. Griffiths, *Introduction to electrodynamics* (Pearson, 2013).
- [15] A. Trüger, *Optical properties of metallic nanoparticles*, Diss. Ph. D. thesis, Karl–Franzens–Universität Graz, 2011.
- [16] G. Gauglitz y D.S. Moore *Handbook of spectroscopy* (John Wiley & Sons, 2014)

- [17] P. B. Johnson y R. W. Christy, “Optical constants of the noble metals,” *Phys. Rev. B* **6**(12), 4370 (1972).
- [18] G. Mie, “Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen,” *Ann. Phys.* **330**(3), 377–445 (1908).
- [19] H. Horvath, “Gustav Mie and the scattering and absorption of light by particles: Historic developments and basics,” *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* **110**(3), 787–799 (2009).
- [20] G. B. Arfken, y H. J. Weber, *Mathematical methods for physicists* (Harcourt Academic Press, 2001)
- [21] C. A. Maciel, *Linear momentum transfer from swift electrons to small metallic nanoparticles: dipole approximation*, Diss. Master thesis, Ms. C. thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2017.
- [22] J. Aizpurua, *Coupling of electrons and electromagnetic surface modes in scanning transmission electron microscopy*, Diss. Ph. D. thesis, Universidad de Pais Vasco, 1998.
- [23] A. Sihvola, “Dielectric polarization and particle shape effects,” *J. Nanomater.* **1**, 1–9 (2007).
- [24] M. C. Peña-Gomar, F. Castillo, A. García-Valenzuela, R. G. Barrera, y E. Pérez, “Coherent optical reflectance from a monolayer of large particles adsorbed on a glass surface,” *Appl. Opt.* **45**, 626–632 (2006).
- [25] A. Reyes-Coronado, A. García-Valenzuela, O. Z, and R. G. Barrera, “Analytical modeling of optical reflectivity of random plasmonic nano-monolayers,” *Opt. Express* 9594, 6697–6706 (2018).
- [26] A. García-Valenzuela, E. Gutiérrez-Reyes, y R. G. Barrera, “Multiple-scattering model for the coherent reflection and transmission of light from a disordered monolayer of particles,” *J. Opt Soc. Am. A* **6**(29), 1161–1179 (2012).
- [27] R. G. Barrera, y A. García-Valenzuela, “Coherent reflectance in a system of random Mie scatterers and its relation to the effective-medium approach,” *JOSA A*, **20**(2), 296–311 (2003)

Jonathan Alexis Urrutia Anguiano

Estudiante de la carrera de Física

No. de cuenta: 414011025

Tel.: +52 55 3110 1344

jaurrutia.95@ciencias.unam.mx

Dr. Alejandro Reyes Coronado

Profesor Titular A de tiempo completo

Departamento de Física, Facultad de Ciencias, UNAM

Tel.: (55) 5622 4968

coronado@ciencias.unam.mx