



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TÍTULO DE LA TESIS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**Licenciatura en Física**

PRESENTA:

**Jonathan Alexis Urrutia Anguiano**

TUTOR:

Dr. Alejandro Reyes Coronado

México, Cd. de México, YYYY





# Índice general

---

<b>1. Teoría</b>	<b>1</b>
1.1. Fórmulas de Fresnel . . . . .	1
1.1.1. Coeficientes de amplitud . . . . .	3
1.1.2. Reflectancia y transmitancia . . . . .	6
1.2. Solución de Mie . . . . .	8
1.2.1. Solución a la ecuación de onda con simetría esférica . . . . .	10
1.3. Modelo de esparcimiento coherente . . . . .	17
1.3.1. Monocapa suspendida . . . . .	17
1.3.2. Monocapa sobre un sustrato . . . . .	17
<b>A. Teoría de Mie</b>	<b>21</b>
A.1. Apéndice . . . . .	21



La luz, al pasar de un medio lineal, homogéneo e isotrópico a otro medio material con las mismas características, se descompone en dos haces: uno reflejado y otro transmitido. Para calcular la intensidad de los haces reflejado y transmitido se emplean las fórmulas de Fresnel. En su deducción se consideran las condiciones de frontera impuestas por las ecuaciones de Maxwell sobre los campos electromagnéticos (EMs), de las que se deduce, además, la dirección de propagación de los haces reflejado y transmitido. Una vez determinadas las condiciones de frontera de los campos EMs y la dirección de propagación de la luz, se calcula la relación entre los campos eléctricos evaluados en la frontera entre ambos medios, resultando en los *coeficientes de amplitud*. Finalmente, la conservación de la energía que es considerada, resultando en las ecuaciones de Fresnel.

### 1.1. Fórmulas de Fresnel

Las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial son [1]

#### Ecuaciones de Maxwell (Forma diferencial)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{tot}}{\varepsilon_0}, \quad (\text{Ley de Gauss eléctrica}) \quad (1.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{Ley de Gauss magnética}) \quad (1.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{Ley de Faraday-Lenz}) \quad (1.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{tot} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (\text{Ley de Ampère-Maxwell}) \quad (1.1d)$$

donde  $\mathbf{E}$  es el campo eléctrico,  $\mathbf{B}$  el campo magnético,  $\rho_{tot}$  es la densidad volumétrica de carga total y  $\mathbf{J}_{tot}$  la densidad volumétrica de corriente total,  $\varepsilon_0$  la permitividad eléctrica del vacío y  $\mu_0$  la permeabilidad magnética del vacío.

Al sustituir las ecuaciones de Maxwell en la expresión de la fuerza de Lorentz, que es la fuerza ejercida sobre una partícula con carga  $q$  y velocidad  $\mathbf{v}$  en presencia de campos EMs [1], dada por  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ , se deduce el teorema de conservación de la energía [1]. De éste,

## 1. TEORÍA

se define el vector de Poynting  $\mathbf{S}$ , correspondiente al flujo de energía por unidad de tiempo, por unidad de área, transportado por los campos EMs [1], dado por la expresión

### Vector de Poynting

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (1.2)$$

Al desacoplar las ecuaciones de Maxwell, los campos EMs obedecen la ecuación de onda [2]. Una solución a esta ecuación se obtiene al emplear la transformada Fourier<sup>1</sup> [3], proceso que concluye con ondas planas como soluciones, es decir, los campos EMs son oscilantes y están dados por la expresión

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (1.3)$$

en donde  $\mathbf{E}_0$  y  $\mathbf{B}_0$  son las amplitudes de las ondas EMs,  $\mathbf{k}$  es el vector de onda, que indica la dirección de propagación de la onda plana, y  $\omega$  es la frecuencia angular de la onda plana; la triada de vectores  $\{\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{B}\}$  constituye una base ortogonal derecha en el vacío [1]. Para que las ondas planas sean solución de las ecuaciones de Maxwell, se impone la *relación de dispersión*, que fuerza a la magnitud del vector de onda  $k$  y la frecuencia angular  $\omega$  a obedecer la expresión

### Relación de dispersión

$$\omega = ck, \quad (1.4)$$

en donde  $c$  es la velocidad de la luz.

Cuando un haz de luz, modelado por una onda plana, se propaga a través de un medio material, la función dieléctrica  $\varepsilon$  y la permeabilidad magnética  $\mu$  del material determinan sus propiedades EMs. En general, se define el índice de refracción  $n$  como

### Índice de refracción

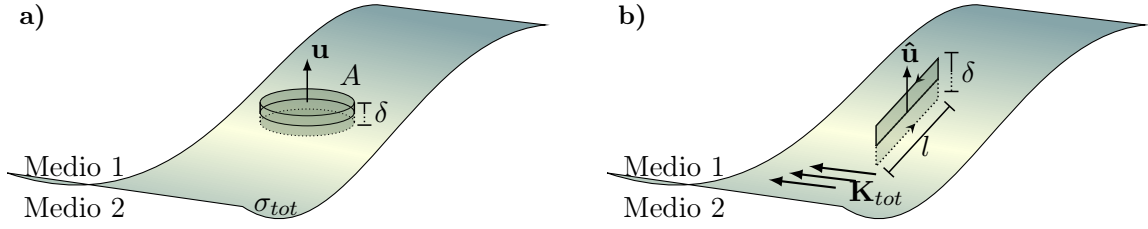
$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}. \quad (1.5)$$

Tanto  $n$ , como  $\varepsilon$  y  $\mu$  se determinan de forma experimental y son, en general, cantidades complejas. Para medios no magnéticos ( $\mu_0 = \mu$ ), la parte imaginaria de la función dieléctrica  $\text{Im}[\varepsilon]$  se asocia con la absorción de energía por el material [4].

Las ecuaciones de Maxwell imponen constricciones sobre los campos EMs cuando estos cruzan la frontera entre dos medios distintos, denominada interfaz. En la Fig. 1.1 se muestra la interfaz entre dos medios arbitrarios caracterizados por la función dieléctrica  $\varepsilon_i$  y la permeabilidad magnética  $\mu_i$ , con  $i = 1, 2$  según sea el caso. Para deducir las constricciones de los campos EMs sobre la interfaz, estos se evalúan en la Fig. 1.1a) en el cilindro de área en las caras  $A$  y de altura  $\delta \rightarrow 0$ , mientras que en la Fig. 1.1b) se evalúan los campos EMs en el circuito de largo

---

<sup>1</sup>  $\mathcal{F}[f(\mathbf{r}, \omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} dt$ , con  $\omega$  una función de  $\mathbf{k}$ . La transformada de Fourier inversa es entonces  $\mathcal{F}^{-1}[f(\mathbf{r}, t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d\omega$ .



**Fig. 1.1:** Esquema de una interfaz entre dos medios distintos y arbitrarios con **a)** una densidad de carga superficial  $\sigma_{tot}$  y **b)** una densidad de corriente superficial  $\mathbf{K}_{tot}$ . Los campos EMs son evaluados en **a)** en el cilindro de área  $A$  y altura  $\delta \rightarrow 0$  y en **b)** en el circuito de largo  $l$  y altura  $\delta \rightarrow 0$ . En ambas figuras el vector normal a la superficie es  $\hat{\mathbf{u}}$ .

$l$  y altura  $\delta \rightarrow 0$ ; en ambas figuras el vector normal a la interfaz es  $\hat{\mathbf{u}}$ . Al evaluar los campos EMs en el límite  $\delta \rightarrow 0$ , estos se evalúan sobre la interfaz y, al considerar que los medios son lineales, homogéneos e isótropos, así como la ausencia de cargas externas,  $\sigma_{ext} = 0$  y  $\mathbf{K}_{ext} = \mathbf{0}$ , los campos EMs obedecen las expresiones [1]

#### Condiciones de frontera de los campos EM

$$\varepsilon_1 E_1^\perp - \varepsilon_2 E_2^\perp = 0, \quad (1.6a)$$

$$B_1^\perp - B_2^\perp = 0, \quad (1.6c)$$

$$E_1^\parallel - E_2^\parallel = 0, \quad (1.6b)$$

$$\frac{\mathbf{B}_1^\parallel}{\mu_1} - \frac{\mathbf{B}_2^\parallel}{\mu_2} = \mathbf{0}. \quad (1.6d)$$

### 1.1.1. Coeficientes de amplitud

Cuando un haz de luz, modelado por el campo eléctrico de una onda plana [Ec. (1.3)], incide sobre la interfaz entre dos medio lineales, homogéneos e isótropos, este es descompuesto en un haz reflejado y otro transmitido. Ambos haces son modelados por ondas planas [Ec. (1.3)], correspondientes a campos EMs oscilantes, que se propagan a través del *plano de incidencia*, definido por el vector de onda del haz incidente, y el vector normal a la interfaz. Dado que las condiciones de frontera sobre la onda plana incidente y reflejada en el medio de incidencia, caracterizado por el índice de refracción  $n_i$ , y la onda transmitida, en el medio de transmisión, con índice de refracción  $n_t$ , son válidas para todo tiempo y todo punto en la interfaz, la fase de las tres ondas son iguales, por lo que se cumple

#### Ley de la reflexión y ley de Snell

$$\theta_i = \theta_r \quad (1.7)$$

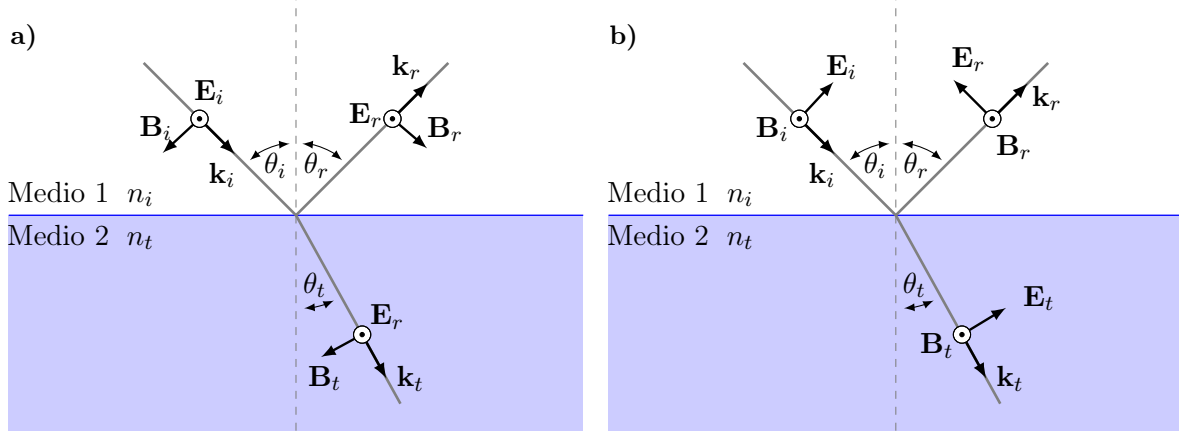
$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t, \quad (1.8)$$

en donde  $\theta_i$  es el ángulo de incidencia;  $\theta_r$ , el de reflexión y  $\theta_t$ , el de transmisión; ambos medidos desde la dirección normal a la superficie. La Ec. (1.7) es la ley de la reflexión, y la Ec. (1.8) es la ley de Snell<sup>1</sup>, que determinan la dirección de propagación del haz reflejado y el transmitido.

Para calcular la potencia reflejada y transmitida se calculan primero los coeficientes de

<sup>1</sup>La ley fue nombrada así debido al físico holandés Willebroerd Snellius aunque investigaciones más recientes indican que el registro más antiguo de esta ley (correctamente formulada) fue en el año 984 en el libro *On the Burning Instruments* del matemático persa Ibn Sahl [5].

amplitud de reflexión  $r = E_r/E_i$  y de transmisión  $t = E_t/E_i$ , que son el cociente del campo eléctrico reflejado  $E_r$ , o transmitido  $E_t$ , entre el campo eléctrico incidente  $E_i$ . El valor de los coeficientes de amplitud  $r$  y  $t$  depende de la polarización del campo eléctrico incidente, es decir, de la dirección en la que  $\mathbf{E}_i$  oscila. En Fig. 1.2 se muestra un haz de luz que se propaga en el medio de incidencia (con índice de refracción  $n_i$ ) en la dirección  $\mathbf{k}_i$  e incide en la interfaz a un ángulo  $\theta_i$  respecto al vector normal al plano. Este haz se refleja según la Ec. (1.7) a un ángulo  $\theta_r = \theta_i$  y se propaga en una dirección  $\mathbf{k}_r$ , y se refracta en un ángulo  $\theta_t$  dado por la Ec. (1.8) y se propaga en una dirección  $\mathbf{k}_t$ . En la Fig. 1.2a) el campo eléctrico oscila en una dirección perpendicular al plano de incidencia, por lo que se le denomina polarización  $s$  (del alemán *senkrecht*), mientras que en la Fig. 1.2b) el campo eléctrico oscila paralelo al plano de incidencia, por lo que se le denomina polarización  $p$ .



**Fig. 1.2:** Esquema de una onda plana en polarización a)  $s$  y b)  $p$  propagándose en una dirección  $\mathbf{k}_i$  e incidiendo con un ángulo de incidencia  $\theta_i$  en una interfaz plana entre dos medio lineales, homogéneos e isotrópicos, donde el medio de incidencia tiene un índice de refracción  $n_i$  y el de transmisión  $n_t$ . El haz reflejado se propaga con un ángulo  $\theta_r = \theta_i$  según la ley de reflexión [Ec. (1.7)] y el ángulo transmitido se propaga con un ángulo  $\theta_t$  dado por la ley de Snell [Ec. (1.8)]. En el esquema se asume que la orientación de los campos EMs incidentes ( $\mathbf{E}_i$ ,  $\mathbf{B}_i$ ) es la misma para los campos EMs reflejados ( $\mathbf{E}_r$ ,  $\mathbf{B}_r$ ) y transmitidos ( $\mathbf{E}_t$ ,  $\mathbf{B}_t$ ).

Para polarización  $s$  y medios no magnéticos ( $\mu = \mu_0$ ), el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia y paralelo a la interfaz por lo que, mediante la Ec. (1.6b),  $E_i + E_r = E_t$ , en donde se asume que la orientación del campo eléctrico incidente se preserva en el haz reflejado y transmitido, como se observa en la Fig. 1.2a). Al emplear la continuidad de la componente paralela a la interfaz de  $\mathbf{B}/\mu$  [Ec. (1.6d)], la relación  $E = (c/n)B$  y la ley de la reflexión [Ec. 1.7] y de Snell [Ec. (1.8)] se obtienen los coeficientes de amplitud  $r$  y  $t$  para polarización  $s$ , dados por

#### Coeficientes de amplitud para polarización $s$

$$r_s = \frac{n_i \cos \theta_i - \sqrt{n_t^2 - n_i^2 \sin^2 \theta_i}}{n_i \cos \theta_i + \sqrt{n_t^2 - n_i^2 \sin^2 \theta_i}}, \quad (1.9) \quad t_s = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + \sqrt{n_t^2 - n_i^2 \sin^2 \theta_i}}. \quad (1.10)$$

Cuando el campo eléctrico es paralelo al plano de incidencia, y por tanto perpendicular a la interfaz como se observa en la Fig. 1.2b), se cumple la relación  $E_i \cos \theta_i - E_r \cos \theta_r = E_t \cos \theta_t$  por la Ec. (1.6b). Al asumir nuevamente que la orientación de oscilación del campo eléctrico

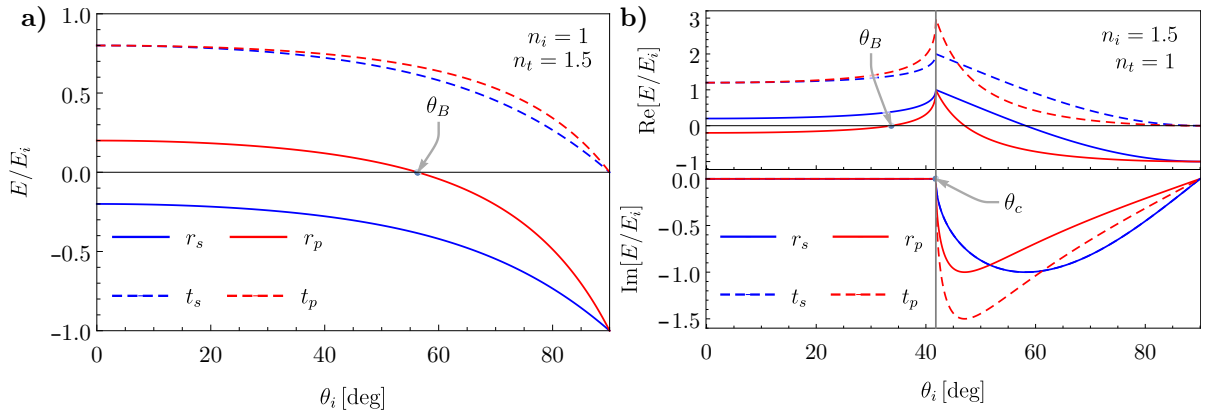


reflejado y transmitido coincide con la del campo eléctrico incidente, y al emplear las Ecs. (1.6d), (1.7) y (1.8), así como la relación  $E = (c/n)B$ , se calculan los coeficientes de amplitud  $r$  y  $t$  para polarización  $p$ , dados por

**Coeficientes de amplitud para polarización  $p$**

$$r_p = \frac{n_t^2 \cos \theta_i - n_i \sqrt{n_t^2 - n_i^2 \sin^2 \theta_i}}{n_t^2 \cos \theta_i + n_i \sqrt{n_t^2 - n_i^2 \sin^2 \theta_i}}, \quad (1.11) \quad t_p = \frac{2n_i n_t \cos \theta_i}{n_t^2 \cos \theta_i + n_i \sqrt{n_t^2 - n_i^2 \sin^2 \theta_i}}. \quad (1.12)$$

Los coeficientes de amplitud dependen de las propiedades ópticas de los medios, descritas por los índices de refracción presentes en sus expresiones, y según el valor de los índices de refracción se presentan distintos fenómenos físicos descritos por las Ecs. (1.9)–(1.12). Si se comparan dos índices de refracción y uno de ellos es mayor que el otro, se dice que el material correspondiente al índice de refracción mayor posee una densidad óptica mayor. En el caso en el que la luz atraviesa una interfaz, entre dos medios lineales, homogéneos e isotrópicos, y el medio transmisión es el más denso ópticamente ( $n_t > n_i$ ), se está en una configuración de incidencia externa, mientras que en caso contrario,  $n_t < n_i$ , se está en incidencia interna. En la Fig. 1.3 se grafican los coeficientes de amplitud  $r$  (líneas continuas) y  $t$  (líneas punteadas) como función del ángulo de incidencia  $\theta_i$  para una interfaz de entre aire ( $n = 1$ ) y un medio con un índice de refracción  $n = 1.5$ , en configuración de incidencia externa [Fig. 1.3a)] e interna [1.3b)] para ambas polarizaciones, en donde las líneas azules corresponden a la polarización  $s$  y las rojas a  $p$ . Dado que los índices de refracción  $n = \sqrt{\varepsilon}$  son cantidades reales, ninguno de los dos medios es absorbente.



**Fig. 1.3:** Coeficientes de amplitud  $r$  (líneas continuas) y  $t$  (líneas punteadas), como función del ángulo de incidencia  $\theta_i$ , en configuración de incidencia **a)** externa e **b)** interna para una interfaz entre aire ( $n = 1$ ) y un medio con índice de refracción  $n = 1.5$ . Los cálculos para polarización  $s$  se muestran en azul y para  $p$  en rojo.

En la Fig. 1.3 el coeficiente de amplitud de reflexión  $r_p$  [Ec. (1.11)] toma un valor nulo para el ángulo de incidencia denominado ángulo de Brewster  $\theta_B$ , que cumple con la expresión

$$\tan \theta_B = \frac{n_t}{n_i}, \quad (1.13)$$

tanto para incidencia externa [Fig. 1.3a)], donde  $\theta_B \approx 56^\circ$ , como para interna [Fig. 1.3b)], donde

$\theta_B \approx 33^\circ$ . El cambio de signo del coeficiente de reflexión  $r_p$  para  $\theta_i > \theta_B$  corresponde a un cambio de fase de  $\pi$  radianes del campo eléctrico reflejado respecto al campo eléctrico incidente. De la Ec. (1.13) se deduce que el ángulo de Brewster de incidencia externa  $\theta_B^{ext}$  es complementario al de incidencia interna  $\theta_B^{int}$ , es decir,  $\theta_B^{ext} + \theta_B^{int} = 90^\circ$  como se observa en las gráficas de la Fig. 1.3.

Cuando se considera una configuración de incidencia interna, se cumple la relación  $n_i > n_t$ , por los coeficientes de amplitud [Ecs. (1.9)–(1.12)] son cantidades complejas para un ángulos de incidencia mayores al ángulo crítico  $\theta_c$  que cumple la expresión

$$\sin \theta_c = \frac{n_t}{n_i}. \quad (1.14)$$

Al sustituir la Ec. (1.14) en la ley de Snell [Ec. (1.8)] se obtiene que  $\theta_t = 90^\circ$  por lo que para  $\theta_i > \theta_c$  toda la luz es reflejada y no transmitida, es decir, se está en el régimen *reflexión total interna*. En la Fig. 1.3b) se observa que los coeficientes de amplitud son máximos en  $\theta_c \approx 48^\circ$  sin embargo, para  $\theta_i > \theta_c$ , los coeficientes de amplitud [Ecs. (1.9)–(1.12)] son cantidades complejas, lo que indica que los campos eléctricos reflejado y transmitido tienen un desfase, distinta de  $\pi$  radianes, respecto al campo eléctrico incidente. Para corroborar que toda la luz es reflejada en incidencia interna para  $\theta_i > \theta_c$  se considera la conservación de la energía transportada por los campos EMs al cruzar la interfaz.

### 1.1.2. Reflectancia y transmitancia

El análisis del comportamiento de las ondas EMs al cruzar una interfaz plana, entre dos medios lineales homogéneos e isotrópicos, en términos de las amplitudes de los campos eléctricos describen el comportamiento de la magnitud y los cambios de fase en los campos eléctricos y no la cantidad de luz transmitida o reflejada. Esta información se obtiene al considerar la energía transportada por los campos EMs, y por lo que se emplea el vector de Poynting [Ec. (1.2)], escrito únicamente en términos del campo eléctrico usando la relación  $E = nB/c$

$$\mathbf{S} = nc\epsilon_0 E_0^2 \hat{\mathbf{k}}. \quad (1.15)$$

Al considerar campos eléctricos armónicos, es decir, tipo ondas planas, es necesario calcular el promedio temporal<sup>1</sup> de la Ec. (1.15), denominado irradiancia [2], dada por

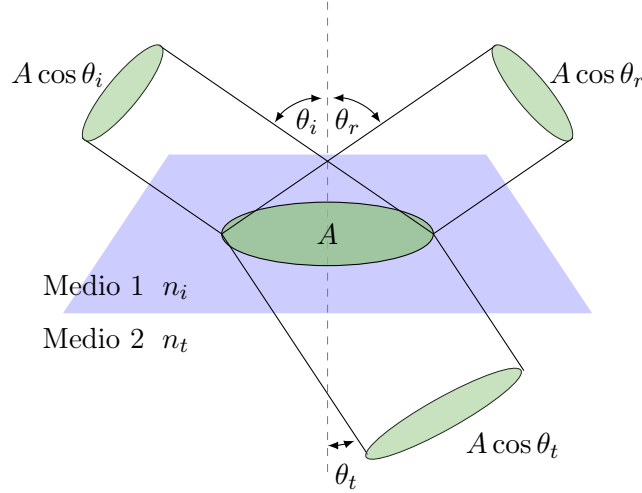
$$I = \langle S \rangle_t = \frac{nc\epsilon_0}{2} E_0^2. \quad (1.16)$$

La irradiancia  $I$  corresponde a la energía promedio por unidad de tiempo, por unidad de área, transportada por los campos EMs en la dirección  $\hat{\mathbf{k}}$  [1]. Para calcular la energía por unidad de tiempo  $P$  transportada por los campos EMs al cruzar la interfaz se multiplica la Ec. (1.16) por la sección transversal del haz de luz. En la Fig. 1.4 se muestran las secciones transversales de un haz incidente que incide a un ángulo  $\theta_i$  sobre la interfaz entre dos medios con índice de refracción  $n_i$  y  $n_t$ , respectivamente. Cuando el haz se refleja, a un ángulo  $\theta_r = \theta_i$ , y se refracta a un ángulo  $\theta_r$ ,

---

<sup>1</sup>El promedio temporal  $\langle \cdot \rangle_t$  de las funciones  $\sin(2\pi t/T)$  y  $\cos(2\pi t/T)$ , con  $T$  el periodo, se calcula como la integral del cuadrado de las funciones a lo largo de una oscilación, dividido por el periodo, esto es  $\langle \sin(2\pi t/T) \rangle_t = \langle \cos(2\pi t/T) \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(2\pi t/T) dt = \frac{1}{2}$ .

la sección transversal del haz cambia. Si el área de los haces justo en la interfaz es  $A$ , mediante la ley de la reflexión [Ec. (1.7)] y la ley de Snell [Ec. (1.8)], la sección transversal del haz incidente y el reflejado es  $A \cos \theta_i$ , mientras que la del haz transmitido es  $A \cos \theta_t$ .



**Fig. 1.4:** Sección transversal de un haz de luz incidiendo en una interfaz entre dos medio lineales, homogéneos e isótropos con índices de refracción  $n_i$  y  $n_t$ . El haz incide sobre la interfaz a un ángulo de  $\theta_i$ , se refleja con un ángulo  $\theta_r$  y se transmite a un ángulo  $\theta_t$ , calculados mediante la ley de la reflexión y de Snell, respectivamente. El área del haz sobre la interfaz es  $A$ , mientras que en los haces, al propagarse, es  $A \cos \theta$ , en donde  $\theta$  es el ángulo de propagación respectivo para cada haz.

Al emplear la Ec. (1.16) y multiplicarla por el área de alguno de los tres haces mostrados en la Fig. 1.4, se obtiene que la energía por unidad de tiempo transportada por cada haz de luz es

$$P = I A \cos \theta = \frac{nc\varepsilon_0}{2} E_0^2 \cos \theta,$$

en donde el ángulo  $\theta$  e índice de refracción  $n$  toman los valores de  $\theta_i$  y  $n_i$  para el haz incidente y el reflejado, mientras que toma los valores de  $\theta_t$  y  $n_t$  para el haz transmitido. Cuando se normaliza la energía por unidad de tiempo transportada por el haz reflejado y por el haz transmitido, entre la del haz incidente se obtienen las expresiones de la reflectancia  $R$  y la transmitancia  $T$

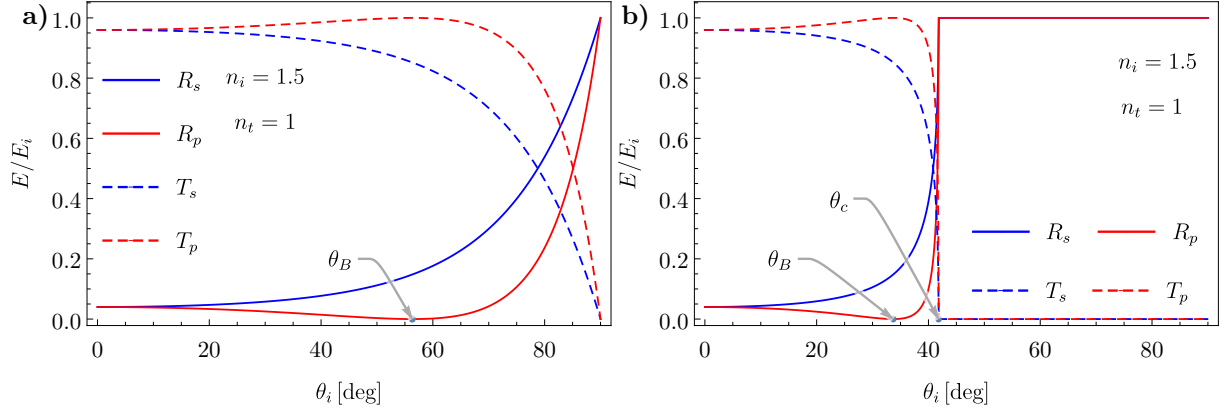
#### Reflectancia y transmitancia

$$R = rr^*, \quad (1.17)$$

$$T = \frac{n_t \sin \theta_i}{n_i \sin \theta_t} tt^*, \quad (1.18)$$

en donde  $r$  es el coeficiente de amplitud de reflexión y  $t$  el de transmisión, dados por las Ecs. (1.9)–(1.12), y  $*$  el complejo conjugado.

En la Fig. 1.5 se presentan la reflectancia (líneas continuas) y transmitancia (líneas punteadas) como función del ángulo de incidencia  $\theta_i$ , para la polarización  $s$  (en azul) y  $p$  (en rojo), de un haz de luz que incide en la interfaz entre aire ( $n = 1$ ) y un medio con índice de refracción  $n = 1.5$  para una configuración de incidencia externa [Fig. 1.5a)] e incidencia interna [Fig. 1.5b)].



**Fig. 1.5:** Reflectancia (líneas sólidas) y transmitancia (líneas punteadas), como función del ángulo de incidencia  $\theta_i$ , en configuración de incidencia **a)** externa e **b)** interna para una interfaz entre aire ( $n = 1$ ) y un medio con índice de refracción  $n = 1.5$ . Los cálculos para polarización  $s$  se muestran en azul y para  $p$  en rojo.

El ángulo de Brewster  $\theta_B$  es apreciable en las gráficas de la Fig. 1.5, en donde se observa  $R_p = 0$ . Asimismo es apreciable en la Fig. 1.5b) que para ángulos de incidencia mayores al ángulo crítico, se cumple que  $R_p = R_s = 1$ , mientras que  $T_s = T_p = 0$ , es decir, que toda la luz es reflejada. En la Fig. 1.5 se observa que es válida la relación

$$R + T = 1,$$

sin embargo, ésta es válida únicamente para índices de refracción  $n = \sqrt{\epsilon}$  que sean cantidades reales, es decir, que la interfaz sea formada por dos medios lineales, homogéneos e isotrópicos que, además, no sean absorbentes. Cuando la luz se propaga a través de algún medio absorbente, se cumple en general

$$R + T + A = 1,$$

en donde el término  $A$  es la energía absorbida por el material, relativa a la energía del haz incidente.

## 1.2. Solución de Mie

El problema de la absorción y el esparcimiento de luz por una partícula esférica fue resuelto por el físico alemán Gustav Mie en 1908 [6]. La solución de Mie consiste en la expansión de una onda plana, que ilumina una esfera, en una base esférica que cumple con las ecuaciones de Maxwell [Ecs. (1.1)], y en las condiciones de continuidad que los campos EMs [Ecs. (1.6)] satisfacen en la superficie de la esfera [7, 6, 8]. Existen publicaciones previas a la de Mie en donde el mismo enfoque es empleado [8] sin embargo, en el trabajo de Mie se desarrollan relaciones recursivas para la solución general, que facilitan el cálculo numérico, y se discute la convergencia de este resultado [8]. Esto permitió que Mie expusiera diez casos prácticos, a diferencia de otros textos que se limitaban a pocos problemas experimentales [8].

Las ecuaciones de Maxwell, considerando una región del espacio sin cargas externas, y

campos EMs armónicos en el tiempo, se reescriben como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1.19a) \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (1.19b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \quad (1.19c) \quad \nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \quad (1.19d)$$

en donde  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$  es el campo H, la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del material son funciones continuas. Al desacoplar las ecuaciones de Maxwell, se concluye que los campos EMs son soluciones a la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (1.20a) \quad \nabla^2 \mathbf{H} - k^2 \mathbf{H} = \mathbf{0}. \quad (1.20b)$$

Para proceder con el cálculo de los campos EMs, se propone primero un campo vectorial  $\mathbf{M}$  tal que

$$\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{c}\psi), \quad (1.21)$$

donde  $\psi$  es una función escalar y  $\mathbf{c}$  un vector *constante* arbitrario; dado que  $\mathbf{M}$  es el rotacional de  $\mathbf{c}\psi$ , se cumple que  $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$  y que  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{c}$  son vectores perpendiculares<sup>1</sup>. Empleando la Ec. (1.21) para calcular la ecuación de Helmholtz para  $\mathbf{M}$  se obtiene

$$\nabla^2 \mathbf{M} + k^2 \nabla \mathbf{M} = \nabla^2 [\nabla \times (\mathbf{c}\psi)] + k^2 \nabla \times (\mathbf{c}\psi). \quad (1.22)$$

Dado que el operador laplaciano y el rotacional conmutan<sup>2</sup>, la Ec. (1.22) puede reescribirse como

$$\nabla^2 \mathbf{M} + k^2 \nabla \mathbf{M} = \nabla \times [\mathbf{c} (\nabla^2 \psi + k^2 \psi)]. \quad (1.23)$$

Se define también el vector  $\mathbf{N}$  dado por la expresión

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla \times \mathbf{M}}{k}, \quad (1.24)$$

cuyo laplaciano es  $\nabla^2 \mathbf{N} = \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{M}/k) = \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{M}/k)$ , pues el rotacional y el laplaciano son operadores que conmutan entre sí. Por tanto, la ecuación de Helmholtz para  $\mathbf{N}$  es

$$\nabla^2 \mathbf{N} + k^2 \mathbf{N} = \nabla \times \left( \frac{\nabla^2 \mathbf{M}}{k} \right) + k \nabla \times \mathbf{M} = \frac{1}{k} \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{M} + k^2 \mathbf{M}). \quad (1.25)$$

Los campos  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{N}$  cumplen con la Ec. de la ecuación de Helmholtz vectorial [Ec. (1.20)] si, y sólo si, la función escalar  $\psi$  cumple con la ecuación de Helmholtz escalar  $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$ .

<sup>1</sup>Empleando la convención de la suma de Einstein y con  $\epsilon_{ijk}$  el símbolo de Levi-Civita:  $M_i = [\nabla \times (\mathbf{c}\psi)]_i = \epsilon_{ijk} \partial_j c_k \psi = -\epsilon_{jik} c_k \partial_j \psi = -\epsilon_{ikj} c_k \partial_j \psi = -[\mathbf{c} \times \nabla \psi]_i$

<sup>2</sup>Para un campo vectorial arbitrario  $\mathbf{A}$  se cumple que  $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$ , por lo que el rotacional del laplaciano de  $\mathbf{A}$  es  $\nabla \times (\nabla^2 \mathbf{A}) = \nabla \times [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})] - \nabla \times [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})] = -\nabla \times [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})]$  pues el rotacional del gradiente de cualquier función es nulo. Además, al sustituir  $\mathbf{A} \rightarrow \nabla \times \mathbf{A}$  en la expresión del laplaciano de  $\mathbf{A}$  y considerando que la divergencia del rotacional de cualquier función es nulo, se obtiene que  $\nabla^2 (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla[\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})] - \nabla \times [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})] = -\nabla \times [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})]$ . Por tanto,  $\nabla^2$  y  $\nabla \times$  con operadores que conmutan.

Si este es el caso, entonces, el rotacional de  $\mathbf{N}$  está dado por

$$\nabla \times \mathbf{N} = \nabla \times \left( \frac{\nabla \times \mathbf{M}}{k} \right) = \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{M}) - \nabla^2 \mathbf{M}}{k} = -\frac{\nabla^2 \mathbf{M}}{k} = \frac{k^2 \mathbf{M}}{k} = k\mathbf{M}. \quad (1.26)$$

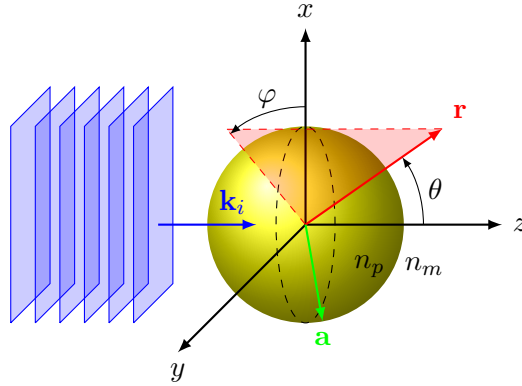
Los campos vectoriales  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{N}$  son conocidos como los *armónicos vectoriales*,  $\psi$  como su función generadora y  $\mathbf{c}$  como el vector de guía o vector piloto. Los armónicos esféricos vectoriales  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{N}$  cumplen con tener divergencia nula y que el rotacional de uno es proporcional al otro [Ecs. (1.24) y (1.26)], es decir, que cumplen con las ecuaciones de Maxwell y con la ecuación de Helmholtz —por lo que cuentan con las características de campos EMs— siempre que se cumpla que

$\psi$ : Función generadora de los armónicos vectoriales

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0. \quad (1.27)$$

### 1.2.1. Solución a la ecuación de onda con simetría esférica

Para poder encontrar las soluciones del campo esparcido por una esfera basta entonces con encontrar las soluciones de la Ec. (1.27) con la geometría deseada e imponer las condiciones a la frontera de los campos EMs. Suponiendo una partícula esférica, se escoge el vector piloto  $\mathbf{c}$  como  $\mathbf{r}$  (ver Fig. 1.6), por lo que  $\mathbf{M}$  es solución a la ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$ , además de que se cumple que  $\mathbf{M}$  será tangencial a cualquier esfera de radio  $r = \|\mathbf{r}\|$  constante.



**Fig. 1.6:** Esfera de radio  $a$  e índice de refracción  $n_p$ , inmersa en una matriz con índice  $n_m$ . La esfera es iluminada por una onda plana de luz con vector de onda  $\mathbf{k}_i$  que viaja en la dirección  $\hat{e}_z$ .

En coordenadas esféricas la Ec. (1.27) es

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + k^2 \psi = 0. \quad (1.28)$$

Para resolver la Ec. (1.28) se asume que  $\psi$  es el producto de tres funciones y cada una de éstas

depende únicamente en una variable, es decir,

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi). \quad (1.29)$$

La resolución de la Ec. (1.27) busca construir un conjunto de funciones linealmente independientes que sean una base para los campos EMs incidentes, esparcidos y dentro de la esfera. Al sustituir la Ec. (1.29) en la Ec. (1.28), y multiplicar por  $r^2/R\Theta\Phi$  y despejando los términos que dependen únicamente de  $r$ , se obtiene como resultado que una función con dependencia radial es igual a una función con dependencia angular, por lo tanto se igualan a una constante  $\ell(\ell + 1)$ , es decir

$$\overbrace{\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2}^{\text{radial}} = \underbrace{\ell(\ell + 1) = -\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}}_{\text{angular}}. \quad (1.30)$$

Si la parte angular de la Ec. (1.30) se multiplica por  $\sin^2 \theta$ , y se despejan los términos que dependen de  $\theta$ , se obtiene que una función que depende únicamente de  $\theta$  es igual a una que depende únicamente de  $\varphi$ , por lo que ambas partes se igualan a la constante  $m^2$ . Tanto  $\ell$  en la Ec. (1.30), como  $m$  son constantes que se determinan ante condiciones impuestas a  $\psi$ . Tras este procedimiento —llamado separación de variables— se tiene entonces que las funciones  $R(r)$ ,  $\Theta(\theta)$ , y  $\Phi(\varphi)$  cumplen con las ecuaciones

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + m^2 \Phi = 0. \quad (1.31)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[ \ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0, \quad (1.32)$$

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + [k^2 r^2 - \ell(\ell + 1)] R = 0. \quad (1.33)$$

Dado que  $\psi$  debe ser una función con periodicidad  $2\pi$  en  $\varphi$ , es decir que  $\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$ , las soluciones linealmente independientes de la Ec. (1.31) son

$$\Phi_e(\varphi) = \cos(m\varphi), \quad (1.34a)$$

$$\Phi_o(\varphi) = \sin(m\varphi), \quad (1.34b)$$

con  $m$  un número entero no negativo. Los subíndices  $e$  y  $o$  hacen referencia a que son funciones pares e impares respectivamente.

Haciendo el cambio de variable  $\mu = \cos \theta$  en la Ec. (1.32), ésta se reescribe como

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 \Theta}{d\mu^2} - 2\mu \frac{d\Theta}{d\mu} + \left[ \ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{(1 - \mu^2)} \right] \Theta = 0,$$

cuyas soluciones que cumplen con ser finitas en  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$  —o bien  $\mu = \pm 1$ — imponen que  $\ell = m, m + 1, m + 2, \dots$ . Las soluciones a la Ec. (1.32) son entonces las *funciones asociadas de Legendre*  $P_\ell^m(\cos \theta)$  de grado  $\ell$  y orden  $m$ , las cuales se reducen a los polinomios de Legendre  $P_\ell(\cos \theta)$  cuando  $m = 0$ . Las funciones asociadas de Legendre son ortogonales, obedeciendo la

relación

$$\int_{-1}^1 P_\ell^m(\mu) P_{\ell'}^m d\mu = \delta_{\ell,\ell'} \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}, \quad (1.35)$$

donde  $\delta_{\ell,\ell'}$  es la delta de Kronecker y  $\mu = \cos \theta$ . Asimismo, las funciones asociadas de Legendre se relacionan con los polinomios de Legendre mediante la identidad

$$P_\ell^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{m/2} \frac{d^m P_\ell(\mu)}{d\mu^m}, \quad (1.36)$$

de donde se obtiene que  $P_\ell^m(\cos \theta)|_{\theta=0,\pi} = 0$  para toda  $m$  distinta de cero.

Para resolver la Ec. (1.33) se emplea el cambio de variable  $\rho = kr$  y se define la función  $Z = R\sqrt{\rho}$ , por lo que la Ec. (1.33) se reescribe como

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dZ}{d\rho} \right) + \left[ \rho^2 - \left( \ell + \frac{1}{2} \right)^2 \right] Z = 0, \quad (1.37)$$

cuyas soluciones son las *funciones esféricas de Bessel*  $j_\ell$  y  $y_\ell$  o cualquier combinación lineal de ellas. Por simplificación en futuros cálculos, se toman como soluciones de la Ec. (1.33) las funciones

$$j_\ell(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} J_{\ell+1/2}(\rho), \quad (1.38a) \quad y_\ell(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} Y_{\ell+1/2}(\rho), \quad (1.38b)$$

$$h_\ell^{(1)}(\rho) = j_\ell(\rho) + iy_\ell(\rho), \quad (1.38c) \quad h_\ell^{(2)}(\rho) = j_\ell(\rho) - iy_\ell(\rho), \quad (1.38d)$$

en donde  $J_\ell$  y  $Y_\ell$  son las *funciones de Bessel del primer y segundo tipo* respectivamente y  $h_\ell$  son las *funciones esféricas de Bessel del tercer tipo*, también denominadas como *funciones esféricas de Hankel*. Todas las funciones esféricas de Bessel  $z_\ell$  —donde  $z_\ell$  es cualquier función de las Ecs. (1.38)— cumplen con las relaciones de recurrencia

$$z_{\ell-1}(\rho) + z_{\ell+1}(\rho) = \frac{2\ell+1}{\rho} z_\ell(\rho), \quad (1.39)$$

$$(2\ell+1) \frac{dz_\ell(\rho)}{d\rho} = \ell z_{\ell-1}(\rho) - (\ell+1) z_{\ell+1}(\rho), \quad (1.40)$$

en donde los primeros dos órdenes ( $\ell = 0, 1$ ) de  $j_\ell$  y  $y_\ell$  son

$$\begin{aligned} j_0(\rho) &= \frac{\sin \rho}{\rho}, & j_1(\rho) &= \frac{\sin \rho}{\rho^2} - \frac{\cos \rho}{\rho}, \\ y_0(\rho) &= -\frac{\cos \rho}{\rho}, & y_1(\rho) &= -\frac{\cos \rho}{\rho^2} - \frac{\sin \rho}{\rho}. \end{aligned}$$

Por tanto, las funciones generadoras de los armónicos esféricos vectoriales son

$$\psi_{em\ell} = \cos(m\varphi) P_\ell^m(\cos \theta) z_\ell(kr), \quad (1.41a) \quad \psi_{om\ell} = \sin(m\varphi) P_\ell^m(\cos \theta) z_\ell(kr), \quad (1.41b)$$

por lo que se construyen cuatro armónicos esféricos vectoriales. Empleando las Ecs. (1.41) en la



Ec. (1.21), con  $\mathbf{r}$  como el vector piloto, se obtiene como resultado  $\mathbf{M}_{eml}$  y  $\mathbf{M}_{oml}$ , dados por las expresiones

**Armónicos esféricos vectoriales  $\mathbf{M}_{eml}$  y  $\mathbf{M}_{oml}$**

$$\mathbf{M}_{eml} = -m \sin(m\varphi) z_\ell(kr) \frac{P_\ell^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta - \cos(m\theta) z_\ell(kr) \frac{dP_\ell^m(\cos \theta)}{d\theta} \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \quad (1.42a)$$

$$\mathbf{M}_{oml} = m \cos(m\varphi) z_\ell(kr) \frac{P_\ell^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin(m\theta) z_\ell(kr) \frac{dP_\ell^m(\cos \theta)}{d\theta} \hat{\mathbf{e}}_\varphi. \quad (1.42b)$$

Para el cálculo  $\mathbf{N}_{eml}$  y  $\mathbf{N}_{oml}$  se sustituyen las Ecs. (1.42a) y (1.42b) en la Ec. (1.24). Para simplificar las expresiones de las componentes radiales de  $\mathbf{N}_{eml}$  y  $\mathbf{N}_{oml}$ , se agrupan los términos que dependen de  $\varphi$  y  $kr$  y, dado que las funciones asociadas de Legendre cumplen con la relación

$$-\ell(\ell+1)P_\ell^m(\cos \theta) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP_\ell^m(\cos \theta)}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} P_\ell^m(\cos \theta),$$

que es una consecuencia de la Ec. (1.32), las expresiones de  $\mathbf{N}_{eml}$  y  $\mathbf{N}_{oml}$  son

**Armónicos esféricos vectoriales  $\mathbf{N}_{eml}$  y  $\mathbf{N}_{oml}$**

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{eml} = & \cos(m\varphi) \frac{z_\ell(kr)}{kr} \ell(\ell+1) P_\ell^m(\cos \theta) \hat{\mathbf{e}}_r \\ & + \cos(m\varphi) \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} \left[ kr z_\ell(kr) \right] \frac{dP_\ell^m(\cos \theta)}{d\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ & - m \sin(m\varphi) \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} \left[ kr z_\ell(kr) \right] \frac{P_\ell^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \end{aligned} \quad (1.42c)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{oml} = & \sin(m\varphi) \frac{z_\ell(kr)}{kr} \ell(\ell+1) P_\ell^m(\cos \theta) \hat{\mathbf{e}}_r \\ & + \sin(m\varphi) \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} \left[ kr z_\ell(kr) \right] \frac{dP_\ell^m(\cos \theta)}{d\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ & + m \cos(m\varphi) \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} \left[ kr z_\ell(kr) \right] \frac{P_\ell^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \hat{\mathbf{e}}_\varphi. \end{aligned} \quad (1.42d)$$

Los armónicos esféricos vectoriales son solución a la ecuación de Helmholtz, por lo que cualquier solución de campo EM puede escribirse como una serie infinta en términos de las Ecs. (1.42). Para resolver el problema de los campos EMs esparcidos por una partícula esférica, se expande una onda plana  $\mathbf{E}^i$  en la base de los armónicos esféricos vectoriales. Para esto, se emplean sus condiciones de ortogonalidad.

Las funciones  $\sin(m\varphi)$  y  $\cos(m\varphi)$  obedecen las relaciones de ortogonalidad

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\varphi) \cos(m'\varphi) d\varphi = 0 \quad \forall m, m', \quad (1.43a)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\varphi) \sin(m'\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos(m\varphi) \cos(m'\varphi) d\varphi = \delta_{m,m'} \frac{\pi}{2}. \quad (1.43b)$$

## 1. TEORÍA

Por la Ec. (1.43a) se cumple que el producto interior<sup>1</sup> entre  $\mathbf{M}_{em\ell}$  y  $\mathbf{M}_{om'\ell'}$ , y  $\mathbf{N}_{em\ell}$  y  $\mathbf{N}_{om'\ell'}$  es

$$\langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{M}_{om'\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = \langle \mathbf{N}_{em\ell}, \mathbf{N}_{om'\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = 0 \quad \forall m, m', \ell, \ell', \quad (1.44)$$

así como también

$$\langle \mathbf{M}_{om\ell}, \mathbf{N}_{em'\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = \langle \mathbf{M}_{om\ell}, \mathbf{N}_{om'\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = \langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{N}_{em'\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = 0 \quad \forall m, m', \ell, \ell'. \quad (1.45)$$

pues  $\mathbf{M}$  tiene componente nula en  $\hat{\mathbf{e}}_r$  y en los demás términos se encuentra la Ec. (1.43a). Las Ecs. (1.43) implican que todos los armónicos esféricos vectoriales orden  $m$  distinto son ortogonales entre sí.

El producto interior entre  $\mathbf{M}_{em\ell}$  y  $\mathbf{N}_{om\ell'}$ , empleando el resultado de la Ec. (1.43b) con  $m = m'$ , está dado por

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{N}_{om\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} &= -\frac{\pi}{2} \frac{z_\ell(\rho)}{\rho} \frac{dz_{\ell'}(\rho)}{d\rho} m \int_0^\pi \left[ P_\ell^m(\cos \theta) \frac{dP_{\ell'}^m(\cos \theta)}{d\theta} + \frac{dP_\ell^m(\cos \theta)}{d\theta} P_{\ell'}^m(\cos \theta) \right] d\theta \\ &= -\frac{\pi}{2} \frac{z_\ell(\rho)}{\rho} \frac{dz_{\ell'}(\rho)}{d\rho} m \int_0^\pi \frac{d}{d\theta} [P_\ell^m(\cos \theta) P_{\ell'}^m(\cos \theta)] d\theta \\ &= -\frac{\pi}{2} \frac{z_\ell(\rho)}{\rho} \frac{dz_{\ell'}(\rho)}{d\rho} m \left. P_\ell^m(\cos \theta) P_{\ell'}^m(\cos \theta) \right|_0^\pi. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Mediante un procedimiento semejante se obtiene que  $\langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{N}_{om\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = \langle \mathbf{M}_{om\ell}, \mathbf{N}_{em\ell'} \rangle_{\theta, \varphi}$ . Haciendo uso de la relación entre las funciones asociadas de Legendre con los polinomios de Legendre [Ec. (1.36)] se obtiene que  $P_\ell^m(\cos \theta) = 0$  para  $\theta = 0, \pi$  y  $m \neq 0$ . Sin embargo, si en la Ec. (1.46)  $m$  es igual a cero, el producto interior también es nulo, por lo que se cumple que

$$\langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{N}_{om\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = \langle \mathbf{M}_{om\ell}, \mathbf{N}_{em\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = 0 \quad \forall \ell, \ell' m. \quad (1.47)$$

Las expresiones del producto interior entre  $\mathbf{M}_{em\ell}$  y  $\mathbf{M}_{em\ell'}$ , y  $\mathbf{N}_{em\ell}$  y  $\mathbf{N}_{em\ell'}$ , empleando el resultado de la Ec. (1.43b) con  $m = m'$ , y la relación de ortogonalidad de las funciones asociadas de Legendre [Ec. (1.35)] son

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{M}_{em\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} &= \frac{\pi}{2} z_\ell(\rho) z_{\ell'}(\rho) \times \int_0^\pi \left[ \frac{m^2}{\sin^2 \theta} P_\ell^m(\cos \theta) P_{\ell'}^m(\cos \theta) + \frac{dP_\ell^m(\cos \theta)}{d\theta} \frac{dP_{\ell'}^m(\cos \theta)}{d\theta} \right] \sin \theta d\theta \\ \langle \mathbf{N}_{em\ell}, \mathbf{N}_{em\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} &= \frac{\pi}{2} \left[ \frac{z_\ell(\rho)}{\rho} \ell(\ell+1) \right]^2 \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell\ell'} + \frac{\pi}{2} \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} [\rho z_\ell(\rho)] \frac{d}{d\rho} [\rho z_{\ell'}(\rho)] \\ &\quad \times \int_0^\pi \left[ \frac{m^2}{\sin^2 \theta} P_\ell^m(\cos \theta) P_{\ell'}^m(\cos \theta) + \frac{dP_\ell^m(\cos \theta)}{d\theta} \frac{dP_{\ell'}^m(\cos \theta)}{d\theta} \right] \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Asimismo, se cumple que  $\langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{M}_{em\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = \langle \mathbf{M}_{om\ell}, \mathbf{M}_{om\ell'} \rangle_{\theta, \varphi}$  y  $\langle \mathbf{N}_{em\ell}, \mathbf{N}_{em\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = \langle \mathbf{N}_{om\ell}, \mathbf{N}_{om\ell'} \rangle_{\theta, \varphi}$ .

<sup>1</sup>Se define el producto interior  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle_{\theta, \varphi}$  como  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle_{\theta, \varphi} \equiv \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \sin \theta d\theta d\varphi$

Sustituyendo  $P_\ell^m(\cos \theta)$  en la Ec. (1.32) y multiplicándola por  $P_{\ell'}^m(\cos \theta)$ , operando de la misma forma intercambiando los papeles de  $P_\ell^m(\cos \theta)$  y  $P_{\ell'}^m(\cos \theta)$  y sumando ambos resultados se llega a la expresión

$$2 \frac{m^2}{\sin^2 \theta} P_\ell^m P_{\ell'}^m \sin \theta = P_\ell \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{dP_{\ell'}^m}{d\theta} \right] P_{\ell'} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{dP_\ell^m}{d\theta} \right] + \ell(\ell+1) P_\ell^m P_{\ell'}^m \sin \theta + \ell'(\ell'+1) P_\ell^m P_{\ell'}^m \sin \theta, \quad (1.48)$$

en donde se obvia el argumento  $\cos \theta$ . Dado que

$$\frac{d}{d\theta} \left[ P_{\ell'}^m \sin \theta \frac{dP_\ell^m}{d\theta} \right] = P_{\ell'}^m \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{dP_\ell^m}{d\theta} \right] + \sin \theta \frac{dP_{\ell'}^m}{d\theta} \frac{dP_\ell^m}{d\theta},$$

sumando  $2 \sin \theta dP_{\ell'}^m d\theta dP_\ell^m d\theta$  de ambos lados de la Ec. (1.48) y agrupando términos, se obtiene que el integrando presente en los productos interiores de  $\mathbf{M}_{em\ell}$  y  $\mathbf{M}_{em\ell'}$ , y  $\mathbf{N}_{em\ell}$  y  $\mathbf{N}_{em\ell'}$  es

$$\left[ \frac{m^2}{\sin^2 \theta} P_\ell^m P_{\ell'}^m + \frac{dP_\ell^m}{d\theta} \frac{dP_{\ell'}^m}{d\theta} \right] \sin \theta = \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{dP_{\ell'}^m}{d\theta} P_\ell^m + \sin \theta \frac{dP_\ell^m}{d\theta} P_{\ell'}^m \right] + \frac{1}{2} \ell(\ell+1) P_\ell^m P_{\ell'}^m \sin \theta + \frac{1}{2} \ell'(\ell'+1) P_\ell^m P_{\ell'}^m \sin \theta,$$

en donde el primer término de la suma se desvanece al evaluarse en  $\theta = 0, \pi$  y los últimos cumplen con la relación de ortogonalidad de la Ec. (1.35). Por lo tanto

$$\langle \mathbf{M}_{em\ell}, \mathbf{M}_{em\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = \langle \mathbf{M}_{om\ell}, \mathbf{M}_{om\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} = \delta_{\ell'}^{\ell'} \pi z_\ell(\rho)^2 \frac{\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \quad \forall \ell, \ell', m, \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N}_{em\ell}, \mathbf{N}_{em\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} &= \langle \mathbf{N}_{om\ell}, \mathbf{N}_{om\ell'} \rangle_{\theta, \varphi} \\ &= \delta_{\ell'}^{\ell'} \pi \frac{\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \left\{ \left[ \frac{z_\ell(\rho)}{\rho} \right]^2 \ell(\ell+1) + \left[ \frac{1}{\rho} \frac{d[\rho z_\ell(\rho)]}{d\rho} \right]^2 \right\} \quad \forall \ell, \ell', m. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Una onda plana con longitud de onda  $\lambda$ , polarizada en la dirección  $x$ , y caracterizada por el campo eléctrico  $\mathbf{E}^i$  propagándose en la dirección  $z$  en un medio con índice de refracción  $n_m$ , en la base de los vectores ortonormales polares, se escribe como

$$\mathbf{E}^i E_0 e^{ikz} \hat{\mathbf{e}}_x = E_0 e^{ikr \cos \theta} (\sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_r + \cos \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi), \quad (1.51)$$

donde  $E_0$  es la magnitud del campo eléctrico y  $k = 2\pi n_m / \lambda$ . La expansión de la Ec. (1.51) en términos de los armónicos esféricos vectoriales [Ecs. (1.42)] es

$$\mathbf{E}^i = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=m}^{\infty} [B_{em\ell} \mathbf{M}_{em\ell} + B_{om\ell} \mathbf{M}_{om\ell} + A_{em\ell} \mathbf{N}_{em\ell} + A_{om\ell} \mathbf{N}_{om\ell}]. \quad (1.52)$$

Para determinar los coeficientes  $B_{em\ell}$ ,  $B_{om\ell}$ ,  $A_{em\ell}$  y  $A_{om\ell}$  se requieren las relaciones de ortogonalidad de los armónicos esféricos vectoriales [Ecs. (1.50)] (1.49)].

Al igualar las Ecs. (1.51) y (1.52), se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^i &= E_0 e^{ikr \cos \theta} (\sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_r + \cos \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=m}^{\infty} [B_{em\ell} \mathbf{M}_{em\ell} + B_{om\ell} \mathbf{M}_{om\ell} + A_{em\ell} \mathbf{N}_{em\ell} + A_{om\ell} \mathbf{N}_{om\ell}].\end{aligned}$$

Dado que en la componente radial hay dependencia con  $\cos \varphi$ , se sigue que  $m = 1$  al comparar con las expresiones de  $\mathbf{N}_{em\ell}$  [Ec. (1.42c)] y  $\mathbf{N}_{om\ell}$  [Ec. (1.42d)] —únicos elementos con componente radial—, y además que  $A_{om\ell} = 0$  pues  $\mathbf{N}_{om\ell}$  es proporcional a  $\sin \varphi$  en esta componente. Asimismo, por la dependencia con  $\sin \varphi$  en la componente  $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ ,  $B_{em\ell} = 0$  pues  $\mathbf{M}_{em\ell}$  es proporcional a  $\cos \varphi$  en dicha entrada.

La onda plana no tiene ninguna divergencia, por lo que se escoge  $z_\ell = j_\ell$ . Esto se denota en los armónicos esféricos vectoriales con el superíndice (1). Se escribe entonces a la onda plana como

$$\mathbf{E}^i = \sum_{\ell=1}^{\infty} [B_{o1\ell} \mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)} + A_{e1\ell} \mathbf{N}_{e1\ell}^{(1)}], \quad (1.53)$$

con

$$B_{o1\ell} = \frac{\langle \mathbf{E}^i, \mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)} \rangle_{\theta, \varphi}}{\langle \mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)}, \mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)} \rangle_{\theta, \varphi}}, \quad A_{e1\ell} = \frac{\langle \mathbf{E}^i, \mathbf{N}_{e1\ell}^{(1)} \rangle_{\theta, \varphi}}{\langle \mathbf{N}_{e1\ell}^{(1)}, \mathbf{N}_{e1\ell}^{(1)} \rangle_{\theta, \varphi}}$$

Empleando las Ecs. (1.49) y (1.50) con  $m = 1$ , y las condiciones de ortogonalidad de los armónicos esféricos vectoriales, se calcula la expresión de la onda plana en una base esférica, dada por

$$\mathbf{E}^i = E_0 \sum_{\ell=1}^{\infty} i^\ell \frac{2\ell+1}{\ell(\ell+1)} (\mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)} - i \mathbf{N}_{e1\ell}^{(1)}). \quad (1.54)$$

El campo magnético incidente se calcula empleando la Ley de Farady-Lenz [Ec. (1.19c)], cuyo resultado es

$$\mathbf{H}^i = \frac{-k}{\omega \mu} \sum_{\ell=1}^{\infty} E_\ell (\mathbf{M}_{e1\ell}^{(1)} + i \mathbf{N}_{o1\ell}^{(1)}), \quad (1.55)$$

con  $E_\ell = E_0 i^\ell (2\ell+1)/[\ell(\ell+1)]$ .

Para calcular los campos EMs esparcidos ( $\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s$ ) y los campos internos ( $\mathbf{E}^1, \mathbf{H}^1$ ), se emplean las condiciones a la frontera de los campos EMs en una interfaz arbitraria [Ecs. (1.6)], en donde la componente paralela a la interfaz es continua. Es decir

$$(\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s - \mathbf{E}^1) \times \hat{\mathbf{e}}_r = (\mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s - \mathbf{H}^1) \times \hat{\mathbf{e}}_r = \mathbf{0}. \quad (1.56)$$

De la Ec. (1.55) y de las condiciones de continuidad, se deduce que en la expansión de los campos EMs esparcidos, y los internos, los coeficientes para  $m \neq 1$  son nulos. Los campos internos ( $\mathbf{E}^1, \mathbf{H}^1$ ) son finitos en la esfera, por lo que se emplea como solución a la ecuación de onda las funciones  $j_\ell(k_1 r)$ , con  $k_1 = 2\pi n_1/\lambda$  el número de onda dentro de la esfera. Las expresiones para los campos EMs son

$$\mathbf{E}^i = \sum_{\ell=1}^{\infty} E_{\ell} \left( c_{\ell} \mathbf{M}_{o1\ell}^{(1)} - i d_{\ell} \mathbf{N}_{e1\ell}^{(1)} \right), \quad (1.57) \quad \mathbf{H}^i = \frac{-k_1}{\omega \mu_1} \sum_{\ell=1}^{\infty} E_{\ell} \left( d_{\ell} \mathbf{M}_{e1\ell}^{(1)} + i c_{\ell} \mathbf{N}_{o1\ell}^{(1)} \right), \quad (1.58)$$

con  $E_{\ell} = E_0 i^{\ell} (2\ell + 1) / [\ell(\ell + 1)]$ .

Para los campos esparcidos ( $\mathbf{E}^s$ ,  $\mathbf{H}^s$ ) las funciones  $j_{\ell}$  y  $y_{\ell}$  no tienen puntos indeterminados, por lo que se emplearan las funciones de Hankel  $h_{\ell}^{(1)}$  y  $h_{\ell}^{(2)}$ . En su límite asintótico ( $n^2 \ll kr$ ) estas expresiones son

$$h_{\ell}^{(1)}(kr) \approx -i^{\ell} \frac{e^{ikr}}{ikr}, \quad (1.59) \quad h_{\ell}^{(2)}(kr) \approx -i^{\ell} \frac{e^{-ikr}}{ikr}, \quad (1.60)$$

por lo que  $h_{\ell}^{(1)}$  corresponde a una onda esférica saliente, y  $h_{\ell}^{(2)}$  una entrante.

## Matriz de esparcimiento

Expansión de una onda plana, y campo esparcido: Coeficientes d Mie, funciones  $\tau$  y  $\pi$ .  
Modos normales (secciones de extinción??)

## 1.3. Modelo de esparcimiento coherente

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

### 1.3.1. Monocapa suspendida

Desarrollo del CSM y los resultados para una monocapa

### 1.3.2. Monocapa sobre un sustrato

Desarrollo de las multiples reflexiones dentro del sistema



## Bibliografía

---

- [1] D. J. Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. Pearson, 2013 (véanse páginas 1-3, 6).
- [2] E. Hecht. *Optics*. Addison Wesley, 4th ed. Edición, 1998 (véanse páginas 2, 6).
- [3] J. D. Jackson. *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, 3rd ed. Edición, 1999 (véase página 2).
- [4] H. Ibach y H. Lüth. *Solid-state physics: an introduction to principles of material science*. Springer, 2003 (véase página 2).
- [5] A. Kwan, J. Dudley y E. Lantz. Who really discovered snell's law? *Physics World*, 15(4):64, 2002 (véase página 3).
- [6] G. Mie. Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen. *Annalen der Physik*, 330(3):377-445, 1908. ISSN: 15213889. DOI: [10.1002/andp.19083300302](https://doi.org/10.1002/andp.19083300302) (véase página 8).
- [7] C. F. Bohren y D. R. Huffman. *Absorption and scattering of light by small particles*. John Wiley & Sons, 1998 (véase página 8).
- [8] H. Horvath. Gustav Mie and the scattering and absorption of light by particles: Historic developments and basics. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 110(11):787-799, 2009. ISSN: 00224073. DOI: [10.1016/j.jqsrt.2009.02.022](https://doi.org/10.1016/j.jqsrt.2009.02.022) (véase página 8).





# Teoría de Mie

---

## A.1. Apéndice

Apéndice