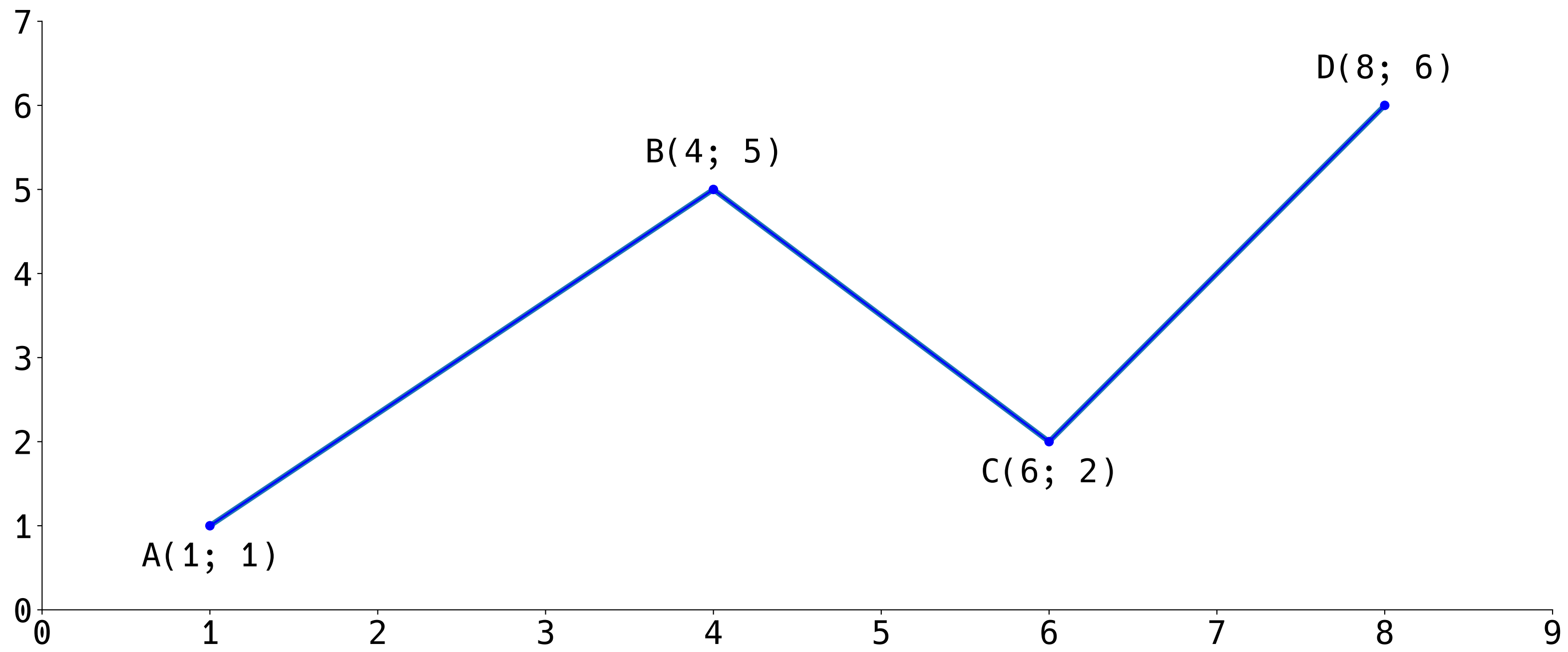
Какова длина ломаной AD ?



$$\left.\begin{array}{r} A\,(x_A; y_A) \\ \\ B\,(x_B, y_B) \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad L_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\left.\begin{array}{r} A\,(1; 1) \\ \\ B\,(4; 5) \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad L_{AB} = \sqrt{(4-1)^2 + (5-1)^2} = 5$$

Задание 1.1 (`snippet_1_1.ipynb`)

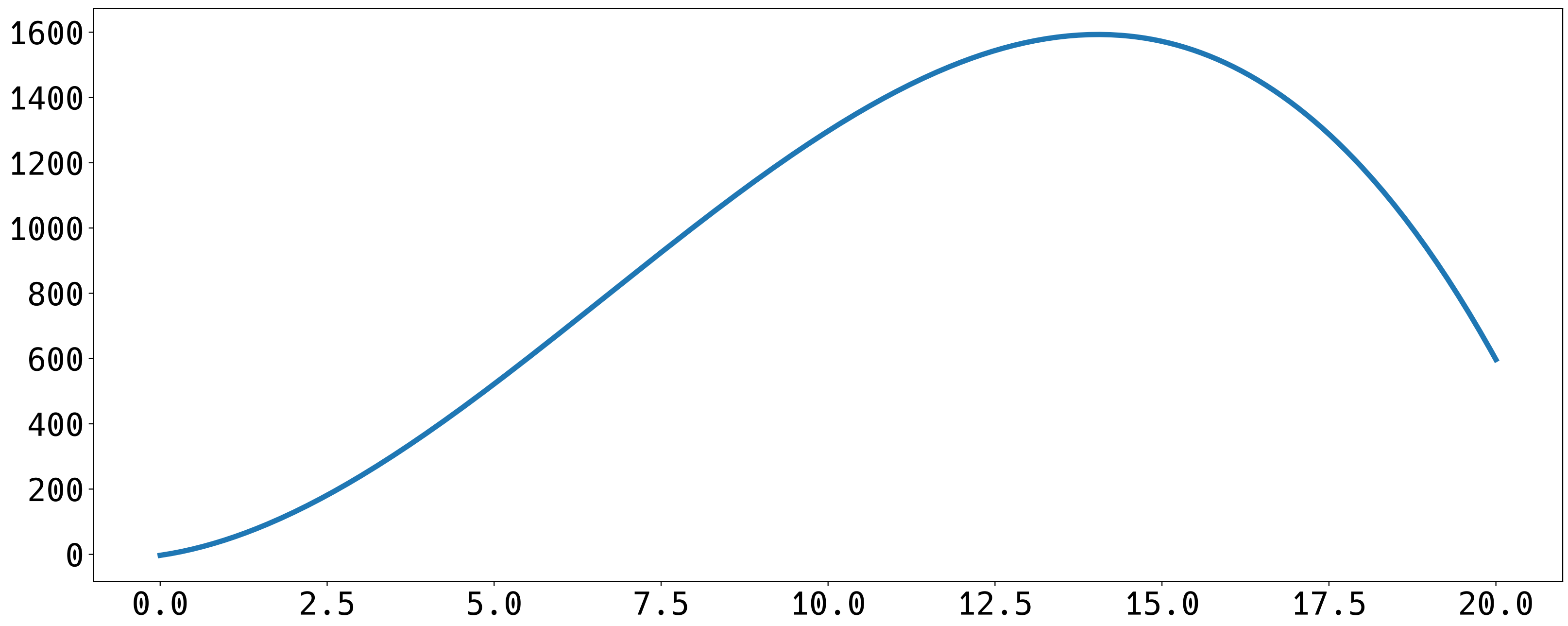
Найдите длину ломаной, заданной двумя параллельными списками её x– и y– координат (см. следующую ячейку).

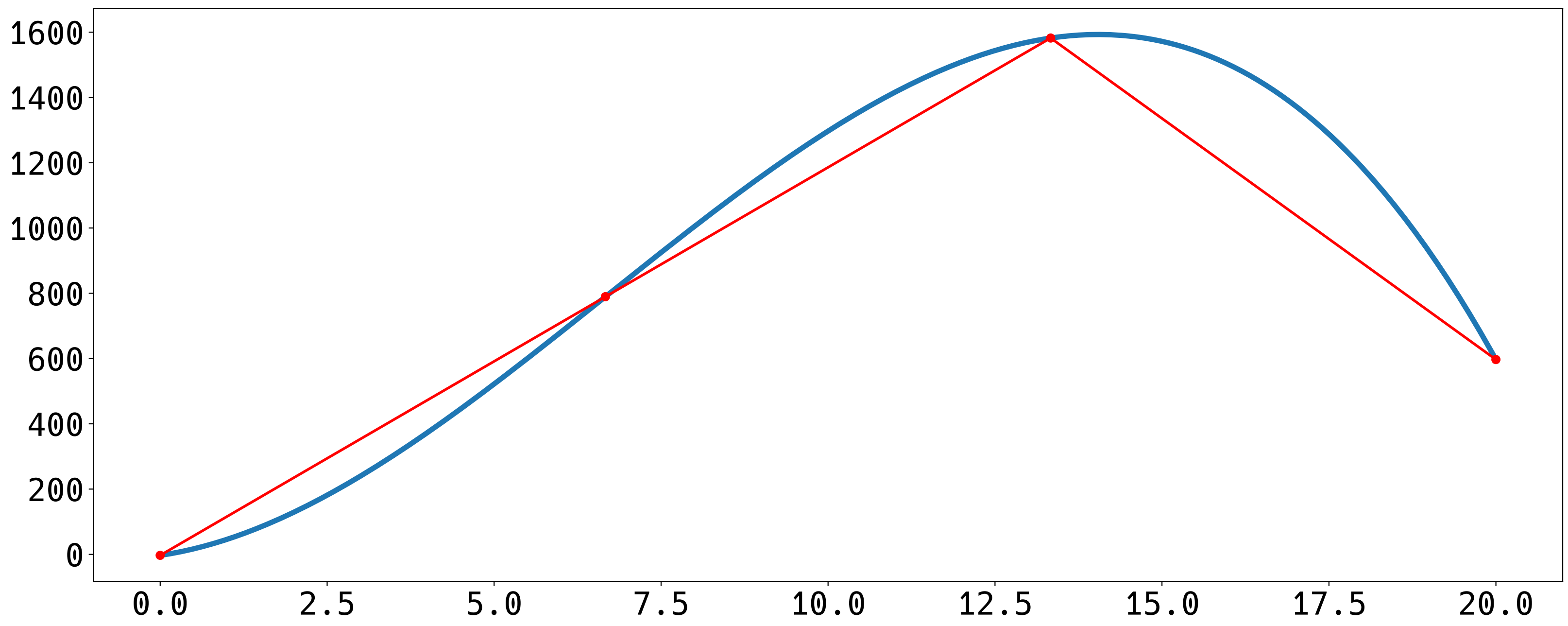
In [ ]:
```
x = [1, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 18, 20, 22, 24, 27, 32]
y = [5, 4, 2, 1, 8, 13, 7, 5, 3, 12, 14, 18, 21]
```

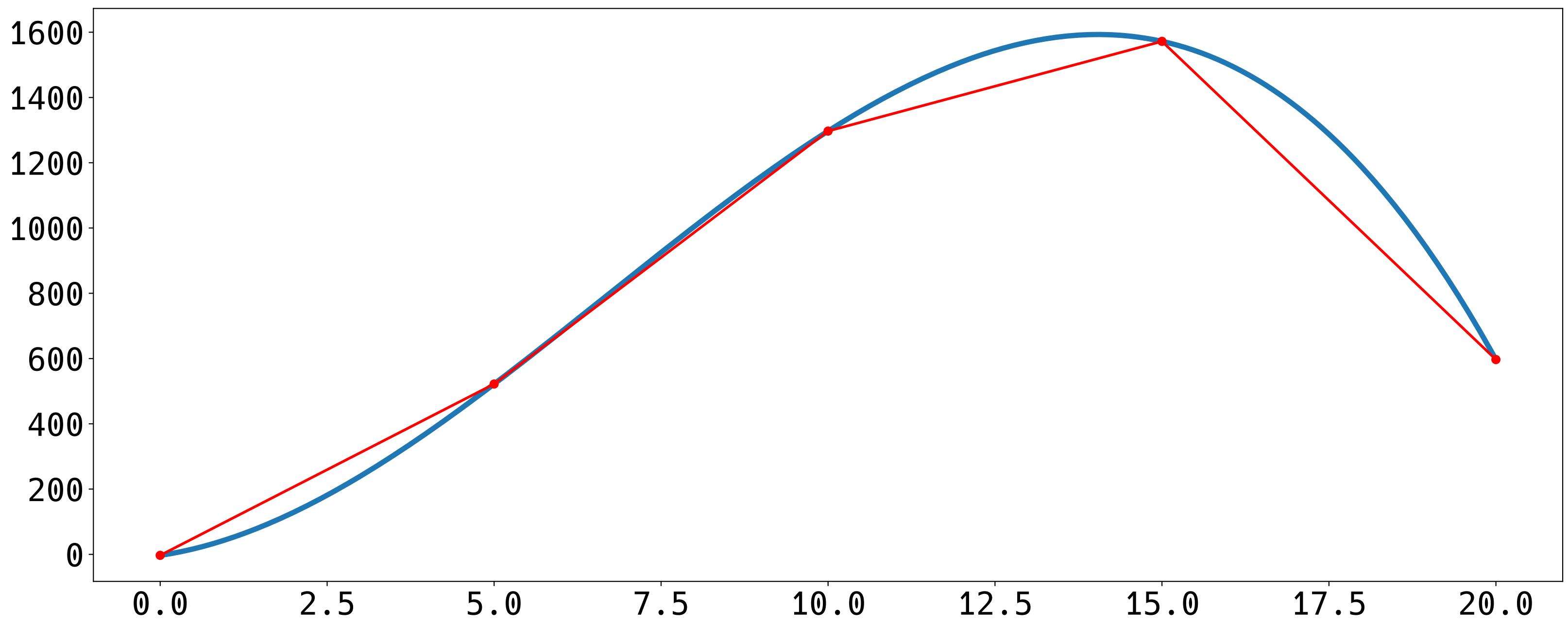
In [ ]:
```
plt.plot(x, y, linewidth=4)
```

In [ ]:
```
from math import sqrt

x = [1, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 18, 20, 22, 24, 27, 32]
y = [5, 4, 2, 1, 8, 13, 7, 5, 3, 12, 14, 18, 21]

l = 0
for i in range(1, len(x)):
    dx = x[i] - x[i - 1]
    dy = y[i] - y[i - 1]
    dl = sqrt(dx**2 + dy**2)
    l += dl

l
```

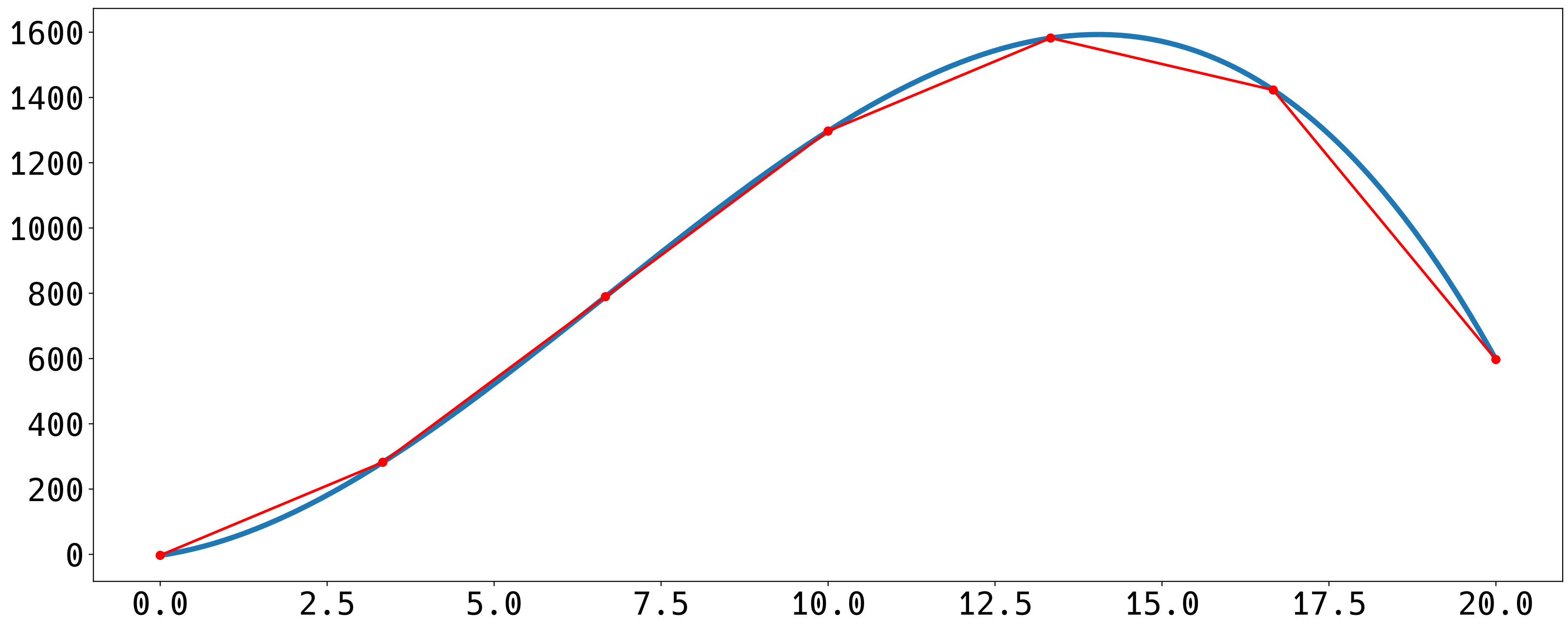
А как вычислить длину кривой $y = f(x)$ на отрезке $x \in [a; b]$?

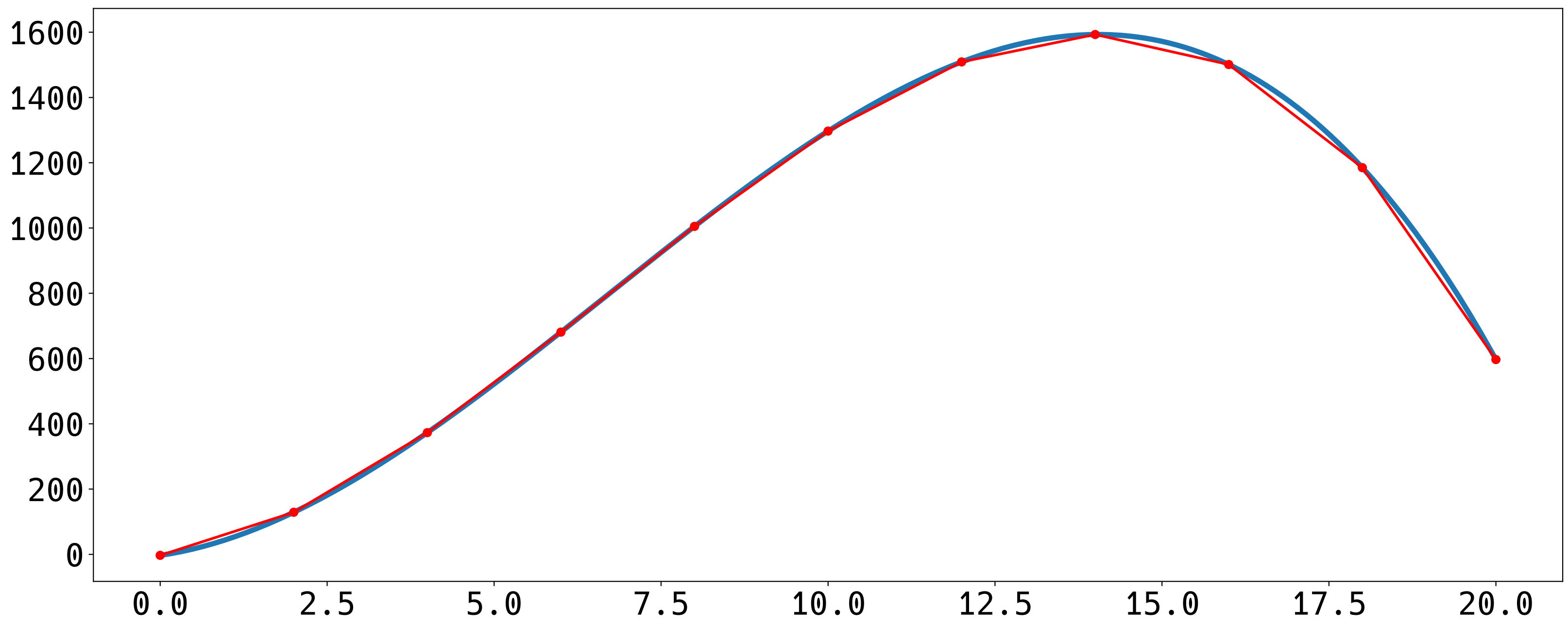

1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0

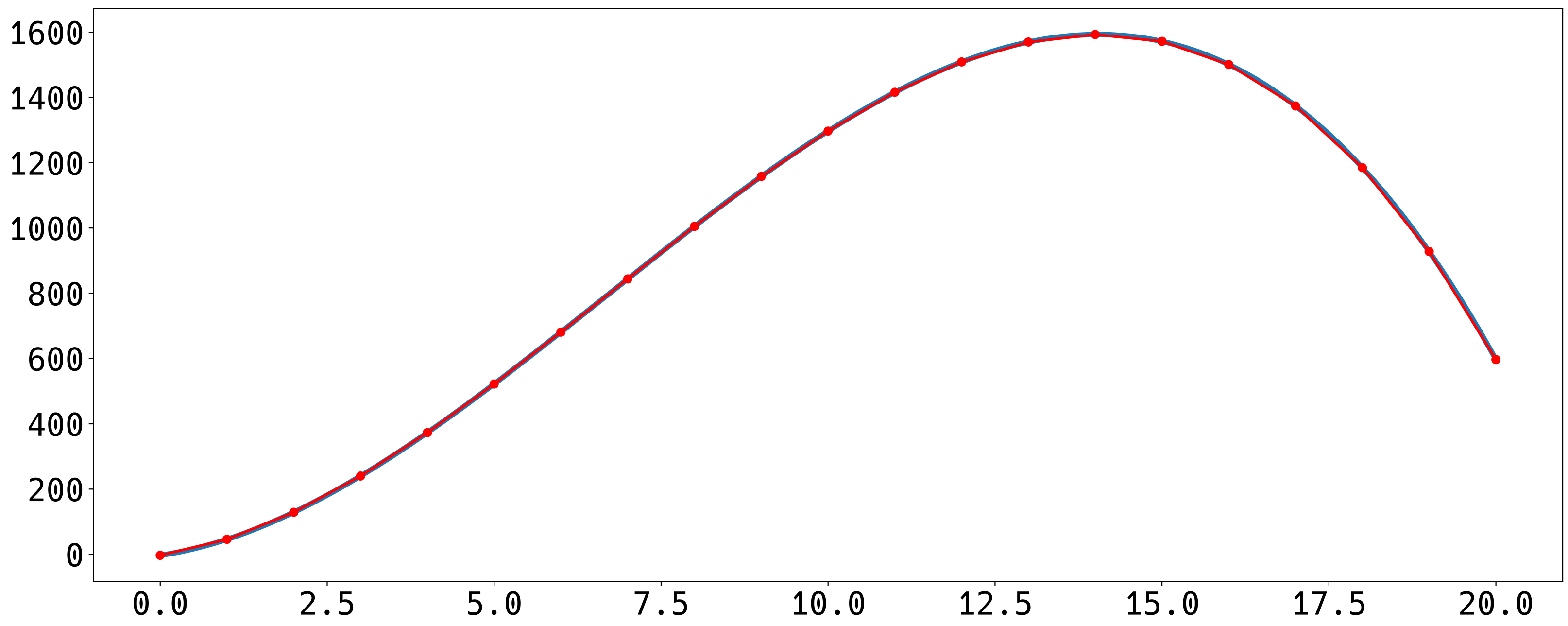

1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0

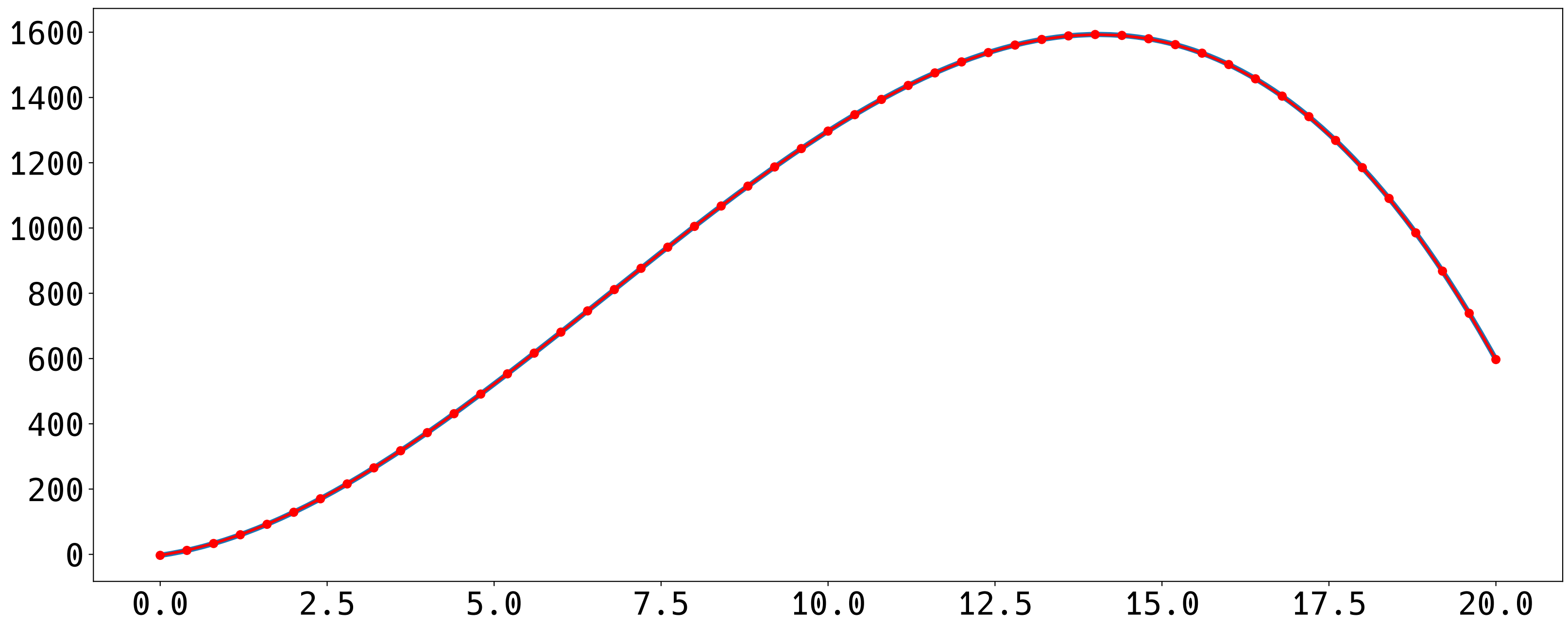


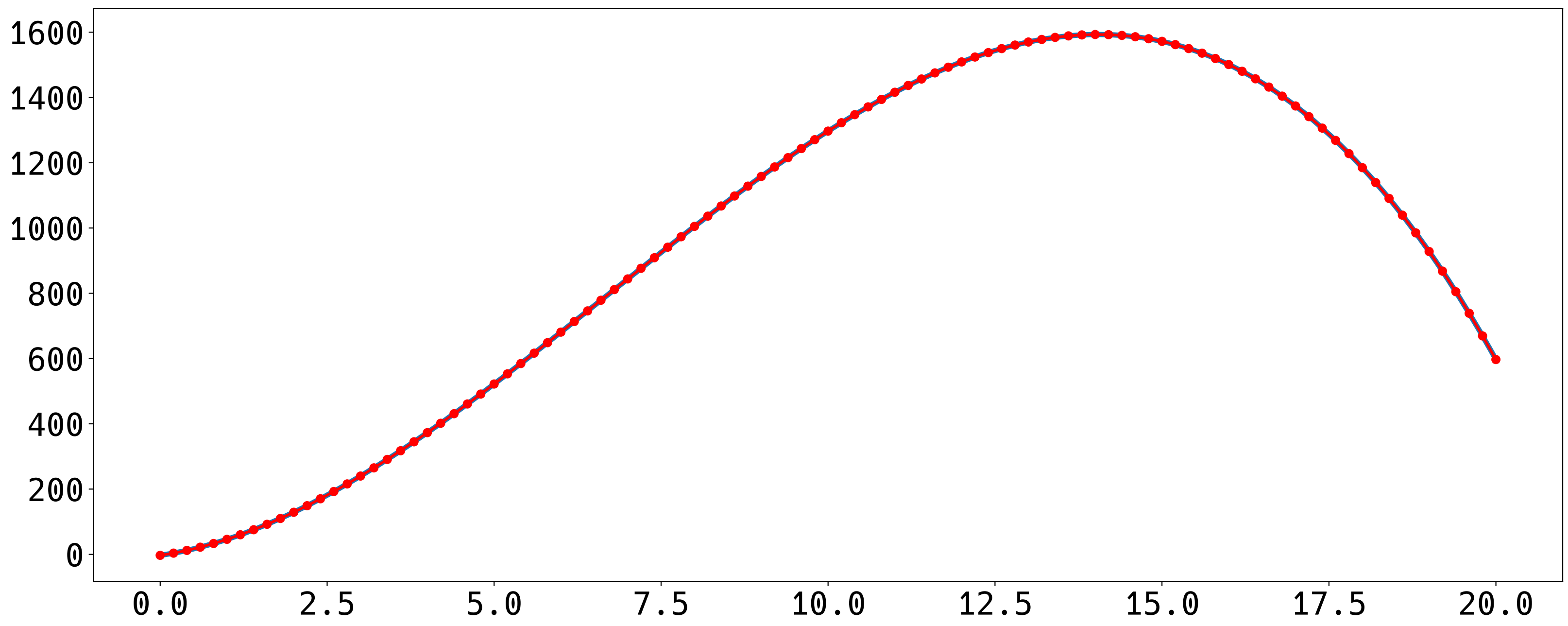
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0


1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0


1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0


1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0


1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0



Дискретизация

Приближённое вычисление длины кривой

Задание 1.2 (`snippet_1_2.ipynb`)

1. Постройте график функции
$$f(x) = -x^3 + 20x^2 + 30x - 3 \quad \text{при } x \in [0; 20].$$

2. Приближённо найдите длину кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, на отрезке $x \in [0; 20]$, с шагом дискретизации $h = 0{,}001$.

In [ ]:

```python
a, b = 0, 20

x_n = [10, 100, 200, 500, 1000]
y_n = []

for n in x_n:
    h = (b - a) / n
    x = np.arange(a, b, h) # np.linspace(a, b, N)  N = int((b - a) / h)
    f = lambda x: -x**3 + 20 * x**2 + 30 * x - 3
    y = [f(v) for v in x]

    l = 0
    for i in range(1, len(x)):
        dx = x[i] - x[i - 1]
        dy = y[i] - y[i - 1]
        dl = sqrt(dx**2 + dy**2)
        l += dl

    y_n.append(l)
```

In [ ]:

```python
plt.plot(x_n, y_n)

```

Задание 1.3

1. Постройте график верхней полуокружности единичной окружности:

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

2. Приближённо найдите длину данной кривой с различными шагами дискретизации $h = 10^{-2}, 10^{-3}, \ldots 10^{-8}$.

3. Какие числа получаются?

Число π с вычислительной точки зрения

Зачем вычислять миллионы десятичных разрядов числа π?

- бенчмарк для тестирования вычислительных способностей суперкомпьютеров

- требование «компьютер должен обладать способностью вычислять не менее k разрядов числа π за n секунд» использовалось в США как удобный критерий отбора заявок на госконтракты по поставке оборудования

С чего всё началось?

- Древний мир:
  - 3 тыс. лет д.н.э.:
$$\pi \approx 3$$
  - 1900-е годы д.н.э. (табличка из Суз, Старовавилонское царство):
$$\pi \approx \frac{25}{8} \approx 3{,}125$$
  - 1700-е годы д.н.э. (египетский папирус Ахмеса, Среднее царство):
$$\pi \approx \frac{256}{81} \approx 3{,}16$$
  - 1-е тысячелетие д.н.э (ведийские тексты «Шатапатха–брахмана»):
$$\pi \approx \frac{339}{108} \approx 3{,}139$$

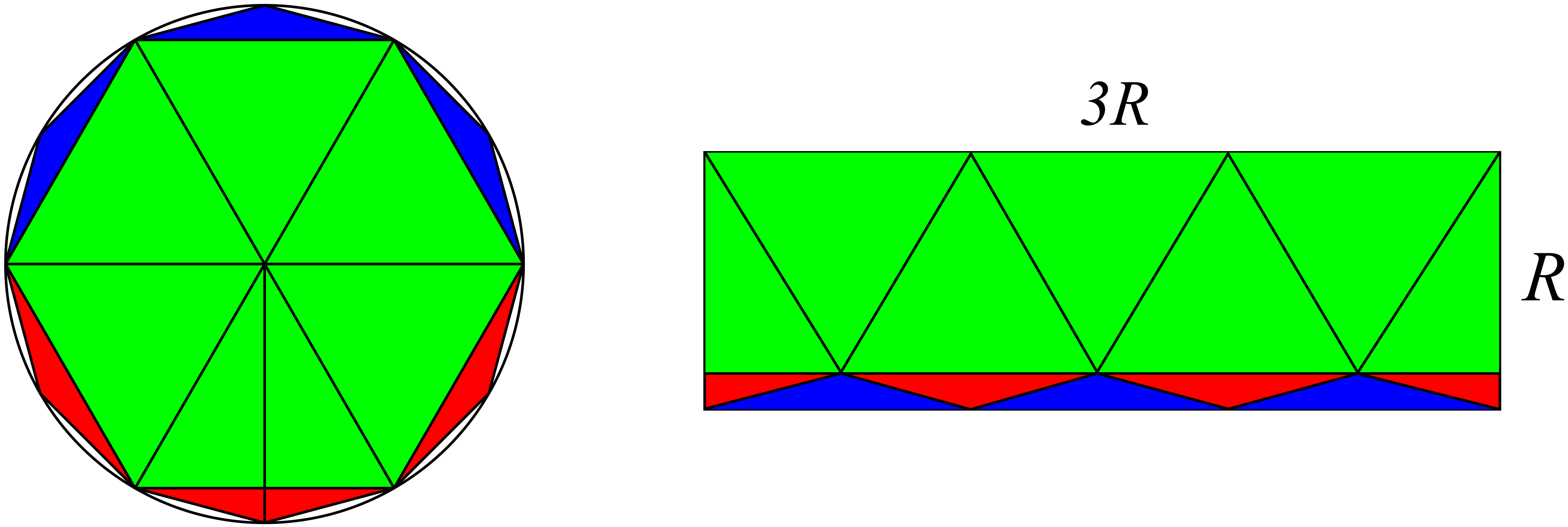
Первые математически обоснованные методы

- 287 - 212 годы д.н.э., Архимед — вписанная и описанная окружности правильного 96-угольника:
$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}, \qquad \pi \approx 3{,}142857142857143$$
- 100 - 170 годы д.н.э, Птолемей — половина периметра 720-угольника:
$$\pi \approx \frac{377}{120} \approx 3{,}141666...$$

Древний Китай

- II век д.н.э., философ и учёный Чжан Хэн:
$$\pi \approx \frac{92}{29} \approx 3{,}1724$$
$$\pi \approx \sqrt{10} \approx 3{,}1622$$

- $\approx$ 265 г. д.н.э. Лю Хуэй из царства Вэй — первый алгоритм для вычисления π с любой степенью точности, основанный на приближении окружности с помощью правильного многоугольника:



$$\pi \approx A_{3072} = 3 \cdot 2^8 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2+1}}}}}}}}} \approx 3,14159$$

Математический анализ

- до $\approx$ 1400 года было известно не более 10 цифр числа π
- открытие рядов (бесконечных сумм) в математическом анализе позволило продвинуться существенно дальше:
  - **Ряд Мадхавы—Лейбница**:

    $$\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \cdots \approx 3{,}14159265359$$

  - **Лудольфово число**, 1596 г.:
    - затратил 10 лет на вычисление π с 20 десятичными цифрами
      - методом Архимеда довёл удвоение n-угольника до $n = 60 \cdot 2^{29}$
  - **Формула Виета**, 1593 г.:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \ldots$$

- **формула Валлиса**, 1655 г.:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots$$

Компьютерная эра

- 1949 г ЭНИАК, 2037 цифр π
- 1961 г. IBM 7090, 100000 цифр π
- 1989 г., братья Чудновские, более 1 млрд цифр π с помощью формулы:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{426880\sqrt{10005}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6k)!(13591409 + 545140134k)}{(3k)!(k!)^3(-640320)^{3k}}$$

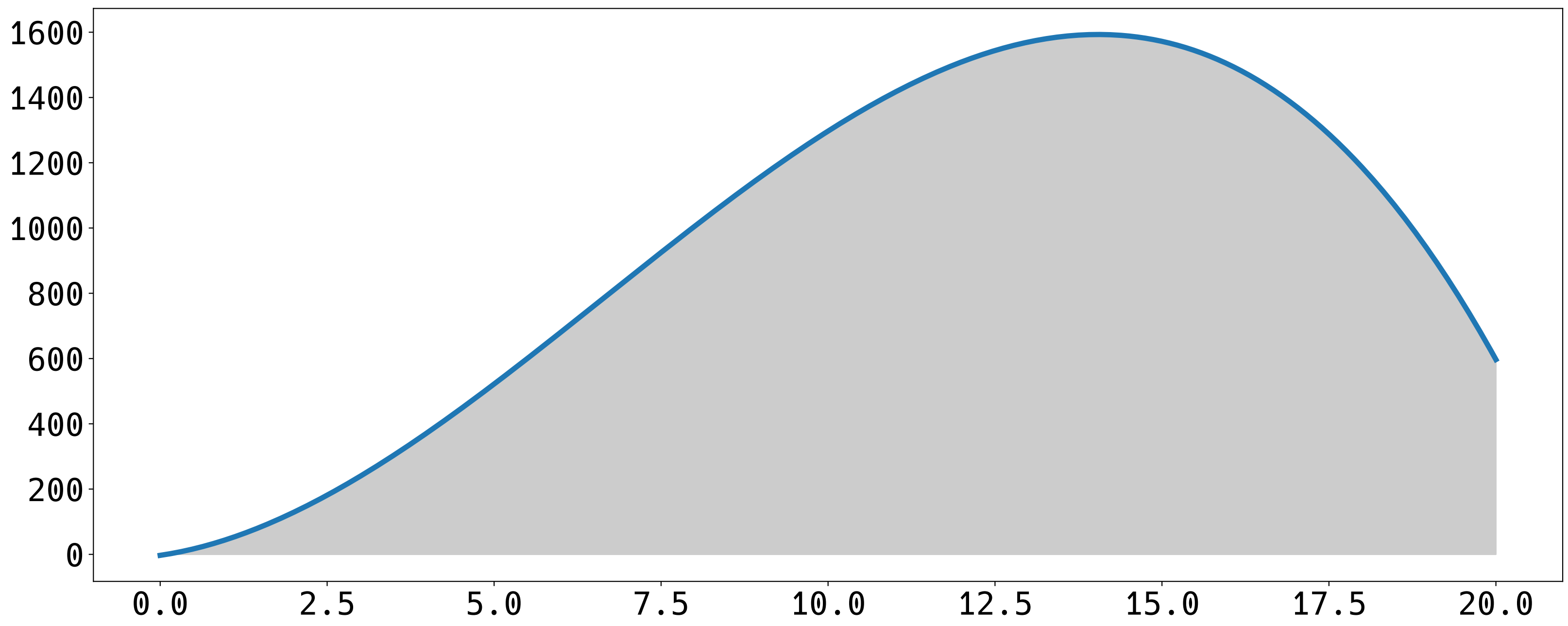
- 14 марта 2019 г., международный день числа π, Google: 31,4 **триллиона** знаков после запятой

Международный день числа π

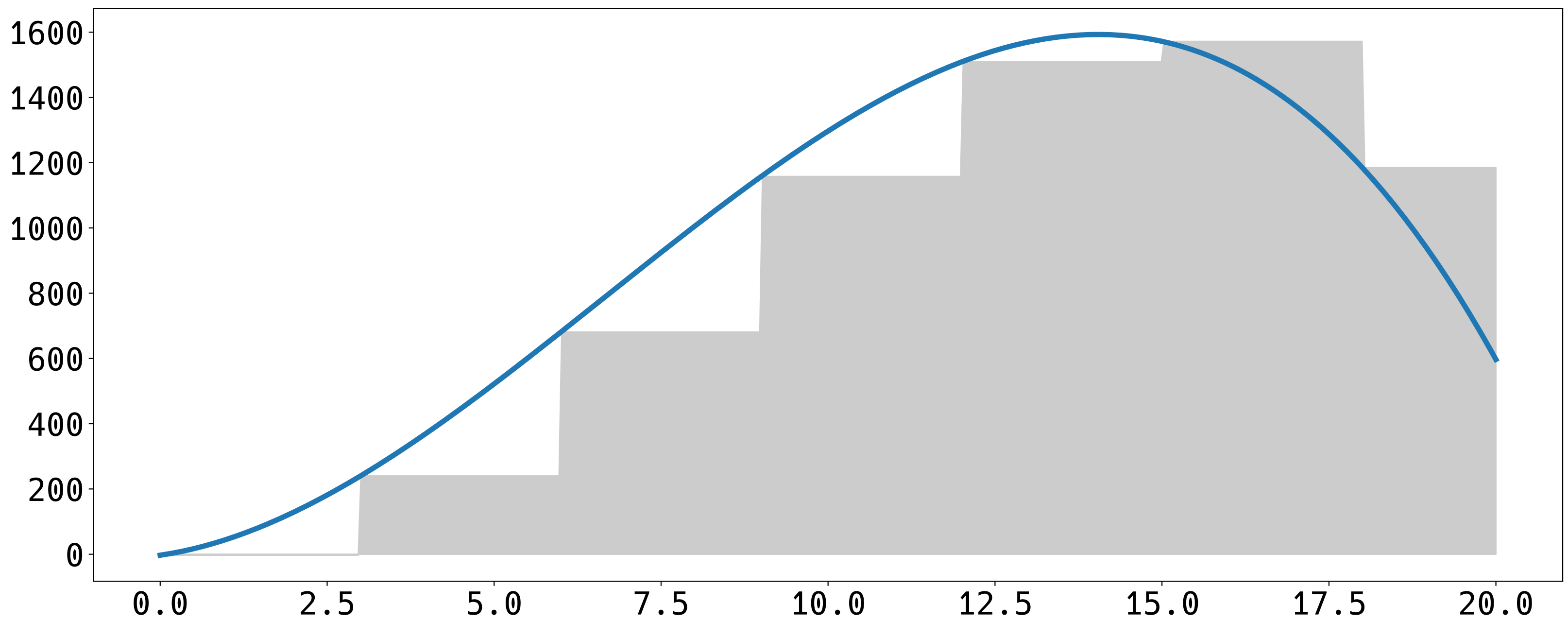
- Почему отмечается 14 марта?

- впервые отмечался в 1988 году, музей Сан-Франциско «Эксплораториум».
- предложил данный праздник ученый-физик – Ларри Шоу.

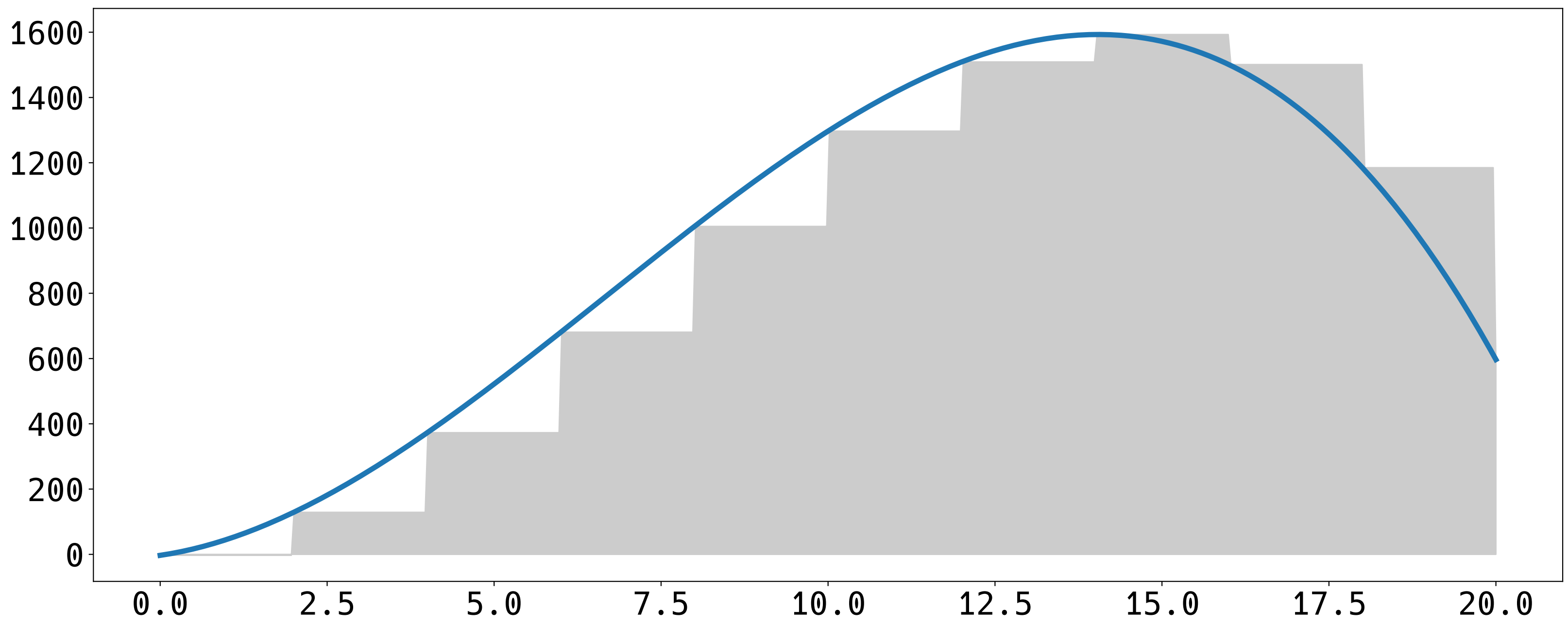
Как вычислить площадь под кривой $y = f(x)$ на отрезке $x \in [a; b]$?



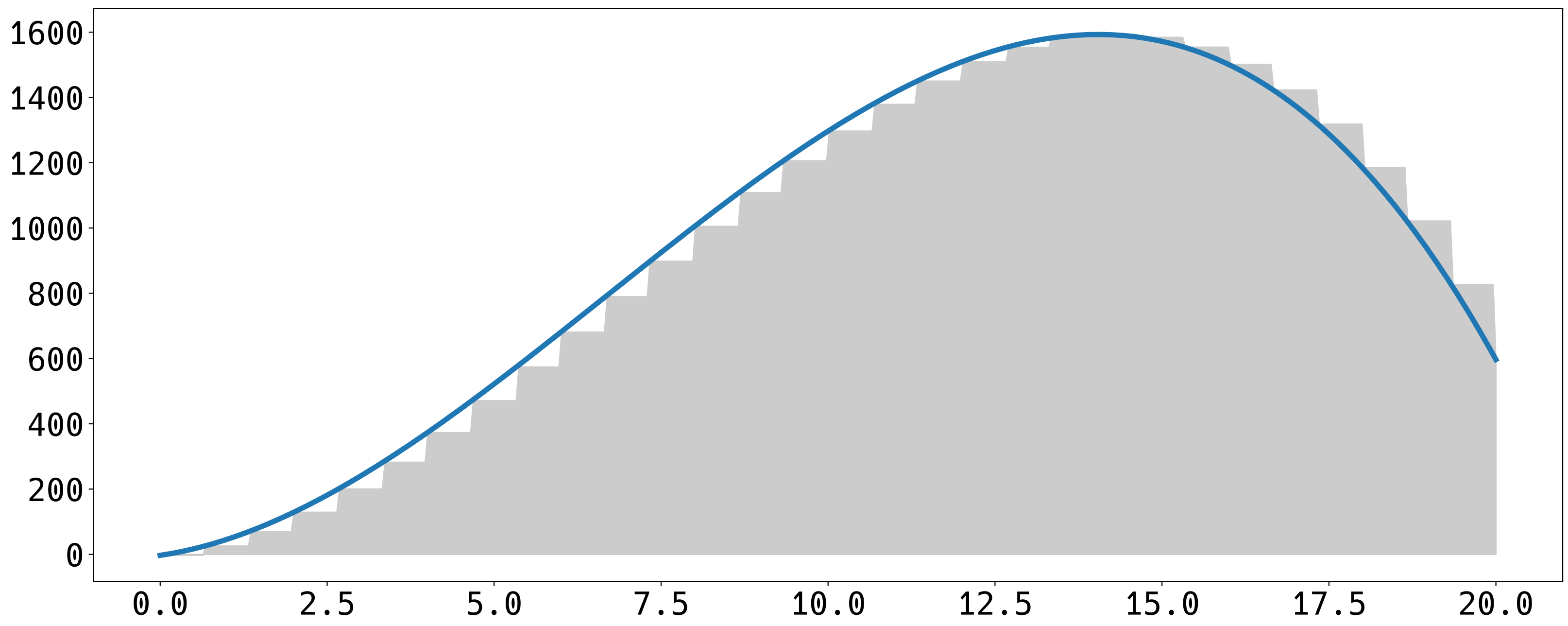
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0

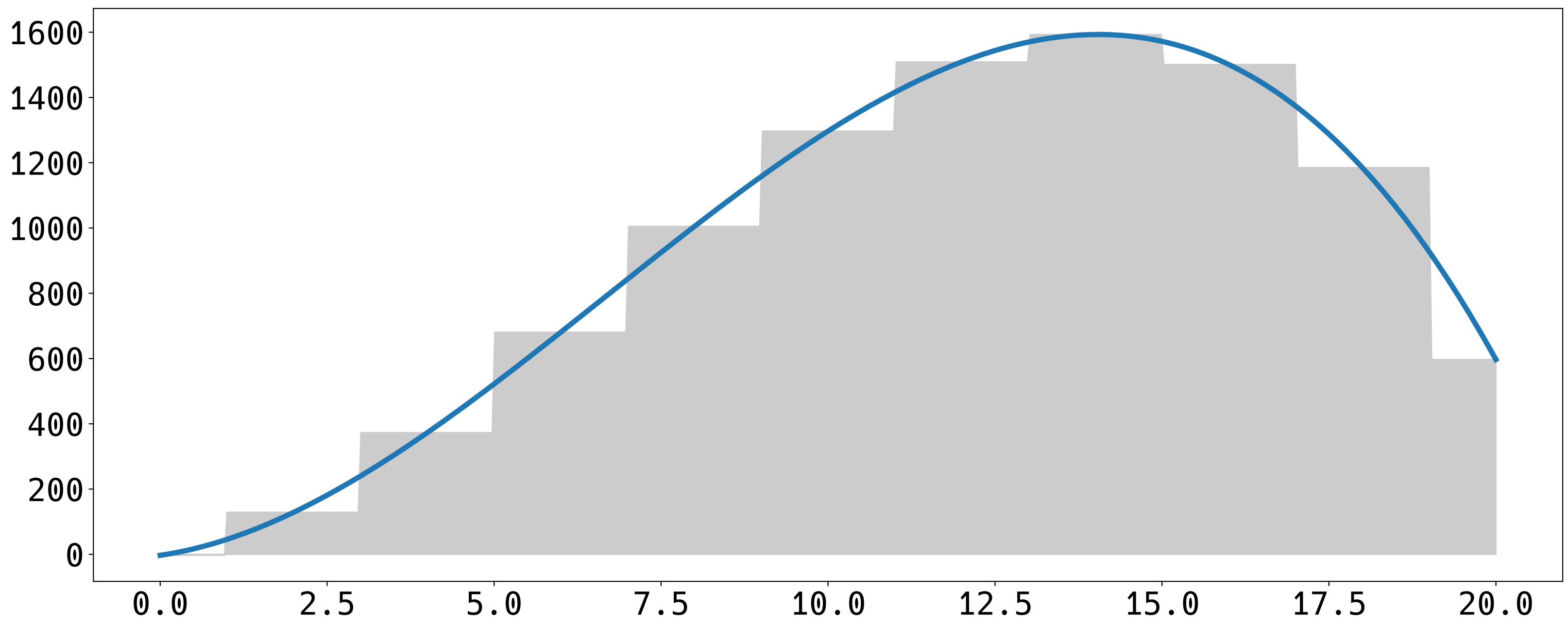


1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0

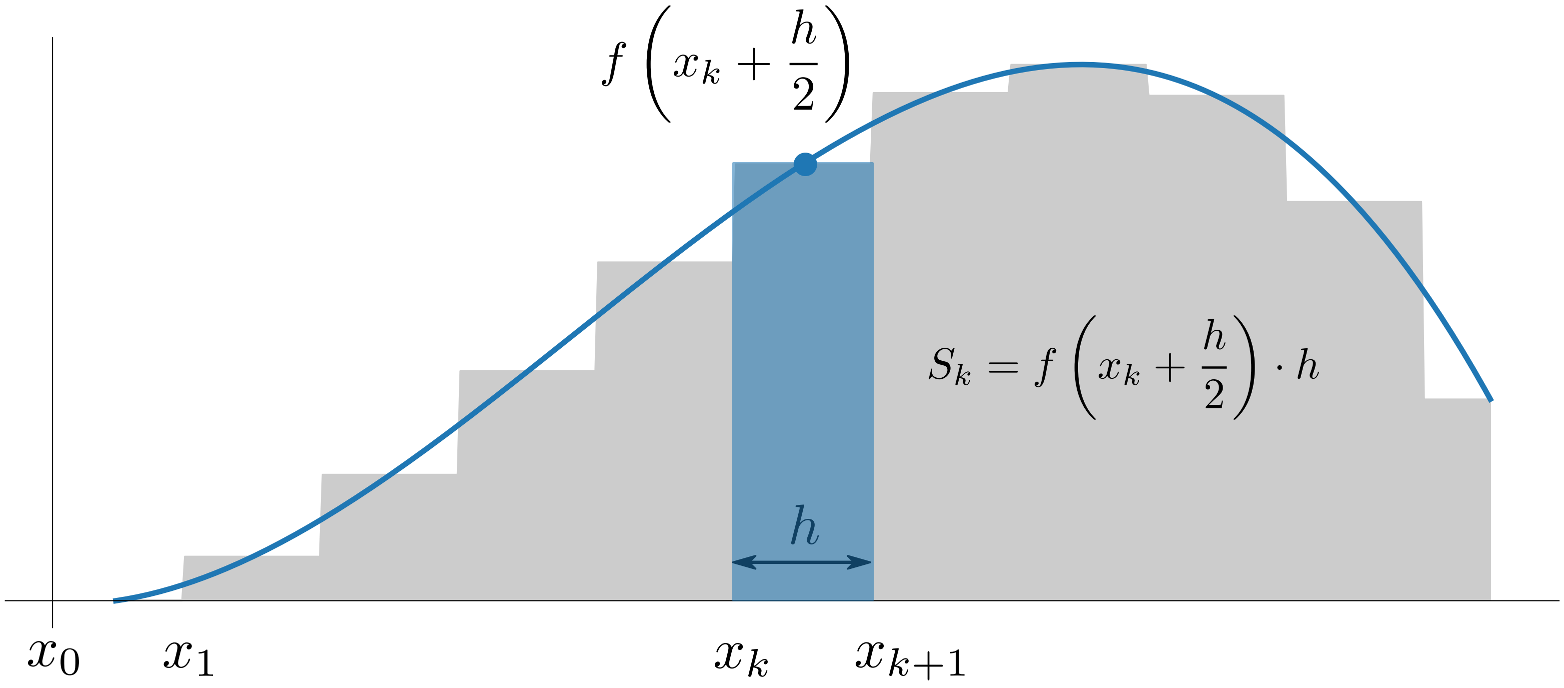


1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0


1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0



Метод прямоугольников



Задание 2.1 (`snippet_2.ipynb`)

Методом прямоугольников приближённо найдите площадь под кривой, заданной уравнением

$$y = -x^3 + 20x^2 + 30x - 3$$

на отрезке $x \in [0; 20]$, с шагом дискретизации $h = 0{,}001$.

Задание 2.2

Методом прямоугольников с шагом дискретизации $h = 10^{-6}$ приближённо найдите площадь под кривой

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

Какое число получилось?

Задание 2.3

Методом прямоугольников с шагом дискретизации $h = 0{,}001$ вычислите площадь между кривыми $y = x^2$ и $y = 4x - x^2$.

Задание 3.1 (`snippet_3.ipynb`)

Методом трапеций (учебник, ч.2, стр. 285) приближённо найдите площадь под кривой, заданной уравнением

$$y = -x^3 + 20x^2 + 30x - 3$$

на отрезке $x \in [0; 20]$, с шагом дискретизации $h = 0{,}001$.

Задание 3.2

Постройте зависимость длины кривой, заданной уравнением

$$y = -x^3 + 20x^2 + 30x - 3$$

вычисленной приближённо на отрезке $[0; 20]$, от количества интервалов разбиения N отрезка $[0; 20]$.

Охарактеризуйте поведение полученного графика с ростом числа N.

Задание 3.3

Постройте зависимость площади под кривой, заданной уравнением

$$y = -x^3 + 20x^2 + 30x - 3$$

вычисленной приближённо на отрезке $[0; 20]$, от количества интервалов разбиения N отрезка.

Охарактеризуйте поведение полученного графика с ростом числа N по отдельности для метода прямоугольников и для метода трапеций. Что вы наблюдаете?