

## 基于稀疏特性的欠定盲信号分离算法<sup>\*</sup>

张苏弦<sup>1</sup>, 刘海林<sup>2\*\*</sup>

(1. 广东工业大学信息工程学院, 2. 广东工业大学应用数学学院, 广州, 510006)

**摘要:** 在源信号在非充分稀疏条件下, 提出了一种改进的两步法欠定盲源分离算法. 与现有的大多数稀疏分量分析算法都是假设源信号是充分稀疏不同, 该算法放宽了源信号的稀疏性. 与此同时, 该算法能够估计出聚类空间的个数, 能够克服源信号个数未知的情况. 模糊划分矩阵的应用更加有利于源信号的分离. 仿真结果表明了该算法的有效性.

**关键词:** 欠定盲分离, 模糊聚类, 稀疏分量分析

**中图分类号:** TP 302.7

## Underdetermined blind source separation algorithm based on sparse representation

Zhang Su-Xian<sup>1</sup>, Liu Hai-Lin<sup>2</sup>

(1. Faculty of Information Engineering, 2. Faculty of Applied Mathematics,  
Guangdong University of Technology, Guangzhou, 510006, China)

**Abstract:** Based on the insufficient sparsity assumption of the source signals, a new algorithm is presented for underdetermined blind source separation. Different with existing sparse component analysis algorithms which assume that source signals are strictly sparse, the proposed algorithm is able to solve sparse component analysis problem in non-strictly condition; meanwhile, the proposed algorithm is also able to detect the clustering spaces number when the sources number is unknown previously. The fuzzy clustering method is also helpful in the second stage. Simulations are given to demonstrate the effectiveness of the proposed algorithm.

**Key words:** underdetermined blind source separation, fuzzy clustering, sparse component analysis

盲源分离(BSS)是信号处理领域一个极富挑战的研究课题. 由于盲分离在语音识别、图像增强、生物医学信号分析以及无线通信等众多领域有着广泛的应用前景, 盲源分离成了信号

处理领域和神经网络领域的研究热点. 欠定盲源分离(UBSS)<sup>[1]</sup>是一种通过矩阵求逆解混方法无法解决的问题.

稀疏分量分析近几年受到很多学者的广泛

\* 基金项目: 国家自然科学基金(60974077), 广东省自然科学基金(10251009001000002)

收稿日期: 2011-01-22

\*\* 通讯联系人, E-mail: hlliu@gdut.edu.cn

关注<sup>[2~4]</sup>,利用信号的稀疏特性进行欠定盲信号分离已经成为一种常用有效的方法,利用信号的稀疏特性进行盲信号分离,主要采用两步法,即:求解过程分两步实现,第一步由混合信号确定混合矩阵,第二步根据确定的混合矩阵估计源信号。

当源信号满足正交性条件时,任意时刻至多只有一个源信号的取值大于零,此时的盲信号模型为充分稀疏模型<sup>[5]</sup>。而实际情况是,同一时刻,源信号不为零的个数可能不止一个,这使得盲分离问题变得棘手。Georgiev *et al.*<sup>[1]</sup>指出只要在任何时刻源信号的非零元数目少于观测信号的数目  $m$ ,盲分离问题是可解的。

源信号个数未知情况下的稀疏分量分析也是目前研究人员遇到的难题之一,如何在源信号个数未知的情况下准确分离出源信号也是显得十分重要。

本文提出了一种具有鲁棒性的两步法进行盲信号分离,给出了混叠矩阵估计的相关证明及算法、源信号恢复的方法和仿真实现。

## 1 基本原理

在稀疏先验知识的条件下,欠定盲信号分离问题可以表示为:

$$x(t) = \sum_{j=1}^k a_j s_j(t) + e(t) \quad (1)$$

$$1 \leq t \leq T, i_j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

这里的  $k$  是指任意时刻不为零的源信号的个数。根据(1)式,假设任意一时刻,平均只有  $k$  个源信号不为零,其余的源信号都较小或趋于零,那么观测信号就分布在  $C_n^k$  个固定的子空间中<sup>[1]</sup>。

通过对观测信号  $x(t)$  的聚类,可以确定出这  $C_n^k$  个子空间,而  $A$  的列向量  $a_j (j = 1 \dots n)$  位于其中  $C_{n-1}^k$  个子空间的交线上,所以通过定位这些交线便可估计出  $A$  的所有列向量。

子空间的聚类可以转换为它们的正交补空间的聚类:在  $m$  维空间中,一个  $k$  维线性子空间可表示为矩阵  $B = [b_1 \dots b_k] \in R^{m \times k} (k < m)$ ,  $W = [w_1 \dots w_r] \in R^{m \times r} (r = m - k)$ , 为  $B$  的一

个  $r$  维正交补空间。其中  $\{b_1 \dots b_k\}$  和  $\{w_1 \dots w_r\}$  是两组组标准单位正交基。 $p = \{p_1 \dots p_m\}$  为  $m$  维空间中的一点,根据点到平面的距离公式,点  $p$  到子空间  $B$  的距离可表示为:

$$d(p, B) = \|W^T p\| = \sqrt{(w_1 \cdot p)^2 + \dots (w_r \cdot p)^2} \quad (2)$$

而与任何  $C_{n-1}^k$  正交补空间同时垂直的向量就是混叠矩阵的一个列向量。

## 2 模糊 K-特征值分解(K-EVD)聚类方法估计混叠矩阵 A

2.1 估计混叠矩阵 A 基于模糊 K-EVD 的聚类方法估计正交补空间已经在<sup>[9]</sup>中给出,这里列出基本步骤:

**Step 1** 估计出  $C_n^k$  个聚类空间所对应的正交补空间

(1) 随机产生  $C_n^k$  个矩阵  $W_j \in R^{m \times r}, j \in \{1 \dots c\}, r = m - k$ 。

(2) 按照(2)式计算观测信号点到各空间的距离。

(3) 更新隶属矩阵  $U$ ,

$$\mu_{ij} = \frac{1}{\sum_{l=1}^c \left[ \frac{d_{ij}}{d_{il}} \right]^{\frac{2}{q-1}}} \quad (3)$$

$q$  为控制模糊度的参数,本文实验中取值  $q = 2$ 。

更新矩阵  $W_j, W_j$  等于  $R_j = \sum_{i=1}^T \mu_{ij}^q x_i x_i^T$  最小  $r$  个特征值所对应特征向量组成的矩阵。

如果  $\|U^{iteration} - U^{iteration+1}\| > \epsilon$ , 返回步骤 2, 直到循环次数结束。

**Step 2** 估计混叠矩阵的列向量

假设  $\bar{W}_i = (W_{i1} \dots W_{ig}) \in R^{m \times (g \times r)}$  为  $g$  个正交补空间矩阵所构成的矩阵。

(1)  $i = 1: C_g^k (g = C_{n-1}^{k-1})$

计算  $R_i = \bar{W}_i \bar{W}_i^T$  的最小特征值和对应的特征向量。

(2) 取所有  $C_n^k$  个特征值中最小的  $n$  个特征值所对应的特征向量构成混叠矩阵  $A$ 。

2.2 聚类空间个数的估计 在估计混叠矩阵时,通常假设源信号数目是已知的,而事实上源

信号数目无法知道,因此对源信号数目的估计对两步法有很重要的影响.

基于<sup>[2]</sup>中定理的拓展,在非充分稀疏条件下,依旧能够估计出源信号的个数.

假设源信号及噪声满足以下条件:

(1) 源信号之间相互独立并且 2 阶距都为  $\delta_s$ .

(2) 噪声之间相互独立并且 2 阶距都为  $\delta_e$ .

(3) 任意时刻,源信号  $s(t)$  与高斯噪声  $e(t)$  相互独立,并且  $e(t)$  的均值为 0,也就是  $E[e^T(t) \cdot s_i(t)] = 0$ .

基于上述条件,假设有  $K$  个聚类集合,其中集合  $i(i = 1 \cdots K)$  用矩阵  $X_i = [x(t_i^1) \cdots x(t_i^{T_i})]$  表示,  $t_i^{T_i}$  为该集合中元素的个数.  $\lambda_{i1} \cdots \lambda_{im}$  表示  $\frac{X_i X_i^T}{T_i}$  的特征值,令  $f_i = \lambda_{i1} + \cdots + \lambda_{im}$ . 则有以下结论: (1) 假设  $B_i = \{b_{i1} \cdots b_{ik}\}$  表示一个正确估计的聚类空间,那么有  $k\delta_s^2 < f_i \leq k\delta_s^2 + \delta_e^2$ . (2) 假设  $B_j$  是一个错误估计的空间,  $f_j \leq (k-1)\delta_s^2 + \delta_e^2$ .

因此,  $f_j = \sum_{r=1}^m \lambda_{jr} < k\delta_s^2 + \delta_e^2 = \sum_{r=1}^m \lambda_{ir} = f_i$ , 当估计错误的列向量越多,  $f_j$  的值就越小. 最终得出以下结论:  $f_1 = f_2 = \cdots = f_n^k > f_{n+1}^k = \cdots = f_K$ . 这意味着在  $f_n^k$  和  $f_{n+1}^k$  之间将存在一定的区分度,而其它指数之间的值是相近的,于是可以从矩阵集合中提取出  $C_n^k$  正确估计的聚类空间,也就是说能够正确估计出源信号的个数.

### 3 源信号的恢复

对于同属于同一个聚类空间的观测信号,可以用下式表示:

$$\begin{cases} x(t) = A_J s_J(t) \\ s_j(t) = 0, j \notin J \end{cases} \quad (4)$$

其中  $J = \{j_1, j_2, \cdots, j_m\} \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ ,  $A_J = (a_{j_1}, \cdots, a_{j_m})$  是由  $J$  作下标的列向量构成的混叠矩阵  $A$  的子矩阵,  $s_J(t) = [s_{j_1}(t), \cdots, s_{j_m}(t)]^T$  是对应于  $J$  的信号矢量. 盲源分离的目的就是找到矩阵  $A_J$  以实现分离. 在混叠矩阵估计阶段,在估计出混叠矩阵  $A$  的同时,也能够获

得隶属矩阵  $U$ . 去除错误估计的空间相对应的行向量,得到一个新的隶属矩阵,这样可以很容易地将观测信号矩阵  $X$  划分为  $C_n^k$  个类. 其中:

$$X_i = \begin{bmatrix} U(i, :) \\ \vdots \\ U(i, :) \end{bmatrix} X, i \in \{1, \cdots, C_n^k\} \quad (5)$$

表示第  $i$  类聚类空间的向量集合.

建立代价函数:

$$f_i(A_J) = d(X_i, A_J), i = 1, \cdots, C_n^k \quad (6)$$

其中,

$$d(X_i, A_J) = \sum_{t=1}^T \sqrt{1 - [(x_i(t) \cdot a_{j_1})^2 + \cdots + (x_i(t) \cdot a_{j_k})^2]}^{[6]}$$

$A_J$  中的列向量都经过单位正交化处理. 该代价函数表示  $X_i$  集合中的点到  $A_J$  的距离,若  $X_i$  中的点属于  $A_J$  列向量所构成的空间,则  $f_i(A_J)$  的值最小. 设  $\bar{J}_i$  为使代价函数  $f_i(A_J)$  最小的  $J$  的估计,则  $\bar{J}_i$  可由下式得出

$$\bar{J}_i = \arg \min_{\substack{j_1, j_2, \cdots, j_k \\ \subset \{1, 2, \cdots, n\}}} (f_i(A_J)) \quad (7)$$

最后得出源向量的估计,对估计出变换域的源信号进行反变换,得到源信号矩阵的估计

$$\begin{aligned} S_{\bar{J}_i} &= (A_{\bar{J}_i}^T A_{\bar{J}_i})^{-1} A_{\bar{J}_i}^T X_{\bar{J}_i} \\ S &= S_{\bar{J}_1} + \cdots + S_{\bar{J}_{C_n^k}} \end{aligned} \quad (8)$$

### 4 仿真实验

为了检验混叠矩阵的估计精度,采用<sup>[6]</sup>中应用的误差评价准则:

$$\xi = \min_{P \in \rho} \|A - \hat{A}P\|_2 \quad (9)$$

而对于源信号也采用<sup>[10]</sup>提出的重构信干比 (signal to interference rate, SIR),即:

$$SIR(s_i, \hat{s}_i) = -10 \log \frac{\|s_i - \hat{s}_i\|_2^2}{\|s_i\|_2^2} \quad (10)$$

其中  $\hat{s}_i$  为  $s_i$  的估计. 由  $SIR(s_i, \hat{s}_i)$  的定义易知  $SIR(s_i, \hat{s}_i)$  的取值越大,分离效果越好. 通常信干比大于 18 dB 时,其分离效果是可以接受的.

例 1 构造 20 000 个样本采样点的 4 个源信号,2 阶稀疏的——即源信号的每一个列向量至多只有 2 个非零元. 随机产生的  $3 \times 4$  阶混叠

矩阵  $A$ , 且它的每一列单位化后如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0.020\ 3 & -0.022\ 0 & 0.995\ 5 & -0.932\ 7 \\ 0.282\ 7 & 0.127\ 2 & 0.079\ 5 & 0.282\ 7 \\ 0.959\ 0 & 0.991\ 6 & -0.051\ 4 & 0.959\ 0 \end{bmatrix}$$

采用本文提出的算法, 仅根据观测信号矩阵  $X$ , 能得到估计的混叠矩阵:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0.995\ 5 & 0.020\ 6 & 0.932\ 9 & -0.023\ 9 \\ 0.079\ 4 & 0.282\ 9 & 0.254\ 2 & 0.126\ 4 \\ -0.051\ 3 & 0.958\ 9 & -0.255\ 1 & 0.991\ 7 \end{bmatrix}$$

通过(14)式计算得到  $\xi = 0.002\ 1$ . 在这个实验中,  $K = 12$ . 如图1所示, 6个指数明显高于其它值, 表明通过对应指数, 能够成功提取出6个聚类空间.

**例2** 构造5个源信号, 源信号矩阵的每一列有3个元素不为0, 随机产生一个  $4 \times 5$  阶

$$A = \begin{bmatrix} 0.566\ 3 & -0.070\ 0 & -0.678\ 3 & 0.742\ 5 & -0.516\ 8 \\ 0.602\ 4 & 0.398\ 9 & -0.157\ 3 & 0.633\ 3 & 0.543\ 2 \\ 0.000\ 1 & 0.676\ 1 & -0.602\ 5 & 0.044\ 4 & 0.684\ 3 \\ 0.562\ 5 & 0.615\ 5 & -0.390\ 1 & -0.213\ 7 & 0.485\ 4 \end{bmatrix}$$

最终得到的估计矩阵如下:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0.566\ 3 & 0.678\ 3 & 0.742\ 5 & 0.517\ 0 & -0.070\ 0 \\ 0.602\ 4 & 0.157\ 3 & 0.633\ 3 & 0.465\ 5 & 0.398\ 9 \\ 0.000\ 1 & 0.602\ 5 & 0.044\ 3 & 0.413\ 0 & 0.676\ 1 \\ 0.562\ 5 & 0.390\ 1 & -0.213\ 7 & 0.587\ 7 & 0.615\ 5 \end{bmatrix}$$

计算得到  $\xi = 3.020\ 4 \times 10^{-4}$ . 本实验相应于聚类集合的指数如图2所示, 显示有10个指数的值高于其它指数值, 表明依然能够聚类出10个空间.

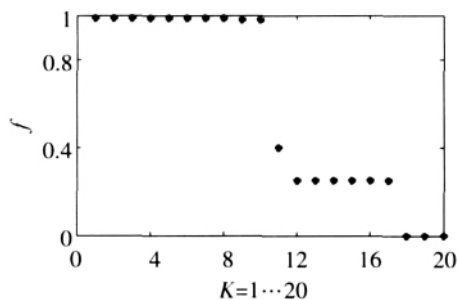


图2 估计20个空间的参照指数

Fig. 2 The indices of 20 estimated subspaces

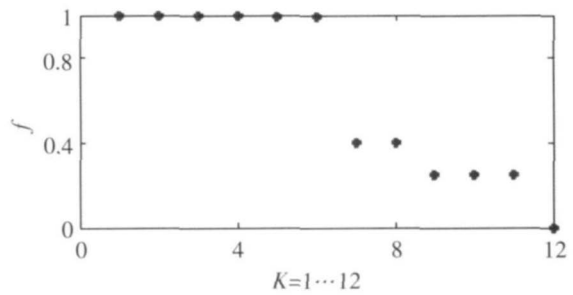


图1 估计12个空间的参照指数

Fig. 1 The indices of 12 estimated subspaces

混叠矩阵  $A$ ,

且它的每一列单位化后如下:

**例3** 对于例1中的源信号, 采用本文算法估计出的源信号与其对应的分离信号之间的信干比  $SIR(s_i, \hat{s}_i)$  依次为 25.283 6、26.330 3、24.092 7、30.039 5, 相应的源信号和恢复信号的对比如图3所示. 需要强调的是恢复的源信号在幅度取值以及顺序方面是不能够保证与源信号是相同的.

**例4** 例2中的源信号, 采用本文算法估计出的源信号与其对应的分离信号之间的信干比  $SIR(s_i, \hat{s}_i)$  依次为 28.495 1、23.127 4、26.815 5、19.937 4、17.535 9, 相应的源信号和恢复信号如图4所示, 结果表明本文算法能够有效分离出源信号.

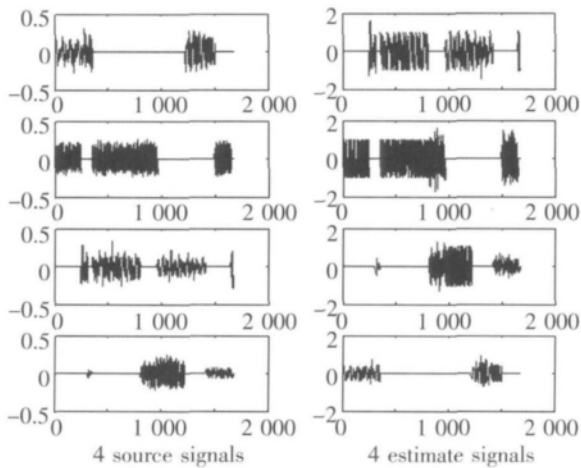


图 3 分离信号与源信号的波形图

Fig. 3 Separated signals and source signals

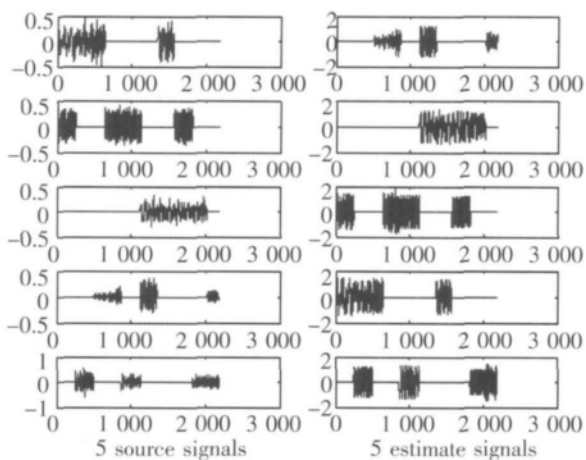


图 4 分离信号与源信号的波形

Fig. 4 5 Separated signals and sources

## 5 总 结

欠定盲分离问题可以采用基于稀疏表示的 2 步法处理解决,因此该问题又称为稀疏分量分析问题。有别于传统的稀疏分量分析,本文提出的算法能够解决非充分稀疏条件下的稀疏分量分析问题;能够在源信号个数未知的情况下正确估计出聚类空间的数目;采用模糊聚类方法能够提高算法的鲁棒性;划分矩阵的应用更划分矩阵的应用更有利于 2 步法中第二步源信号分离的实现。仿真的结果表明该算法的有效性。

## References

- [1] Georgiev P, Theis F, Cichocki A. Sparse component analysis and blind source separation of underdetermined mixtures. *IEEE Transactions of Neural Networks*, 2005, 16 (4): 992~996.
- [2] He Z, Cichocki A, Li Y, *et al.* Khyperline clustering learning for sparse component analysis. *Signal Processing*, 2009, 89: 1011~1022.
- [3] Li Y Q, Amari S, Cichocki A, *et al.* Probability estimation for recoverability analysis of blind source separation based on sparse representation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(7): 3139~3152.
- [4] Pedersen M S, Wang D L, Larsen J, *et al.* Two-microphone separation of speech mixtures. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2008, 19(3): 475~492.
- [5] Jourjine A, Rickard S, Yilmaz O. Blind separation of disjoint orthogonal signals: demixing n sources from 2 mixtures. *Proceedings of IEEE Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 2000, 5: 2985~2988.
- [6] Movahedi N F, Hosein M G, Babaie-Zadeh M, *et al.* Estimating the mixing matrix in sparse component analysis (SCA) based on partial k-dimensional subspace clustering. *Neurocomputing*, 2008, 71(10): 2330~2343.
- [7] He Z, Cichocki A. K-EVD clustering and its applications to sparse component analysis. *The 6<sup>th</sup> International Conference on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation*, Charleston, USA, 2006, Springer 3889: 90~97.
- [8] He Z, Cichocki A. K-subspace clustering and its application in sparse component analysis. *The 14<sup>th</sup> European Symposium on Artificial Neural Networks*. Bruges, Belgium, 2006.
- [9] Zhang S X, Liu H L, Wen J C, *et al.* A new algorithm estimating the mixing matrix for the sparse component analysis. *Proceedings of International Conference on Computation Intelligence and Security'09*, 2009, 25~29.
- [10] Bofill P, Zibulevsky M. Underdetermined source separation using sparse representation. *Signal Processing*, 2001, 81: 2353~2362.