

欠定混叠稀疏分量分析的超平面聚类算法

刘海林, 姚楚君

(广东工业大学应用数学学院, 广州 510006)



摘要: 已有的大多数稀疏分量分析算法都是假定源信号是充分稀疏的, 或经过小波变换、Fourier变换等后是充分稀疏的, 该论文对源信号的稀疏性要求放宽了条件, 提出了一种新的基于超平面聚类的欠定混叠稀疏分量分析算法。算法在观察信号向量集中寻找线性无关的向量组, 经过分析位于同一个超平面的观测信号向量的数目, 确定所有超平面的法向量, 通过求解与聚类后的超平面法向量都正交的向量, 辨识出混叠矩阵 A 的所有列向量。数值仿真试验表明了算法的有效性。

关键词: 稀疏分量分析; 欠定混叠; 稀疏阶; 超平面聚类

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 1004-731X (2009) 07-1826-03

Hyperplane Clustering Algorithm
of Underdetermined Mixing Sparse Component Analysis

LIU Hai-lin, YAO Chu-jun

(Faculty of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

Abstract: Most of sparse component analysis algorithms suppose that source signals are sufficiently sparse or by wavelet packets or FFT. The condition about sparsity of sources was loosened and a new underdetermined mixing sparse component analysis algorithm was proposed based on hyperplane clustering. The algorithm researched linear independent vectors in observed signals, determines all normals of hyperplanes by analyzing the number of observed signal vectors and identifies all column vectors of mixing matrix A through finding the vectors that are orthogonal to the normals of hyperplanes. Numerical simulation illustrates the effectiveness of proposed algorithm.

Key words: sparse component analysis; underdetermined mixtures; sparse of level; hyperplane clustering

引言

在语音图像处理、信息压缩、特征提取, 及生物学上的脑电图(EEG)、脑磁图(MEG)信号分离等研究领域, 往往需要从大量的已知信号中提取出有用的少量的主要的信号。稀疏分量分析(SCA)或稀疏信号表示(SSR)做为解决这类问题的一种重要的方法, 正日益受到有关学者的关注, 并成为一个新的研究热点^[1-7]。稀疏分量分析类似独立分量分析^[8-10], 主要研究下列形式的线性矩阵分解问题:

$$X = AS \quad (1)$$

其中, X 为 $m \times N$ 已知的观测信号矩阵, S 为未知的 $n \times N$ 稀疏源信号矩阵, N 是样本数, $A = (a_{i,j})$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) 为未知的 $m \times n$ 的混合矩阵, 且观测信号的个数 m 少于源信号的个数 n (即欠定混叠情形)。其目标是从已知的观察信号矩阵中估计出混叠矩阵 A 和源信号矩阵 S 。

大多数稀疏分量分析算法都是要求源信号是充分稀疏的(见文献[1,2,4-7]), 即在每个采样时刻只允许一个源信号起主导作用, 而其他源信号作用很小或接近为零, 这时从几何上看, 混合观测信号的散点图(Scatter Plot)呈现有明显的线

性关系, 这时用聚类的方法容易估计出混叠矩阵。但是, 如果在每个采样时刻有两个或两个以上的源信号起主要作用, 观测信号的散点图也不再呈现线性关系, 以上这些算法就会正失效。事实上, 许多实际问题的源信号往往不满足充分稀疏的条件, Georgiev, Theis and Cichocki^[3] 从理论上证明了在源信号不充分稀疏的情况下, 当源信号的稀疏性和混叠矩阵 A 满足一定条件时, 欠定混叠盲源分离问题(1)的矩阵 A 和源信号 S 是可辨识的。Georgiev 等学者的工作从理论解决了在同一时刻有多个源信号起主要作用的欠定稀疏盲分离问题, 这是稀疏分量分析取得的重要成果。遗憾的是目前与该理论相应的算法还不完善, 尽管文献[3]给出辨识混叠矩阵的概念性方法, 但是并没有给出具体的求解混叠矩阵的算法。因而, 在不充分稀疏条件下, 辨识(1)式中的混叠矩阵的快速、有效的算法仍然处于探索中。

本文对于源信号不充分稀疏的情况(即假设在任何采样时刻, 源信号的非零元至多有 $m-1$ 个), 通过在观测信号向量集中寻找线性无关的向量组, 确定一个超平面的法向量, 用这个法向量聚出一个超平面; 对去除属于该超平面的观测信号向量集重复前面的过程, 通过确定超平面的法向量, 最终可聚出所有的超平面。由于每个法向量都对观测信号空间的一个点, 把在同一个平面的点(法向量)做为一个集合, 求出跟该集合元素都正交的向量, 该向量就是混叠矩阵的一个列向量, 类似可辨识出混叠矩阵 A 的所有列向量。

收稿日期: 2007-08-08

修回日期: 2007-11-10

基金项目: 广东省自然科学基金(07001797, 8151009001000044); 广州市科技计划项目 (2007J1-C0501)

作者简介: 刘海林(1963-), 男, 河南安阳市人, 博士后, 教授, 研究方向为盲源分离, 进化计算; 姚楚君, 女, 研究生, 研究方向为盲源分离。

1 超平面的聚类方法

1.1 基本概念

稀疏分量分析问题(1)是在源信号稀疏的假设下来实现混叠矩阵的辨识及源信号的分离。我们先给出源信号的稀疏程度的定义。

定义 1.1、对于一个向量 $V \in R^n$, 如果 V 至少有 k 个非零分量, 那么我们说向量 V 是 k 阶稀疏的。

由上述定义可知, 如果说源信号在 t 时刻的采样 $s(t)$ 是 k 阶稀疏的, 则在时刻 t 源信号 $s(t)$ 最多有 k 个非零分量, 也就是说至少有 $n-k$ 个零分量。

对稀疏分量分析问题(1)式, 我们对混叠矩阵 A 和源信号矩阵 S 做如下假设:

- 1) 混叠矩阵 A 的任何 $m \times m$ 子矩阵都是非奇异的;
- 2) 源信号矩阵 S 的任何列向量都是 $m-1$ 阶稀疏的, 即 S 的任何列向量最多有 $m-1$ 个非零分量;
- 3) 对 $\forall i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ($k=1, 2, \dots, n-m+1$), 至少 \exists 混叠矩阵 $S=(s_{ij})_{n \times N}$ 的 m 个列向量 $(s_{1j_1}, s_{2j_1}, \dots, s_{mj_1})^T, \dots, (s_{1j_m}, s_{2j_m}, \dots, s_{mj_m})^T$, 它们相应于第 i_k 的分量 $s_{i_k j_1} = 0, \dots, s_{i_k j_m} = 0$ ($k=1, 2, \dots, n-m+1$), 并且任意 $m-1$ 个列向量线性无关。

在上述假设下, 根据文献[3]由观测信号矩阵 X 在除去相差列的次序和常数倍的意义下, 可唯一确定混叠矩阵 A 。

1.2 混叠矩阵的辨识方法

在(1)式中, 令 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))^T$ 为 t 时刻的观测信号向量, $s(t) = (s_1(t), s_2(t), \dots, s_n(t))^T$ 为源信号向量, $t=1, 2, \dots, N$, 则 $X = (x(1), x(2), \dots, x(N))$, $S = (s(1), s(2), \dots, s(N))$, 并且(1)式可写为:

$$x(t) = a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t) + \dots + a_n s_n(t), t=1, 2, \dots, N \quad (2)$$

其中 a_j 为 A 的第 j 个列向量 ($j=1, 2, \dots, n$)。由假设条件可知, $s(t)$ 是 $m-1$ 阶稀疏, 并且少于 $m-1$ 个非零元的 S 的列向量数小于 $m-1$ 个(由假设条件 3)可推出)。因而, 对任意时刻 t , $x(t)$ 都在由某 $m-1$ 个列向量 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{m-1}}$ 张成的超平面上。

为了求出这些超平面, 首先确定超平面的法向量。在观测信号矩阵 X 中找出 $m-1$ 个线性无关的列向量组, 求出和这组列向量正交的向量 α , 进一步求出与该向量 α 正交的所有观测信号矩阵 X 的列向量; 若这些列向量的数目小于一个给定的参数, 则另取 $m-1$ 个线性无关的列向量组, 直至找到满足条件的向量 α 。把观测信号矩阵 X 中与向量 α 正交的列向量去掉后, 重复前面步骤可确定出所有超平面的法向量。由假设条件 1)~3)可知 X 的列向量共属于 C_n^{m-1} 个不同的超平面, 因而也求出了同样多的法向量 $\alpha_k (k=1, 2, \dots, C_n^{m-1})$ 。

为了辨识混叠矩阵 A , 只需求出 A 的每个列向量 $a_j (j=1, 2, \dots, n)$ 即可。下面以求 a_1 为例说明如何辨识 A 。根

据假设, 包含 a_1 的超平面都是 C_{n-1}^{m-2} 个, 设相应超平面的法向量为 $\alpha_k (k=1, 2, \dots, C_{n-1}^{m-2})$, 则这些超平面的法向量 $\alpha_k (k=1, 2, \dots, C_{n-1}^{m-2})$ 均与 a_1 正交, 即通过求出与这些法向量 $\alpha_k (k=1, 2, \dots, C_{n-1}^{m-2})$ 都正交的向量就可得到 a_1 。使用类似计算 a_1 的方法可进一步求出 A 的其它列向量 $a_j (j=1, 2, \dots, n)$ 。

2 算法步骤

对于源信号 $s(t)$ 是 $m-1$ 阶稀疏的情况, 混叠矩阵的确定需要有两个步骤。第一步, 确定 C_n^{m-1} 个不同的超平面及其法向量; 第二步, 确定混叠矩阵 A 的列向量 $a_j (j=1, 2, \dots, n)$ 。

为了加快计算机的计算速度, 我们首先将 $x(t)$, ($t=1, 2, \dots, N$) 单位化到一个超球面上, 此时观测信号向量相当于超球面上的一点。又由于每个超平面的法线都有两个方向, 即每个超平面有两个法向量, 但它们只是相差一个符号。因此可将位于下超半球面的观测信号向量点关于原点对称到上超半球面, 即得到新的观测信号为:

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \frac{x(t)}{\|x(t)\|}, x_1(t) \geq 0; \\ -\frac{x(t)}{\|x(t)\|}, x_1(t) < 0 \end{cases} \quad (3)$$

这样的观测信号 $\tilde{x}(t)$ 将落在的 m 维单位超半球面上。

下面给出估计混叠矩阵 A 的具体算法:

步 1. 给定参数 ω (ω 是与观察信号采样点数目有关的参数, 算法仿真中我们取为 50), 令 $k=1$ 。

步 2. 将观测信号 $x(t)$ ($t=1, 2, \dots, N$) 中的零向量去掉, 记剩下的观测信号为 $x(t)$ ($t=1, 2, \dots, N_1, N_1 < N$)。

步 3. 由(3)式单位化和对称化所有的观测信号 $x(t)$ 到上超半球面, 得到新的观测信号向量 $\{\tilde{x}(1), \tilde{x}(2), \dots, \tilde{x}(N_k)\}$ 集合。

步 4. 从 $\{\tilde{x}(1), \tilde{x}(2), \dots, \tilde{x}(N_k)\}$ 中找出 $m-1$ 个线性无关的向量组, 通过解方程组求出和这组向量正交的单位法向量 α_k , 计算出集合 $\{\tilde{x}(1), \tilde{x}(2), \dots, \tilde{x}(N_k)\}$ 中与向量 α_k 正交的观测信号向量的数目 P_k ; 若 $P_k < \omega$, 在集合 $\{\tilde{x}(1), \tilde{x}(2), \dots, \tilde{x}(N_k)\}$ 中找出另外 $m-1$ 个线性无关的向量组, 重复上述过程, 直到找到满足要求的单位法向量 α_k 。

步 5. 把集合 $\{\tilde{x}(1), \tilde{x}(2), \dots, \tilde{x}(N_k)\}$ 中与向量 α_k 正交的观测信号向量从原集合里去掉, 不妨把去掉后的集合记为 $\{\tilde{x}(1), \tilde{x}(2), \dots, \tilde{x}(N_{k+1})\}$, 若 $N_{k+1} > m$, 令 $k=k+1$ 转步 4; 否则, 转步 6。

步 6. 求出所有超平面的法向量 $\alpha_k (k=1, 2, \dots, C_n^{m-1})$, 把法向量 $\alpha_k (k=1, 2, \dots, C_n^{m-1})$ 中 C_n^{m-2} 个线性相关的法向量聚为一类, 共可聚出 n 类; 在每一类中找出跟该类中的所有法向量都正交的向量 $\beta_j (j=1, 2, \dots, n)$, 则 $\beta_j (j=1, 2, \dots, n)$ 就是混叠矩阵 A 的一个列向量。

3 数值仿真

为了验证算法的有效性, 我们通过以下 2 个数值实验比

较了估计混叠矩阵和原始的混叠矩阵。例 1 和例 2 分别考虑的是 4 个源信号和 3 个观测信号 ($n=4, m=3$) 和 5 个源信号和 4 个观测信号 ($n=5, m=4$) 的情况。

例 1. 我们构造了 20000 个样本采样点的 4 个源信号, 2 阶稀疏—即源信号的每一个列向量至少有 2 个非零元(如图 1 所示)。随机产生的 3×4 阶混叠矩阵 A , 且它的每一列单位化后如下:

$$A = \begin{pmatrix} -0.5311 & 0.1021 & 0.3639 & 0.7613 \\ 0.8159 & 0.9923 & 0.6199 & 0.6458 \\ -0.2285 & 0.0698 & 0.6952 & -0.0577 \end{pmatrix}$$

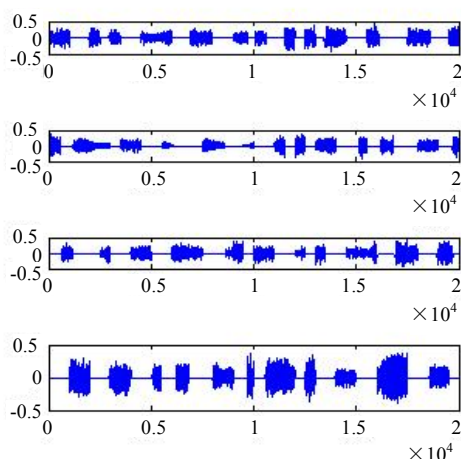


图 1 例 1 中所用的 4 个源信号

混叠信号如图 2 所示。采用本文提出的算法, 仅根据观测信号矩阵 X , 我们能得到估计的混叠矩阵,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -0.7613 & 0.5311 & 0.3639 & 0.1021 \\ -0.6458 & -0.8159 & 0.6199 & 0.9923 \\ 0.0577 & 0.2285 & 0.6952 & 0.0698 \end{pmatrix}$$

将所得的估计混叠矩阵 \hat{A} 与原混叠矩阵 A 的各列进行比较, 该算法能成功地估计出混叠矩阵。

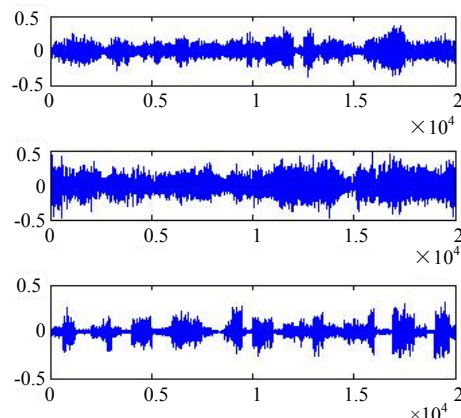


图 2 例 1 中的混叠信号

例 2. 为了考察在多维空间下的算法效果, 我们构造了满足算法条件的 5 个 2 阶稀疏的源信号。随机产生的 4×5 阶混叠矩阵 A , 且它的每一列单位化后如下

$$A = \begin{pmatrix} 0.5540 & -0.0079 & -0.2753 & -0.2252 & -0.8643 \\ -0.0384 & -0.1922 & -0.9132 & 0.3826 & -0.3991 \\ -0.7800 & 0.9020 & -0.1060 & 0.3114 & -0.2025 \\ -0.2884 & -0.3866 & 0.2811 & -0.8402 & -0.2295 \end{pmatrix}$$

通过本算法, 得到估计矩阵

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -0.5540 & -0.0079 & -0.2252 & -0.8643 & -0.2753 \\ 0.0384 & -0.1922 & 0.3826 & -0.3991 & -0.9132 \\ 0.7800 & 0.9020 & 0.3114 & -0.2025 & -0.1060 \\ 0.2884 & -0.3866 & -0.8402 & -0.2295 & 0.2811 \end{pmatrix}$$

将所得的估计混叠矩阵 \hat{A} 与原混叠矩阵 A 的各列进行比较, 该算法仍然能成功地估计出混叠矩阵。

4 结论

本文研究了源信号不充分稀疏情况下的欠定混叠盲分离问题, 提出了一种新的估计混叠矩阵 A 的算法。算法通过在观测信号向量集中寻找线性无关的向量组, 经过分析位于同一个超平面的观测信号的数目, 确定所有超平面的法向量, 根据 C_{n-1}^{m-2} 个法向量的线性相关性进一步求出混叠矩阵的所有列向量。数值仿真显示了算法的有效性。

参考文献:

- [1] Hai-lin Liu, Jia-xun Hou. A new approach to underdetermined blind source separation using sparse representation [C]// Rough Sets and Knowledge Technology, Second International Conference, RSKT 2007, Toronto, Canada, May, 2007, Proceedings. Lecture Notes in Computer Science 4481. Germany: Springer, 2007: 276-283.
- [2] 高鹰, 谢胜利, 许若宁, 等. Ying Gao 基于粒子群优化算法的稀疏信号盲分离[J]. 系统仿真学报, 2006, 18(8): 2264-2266. (GAO Ying, XIE Shengli, XU Ruoning, LI Zhaohui. Blind Sparse Source Separation Based on Particle Swarm Optimization [J]. Journal of System Simulation (S1004-731X), 2006, 18(8): 2264-2266.)
- [3] P G Georgiev, F Theis, A Cichocki. Sparse component analysis and blind source separation of underdetermined mixtures [J]. IEEE Transactions on Neural Networks (S1045-9227), 2005, 16(4): 992-996.
- [4] Z S He, S L Xie, Y L Fu. Sparse representation and blind source separation of ill-posed mixtures [J]. Science in China Series F-Information Science (S1009-2757), 2006, 49(5): 639-652.
- [5] M S Lewicki, T J Sejnowski. Learning overcomplete representations [J]. Neural computation (S0899-7667), 2000, 12: 337-365.
- [6] Y Q Li, A Cichocki, S Amari. Analysis of sparse representation and blind source separation [J]. Neural computation (S0899-7667), 2004, 16(6): 1193-1234.
- [7] Y Q Li, S Amari, A Cichocki, D W C Ho, S L Xie. Underdetermined blind source separation based on sparse representation [J]. IEEE Transactions on Signal Processing: (S1053-587X), 2006, 54(2): 423-437.
- [8] 刘海林. 基于广义特征值的病态混叠盲源分离算法[J]. 电子学报, 2006, 11: 2072-2075. (Hai-lin Liu. Blind separation of ill-condition mixed sources based on generalized eigenvalue [J]. ACTA ELECTRONICA SINICA (S0372-2112), 2006, (11): 2072-2075.)
- [9] 牛龙, 马建仓, 王毅, 等. Long Niu 一种新的基于峰度的盲源分离算法[J]. 系统仿真学报, 2005, 17(1): 185-188.
- [10] 何文雪, 王林, 谢剑英. Wen-xue He 一种非平稳卷积混合信号的自适应盲分离算法[J]. 系统仿真学报, 2005, 17(1): 196-198.