Lista 1 – Cálculo Numérico

Melina Almeida

Prof° Rogerio Negri

Questão 1a

245	2	1
1172	2	0
586	2	0
293	2	1
146	2	0
73	2	1
36	2	0
18	2	0
9	2	1
4	2	0
2	2	0
1	2	1

$(245)_{10} = (100100101001)_2$

Questão 1b

0,1217	0,2434	0,4868	0,9736	0,9472	0,8944	0,7888	0,5776
x2	x2	x2	x2	x2	x2	x2	x2
0,2434	0,4868	0, 9736	1,9472	1,8944	1,7888	1,5776	1,1552

$(0,1217)_{10} = (00011111100...)_2$

Questão 2a

$(101101)_2 = (1 \times 2^5) + (0 \times 2^4) + (1 \times 2^3) + (1 \times 2^2) + (0 \times 2^1) + (1 \times 2^0)$

$(101101)_2 = (45)_{10}$

Questão 2b

$(0{,}111111101)_2 = (1 \times 2^{-1}) + (1 \times 2^{-2}) + (1 \times 2^{-3}) + (1 \times 2^{-4}) + (1 \times 2^{-5}) + (1 \times 2^{-6}) + (1 \times 2^{-7}) + (1 \times 2^{-9})$

$(0{,}111111101)_2 = (0{,}994140625)_{10}$

Questão 3

Detalhes do enunciado:

-> Ponto flutuante de 4 dígitos;

-> Números exatamente representados (Erros relativo e absoluto individuais = 0)

-> Acumulador de precisão dupla (8 dígitos de pto flutuante)

$x = 0{,}7237 \times 10^4$ $y = 0{,}2145 \times 10^{-3}$ $z = 0{,}2585 \times 10^1$

a) x-y-z

<u>Passo 1:</u> Deixar todos os números com as mesmas casas decimais (no caso, com 10^4).

$$x = 0{,}72370000000 \times 10^4$$
$$y = 0{,}00000002145 \times 10^4$$
$$z = 0{,}00025850000 \times 10^4$$

<u>Passo 2:</u> Subtrair os valores de x e y primeiro (chamando de u).

$$x = 0{,}72370000000 \times 10^4$$
$$y = 0{,}00000002145 \times 10^4$$

$$u = 0,72369997415 \times 10^4$$

$$u' = 0,72369997 \times 10^4$$

Passo 3: Agora, ajustar para 4 casas decimais.

$$u' = 0,72369997 \times 10^4 \longrightarrow u' = 0,7236$$

Porém, $g = 0,00009997 \times 10^4 = 0,9997 > 0,5$. Por isso, podemos realizar um truncamento. Essa mudança gera um erro de operação.

$$u' = 0,7236 \times 10^4$$

Passo 4: Calcular o erro relativo de u' (truncamento).

$|ER_{x-y}| = |ER_{op}|$ (os erros relativos de x e y são 0 pois são exatamente representados)

$$|ER_{x-y}| < 10^{-3}$$

Passo 5: Subtrair z de u' (chamar de v).

$$\begin{array}{rl} u' = & 0,72370000 \times 10^4 \\ - \; z = & 0,00025850 \times 10^4 \\ \hline v = & 0,72344140 \times 10^4 \end{array}$$

Passo 6: Agora, ajustar para 4 casas decimais.

$$v' = 0,7234 \times 10^4$$

Como $g = 0,00004140 \times 10^4 = 0,4140 < 0,5$, não existe a necessidade de ajustar o valor.

Ou seja, $x-y-z = 0,7234 \times 10^4$

Passo 7: Calcular o erro relativo da operação.

$$|ERx\text{-}y\text{-}z| = (ERu \times \frac{u}{u\text{-}z}) + Erop$$

$$|ERx\text{-}y\text{-}z| = (10^{-3} \times \frac{0{,}7237 \times 10^4}{0{,}7234 \times 10^4}) + 10^{-3}$$

$$|ERx\text{-}y\text{-}z| < 1{,}0002 \times 10^{-3}$$

b. (x × y) / z

Passo 1: Multiplicar os valores de x e y primeiro (chamando de u), ajustando a mantissa.

$$x = 0{,}72370000000 \times 10^4$$

$$y = 0{,}00000002145 \times 10^4$$

$$u = 0{,}00015523365 \times 10^4$$

Passo 2: Agora, ajustar para 4 casas decimais, considerando a precisão dupla.

$$u = 0{,}00001552 \times 10^4$$

Não foi necessário realizar ajustes de truncamento ou arredondamento.

Passo 3: Por fim, dividir u por z, chamando de v.

$$u = 0{,}00001552 \times 10^4$$

$$z = 0{,}00025850 \times 10^4$$

$$v = 0{,}60038684$$

Passo 4: Ajustar o número de casas de v.

$$v = 0{,}6003$$

Passo 5: Calcular o erro relativo (visto que não tivemos erros de arredondamento/truncamento e os números são exatamente representados pela máquina).

$$|ER(x \times y)/z| = Erop$$

$$|ERx\text{-}y\text{-}z| < 10^{-3}$$

Questão 4

Detalhes do enunciado:

-> x: número real;

-> $\bar{x}$: número obtido pela máquina através de um arredondamento (arred);

-> Obter os limites superiores para os erros relativos de:

$$u = 2\bar{x} \qquad\qquad w = \bar{x} + \bar{x}$$

Observações:

-> Erro Relativo por Arredondamento: $|ERx| < 0{,}5 \times 10^{(-t+1)}$

-> Erro Relativo da Multiplicação: $|ERxy| = ERx + ERy + ERop$

-> Erro Relativo da Soma: $|ERx{+}y| = (ERx \times \frac{x}{x+y}) + (ERy \times \frac{x}{x+y}) + ERop$

a. $u = 2\bar{x}$

$$|ER2x| = ER2 + ERx + ERarred$$

$$|ER2x| = 0 + ERarred + ERarred$$

$$|ER2x| = 2 \times ERarred$$

$$|ER2x| = 2 \times 0{,}5 \times 10^{(-t+1)}$$

$$|ER2x| = 10^{(-t+1)}$$

b. $w = \bar{x} + \bar{x}$

$$|ERx{+}x| = (ERx \times \frac{x}{x+x}) + (ERx \times \frac{x}{x+x}) + Erop$$

$$|ERx{+}x| = (ERx \times \frac{1}{2}) + (ERx \times \frac{1}{2}) + ERarred$$

$$|ERx{+}x| = ERarred + ERarred$$

$$|ERx{+}x| = 2ERarred$$

$$|ERx{+}x| = 2 \times 0{,}5 \times 10^{(-t+1)}$$

$$|ERx{+}x| = 10^{(-t+1)}$$

Questão 5

Detalhes do enunciado:

-> x e y: números reais;

-> $\bar{x}$ e $\bar{y}$: números obtidos pela máquina através de um arredondamento (arred);

-> Obter os limites superiores para os erros relativos de:

$$u = 2\overline{xy} \qquad\qquad w = (\bar{x} + \bar{x} + \bar{x})\bar{y}$$

Observações:

-> Erro Relativo por Arredondamento: $|ERx| < 0{,}5 \times 10^{(-t+1)}$

-> Erro Relativo da Multiplicação: $|ERxy| = ERx + ERy + ERop$

-> Erro Relativo da Soma: $|ERx+y| = (ERx \times \frac{x}{x+y}) + (ERy \times \frac{x}{x+y}) + ERop$

a. $u = 2\overline{xy}$

Passo 1: Chamar $w = \overline{xy}$ e resolvê-lo primeiro.

$$|ERxy| = ERx + ERy + ERarred$$

$$|ERxy| = ERarred + ERarred + ERarred$$

$$|ERxy| = 3ERarred$$

Passo 2: Resolver 3w.

$$|ER3w| = ER3 + ERw + ERarred$$

$$|ERxy| = 0 + 3ERarred + ERarred$$

$$|ERxy| = 4ERarred$$

$$|ERxy| = 2 \times 10^{(-t+1)}$$

b. $w = (\bar{x} + \bar{x} + \bar{x})\bar{y}$

Passo 1: Chamar $w = \bar{x} + \bar{x}$ e resolvê-lo primeiro.

$$|ERx+x| = (ERx \times \frac{x}{x+x}) + (ERx \times \frac{x}{x+x}) + Erop$$

$$|ERx+x| = (ERx \times \frac{1}{2}) + (ERx \times \frac{1}{2}) + ERarred$$

$$|ERx+x| = ERarred + ERarred$$

$$|ERx+x| = 2ERarred$$

Passo 2: Resolver $m = w + \bar{x}$.

$$|ERw+x| = (ERw \times \frac{w}{x+w}) + (ERx \times \frac{x}{x+w}) + Erop$$

$$|ERw+x| = \frac{8}{3} ERarred$$

Passo 3: Resolver $m \times y$.

$$|ERmy| = ERm + ERy + Erop$$

$$|ERmy| = \frac{8}{3} ERarred + ERarred + ERarred$$

$$|ERmy| = \frac{7}{3} \times 10^{(-t+1)}$$

Ou seja, $|ER2xy| > |ER(x+x+x)y|$

Questão 6

Detalhes do enunciado:

-> $\beta = 10$ (implica que o sistema é decimal);

-> $t = 4$ (precisão);

-> $l = -5$;

-> $u = 5$.

a. Menor e maior número em módulo.

Em módulo, temos os números limites determinados pelos detalhes do enunciado sobre a mantissa e o intervalo dos expoentes (-5;5). São eles:

$$0{,}1000 \times 10^{-5} \quad e \quad 0{,}9999 \times 10^{5}$$

b. Representar o número 73758 em truncamento e em arredondamento.

Passo 1: Ajeitar a mantissa.

$$73758 \to 0{,}73758 \times 10^{2}$$

Passo 2: Arredondamento (a máquina só suporta 4 dígitos). Essa mudança gera erro de operação.

$$0{,}73758 \times 10^2$$

$$0{,}7376 \times 10^2$$

<u>Passo 3:</u> Truncamento.

$$0{,}73758 \times 10^2$$

$$0{,}7375 \times 10^2$$

c. Sendo a = 42453 e b = 3. Fazer a + b.

<u>Passo 1:</u> Alinhar as casas decimais e somar.

$$\begin{array}{r} 0{,}424530 \times 10^5 \\ \underline{0{,}000003 \times 10^5} \\ 0{,}424533 \times 10^5 \end{array}$$

<u>Passo 2:</u> Arredondar.

$$0{,}4245 \times 10^5$$

d. $S = 42450 + \sum_{k=1}^{10} 3$

<u>Passo 1:</u> Começar o procedimento para k=1.

$$\begin{array}{r} 0{,}424530 \times 10^5 \\ \underline{0{,}000003 \times 10^5} \\ 0{,}424533 \times 10^5 \end{array}$$

Arredondando, temos $0{,}4245 \times 10^5$

O resultado da primeira soma será $0{,}4245 \times 10^5$. Com o passar do somatório, continuaremos arredondando o número para baixo, fazendo com que a resposta sempre seja $0{,}4245 \times 10^5$.

Questão 7. $S = 10000 - \sum_{k=1}^{n} x$

a. n = 100000 e x = 0,1

```
x = 0;
soma = 0;

for i=1:1:100000
  x = x + 0.1;
endfor

soma = 10000 – x;
```

b. n = 8000 e x = 0,125

```
x = 0;
soma = 0;

for i=1:1:8000
  x = x + 0.125;
endfor

soma = 10000 – x;
```

Questão 8

```
x = 0.1;
y = 0.05;
t = 0;

while x != y
  x = y;
  y = y/2;
  t = t+1;
endwhile

printf("\n%d digitos de precisão", t);
```