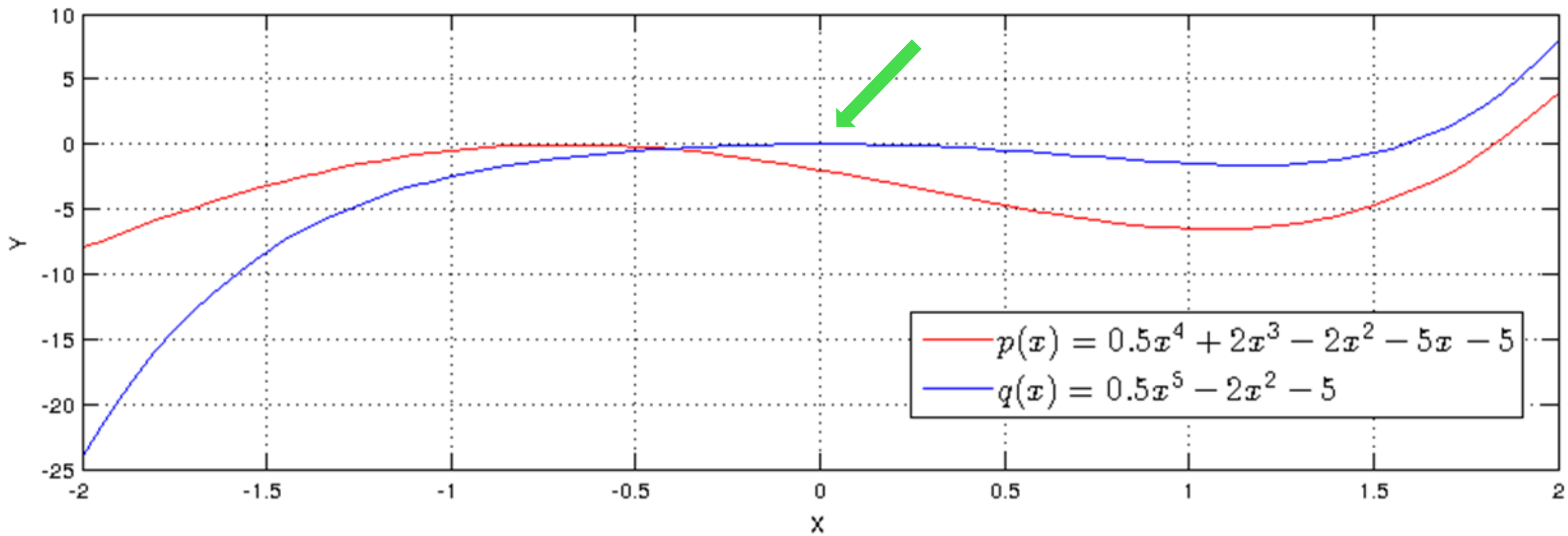
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus de São José dos Campos
Instituto de Ciência e Tecnologia

Solução de Equações (zeros de funções)

Prof. Dr. Rogério Galante Negri

Zeros de funções

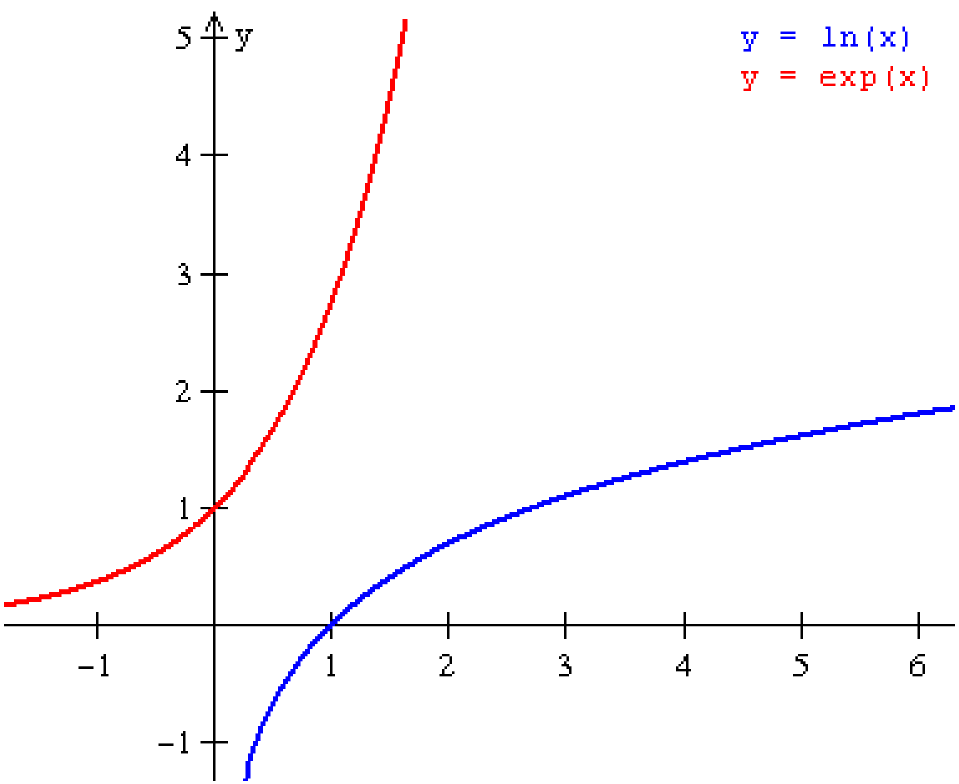
- São frequentes os problemas que exigem o cálculo de <u>zeros da funções</u>
- Técnicas numéricas consistem em aproximações <u>iterativas</u>
- Atenção especial (no CN) é dada às funções polinomiais, devido sua importâncias nas aplicações práticas



- Alguns teoremas e definição são importantes antes de começarmos...

Zeros de funções

- **Definição:** Seja $f[a,b] \to \mathbb{R}$ e c $\in [a,b]$ é zero (ou raiz) de f se $f(c) = 0$
- **Teorema:** Seja $f(x)$ contínua em $[a,b]$, se $f(a)f(b) < 0$, então existe ao menos um $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$.

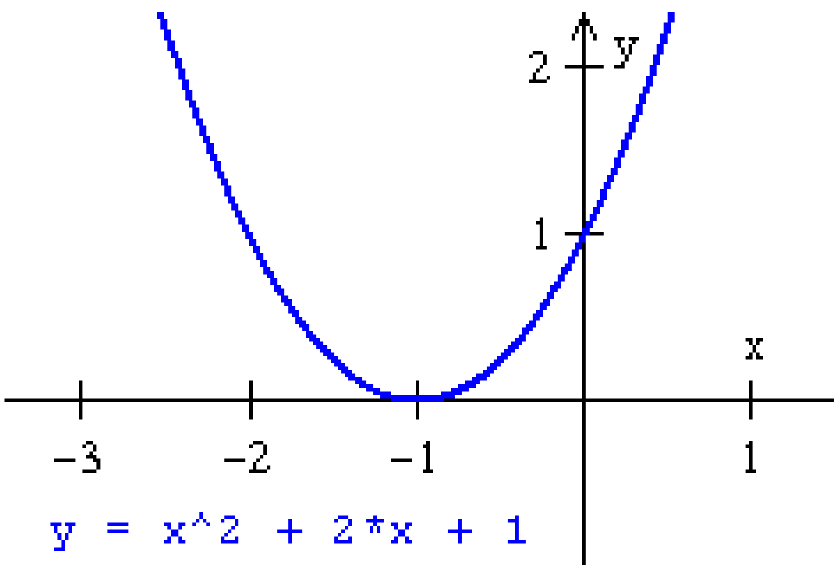


- No intervalo $(0,\infty)$:
  - $f(x) = \ln(x)$ possui raiz
  - $g(x) = \exp(x)$ não possui raiz

Zeros de funções

- **Definição:** um ponto $c \in [a, b]$ é raiz de multiplicidade m da equação $f(x) = 0$ se $f(x) = (x - c)^m g(x)$ com $g(x) \neq 0$ em $[a, b]$

- **Exemplo:** em $f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 = 0$, temos que $c = -1$ é raiz de multiplicidade 2



Zeros de funções

- Formas de obter as raízes:
  - Traçando o gráfico da função e procurando pontos de intersecção com o eixo x (o que pode não ser simples)
  - Rearranjar a equação $f(x) = 0$ como $y_1(x) = y_2(x)$

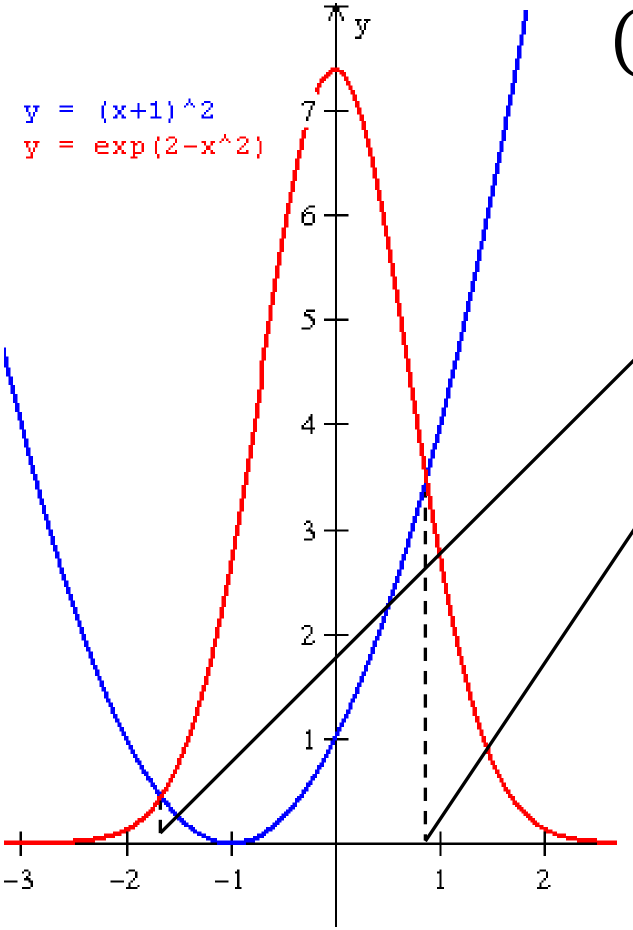
- Na "estratégia" $y_1(x) = y_2(x)$ devemos ter y_1 e y_2 como funções com gráficos mais simples do que f
- As raízes de f equivalem aos pontos onde y_1 e y_2 se interceptam

Vejamos este comportamento graficamente!

Exemplo

- Seja $f(x) = (x+1)^2 e^{(x^2-2)} - 1$ e queremos verificar onde $f(x) = 0$
- Rearranjando a expressão e traçando os gráficos:

$$(x+1)^2 = e^{(2-x^2)}$$



Raiz em $(-2,-1)$

Raiz em $(0,1)$

Mas qual o valor c tal que $f(c) = 0$?

Exemplo (continuação)

- Tabelando valores de $f(x) = (x+1)^2 e^{(x^2-2)} - 1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4383.5	6.4	-1.0	-0.9	0.5	65.5	17545.1

- Pelo **Teorema** definido anteriormente, podemos afirmar que em $(-2,-1)$ e $(0{,}1)$ existem raízes
- O gráfico anterior mostrou isso!

Considerações iniciais...

- Os métodos numéricos para encontrar aproximações para raízes de funções são divididos em duas etapas
  - Localização: Teoremas enunciados
    - Feita a identificação do intervalo que contém a raiz
    - Processo INTERATIVO
  - Refinamento: Métodos numéricos
    - Inicio pela aproximação inicial, contida no intervalo identificado que contém a raiz
    - Melhoramento sucessivo da aproximação inicial
    - Processo ITERATIVO

Métodos que serão estudados

- Método da Bissecção (MB)
- Método da Posição Falsa (PF)
- Método do Ponto Fixo (MPF)
- Newton-Raphson (NR)
- Método da Secante (MS)

Método da Bissecção

- Seja o intervalo $[a, b]$ onde $f(a)f(b) < 0$
- Calcula-se $f(x)$ no ponto médio x_1 de $[a, b]$:

$$x_1 = \frac{a + b}{2}$$

- Nestas condições:
  a) Se $f(x_1) = 0$, então x_1 é raiz
  b) Se $f(a)f(x_1) < 0$, então há uma raiz em $[a, x_1]$
  c) Se $f(a)f(x_1) > 0$, então há raiz em $[x_1, b]$, pois é dado que $f(a)f(b) < 0$

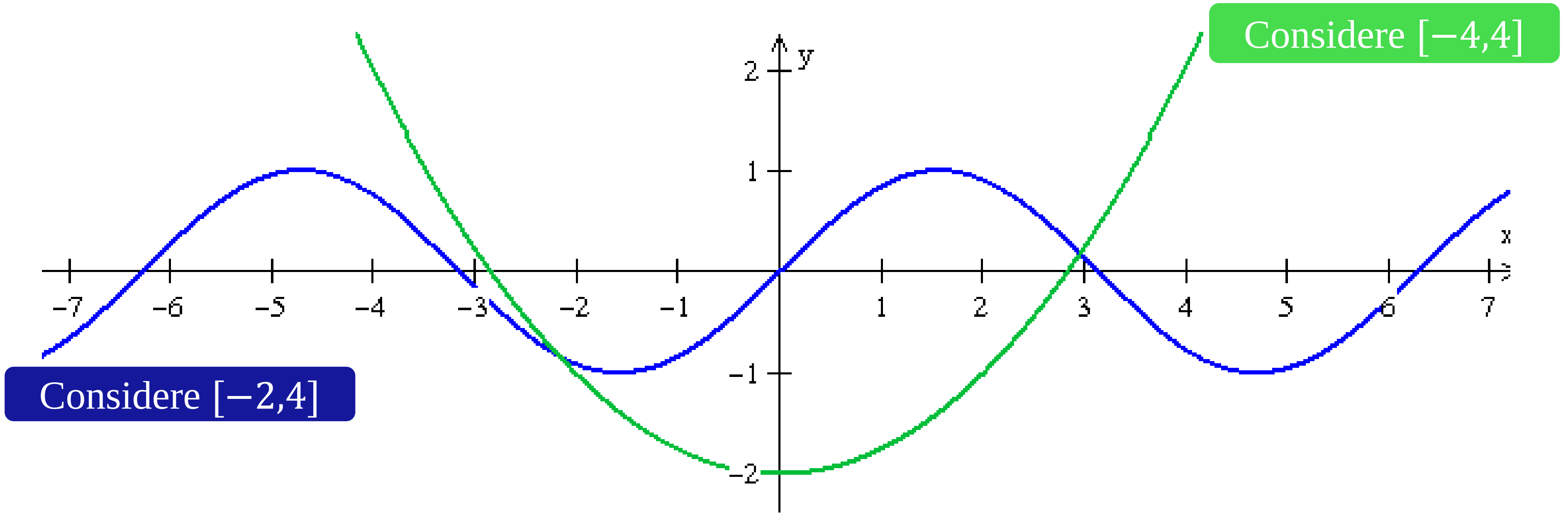
- Repete-se o mesmo processo em $[a, x_1]$ ou $[x_1, b]$, se for o caso dos itens (b) e (c), respectivamente
- Chamamos cada repetição de <u>iteração</u>

Método da Bissecção

```
pol = @ (x) x.^5 - 3*x.^2; %definicao de uma funcao anonima

%funcao exemplo - apenas para visualizacao
v = -2:0.01:2;   y = pol(v);   plot(v,y);   grid on;

inf = input('Limite inferior do intervalo: ');
sup = input('Limite superior do intervalo: ');
eps = input('Precisao: ');

it = 1;
if (sup - inf) >= 10.^(-eps)
    M = pol(inf);
    while (sup - inf) >= 10.^(-eps)
        x = (sup + inf)/2.0;
        if (M*pol(x) > 0) inf = x; else sup = x; end
        it = it + 1;
    end
else
    x = (sup + inf)/2.0;
end
fprintf('Raiz = %f    #iters: %d \n', x, it)
```

Método da Bissecção

- O método não é genérico! (nem automático)
- Ele é útil quando sabemos que existe uma raiz entre $[a, b]$
- Se existem várias raízes em $[a, b]$, podemos alterar o algoritmo para lidar com isso
- Apenas com base nos extremos de $[a, b]$, não podemos afirmar muito sobre as raizes de $f(x)$



Exercício

- Dada $f(x) = x^3 - 9x + 3$ e considerando $[a, b] = [0,1]$ e precisão de três casas decimais (i.e., $\epsilon = 10^{-3}$), obtenha a raiz.

Obs: não confundir a precisão dos cálculos com precisão de máquina ou arredondamento/truncamento

Convergência do MB

Seja $f(x)$ contínua em $[a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$, então MB gera $\{x_k\}$ que converge para uma raiz

- MB gera três sequências (a partir de $[a_0, b_0]$ inicial):
  - $\{a_k\}$: não decrescente e lim. sup. por b_0 com $\lim_{k\to\infty} a_k = r$
  - $\{b_k\}$: não crescente e lim. sup. por a_0 com $\lim_{k\to\infty} b_k = s$
  - $\{x_k\}$: com $x_k = (a_k + b_k)/2$, e logo $a_k < x_k < b_k$
- A amplitude de cada intervalo é metade do anterior:

$$b_k - a_k = (b_0 - a_0)/2^k$$

- Logo: $\lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) = \lim_{k\to\infty}(b_0 - a_0)/2^k = 0$
- Como $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ convergem, $\lim_{k\to\infty} b_k - \lim_{k\to\infty} a_k = 0$, e assim $r = s$
- Como $x_k \in (a_k, b_k)$, então $\lim_{k\to\infty} x_k = \ell = r = s$

- Devemos então verificar que $f(\ell) = 0$

Convergência do MB (cont.)

- Como $f(a_k)f(b_k) \leq 0$, então:

$$0 \geq \lim_{k\to\infty} f(a_k)f(b_k) = \lim_{k\to\infty} f(a_k) \cdot \lim_{k\to\infty} f(b_k) =$$
$$= f\left(\lim_{k\to\infty} a_k\right) \cdot f\left(\lim_{k\to\infty} b_k\right) = f(s) \cdot f(r) =$$
$$= [f(\ell)]^2 \geq 0$$

- Assim, $0 \geq [f(\ell)]^2 \geq 0$, permitindo afirmar que $f(\ell) = 0$

...mostrando assim a convergência do MB

Estimativa de # iterações

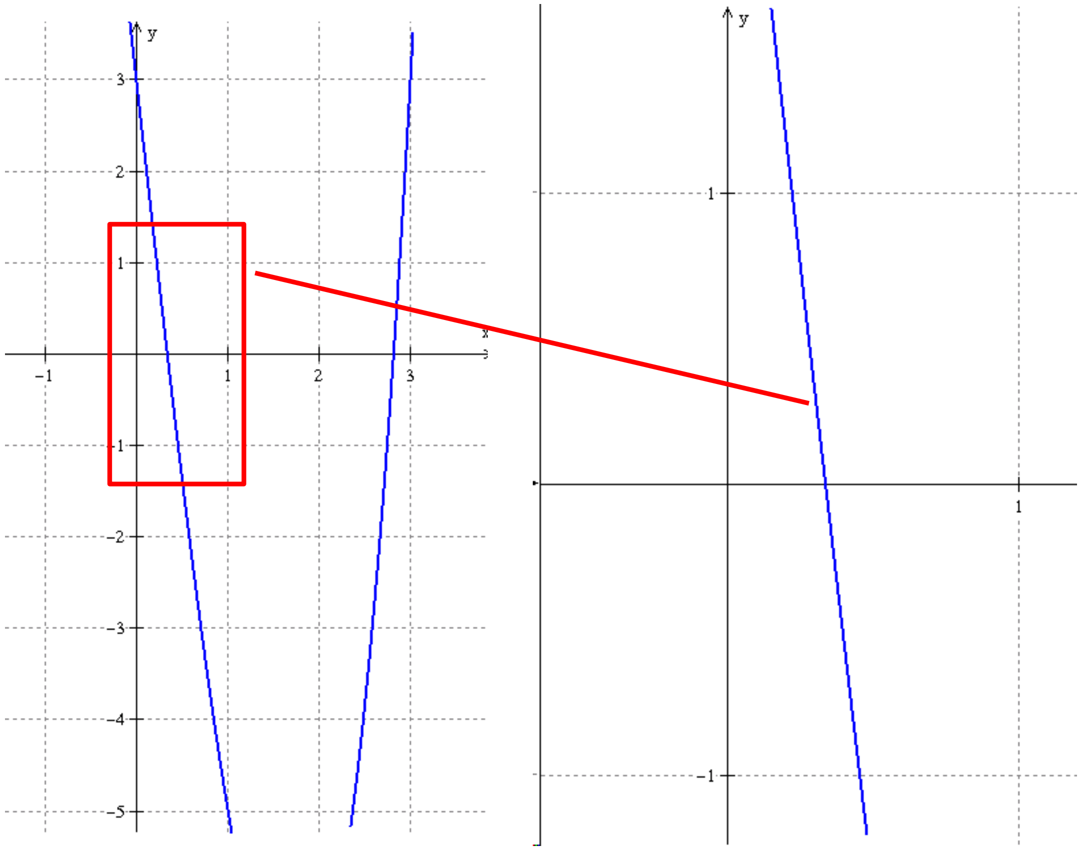
- Dado o intervalo $[a, b]$ é possível saber quantas iterações são efetuadas pelo MB até que se obtenha precisão ϵ

- Uma vez que $b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$, devemos obter k tal que $b_k - a_k < \epsilon$, assim:

$$\frac{b_0 - a_0}{2^k} < \epsilon \Rightarrow 2^k > \frac{b_0 - a_0}{\epsilon} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k\log(2) > \log(b_0 - a_0) - \log(\epsilon) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\epsilon)}{\log(2)}$$

Método da Posição Falsa

- Seja $f(x)$ contínua e com raíz única em $[a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$
- Pelo MB, a raiz aprox. $\bar{x}$ é obtida por $x = \frac{a+b}{2}$ (med. aritmética)
- Vejamos o exemplo: $f(x) = x^3 - 9x + 3$



Observe que:
$f(0) = 3$
$f(1) = -5$

Provavelmente, a raiz está mais próxima de 0 do que de 1

Então, é melhor obter $\bar{x}$ pela <u>média ponderada</u>

Método da Posição Falsa

- Assim:

$$x = \frac{a|f(b)| + b|f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

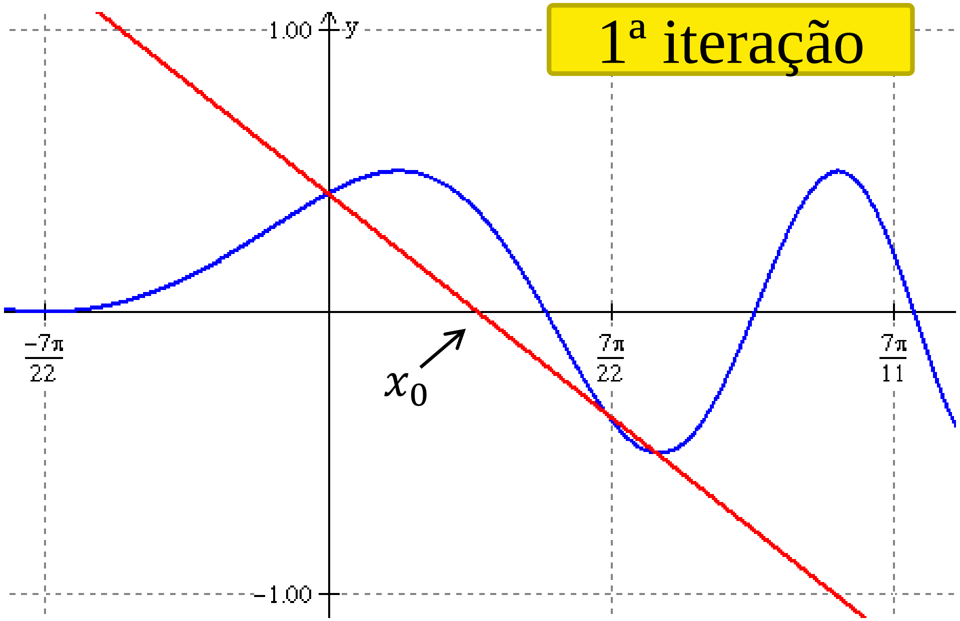
- $|f(a)|$ e $|f(b)|$ são os pesos da média ponderada

- Já que $f(a)$ e $f(b)$ possuem sinais opostos, a expressão de dentro pode ser escrita como a expressão mais à direita

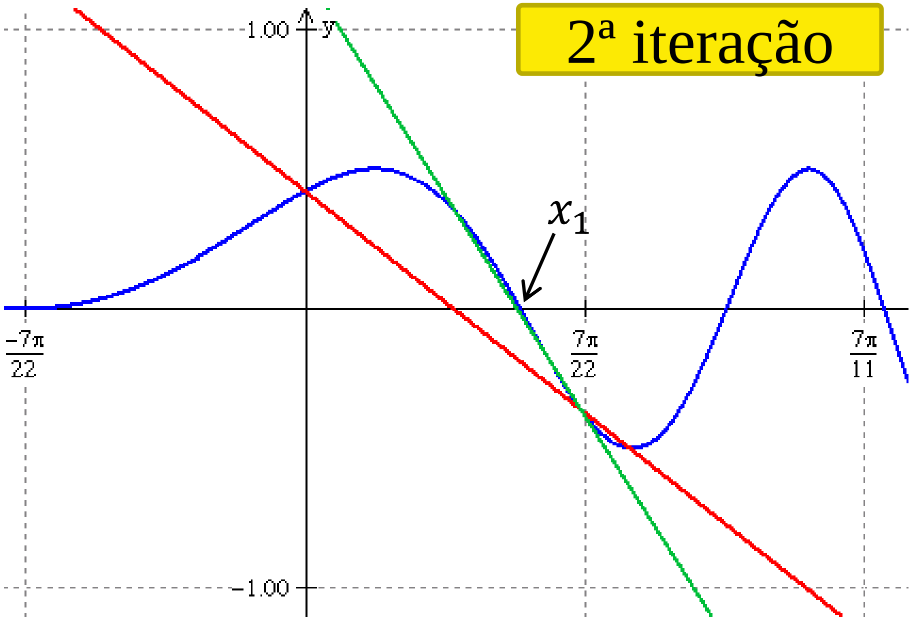
- No exemplo anterior, $f(0) = 3$ e $f(1) = -5$, onde $a = 0$ e $b = 1$, a “contribuição” para o cálculo de x tem maior peso para a ($|f(b)| > |f(a)|$) do que para b

Método da Posição Falsa

- Representação geométrica: $f(x) = \frac{sen\left((x+1)^2\right)}{2}$
- Intervalo: 1ª iteração $\left[0, \frac{7\pi}{22}\right]$ 2ª iteração $\left[0.53, \frac{7\pi}{22}\right]$



Reta: $0.79x + y = 0.42$
Aprox. $x_0 = 0.53$



Reta: $1.58x + y = 1.2$
Aprox. $x_1 = 0.76$

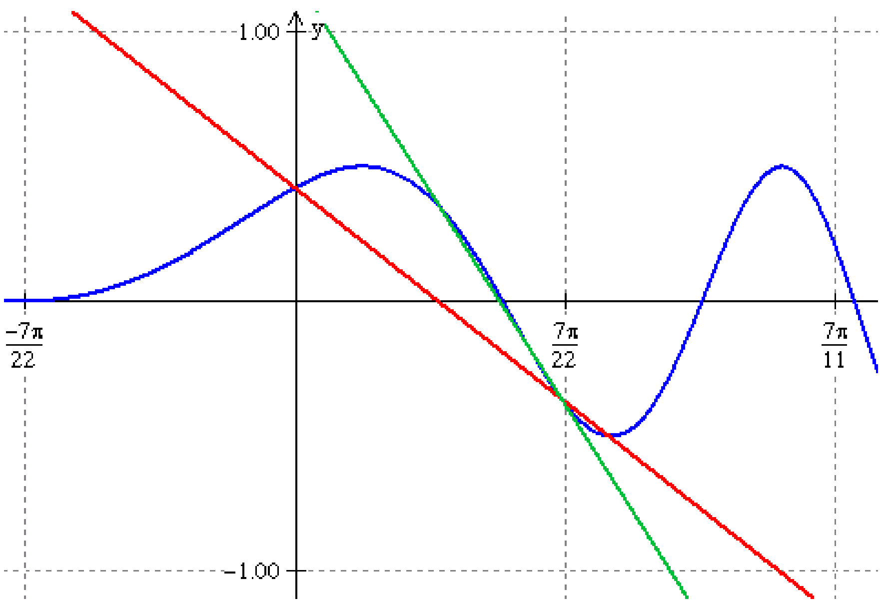
Porque o intervalo foi restrito de $\left[0, \frac{7\pi}{22}\right]$ para $\left[0.53, \frac{7\pi}{22}\right]$ e não de $\left[0, \frac{7\pi}{22}\right]$ para $[0{,}0.53\ ]$?

Convergência do PF

Se $f(x)$ é contínua em $[a,b]$ e $f(a)f(b) < 0$ então o método PF gera uma sequência convergente

- A ideia é a mesma usada no MB
  - Consideramos sequências $\{a_k\}$, $\{x_k\}$ e $\{b_k\}$

- Os elementos de $\{x_k\}$ ficam entre a "raiz" e o extremo não fixo
- Com isso, $\lim_{k\to\infty} x_k = \epsilon$
- A raiz aprox. $\bar{x}$ é tal que $|f(\bar{x})| < \epsilon$ sem que $[a_k, b_k]$ seja pequeno
- Qual critério de parada adequado?



Use um para o intervalo e outro para $f(\bar{x})$

Exercício (com PF)

- Dada $f(x) = x^3 - 9x + 3$ e considerando $[a, b] = [0,1]$ e precisão de quatro casas decimais (i.e., $\epsilon = 10^{-4}$), obtenha a raiz.

  Obs: considere agora uma comparação entre o tamanho do intervalo e outro para a proximidade entre função no ponto observado e a raiz (i.e., $|f(x)| < \epsilon$)

Método do Ponto Fixo

- Seja $f(x)$ contínua em $[a, b]$ e que contém uma raiz
- O MPF transforma $f(x) = 0$ em uma equação equivalente $x = \varphi(x)$
- A partir de uma aproximação original x_0 é gerada uma sequência $\{x_k\}$ de aproximações:

$x_{k+1} = \varphi(x_k)$, tal que:

Como $\{x_k\} \rightarrow \xi$
Temos que $\varphi(x)$ proporciona $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\xi) = \xi$

Assim, encontrar a raiz de $f(x) = 0$ equivale a encontrar o <u>ponto fixo</u> de $\varphi(x)$

É necessário definir $\varphi(x)$ adequada!

Função de Iteração

Função de Iteração

- A forma geral da função de iteração é:

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x)$$

com $A(\xi) \neq 0$ sendo ξ o ponto fixo

IDA: Dado ξ tal que $f(\xi) = 0$ temos:
$\varphi(\xi) = \xi + A(\xi)f(\xi) = \xi$, já que $f(\xi)$ anula a segunda parcela

VOLTA: Seja $\varphi(\xi) = \xi$:
$\varphi(\xi) = \xi \Rightarrow \xi + A(\xi)f(\xi) = \xi \Rightarrow A(\xi)f(\xi) = 0$
Como $A(\xi) \neq 0$, então $f(\xi) = 0$

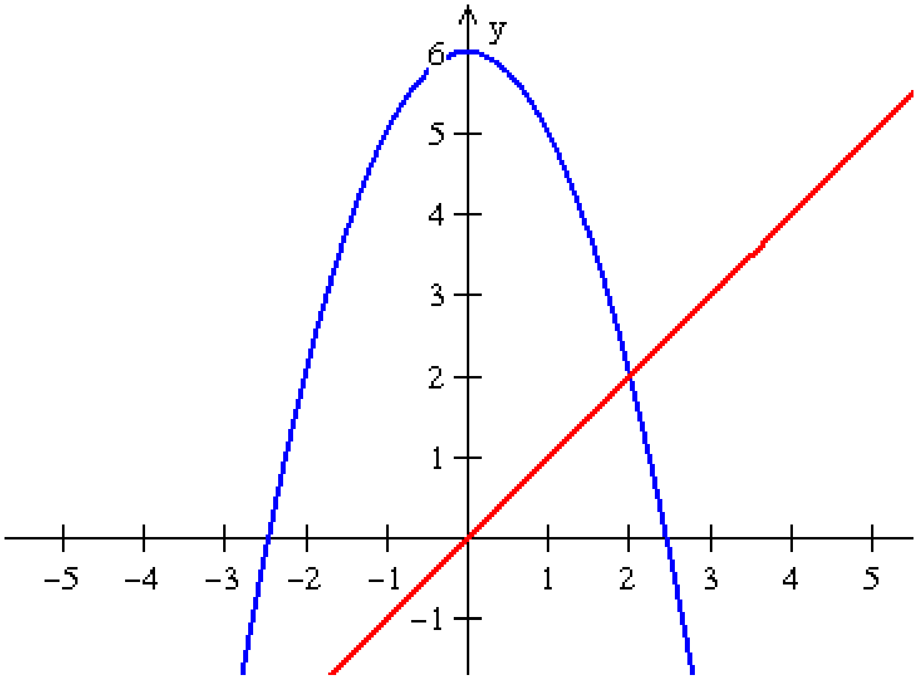
- Dada $f(x) = 0$, existem diversas formas de definir $\varphi(x)$

Será que qualquer uma resolve?

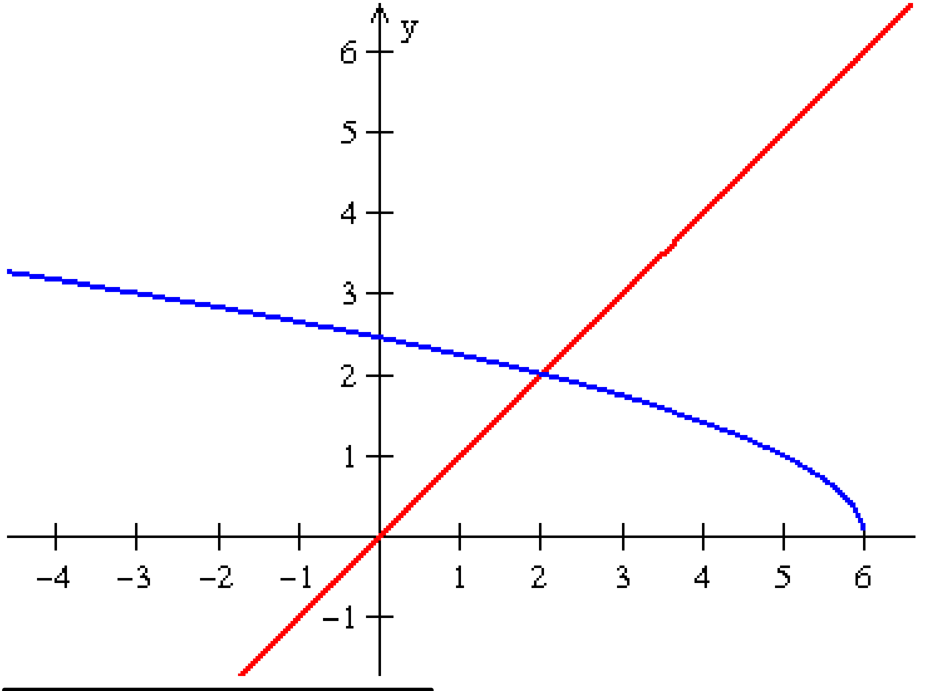
Motivação geométrica

- A raiz de $\varphi(x) = x$ é a abcissa onde ocorre a intersecção de y $= \varphi(x)$ com $y = x$

Exemplo: $f(x) = x^2 + x - 6$



$\varphi_1(x) = 6 - x^2$



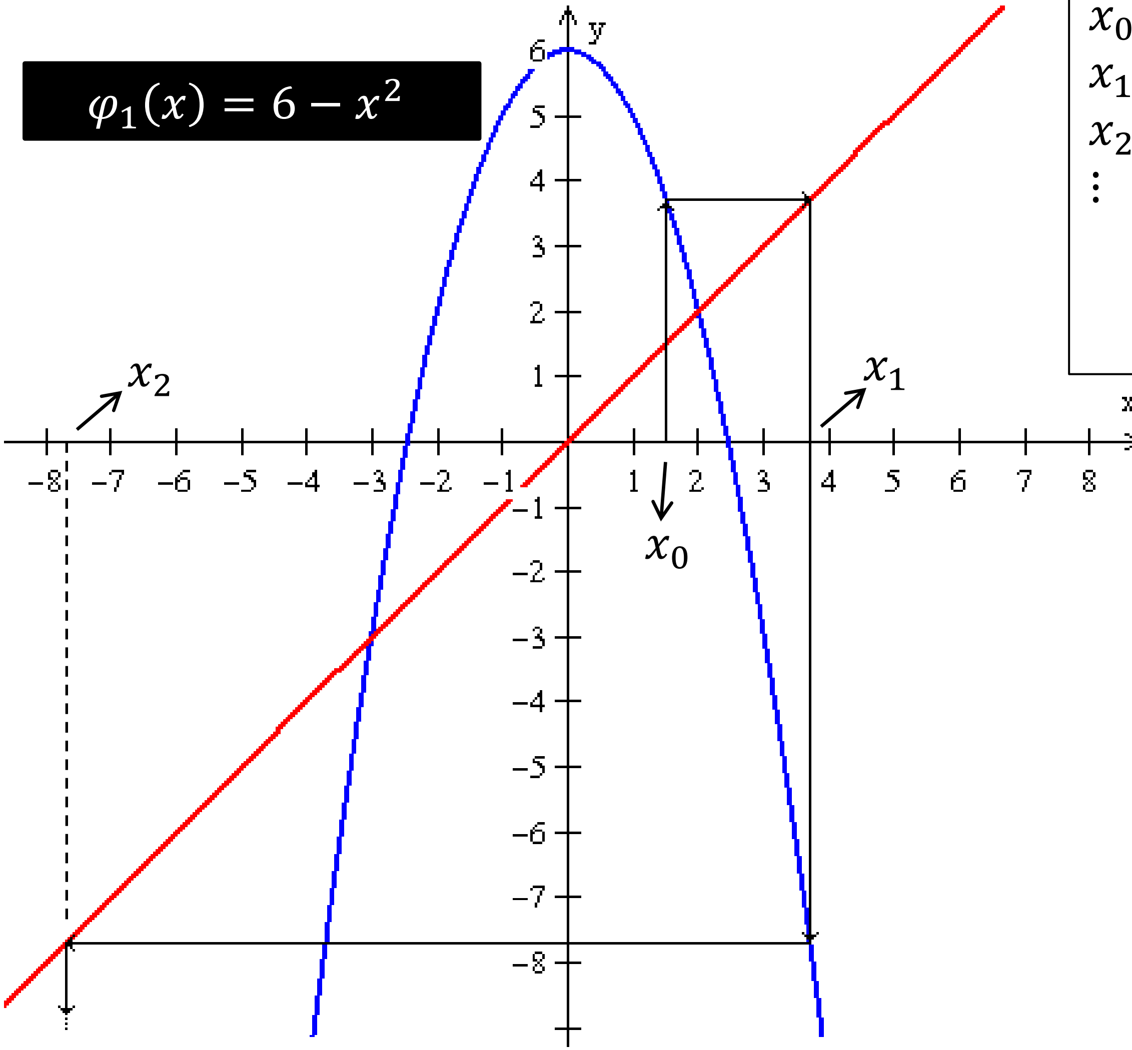
$\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$

Motivação geométrica

Exemplo: $f(x) = x^2 + x - 6$

$x_0 = 1.5$ ("chute" inicial)

$\varphi_1(x) = 6 - x^2$



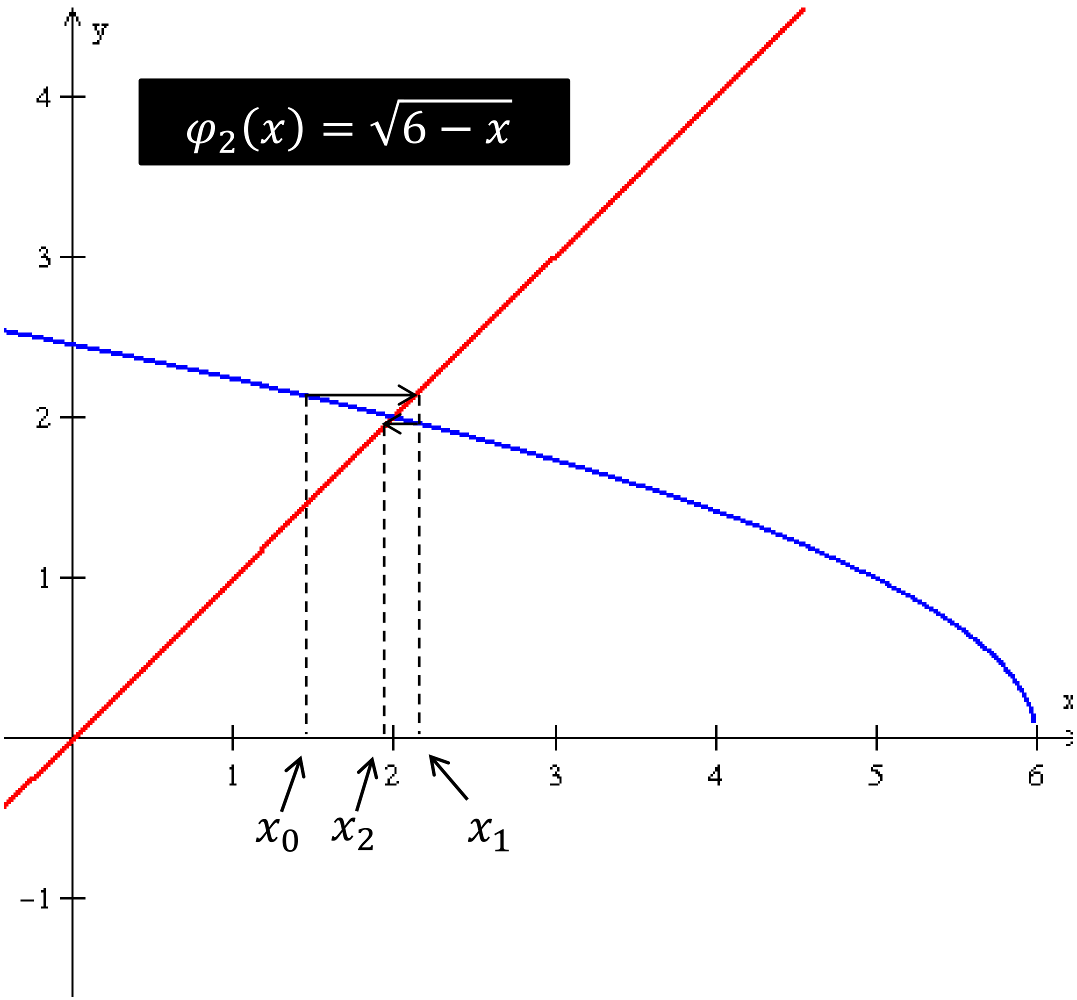
$$x_0 = 1.5$$
$$x_1 = \varphi(x_0) = 6 - 1.5^2 = 3.75$$
$$x_2 = \varphi(x_1) = 6 - 3.75^2 = -8.0625$$
$$\vdots$$

$\{x_k\}$ diverge

Motivação geométrica

Exemplo: $f(x) = x^2 + x - 6$

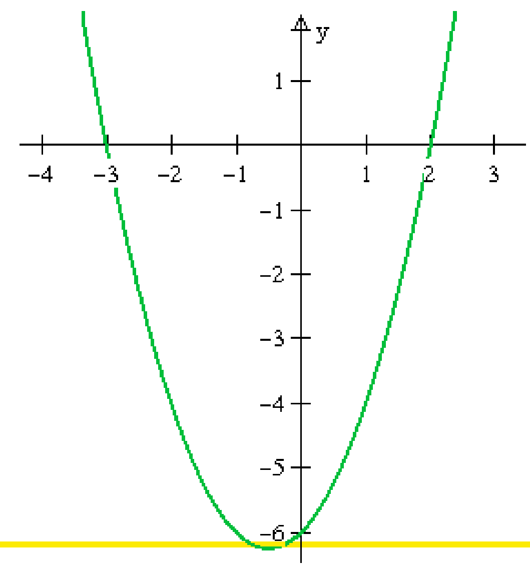
$x_0 = 1.5$ ("chute" inicial)



$$x_0 = 1.5$$
$$x_1 = \varphi(x_0) = \sqrt{6 - 1.5} = 2.121$$
$$x_2 = \varphi(x_1) = \sqrt{6 - 2.1213} = 1.970$$
$$x_3 = \varphi(x_2) = \sqrt{6 - 1.970} = 2.007$$
$$\vdots$$

$\{x_k\}$ converge para 2

<u>2 é raiz de $f(x)$</u>



Teorema da Função de Iteração

- Seja ξ raiz de $f(x) = 0$ contida no intervalo I, cujo centro é o próprio ξ.
- Dada a função de iteração $\varphi(x)$ de $f(x) = 0$, se:
  - *i.* $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em I
  - *ii.* $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \forall x \in I$
  - *iii.* $x_0 \in I$

então a sequência $\{x_k\}$ obtida por $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ <u>converge para ξ</u>

Este teorema define as <u>condições necessárias</u> para que o processo iterativo seja <u>convergente para a raiz</u>

Exercício

Não correspondem a uma mesma função

- Considere as seguintes funções de iteração:
  - *a)* $\varphi_1(x) = 2x - 1$
  - *b)* $\varphi_{2(x)} = x^2 - 2x + 2$
  - *c)* $\varphi_{3(x)} = x^2 - 3x + 3$

Qual delas devemos escolher para obter a raiz (no caso a raiz é 1)

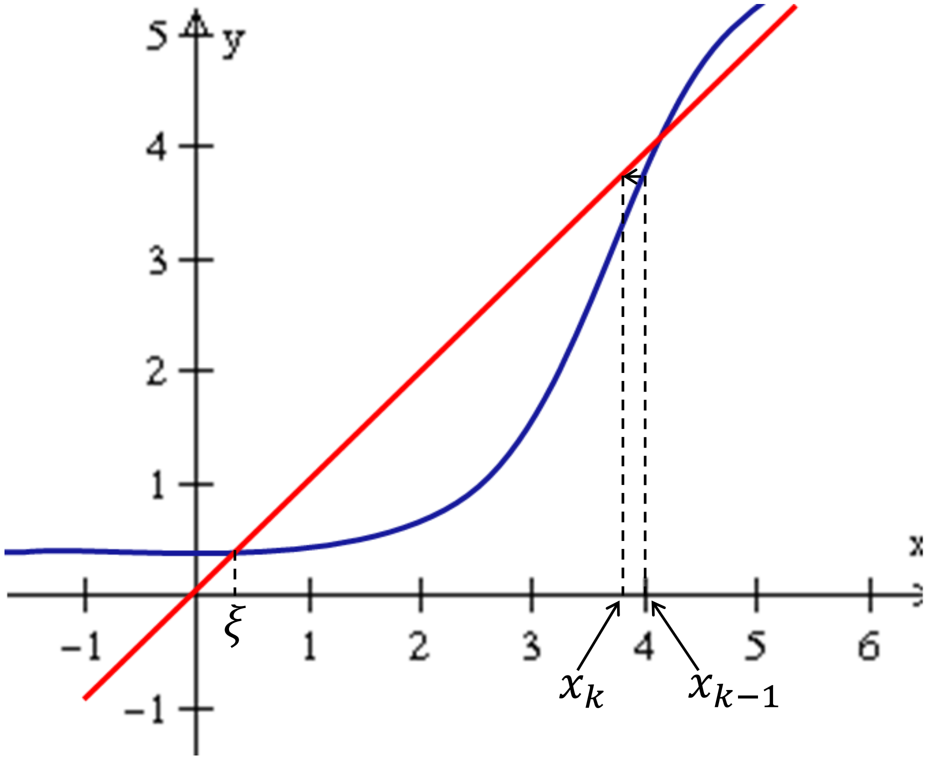
- Considerando uma aproximação inicial $x_0 = 1.2$
- Qual delas podem ser escolhidas para aproximar a raiz $\xi = 1$?
- Exiba a sequência convergente para ξ

Critério de Parada

- Embora o MPF produza uma sequência convergente (nas condições ideais), o critério de convergência não deve ser somente $|x_k - x_{k-1}| < \epsilon$, mas também $f(x_k) < \epsilon$

- Observemos que $|x_k - x_{k-1}| < \epsilon$ não implica que $|x_k - \xi| < \epsilon$

- Pode ocorrer de x_k e x_{k-1} estarem próximos, porém ξ distante dos mesmos!



Algoritmo MPF

```
pol = @ (x) x.^5 - 3*x.^2; %definicao de uma funcao anonima
phi = @ (x) (3*x.^2).^(1.0/5.0); %definicao da funcao phi(x)

%funcao exemplo - apenas para visualizacao
v = -2:0.01:2;   y = pol(v);   plot(v,y); grid on;

x0 = input('Aproximacao inicial: ');
eit = input('Precisao-iteracao: ');   era = input('Precisao-raiz: ');

it = 1;
%Complete o codigo… falta uma estrutura “while” para o processo iterativo!
if pol(x0) < 10^(-eit)
    x1 = x0;
else
    x1 = phi(x0);

    if ((pol(x1) < 10^(-eit)) || (abs(x1 - x0) < 10^(-era)))
        break; end

    x0 = x1;
    it = it + 1;
end

disp( strcat('Raiz = ',num2str(x1),'   (#iters: ',num2str(it), ')' ) );
```

Ordem de convergência

- Seja $\{x_k\}$ uma sequência que converge para ξ e seja $e_k = x_k - \xi$ o erro na k-ésima iteração.

Se existem $p \geq 1$ e $C > 0$ tais que:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C$$

  - p é denominada ordem de convergência
  - C é denominada constante assintótica de erro

- Se $\lim_{k \to \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = C$, com $0 \leq |C| < 1$ então a convergência é <u>linear</u>
- O valor de p informa a velocidade de convergência do processo iterativo, uma vez que $|e_{k+1}| \approx C|e_k|^p$ quando $k \to \infty$

Ordem de Convergência do MPF

Sendo $x_{k+1} - \xi = \varphi(x_k) - \varphi(\xi) = \varphi'(c_k)(x_k - \xi)$ com $c_k \in (x_k, \xi)$, temos:

$$\frac{x_{k+1} - \xi}{x_k - \xi} = \varphi'(c_k)$$

- Quando $k \to \infty$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - \xi}{x_k - \xi} = \lim_{k\to\infty} \varphi'(c_k) = \varphi'\left(\lim_{k\to\infty} c_k\right) = \varphi'(\xi)$$

- Portanto, $\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = \varphi'(\xi) = C$ e $|C| < 1$ já que $\varphi'(x)$ satisfaz o Teorema de Função de Iteração

Notemos que o erro em cada iteração é proporcional ao erro na iteração anterior, com proporção $\varphi'(\xi)$

Quanto menor é $|\varphi'(\xi)|$, mais rápida é a convergência

Método de Newton-Raphson

- Segundo o MPF:
  - Para convergir é necessário $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \forall x \in I$
  - Quanto menor é $|\varphi'(\xi)|$, mais rápida é a convergência
- O Métodos de Newton-Raphson (NR) tenta garantir e acelerar a convergência do MPF
- Para isso, NR busca por $\varphi(x)$ tal que $\varphi'(\xi) = 0$

Uma vez que,

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x)$$

$$\varphi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x)$$

$$\varphi'(\xi) = 1 + A'(\xi)f(\xi) + A(\xi)f'(\xi) = 1 + A(\xi)f'(\xi)$$

Temos, $\varphi'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 1 + A(\xi)f'(\xi) = 0 \Rightarrow A(\xi) = \frac{-1}{f'(\xi)}$

Assim, tomamos $A(x) = -1/f'(x)$

Método de Newton-Raphson

Uma vez que $\varphi(x) = x + A(x)f(x)$ e $A(x) = -\frac{1}{f'(x)}$ temos $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ tal qual $\varphi'(\xi) = 0$ (VERIFIQUE!)

- Baseado nos desenvolvimentos, a sequência que define a aproximação para a raiz de $f(x) = 0$ é:

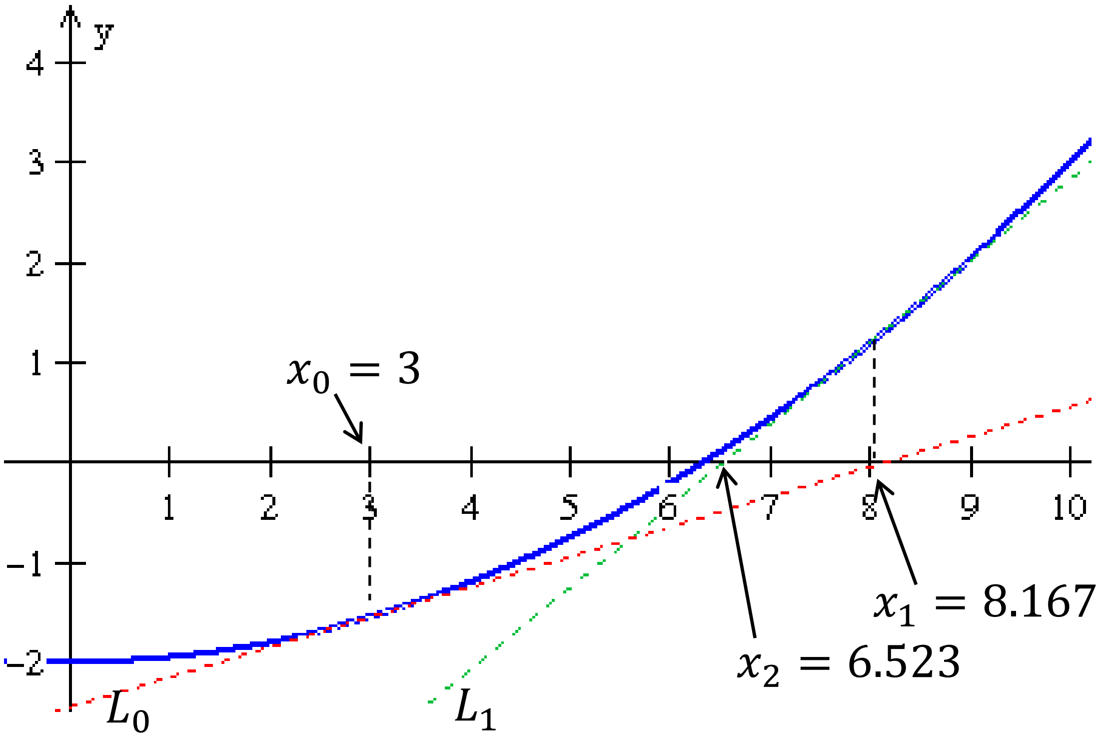
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Motivação geométrica

- Lembrando que a reta tangente em $x = x_k$ é dada por:

$$L_k(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

- Para $L_k(x) = 0$ é necessário que $x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
- Assim, consideramos $x_{k+1} = x$



$f(x) = 0.05 \cdot x^2 - 2$

$x_0 = 3$

$L_0(x) = (0.05 \cdot 9 - 2) + 0.1 \cdot 3 \cdot (x - 3)$

$L_0(x) = 0.3x - 2.45$

$x_1 = 8.167$

$L_1(x) = (0.05 \cdot 8.167^2 - 2) +$

$+ 0.1 \cdot 8.167 \cdot (x - 8.167)$

$L_1(x) = 0.817x - 5337$

$x_2 = 6.523$

Teorema da convergência do NR

- Seja $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ contínuas em I centrado na raiz $x = \xi$ de $f(x)$. Supondo $f'(\xi) \neq 0$, então existe $\xi \in \bar{I} \subset I$ e $x_0 \in \bar{I}$, onde $\{x_k\} \to \xi$ sendo $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

Uma vez que o NR é um caso particular do MPF, para provar que NR converge, basta verificar que ele atende o Teorema da Função de Iteração

Ordem de convergência do NR

- Partindo de $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, temos:

$$x_{k+1} - \xi = x_k - \xi - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Rightarrow e_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = e_{k+1}$$

- Desenvolvendo a série de Taylor em torno de x_k:

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(c_k)}{2}(x - x_k)^2$$

com $|x - x_k| \leq c_k$

- Nestas condições:

$$0 = f(\xi) = f(x_k) - f'(x_k)(x_k - \xi) + \frac{f''(c_k)}{2}(\xi - x_k)^2$$

$$f(x_k) = f'(x_k)(x_k - \xi) - \frac{f''(c_k)}{2}(-(x_k - \xi))^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f''(c_k)}{2f'(x_k)} e_k^2 = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + e_k = e_{k+1} \Leftrightarrow \frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(c_k)}{f'(x_k)}$$

Ordem de convergência do NR

- Assim,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^2}=\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\frac{f''(c_k)}{f'(x_k)}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{f''(\lim_{k\to\infty} c_k)}{f'(\lim_{k\to\infty} x_k)}=\frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}=\frac{1}{2}\varphi''(\xi)=C$$

- Logo, a convergência é quadrática!

Algoritmo NR

```
pol = @ (x) x.^5 - 3*x.^2; %definicao de uma funcao anonima
dpol = @ (x) 5*x.^4 - 6*x; %derivada de pol(x)

%funcao exemplo - apenas para visualizacao
v = -2:0.01:2;   y = pol(v);   plot(v,y); grid on;

x0 = input('Aproximacao inicial: ');   eit = input('Precisao-iteracao: ');
era = input('Precisao-raiz: ');   it = 1;

while (1)
    if abs(pol(x0)) < 10^(-eit)
        x1 = x0;
    else
        x1 = x0 - pol(x0)/dpol(x0);

        if ((abs(pol(x1)) < 10^(-eit)) || (abs(x1 - x0) < 10^(-era)))
            break; end

        x0 = x1;   it = it + 1;
    end
end

disp( strcat('Raiz = ',num2str(x1),'   (#iters: ',num2str(it), ')' ) );
```

Método da Secante (MS)

- Desvantagem do NR é a necessidade de calcular $f'(x)$ e seu respectivo valor numérico a cada iteração

- Uma alternativa é substituir $f'(x_k)$ por uma aproximação:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Necessitamos de x_k e x_{k-1}

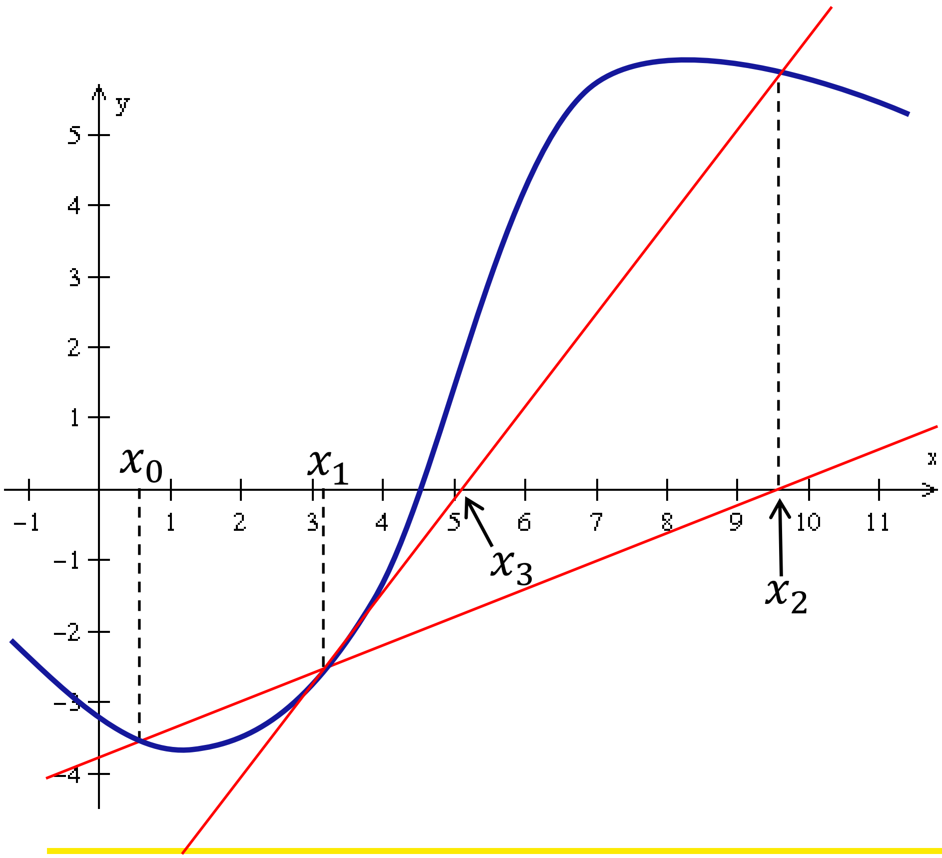
Assim,

$$\varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}} = x_k - \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} =$$

$$= \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Motivação geométrica

- A aproximação para a raiz é obtida pela interseção da reta secante com o eixo das abcissas
- Este comportamento caracteriza o Método da Secante (MS)



- Exercício: verifique que a equação da reta secante equivale a função de iteração do MS

Algoritmo MS

```
pol = @ (x) x.^5 - 3*x.^2; %definicao de uma funcao anonima

%funcao exemplo - apenas para visualizacao
v = -2:0.01:2;   y = pol(v);   plot(v,y); grid on;

x0 = input('Aproximacao inicial 0: ');x1 = input('Aproximacao inicial 1: ');
eit = input('Precisao-iteracao: ');era = input('Precisao-raiz: '); it = 1;

   if ( (abs(pol(x0)) < 10^(-eit)) || (abs(pol(x1)) < 10^(-eit)) || …
      (abs(x1 - x0) < 10^(-eit)))
      x1 = x0;
   else
      while(1)
         if ((abs(pol(x1)) < 10^(-eit)) || (abs(x1 - x0) < 10^(-era)))
            x1 = x0;   break
         end
         x2 = x1 - (pol(x1)/(pol(x1) - pol(x0)))*(x1 - x0);
         if ((abs(pol(x2)) < 10^(-eit)) || (abs(x2 - x1) < 10^(-era)))
            x1 = x2;   break
         end
         x0 = x1;   x1 = x2;   it = it + 1;
     end
 end
 disp( strcat('Raiz = ',num2str(x1),'   (#iters: ',num2str(it), ')' ) );
```

Exercícios

- Considerando $f(x) = x^2 + x - 6$, sabendo que $\xi = 2$ e adotando $x_0 = 1.5$ e $x_1 = 1.7$, calcule a raiz de $f(x) = 0$ a partir do MS

Bibliografia da aula

- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais**, 2ª Ed. Pearson, 1996.
- FRANCO, N. B. **Cálculo Numérico**. Pearson, 2007.