UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José dos Campos
Instituto de Ciência e Tecnologia

Solução de Sistemas Lineares: métodos diretos

Prof. Dr. Rogério Galante Negri

Introdução

- Diferentes problemas da engenharia são resolvidos com análise linear
  - Potencial de redes elétricas
  - Tensão em estruturas metálicas
  - Razão de escoamento em sistema hidráulico
  - Concentração de reagentes sujeitos a reações químicas simultâneas
- A resolução destes problemas se resumem a resolução de Sistemas de Equações Lineares
- A solução de Sistemas de Equações Não Lineares são mais difíceis/complicadas
- A maioria das aplicações envolvem Equações Lineares

Sistema Linear

- Sistema Linear com m equações e n variáveis:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

com coeficientes $a_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, variáveis $x_j, j = 1, \ldots, n$ e constantes $b_i, i = 1, \ldots, m$

- Em notação matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

A: matriz dos coeficientes
x: vetor das variáveis
b: vetor constante

$\mathbf{x}^\star$: vetor solução
$\bar{\mathbf{x}}$: vetor sol. aproximada

Sistema Linear

- Para um dado Sistema Linear, uma das situações podem ocorrer:
  - O sistema possui solução única
  - O sistema admite infinitas soluções
  - O sistema não admite solução

- Podemos considerar $\mathbf{A}_{m\times n}$ como uma função:

$$\mathbf{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{b} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$$

- Resolver o SL $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ equivale a, dado $\mathbf{b}$, obter $\mathbf{x}$ tal que satisfaz a igualdade apresentada
- Pode acontecer de não existir $\mathbf{x}$ que satisfaça o SL

Considerações

- Inverter $\mathbf{A}$ resolve o problema, pois:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

- A Regra de Cramer também resolve:

$$x_j = \frac{|\mathbf{A}_j|}{|\mathbf{A}|}$$

onde $\mathbf{A}_j$ é obtida substituindo a j-ésima coluna de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{b}$

- Porém, isso é computacionalmente muito custoso, mesmo nos computadores atuais
- A situação complica ainda mais nos problemas de grande porte

- Diante essa problemática, são adotados Métodos Numéricos para resolução de SL
- Dois tipos que serão estudados são: Diretos e Iterativos

Métodos Diretos

- Transformam o SL em um SL equivalente tal que A é triangular superior
  - Método da Eliminação de Gauss
  - Fatoração LU

- Uma vez que o SL foi transformado, a solução é obtida de forma simples

- Verifiquemos como resolver um SL triangular

Resolução de Sistemas Triangulares

- Seja o SL $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ onde $\mathbf{A}_{n \times n}$ é triangular superior e com elementos da diagonal não nulos:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad a_{33}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- Da n-ésima equação: $x_n = b_n / a_{n\,n}$
- Por sua vez, $x_{n-1} = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1\,n}x_n}{a_{n-1\,n-1}}$
- Assim... $x_1 = \dfrac{b_1 - a_{1\,2}x_2 - a_{1\,3}x_3 - \cdots - a_{1\,n-1}x_{n-1} - a_{1\,n}x_n}{a_{1\,1}}$

Atenção ao padrão!

Resolução de Sistemas Triangulares

$$x_{\boxed{1}} = \frac{b_{\boxed{1}} - a_{\boxed{1}\boxed{2}} x_{\boxed{2}} - a_{\boxed{1}\boxed{3}} x_{\boxed{3}} - \cdots - a_{\boxed{1}\boxed{n-1}} x_{\boxed{n-1}} - a_{\boxed{1}\boxed{n}} x_{\boxed{n}}}{a_{\boxed{1}\boxed{1}}}$$

- Dado que o sistema é triangular superior e baseado na observação do padrão no cálculo de x_i, é definido o algoritmo:

```
%funcao para resolucao de sistemas lineares
function sol = resTriangSup(A,b)
    n = length(A);
    sol = zeros(n,1);

    sol(n) = b(n)/A(n,n);
    for i = (n-1):-1:1;
        s = 0;
        for j = i+1:1:n;
            s = s + A(i,j)*sol(j);
        end
        sol(i) = (b(i) - s)/A(i,i);
    end
end
```

Teorema da Equivalência de SL

- Dado o SL $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, ao aplicar operações como:
  - Troca de posição de duas equações
  - Multiplicar equação por constante não nula
  - Adicionar múltiplo de uma equação em outra equação

obtemos o SL $\underline{\tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}}$ equivalente a $\underline{\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}}$

Método da Eliminação de Gauss

- O Método da Eliminação de Gauss (MEG) é baseado no Teo. da Equiv. de SL, onde dado $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, gera-se um SL triangular equivalente
- Devemos supor que $\det(A) \neq 0$
- Sendo **A** de ordem n, MEG é efetuado $n - 1$ etapas
- Na etapa k é eliminada a variável x_k das equações $k + 1, k + 2, \dots, n$
- Os coeficientes de **A** podem ser modificados ao longo das etapas
- Denotamos $a_{ij}^{(k)}$ e $b_i^{(k)}$ os elementos de **A** e **b** após a k-ésima etapa

Método da Eliminação de Gauss

- Dado $\mathbf{A}^{(0)}\big|\mathbf{b}^{(0)} = \mathbf{A}\big|\mathbf{b} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1\,1}^{(0)} & a_{1\,2}^{(0)} & \cdots & a_{1\,n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{2\,1}^{(0)} & a_{2\,2}^{(0)} & \cdots & a_{2\,n}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n\,1}^{(0)} & a_{n\,2}^{(0)} & \cdots & a_{n\,n}^{(0)} & b_n^{(0)} \end{array}\right)$

com $a_{i\,j}^{(0)} = a_{i\,j}, b_i^{(0)} = b_i$

Para início do processo (e de cada uma das etapas), é necessário que $a_{1\,1}^{(0)} \neq 0$, caso contrário não é possível eliminar os elementos que estão abaixo

MEG – 1ª Etapa

- A primeira etapa faz a eliminação da variável x_1, presentes na 2ª até a n-ésima equação

Isto é, os elementos da primeira coluna, que estão abaixo do elemento da diagonal

- Para cada equação i (de 2 até n), fazemos sua subtração da 1ª equação multiplicada por:

Multiplicador

$$m_{i1} = \frac{a_{i\,1}^{(0)}}{a_{1\,1}^{(0)}}, i = 2, \ldots, n$$

Pivô da 1ª Etapa

MEG – 1ª Etapa (resultado)

- Dado $\mathbf{A}^{(1)}\Big|\mathbf{b}^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1\,1}^{(1)} & a_{1\,2}^{(1)} & \cdots & a_{1\,n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{2\,2}^{(1)} & \cdots & a_{2\,n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n\,2}^{(1)} & \cdots & a_{n\,n}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right)$
- Notemos que:
  - $a_{1\,j}^{(0)} = a_{1\,j}^{(1)}$, para $j = 1, \dots, n$ (1ª linha não muda)
  - $b_1^{(0)} = b_1^{(1)}$
  - $a_{i\,j}^{(1)} = a_{i\,j}^{(0)} - m_{i\,1} \cdot a_{1\,j}^{(0)}$, para $i = 2, \dots, n$ e $j = 1, \dots, n$
  - $b_i^{(1)} = b_i^{(0)} - m_{i\,1} \cdot b_1^{(0)}$, para $i = 2, \dots, n$

MEG – 2ª Etapa

- Agora, eliminamos a variável x_2, presentes na 3ª até a n-ésima equação
- Para isso, usamos o seguinte multiplicador:

$$m_{i2} = \frac{a_{i\,2}^{(1)}}{a_{2\,2}^{(1)}}, i = 3, \dots, n$$

Usamos a mesma ideia:
"subtraímos da i-ésima equação a 2ª multiplicada por m_{i2}"

- Ao fim, teremos:

$$\mathbf{A}^{(1)}\Big|\mathbf{b}^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1\,1}^{(2)} & a_{1\,2}^{(2)} & \cdots & a_{1\,n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{2\,2}^{(2)} & \cdots & a_{2\,n}^{(2)} & b_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n\,n}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right)$$

MEG – (n-1)-ésima Etapa

- Usando raciocínio análogo, na $(n-1)$-ésima etapa, teremos $\mathbf{A}$ como triangular superior
- O vetor $\boldsymbol{b}$ estará devidamente modificado até lá

- Uma vez tendo $\mathbf{A}$ triangular superior, usamos o algoritmo já conhecido

Algoritmo MEG

```
%definicao da matriz de coeficientes do SL
A = [3 2 4; 1 1 2; 4 3 -2];   b = [1 2 3];   %Exemplo

n = length(A);
for i = 1:1:(n-1);
    for j = (i+1):1:n;
        m = A(j,i)/A(i,i);
        A(j,i) = 0;

        for k = (i+1):1:n;
            A(j,k) = A(j,k) - m*A(i,k);
        end
        b(j) = b(j) - m*b(i);
    end
End


x = resTriangSup(A,b); %funcao para res. de sis. triangulares sup.

disp(  strcat('Solucao: ', num2str(x')) );
```

```
>> eliminacaoGauss
Solucao:   -3   5   5.5511e-17
```

Exercício

- Resolva pelo MEG o SL:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Pivotamento

- O conceito “chave” para o MEG é o cálculo dos multiplicadores
- Alguns contratempos pode ocorrer:
  - Pivô nulo — Impossível!
  - Pivô quase nulo — Multiplicadores $\uparrow$, Erros de arred. $\uparrow$
- Para contornar problemas como estes usamos <u>Estratégias de Pivotamento</u>




Pivotamento Parcial

- A estratégia é:
  - Na k-ésima etapa, escolher o pivô de maior módulo dentre os $a_{ik}{}^{(k-1)}$, com $i = k, \dots, n$ Troca de linha
  - Trocar linhas k e i se for necessário

- Exemplo: resolver utilizando Pivotamento Parcial

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

Pivotamento Completo

- Escolher como pivô o elemento de maior módulo dentre os elementos que atuam no processo de eliminação [i.e., da k-ésima coluna/linha em diante]

$$\text{Pivô: } a_{r\,s}^{(k-1)} = \max_{\forall i,j \geq k} \left| a_{i\,j}^{(k-1)} \right|$$

- Exemplo: resolva novamente, agora com Pivotamento Completo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

Fatoração LU

- A fatoração LU decompõe **A** como produto de dois fatores
- Tais fatores são usados na resolução do sistema original
- Ideia geral:

Se $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, então $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser escrito como:

$$(\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Logo, resolver $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ equivale a:

i. Resolver: $\mathbf{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b}$

ii. Resolver: $\mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$

- O detalhe é que:
  - **L** é triangular inferior (Lower) com diagonal unitária
  - **U** é triangular superior (Upper)

Calculo de L e U

$$\begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \cdots & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \cdots & a_{n\,n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2\,1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n\,1} & l_{n\,2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{1\,1} & u_{1\,2} & \cdots & u_{1\,n} \\ 0 & u_{2\,2} & \cdots & u_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n\,n} \end{pmatrix}$$

Fatoração LU – via MEG

- Consideremos:

$$\mathbf{A}^{(0)} = \begin{pmatrix} a_{1\,1}^{(0)} & a_{1\,2}^{(0)} & a_{1\,3}^{(0)} \\ a_{2\,1}^{(0)} & a_{2\,2}^{(0)} & a_{2\,3}^{(0)} \\ a_{3\,1}^{(0)} & a_{3\,2}^{(0)} & a_{3\,3}^{(0)} \end{pmatrix}$$

- Cujos multiplicadores da 1ª etapa (no MEG) são

$$m_{21} = a_{2\,1}^{(0)}/a_{1\,1}^{(0)} \quad \text{e} \quad m_{31} = a_{3\,1}^{(0)}/a_{1\,1}^{(0)}$$

- O processo gera:
  - $a_{1\,j}^{(1)} = a_{1\,j}^{(0)}$, para $j = 1,2,3$
  - $a_{i\,j}^{(1)} = a_{i\,j}^{(0)} - m_{i1} a_{1\,j}^{(0)}$, para $i = 2,3$ e $j = 1,2,3$

Fatoração LU – via MEG – 1ª Etapa

- Tal processo é equivalente a:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathbf{M}^{(0)}} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} a_{1\,1}^{(0)} & a_{1\,2}^{(0)} & a_{1\,3}^{(0)} \\ a_{2\,1}^{(0)} & a_{2\,2}^{(0)} & a_{2\,3}^{(0)} \\ a_{3\,1}^{(0)} & a_{3\,2}^{(0)} & a_{3\,3}^{(0)} \end{pmatrix}}^{\mathbf{A}^{(0)}} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1\,1}^{(0)} & a_{1\,2}^{(0)} & a_{1\,3}^{(0)} \\ a_{2\,1}^{(0)} - m_{21}a_{1\,1}^{(0)} & a_{2\,2}^{(0)} - m_{21}a_{1\,2}^{(0)} & a_{2\,3}^{(0)} - m_{21}a_{1\,3}^{(0)} \\ a_{3\,1}^{(0)} - m_{31}a_{1\,1}^{(0)} & a_{3\,2}^{(0)} - m_{31}a_{1\,2}^{(0)} & a_{3\,3}^{(0)} - m_{31}a_{1\,3}^{(0)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1\,1}^{(1)} & a_{1\,2}^{(1)} & a_{1\,3}^{(1)} \\ 0 & a_{2\,2}^{(1)} & a_{2\,3}^{(1)} \\ 0 & a_{3\,2}^{(1)} & a_{3\,3}^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{(1)}$$

Logo: $M^{(0)} \cdot A^{(0)} = A^{(1)}$

Fatoração LU – via MEG – 2ª Etapa

- É necessário eliminar $a_{3\,2}^{(1)}$
- Para isso, usamos o multiplicador $m_{32} = a_{3\,2}^{(1)}/a_{2\,2}^{(1)}$
- Analogamente, para obtenção de $\mathbf{A}^2$ fazemos $\mathbf{M}^1 \cdot \mathbf{A}^1$, onde:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1\,1}^{(1)} & a_{1\,2}^{(1)} & a_{1\,3}^{(1)} \\ 0 & a_{2\,2}^{(1)} & a_{2\,3}^{(1)} \\ 0 & a_{3\,2}^{(1)} & a_{3\,3}^{(1)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1\,1}^{(1)} & a_{1\,2}^{(1)} & a_{1\,3}^{(1)} \\ 0 & a_{2\,2}^{(1)} & a_{2\,3}^{(1)} \\ 0 & a_{3\,2}^{(1)} - m_{32} a_{2\,2}^{(1)} & a_{3\,3}^{(1)} - m_{32} a_{23}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1\,1}^{(2)} & a_{1\,2}^{(2)} & a_{1\,3}^{(2)} \\ 0 & a_{2\,2}^{(2)} & a_{2\,3}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{3\,3}^{(2)} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{(2)}$$

Fatoração LU – via MEG – Álgebra

- De acordo com os processos apresentados:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(0)}$$
$$\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{A}$$
$$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{M}^{(1)} \cdot \mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{M}^{(1)} \cdot \mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{A}$$

- Temos também que:

$$\left(\mathbf{M}^{(0)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left(\mathbf{M}^{(1)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

- Por sua vez:

$$\left(\mathbf{M}^{(1)} \cdot \mathbf{M}^{(0)}\right)^{-1} = \left(\mathbf{M}^{(0)}\right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{M}^{(1)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

Fatoração LU

- Logo, pelos desenvolvimentos obtidos:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(0)}$$
$$\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{A}$$
$$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{M}^{(1)} \cdot \mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{M}^{(1)} \cdot \mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{A}$$

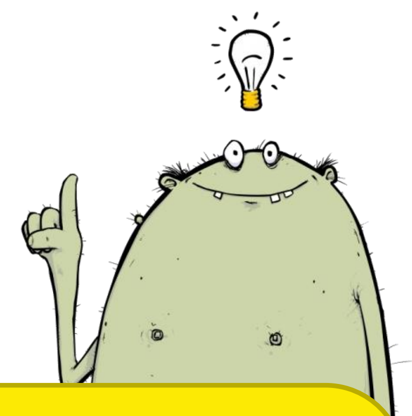
- De modo equivalente:

$$\mathbf{M}^{(1)} \cdot \mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^{(2)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\mathbf{M}^{(1)} \cdot \mathbf{M}^{(0)}\right)^{-1} \cdot \mathbf{M}^{(1)} \cdot \mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{A} = \left(\mathbf{M}^{(1)} \cdot \mathbf{M}^{(0)}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}^{(2)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\mathbf{M}^{(0)}\right)^{-1} \cdot \underbrace{\left(\mathbf{M}^{(1)}\right)^{-1} \cdot \mathbf{M}^{(1)}}_{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{M}^{(0)}}_{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{A} = \left(\mathbf{M}^{(0)}\right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{M}^{(1)}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}^{(2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{A} = \underbrace{\left(\mathbf{M}^{(0)}\right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{M}^{(1)}\right)^{-1}}_{\mathbf{L}} \cdot \underbrace{\mathbf{A}^{(2)}}_{\mathbf{U}}$$

Processo LU e Teo. da Fatoração LU

- Pelos desenvolvimentos apresentados:
  - A matriz $\mathbf{A}$ foi fatorada em $\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$
  - $\mathbf{L}$ é triangular inferior, com diagonal unitária, e com l_{ij}, para $i > j$, equivalente aos multiplicadores m_{ij} obtidos no MEG
  - $\mathbf{U}$ é triangular superior, obtida pelo MEG



- Outro resultado importante é:

Teorema da Fatoração LU

Dada $\mathbf{A}_{n \times n}$ e seja $\mathbf{A}_k$ a sub-matriz formada pelas k primeiras linhas e colunas. Sendo $\det(\mathbf{A}_k) \neq 0$, para $k = 1, \ldots, (n-1)$, então existe $\mathbf{L}$ triangular inferior com $l_{ii} = 1$ e $\mathbf{U} = (\mathrm{u_{ij}})$ triangular superior, tais que $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$, e ainda, $\det(A) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \ldots \cdot u_{nn}$.

Exercício

- Realize a fatoração LU de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

- Utilize a fatoração de $\mathbf{A}$ e obtenha a solução de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Fatoração LU com Pivotamento

- O Pivotamento Parcial como visto no MEG, consiste na troca de linhas de $\mathbf{A}^{(k)}$, se for preciso

- A Matriz de Permutação é uma forma de representar as permutações em $\mathbf{A}$

- Tal matriz é usada para calcular $\mathbf{L}$ e $\mathbf{U}$ com Pivotamento Parcial

Matriz de Permutação $\mathbf{P}$

- $\mathbf{P}$ é uma matriz quadrada de ordem n, obtida da permutação das linhas/colunas de $\mathbf{I}$
- Ao pré-multiplicar uma $\mathbf{A}$ por $\mathbf{P}$, obtemos uma matriz $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}$ cujas linhas foram permutadas
- A permutação obtida é a mesma feita sobre $\mathbf{I}$ para obter $\mathbf{P}$

Sequência $\mathcal{P}$ de permutações transforma $\mathbf{I}$ em $\mathbf{P}$

$$\mathbf{I} \sim \mathbf{P}$$

Sequência $\mathcal{P}$ de permutações transforma $\mathbf{A}$ em $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}$

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{A}$$

Fatoração LU com Pivotamento

- A fatoração LU é realizada sobre $\mathbf{A}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}$, ou seja, determinamos $\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{A}'$
- Toda permutação $\mathcal{P}$ realizada em $\mathbf{A}$ deve ser considerada também em $\mathbf{b}$, gerando assim $\mathbf{b}'$
- Logo:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{A}' \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}' \Leftrightarrow \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{b} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{b}$$

- Para resolução do SL, efetua-se:

1. $\mathbf{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{b}$
2. $\mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$

Considerações

- A matriz de permutação **P** é obtida pelas matrizes de permutação que são consideradas em cada etapa

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(k)} \,.\, \mathbf{P}^{(k-1)} \,.\, \ldots \,.\, \mathbf{P}^{(1)} \,.\, \mathbf{P}^{(0)}$$

- **P** é fundamental para alteração da ordem dos elementos de **b**

- Vejamos o exemplo...

Exemplo (do livro)

- Seja o SL: $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 - 3x_3 = -2 \end{cases}$, temos:

- 1ª Etapa: $\mathbf{A}^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, adotando pivô $a_{31} = 4$

Linha: $1 \rightleftarrows 3$

temos $\mathbf{P}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, e $\mathbf{A}'^{(0)} = \mathbf{P}^{(0)} \cdot \mathbf{A}^{(0)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

- A partir da eliminação: $\mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 1/4 & 2 & 11/4 \\ 3/4 & -4 & 13/4 \end{pmatrix}$

Exemplo (cont.)

Linha: $2 \rightleftarrows 3$

- 2ª Etapa: $\mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 1/4 & 2 & 11/4 \\ 3/4 & -4 & 13/4 \end{pmatrix}$, adotando pivô $a_{32} = -4$

temos $\mathbf{P}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, e $\mathbf{A'}^{(1)} = \mathbf{P}^{(1)} \cdot \mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3/4 & -4 & 13/4 \\ 1/4 & 2 & 11/4 \end{pmatrix}$

- A partir da eliminação: $\mathbf{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3/4 & -4 & 13/4 \\ 1/4 & -1/2 & 35/8 \end{pmatrix}$

Exemplo (cont.)

- Os fatores são:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{pmatrix}$$

- Temos ainda: $\mathbf{A}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{P}^{(1)} \cdot \mathbf{P}^{(0)} \cdot \mathbf{A}$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Para resolução, em $\mathbf{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{b}$, deve-se considerar...

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exemplo (cont.)

- Para $\mathbf{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{b}$

$$\begin{cases} y_1 = -2 \\ \frac{3}{4} y_1 + y_2 = 9 \\ \frac{1}{4} y_1 - \frac{1}{2} y_2 + y_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 21/2 \\ 35/4 \end{pmatrix}$$

- Para $\mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_3 = -2 \\ -4x_2 + \frac{13}{4} x_3 = \frac{21}{2} \\ \frac{35}{8} x_3 = \frac{35}{4} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bibliografia da aula

- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais**, 2ª Ed. Pearson, 1996.