UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus de São José dos Campos
Instituto de Ciência e Tecnologia

Interpolação Polinomial

Prof. Dr. Rogério Galante Negri

Motivação

- Interpolar é aproximar (representar de forma parecida) uma função através de outra função
- A nova função é geralmente mais simples
- Motivação quanto o uso de interpolação:
  - Conhecemos o valor de uma dada função em apenas alguns pontos, e gostaríamos de conhecer em outro ponto desconhecido
  - Quando a função é muito difícil ou quase impossível de derivar/integrar
- Existem casos em que a interpolação não é indicada...

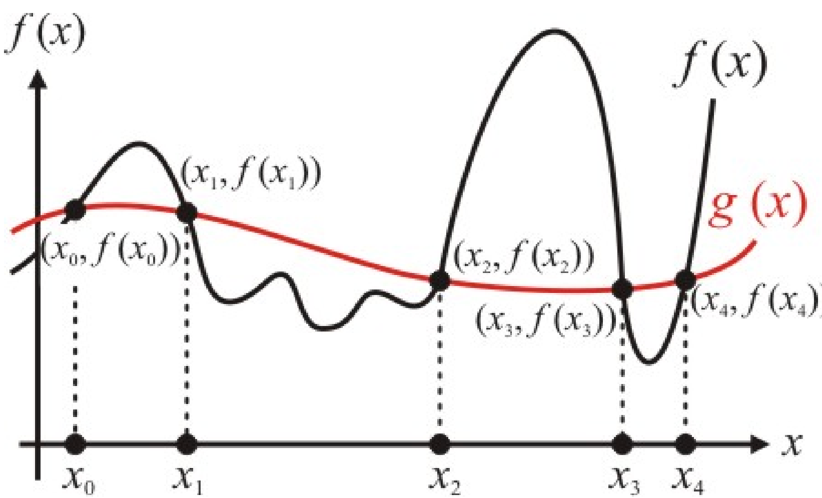
Conceito geral

“nós da interpolação”

- Dados $(n+1)$ pontos distintos $x_0, x_1, \dots, x_n$, e respectivos valores $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$

- A interpolação de $f(x)$ consiste em determinar $g(x)$ que:

$$\begin{cases} g(x_0) = f(x_0) \\ g(x_1) = f(x_1) \\ \quad\vdots \\ g(x_n) = f(x_n) \end{cases}$$



- Nas definições a seguir, $g(x)$ é polinomial
- $g(x)$ poderia ser uma função racional, trigonométricas, etc
- Existem diferentes formas de obter $g(x)$

Interpolação Polinomial

Teorema: Existe um único polinômio $p_n(x)$, de grau $\leq n$, tal que $p_n(x_i) = f(x_i)$, para $i = 0, \dots, n$ e desde que $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$

- A partir de $n+1$ pontos: $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$, queremos $p_n(x)$, de grau $\leq n$, dado por:

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

tal que $p_n(x_k) = f(x_k)$. Logo, podemos formular:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

$n+1$ equações

$n+1$ variáveis

Interpolação Polinomial

- No SL anterior, **A** é uma Matriz de Vandermonde:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{pmatrix}$$

- Se $x_0, \ldots, x_n$ são distintos, então $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, logo, a solução do SL é única!
- Solução é única implica $a_0, a_1, \ldots, a_n$ únicos
- Logo $p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ é único

[o que demonstra o teorema]

Exercício (do livro)

- Determine o polinômio de grau ≤ 2 que interpola os pontos:

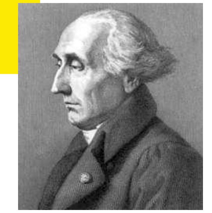
$\boldsymbol{x}$	**-1**	**0**	**2**
$f(x)$	4	1	-1

Outras formas de obter o polinômio interpolador

- A partir da aplicação direta do teorema, fazendo a resolução do SL, conseguimos obter o polinômio interpolador $p_n(x)$

- Existem ainda outras maneiras:
  - Forma de Lagrange
  - Forma de Newton

Forma de Lagrange



- Dados $x_0, x_1, \dots, x_n$ todos distintos e $y_i = f(x_i)$ para $i = 0, \dots, n$ e $p_n(x)$, o polinômio interpolador $p_n(x)$, de grau $\leq n$, é representado na forma:

$$\boxed{p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x) \qquad \bigstar}$$

onde $L_k(x)$, para $k = 0, \dots, n$, são de grau n

- Observando $\bigstar$, para termos $p_n(x_i) = y_i$ basta que:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 \text{ se } k \neq i \\ 1 \text{ se } k = i \end{cases}$$

- Uma expressão que atende a essas condições é:

$$\boxed{L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}}$$

Forma de Lagrange

- Não há dificuldades observar que:
  - $L_k(x_k) = 1$

    Numerador torna-se igual ao denominador

  - $L_k(x_i) = 0$

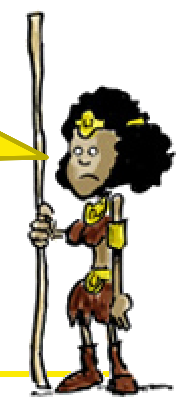
    A i-ésima parcela do numerados torna-se nula, anulando assim todo o numerador

- É direto notar: $p_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x_i) = y_i L_i(x_i) = y_i$

- Como $L_k(x)$ é de grau n, $p_n(x)$ é de grau n também, pois:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$$

Esta é a "Forma de Lagrange" para o polinômio interpolador



Exemplo (do livro)

- Segundo a forma de Lagrange, adotando dois pontos genéricos quaisquer, x_0 e x_1, obtenha a expressão do polinômio que interpola tais pontos.

Exercício (do livro)

- Utilizando a Forma de Lagrange, determine o polinômio que interpola os pontos:

$\boldsymbol{x}$	**-1**	**0**	**2**
$f(x)$	4	1	-1

Diferenças Divididas (Operador)

- Sejam $x_0, \dots, x_n$ pontos distintos onde $f(x)$ é conhecido
- O Operador Diferenças Divididas é definido por:

  - Ordem 0: $f[x_0] = f(x_0)$
  - Ordem 1: $f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$
  - Ordem 2: $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$

    $\vdots$

  - Ordem n: $f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{f[x_1,x_2,\dots,x_n]-f[x_0,x_1,\dots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$

$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k]$ é a Diferença Dividida de ordem k de $f(x)$ sobre os $k+1$ pontos $x_0, x_1, \dots, x_k$

Diferença Dividida (Tabela)

x	**Ordem 0**	**Ordem 1**	**Ordem 2**	**Ordem 3**	$\cdots$	**Ordem n**
x_0	$f[x_0]$					
		$f[x_0, x_1]$				
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$			
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		$\ddots$	
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$		$f[x_0, \dots, x_n]$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$	$\vdots$	$⋰$	
		$f[x_3, x_4]$	$\vdots$	$\vdots$		
x_4	$f[x_4]$	$\vdots$	$\vdots$	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$			
$\vdots$	$\vdots$	$f[x_{n-1}, x_n]$				
x_n	$f[x_n]$					

A Diferença Dividida é simétrica, ou seja, $f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k] = f\left[x_{j_0}, x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k}\right]$ para qualquer permutação $x_{j_0}, x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k}$ dos pontos x_i, $i = 0, \dots, k$

Exercício (do livro)

- Construa a Tabela de Diferenças Divididas a partir dos seguintes valores tabelados:

x	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
$f(x)$	1	1	0	-1	-2

Forma de Newton

- Dados $x_0, x_1, \ldots, x_n$ todos distintos e $y_i = f(x_i)$ para $i = 0, \ldots, n$, o polinômio interpolador na Forma de Newton é representado por:

$$p_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$\cdots + d_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

onde:

- d_k é o operador de diferenças divididas de ordem k, que envolve os pontos $(x_j, f(x_j))$, com $j = 0,1, \ldots, k$

Forma de Newton – grau 0

- Seja $p_0(x)$ o polinômio de grau 0 que interpola $f(x)$ em $x = x_0$
- Logo, $p_0(x) = f(x_0) = f[x_0]$

- Para todo $x \in [a, b]$ e $x \neq x_0$:

$$f[x_0, x] = \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{p_0(x)} + \underbrace{(x - x_0)f[x_0, x]}_{E_0(x)}$$

Erro ao aproximar $f(x)$ por $p_0(x)$

Forma de Newton – grau 1

- Seja $p_1(x)$ o polinômio de grau 1 que interpola $f(x)$ em x_0 e x_1, logo:

$$f[x_0, x_1, x] = f[x_1, x_0, x] = \frac{f[x_0, x] - f[x_1, x_0]}{x - x_1} =$$

$$\frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f[x_1, x_0]}{x - x_1} = \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f[x_1, x_0]}{(x - x_1)(x - x_0)}$$

$$f(x) = \underbrace{\overbrace{f(x_0)}^{p_0(x)} + \overbrace{(x - x_0)f[x_1, x_0]}^{q_1(x)}}_{p_1(x)} + \underbrace{(x - x_1)(x - x_0)f[x_0, x_1, x]}_{E_1(x)}$$

Forma de Newton – grau n

- Observa-se que $p_k(x) = p_{k-1}(x) + q_k(x)$
- Indutivamente:

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

- O erro de aproximação é dado por:

$$E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]$$

É fácil verificar que nos nós o <u>erro</u> de $p_n(x)$ é nulo!

Exercício (do livro)

- Use a Forma de Newton para obter o polinômio $p_2(x)$ que interpola $f(x)$ no pontos:

$\boldsymbol{x}$	**-1**	**0**	**2**
$f(x)$	4	1	-1

Erro na interpolação

- O erro cometido ao aproximar uma função por um polinômio de grau $\leq n$ é dado por:

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

- O seguinte teorema define exatamente o erro:

Sejam $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $(n+1)$ e $f(x)$ com derivadas de até ordem $(n+1)$ para os pontos em $[a, b]$.
Seja ainda $p_n(x)$ o polinômio interpolador de $f(x)$ nos pontos dados.
Para qualquer ponto em $[a, b]$, o erro é expresso por:

$$E_n(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

com $\xi_x \in [a, b]$

Teorema da Última Diferença Dividida (... n-ésima mais uma)

Para qualquer $x \in [x_0, x_n]$, existe $\xi_x \in [x_0, x_n]$ tal que:

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

Limitante Superior para o Erro

- Conhecemos a expressão do erro:

$$E_n(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

- Porém, como desconhecemos $f^{(n+1)}$(x) e ξ_x que satisfaça a expressão acima, a importância de tal expressão é puramente teórica

- Mas podemos adotar a mesma abordagem usada no início do curso, em Análise de Erros!

CONSIDERAR O PIOR CASO...

Limitante Superior para o Erro

- $E_n(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_n) \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$

$$|E_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \leq$$
$$\leq |(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)| \cdot \bar{M}_{n+1}$$

onde $\bar{M}_{n+1}$é o maior valor em módulo dentre as diferenças divididas de ordem $n + 1$

Exercício (claro, do livro)

- Dado:

x	**0.2**	**0.34**	**0.4**	**0.52**	**0.6**	**0.72**
$f(x)$	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

a) Obtenha $f(0.47)$ via $p_2(x)$

b) Dê um estimativa do erro

Interpolação Inversa

- Dado $\bar{y} \in [f(x_0), f(x_n)]$, qual seria $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = \bar{y}$? (Problema de Interpolação Inversa)

- Para resolver este problema:
  - Podemos obter $p_n(x)$ e em seguida encontrar $p_n(\bar{x}) = \bar{y}$
  - Interpolar os valores de $f(x)$ tabelados, isto é:
    - Considerar que x é função de y
    - Assegurar que $f(x)$ seja monótona crescente/decrescemte, o que garante que f^{-1} existe

Exercício (do livro)

- Dado:

x	**0**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**
$f(x)$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Obtenha x tal que $e^x = 1.3165$ com uso de $p_2(x)$ e do conceito de interpolação inversa

Bibliografia da aula

- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais**, 2ª Ed. Pearson, 1996.