CCI-22 Matemática Computacional

Zeros de Funções Reais

Prof. Dr. Johnny Marques
johnny@ita.br

Raízes Reais de um Polinômio

- Regra de Descartes:
  - Segundo a regra, se os termos de um polinômio com coeficientes reais são colocados em ordem decrescente de grau, então o número de raízes positivas do polinômio é:
    - Igual ao número de permutações de sinal; ou
    - Menor por uma diferença par.
  - Mais precisamente falando, o número de permutações é igual ao número de raízes positivas acrescido do número de raízes imaginárias
  - Como as raízes negativas de p(x) são as positivas de p(-x), também é possível utilizar essa mesma regra na enumeração das raízes reais negativas

Raízes Reais de um Polinômio

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$$

$+ \quad + \quad - \quad -$

Uma troca de sinal: p(x) tem 1 raiz positiva

$$p(-x) = -x^3 + 2x^2 + 3x - 5$$

$- \quad + \quad + \quad -$

Duas trocas de sinal: p(x) pode ter 2 ou 0 raízes negativas

- Se p(x) tiver 2 raízes negativas, não terá raízes complexas; caso contrário, terá 2 raízes complexas
- Possibilidades:

Raízes		
Positivas	Negativas	Complexas
1	2	0
1	0	2

Sempre aos pares

Raízes Reais de um Polinômio

$$p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

\+ - + - +

Quatro trocas de sinal: p(x) pode ter 4, 2 ou 0 raízes positivas

$$p(-x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

\+ + + + +

Nenhuma troca de sinal: p(x) não tem raízes negativas

- Possibilidades:

Raízes		
Positivas	Negativas	Complexas
4	0	0
2	0	2
0	0	4

Raízes Complexas de um Polinômio

- Seja o polinômio de grau n de coeficientes reais:
  $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$

- Regra de Huat: Se $p(0) \neq 0$ e para algum k, $0<k<n$, tivermos $(a_k)^2 \leq a_{k-1}.a_{k+1}$, então p(x) terá raízes complexas

- Um caso particular é a Regra da Lacuna:

  - Se $p(0) \neq 0$ e para algum k, $0<k<n$, tivermos $a_k = 0$ e $a_{k-1}.a_{k+1} > 0$, então p(x) terá raízes complexas

  - Se $p(0) \neq 0$ e existirem dois ou mais coeficientes nulos sucessivos, então p(x) terá raízes complexas

Raízes Complexas de um Polinômio

$$p(x) = 2x^5 + 3x^4 + x^3 + 2x^2 - 5x + 3$$

$+ \quad + \quad + \quad + \quad - \quad +$

2 ou 0 positivas

$$p(-x) = -2x^5 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 + 5x + 3$$

$- \quad + \quad - \quad + \quad + \quad +$

3 ou 1 negativas

- Regra de Huat: $(a_2)^2 \leq a_1.a_3$, pois $1 < 3.2$
  - Portanto, p(x) tem raízes complexas
- Possibilidades:

Raízes		
Positivas	Negativas	Complexas
2	1	2
0	3	2
0	1	4

Raízes Complexas de um Polinômio

$$p(x) = 2x^6 - 3x^5 - 2x^3 + x^2 - x + 1$$

$+ \quad - \quad - \quad + \quad - \quad +$

4, 2 ou 0 positivas

$$p(-x) = 2x^6 + 3x^5 + 2x^3 + x^2 + x + 1$$

$+ \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +$

não tem negativas

- Regra da Lacuna: $a_2 = 0$ e $a_1.a_3 > 0$, pois $(-3).(-2) > 0$
  - Portanto, p(x) tem raízes complexas

- Possibilidades:

	Raízes	
Positivas	Negativas	Complexas
4	0	2
2	0	4
0	0	6

Como encontrar possíveis zeros de funções?

- Nas mais diversas área das ciências exatas ocorrem, frequentemente, situações eu envolvem a resolução de uma equação do tipo $f(x) = 0$.
- Como obter raízes reais de uma equação qualquer em um intervalo específico?
- Ideia Central: fazer uma aproximação inicial para a raiz e em seguida refinar essa aproximação usando um método iterativo.
- Sendo uma aproximação usaremos uma precisão (ε) aceitável e pré-definida.

Métodos Disponíveis

- Método da Bissecção
- Método da Falsa Posição
- Método do Ponto Fixo
- Método de Newton-Raphson
- Método da Secante

- Importante definir uma condição de parada e uma precisão da aproximação!

Método da Bissecção

- Seja $f(x)$ contínua em um intervalo $[a, b]$ e tal que $f(a).f(b) < 0$. Logo $f(a)$ e $f(b)$ possuem sinais opostos.
- Objetivo: reduzir a amplitude do intervalo que contém a raiz até se atingir a precisão requerida $(b - a) < \mathcal{E}$, usando para isso a sucessiva divisão de $[a, b]$.
- O algoritmo do próximo slide, apresenta como se comporta iterativamente o Método da Bissecção.
- Terminado o processamento deste algoritmo, teremos um intervalo $[a, b]$ que contém a raiz e $(b - a) < \mathcal{E}$, sendo $\bar{x}$ uma aproximação aceitável da raiz exata.

Método da Bissecção - Algoritmo

Condições iniciais: $f(x)$ contínua em $[a, b]$ e $f(a).f(b) < 0$.

Passo 1: Entrar intervalo $[a, b]$ e precisão $\mathcal{E}$.

Passo 2: Se$(b - a) < \mathcal{E}$, então escolha para $\bar{x}$ qualquer $x \epsilon [a, b]$ e vá para o **Passo 10**.

Passo 3: $k = 1$

Passo 4: $M = f(a)$

Passo 5: $x = \frac{a+b}{2}$

Passo 6: Se $M.f(x) > 0$, faça $a = x$ e vá para o **Passo 8**.

Passo 7: $b = x$

Passo 8: Se$(b - a) < \mathcal{E}$, então escolha para $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$ e vá para o **Passo 10**.

Passo 9: $k = k + 1$ e vá para o **Passo 4**.

Passo 10: FIM

Método da Bissecção

- Exemplo 1: Encontrar uma raiz de $f(x) = x^3 - 9x + 3$ no intervalo $I = [0,1]$ e $\mathcal{E} = 10^{-3}$.

Primeira Iteração:

$k = 1$

$\varepsilon = b - a = 1 - 0 = 1 > 10^{-3}$

$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = 0{,}5$$

$f(a) = f(0) = 0^3 - 9.0 + 3 = 3$

$f(b) = f(1) = 1^3 - 9.1 + 3 = -5$

$f(x) = f(0{,}5) = 0{,}5^3 - 9.0{,}5 + 3 = -1{,}375$

Continua com o intervalo $0 \leq x \leq 0{,}5$

Método da Bissecção

Segunda Iteração:

$$k = 2$$

$$\varepsilon = b - a = 0{,}5\ - 0 = 0{,}5 > 10^{-3}$$

$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{0 + 0{,}5}{2} = 0{,}25$$

$$f(a) = f(0) = 3$$

$$f(b) = f(0{,}5) = -1{,}375$$

$$f(x) = f(0{,}25) = 0{,}25^3 - 9.0{,}25 + 3 = 0{,}765625$$

Continua com o intervalo $0{,}25 \leq x \leq 0{,}5$

Método da Bissecção

Terceira Iteração:

$k = 3$

$\varepsilon = b - a = 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25 > 10^{-3}$

$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{0{,}25 + 0{,}5}{2} = 0{,}375$$

$f(a) = f(0{,}25) = 0{,}765625$

$f(b) = f(0{,}5) = -1{,}375$

$f(x) = f(0{,}375) = -0{,}322265625$

Continua com o intervalo $0{,}25 \leq x \leq 0{,}375$

Método da Bissecção

Quarta Iteração:

$k = 4$

$\varepsilon = b - a = 0{,}375\ - 0{,}25 = 0{,}125 > 10^{-3}$

$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{0{,}25 + 0{,}375}{2} = 0{,}3125$$

$f(a) = f(0{,}25) = 0{,}765625$

$f(b) = f(0{,}375) = -0{,}322265625$

$f(x) = f(0{,}3125) = 0{,}2180175781$

Continua com o intervalo $0{,}3125 \leq x \leq 0{,}375$

Método da Bissecção

Quinta Iteração:

$k = 5$

$\varepsilon = b - a = 0{,}375 - 0{,}3125 = 0{,}0625 > 10^{-3}$

$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{0{,}3125 + 0{,}375}{2} = 0{,}34375$$

$f(a) = f(0{,}3125) = 0{,}2180175781$

$f(b) = f(0{,}375) = -0{,}322265625$

$f(x) = f(0{,}34375) = -0{,}0531311035$

Continua com o intervalo $0{,}3125 \leq x \leq 0{,}34375$

Método da Bissecção

Sexta Iteração:

$k = 6$

$\varepsilon = b - a = 0{,}34375 - 0{,}3125 = 0{,}03125 > 10^{-3}$

$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{0{,}3125 + 0{,}34375}{2} = 0{,}328125$$

$f(a) = f(0{,}3125) = 0{,}2180175781$

$f(b) = f(0{,}34375) = -0{,}0531311035$

$f(x) = f(0{,}328125) = 0{,}0822029114$

Continua com o intervalo $0{,}328125 \leq x \leq 0{,}34375$

Método da Bissecção

Sétima Iteração:

$k = 7$

$\varepsilon = b - a = 0{,}34375 - 0{,}328125 = 0{,}015625 > 10^{-3}$

$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{0{,}328125 + 0{,}34375}{2} = 0{,}3359375$$

$f(a) = f(0{,}328125) = 0{,}0822029114$

$f(b) = f(0{,}34375) = -0{,}0531311035$

$f(x) = f(0{,}3359375) = 0{,}0144743919$

Continua com o intervalo $0{,}3359375 \leq x \leq 0{,}34375$

Método da Bissecção

Oitava Iteração:

$$k = 8$$

$$\varepsilon = b - a = 0{,}34375 - 0{,}3359375 = 0{,}0078125 > 10^{-3}$$

$$x = \frac{a + b}{2} = \frac{0{,}3359375 + 0{,}34375}{2} = 0{,}33984375$$

$$f(a) = f(0{,}3359375) = 0{,}0144734919$$

$$f(b) = f(0{,}34375) = -0{,}0531311035$$

$$f(x) = f(0{,}33984375) = -0{,}0193439126$$

Continua com o intervalo $0{,}3359375 \leq x \leq 0{,}33984375$

Método da Bissecção

Nona Iteração:

$k = 9$

$\varepsilon = b - a = 0{,}33984375 - 0{,}3359375 = 0{,}00390625 > 10^{-3}$

$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{0{,}3359375 + 0{,}33984375}{2} = 0{,}337890625$$

$f(a) = f(0{,}3359375) = 0{,}0144734919$

$f(b) = f(0{,}33984375) = -0{,}0193439126$

$f(x) = f(0{,}337890625) = -0{,}0024386272$

Continua com o intervalo $0{,}3359375 \leq x \leq 0{,}337890625$

Método da Bissecção

Décima Iteração:

$k = 10$

$\varepsilon = b - a = 0{,}337890625 \; - 0{,}3359375 = 0{,}001953125 > 10^{-3}$

$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{0{,}3359375 + 0{,}337890625}{2} = 0{,}3369140625$$

$f(a) = f(0{,}3359375) = 0{,}0144734919$

$f(b) = f(0{,}337890625) = -0{,}0024386272$

$f(x) = f(0{,}3369140625) = 0{,}006169185$

Continua com o intervalo $0{,}3369140625 \leq x \leq 0{,}337890625$

Método da Bissecção

Décima-Primeira Iteração:

$k = 11$

$\varepsilon = b - a = 0{,}337890625 - 0{,}3369140625 = 0{,}0009765625 < 10^{-3}$

$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{0{,}3369140625 + 0{,}337890625}{2} = 0{,}33740234375$$

- Logo $\bar{x} = 0{,}33740234375$ é uma raiz aceitável dentro da precisão $\mathcal{E} = 10^{-3}$.

Assim como qualquer valor de x em:

$$0{,}3369140625 \leq x \leq 0{,}33740234375$$

MATLAB – Exemplo 1

```
format long
f=@(x) x.^3-9*x+3;
a=0; b=1; epsilon=0.001; maxIteracoes=1000;
Bisseccao(f,a,b,epsilon,maxIteracoes);
function [r, k] = Bisseccao(f, a, b, epsilon, maxIteracoes)
k=0;
while k < maxIteracoes
    r = (a + b) / 2;
    k = k + 1;
    if abs(b-a) < epsilon
        r=(a+b)/2;
        fprintf('O valor da raiz aproximada é %.12f, obtido em %d iterações.\n',r,k);
        break;
    end
    if f(a)*f(r)>0
        a = r;
    else
        b = r;
    end
end

end
```

Command Window

```
>> Cap3_ex1
O valor da raiz aproximada é 0.337402343750, obtido em 11 iterações.
```

Método da Falsa Posição

- Considera as mesmas condições do método da Bissecção.
- Seja $f(x)$ contínua em um intervalo $[a, b]$ e tal que $f(a).f(b) < 0$. Logo $f(a)$ e $f(b)$ possuem sinais opostos.
- Porém ao invés de tomar a média aritmética entre a e b, o método da Falsa Posição toma a média ponderada entre a e b com pesos $|f(b)|$ e $|f(a)|$.

$$x = \frac{a.|f(b)| + b.|f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|}$$

- Como $f(a)$ e $f(b)$ possuem sinais opostos.

$$x = \frac{a.f(b) - b.f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Método da Falsa Posição

- Outra diferença é que neste método são especificadas duas precisões ε_1 e ε_2.
  - $\varepsilon_1 \rightarrow$ precisão para $\bar{x}$.
  - $\varepsilon_2 \rightarrow$ precisão para $f(\bar{x})$.
- Uma vez atendida uma das precisões, o método poderá ser encerrado.

Método da Falsa Posição - Algoritmo

Condições iniciais: $f(x)$ contínua em $[a,b]$ e $f(a).f(b) < 0$.

Passo 1: Entrar intervalo $[a,b]$ e precisão $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$.

Passo 2: Se $(b-a) < \mathcal{E}_1$, então escolha para $\bar{x}$ qualquer $x \epsilon [a,b]$ e vá para o **Passo 12**.

Passo 3: Se $|f(a)| < \mathcal{E}_2$ ou $|f(b)| < \mathcal{E}_2$, escolha a ou b como $\bar{x}$ e vá para o **Passo 12**.

Passo 4: $k = 1$

Passo 5: $M = f(a)$

Passo 6: $x = \frac{a.f(b)-b.f(a)}{f(b)-f(a)}$

Passo 7: Se $|f(x)| < \mathcal{E}_2$, escolha $x = \bar{x}$ e vá para o **Passo 12**.

Passo 8: $b = x$

Passo 9: Se $M.f(x) > 0$, faça $a = x$ e vá para o **Passo 12**.

Passo 10: Se$(b-a) < \mathcal{E}_1$, então escolha para $\bar{x}$ qualquer $x \epsilon [a,b]$ e vá para o **Passo 12**.

Passo 11: $k = k + 1$ e vá para o **Passo 6**.

Passo 12: FIM

Método da Falsa Posição

- Exemplo 2: Encontrar uma raiz de $f(x) = x^3 - 9x + 3$ no intervalo $I = [0,1]$, $\mathcal{E}_1 = 10^{-3}$ e $\mathcal{E}_2 = 10^{-3}$.

Primeira Iteração:

$k = 1$

$\varepsilon_1 = b - a = 1 - 0 = 1 > 10^{-3}$

$f(a) = f(0) = 0^3 - 9.0 + 3 = 3$ (logo $|f(a)| > \varepsilon_2$)

$f(b) = f(1) = 1^3 - 9.1 + 3 = -5$ (logo $|f(b)| > \varepsilon_2$)

$$x = \frac{a.f(b) - b.f(a)}{f(b) - f(a)} = 0{,}375$$

$f(x) = f(0{,}375) = -0{,}322265625$ (logo $|f(x)| > \varepsilon_2$)

Continua com o intervalo $0 \leq x \leq 0{,}375$

Método da Falsa Posição

Segunda Iteração:

$k = 2$

$\varepsilon_1 = b - a = 0{,}375 \; - 0 = 0{,}375 > 10^{-3}$

$f(a) = f(0) = 0^3 - 9.0 + 3 = 3 \text{ (logo } |f(a)| > \varepsilon_2)$

$f(b) = f(0{,}375) = -0{,}322265625 \text{ (logo } |f(b)| > \varepsilon_2)$

$$x = \frac{a.f(b) - b.f(a)}{f(b) - f(a)} = 0{,}3386243386$$

$f(x) = f(0{,}3386243386) = -0{,}0087901993 \text{ (logo } |f(x)| > \varepsilon_2)$

Continua com o intervalo $0 \leq x \leq 0{,}338624386$

Método da Falsa Posição

Terceira Iteração:

$k = 3$

$\varepsilon_1 = b - a = 0{,}3386243386 \; - 0 = 0{,}3386243386 > 10^{-3}$

$f(a) = f(0) = 0^3 - 9.0 + 3 = 3 \text{ (logo } |f(a)| > \varepsilon_2)$

$f(b) = f(0{,}3386243386) = -0{,}0087901993 \text{ (logo } |f(b)| > \varepsilon_2)$

$$x = \frac{a.f(b) - b.f(a)}{f(b) - f(a)} = 0{,}3376350455$$

$f(x) = f(0{,}3376350455) = -0{,}0002258842 \text{ (logo } |f(x)| < \varepsilon_2)$

- Logo $\bar{x} = 0{,}3376350455$ é uma raiz aceitável dentro da precisão $\mathcal{E}_2 = 10^{-3}$.

MATLAB – Exemplo 2

```
format long
f=@(x) x.^3-9*x+3;
a=0; b=1; epsilon1=0.001; epsilon2=0.001; maxIteracoes=1000;
FalsaPosicao(f,a,b,epsilon1, epsilon2,maxIteracoes);
function [r, k] = FalsaPosicao(f, a, b, epsilon1, epsilon2, maxIteracoes)
k=0;
while k < maxIteracoes
    r=(a*f(b)-b*f(a))/(f(b)-f(a));
    k = k + 1;
    yr = f(r);
    if abs(b-a) < epsilon1 || abs(yr) < epsilon2
        fprintf('O valor da raiz aproximada é %.12f, obtido em %d iterações.\n',r,k);
        break;
    end
    if f(a)*yr>0
        a = r;
    else
        b = r;
    end
end
end
```

Command Window

New to MATLAB? See resources for Getting Started.

```
>> Cap3_ex2
O valor da raiz aproximada é 0.337635045511, obtido em 3 iterações.
```

Método do Ponto Fixo

- Seja $f(x)$ contínua em um intervalo $[a, b]$ que contém um raiz da equação $f(x) = 0$.
- O Método do Ponto Fixo consiste em transformar esta equação $f(x) = 0$ em uma equivalente $x = \varphi(x)$.
- A partir de uma aproximação inicial x_0 gerar um sequência $\{x_k\}$ de aproximações para a raiz R pela relação $x_k = \varphi(x_{k-1})$, pois a função $\varphi(x)$ é tal que $f(R) = 0$, se e somente se, $\varphi(R) = R$.
- Transformamos assim o problema de encontrar um zero de $f(x)$ no problema de encontrar um ponto fixo de $\varphi(x)$.
- Uma função $\varphi(x)$ que satisfaz a condição acima é chamada de função de iteração para a equação $f(x) = 0$.

Método do Ponto Fixo

- Exemplos de funções de iteração para $x^2 + \mathrm{x} - 6 = 0$
  - $\varphi_1 = 6 - x^2$, já que:

    $x^2 + \mathrm{x} - 6 = 0$

    $x = 6 - x^2$, logo $x = \varphi_1(x) = 6 - x^2$
  - $\varphi_2 = \frac{6}{x} - 1$, já que:

    $x^2 + \mathrm{x} - 6 = 0$

    $x^2 = 6 - x \quad (\div x)$

    $x = \frac{6}{x} - 1$, logo $x = \varphi_2(x) = \frac{6}{x} - 1$

- Para o método do Ponto Fixo convergir, é necessário que $|\varphi'(x)|<1$ para todo o intervalo utilizado para o método.
- Assim, nem toda função $x = \varphi(x)$ garantirá convergência do método.

Método do Ponto Fixo - Algoritmo

Condições iniciais: $f(x) = 0$ e equação equivalente $x = \varphi(x)$ e $|\varphi'^{(x)}| < 1$.

Passo 1: Dados x_0, $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$.

Passo 2: Se $|f(x_0)| < \mathcal{E}_1$, faça $\bar{x} = x_0$ e vá para o **Passo 7**.

Passo 3: $k = 1$

Passo 4: $x_k = \varphi(x_{k-1})$

Passo 5: Se $|f(x_k)| < \mathcal{E}_1$ ou $|x_k - x_{k-1}| < \mathcal{E}_2$, então faça $\bar{x} = x_k$ e vá para o **Passo 7**.

Passo 6: $k = k + 1$ e vá para o **Passo 4**.

Passo 7: FIM

Método do Ponto Fixo

- Exemplo 3: Encontrar uma raiz de $f(x) = x^3 - 9x + 3$ com a função de iteração $\varphi(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{1}{3}$, com x_0 =0,5, no intervalo $I = [0,1]$, $\mathcal{E}_1 = 10^{-3}$ e $\mathcal{E}_2 = 10^{-3}$.

$f(x_0) = f(0{,}5) = -1{,}375$, logo $|f(x_0)| > \mathcal{E}_1$

Primeira Iteração:

$k = 1$

$$x_1 = \varphi(x_0) = \frac{0{,}5^3}{9} + \frac{1}{3} = 0{,}3472222222$$

$|x_1 - x_0| = 0{,}1527777778$, logo $|x_1 - x_0| > \mathcal{E}_2$

$f(x_1) = 0{,}3472222222^3 - 9.0{,}3472222222 + 3$

$f(x_1) = -0{,}0831377527$, logo $|f(x_1)| > \mathcal{E}_1$

Método do Ponto Fixo

Segunda Iteração:

$k = 2$

$$x_2 = \varphi(x_1) = \frac{0{,}3472222222^3}{9} + \frac{1}{3} = 0{,}3379846941$$

$|x_2 - x_1| = 0{,}0092375281$, logo $|x_2 - x_1| > \varepsilon_2$

$f(x_2) = 0{,}3379846941^3 - 9.0{,}3379846941 + 3$

$f(x_2) = -0{,}0032530205$, logo $|f(x_2)| > \varepsilon_1$

Método do Ponto Fixo

Terceira Iteração:

$k = 3$

$$x_3 = \varphi(x_2) = \frac{0{,}3379846941^3}{9} + \frac{1}{3} = 0{,}3376232474$$

$|x_3 - x_2| = 0{,}00036144467$, logo $|x_3 - x_2| < \varepsilon_2$

$f(x_3) = 0{,}3376232474^3 - 9.0{,}3376232474 + 3$

$f(x_3) = -0{,}0001237359$, logo $|f(x_3)| < \varepsilon_1$

- Logo $\bar{x} = 0{,}3376232474$ é uma raiz aceitável dentro das precisões $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ e $\varepsilon_2 = 10^{-3}$.

MATLAB- Exemplo 3

```
format long
f=@(x) x.^3-9*x+3;
phi=@(x) ((x.^3)/9)+1/3; maxIteracoes=1000;
a=0; b=1; epsilon1=0.001; epsilon2=0.001;
x0=0.5;
PontoFixo(f,phi,x0,epsilon1, epsilon2, maxIteracoes);
function [r, k] = PontoFixo(f, phi, x0, epsilon1, epsilon2, maxIteracoes)
k=0;
if abs(f(x0))<epsilon1
    r=x0;
    fprintf('O valor da raiz aproximada é %.12f, obtido em %d iterações.\n',r,k);
    return;
end
k=1; r=x0; tmp=r;
while k<maxIteracoes
    tmp=r;
    r=phi(r);
    if abs(f(r))<epsilon1 || abs(r-tmp)<epsilon2
        break;
    end
    k=k+1;
end
fprintf('O valor da raiz aproximada é %.12f, obtido em %d iterações.\n',r,k);
end
```

Command Window

```
>> Cap3_ex3
O valor da raiz aproximada é 0.337623247380, obtido em 3 iterações.
```

Método do Newton-Raphson

- Na tentativa de acelerar a convergência do método de Ponto Fixo, o método de Newton-Raphson escolhe para função de iteração a função $\varphi(x)$ tal que $\varphi'(R) = 0$.
- Assim, escolhido x_0, a sequência $\{x_k\}$ será determinada por:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \quad \text{com} \qquad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Método de Newton-Raphson - Algoritmo

Condições iniciais: $f(x) = 0$ e equação equivalente $x = \varphi(x)$.

Passo 1: Dados x_0, $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$.

Passo 2: Se $|f(x_0)| < \mathcal{E}_1$, faça $\bar{x} = x_0$ e vá para o **Passo 7**.

Passo 3: $k = 1$

Passo 4: $x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$

Passo 5: Se $|f(x_k)| < \mathcal{E}_1$ ou $|x_k - x_{k-1}| < \mathcal{E}_2$, então faça $\bar{x} = x_k$ e vá para o **Passo 7**.

Passo 6: $k = k + 1$ e vá para o **Passo 4**.

Passo 7: FIM

Método de Newton-Raphson

- Exemplo 4: Encontrar uma raiz de $f(x) = x^3 - 9x + 3$, com $x_0 = 0{,}5$, no intervalo $I = [0{,}1]$, $\mathcal{E}_1 = 10^{-3}$ e $\mathcal{E}_2 = 10^{-3}$.

$f'(x) = 3x^2 - 9 \qquad f'(x_0) = f'(0{,}5) = 3.(0{,}5)^2 - 9 = -8{,}25$

$f(x_0) = f(0{,}5) = -1{,}375$, logo $|f(x_0)| > \mathcal{E}_1$

Primeira Iteração:

$k = 1$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0{,}5 - \frac{(-1{,}375)}{(-8{,}25)} = 0{,}333333333$$

$|x_1 - x_0| = 0{,}166666667 > \mathcal{E}_2$

$f(x_1) = 0{,}333333333^3 - 9.0{,}333333333 + 3 = 0{,}037037037$

logo $|f(x_1)| > \mathcal{E}_1$

$f'(x_1) = 3.0{,}333333333^2 - 9 = -8{,}666666667$

Método de Newton-Raphson

Segunda Iteração:

$k = 2$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0{,}333333333 - \frac{(0{,}037037037)}{(-8{,}666666667)}$$

$$x_2 = 0{,}337606838$$

$$|x_2 - x_1| = 0{,}004273504 > \varepsilon_2$$

$$f(x_2) = 0{,}337606838^3 - 9.0{,}337606838 + 3$$

$$f(x_2) = 0{,}000018341 < \varepsilon_1$$

- Logo $\bar{x} = 0{,}337606838$ é uma raiz aceitável dentro da precisão $\varepsilon_1 = 10^{-3}$.

MATLAB – Exemplo 4

```
format long
f=@(x) x.^3-9*x+3;
df=@(x) 3*x.^2-9;
a=0; b=1; epsilon1=0.001; epsilon2=0.001; maxIteracoes=1000;
x0=0.5;
NewtonRaphson(f, df, x0, epsilon1,  epsilon2, maxIteracoes);
function [r, k] = NewtonRaphson(f, df, x0, epsilon1,  epsilon2, maxIteracoes)
r=x0; tmp=0; k=0;
if abs(f(x0))<epsilon1
    fprintf('O valor da raiz aproximada é %.12f, obtido em %d iterações.\n',r,k);
    return;
end
while k<maxIteracoes
    tmp=r;
    r=r-(f(r)/df(r));
    k=k+1;
    if abs(f(r))<epsilon1 || abs(r-tmp)<epsilon2
        fprintf('O valor da raiz aproximada é %.12f, obtido em %d iterações.\n',r,k);
        break;
    end
end
end
```

Command Window

```
>> Cap3_ex4
O valor da raiz aproximada é 0.337606837607, obtido em 2 iterações.
```

Método da Secante

- Similar ao método da Newton-Raphson.
- Assim, escolhido x_0, a sequência $\{x_k\}$ será determinada por:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} . (x_k - x_{k-1})$$

com $\quad k = 0, 1, 2, \ldots .$

- Assim, a partir de duas aproximações x_{k-1}e x_k, o ponto x_{k+1} é obtido.

Método da Secante - Algoritmo

Condições iniciais: $f(x) = 0$

Passo 1: Dados $x_0, x_1, \mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$.

Passo 2: Se $|f(x_0)| < \mathcal{E}_1$, faça $\bar{x} = x_0$ e vá para o **Passo 8**.

Passo 3: Se $|f(x_1)| < \mathcal{E}_1$ ou $|x_1 - x_0| < \mathcal{E}_2$, então faça $\bar{x} = x_1$ e vá para o **Passo 8**.

Passo 4: $k = 1$

Passo 5: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} . (x_k - x_{k-1})$

Passo 6: Se $|f(x_{k+1})| < \mathcal{E}_1$ ou $|x_{k+1} - x_k| < \mathcal{E}_2$, então faça $\bar{x} = x_{k+1}$ e vá para o **Passo 8**.

Passo 7: $k = k + 1$ e vá para o **Passo 5**.

Passo 8: FIM

Método de Secante

- Exemplo 5: Encontrar uma raiz de $f(x) = x^3 - 9x + 3$, no intervalo $I = [0,1]$, $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ e $\varepsilon_2 = 10^{-3}$.

  Avaliação Inicial:

  $x_0 = 0 \qquad f(x_0) = f(0) = 3$, logo $|f(x_0)| > \varepsilon_1$

  $x_1 = 1 \qquad f(x_1) = f(1) = -5$, logo $|f(x_1)| > \varepsilon_1$

  $|x_1 - x_0| = 1 > \varepsilon_2$

Primeira Iteração:

$k = 1$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}.(x_1 - x_0) = 1 - \frac{(-5)}{-5-3}.(1-0) = 0{,}375$$

$f(x_2) = f(0{,}375) = (0{,}375)^3 - 9.0{,}375 + 3 = 0{,}322265625$

logo $|f(x_2)| > \varepsilon_1$

$|x_2 - x_1| = |0{,}375 - 1| = 0{,}625 > \varepsilon_2$

Método de Secante

Segunda Iteração:

$k = 2$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)}.(x_2 - x_1)$$

$$= 0,375 - \frac{(-0,32265625)}{-0,32265625 - (-5)}.(0,375 - 1) = 0,331941545$$

$$f(x_3) = f(0,331941545) = (0,331941545)^3 - 9.0,331941545 + 3$$

$= 0,049101138,$ logo $|f(x_3)| > \varepsilon_1$

$|x_3 - x_2| = |0,331941545 - 0,375| = 0,043058455 > \varepsilon_2$

Método de Secante

Terceira Iteração:

$k = 3$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f(x_3) - f(x_2)}.(x_3 - x_2)$$

$$= 0{,}331941545 - \frac{(0{,}049101138)}{0{,}049101138 - (-0{,}322265625)}.(0{,}331941545 - 0{,}375)$$

$$=0{,}337634621$$

$$f(x_4) = f(0{,}337634621) = (0{,}337634621)^3 - 9.0{,}337634621 + 3$$

$$= -0{,}000222206 \text{ logo } |f(x_4)| < \mathcal{E}_1$$

$$|x_4 - x_3| = |0{,}337634621 - 0{,}331941545| = 0{,}0037365379 > \mathcal{E}_2$$

- Logo $\bar{x} = 0{,}337634621$ é uma raiz aceitável dentro da precisão $\mathcal{E}_1 = 10^{-3}$.

MATLAB – Exemplo 5

```
format long
f=@(x) x.^3-9*x+3;
a=0; b=1; epsilon1=0.0001; epsilon2=0.0001; maxIteracoes=1000; x0=a;x1=b;
Secante(f, x0, x1, epsilon1,  epsilon2, maxIteracoes);
function [r, k] = Secante(f, x0, x1, epsilon1,  epsilon2, maxIteracoes)
tmp=x0; r=x1; k=0;
if abs(f(tmp))<epsilon1
    fprintf('O valor da raiz aproximada é %.12f, obtido em %d iterações.\n',tmp,k);
    return;
end
if abs(f(r))<epsilon1 || abs(r-tmp)<epsilon2
    fprintf('O valor da raiz aproximada é %.12f, obtido em %d iterações.\n',r,k);
    return;
end
while k < maxIteracoes
    tmp2=r; r=r-(f(r)/(f(r)-f(tmp)))*(r-tmp); k=k+1;
    if abs(f(r))< epsilon1 || abs(r-tmp2)< epsilon2
        fprintf('O valor da raiz aproximada é %.12f, obtido em %d iterações.\n',r,k);
        break;
    end
    tmp=tmp2;
end
end
```

Command Window

```
>> Cap3_ex5
O valor da raiz aproximada é 0.337634620723, obtido em 3 iterações.
```

MATLAB – Todos os Métodos

Command Window

```
Método da Bissecção
O valor da raiz aproximada é 0.337402343750, obtido em 11 iterações.
Método da Falsa Posição
O valor da raiz aproximada é 0.337635045511, obtido em 3 iterações.
Método do Ponto Fixo
O valor da raiz aproximada é 0.337623247380, obtido em 3 iterações.
Método de Newton-Raphson
O valor da raiz aproximada é 0.337606837607, obtido em 2 iterações.
Método da Secante
O valor da raiz aproximada é 0.337634620723, obtido em 3 iterações.
```