UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José dos Campos
Instituto de Ciência e Tecnologia

Integração Numérica

Prof. Dr. Rogério Galante Negri

Integrando numericamente

- Sabemos que, dada $f(x)$ contínua em $[a, b]$, então existe a primitiva $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$
- O Teorema Fundamental do Cálculo afirma que:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- Existem casos que a obtenção da primitiva não é trivial
- Há casos ainda em que não conhecemos $f(x)$, mas apenas alguns pontos de $[a, b]$

Em casos como estes, métodos numéricos podem ser usados para obter aproximações da integral

Integração Numérica

- Conceito fundamental:

Substituir $f(x)$ por um polinômio com boa aproximação em $[a, b]$

- A integração de polinômios é trivial...

- Há ainda a motivação expressa pelo conceito da Integral de Riemann!

Fórmulas de Newton-Cotes

- Conceito fundamental e considerações:
  - Substituir $f(x)$ por um polinômio com boa aproximação em $[a, b]$
  - Adota-se pontos igualmente "espaçados", assim, $[a, b]$ é subdividido em n subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ tal que:

$$h = x_{i+1} - x_i = (b - a)/n$$

- A expressão geral é:

$$\int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \cdots + A_n f(x_n) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

onde A_i são coeficientes

Fórmulas de Newton-Cotes

- Fórmulas fechadas
  - Regra do Trapézio (RT)
  - Regra do Trapézio Repetida (RTR)
  - Regra de 1/3 de Simpson (RS)
  - Regra de 1/3 de Simpson Repetida (RSR)

- Formulas abertas
  - Quadratura Gaussiana (QG) – Não serão abordadas

Regra do Trapézio

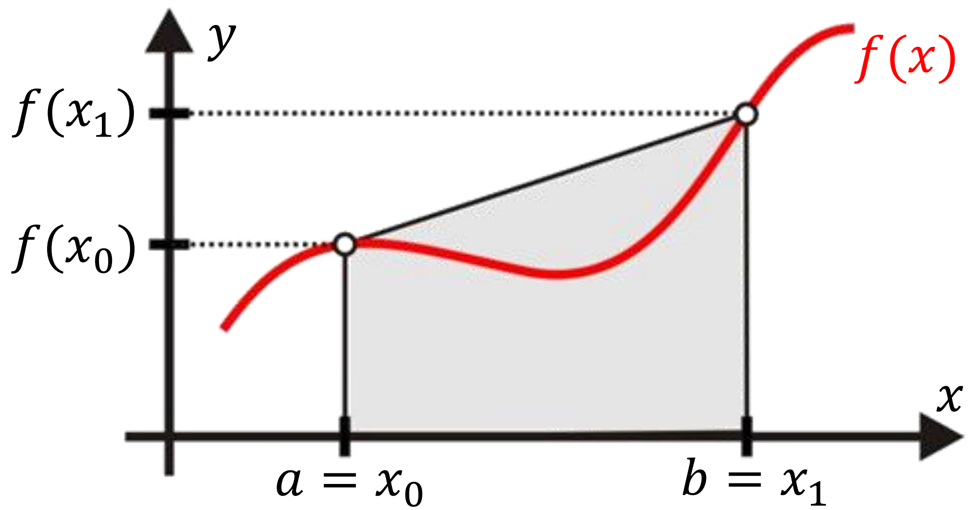
Para nós igualmente espaçados

- Adotando a fórmula de Lagrange para determinar $p_1(x)$ que interpola $f(x)$ em $[x_0, x_1]$, temos:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{x - x_1}{-h} f(x_0) + \frac{x - x_0}{h} f(x_1) \right) dx = I_{RT}$$

- Desenvolvendo: $I_{RT} = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right)$

A aproximação de $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$ pelo trapézio de de altura $h = x_1 - x_0$ e bases $f(x_0)$ e $f(x_1)$ comete erros grosseiros…



Erro de aproximação na RT

- Sabemos que:

$$f(x) = p_1(x) + (x - x_0)(x - x_1)\frac{f''(\xi_x)}{2}$$

com $\xi_x \in (x_0, x_1)$

- Com a integração desta equivalência:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = I_{RT} + \underbrace{\int_{x_0}^{x_1}\left((x - x_0)(x - x_1)\frac{f''(\xi_x)}{2}\right)dx}_{E_{RT}}$$

- Denominando $g(x) = (x - x_0)(x - x_1)$, é fácil perceber que $g(x) < 0$ para $x \in (x_0, x_1)$

- Podemos afirmar que, se $f''(x)$ contínua em $[x_0, x_1]$ então existem $l_{min}, l_{max} \in \mathbb{R}$ tais que $l_{min} \leq f''(x) \leq l_{max}$

Erro de aproximação na RT

- Sendo $l_{min} \leq f''(\xi_x) \leq l_{max}$ e $g(x) < 0$, temos:

$$g(x)l_{min} \geq g(x)f''(\xi_x) \geq g(x)l_{max}$$

- Por sua vez:

$$l_{max} \underbrace{\int_{x_0}^{x_1} g(x)dx}_{<0} \leq \int_{x_0}^{x_1} g(x)f''(\xi_x)dx \leq l_{min} \underbrace{\int_{x_0}^{x_1} g(x)dx}_{<0}$$

$$l_{max} \leq \underbrace{\boxed{\frac{\int_{x_0}^{x_1} g(x)f''(\xi_x)dx}{\int_{x_0}^{x_1} g(x)dx}}}_{Q} \leq l_{min}$$

- Existe $c \in [x_0, x_1]$ tal que $f''(c) = Q$, e pelo Teorema do Valor Médio para Integrais, podemos afirmar:

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x)f''(\xi_x)dx = f''(c) \int_{x_0}^{x_1} g(x)dx$$

Erro de aproximação na RT

- Como obtemos anteriormente:

$$E_{RT} = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} g(x)\,\frac{f''(\xi_x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}f''(c)\int_{x_0}^{x_1} g(x)\,dx$$

com $c \in (x_0, x_1)$

- Calculando, $\int_{x_0}^{x_1} g(x)\,dx = \frac{-h^3}{6}$, temos:

$$E_{RT} = \frac{-h^3}{12}f''(c)$$

com $c \in (x_0, x_1)$

Regra do Trapézio Repetida

- Se o intervalo de integração é grande, o erro de aproximação também é grande
- Um estratégia é subdividir $[a, b]$ e aplicar RT repetidas vezes:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) - \frac{h^3}{12} f''(c_i) \right) =$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{h^3}{12} f''(c_i)$$

com $c_i \in (x_i, x_{i+1})$

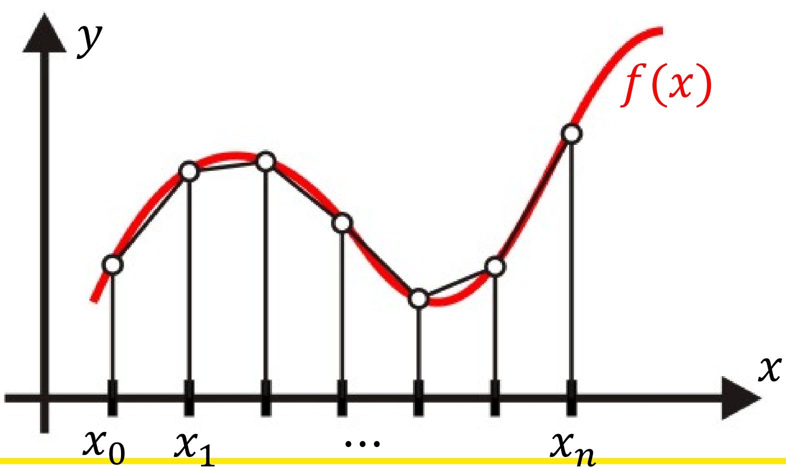
Regra do Trapézio Repetida

- Supondo $f''(x)$ contínua em $[a, b]$, e a partir do Teorema do Valor Intermediário, existe $\hat{\xi} \in (a, b)$ tal que:

$$\sum_{i=0}^{m-1} f''(c_i) = mf''(\hat{\xi})$$

- Aplicando: $\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx =$

$$= \underbrace{\frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f\left(x_{m_1}\right) + f(x_m)\right)}_{I_{RTR}} \underbrace{- mh^3 \frac{f''(\hat{\xi})}{12}}_{E_{RTR}}$$



Exemplo (do livro)

a) Calcule $\int_0^1 e^x \, dx$ através da RTR com 10 subintervalos

b) Qual seria o número mínimo de subintervalos necessários para que o erro seja inferior a 10^{-3}

Regra 1/3 de Simpson

- Assim como na RT, usamos a fórmula de Lagrange para determinar um polinômio que se aproxime de $f(x)$
- Na RS é adotado um polinômio de grau 2 para interpolar $f(x)$ em $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$ e $x_2 = x_0 + 2h = b$, dado por:

$$p_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(-h)(-2h)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(h)(-h)} f(x_1) + \\ + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(2h)(h)} f(x_2)$$

- A partir de $p_2(x)$, temos:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)dx = I_{RS} =$$

$$= \frac{f(x_0)}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)(x - x_2)dx - \frac{f(x_1)}{h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_2)dx + \\ + \frac{f(x_2)}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_1)dx$$

Regra 1/3 de Simpson

- Efetuando a Mudança de Variável $x - x_0 = zh$:
  - $x = x_0 + zh$
  - $dx = hdz$
  - $x - x_1 = x_0 + zh - (x_0 + h) = (z - 1)h$
  - $x - x_2 = x_0 + zh - (x_0 + 2h) = (z - 2)h$
- A partir destas relações, temos:
  - $x = x_0 \Rightarrow z = 0$
  - $x = x_1 \Rightarrow z = 1$
  - $x = x_2 \Rightarrow z = 2$
- E assim, temos uma nova forma de expressar I_{RS}:

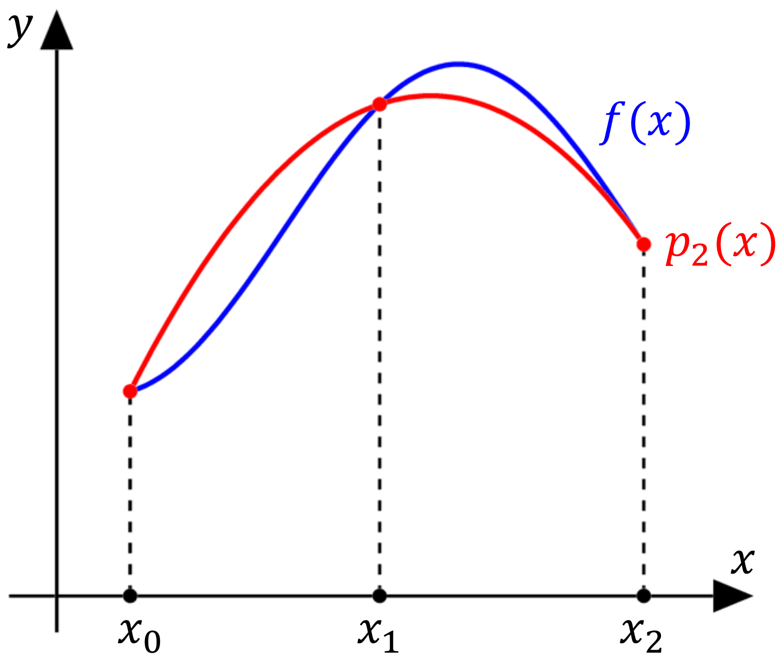
$$I_{RS} = \frac{f(x_0)h}{2}\int_0^2 (z-1)(z-2)dz - f(x_1)h\int_0^2 z(z-2)dz +$$
$$+\frac{f(x_2)h}{2}\int_0^2 z(z-1)dz$$

Regra 1/3 de Simpson

- Resolvendo as integrais na nova forma de I_{RS}, obtemos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right)$$

- O erro na RS é $E_{RS} = -\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(c)$ com $c \in (x_0, x_2)$



Regra de 1/3 de Simpson Repetida

- Assim como a RT, a RS pode ser aplicada repetidas vezes
- Uma vez que RS usa 3 pontos para interpolar $p_2(x)$, uma simples consideração que deve ser feita é que os ponto $x_0, x_1, \ldots, x_m$ que subdividem $[a, b]$ de forma igualmente espaçado, m deve ser <u>par</u>

- Assim, em cada subintervalo:

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx = \frac{h}{3}\underbrace{\left(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\right)}_{I_{RS(k)}} + E_{RS}$$

- Em repetidas aplicações:

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx = \sum_{k=1}^{m/2} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx = \frac{h}{3}\left(I_{RS(1)} + I_{RS(2)} + \cdots + I_{RS(m/2)}\right)$$

$$+E_{RSR}$$

Regra de 1/3 de Simpson Repetida

- Rearranjando a expressão anterior:

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx =$$

$$= \underbrace{\frac{h}{3}\left((f(x_0) + f(x_m)) + 4\sum_{k=1}^{m/2} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=2}^{m/2} f(x_{2k-2}) \right)}_{I_{RSR}} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=1}^{m/2} -\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(c_k)}_{E_{RSR}}$$

- Considerando $f^{(iv)}(x)$ contínua em $[x_0, x_m]$, pelo TVI generalizado, temos $E_{RSR} = -\frac{mh^5}{180} f^{(iv)}(\hat{\xi})$, com $\hat{\xi} \in (x_0, x_m)$

Exemplos (do livro)

a) Calcule $\int_0^1 e^x \, dx$ através da RSR com 10 subintervalos

b) Qual seria o número mínimo de subintervalos necessários para que o erro seja inferior a 10^{-3}

Bibliografia da aula

- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais**, 2ª Ed. Pearson, 1996.