UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José dos Campos
Instituto de Ciência e Tecnologia

Solução de Sistemas Lineares: métodos iterativos

Prof. Dr. Rogério Galante Negri

Métodos Iterativos

- Usam o conceito do MPF (zero de funções)
- Isto é, dado o SL:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- O mesmo é convertido em um SL da forma:

$$\mathbf{x} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{g}$$

onde $\mathbf{C} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ e $\mathbf{g} \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$

- Notemos que $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{g}$ é uma função de iteração matricial/vetorial

Métodos Iterativos

- Considerando
  - Função de iteração $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{g}$
  - Aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$

- São obtidas as demais aproximações, de forma que:
  - $\mathbf{x}^{(k+1)} = \varphi\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$, onde $\varphi\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}^{(\mathrm{k})} + \mathbf{g}$

- Assim como no MPF, é necessário que:

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \Psi, \text{ tal que } \Psi = \mathbf{C} \cdot \Psi + \mathbf{g}$$

Implicando por sua vez que $\mathbf{A} \cdot \Psi = \mathrm{b}$, e que Ψ é solução do SL

Convergência da solução

- O teste da convergência da solução nos métodos iterativos é feita comparando a proximidade entre $\mathbf{x}^{(k-1)}$ e $\mathbf{x}^{(k)}$, calculada por:

$$d^{(k)} = \max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|$$

- Pode-se ainda testar o erro relativo:

$$r^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{\max\limits_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k)} \right|}$$

O número de iterações também pode ser um critério de parada

Método de Gauss-Jacobi

- Dado o SL, e supondo que $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{cases} a_{1\,1}x_1 + a_{1\,2}x_2 + \cdots + a_{1\,n}x_n = b_1 \\ a_{2\,1}x_1 + a_{2\,2}x_2 + \cdots + a_{2\,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n\,1}x_1 + a_{n\,2}x_2 + \cdots + a_{n\,n}x_n = b_n \end{cases}$$

- O vetor **x** é isolado a partir da diagonal de **A**

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{1\,1}}(b_1 - a_{1\,2}x_2 - \cdots - a_{1\,n}x_n) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{2\,2}}(b_2 - a_{2\,1}x_1 - \cdots - a_{2\,n}x_n) \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{n\,n}}(b_n - a_{n\,1}x_1 - \cdots - a_{n\,n-1}x_{n-1}) \end{cases}$$

Método de Gauss-Jacobi

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{1\,1}}(b_1 - a_{1\,2}x_2 - \cdots - a_{1\,n}x_n) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{2\,2}}(b_2 - a_{2\,1}x_1 - \cdots - a_{2\,n}x_n) \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{n\,n}}(b_n - a_{n\,1}x_1 - \cdots - a_{n\,n-1}x_{n-1}) \end{cases}$$

- Considerando o SL reformulado e a forma $\mathbf{x} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{g}$, temos:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{1\,2}/a_{1\,1} & \cdots & -a_{1\,n}/a_{1\,1} \\ -a_{2\,1}/a_{2\,2} & 0 & \cdots & -a_{2\,n}/a_{2\,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n\,1}/a_{n\,n} & -a_{n\,2}/a_{n\,n} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} b_1/a_{1\,1} \\ b_2/a_{2\,2} \\ \vdots \\ b_n/a_{n\,n} \end{pmatrix}$$

- Dada uma aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, o método de Gauss-Jacobi (G-J) gera novas aproximações por $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}^{k} + \mathbf{g}$

Convergência

Dado o SL $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ e sendo $\lambda_k = \left(\sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}|\right) / |a_{kk}|$.
Se $\lambda = \max_{1\leq k \leq n} \lambda_k < 1$, então G-J gera uma sequência $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ convergente para solução do SL, independente de $\mathbf{x}^{(0)}$.

- Exercício: verifique se G-J converge diante o SL

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \text{ onde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Exercício (Exemplo do livro)

- Resolva $\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$

via G-J com $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{pmatrix}$ e $\epsilon = 0.5$

Exercício

- Realize as duas primeiras iterações do G-J com relação ao seguinte SL:

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57 \\ 20 \\ -4 \end{pmatrix}$$

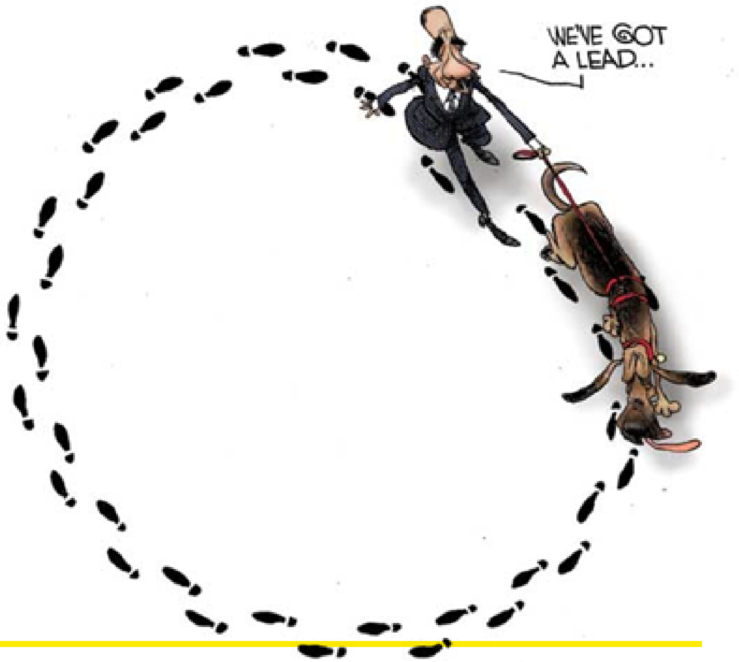
Calcule também os erros relativos em cada iteração

O que acontece sempre que a primeira aproximação se $x^{(0)} = \mathbf{0}$?
Há algum comportamento esperado?

Método de Gauss-Seidel

- O Método de Gauss-Seidel (G-S) é muito semelhante ao G-J, pois:
  - O SL $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ é reescrito como $\mathbf{x} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{g}$
  - O processo é iterativo (é claro!)
  - A solução aproximada parte de uma aproximação $\mathbf{x}^{(0)}$

- A principal diferença está na <u>realimentação</u> das aproximações



Método de Gauss-Seidel

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{1\,1}}\left(b_1 - a_{1\,2}x_2^{(k)} - a_{1\,3}x_1^{(k)} - \cdots - a_{1\,n}x_n^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{2\,2}}\left(b_2 - a_{2\,1}x_1^{(k+1)} - a_{2\,3}x_1^{(k)} - \cdots - a_{2\,n}x_n^{(k)}\right) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{n\,n}}\left(b_n - a_{n\,1}x_1^{(k+1)} - a_{n\,2}x_1^{(k+1)} - \cdots - a_{n\,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}\right) \end{cases}$$

- Como reescrever o SL na forma $\mathbf{x} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{g}$?
- Uma vez neste formato, o método de Gauss-Seidel (G-S) gera novas aproximações por $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}^{k} + \mathbf{g}$, dada a aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$

Método de Gauss-Seidel (matricial)

- Dado $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, consideremos $\mathbf{A} = (\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{R})$:
  - $\mathbf{L}$ é triangular inferior com diagonal nula
  - $\mathbf{D}$ é diagonal com $d_{ii} \neq 0$, para $i = 1, \dots, n$
  - $\mathbf{R}$ é triangular superior com diagonal nula

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2\,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Desenvolvendo:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{R}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{L} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{x} = -\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

G-S é dado por: $\mathbf{x}^{(\mathrm{k}+1)} = -\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{x}^{(\mathrm{k}+1)} - \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}^{(\mathrm{k})} + \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{b}$

Ao observar o SL em G-S, elementos abaixo da diagonal (**L**) estão um passo a frente dos elementos acima da diagonal (**R**)

Método de Gauss-Seidel (matricial)

- A expressão obtida ainda não está na forma $\mathbf{x} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{g}$
- Consideremos a seguinte identidade algébrica:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} \cdot (\mathbf{L}_1 + \mathbf{I} + \mathbf{R}_1)$$

tais que $\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2\,1}/a_{2\,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1}/a_{n\,n} & a_{n\,2}/a_{n\,n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_{1\,2}/a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,n}/a_{1\,1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2\,n}/a_{2\,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Desenvolvendo:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{D} \cdot (\mathbf{L}_1 + \mathbf{I} + \mathbf{R}_1) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{L}_1 + \mathbf{I} + \mathbf{R}_1) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = -\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{x} - \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{b} \quad \text{(exp. equiv. do G-S)}$$

$$(\mathbf{I} + \mathbf{L}_1)\mathbf{x}^{(k+1)} = -\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{-(\mathbf{I} + \mathbf{L}_1)^{-1} \cdot \mathbf{R}_1}_{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{(\mathbf{I} + \mathbf{L}_1)^{-1} \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{b}}_{\mathbf{g}}$$

Critérios de convergência

- No método de G-S, dois critérios que asseguram a convergência da solução são:
  - Critério de Sassenfeld
  - Critério das Linhas (o mesmo de G-J)

- Há casos em que o Critério de Sassenfeld é satisfeito, mesmo que o Critério das Linhas não seja (Sassenfeld é um resultado “mais forte”)

Critério de Sassenfeld

- Sendo:

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}|}{|a_{11}|}$$

$$\beta_j = \frac{|a_{j1}|\beta_1 + |a_{j2}|\beta_2 + \cdots + |a_{jj-1}|\beta_{j-1} + |a_{jj+1}| + \cdots + |a_{jn}|}{|a_{jj}|}$$

tal que:

$$\beta = \max_{1 \le j \le n} \beta_j$$

- Se $\beta < 1$, então G-S gera um sequência convergente, independente de $\mathbf{x}^{(0)}$
- Ainda, quanto menor for β, mais rápida é a convergência

Simples...

- Cabe observar que o Critério das Linhas pode ser satisfeito com a simples troca de linhas de **A**,uma vez que tal operação não altera o SL, mas altera o elemento da diagonal de **A**

Exercício (do livro)

- Sendo $\begin{cases} 3x_1 \qquad \qquad + x_3 = 3 \\ x_1 \quad - x_2 \qquad \qquad = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$, podemos afirmar que G-S gera uma sequência de soluções aproximadas que converge para a solução do sistema?

Exercício

- Realize as duas primeiras iterações, agora com uso do G-S, sobre o SL:

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57 \\ 20 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Calcule os erros relativos em cada iteração e compare com os resultado das iterações obtidos pelo G-J

Bibliografia da aula

- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais**, 2ª Ed. Pearson, 1996.
- FRANCO, N. B. **Cálculo Numérico**. Pearson, 2007.