

## Matemática Discreta

### Relación de Ejercicios 5

- De las siguientes cadenas de símbolos, diga cuáles son fórmulas bien formadas de la Lógica Clásica Proposicional, cuáles no y diga por qué:

$$p \wedge q \rightarrow \neg r, \quad (p \wedge \neg r) \rightarrow q, \quad \neg(\neg(p \vee q)), \quad (q \vee r) \rightarrow, \quad (\neg p \wedge r) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg r), \quad r \leftarrow (\neg p \vee q)$$

- Determine los modelos y contramodelos de la fórmula  $A = (p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$ : ¿Es satisfacible la fórmula  $A$ ? ¿Es válida la fórmula  $A$ ?
- Determine los modelos y contramodelos de la fórmula  $A = (p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ : ¿Es satisfacible la fórmula  $A$ ? ¿Es válida la fórmula  $A$ ?
- Construya, si es posible: (a) una fórmula *bien formada* que NO sea *válida*; (b) una fórmula *bien formada* que SÍ sea *válida*; (c) una fórmula *válida* que NO sea *bien formada*.
- Construya, si es posible: (a) una fórmula *satisfacible* que NO sea *válida*; (b) una fórmula *satisfacible* que SÍ sea *válida*; (c) una fórmula *válida* que NO sea *satisfacible*.
- Determine si son insatisfacibles, satisfacibles o válidas las siguientes fórmulas:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow p, \quad (p \vee q) \rightarrow \neg(q \vee p), \quad (p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p), \quad (p \vee q) \rightarrow (p \vee r), \quad (p \rightarrow q) \wedge (\neg p \vee q)$$

- Determine si son satisfacibles o insatisfacibles los siguientes conjuntos de fórmulas:

$$\{p \vee q, \neg(\neg p \rightarrow q)\}, \quad \{p \rightarrow q, (p \wedge q) \rightarrow \neg p\}, \quad \{p, \neg q, p \wedge q\}, \quad \{p, q, p \vee q\}$$

- Determine los modelos y contramodelos del conjunto de fórmulas  $\Omega = \{\neg q \rightarrow p, \neg p \vee r, \neg q \rightarrow \neg r\}$ : ¿El conjunto  $\Omega$  es satisfacible? ¿Es correcta la inferencia  $\Omega \models q$ ? ¿Es correcta la inferencia  $\Omega \models r$ ?
- Demuestre que si  $I: Cl \rightarrow \{0, 1\}$  es una interpretación de la Lógica Clásica Proposicional, se verifica que:

- $I(\neg A) = 1 - I(A)$
- $I(A \wedge B) = \min\{I(A), I(B)\}$
- $I(A \wedge B) = I(A)I(B)$
- $I(A \vee B) = \max\{I(A), I(B)\}$
- $I(A \vee B) = I(A) + I(B) - I(A)I(B)$
- $I(A \rightarrow B) = 1 - I(A) + I(A)I(B)$
- $I(A \rightarrow B) = 1$  si y solo si  $I(A) \leq I(B)$
- $I(A \leftrightarrow B) = 1 - |I(A) - I(B)|$

- Estudie la validez del siguiente razonamiento:

*Si hay petróleo en Poligonia, entonces o los expertos tienen razón o el gobierno está mintiendo.  
No hay petróleo en Poligonia, o si no los expertos se equivocan. Así pues, el gobierno no está mintiendo.*

- Consideremos las siguientes fórmulas:  $A = p \rightarrow (q \rightarrow r)$ ,  $B = (p \wedge q) \rightarrow r$ . Determine los conjuntos  $\text{Mod}(A)$  y  $\text{Mod}(B)$ . ¿Qué relación hay entre  $A$  y  $B$ ?

12. Demuestre las siguientes propiedades de  $\text{Mod}$

- (a) Si  $\Omega \supseteq \Omega'$ , entonces  $\text{Mod}(\Omega) \subseteq \text{Mod}(\Omega')$
- (b)  $\text{Mod}(A \vee B) = \text{Mod}(A) \cup \text{Mod}(B)$
- (c)  $\text{Mod}(A \wedge B) = \text{Mod}(A) \cap \text{Mod}(B)$
- (d)  $\text{Mod}(\Omega \cup \Omega') = \text{Mod}(\Omega) \cap \text{Mod}(\Omega')$
- (e)  $\text{Mod}(\neg A) = \overline{\text{Mod}(A)}$

13. Sea  $\Omega$  un conjunto de fórmulas y  $A, B$  y  $C$  fórmulas. Utiliza el operador  $\text{Mod}$  para probar las siguientes afirmaciones:

- (a)  $\Omega \models B \wedge C$  si y solo si  $\Omega \models B$  y  $\Omega \models C$
- (b)  $\Omega \cup \{A\} \models A \vee B$
- (c)  $\Omega \cup \{A\} \models B$  si y solo si  $\Omega \models A \rightarrow B$ .

14. Sean  $B$  y  $C$  dos fórmulas. Defina recursivamente la aplicación  $[B/C]: L \rightarrow L$  tal que:

Si  $B \sqsubseteq A$ ,  $A[B/C]$  es la fórmula que se obtiene al sustituir todas las apariciones de la subfórmula  $B$  en  $A$  por  $C$ .

15. Demuestre el **Teorema de Equivalencia**: si  $A, B$  y  $C$  son fórmulas tales que  $B \sqsubseteq A$  y  $C \equiv B$ , entonces  $A \equiv A[B/C]$ . Para ello, siga el siguiente proceso:

- (a) Utilice inducción matemática sobre el grado de  $A$  para demostrar que  $I(A) = I(A[B/C])$  para toda interpretación  $I$ .
- (b) A partir del punto anterior, deduzca el enunciado del teorema

16. Expresé la fórmula  $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg r \wedge s)$  de manera equivalente usando solamente los conectivos de los siguientes conjuntos

- a)  $\{\neg, \wedge\}$ ,                      b)  $\{\neg, \vee\}$                       c)  $\{\neg, \rightarrow\}$ .

17. (a) Expresé las fórmulas  $p \uparrow q, p \mid q, p \oplus q$  usando los conectivos primitivos.

- (b) Demuestre que cualquier fórmula es equivalente a otra fórmula en la que solo aparece el conectivo  $\uparrow$ . Análogamente, demuestre que cualquier fórmula es equivalente a otra fórmula en la que solo aparece el conectivo  $\mid$ .

18. Use Tablas Semánticas para estudiar la validez de las siguientes fórmulas

$$A = (\neg r \vee (p \wedge q)) \rightarrow ((r \rightarrow p) \wedge (r \rightarrow q)); \quad B = (p \wedge r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow s))$$

19. Use Tablas Semánticas para estudiar la corrección de la inferencia  $p \rightarrow (q \vee r), q \rightarrow r, r \rightarrow s \models p \rightarrow s$ .

20. Use Tablas Semánticas para estudiar la satisfacibilidad del conjunto  $\Omega = \{p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p\}$  y, en caso afirmativo, determine todos sus modelos.

21. Las fórmulas del tipo  $A \leftrightarrow B$  y  $\neg(A \leftrightarrow B)$  pueden considerarse como fórmulas de tipo  $\beta$  en el método de las Tablas semánticas usando las siguientes equivalencias  $A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$  y  $\neg(A \leftrightarrow B) \equiv (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$  y, en consecuencia, las siguientes reglas de expansión:



Utilizando estas reglas, estudie la validez de la fórmula  $A = (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (p \wedge q))$ .

22. Demuestre que si  $A$  es una fórmula en la que no aparece el símbolo de negación, entonces  $A$  es satisfacible.

23. Estudie la validez de las siguientes inferencias utilizando Tablas semánticas.

- (a)  $p \rightarrow (q \vee r), q \rightarrow r, r \rightarrow s \models p \rightarrow \neg s$
- (b)  $p \rightarrow q, r \rightarrow s, (s \wedge q) \rightarrow t \models (p \wedge r) \rightarrow t$
- (c)  $p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \models r$

24. Demuestre la validez de las siguientes fórmulas utilizando Tablas semánticas.

$$\begin{array}{ll} p \rightarrow (q \rightarrow p) & (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \\ ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)) & (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q \\ (p \wedge q) \rightarrow q & p \rightarrow (p \vee q) \\ ((p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow r & (p \wedge (q \rightarrow \neg p)) \rightarrow \neg q \\ (p \rightarrow (q \wedge \neg q)) \rightarrow \neg p & \end{array}$$

25. Razone con exactitud sobre la veracidad de las siguientes afirmaciones:

- (a) Si una fórmula no es válida, su negación sí lo es.
- (b) Si una fórmula no es satisfacible, su negación sí lo es.
- (c) Si una fórmula no es consecuencia de un conjunto de fórmulas, su negación sí lo es.
- (d) Si una fórmula no es consecuencia de un conjunto de fórmulas, su negación tampoco.
- (e) Si un conjunto de fórmulas es satisfacible, cada elemento del conjunto también es satisfacible.
- (f) Si cada elemento de un conjunto de fórmulas es satisfacible, el conjunto también es satisfacible.
- (g) Si  $\Omega \models A$ , es posible que exista  $\Omega' \supset \Omega$  tal que  $\Omega' \not\models A$ .
- (h) Si  $\Omega \not\models A$ , es posible que exista  $\Omega' \supset \Omega$  tal que  $\Omega' \models A$ .

26. Formalice los siguientes razonamientos:

- (a) *Si no hay control de nacimientos, entonces la población crece ilimitadamente. Pero si la población crece ilimitadamente, aumentará el índice de pobreza. Por consiguiente, si no hay control de nacimientos, aumentará el índice de pobreza.*
- (b) *Si Valdés ha instalado calefacción central, entonces ha vendido su coche o ha pedido dinero prestado al banco. Por tanto, si Valdés no ha vendido su coche, entonces no ha instalado calefacción central.*

27. Escriba cinco fórmulas con tres variables proposicionales distintas y grado mayor que cinco. Diga cuáles son insatisfacibles, cuáles son satisfacibles y cuáles son válidas.

28. Sea  $\Omega$  un conjunto de fórmulas y sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  fórmulas. Utilice el operador Mod para probar las siguientes afirmaciones:

- (a)  $A \wedge B \models A, \quad A \wedge B \models B$
- (b)  $\Omega \cup \{A, B\} \models A \wedge B$
- (c)  $A \models A \vee B$  y  $B \models A \vee B$
- (d) Si  $\Omega \models A \vee B$ ,  $\Omega \cup \{A\} \models C$  y  $\Omega \cup \{B\} \models C$ , entonces  $\Omega \models C$
- (e) Si  $\Omega \cup \{A\} \models C$  y  $\Omega \cup \{B\} \models C$ , entonces  $\Omega \cup \{A \vee B\} \models C$ .
- (f)  $A, A \rightarrow B \models B$ .
- (g) Si  $\Omega \models A$  y  $\Omega \models A \rightarrow B$ , entonces  $\Omega \models B$ .
- (h) Si  $\Omega \models B$  y  $\Omega \cup \{A\} \models \neg B$ , entonces  $\Omega \models \neg A$ .
- (i)  $A \vee B, \neg A \vee C \models B \vee C$ .

29. Pruebe las siguientes afirmaciones:

- (a) Si  $A \rightarrow B$  es una tautología, entonces  $(A \wedge B) \equiv A$
- (b) Si  $A$  es una tautología, entonces  $(A \wedge B) \equiv B$  y  $(\neg A \vee B) \equiv B$

30. Demuestre el *Principio de sustitución*: Si  $p$  es una variable proposicional que aparece en  $A$  y  $A$  es válida, entonces  $A[p/B]$  es válida. Para ello, siga el siguiente proceso:

- Para cada interpretación  $I$ , definimos la interpretación  $I^*$  como  $I^*(p) = I(B)$ ,  $I^*(q) = I(q)$  si  $q \neq p$ . Utilice inducción matemática sobre el grado de  $A$  para demostrar que  $I(A[p/B]) = I^*(A)$ .
- A partir del punto anterior, deduzca el enunciado del teorema

31. El *dual* de una proposición  $A$  se denota por  $A^*$  y se define recursivamente como sigue:

- $p^* = p$ , para cada símbolo de proposición  $p$ ;
- $(A \vee B)^* = (A^* \wedge B^*)$ ;
- $(A \wedge B)^* = (A^* \vee B^*)$ ;
- $(\neg A)^* = \neg A^*$ .

Pruebe que, para cada par de proposiciones  $A$  y  $B$ ,

$$A \equiv B \quad \text{si y solo si} \quad A^* \equiv B^*$$

Indicación: Para cada interpretación  $I$ , considere su interpretación dual  $I^*$ , definida por  $I^*(p) = 1$  si y solo si  $I(p) = 0$ .

32. Demuestre las equivalencias básicas, utilizando Tablas semánticas:

$$\begin{array}{ll} \neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) & \neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \\ ((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r)) & ((p \vee q) \vee r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee r)) \\ (p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) & (p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \\ (p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p & (p \vee (p \wedge q)) \leftrightarrow p \\ (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p) & (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q) \\ \neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q) & ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)) \\ (p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) & \end{array}$$

33. Estudie la validez de las siguientes fórmulas utilizando Tablas semánticas.

$$\begin{array}{ll} (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r)) & (p \rightarrow \neg p) \leftrightarrow \neg p \\ ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)) & (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)) \\ p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q)) & (p \wedge r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)) \\ (p \wedge r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow s)) & (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg p) \\ (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow \neg r) \rightarrow p) & (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow p) \\ (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) & ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r) \\ ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p & (p \leftrightarrow (q \rightarrow r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r)) \\ \neg(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p) & (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (p \wedge q)) \\ (p \wedge q) \leftrightarrow ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \vee q)) & (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)) \end{array}$$

34. Estudie la validez de las siguientes inferencias utilizando Tablas semánticas.

$$\begin{array}{ll} p \vee q, q \rightarrow r, r \rightarrow s, p \rightarrow \neg q, p \rightarrow t, t \rightarrow u \models u & \neg p \rightarrow q, q \rightarrow r \models \neg p \rightarrow r \\ p \rightarrow \neg q, r \rightarrow q \models \neg(p \wedge r) & p \rightarrow r, q \rightarrow s, p \vee q \models r \vee s \\ (p \wedge q) \rightarrow r, r \rightarrow s \models (p \wedge q) \rightarrow s & p \rightarrow r, q \rightarrow s, p \vee q \models r \vee s \\ p, \neg p \vee q, \neg p \vee (\neg q \vee r) \models r & \end{array}$$