

Estructuras Algebraicas para la Computación

Relación de Ejercicios 8

1. Se considera el espacio vectorial euclídeo \mathbb{R}^4 con el producto escalar usual. Halla:

a) un vector unitario ortogonal a los vectores del subespacio \mathcal{W} generado por el sistema de vectores

$$\{(1, 2, 1, 0), (0, -1, 1, 0), (1, 1, 2, -1)\}$$

b) una base ortonormal para el subespacio \mathcal{U} generado por el sistema de vectores

$$\{(1, 2, -1, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 0, -2, 1)\}$$

2. En el espacio euclídeo \mathbb{R}^4 consideramos el subespacio vectorial \mathcal{L} generado por el sistema de vectores

$$\{(1, 1, 1, 1), (1, -2, 1, -2), (1, 0, 1, 0), (3, -2, 3, -2)\}$$

a) Define el complemento ortogonal de \mathcal{L}

b) Estudia si \mathcal{L}^\perp es un subespacio vectorial y, en caso afirmativo, halla una base.

c) Dado el vector $\vec{v} = (2, 0, 1, 0)$, halla vectores $\vec{v}_1 \in \mathcal{L}$ y $\vec{v}_2 \in \mathcal{L}^\perp$ tales que $\vec{v} = \vec{v}_1 \oplus \vec{v}_2$.

3. En el espacio vectorial euclídeo \mathbb{R}^3 se consideran los subespacios

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\}, \quad \mathcal{L}_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + ax_2 + bx_3 = 0 \right\}$$

a) Calcula los valores de a y b para que \mathcal{L}_1 sea ortogonal a \mathcal{L}_2 .

b) Halla una base \mathcal{B}_1 de \mathcal{L}_1 y otra base \mathcal{B}_2 de \mathcal{L}_2 tales que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ sea una base ortonormal de \mathbb{R}^3 .

4. Construye una base ortonormal en \mathbb{R}^3 a partir de la base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1 = (1, 1, 0), \vec{v}_2 = (0, 1, 1), \vec{v}_3 = (1, 0, 1)\}$.

5. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -7 & 2 & -3 & -2 \\ -5 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Estudia si A es diagonalizable.

b) En caso afirmativo, halla una matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

c) Justifica si es posible encontrar una matriz ortogonal Q tal que $Q^t A Q$ sea diagonal.

6. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Halla una matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

b) Halla una matriz Q tal que $Q^t A Q$ sea diagonal.

7. Diagonaliza las matrices simétricas siguientes, calculando una matriz de paso ortogonal:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Estudia si las siguientes aplicaciones son formas bilineales:

a) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 + y_2$

b) $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida $g((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2$

9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineal definida:

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1 y_1 - 3x_1 y_2 + x_2 y_2$$

a) Determina la matriz A de f en la base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1 = (1, 0), \vec{v}_2 = (1, 1)\}$

b) Determina la matriz B de f en la base $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1 = (1, -1), \vec{w}_2 = (2, 2)\}$

c) Halla la matriz de cambio de base de \mathcal{B}' a \mathcal{B} y comprueba que $B = P^t A P$.

10. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_1(t)$ se define el producto escalar $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$

a) Halla la matriz del producto escalar referida a la base $\{1, t\}$.

b) Calcula el coseno del ángulo que forman $p(t) = t + 3$ y $q(t) = 2t + 4$

c) Determina para qué valores de α son ortogonales los vectores $t + \alpha$ y $t - \alpha$.

11. Se define para $p, q \in \mathbb{R}_2(t)$ el siguiente producto escalar $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$.

a) Halla la matriz de este producto escalar con respecto a la base $B = \{1, t, t^2\}$

b) Aplica el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal a partir de la base $\{1, t, t^2\}$.

12. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2(t)$ se considera el producto escalar

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 t^2 p(t)q(t)dt$$

a) Halla la matriz de este producto escalar con respecto a la base $B = \{1, t, t^2\}$

b) Aplica el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal a partir de la base $\{1, t, t^2\}$.

13. En el espacio vectorial \mathbb{R}^3 se considera la función $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida:

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = 4x_1 y_1 + 2y_1 x_3 + 6x_2 y_2 + 2x_1 y_3 + 4x_3 y_3$$

a) Estudia si es un producto escalar.

b) En caso afirmativo, halla una base ortonormal a partir de la base canónica.

c) Determina la forma cuadrática generada por φ y halla su expresión canónica.

14. Halla la expresión canónica de cada una de las formas cuadráticas

a) $\Phi_1(\vec{x}) = 4x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 4xz - 8yz$

b) $\Phi_2(\vec{x}) = 3x^2 + 6y^2 + 3z^2 - 4xy - 8xz - 4yz$

c) $\Phi_3(\vec{x}) = 2x^2 - 10xy - 8xz - 7y^2 - 10yz + 2z^2$

15. Clasifica (usando al menos dos métodos) cada una de las formas cuadráticas:

a) $\Phi_4(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_4^2 + 2x_1 x_3 - 4x_2 x_3$

b) $\Phi_5(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 2x_1 x_2 - 4x_3 x_4$

c) $\Phi_6(x, y, z) = y^2 - 2xz + 3z^2 - 4yz$