E.T.S. de INGENIERÍA INFORMÁTICA

Curso 2010/2011

Estructuras Algebraicas para la Computación

Relación de Ejercicios 4

1. Se considera la matriz de verificación de paridad

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Utilizando el método de Gauss, resuelve en $\mathbb{Z}_2$ el sistema de ecuaciones lineales $x\mathcal{H} = 0$ siendo $x = (x_1, ..., x_5)$ y da explícitamente el conjunto de todas las soluciones.

   b) Encuentra el código de grupo utilizando la matriz generadora $\mathcal{G}$ asociada a $\mathcal{H}$.

   c) Analiza el código anterior en términos de la detección y corrección de errores.

2. Estudia cada uno de los sistemas siguientes y halla todas las soluciones (si existen) usando el método de eliminación de Gauss y usando el método de reducción de Gauss-Jordan

$$(1)\quad \begin{aligned} 3x - 4y + 6z &= 7 \\ 5x + 2y - 4z &= 5 \\ x + 3y - 5z &= 3 \end{aligned} \qquad (2)\quad \begin{aligned} x + y - z &= 3 \\ 2x - y + 4z &= 3 \\ 3x + 2y - z &= 8 \end{aligned}$$

$$(3)\quad \begin{aligned} x - y + 2z - t &= 0 \\ 2x + y - z + t &= 4 \\ -x + 2y + z - 2t &= -2 \\ 3x - y - 3z + t &= 1 \end{aligned} \qquad (4)\quad \begin{aligned} x + y + z - t &= 0 \\ 2x + 3y - z - 3t &= 0 \\ -3x - 2y - 2z + 4t &= 0 \\ 4x + 2y + 5z - 2t &= 1 \end{aligned}$$

3. Estudia la compatibilidad de los siguientes sistemas, en función del parámetro α, y resuélvelo cuando sea posible

$$(1)\quad \begin{aligned} x + 2y + 4z - 3t &= 2 \\ 3x + 7y + 5z - 5t &= 3 \\ 5x + 12y + 6z - 7t &= \alpha \end{aligned} \qquad (2)\quad \begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 3x + \alpha y + \alpha z &= 5 \\ 4x + \alpha y &= 5 \end{aligned}$$

$$(3)\quad \begin{aligned} \alpha x + y + z &= 1 \\ x + \alpha y + z &= \alpha \\ x + y + \alpha z &= \alpha^2 \end{aligned} \qquad (4)\quad \begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x + 3y + 2z &= 5 \\ 2x + 3y + (\alpha^2 - 1)z &= \alpha + 1 \end{aligned}$$

4. Estudia la compatibilidad del siguiente sistema en $\mathbb{Z}_3$, en función del parámetro β, y resuélvelo cuando sea posible

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x & + & y & & = & 1 \\ x & + & \beta y & & = & \beta \\ & & & \beta z & = & 2\beta + 1 \end{array} \right\}$$

5. Estudia si es posible encontrar valores para los parámetros α y β tales que tenga solución la ecuación matricial $AX = 2X + B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & \alpha & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 1 \\ 3 & 5 & \alpha \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

6. Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & (1+\alpha^2)x_3 & = & 2\alpha \\ x_1 & + & & + & (1-\alpha)x_3 & = & -\alpha \\ x_1 & + & x_2 & + & \alpha^2 x_3 & = & \alpha \end{array} \right.$$

   a) Estudia para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ el sistema tiene solución.

   b) Resuelve el sistema para algún valor de α encontrado en el apartado anterior.

7. Resuelve mediante la factorización LU los sistemas de ecuaciones lineales $Ax = b$ y $Ax = b^*$

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 4 & 4 \\ 10 & 14 & 5 \\ 5 & 5 & 12 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 280 \\ 290 \\ 220 \end{pmatrix} \qquad b^* = \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \\ 600 \end{pmatrix}$$

8. Usa la factorización LU para resolver el sistema $A^2x = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 13 \\ 29 \\ 5 \end{pmatrix}$$

9. Usa la factorización LU para resolver el sistema $A^3x = b$

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad (2) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 27 \\ 29 \\ 122 \end{pmatrix}$$

10. Da un ejemplo de matriz $A \in \mathbb{M}_{4\times 4}$ que sea factorizable LU. Resuelve mediante el método LU el sistema $Ax = b$, siendo $b = (1, 2, 3, 4)$.

11. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & \beta y & + & \alpha z & = & 1 \\ x & + & \alpha\beta y & + & z & = & \beta \\ \alpha x & + & \beta y & + & z & = & 1 \end{array} \right\}$$

   a) Estudia la compatibilidad según los valores de los parámetros α y β.

   b) Para $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, resuelve el sistema

      - (i) Por el método de Gauss-Jordan.
      - (ii) Por el método de factorización LU.