Matemática Discreta

Mariam Cobalea

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Principio de Inducción

- El principio de inducción es el método de demostración básico de propiedades de los números naturales.
- Se sustenta en la construcción **recursiva** de los números naturales: el número 0 es un número natural y si n es un número natural, entonces $n + 1$ (sucesor de n) también es un número natural.
- La construcción formal (axiomática) del conjunto de los números naturales queda fuera de los objetivos de este curso.

Principio de Inducción

Principio de Inducción Matemática

*Sea **P** un enunciado relativo a los números naturales tal que:*

- ***Paso Base:*** $\mathbf{P}(0)$ *es verdadero.*
- ***Paso de Inducción:*** $\mathbf{P}(k)$ *implica* $\mathbf{P}(k+1)$, *para todo* $k \geq 0$.

Entonces todos los números naturales verifican el enunciado **P**.

- $P(k)$ se llama **hipótesis de inducción**
  - En las demostraciones por inducción **no** se supone que $P(k)$ se verifica para todos los enteros.
  - Sólo se demuestra que **si** *se supone* que $P(k)$ es verdadero, **entonces** $P(k+1)$ también es verdadero.

Principio de Inducción

Ejemplo Demuestra por inducción que para todo entero $n \geq 0$ se verifica:
$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Solución: Sea $\boldsymbol{P}(n) : 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

- **Paso base:** $\boldsymbol{P}(0)$ es verdadero, ya que $2^0 = 1 = 2^1 - 1$
- **Paso inductivo:** Suponemos que $\mathbf{P}(k)$ es verdadero
$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$
y demostramos que $\boldsymbol{P}(k+1)$ es verdadero, es decir,
$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$$
Usando la hipótesis de inducción $\mathbf{P}(k)$,
$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} &= (2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k) + 2^{k+1} \\ &= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} = 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \\ &= 2^{k+2} - 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $n \geq 0$, $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Principio de Inducción

- Podemos demostrar que $\boldsymbol{P}(n)$ se verifica para todo entero mayor o igual que n_0 en lugar de 0. Para ello se puede usar el principio de inducción cambiando el paso base.
- En ese caso, la conclusión será que todos los naturales mayores o iguales que n_0 tienen la propiedad $\boldsymbol{P}$.

Ejemplo Demuestra por inducción que para todo entero $n \geq 1$ se verifica:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solución: Sea $\boldsymbol{P}(n) : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

- ***Paso básico:*** $\boldsymbol{P}(1)$ es verdadero, ya que $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$.

- ***Paso Inductivo:*** Suponemos $P(k)$ para $k \geq 1$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

y demostramos $P(k+1)$: $\quad 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

En efecto,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Por tanto, el enunciado se verifica para cada número natural $n \geq 1$.

Ejercicio Demuestra por inducción que para todo entero $n \geq 1$ se verifica:

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

Principio de Inducción

Teorema (Principio de buena ordenación)

Cada subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene primer elemento.

- El principio de buena ordenación y el principio de inducción son equivalentes.
- Es decir, el principio de buena ordenación se puede demostrar usando el principio de inducción y el principio de inducción se puede demostrar usando el principio de buena ordenación.

Principio de Inducción

Ejemplo Demuestra por inducción que para todo entero $n \geq 1$, se verifica $n^3 - n$ es múltiplo de 3.

Solución: Sea $P(n)$: $n^3 - n$ es múltiplo de 3

- **Paso básico:** $P(1)$ es verdadero, ya que $1^3 - 1 = 0 = 3 \cdot 0$
- **Paso inductivo:** Supongamos que $k^3 - k$ es múltiplo de 3:

$$k^3 - k = 3 \cdot m \quad \text{para algún } m \in \mathbb{N}$$

Deducimos entonces la propiedad para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
(k+1)^3 - (k+1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1) \\
&= (k^3 - k) + 3(k^2 + k) \\
&= 3 \cdot m + 3(k^2 + k) \\
&= 3(m + k^2 + k)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $n \geq 1$, $n^3 - n$ es múltiplo de 3.

Ejercicio Demuestra por inducción que para todo entero $n \geq 1$ se verifica:

3. $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ es múltiplo de 9.
4. $n^2 + 3n$ es múltiplo de 2.
5. $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5.
6. $2^{2n} - 1$ es múltiplo de 3.

Principio de Inducción

Ejemplo Demuestra por inducción que $2^n > n$, para todo $n \geq 1$

Solución: Sea $P(n)$: $2^n > n$

- **Paso básico:** $P(1)$ es verdadero, ya que $2^1 = 2 > 1$
- **Paso inductivo:** Suponemos que $\mathbf{P}(k)$ es verdadero

$$2^k > k$$

y demostramos que $\mathbf{P}(k+1)$ es verdadero, es decir,

$$2^{k+1} > (k+1)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2^k \cdot 2 \\ &> k \cdot 2 = k + k \\ &\geq k + 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $2^n > n$ para todo $n \geq 1$.

Principio de Inducción

Ejemplo Demuestra por inducción que $n^2 > n + 2$, para todo $n \geq 3$

Solución: Sea $\boldsymbol{P}(n): \; n^2 > n + 2$

- **Paso básico:** $P(3)$ es verdadero, ya que $3^2 = 9 > 5 = 3 + 2$
- **Paso inductivo:** Suponemos que $\mathbf{P}(k)$ es verdadero

$$k^2 > k + 2, \quad k \geq 3$$

y demostramos que $\mathbf{P}(k+1)$ es verdadero, es decir,

$$(k+1)^2 > (k+1) + 2$$

En efecto,

$$\begin{aligned}(k+1)^2 &= k^2 + 2k + 1 \\ &> k + 2 + 2k + 1 \\ &\geq k + 3\end{aligned}$$

Por lo tanto, $n^2 > n + 2$, para todo $n \geq 3$.

Principio de Inducción

Ejercicio Demuestra por inducción que $2^n > n^2 + n$, para todo $n \geq 5$

Solución: Sea $\boldsymbol{P}(n):\ 2^n > n^2 + n$

- **Paso Básico:** $\boldsymbol{P}(5)$ es verdadero, ya que $2^5 = 32 > 30 = 5^2 + 5$
- **Paso Inductivo:** Suponemos $\boldsymbol{P}(k) : 2^k > k^2 + k,\ k \geq 5$

  y demostramos $\boldsymbol{P}(k+1) : 2^{k+1} > (k+1)^2 + (k+1)$

  En efecto,

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2^k \cdot 2 \\ &> (k^2 + k) \cdot 2 \\ &= k^2 + k^2 + 2k \\ &> k^2 + 2k + k + 2 \\ &= (k^2 + 2k + 1) + (k+1) = (k+1)^2 + (k+1) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $2^n > n^2 + n$, para todo $n \geq 5$.

Principio de Inducción

☛ Es necesario que se cumplan el paso básico y el paso inductivo.

Si no se cumplen ambos, podemos encontrarnos en una de las situaciones siguientes:

- $n^3 + 2n = 3n^2$ es cierto para $n = 0,\ n = 1,\ n = 2$, pero ....

  ¿se puede afirmar que se verifica para todo n?

- La igualdad $n = n + 8,$ cumple el paso inductivo, pero no cumple el paso básico ni para $n = 0$, ni para otro valor de n.

Principio de Inducción Completa

Teorema (Principio de Inducción Completa)

Sea $\mathbf{P}$ *un enunciado relativo a los números naturales tal que:*

- ***Paso Base:*** $\mathrm{P}(0)$ *es verdadero.*
- ***Paso de Inducción:*** $\boldsymbol{P}(0) \wedge \boldsymbol{P}(1) \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{P}(k)$ *implica* $\mathrm{P}(k+1)$, *para todo* $k \geq 0$.

Entonces todos los números naturales verifican el enunciado $\boldsymbol{P}$.

➻ La hipótesis de inducción es $\boldsymbol{P}(0) \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{P}(m) \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{P}(k)$

El Principio de Inducción proporciona otro método para especificar funciones cuyo dominio es el conjunto de los enteros no negativos.
Se hace en dos etapas:

- **(Paso Básico):** se especifica el valor de la función en cero.
- **(Paso Recursivo):** se da una regla para obtener el valor de la función en un entero a partir de sus valores para enteros más pequeños.

Ejemplo 1 La función factorial $f(n) = n!$ se puede especificar de la siguiente forma:

- **(B)** $f(0) = 1$
- **(R)** $f(n+1) = (n+1) \cdot f(n)$

Las sucesiones de elementos de un conjunto S se pueden obtener como la imagen de una función $f \colon \mathbb{N} \to S$.

Dando una definición recursiva de esta función podemos especificar la sucesión.

Ejemplo 2 La sucesión de Fibonacci $\{f_n\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$, se puede definir:

- **(B)** $f_0 = 0,\ f_1 = 1$
- **(R)** $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad n \geq 0$

Ejemplo Sea la sucesión $\{u_n\}$, dada por

$$u_0 = 1,\ u_1 = 2$$
$$u_{n+1} + u_n - 6u_{n-1} = 0,\ n \geq 2$$

Demuestra que

$$u_n = 2^n,\ \text{para cada } n \in \mathbb{N}$$

Solución: Sea $\boldsymbol{P}(n):\ u_n = 2^n$

- ***Paso básico:*** Para $n = 0$ y $n = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} 2^0 = 1 &= u_0 \\ 2^1 = 2 &= u_1 \end{aligned}$$

Luego, $\boldsymbol{P}(0)$ y $\boldsymbol{P}(1)$ son ciertos ambos.

Principio de Inducción Completa

Solución: Sea $P(n): \ u_n = 2^n$

- ***Paso Inductivo:*** Suponemos $P(m)$, para todo $1 \leq m \leq k$

  esto es,

  $$u_m = 2^m, \quad \text{para cada} \quad 1 \leq m \leq k$$

  y demostramos $P(k+1): \ u_{k+1} = 2^{(k+1)}$.

  En efecto,

  $$\begin{aligned} u_{k+1} &= -u_k + 6u_{k-1} \\ &= -(2^k) + 6(2^{(k-1)}) \\ &= -2^k + 6 \cdot 2^{k-1} = 2^{k-1}(-2+6) \\ &= 2^{k-1} \cdot 2^2 = 2^{(k-1)+2} = 2^{(k+1)} \end{aligned}$$

Por tanto, el enunciado se verifica para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo Sea la sucesión $\{x_n\}$, dada por

$$x_1 = 5,\ x_2 = 11$$
$$x_{n+1} - 5x_n + 6x_{n-1} = 0,\ n \geq 2$$

Demuestra que

$$x_n = 2^{n+1} + 3^{n-1},\ \text{para cada } n \in \mathbb{N}$$

Solución: Sea $\boldsymbol{P}(n):\ x_n = 2^{n+1} + 3^{n-1}$

- ***Paso básico:*** Para $n = 1$ y $n = 2$ tenemos que

$$\begin{aligned} 2^{1+1} + 3^{1-1} = 5 &= x_1 \\ 2^{2+1} + 3^{2-1} = 8 + 3 = 11 &= x_2 \end{aligned}$$

Luego, $\boldsymbol{P}(1)$ y $\boldsymbol{P}(2)$ son ciertos ambos.

Principio de Inducción Completa

Solución: Sea $\boldsymbol{P}(n): \; x_n = 2^{n+1} + 3^{n-1}$

- ***Paso Inductivo:*** Suponemos $\boldsymbol{P}(m)$, para todo $2 \leq m \leq k$

  esto es,

$$x_m = 2^{m+1} + 3^{m-1} \quad \text{para todo} \quad 2 \leq m \leq k$$

  y demostramos $\boldsymbol{P}(k+1): \; x_{k+1} = 2^{(k+1)+1} + 3^{(k+1)-1}$.

  En efecto,

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 5x_k - 6x_{k-1} \\ &= 5(2^{k+1} + 3^{k-1}) - 6(2^{(k-1)+1} + 3^{(k-1)-1}) \\ &= 2^k(10-6) + 3^{k-2}(15-6) = 2^{k+2} + 3^k = 2^{(k+1)+1} + 3^{(k+1)-1} \end{aligned}$$

Por tanto, el enunciado se verifica para todo entero positivo n.

Principio de Inducción Completa

Ejemplo Sea la sucesión $\{a_n\}$, definida recursivamente de la forma:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_n &= a_{n-1} + 2n - 1,\ n \geq 2 \end{aligned}$$

encuentra una fórmula explícita para a_n y demuéstrala por inducción.

Solución:

1. Hallamos los primeros términos de la sucesión

$$\begin{array}{lrcl} n = 1, & a_1 & = & 1 \\ n = 2 & a_2 & = & a_1 + 2 \cdot 2 - 1 = 1 + 4 - 1 = 4 = 2^2 \\ n = 3 & a_3 & = & a_2 + 2 \cdot 3 - 1 = 4 + 6 - 1 = 9 = 3^2 \\ n = 4 & a_4 & = & a_3 + 2 \cdot 4 - 1 = 9 + 8 - 1 = 16 = 4^2 \end{array}$$

   y hacemos la conjetura: $a_n = n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Demostramos que se verifica usando el principio de inducción fuerte.

Principio de Inducción Completa

Solución:

$$a_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + 2n - 1,\ n \geq 2$$

2. Sea $P(n):\ a_n = n^2$
   - ***Paso básico:*** $P(1)$ es cierto, ya que $a_1 = 1 = 1^2$.
   - ***Paso Inductivo:*** Suponemos $P(m)$, para cada $1 \leq m \leq k$, esto es
     $$a_m = m^2, \quad \text{para cada} \quad 1 \leq m \leq k$$
     y demostramos $P(k+1):\ a_{k+1} = (k+1)^2$.

     Usando la definición recursiva
     $$a_{k+1} = a_k + 2(k+1) - 1 = k^2 + 2k + 2 - 1 = (k+1)^2$$

Por tanto, el enunciado se verifica para cada $n \in \mathbb{N}$.