E. T. S. de INGENIERÍA INFORMÁTICA

Curso 2010/11

Matemática Discreta

Relación de Ejercicios 1.1

Álgebra de Conjuntos

1. Establece si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

I) $a \in \{a\}$	II) $a \subseteq \{a\}$
III) $\{a\} \in \{a\}$	IV) $\{a\} \subseteq \{a\}$
V) $\{a,b\} \in \{a,\{a,b\}\}$	VI) $\{a,b\} \subseteq \{a,\{a,b\}\}$

2. Sean los conjuntos $A_1 = \{-2,-1,0,1,2\}$, $A_2 = \{0,1,2\}$, $A_3 = \{-1,0,1\}$ y sea el conjunto de índices $I = \{1,2,3\}$. Determina los siguientes conjuntos:

$$a)\ \bigcup_{i\in I} A_i \qquad b)\ \bigcap_{i\in I} A_i$$

Tomando $\mathbb{Z}$ como conjunto universal, determina:

$$c)\ \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \qquad d)\ \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$$

3. En el conjunto de los números naturales se consideran los subconjuntos siguientes:
P: conjunto de números naturales primos; D: conjunto de múltiplos de dos;
T: conjunto de múltiplos de tres; I: conjunto de números impares y S: conjunto de múltiplos de seis.

- Determina: *a*) $P \cap I$, *b*) $P \cap D$, *c*) $D \cap T$, *d*) $D \cap S$, *e*) $I \cap S$.
- Describe el complementario de: *f*) P, *g*) I, *h*) D.
- Determina: *i*) $P \cup I$, *j*) $P - I$, *k*) $\overline{D \cap I}$.

4. Sean A, B y C subconjuntos de un universo $\mathcal{U}$.

a) Demuestra que son equivalentes los siguientes enunciados:
1) $A \subseteq B$
2) $A \cap B = A$
3) $A \cup B = B$

b) Demuestra que son ciertas las siguientes igualdades:
1) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$
2) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
3) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
4) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$
5) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

c) Da un contraejemplo para demostrar que no se verifican las igualdades:
1) $A - (B - C) = (A - B) - C$
2) $(A - B) \cup B = A$
3) $A - (B \cap C) = (A - B) \cap (A - C)$
4) $A \triangle (B \cup C) = (A \triangle B) \cup (A \triangle C)$
5) $A - (B \triangle C) = (A - B) \triangle (A - C)$

Relaciones

5. Dados los conjuntos $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ y $C = \{c_1, c_2, c_3\}$, se establecen las relaciones $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_3$ siguientes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_1 &= \{(a_1,b_1),(a_2,b_4),(a_3,b_1),(a_3,b_2),(a_3,b_4)\} \\
\mathcal{R}_2 &= \{(a_1,b_3),(a_2,b_2),(a_3,b_1)\} \\
\mathcal{R}_3 &= \{(b_2,c_1),(b_2,c_3),(b_3,c_2),(b_4,c_3)\}.
\end{aligned}$$

Usa las matrices asociadas para determinar las relaciones:

a) $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ *b*) $\mathcal{R}_1^{-1} \cup \mathcal{R}_2^{-1}$ *c*) $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_3$

6. En el conjunto $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ se establece la relación binaria $\mathcal{R}$ definida de la siguiente forma

$$a\mathcal{R}b \iff mcd(a, b) = 1$$

a) Escribe el conjunto de pares ordenados de $\mathcal{R}$.

b) Representa los pares matricialmente.

7. Halla el dominio y el rango de la relación $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida

$$x\mathcal{R}y \iff x^2 + 2y = 100$$

8. Sea $\mathcal{R} = \{(a, b), (b, d), (c, b), (d, a)\}$ una relación binaria definida sobre el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$. Estudia qué propiedades cumple la relación binaria $\mathcal{R}$.

9. En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ se establece una relación binaria

$$\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$$

Justifica que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y halla el conjunto cociente.

10. Se considera la relación binaria $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida

$$a\mathcal{R}b \iff a \leq b + 1$$

a) Estudia las propiedades de la relación $\mathcal{R}$.

b) Determina cada uno de los siguientes subconjuntos:

i) $\{x \in \mathbb{Z} \mid (x, 1) \in \mathcal{R}\}$ ii) $\{x \in \mathbb{Z} \mid (1, x) \in \mathcal{R}\}$

iii) $\{x \in \mathbb{Z} \mid (x, 4) \in \mathcal{R}\}$ iv) $\{x \in \mathbb{Z} \mid (4, x) \in \mathcal{R}\}$

11. En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se consideran las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
x\mathcal{R}y &\quad \text{si y sólo si} \quad x \mid y \\
x\mathcal{S}y &\quad \text{si y sólo si} \quad y = x + 2
\end{aligned}$$

a) Halla los pares que pertenecen a cada una de las relaciones.

b) Estudia si $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia.

c) Estudia si $\mathcal{S}$ una relación de orden.

12. En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se define la relación $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 5)\}$. Demuestra que $S = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2$ es una relación transitiva.

13. Define (si es posible) una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$ tal que la clase de equivalencia C_a de cada $a \in \mathbb{R}$ sea

$$C_a = \{a, -a\}$$

Funciones

14. Sea el conjunto $X = \{x, y, z, t\}$ y $f \subseteq X \times X$ la relación binaria dada por la matriz

$$\mathcal{M}_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - & 1 \\ - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Completa la matriz $\mathcal{M}_f$ sabiendo que f es una función inyectiva.

15. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{5, 6, 7\}$, se define la relación $\mathcal{R}_f \subseteq A \times B$

$$\mathcal{R}_f = \{(1, 5), (2, 5), (3, 6), (a, b)\}$$

Estudia si es posible encontrar elementos $a \in A$ y $b \in B$ tales que:

a) $\mathcal{R}_f$ no sea una función.

b) $\mathcal{R}_f$ sea una función inyectiva.

c) $\mathcal{R}_f$ sea una función sobreyectiva.

16. En el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales se define una relación binaria $\mathcal{R}$ de la siguiente forma:

$$\frac{a}{b}\,\mathcal{R}\,\frac{c}{d} \iff c = 2a + b \quad \text{y} \quad d = b$$

Prueba que es una función y estudia si es inyectiva y/o sobreyectiva.

17. Sea el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros y las funciones

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ (a, b) & \mapsto & a - b \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ a & \mapsto & (a, -a) \end{array}$$

a) Determina $g \circ f$ y $f \circ g$.

b) Estudia las propiedades de f, g, $g \circ f$ y $f \circ g$.

18. Sean los conjuntos $S = \{1, 2\}$ y $T = \{a, b, c, d\}$.

a) Determina el número de funciones de S en T que se pueden definir.

- ¿Cuántas de estas funciones son sobrectivas?
- ¿Cuántas de estas funciones no son inyectivas?

b) Determina el número de funciones de T en S que se pueden definir.

- ¿Cuántas de estas funciones son inyectivas?
- ¿Cuántas no son sobreyectivas?
- ¿Cuántas de estas funciones son sobreyectivas?

Inducción

19. Demuestra por inducción que para todo entero $n \geq 1$ se verifica:

    a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

    b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2$ (*Indicación*: Usa el apartado anterior)

    c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

    d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 2^n - 1$

20. Demuestra por inducción que para todo entero $n \geq 1$ se verifica:

    a) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ es múltiplo de 9.

    b) $n^2 + 3n$ es divisible por 2.

21. Demuestra por inducción que para todo entero $n \geq 1$ se verifica:

    a) $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5.

    b) $2^{2n} - 1$ es múltiplo de 3.

22. Sea $\{a_n\}$ definida recursivamente de la forma:

    $$\begin{aligned} &a_1 = 1 \\ &a_n = a_{n-1} + 2n - 1,\ n \geq 2 \end{aligned}$$

    a) Conjetura una fórmula explícita para a_n.

    b) Demuestra por inducción que es correcta.

23. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $p(n)$: "$n^2 + n + 11$ *es primo*". Comprueba que $p(1), \ldots, p(9)$ son todos verdaderos. Estudia si para todo n es verdadero $p(n)$.

24. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $p(n)$: "$3n+2$ es múltiplo de 3". Comprueba que la implicación $p(k) \Longrightarrow p(k+1)$ es verdadera para cada $k \in \mathbb{N}$ y determina si $p(n)$ es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$.

25. Los números de Fibonacci $\{f_n\}$ se definen recursivamente

    $$\begin{aligned} &f_0 = 0, \qquad f_1 = 1, \\ &f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \qquad n \geq 2 \end{aligned}$$

    Siendo $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, demuestra por inducción que, para todo entero $n \geq 1$, $F^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$

26. Los números de Fibonacci generalizados $\{g_n\}$ se definen recursivamente

    $$\begin{aligned} &g_0 = a \qquad g_1 = b \\ &g_n = g_{n-1} + g_{n-2} \qquad n \geq 2 \end{aligned}$$

    Demuestra por inducción que $g_n = af_{n-1} + bf_n$, para todo $n \geq 2$, en donde f_n es la sucesión definida en el ejercicio 25.