Introducción a las cadenas de Markov

Supongamos que una empresa de alquiler diario de coches tiene 3 oficinas, numeradas del 1 al 3. Cualquier cliente puede alquilar un coche en cualquier oficina e, independientemente de cuál sea la elegida para el alquiler, devolverlo en cualquier oficina. El estadístico de la agencia ha determinado que los clientes alquilan y devuelven los coches en cada oficina según las siguientes probabilidades:

		Devuelto en		
		1	2	3
	1	0	$0'5$	$0'5$
Alquilado en	2	$0'2$	$0'6$	$0'2$
	3	$0'5$	0	$0'5$

Vamos a denotar por $\overrightarrow{p_k} = (p_{k1},\, p_{k2},\, p_{k3})$ al vector que indica la probabilidad de que un coche esté en cada oficina después de k días; es decir, p_{k1} indica la probabilidad de que un coche esté en la oficina 1 después de k días, p_{k2} indica la probabilidad de que un coche esté en la oficina 2 después de k días y p_{k3} indica la probabilidad de que un coche esté en la oficina 3 después de k días.

Así, suponiendo que nunca se cometerá ningún robo, se cumple que, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, $p_{k1}+p_{k2}+p_{k3} = 1$. Además, para cualquier $\overrightarrow{p_0}$, se cumple que $\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_0}\, T$, $\overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p_1}\, T$, …, siendo $T = \begin{pmatrix} 0 & 0'5 & 0'5 \\ 0'2 & 0'6 & 0'2 \\ 0'5 & 0 & 0'5 \end{pmatrix}$

1. Si inicialmente un coche está en la oficina 2 (es decir, $\overrightarrow{p_0} = (0,\, 1,\, 0)$), calcule $\overrightarrow{p_k}$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$ Utilice los resultados obtenidos para estimar las probabilidades de que dicho coche, después de un año, se encuentre en cada una de las oficinas.

2. Si inicialmente un coche está en la oficina 1, calcule $\overrightarrow{p_k}$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$ Utilice los resultados obtenidos para estimar las probabilidades de que dicho coche, después de un año, se encuentre en cada una de las oficinas.

3. Si inicialmente un coche está en la oficina 3, calcule $\overrightarrow{p_k}$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$ Utilice los resultados obtenidos para estimar las probabilidades de que dicho coche, después de un año, se encuentre en cada una de las oficinas.

4. Recuerde que, dada una matriz cuadrada M de tamaño $n \times n$, se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de M si existe algún vector $\overrightarrow{v_\lambda} \neq 0$ tal que se cumple que $\overrightarrow{v_\lambda} \cdot M = \lambda \cdot \overrightarrow{v_\lambda}$. En tal caso, se dice que $\overrightarrow{v_\lambda}$ es un autovector asociado al autovalor λ. Equivalentemente, $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de M si, y sólo si, es solución de la ecuación $det(M - \lambda \cdot I_n) = 0$, denotando por det al determinante y por I_n a la matriz identidad de tamaño $n \times n$. Compruebe que $\lambda = 1$ es un autovalor de T (Realmente, $\lambda = 1$ es siempre un autovalor de cualquier matriz cuadrada cuyos elementos sean no negativos y tal que se suma por filas sea 1), calcule los autovectores asociados a $\lambda = 1$ y calcule los demás autovalores de T y sus correspondientes autovectores.

5. Sea $B = \{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}\}$ un sistema de tres vectores de $\mathbb{R}^3$ tal que $\overrightarrow{w_1}$ es un autovector de la anterior matriz de T asociado a λ_1, $\overrightarrow{w_2}$ es un autovector de la anterior matriz T asociado a λ_2 y $\overrightarrow{w_3}$ es un autovector de la anterior matriz T asociado a λ_3. Demuestre que, en este caso, B es una base de $\mathbb{R}^3$ y...

   a) ... exprese el vector $\overrightarrow{p_0} = (0, 1, 0)$ como combinación lineal de los elementos de la base B. Con ayuda de la expresión obtenida, obtenga una expresión, en función de k, para $\overrightarrow{p_k}$ siendo $\overrightarrow{p_{i+1}} = \overrightarrow{p_i} \cdot T$ con $i = 0, 1, \ldots, k$, y compare con los resultados obtenidos en 1 ¿Existe $\lim\limits_{n\to\infty} \overrightarrow{p_k}$?

   b) ... exprese el vector $\overrightarrow{p_0} = (1, 0, 0)$ como combinación lineal de los elementos de la base B. Con ayuda de la expresión obtenida, obtenga una expresión, en función de k, para $\overrightarrow{p_k}$ siendo $\overrightarrow{p_{i+1}} = \overrightarrow{p_i} \cdot T$ con $i = 0, 1, \ldots, k$, y compare con los resultados obtenidos en 2 ¿Existe $\lim\limits_{n\to\infty} \overrightarrow{p_k}$?

   c) ... exprese el vector $\overrightarrow{p_0} = (0, 0, 1)$ como combinación lineal de los elementos de la base B. Con ayuda de la expresión obtenida, obtenga una expresión, en función de k, para $\overrightarrow{p_k}$ siendo $\overrightarrow{p_{i+1}} = \overrightarrow{p_i} \cdot T$ con $i = 0, 1, \ldots, k$, y compare con los resultados obtenidos en 3 ¿Existe $\lim\limits_{n\to\infty} \overrightarrow{p_k}$?

6. Ayer, mi vecino alquiló un coche en esa agencia y pudo devolverlo en cualquiera de las oficinas con igual probabilidad. Determine las probabilidades de que ese coche esté en cada una de las oficinas el año que viene.

7. Determine todos los vectores $\overrightarrow{q}$ tales que $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{q} \cdot T$. De todos esos vectores, ¿cuáles cumplen que la suma de sus componentes vale 1? Compare con los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

8. Redacte un documento con las conclusiones que haya extraído.