Estructuras Algebraicas para la Computación

Mariam Cobalea

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Tema 7: Diagonalización

Tema 7: Diagonalización

- Valores y vectores propios de un endomorfismo. Propiedades. Subespacios propios.
- Valores y vectores propios de una matriz cuadrada. Polinomio característico.
- Criterios de diagonabilidad.
- Teorema de Cayley-Hamilton. Potencia n-ésima de una matriz cuadrada.

Diagonalización

Introducción

Fijada una base $\mathcal{B}$ en $\mathbb{R}^n$, cada endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tiene asociada una matriz A respecto de $\mathcal{B}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & & \mathcal{B} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow[A]{\varphi} & \mathbb{R}^n \\ \vec{x} & \mapsto & \varphi(\vec{x}) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Diagonalización

Introducción

Si consideramos otra base $\mathcal{B}'$, la matriz asociada al endomorfismo será una matriz B semejante a la matriz A

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{B}' & & \mathcal{B} & & \mathcal{B} & & \mathcal{B}' \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow[P]{1_{\mathbb{R}^n}} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow[A]{\varphi} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow[P^{-1}]{1_{\mathbb{R}^n}} & \mathbb{R}^n \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{x} & \mapsto & \varphi(\vec{x}) & \mapsto & \varphi(\vec{x}) \\ \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} & \mapsto & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} & \mapsto & \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = P^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = P^{-1}A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Diagonalización
Introducción

Si queremos hallar una matriz diagonal D semejante a la matriz A, necesitaremos encontrar una base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ tal que la matriz asociada a φ respecto a $\mathcal{B}$ sea precísamente D.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{B} & & \mathcal{B} & & \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow[D]{\varphi} & \mathbb{R}^n & & \\ \vec{x} & \mapsto & \varphi(\vec{x}) & & \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} & \mapsto & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} & = & D \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \end{array} \qquad D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

☛ Que D sea diagonal significa que para todo vector $\vec{v}_j$ de la base $\mathcal{B}$ se verifica: $\varphi(\vec{v}_j) = d_j \vec{v}_j, \quad j : 1, \dots, n$

Diagonalización
Introducción

Ejemplo Sea $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ una base de $\mathbb{R}^2$.

Se define

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \\ \\ \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \end{array} \right\}$$

La matriz asociada a φ respecto de la base $\mathcal{B}$ es

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Diagonalización
Valores y vectores propios de un endomorfismo

Definición 1

*Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo. Se dice que un vector $\vec{0} \neq \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ es un **vector propio** de φ si verifica:*

$$\varphi(\vec{v}) = \lambda \vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

*Este escalar λ se llama **valor propio** asociado al vector propio $\vec{v}$.*

Diagonalización
Valores y vectores propios de un endomorfismo

Ejemplo En el endomorfismo

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

- $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 2$,

  ya que $\varphi(\vec{v}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 3$,

  ya que $\varphi(\vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Diagonalización

Valores y vectores propios de un endomorfismo

- ☛ Todo vector propio $\vec{v}$ debe ser distinto del vector cero, pero podemos encontrar un valor propio igual a cero.
- ☛ Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ es un vector propio, entonces existe un único valor propio asociado a $\vec{v}$, ya que si $\varphi(\vec{v}) = \lambda\vec{v} = \mu\vec{v} \Longrightarrow \lambda = \mu$, por ser $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- ☛ Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ es un vector propio asociado al valor propio λ, entonces para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\vec{v}$ es un vector propio asociado a λ.

Diagonalización

Valores y vectores propios de un endomorfismo

Teorema 1

Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo. El conjunto $\mathcal{U}_\lambda$ de vectores propios asociados a un mismo valor propio λ junto con el vector $\vec{0}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

$$\mathcal{U}_\lambda = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\}$$

$\mathcal{U}_\lambda$ se llama **subespacio propio** *asociado al valor propio λ.*

(También se llama ***subespacio invariante*** ya que $\varphi(\mathcal{U}_\lambda) \subseteq \mathcal{U}_\lambda$.)

- ✓ A partir de la definición de valor y vector propio, es evidente que dado un valor propio λ de un endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, se verifica:

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\} = \mathit{Ker}\ (\varphi - \lambda 1_{\mathbb{R}^n})$$

Diagonalización

Valores y vectores propios de un endomorfismo

Ejemplo En el endomorfismo

$$\begin{array}{cccc} \varphi\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

los valores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$ y los subespacios propios son

$$\mathcal{U}_{\lambda_1} = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{U}_{\lambda_2} = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Diagonalización

Cálculo de valores y vectores propios de un endomorfismo

Ejemplo Sea el endomorfismo

$$\begin{array}{cccc} \varphi\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ya que,

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

la matriz de φ respecto a la base canónica $\mathcal{C}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Diagonalización

Cálculo de valores y vectores propios de un endomorfismo

Ejemplo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & & \mathcal{C} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow[A]{\varphi} & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por definición, los vectores propios verifican

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalización

Cálculo de valores y vectores propios de un endomorfismo

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema homogéneo tiene solución distinta de la trivial si, y sólo si,

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = 4 - 5\lambda + \lambda^2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = & 4 \\ \lambda_2 & = & 1 \end{cases}$$

Diagonalización

Cálculo de valores y vectores propios de un endomorfismo

Ejemplo

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow[A]{\varphi} & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \lambda_1 & = & 4 \\ \lambda_2 & = & 1 \end{cases}$$

- Para $\lambda_1 = 4$, el subespacio propio asociado es

$$\mathcal{U}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (A - 4\mathrm{I}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(A - 4\mathrm{I}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4 & 2 \\ 1 & 2-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_4 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathcal{U}_4 = \mathcal{L} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalización

Cálculo de valores y vectores propios de un endomorfismo

Ejemplo

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow[A]{\varphi} & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \lambda_1 & = & 4 \\ \lambda_2 & = & 1 \end{cases}$$

- Para $\lambda_2 = 1$, el subespacio propio asociado es

$$\mathcal{U}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (A - \mathrm{I}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(A - \mathrm{I}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 & 2 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_1 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathcal{U}_1 = \mathcal{L} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalización
Cálculo de valores y vectores propios de un endomorfismo

Teorema 2

Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo y sea A la matriz asociada a φ respecto de la base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$. Entonces:

1. *Un vector $\vec{0} \neq \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ es un vector propio de φ con valor propio asociado λ si, y sólo si, $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Y esto es cierto si, y sólo si, $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$.*
2. *λ es un valor propio de φ si, y sólo si, λ es una raíz de la ecuación $|A - \lambda I| = 0$.*

Diagonalización
Valores y vectores propios de una matriz cuadrada. Polinomio característico

Definición 2

*Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada. Se dice que un vector $\vec{0} \neq \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ es un **vector propio** de A si verifica*

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}, \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

*Este escalar λ se llama **valor propio** asociado al vector propio $\vec{v}$.*

Ejemplo

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

ya que

$$A\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalización
Valores y vectores propios de una matriz cuadrada. Polinomio característico

Ejemplo Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de A, ya que

$$A\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un vector propio de A, ya que

$$A\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalización
Valores y vectores propios de una matriz cuadrada. Polinomio característico

Teorema 3

Sea A una matriz $n \times n$.

1. *Un escalar λ es un valor propio de A si, y sólo si, $|A - \lambda I| = 0$*
2. *Los vectores propios de A asociados al valor propio λ son las soluciones no nulas de $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$.*

Definición 3

*Sea A una matriz cuadrada. El polinomio $p(\lambda) = |A - \lambda I|$ se llama **polinomio característico** de A y la ecuación $|A - \lambda I| = 0$ se llama **ecuación característica** de A.*

☛ Los valores propios de A son las soluciones de la ecuación característica.

Diagonalización

Valores y vectores propios de una matriz cuadrada. Polinomio característico

Ejemplo Halla los valores y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: La ecuación característica es $p(\lambda) = |A - \lambda \mathrm{I}| = 0$

$$|A - \lambda \mathrm{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & -1 \\ 3 & -\lambda & -1 \\ 3 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-3-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

Por tanto, los vectores propios son $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3$ y $\lambda_3 = 1$

Diagonalización

Valores y vectores propios de una matriz cuadrada. Polinomio característico

- Los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = 2$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo $(A - 2\mathrm{I})\vec{x} = \vec{0}$

$$(A - 2\mathrm{I}) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{array}\right\}$$

- Los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_2 = -3$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo $(A + 3\mathrm{I})\vec{x} = \vec{0}$

$$(A + 3\mathrm{I}) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -3x_3 \\ x_3 = -3x_3 \end{array}\right\}$$

- Los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_3 = 1$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo $(A - \mathrm{I})\vec{x} = \vec{0}$

$$(A - \mathrm{I}) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_2 \end{array}\right\}$$

Diagonalización

Valores y vectores propios de una matriz cuadrada. Polinomio característico

Ejemplo Halla los valores y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: La ecuación característica es $p(\lambda) = |A - \lambda \mathrm{I}| = 0$

$$|A - \lambda \mathrm{I}| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0$$

Por tanto, los vectores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$

Diagonalización

Valores y vectores propios de una matriz cuadrada. Polinomio característico

- Los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = 1$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo $(A - \mathrm{I})\vec{x} = \vec{0}$

$$(A - \mathrm{I}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{array}\right\}$$

- Los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_2 = 2$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo $(A - 2\mathrm{I})\vec{x} = \vec{0}$

$$(A - 2\mathrm{I}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = x_2 + x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{array}\right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ es base de } \mathcal{U}_1 \text{ y } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ es base de } \mathcal{U}_2.$$

Diagonalización

Valores y vectores propios de una matriz cuadrada. Polinomio característico

Teorema 4

Si A y B son dos representaciones matriciales de un endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, entonces A y B tienen el mismo polinomio característico.

Demostración: *Ejercicio*

☛ Sin embargo, el recíproco **no** es cierto.

Contraejemplo: Comprueba que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tienen el mismo polinomio característico, pero representan a distintos endomorfismos.

Diagonalización

Valores y vectores propios de una matriz cuadrada. Polinomio característico

Definición 4

El **polinomio característico** *de un endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es el polinomio de cualquiera de las representaciones matriciales de φ.*

¿Qué relación existe entre los vectores propios de dos matrices semejantes?

Teorema 5

Sean A y B matrices semejantes, con $B = P^{-1}AP$. Si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores propios de A y B respectivamente correspondientes al mismo valor propio λ, entonces $\vec{v} = P\vec{w}$

Demostración: *Ejercicio*

Diagonalización

Valores y vectores propios de una matriz cuadrada. Polinomio característico

Teorema 6

Los valores propios de una matriz triangular A son los elementos de la diagonal principal.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = |A - \lambda \mathrm{I}| = (1-\lambda)(-1-\lambda)(-2-\lambda)(2-\lambda)$$

Diagonalización

Valores y vectores propios de una matriz cuadrada. Polinomio característico

Ejercicio Demuestra:

1. Si λ es un valor propio de una matriz A inversible, entonces $\lambda \neq 0$ y $1/\lambda$ es un valor propio de A^{-1}.
2. Si λ es un valor propio de una matriz A, entonces λ^2 es un valor propio de A^2. En general, λ^n es un valor propio de A^n.

Ejercicio Usa el resultado anterior para hallar los valores propios de A^9,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Definición 5

Se dice que un endomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *es* ***diagonalizable*** *si existe una base* $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ *tal que la representación matricial de* φ *respecto a la base* $\mathcal{B}$ *es una matriz* D *diagonal.*

Ejemplo

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

es un endomorfismo diagonalizable, ya que respecto a la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

su matriz asociada es

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Diagonalización
Criterios de diagonabilidad

Ejercicio Sea $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ una base de $\mathbb{R}^3$.

Estudia si es diagonalizable el endomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido

$$\varphi \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución: La matriz que representa a φ respecto a la base $\mathcal{B}$ es

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, φ es diagonalizable.

Diagonalización
Criterios de diagonabilidad

Teorema 7

Un endomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *es diagonalizable si, y sólo si, existe una base* $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ *de vectores propios.*

En otras palabras,

- La matriz asociada al endomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ es diagonal si, y sólo si, cada uno de los vectores de la base $\mathcal{B}$ es un vector propio de φ.
- Si D es una matriz diagonal asociada al endomorfismo φ respecto a la base $\mathcal{B}$, entonces cada d_j es el valor propio asociado al vector propio $\vec{v}_j$, $j : 1, \ldots, n$.

Diagonalización
Criterios de diagonabilidad

Definición 6

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *una matriz cuadrada. Se dice que* A *es* ***diagonalizable*** *si es semejante a una matriz diagonal* D. *Es decir,* A *es diagonalizable si existe una matriz invertible* P *tal que*

$$P^{-1}AP = D$$

Ejemplo La matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ es diagonalizable, ya que existe

la matriz invertible $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ tal que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = D$$

- En general, un endomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ puede no tener una representación matricial diagonal.
- Análogamente, una matriz A puede que no sea semejante a una matriz diagonal.
- A continuación, estudiamos las condiciones que se deben verificar para que un endomorfismo o una matriz sean diagonalizables.

Lema 1

Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ valores propios de un endomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tales que $\lambda_i \neq \lambda_j$. Si $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ son vectores propios asociados a los valores $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ respectivamente, entonces $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ es linealmente independiente.

Teorema 8

Si el endomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tiene n valores propios distintos, entonces es diagonalizable.

Demostración: Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ valores propios distintos de $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y sea $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ un sistema de vectores de $\mathbb{R}^n$ tales que

$$\varphi(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i, \quad i : 1, \ldots, n$$

Se demuestra que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ y la matriz asociada a φ respecto de $\mathcal{B}$ es diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Corolario 1

Si A es una matriz $n \times n$ y si la ecuación característica $|A - \lambda I| = 0$ tiene n raíces distintas, entonces existe una matriz invertible P tal que

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Es decir, la matriz A es semejante a una matriz diagonal D, donde las componentes de la diagonal son las raíces de la ecuación característica.

Ejercicio Determina si son diagonalizables la matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \\ 9 & 8 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

¿ Qué ocurre si las raíces de la ecuación característica se repiten?

Definición 7

- *Se dice que un valor propio* λ_j *tiene* **multiplicidad algebraica** α_j *si* $(\lambda-\lambda_j)^{\alpha_j}$ *es un factor del polinomio característico* $p(\lambda)$, *pero* $(\lambda-\lambda_j)^{\alpha_j+1}$ *no lo es.*
- *Se llama* **multiplicidad geométrica** *del valor propio* λ_j *a la dimensión del subespacio propio* $\mathcal{U}_{\lambda_j}$

El polinomio característico se expresará:

$$p(\lambda)=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{\alpha_1}(\lambda-\lambda_2)^{\alpha_2}\ldots(\lambda-\lambda_r)^{\alpha_r}$$

Lema 2

Sea $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *un endomorfismo. Si* λ_j *es un valor propio con multiplicidad algebraica* α_j, *entonces* $1\leq \dim\mathcal{U}_{\lambda_j}\leq\alpha_j$

Teorema 9

El endomorfismo $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *es diagonalizable si, y sólo si,* $\dim\mathcal{U}_{\lambda_j}=\alpha_j$ *para todo* $j:1,\ldots,r$.

Corolario 2

Sea $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *con polinomio característico*

$$p(\lambda)=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{\alpha_1}(\lambda-\lambda_2)^{\alpha_2}\ldots(\lambda-\lambda_r)^{\alpha_r}$$

A *es diagonalizable si, y sólo si, para todo* $j:1,\ldots,r$

$$rang(A-\lambda_j\mathcal{I})=n-\alpha_j$$

Ejemplo

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x_1+2x_2+4x_3\\ 2x_1+2x_3\\ 4x_1+2x_2+3x_3\end{pmatrix}\end{array}$$

Los valores propios son

$$\lambda_1=-1,\ \alpha_1=2 \quad \text{y} \quad \lambda_2=8,\ \alpha_2=1$$

Los subespacios propios son

$$\mathcal{U}_{\lambda_1}=\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right),\quad \mathcal{U}_{\lambda_2}=\mathcal{L}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

Por lo tanto, φ es diagonalizable.

Ejemplo Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-2&1&-1\\-2&2&2\end{pmatrix}$$

El polinomio característico es $p(\lambda)=-(\lambda-2)^2(\lambda+1)$

Los valores propios son $\begin{cases}\lambda_1 = 2, & \alpha_1 = 2\\ \lambda_2=-1, & \alpha_2 = 1\end{cases}$

Los subespacios propios son

$$\mathcal{U}_{\lambda_1}=\mathcal{L}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix},\quad \mathcal{U}_{\lambda_2}=\mathcal{L}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Por ser $\dim(\mathcal{U}_{\lambda_1})<2$, la matriz A **no** es diagonalizable.

Ejercicios

1. Demuestra que si A es una matriz diagonalizable, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica
$$A^n = PD^nP^{-1}$$

2. Sea la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
   1. Estudia si es diagonalizable.
   2. Usa el apartado anterior para hallar A^{200}
   3. Sin efectuar nuevos cálculos, justifica si existe la inversa de A.

Ejercicios

3. Estudia la diagonabilidad de cada una de las siguientes matrices según los valores de los parámetros
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha \neq 0$$

Ejercicios

4. Estudia para qué valores $t \in \mathbb{R}$ la matriz A es diagonalizable
$$A = \begin{pmatrix} t+3 & t^2-10 \\ 1 & t+1 \end{pmatrix}$$

Ejercicios

5. Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un endomorfismo del que sabemos que:
   - $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 2$.
   - $\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   1. Determina la matriz del endomorfismo respecto de la base canónica.
   2. Halla (si es posible) una base respecto a la cual la matriz del endomorfismo sea una matriz diagonal.

Diagonalización
Teorema de Cayley-Hamilton

Teorema 10 (Cayley-Hamilton)

Sea la matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *con polinomio característico* $p(\lambda) = |A - \lambda I|$
Entonces $p(A) = 0$.

Ejemplo El polinomio característico de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ es

$$p(\lambda) = |A - \lambda \mathrm{I}| = \lambda^2 + 3\lambda + 2.$$

$$\begin{aligned} p(A) &= A^2 + 3A + 2\mathrm{I} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^2 + 3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 9 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diagonalización
Teorema de Cayley-Hamilton

Ejercicio Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Halla el polinomio característico de A.
- Comprueba el teorema de Cayley-Hamilton.

Diagonalización
Teorema de Cayley-Hamilton

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad p(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$$

$$\begin{aligned} p(A) &= -(A - 2\mathrm{I})^2(A + \mathrm{I}) \\ &= -\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 8 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diagonalización
Aplicaciones del Teorema de Cayley-Hamilton (I)

1. Determinar si existe la inversa de A y expresarla como un polinomio en A de grado menor que n.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$p(A) = A^2 + 3A + 2\mathrm{I} = 0$$

$$A^2 + 3A + 2\mathrm{I} = 0 \implies \begin{aligned} A^2 + 3A &= -2\mathrm{I} \\ A(A + 3\mathrm{I}) &= -2\mathrm{I} \\ A[-\tfrac{1}{2}(A + 3\mathrm{I})] &= \mathrm{I} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}(A + 3\mathrm{I})$$

Diagonalización
Aplicaciones del Teorema de Cayley-Hamilton (II)

2. Expresar cada potencia A^k en términos de un polinomio en A de grado menor que n.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$p(A) = A^2 + 3A + 2\mathbb{I} = 0 \implies A^2 = -3A - 2\mathbb{I}$$

$$\begin{aligned} A^5 &= A^2 \cdot A^2 \cdot A \\ &= (-3A - 2\mathbb{I}) \cdot (-3A - 2\mathbb{I}) \cdot A \\ &= (9A^2 - 12A + 4\mathbb{I}) \cdot A \\ &= [9(-3A - 2\mathbb{I}) - 12A + 4\mathbb{I}] \cdot A \\ &= (-15A - 14\mathbb{I}) \cdot A \\ &= -15A^2 - 14A = -15(-3A - 2\mathbb{I}) - 14A \\ &= 31A + 30\mathbb{I} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$A^5 = 31A + 30\mathbb{I} = 31 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + 30 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61 & -62 \\ 93 & -94 \end{pmatrix}$$

Diagonalización
Aplicaciones del Teorema de Cayley-Hamilton

Ejercicio Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Encuentra la ecuación característica $p(\lambda) = 0$ y comprueba el teorema de Cayley-Hamilton.
2. Usa el apartado anterior para calcular la inversa (si existe) o bien justificar que no existe.

Diagonalización
Aplicaciones del Teorema de Cayley-Hamilton

Ejercicio Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Estudia si es diagonalizable y, en caso afirmativo, expresa A en función de sus valores y vectores propios.
2. Usa el apartado anterior para calcular A^{2011}.
3. Comprueba el teorema de Cayley-Hamilton.
4. Usa el apartado anterior para determinar (si es posible) A^{-1}

Diagonalización
Bibliografía

Métodos matemáticos: Algebra lineal y Geometría
P. Alberca y D. Martín (Ediciones Aljibe)

Algebra lineal J. de Burgos (Ed. McGraw Hill)

Algebra lineal J.B. Fraleigh y R.A. Beauregard (Ed. Addison Wesley)

Algebra lineal con aplicaciones y Mathlab
B. Kolman y D. Hill (Ed. Prentice Hall)

Algebra lineal con aplicaciones G. Nakos y D. Joyner (Ed. Thomson)

Algebra lineal y sus aplicaciones G. Strang (Ed. Addison Wesley)

Problemas de Álgebra
A. de la Villa (Librería I.C.A.I. Univ. Pontifícia de Comillas)