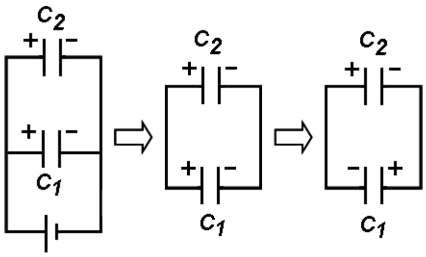
Ejemplo sobre condensadores 1

Un sistema está compuesto por condensadores en paralelo conectados a una batería de 12V. Los condensadores tienen unas capacidades $C_1 = 47\mu F$ y $C_2 = 10\mu F$. Se desconecta el sistema de la batería y a continuación se unen los dos condensadores conectando placas de diferente polaridad, tal y como indica la figura.



Calcular:

a) La carga almacenada en cada condensador cuando están en paralelo con la batería.

b) La carga de cada condensador y la diferencia de potencial en el sistema de condensadores tras conectar las placas de diferente polaridad.

Solución

a) La carga almacenada en cada condensador es:

$$Q_1 = C_1\left(V - V'\right)_1 = 47\cdot 10^{-6}\,F * 12\,V = 564\cdot 10^{-6}\,C = 564\mu C \quad => \quad Q_1 = 5{,}6\cdot 10^2\,\mu C$$

$$Q_2 = C_2\left(V - V'\right)_2 = 10\cdot 10^{-6}\,F * 12V = 120\cdot 10^{-6}\,C = 120\mu C \quad => \quad Q_2 = 1{,}2\cdot 10^2\,\mu C$$

b) Cuando se conectan los condensadores uniendo placas de diferente polaridad, la carga libre almacenada en las armaduras del condensador se redistribuirá de forma que la nueva diferencia de potencial del sistema sea la misma una vez alcanzado el equilibrio electrostático. La carga total Q_T que queda en el sistema formado por los dos condensadores es la diferencia $Q_1 - Q_2$.

$$Q_T = Q_1 - Q_2 = 564\cdot 10^{-6}\,C - 120\cdot 10^{-6}\,C = 444\cdot 10^{-6}\,C = 444\,\mu C$$

Por tanto, si denominamos Q_1' y Q_2' a las nuevas cargas almacenadas en cada condensador, se debe cumplir :

$$Q_1' + Q_2' = Q_T = 444\cdot 10^{-6}\,C$$

Por otro lado, la caída de potencial debe ser la misma en ambos condensadores:

$$\left(V - V'\right)'_1 = \frac{Q_1'}{C_1}\ ;\ \left(V - V'\right)'_2 = \frac{Q_2'}{C_2} \quad => \quad \left(V - V'\right)'_1 = \left(V - V'\right)'_2 \quad => \quad \frac{Q_1'}{C_1} = \frac{Q_2'}{C_2} \quad =>$$

$$\frac{Q_1'}{47\cdot 10^{-6}\,F} = \frac{Q_2'}{10\cdot 10^{-6}\,F}$$

Sustituyendo Q_1' en función de Q_2' , se obtiene :

$$\frac{444\cdot 10^{-6}\,C - Q_2'}{47\cdot 10^{-6}\,F} = \frac{Q_2'}{10\cdot 10^{-6}\,F} \qquad \frac{444\cdot 10^{-6}\,C}{47\cdot 10^{-6}\,F} = \frac{Q_2'}{10\cdot 10^{-6}\,F} + \frac{Q_2'}{47\cdot 10^{-6}\,F}$$

$$Q'_2 = \frac{444\cdot 10^{-6}\,C}{47\cdot 10^{-6}\,F\left[\dfrac{1}{10\cdot 10^{-6}\,F} + \dfrac{1}{47\cdot 10^{-6}\,F}\right]} = \frac{444\cdot 10^{-6}\,C}{\dfrac{47}{10} + 1}$$

$$Q_2' = \frac{444 \cdot 10^{-6} C}{5,7} = 77,8 \cdot 10^{-6} C \qquad Q_2' = 77,8 \mu C$$

Y por lo tanto :

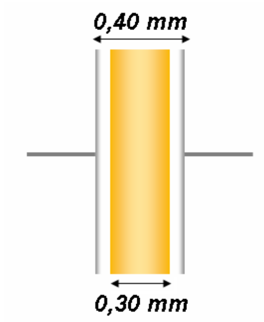
$$Q_1' = 444 \cdot 10^{-6} C - Q_2' = 444 \cdot 10^{-6} C - 77,8 \cdot 10^{-6} C = 366,2 \cdot 10^{-6} C$$
$$Q_1' = 3,6.10^2 \mu C$$

Ahora se puede calcular la diferencia de potencial del sistema una vez alcanzado el equilibrio:

$$(V - V')_1 = \frac{Q_1'}{C_1} = \frac{366,2 \cdot 10^{-6} C}{47 \cdot 10^{-6} F} = 7,79 V \qquad (V - V')_1 = 7,8 V$$
$$(V - V')_2 = \frac{Q_2'}{C_2} = \frac{77,8 \cdot 10^{-6} C}{10 \cdot 10^{-6} F} = 7,78 V \qquad (V - V')_2 = 7,8 V$$

Ejemplo sobre condensadores 2

Un condensador plano paralelo tiene una capacidad $C_0 = 4{,}7nF$ y 0,40 mm de separación entre placas. Se encuentra conectado a una batería de 36 V.



Determinar:

a) El área de las armaduras del condensador si entre ellas hay aire.

b) El campo eléctrico E_0, establecido entre las armaduras.

c) La carga Q_0 almacenada en el condensador.

A continuación, sin desconectar de la batería, se introduce, equidistante a ambas armaduras, una lamina de neopreno (ε_r =7,0) de área idéntica a las armaduras y de 0,30 mm de espesor. Calcular:

d) La capacidad equivalente del sistema así formado.

e) Las cargas Q y Q_L almacenadas en las armaduras y dieléctrico respectivamente.

f) Los campos eléctricos en las zonas con aire y con dieléctrico.

g) La energía almacenada en este condensador y la densidad de energía en el aire y en el dieléctrico.

h) La caída de potencial en el dieléctrico.

i) El módulo del vector polarización en el dieléctrico.

Solución

a) Área de las armaduras:

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \quad => \quad S = \frac{C_0\, d}{\varepsilon_0} = \frac{4{,}7.10^{-9}\, F \cdot 0{,}40 \cdot 10^{-3}\, m}{8{,}85 \cdot 10^{-12}\, \frac{F}{m}} = 0{,}212\, m^2$$

b) El campo eléctrico en el condensador es :

$$E_0 = \frac{(V - V')}{d} = \frac{36\, V}{0{,}40 \cdot 10^{-3}\, m} = 9{,}0 \cdot 10^4\, \frac{V}{m} = 90\, \frac{V}{mm}$$

c) La carga almacenada en el condensador :

$$Q_0 = C_0\,(V - V') = 4{,}7 \cdot 10^{-9}\, F \cdot 36\, V = 169 \cdot 10^{-9}\, C = 0{,}17\mu C$$

d) El sistema del condensador con el dieléctrico se reduce a tres condensadores en serie que denominaremos C_1, C_2 y C_3.

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{d_1} \qquad C_2 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{d_2} \qquad C_3 = \varepsilon_0 \frac{S}{d_3}$$

donde $d_1 = d_3 = 0{,}050\, mm$ y $d_2 = 0{,}30\, mm$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 S}{d_1}} + \frac{1}{\varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 S}{d_2}} + \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 S}{d_1}}$$

$$\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{\varepsilon_0 S}\left[d_1+\frac{d_2}{\varepsilon_r}+d_1\right]=\frac{1}{\varepsilon_0 S}\left[\frac{\varepsilon_r\,2d_1+d_2}{\varepsilon_r}\right]$$

$$C_{eq}=\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{\varepsilon_r 2d_1+d_2}=\frac{7{,}0\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{F}{m}\cdot 0{,}212m^2}{7{,}9\cdot 2\cdot 0{,}050\cdot 10^{-3}\,m+0{,}3\cdot 10^{-3}\,m}=12nF$$

e) La carga Q que ahora se almacena en el condensador es:

$$Q=C_{eq}\,(V-V')=12\cdot 10^{-9}\,F\cdot 36\,V=434\cdot 10^{-9}\,C=434\,nC=0{,}43\mu C$$

Y la carga ligada que aparece en la lamina de dieléctrico es :

$$Q_L=Q\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\qquad Q_L=434\cdot 10^{-9}\,C\left(1-\frac{1}{7}\right)=372\cdot 10^{-9}\,C=0{,}37\,\mu C$$

f) Calcularemos ahora los campos eléctricos donde hay aire y donde hay dieléctrico. Sean E y E' los campos eléctricos que nos piden, respectivamente:

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}=\frac{434\cdot 10^{-9}\,C}{8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{F}{m}\cdot 0{,}212\,m^2}=2{,}31\cdot 10^5\,\frac{V}{m}=231\,\frac{V}{mm}$$

$$E'=\frac{E}{\varepsilon_r}=\frac{2{,}31\cdot 10^5\,\frac{V}{m}}{7}=3{,}30\cdot 10^4\,\frac{V}{m}=33\,\frac{V}{mm}$$

g) La energía almacenada en el condensador, en función de los valores de capacidad y diferencia de potencial es :

$$U=\frac{1}{2}C\,(V-V')^2=\frac{1}{2}12\cdot 10^{-9}\,F\cdot (36\,V)^2=7{,}8\cdot 10^{-6}\,J$$

Densidad de energía en el aire :

$$\eta_{Eaire}=\frac{1}{2}\varepsilon_0\,E^2=\frac{1}{2}8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{F}{m}\left(2{,}31\cdot 10^5\,\frac{V}{m}\right)^2=0{,}24\,\frac{J}{m^3}$$

Densidad de energía en la zona con dieléctrico :

$$\eta_{E\,dielectrico}=\frac{1}{2}\varepsilon_0\,\varepsilon_r\,E'^2=\frac{1}{2}8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{F}{m}\cdot 7\cdot\left(3{,}3\cdot 10^4\,\frac{V}{m}\right)^2=34\cdot 10^{-3}\,\frac{J}{m^3}$$

h) La caída de potencial en la zona con dieléctrico es :

$$(V-V')=E'd_2=33\,\frac{V}{mm}\cdot 0{,}30mm=9{,}9\,V$$

i) El módulo del vector polarización en el dieléctrico :

$$\left|\vec{P}\right|=\sigma_L=\frac{Q_L}{S}=\frac{372\cdot 10^{-9}\,C}{0{,}212\,m^2}=1{,}75\cdot 10^{-6}\,C/m^2$$

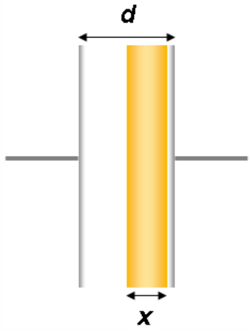
En la zona sin dieléctrico, $\left|\vec{P}\right|=0$

Ejemplo sobre condensadores 3

En un condensador de caras plano paralelas de área A y separación entre armaduras d, se introduce una lamina de dieléctrico de espesor x ($x \leq d$) y permitividad relativa ε_r. Determinar la capacidad del sistema en función del espesor de la lámina de dieléctrica.

Solución

El sistema de la figura se puede reducir a un modelo de **dos condensadores en serie** con idénticas áreas de armaduras y cuyas separaciones entre placas serán d-x y x respectivamente. De hecho, si se aplica una diferencia de potencial al condensador original, habrá dos campos eléctricos diferenciados, uno en la zona sin dieléctrico y otro en la zona con dieléctrico.



Para calcular la capacidad equivalente del sistema, bastará con calcular la capacidad equivalente de dos condensadores en serie que denominaremos C_1 y C_2.

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{A}{(d-x)} \qquad C_2 = \varepsilon_r\, \varepsilon_0 \frac{A}{x}$$

Por tanto :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \dfrac{A}{(d-x)}} + \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \dfrac{A}{x}} = \frac{1}{\varepsilon_0 A}\left[d - x + \frac{x}{\varepsilon_r}\right]$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{\varepsilon_0 A}\left[\frac{\varepsilon_r (d-x) + x}{\varepsilon_r}\right] = \frac{1}{\varepsilon_0 A}\left[\frac{d\,\varepsilon_r - (\varepsilon_r - 1)\,x}{\varepsilon_r}\right]$$

$$C_{eq} = \frac{\varepsilon_r\, \varepsilon_0\, A}{d\,\varepsilon_r - (\varepsilon_r - 1)\,x}$$

Se puede comprobar que:

► si no hay dieléctrico entre placas ($x=0$), la C_{eq} es la capacidad inicial del condensador

$$C_{eq} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

► si el dieléctrico ocupa todo el espacio entre placas ($x=d$):

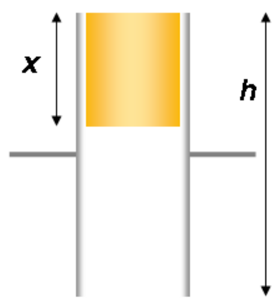
$$C_{eq} = \varepsilon_r\, \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

Ejemplo sobre condensadores 4

En un condensador de caras plano paralelas de lado b y h (área $A=b{\cdot}h$) y separación entre armaduras d, se introduce una lamina de dieléctrico de espesor d y lados b y x (área $A'=b{\cdot}x$) y permitividad relativa ε_r. Determinar la capacidad del sistema en función de la longitud x del lado de la lámina de dieléctrico.

Solución

El condensador de la figura se puede reducir a un modelo de **dos condensadores en paralelo** de idéntica separación entre armaduras y diferentes áreas.



Para calcular la capacidad equivalente del sistema, bastará con calcular la capacidad equivalente de dos condensadores en paralelo que denominaremos C_1 y C_2.

$$C_1 = \varepsilon_r\,\varepsilon_0 \frac{b\cdot x}{d} \qquad\qquad C_2 = \varepsilon_0 \frac{b\cdot(h-x)}{d}$$

Por tanto:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = \varepsilon_r\,\varepsilon_0 \frac{b\cdot x}{d} + \varepsilon_0 \frac{b\cdot(h-x)}{d} = \varepsilon_0 \frac{b}{d}\left(\varepsilon_r\, x + (h-x)\right)$$

$$C_{eq} = \varepsilon_0 \frac{b}{d}\left(h + x\,(\varepsilon_r - 1)\right)$$

Si se tiene en cuenta que el área del condensador es $A=b{\cdot}h$, la capacidad equivalente se puede expresar:

$$C_{eq} = \varepsilon_0 \frac{A}{d\cdot h}\left(h + x\,(\varepsilon_r - 1)\right) = \varepsilon_0 \frac{A}{d}\left(1 + \frac{x}{h}(\varepsilon_r - 1)\right)$$

Se puede comprobar que:

► si no hay dieléctrico entre placas ($x=0$), la C_{eq} es la capacidad inicial del condensador

$$C_{eq} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

► si el dieléctrico ocupa todo el espacio entre placas ($x=h$):

$$C_{eq} = \varepsilon_r\,\varepsilon_0 \frac{A}{d}$$