Ejemplo Electrostática 1

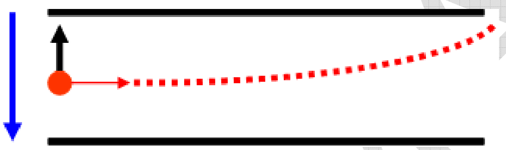
Un electrón ($e^- = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C) que se mueve con velocidad $\vec{v} = 2{,}0$ m s^{-1} $\vec{i}$, entra en una región en la que hay un campo electrostático $\vec{E} = -2{,}0 \cdot 10^{4}$ N/C $\vec{j}$. Calcular:

a) La fuerza electrostática que experimentará el electrón.

b) La aceleración del electrón, si su masa es $m_e^- = 9{,}1 \; 10^{-31}$ kg.

Solución

a) La fuerza que experimenta una carga que se halla en un campo eléctrico es $\vec{F} = q\vec{E}$



por tanto, la fuerza que experimenta el electrón será:

$$\vec{F} = -1{,}6 \cdot 10^{-19} \, C \, (-2{,}0 \cdot 10^{4} \, \frac{N}{C} \, \vec{j}) = 3{,}20 \cdot 10^{-15} \, N \, \vec{j}$$

b) Si queremos calcular la aceleración que experimenta dicha carga, bastará con aplicar la Segunda Ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{3{,}20 \cdot 10^{-15} \, N \, \vec{j}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \, kg} = 3{,}5 \cdot 10^{15} \, m/s^2 \, \vec{j}$$

La trayectoria que describe el electrón es una parábola. A pesar de que la fuerza ejercida sobre el electrón es muy pequeña, debido a su pequeñísima masa, el electrón sufrirá una aceleración muy elevada.

Ejemplo Electrostática 2

Una varilla unidimensional tiene una carga *Q* uniformemente distribuida a lo largo de toda su longitud, *L*. Determinar:

a) El campo eléctrico creado por la varilla en un punto P alineado con la varilla y separado una distancia *D* del extremo más próximo de la misma.

b) Resolver el apartado a) suponiendo que $D >> L$.

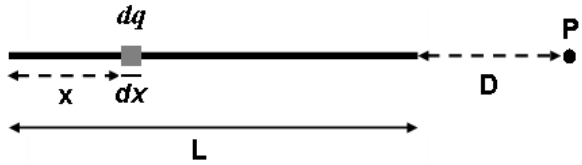
Solución

a) La varilla del ejercicio no es una carga puntual. Será necesario descomponer esta varilla en elementos infinitesimales. Cada uno de estos elementos infinitesimales contiene un diferencial de carga (dq) que se comporta como una carga puntual. El campo eléctrico total creado en un punto del espacio por este objeto se obtiene al sumar vectorialmente todos los campos eléctricos creados por cada uno de los diferenciales de carga.

Se selecciona un diferencial de carga arbitrario, y se determina el campo eléctrico que genera. A continuación se suma para el resto de elementos que componen el objeto.

En la resolución del problema se toma la dirección del eje x coincidente con dirección de la varilla, el origen del eje x coincide con el extremo izquierdo de la varilla.

1.- En la figura se muestra un diferencial de carga (dq) que se encuentra alejado una distancia x del extremo izquierdo.



El campo eléctrico que este diferencial de carga crea en el punto P es:

$$d\vec{E} = K_0 \frac{dq}{(L+D-x)^2} \vec{i}$$

Los restantes diferenciales de carga que componen la varilla generarán en el punto P diferenciales de campo con la misma dirección y sentido. Por tanto, sólo es preciso tener en cuenta el módulo del campo eléctrico. La dirección del campo resultante será la del eje x.

$$dE = K_0 \frac{dq}{(L+D-x)^2}$$

El campo total es la suma de todos los campos eléctricos generados por cada uno de los pequeños elementos de carga (diferenciales) en los que se supone descompuesta la varilla :

$$E_T = \int dE = \int K_0 \frac{dq}{(L+D-x)^2} \qquad [1]$$

2.- Para resolver la suma de campos eléctricos hay que tener presente que en la integral hay dos variables: la posición, *x*, de cada diferencial de carga y la variable respecto a la que se diferencia, la carga *q*. Por tanto, hay que relacionar *x* con *q*. Para ello se tiene en cuenta la información dada en el enunciado que la carga está uniformemente distribuida a lo largo de la varilla:

$$\frac{Q}{L} = \frac{dq}{dx} = \lambda = cons\tan te,$$

donde λ es la densidad lineal de carga, entonces $dq = \lambda\, dx$ y sustituyendo en la ecuación [1] :

$$E_T = \int dE = \int K_0 \frac{\lambda\, dx}{(L+D-x)^2} = K_0 \lambda \int_0^L \frac{dx}{(L+D-x)^2} = K_0 \lambda \left[\frac{dx}{L+D-x}\right]_0^L = K_0 \lambda \left[\frac{1}{D} - \frac{1}{L+D}\right]$$

$$E_T = K_0\, \lambda \frac{L}{D\,(L+D)}$$

Como $\lambda = \dfrac{Q}{L}$:

$$E_T = K_0 \frac{Q}{D} \frac{1}{(L+D)}$$

b) Si el punto P está muy alejado del extremo de la varilla (*D*>>*L*), *L*+*D* ≈*D*. En la expresión del campo eléctrico del apartado anterior, por tanto, se cumple:

$$D\,(L+D) \approx D^2 \quad \Rightarrow \quad E_T = K_0 \frac{Q}{D^2}$$

Que nos indica que a grandes distancias la varilla se comporta como una carga puntual.

Ejemplo Electrostática 3

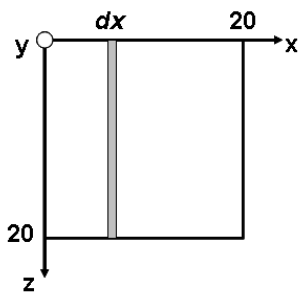
Determinar el flujo a través de una superficie cuadrada definida por las posiciones de sus cuatro vértices en centímetros: (0, 0, 0), (20, 0, 0), (0, 0, 20), (20, 0, 20) originada por el campo eléctrico $\vec{E}(x) = 2{,}5 \cdot 10^2\,(x+1)$ N/(C cm) $\vec{j}$ (x expresada en cm).

Solución

En esta ocasión el campo eléctrico no es uniforme. Antes de calcular el flujo se puede apreciar que el campo eléctrico y el vector superficie que representa a la superficie cuadrada son dos vectores paralelos. Al aplicar la definición de flujo eléctrico, su producto escalar se reduce al producto de módulos.

$$\Phi_E = \iint d\Phi_E = \iint \vec{E} \bullet d\vec{S} = \iint E\, dS \cos\beta$$

Para calcular el flujo habrá que dividir la superficie en elementos infinitesimales en los cuales se pueda considerar que el campo eléctrico es constante y aplicar la definición de flujo. El rectángulo marcado en la figura tiene una anchura *dx* El área de este elemento de superficie es *dS =L dx.* Considerar que el campo eléctrico es constante en el diferencial de superficie seleccionado.



$$\Phi_E = \iint \vec{E} \bullet d\vec{S} = \iint E\, dS = \int_0^{20} E\, L\, dx = \int_0^{20} 2{,}5 \cdot 10^2\, (x+1)\, 20 \cdot 10^{-2}\, dx$$

$$\Phi_E = 2{,}5 \cdot 10^2\; 20 \cdot 10^{-2} \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^{20} = 2{,}5 \cdot 10^2\; 20 \cdot 10^{-2}\; 220 = 1{,}1 \cdot 10^4\, \frac{N\, m^2}{C}$$

Ejemplo Electrostática 4

Sea un sistema de dos cargas puntuales: $q_1 = 20\mu C$, que se encuentra en el origen de coordenadas y $q_2 = 10\mu C$ en el punto A (x = 10 cm). La carga q_2 tiene una masa de 0,60 g. Determinar:

a) La energía potencial electrostática de este sistema de cargas puntuales

b) La variación de energía potencial electrostática de la carga q_2 al trasladarse:

   b.1) desde el infinito al punto A (x = 10 cm).

   b.2) desde el punto A a un punto B (x = 4 cm).

c) La velocidad y energía cinética de la carga q_2 en el punto A si se deja evolucionar libremente desde el punto B (x = 4 cm).

Solución

a) La energía potencial electrostática de este sistema de cargas es:

$$U_{sistema} = K_0 \frac{q_1 q_2}{r} \; ; \quad U_{sistema} = 9{,}0 \cdot 10^9 \frac{N m^2}{C^2} \cdot \frac{20 \cdot 10^{-6} C \cdot 10 \cdot 10^{-6} C}{0{,}10 m} = 18\, J$$

b1) Si se toma como origen de potencial el infinito $U_\infty = 0$:

$$\Delta U = U_f - 0 \; ; \quad \Delta U = 9{,}0 \cdot 10^9 \frac{N m^2}{C^2} \cdot \frac{20 \cdot 10^{-6} C \cdot 10 \cdot 10^{-6} C}{0{,}10 m} - 0 = 18 J$$

b2) La posición final corresponde al punto B y la inicial al punto A:

$$U_B - U_A = K_0 \frac{q_1 q_2}{x_B} - K_0 \frac{q_1 q_2}{x_A} = K_0 q_1 q_2 \left(\frac{1}{x_B} - \frac{1}{x_A} \right)$$

$$U_B - U_A = 9{,}0 \cdot 10^9 \frac{N m^2}{C^2} * 20 \cdot 10^{-6} C * 10 \cdot 10^{-6} C * \left(\frac{1}{4{,}0 \cdot 10^{-2} m} - \frac{1}{0{,}10 m} \right) = 27 J$$

c) Si la carga q_2 se encuentra en reposo en el punto B (x=4 cm) y se deja evolucionar libremente, ésta será repelida en la dirección de la fuerza electrostática que le ejerce q_1. La carga q_2, al desplazarse en la dirección y sentido de la fuerza electrostática, disminuye su energía potencial y aumenta su energía cinética ya que la ***energía total*** de carga q_2 no varía. Por tanto:

$$\Delta E = 0 \; ; \quad \Delta U + \Delta E_C = 0$$

$$U_A - U_B + E_{CA} + E_{CB} = 0$$

$$-27 + E_{CA} - 0 = 0$$

$$E_{CA} = 27 J$$

Como $E_{CA} = \frac{1}{2} m v_A^2 = 27 J$, la velocidad en la posición A es:

$$v_A = \sqrt{\frac{2 * 27 J}{0{,}60 \cdot 10^{-3} kg}} = \sqrt{9{,}0 \cdot 10^4 \frac{m^2}{s^2}} = 3{,}0 \cdot 10^2 \frac{m}{s}$$

Ejemplo Electrostática 5

En una zona del espacio hay establecido un campo electrostático $\vec{E} = 4{,}0 \cdot 10^3 \dfrac{V}{m} \vec{i}$.

Dadas las posiciones A= (0,0 , 0,0), B = (8,0 cm, 0,0) y C = (8,0 cm, 4,0 cm), calcular:

a) La diferencia de potencial $V_B - V_A$

b) La diferencia de potencial $V_C - V_B$

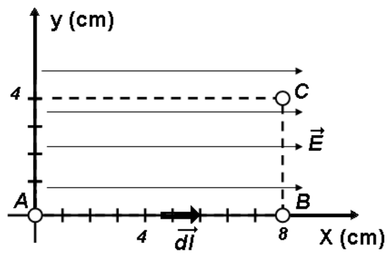
c) La diferencia de potencial $V_C - V_A$

Solución

a) Diferencia de potencial entre las posiciones A y B:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

donde : $d\vec{l} = dx\,\vec{i}$

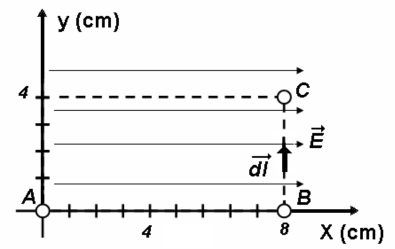


Sustituyendo la expresión del campo eléctrico :

$$\Delta V = V_B - V_A = \int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\int_0^{0,8} 4{,}0 \cdot 10^3 \frac{V}{m} \vec{i} \cdot dx\,\vec{i} = -4{,}0 \cdot 10^3 \frac{V}{m} \int_0^{0,8} dx$$

$$V_B - V_A = -4{,}0 \cdot 10^3 \frac{V}{m} [x]_0^{0,8} = -4{,}0 \cdot 10^3 \frac{V}{m} [0{,}8m - 0] = -3{,}2 \cdot 10^2\ V$$

b) Para determinar la diferencia de potencial $V_C - V_B$, hay que tener presente que el recorrido desde B hasta C es perpendicular al campo eléctrico. Al ser los vectores $\vec{E}$ y $d\vec{l}$ perpendiculares entre sí, su producto escalar es nulo :



$$\vec{E} = 4{,}0 \cdot 10^3 \frac{V}{m} \vec{i}$$

$$d\vec{l} = dy\,\vec{j}$$

$$\Delta V = V_B - V_C = \int_B^C \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\int_0^{0,04} 4{,}0 \cdot 10^3 \frac{V}{m} \vec{i} \bullet dy\,\vec{j} = -4{,}0 \cdot 10^3 \frac{V}{m} \int_0^{0,04} \vec{i}\ \vec{j}\ dy = 0$$

c) la diferencia de potencial $V_C - V_A$, ha sido calculada por partes en los apartados anteriores:

$$(V_C - V_A) = (V_B - V_A) - (V_B - V_C) = -3{,}2 \cdot 10^3 V - 0$$

$$V_C - V_A = -3{,}2 \cdot 10^2 V$$

Ejemplo Electrostática 6

Una esfera de 20 cm de radio posee una carga $Q = 50\mu C$. A 30 cm del centro de la esfera se encuentra una carga puntual $q = -20\mu C$. Determinar:

a) El potencial creado por la esfera en las posiciones r_1=30 cm y r_2=60 cm.
b) La variación de energía potencial electrostática de la carga puntual al trasladarla desde la posición r_1 a r_2.
c) El trabajo necesario para trasladar la carga puntual desde la posición r_1 hasta r_2.

Solución

a) El potencial creado por la esfera en las posiciones r_1 y r_2 es:

$$V(r_1) = K_0 \frac{Q}{r_1} = 9{,}0 \cdot 10^9 \frac{N\,m^2}{C^2}\left[\frac{50 \cdot 10^{-6} C}{30 \cdot 10^{-2} m}\right] = 15 \cdot 10^5 V$$

$$V(r_2) = K_0 \frac{Q}{r_2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \frac{N\,m^2}{C^2}\left[\frac{50 \cdot 10^{-6} C}{60 \cdot 10^{-2} m}\right] = 7{,}5 \cdot 10^5 V$$

b) La variación de energía electrostática de la carga puntual al trasladarla desde r_1 hasta r_2 es:

$$\Delta U = \Delta V * q = (7{,}5 \cdot 10^5 V - 15 \cdot 10^5 V) * (-20 \cdot 10^{-6} C)$$

$$\Delta U = (-7{,}5 \cdot 10^5 V) * (-20.10^{-6} C) = 15\ J$$

c) El trabajo necesario para trasladar la carga puntual desde la posición r_1 hasta r_2 lo realiza la fuerza eléctrica:

$$W_C(A \rightarrow B) = -\Delta U \qquad \Rightarrow \qquad W_C(A \rightarrow B) = -15 J$$

Ejemplo Electrostática 7

Un plano, que se puede considerar infinito, tiene una densidad superficial de carga $\sigma = 8{,}8\cdot 10^3\, nC/m^2$ y su potencial es $V_{PLANO} = 2{,}0\cdot 10^3 V$. Determinar:

a) Las posiciones que tienen potencial nulo.
b) El potencial a 10 cm y a 30 cm del plano.

Una carga puntual de 40 nC se encuentra a 10 cm del plano, seguidamente se desplaza en línea recta hasta la posición alejada 30 cm del plano.

c) Calcular la variación de la energía potencial electrostática de la carga puntual en este desplazamiento.

Solución

a) A partir de la expresión del campo eléctrico creado por una distribución plana e indefinida (obtenida aplicando la Ley de Gauss, por ejemplo) y la definición de diferencia de potencial entre dos puntos, la expresión del potencial generado por el plano infinito en cualquier punto del espacio es:

$$V(x) - V_{plano} = -\int_0^x \vec{E}\bullet d\vec{l} = -\int_0^x E\, dx = -\int_0^x \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\, dx = -\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\int_0^x dx = -\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\, x$$

$$V(x) = V_{Plano} - \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\, x$$

El potencial del plano es de $2{,}0\cdot 10^3$ V, para determinar las posiciones en las que el potencial es nulo, basta con sustituir los valores en la expresión anterior y despejar la incógnita *x*:

$$0 = 2{,}0\cdot 10^3 V - \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\, x$$

$$x = \frac{2\varepsilon_0}{\sigma}(2{,}0\cdot 10^3 V) = \frac{2 * 8{,}8\cdot 10^{-12}\,\dfrac{C^2}{N\,m^2}}{8{,}8\cdot 10^{-7}\,\dfrac{C}{m^2}}(2{,}0\cdot 10^3 V) = 4{,}0\cdot 10^{-2} m$$

O sea, todos los puntos que equidistan 4,0 cm del plano tienen un potencial eléctrico nulo.

b) Potencial a 10 cm y 30 cm del plano:

$$V\,(10\, cm) = 2{,}0\cdot 10^3 V - \frac{8{,}8\cdot 10^{-7}\,\dfrac{C}{m^2}}{2 * 8{,}8\cdot 10^{-12}\,\dfrac{C^2}{N\,m^2}}\, 10\cdot 10^{-2} m = (2{,}0 - 5{,}0)\cdot 10^3 V = -3{,}0\cdot 10^3 V$$

$$V\,(30\, cm) = 2{,}0\cdot 10^3 V - \frac{8{,}8\cdot 10^{-7}\,\dfrac{C}{m^2}}{2 * 8{,}8\cdot 10^{-12}\,\dfrac{C^2}{N\,m^2}}\, 30\cdot 10^{-2} m = (2{,}0 - 1{,}5)\cdot 10^3 V = -13\cdot 10^3 V$$

c) La variación de energía potencial electrostática de una carga puntual de 40 nC al pasar de la posición $x_1 = 10\, cm$ a la posición $x_2 = 30\, cm$, es:

$$\Delta U = \Delta V * q = \left(-13\cdot 10^3 V - \left(-3{,}0\cdot 10^3 V\right)\right) * 40\cdot 10^{-9} C$$

$$\Delta U = -10\cdot 10^3 V * 40\cdot 10^{-9} C = -4{,}0\cdot 10^{-4} J$$

Ejemplo Electrostática 8

Sea la expresión del potencial creado por un dipolo $V(x,y,z)=\frac{qa}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

donde:
- *a* y *q* son la longitud y la carga del dipolo, respectivamente.
- *(x, y, z)* son las coordenadas cartesianas del punto en el que se determina el valor del potencial.

Determinar el campo electrostático creado por el dipolo.

Solución

El gradiente de potencial permite obtener el campo eléctrico en función del potencial. La ecuación es:

$$\vec{E}(x,y,z)=-\vec{\nabla}(V)=-\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}-\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}-\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

Así:

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{qa}{4\pi\varepsilon_0}\left(\left(-z\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)\right)^{-\frac{5}{2}}(2x)\right)=\frac{qa}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3zx}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}}=\frac{qa}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3zx}{r^5}$$

$$E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{qa}{4\pi\varepsilon_0}\left(-z\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}(2y)\right)=\frac{qa}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3zy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}}=\frac{qa}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3zy}{r^5}$$

$$E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}=-\frac{qa}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}-z\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}(2z)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}\right)=\frac{qa}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3z^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right)$$

Por tanto el campo eléctrico creado por el dipolo es:

$$\vec{E}=\left(\frac{qa}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3zx}{r^5}\right)\vec{i}+\left(\frac{qa}{4\pi\varepsilon_0}+\frac{3zy}{r^5}\right)\vec{j}+\left(\frac{qa}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3z^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right)\right)\vec{k}$$

$$\vec{E}=\frac{qa}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left(\frac{3zx}{r^2}\vec{i}+\frac{3zy}{r^2}\vec{j}+\left(\frac{3z^2}{r^2}-1\right)\vec{k}\right)$$