Tema 4: Teoría de Grafos

Mariam Cobalea

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Tema 4: Teoría de Grafos

Tema 4: Teoría de Grafos

Introducción

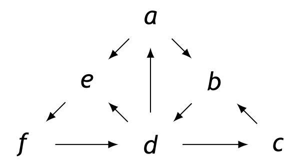
Los grafos se utilizan para modelar situaciones en las que se relacionan entre sí pares de objetos de una determinada colección.

Gráficamente, el modelo consiste en **puntos** que representan los objetos y **líneas** que unen dichos puntos.

Ejemplo 1 Si en $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ consideramos la relación binaria

$$\mathcal{R} = \{(a,b),(a,e),(b,d),(c,b),(d,a),(d,c),(d,e),(e,f),(f,d)\}$$

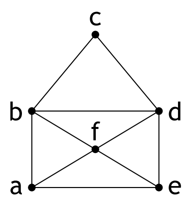
se puede representar



Tema 4: Teoría de Grafos

Introducción

Ejemplo 2 Una red ferroviaria de las ciudades $\{a, b, c, d, e, f\}$ de una región se puede representar



Tema 4: Teoría de Grafos

Introducción

Podemos utilizar los grafos para:

- calcular el número de combinaciones diferentes de vuelos entre dos ciudades de una red aérea,
- determinar si es posible recorrer todas las calles de una parte de una ciudad sin pasar dos veces por la misma calle,
- encontrar el camino más corto entre dos ciudades en una red de transporte,
- programar exámenes y asignar canales a las emisoras de televisión,
- hallar el número de colores que se necesitan para colorear un mapa.

Tema 4: Teoría de Grafos

Introducción

En particular, en ciencias de la computación podemos utilizar los grafos para:

- determinar si se puede implementar un circuito sobre una placa de una sola capa,
- construir modelos para redes informáticas y determinar si dos ordenadores están conectados entre sí,
- estudiar la estructura de la Red de Internet,

4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Tipos de grafos

Presentamos los diferentes tipos de grafos mostrando la forma en que cada uno de ellos se puede utilizar para modelar una red informática.

Supongamos que una red consta de

- ordenadores y
- líneas telefónicas que conectan esos ordenadores.

Podemos representar cada ordenador mediante un punto y cada línea telefónica mediante un segmento, tal como se muestra en las figuras.

4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

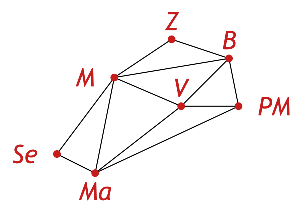
Tipos de grafos

Definición

*Un **grafo simple** es un par $G = (V, E)$ consta de*

- *un conjunto no vacío V de **vértices**,*
- *un conjunto E de pares no ordenados de elementos distintos de V llamados **aristas**.*

Ejemplo



Una red informática

4.1 Nociones básicas en teoría de grafos
Tipos de grafos

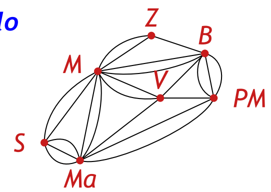
Definición

Un ***multigrafo*** $G = (V, E, f)$ consta de

- un conjunto no vacío V de **vértices**,
- un conjunto E de pares no ordenados de elementos distintos de V llamados **aristas** y
- una función f de E en el conjunto $P = \left\{\{u,v\} \middle| u, v \in V,\ u \neq v\right\}$.

Se dice que las aristas e_1 y e_2 son **aristas múltiples** si $f(e_1) = f(e_2)$.

Ejemplo



Una red informática con líneas múltiples

4.1 Nociones básicas en teoría de grafos
Tipos de grafos

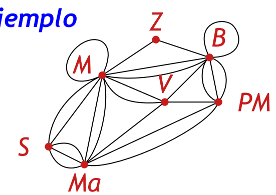
Definición

Un ***pseudografo*** $G = (V, E, f)$ consta de

- un conjunto no vacío V de vértices,
- un conjunto E de aristas y
- una función f de E en el conjunto $\left\{\{u,v\} \middle| u, v \in V,\ \right\}$.

Una arista e se llama **bucle** o **lazo** si $f(e) = \{u, u\}$ para algún $u \in V$.

Ejemplo



Una red informática con líneas de diagnóstico

4.1 Nociones básicas en teoría de grafos
Tipos de grafos

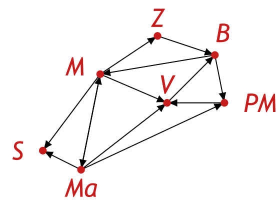
Definición

Un ***grafo dirigido*** $G = (V, E)$ consta de

- un conjunto no vacío V de **vértices** y
- un conjunto E de pares ordenados de elementos de V, llamados **arcos.**

Se usa una flecha apuntando desde u hacia v para indicar la dirección del arco (u, v).

Ejemplo



Una red informática con líneas telefónicas unidireccionales

4.1 Nociones básicas en teoría de grafos
Tipos de grafos

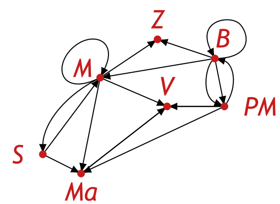
Definición

Un ***multigrafo dirigido*** $G = (V, E, f)$ consta de

- un conjunto no vacío V de vértices,
- un conjunto de arcos E y
- una función f de E en el conjunto $\left\{(u,v) \middle| u, v \in V,\ \right\}$.

Se dice que los arcos e_1 y e_2 son **arcos múltiples** si $f(e_1) = f(e_2)$.

Ejemplo



Una red informática con líneas unidireccionales múltiples

4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Tipos de grafos

La siguiente tabla resume las definiciones de los tipos de grafos presentados.

Tipos de grafos	*Aristas/ Arcos*	*¿Aristas/Arcos Múltiples permitidos?*	*¿Bucles permitidos?*
Grafo simple	No dirigidas	No	No
Multigrafo	No dirigidas	Sí	No
Pseudografo	No dirigidas	Sí	Sí
Grafo dirigido	Dirigidos	No	Sí
Multigrafo dirigido	Dirigidos	Sí	Sí

4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Terminología básica

Definición

Sean u y v dos vértices de un grafo no dirigido $G = (V, E)$. Se dice que

- *los vértices u y v son **adyacentes** si $\{u, v\}$ es una arista de G.*
- *la arista $e = \{u, v\}$ es **incidente** con los vértices u y v.*

También se dice que

- *los vértices u y v son **extremos** de la arista $e = \{u, v\}$*
- *la arista $e = \{u, v\}$ **conecta** a los vértices u y v.*

4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Terminología básica

Definición

*El **grado** de un vértice de un grafo no dirigido $G = (V, E)$ es el número de aristas incidentes en él; exceptuando los bucles que contribuyen con dos unidades al grado del vértice.*

El grado de un vértice v se denota $\delta(v)$.

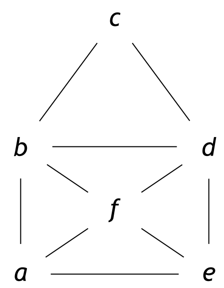
*A los vértices de grado cero se les llama **aislados**.*

*Si un vértice tiene grado 1, se dice que es una **hoja** o un vértice **colgante**.*

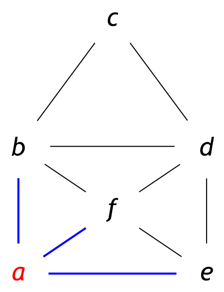
4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Terminología básica

Ejemplo

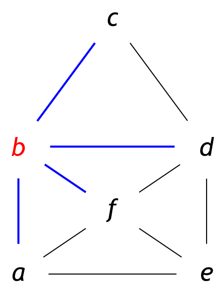


Ejemplo



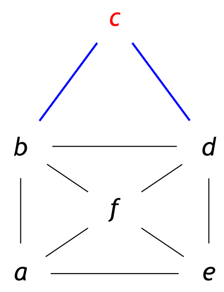
$\delta(a) = 3;$

Ejemplo



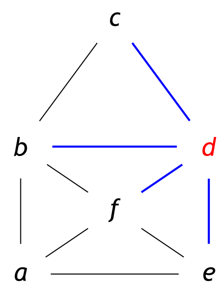
$\delta(b) = 4;$

Ejemplo



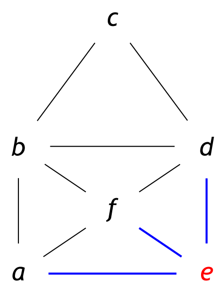
$\delta(c) = 2;$

Ejemplo



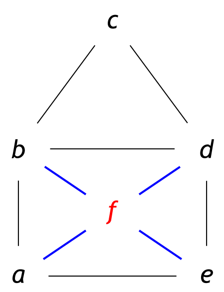
$\delta(d) = 4;$

Ejemplo



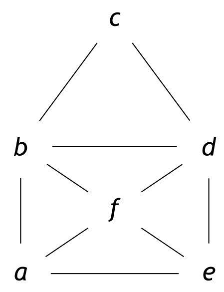
$\delta(e) = 3;$

Ejemplo



$\delta(f) = 4$

Ejemplo



$\delta(a) = 3; \quad \delta(b) = 4; \quad \delta(c) = 2; \quad \delta(d) = 4; \quad \delta(e) = 3; \quad \delta(f) = 4$

Teorema (Euler)

Sea $G = (V, E)$ *un grafo no dirigido. Entonces,* $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$.

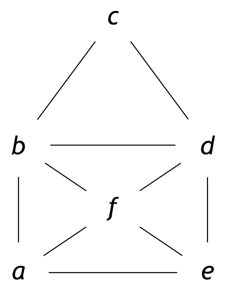
☛ En un grafo no dirigido la suma de los grados de los vértices es un número par.

Corolario

Todo grafo no dirigido tiene un número par de vértices de grado impar.

Nociones básicas en teoría de grafos

Ejemplo



$$\sum_{v\in V}\delta(v) = 3+4+2+4+3+4 = 20 = 2\cdot 10 = 2|E|$$

- Hay 2 vértices de grado impar: a y e.

4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Terminología básica

Definición

Si (u, v) es un arco de un grafo dirigido $G = (V, E)$, se dice que

- *el vértice u es **adyacente al** vértice v y*
- *el vértice v es **adyacente desde** el vértice u.*

*Al vértice u se le llama **vértice inicial** de (u, v) y a v se le llama **vértice final** o **terminal** de (u, v).*

En un bucle los vértices inicial y final coinciden.

4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Terminología básica

Definición

*En un grafo dirigido, el **grado de entrada** de un vértice v, denotado $\delta^-(v)$, es el número de arcos que tienen a v como vértice final.*

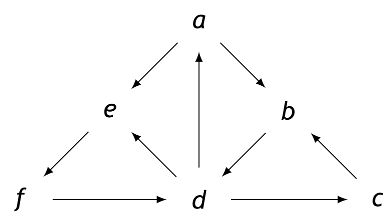
*El **grado de salida** de un vértice v, denotado $\delta^+(v)$, es el número de arcos que tienen a v como vértice inicial.*

(Un bucle contribuye con una unidad tanto al grado de entrada como al de salida del vértice correspondiente).

4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Terminología básica

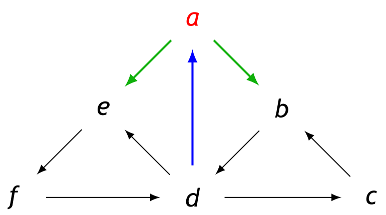
Ejemplo



4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Terminología básica

Ejemplo

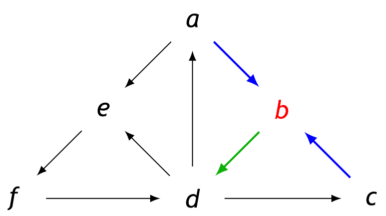


$$\delta^-(a) = 1 \qquad \delta^+(a) = 2$$

4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Terminología básica

Ejemplo

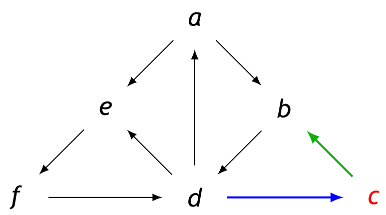


$$\delta^-(b) = 2 \qquad \delta^+(b) = 1$$

4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Terminología básica

Ejemplo

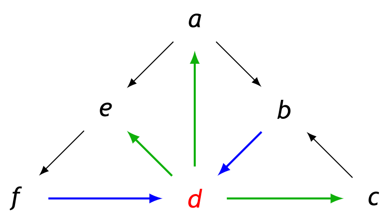


$$\delta^-(c) = 1 \qquad \delta^+(c) = 1$$

4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Terminología básica

Ejemplo

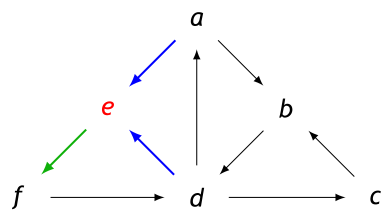


$$\delta^-(d) = 2 \qquad \delta^+(d) = 3$$

4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Terminología básica

Ejemplo

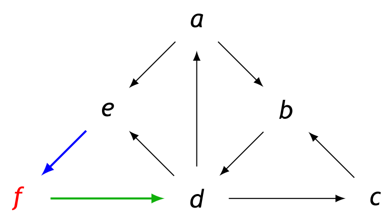


$$\delta^-(e) = 2 \qquad \delta^+(e) = 1$$

4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Terminología básica

Ejemplo

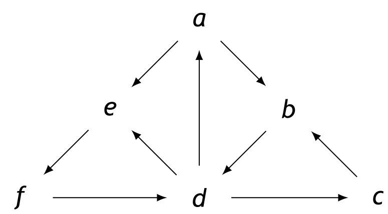


$$\delta^-(f) = 1 \qquad \delta^+(f) = 1$$

4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Terminología básica

Ejemplo



$$\delta^-(a) = 1 = \delta^-(c) = \delta^-(f)$$

$$\delta^-(b) = 2 = \delta^-(d) = \delta^-(e)$$

$$\delta^+(b) = 1 = \delta^+(c) = \delta^+(e) = \delta^+(f)$$

$$\delta^+(a) = 2; \delta^+(d) = 3$$

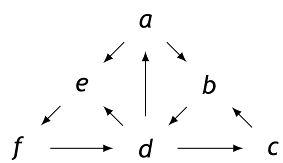
4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Terminología básica

Teorema

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido. Entonces, $\sum_{v \in V} \delta^-(v) = \sum_{v \in V} \delta^+(v) = |E|$.

Ejemplo



$$\sum_{v \in V} \delta^-(v) = 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 9 = |E|$$

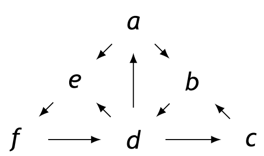
$$\sum_{v \in V} \delta^+(v) = 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 3 = 9 = |E|$$

4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

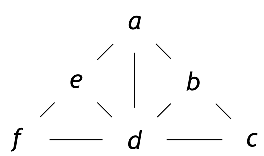
Terminología básica

- Hay muchas propiedades de un grafo dirigido que no dependen de la dirección de sus arcos.
- En consecuencia, a veces conviene ignorar esas direcciones.
- Al grafo no dirigido que resulta de ignorar las direcciones de los arcos se le llama ***grafo no dirigido subyacente***.

Ejemplo



Grafo dirigido



Grafo no dirigido subyacente

4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Representación de grafos

- ***Listas de adyacencia***
- ***Matrices de adyacencia***

4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Representación de grafos: Listas de adyacencia

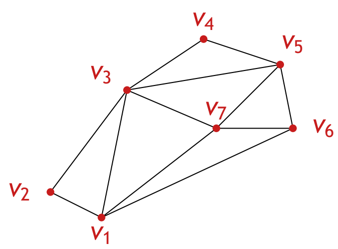
Sea $G = (V, E)$ un grafo o digrafo, con $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.
La ***lista de adyacencia*** consiste en una lista de listas, que reúne ordenadamente los vértices a los que es adyacente cada vértice del grafo.

- Primero se escribe la lista de los vértices adyacentes al vértice v_1 ;
- en una segunda lista, los que son adyacentes a v_2 ;
- y así sucesivamente, hasta terminar con la lista de los vértices adyacentes a v_n.

4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Representación de grafos: Listas de adyacencia

Ejemplo

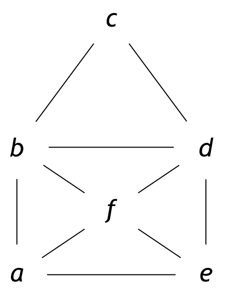


v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_2	v_1	v_1	v_3	v_3	v_1	v_1
v_3	v_3	v_2	v_5	v_4	v_5	v_3
v_6		v_4		v_6	v_7	v_5
v_7		v_5		v_7		v_6
		v_7				

4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Representación de grafos: Listas de adyacencia

Ejemplo

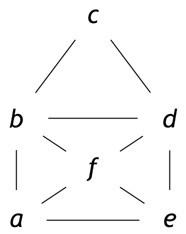


a	b	c	d	e	f
b	a	b	b	a	a
e	c	d	c	d	b
f	d		e	f	d
	f		f		e

4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Representación de grafos: Listas de adyacencia

Ejemplo



a	b	c	d	e	f
b	a	b	b	a	a
e	c	d	c	d	b
f	d		e	f	d
	f		f		e

a		b			e	f
b	a		c	d		f
c		b		d		
d		b	c		e	f
e	a			d		f
f	a	b		d	e	

$$M_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

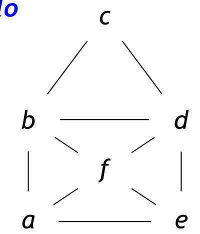
4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Representación de grafos: Matrices de adyacencia

Definición

*Se llama **matriz de adyacencia** de un multigrafo $G = (V, E, f)$ con conjunto de vértices $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, a la matriz cuadrada $M_G = (m_{ij})$, donde m_{ij} es el número de aristas que conectan a los vértices v_i y v_j.*

Ejemplo



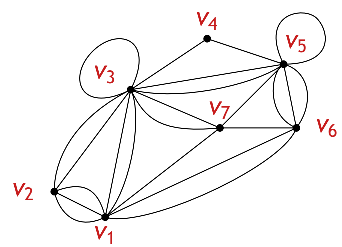
$$M_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ☛ Si G es un grafo simple, M_G sólo tiene ceros y unos.
- ☛ Si G no tiene lazos, la diagonal principal es nula.

4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Representación de grafos: Matrices de adyacencia

Ejemplo



$$M_G = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

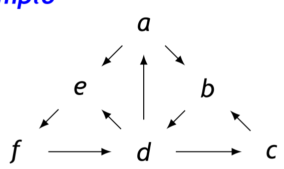
4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Representación de grafos: Matrices de adyacencia

Definición

*Se llama **matriz de adyacencia** de un multidigrafo $G = (V, E, f)$ con conjunto de vértices $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, a la matriz cuadrada $M_G = (m_{ij})$, donde m_{ij} es el número de arcos que conectan el vértice v_i al v_j.*

Ejemplo



$$M_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si G es un multidigrafo, la matriz M_G puede que no sea simétrica.
- Si G no tiene lazos, la diagonal principal es nula.

4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Familias distinguidas de grafos simples

1. Grafo nulo.
2. Grafo completo K_n.
3. Ciclos C_n.
4. Grafo Rueda W_n.
5. Grafo estrella.
6. Grafos regulares.
7. n-Cubos: Q_n.
8. Grafos bipartitos.
9. Grafos bipartitos completos $K_{m,n}$.

4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Ejercicio

1. Da ejemplos (si existen) de:
   i. Un grafo completo con 24 aristas.
   ii. Un grafo bipartito completo $K_{m,12}$ con 72 aristas.
2. Sea G el grafo dado por

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
u_3	u_3	u_1	u_1	u_3	u_4	u_1	u_2
u_4	u_4	u_2	u_2	u_7	u_7	u_5	u_5
u_7	u_8	u_5	u_6	u_8	u_8	u_6	u_6

Contesta razonadamente las siguientes preguntas:
(a) ¿Cuántas aristas tiene? (b)¿Es bipartito?

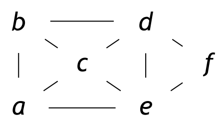
4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Grafos definidos a partir de otros

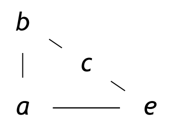
Definición (Subgrafos)

*Se dice que el grafo $H = (V_H, E_H)$ es un **subgrafo** del grafo $G = (V_G, E_G)$ si $V_H \subseteq V_G$, $E_H \subseteq E_G$ y cada arista de E_H conecta vértices de V_H.*
*El subgrafo se llama **propio** si $V_H \neq V_G$ o bien $E_H \neq E_G$.*
*Si $V_H = V_G$, se dice que el grafo H es un **subgrafo generador** o **abarcador** del grafo G. (En inglés: **spanning subgraph**).*

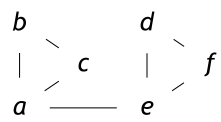
Ejemplo



$G = (V_G, E_G)$



$H_1 = (V_{H_1}, E_{H_1})$



$H_2 = (V_{H_2}, E_{H_2})$

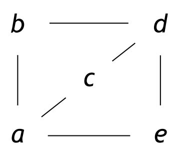
4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Grafos definidos a partir de otros

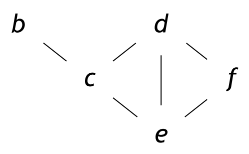
Definición (Unión de grafos)

*La **unión** de dos grafos simples* $G_1 = (V_1, E_1)$ *y* $G_2 = (V_2, E_2)$ *es el grafo simple cuyo conjunto de vértices es* $V_1 \cup V_2$ *y cuyo conjunto de arcos es* $E_1 \cup E_2$. *Se denota* $G_1 \cup G_2$.

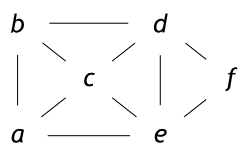
Ejemplo



$G_1 = (V_1, E_1)$



$G_2 = (V_2, E_2)$



Grafo $G_1 \cup G_2$

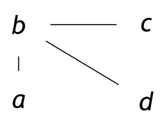
4.1 Nociones básicas en teoría de grafos

Grafos definidos a partir de otros

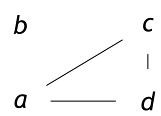
Definición

*El **grafo complementario*** $\overline{G} = (V, \overline{E})$ *de un grafo simple* $G = (V, E)$ *es el grafo que tiene los mismos vértices que* G *y las aristas que le faltan para ser un grafo completo.*

Ejemplo



Grafo $G = (V, E)$



Grafo complementario $\overline{G} = (V, \overline{E})$

4.2 Conexión en grafos

- Caminos, Circuitos y Ciclos.
- Conexión en grafos no dirigidos: Grafo conexo.Componentes conexas.
- Conexión en grafos dirigidos: Grafo fuertemente/débilmente conexo. Componentes fuertemente conexas.

4.2 Conexión en grafos

Caminos, Circuitos y Ciclos

Definición (Camino)

Sea $G = (V, E)$ *un grafo no dirigido y sea* k *un entero no negativo.*
*Un **camino*** W *(en inglés* **W**alk*) entre los vértices* v_0 *y* v_k *es una secuencia finita*

$$v_0, e_1, v_1, e_2, \cdots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

cuyos términos son alternativamente vértices y aristas tales que cada arista e_j *es incidente con los vértices* v_{j-1} *y* v_j.

*Se dice que el camino **recorre** las aristas* $e_1, \ldots, e_k$
*y que **pasa por** los vértices* $v_1, \cdots, v_{k-1}$, *llamados **vértices interiores**.*

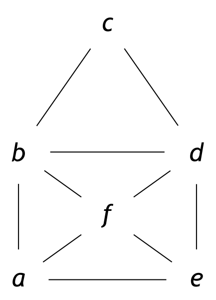
El vértice v_0 *se llama **vértice inicial** y* v_k *se llama **vértice final**.*
*La **longitud** del camino es el número de aristas que recorre.*

4.2 Conexión en grafos

Caminos, Circuitos y Ciclos

- ☛ En un grafo simple la secuencia de vértices $v_0, v_1, \cdots, v_k$ determina de forma única el camino.

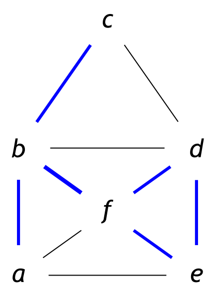
Ejemplo



4.2 Conexión en grafos

Caminos, Circuitos y Ciclos

Ejemplo



$W : a - b - f - d - e - f - b - c$

4.2 Conexión en grafos

Caminos, Circuitos y Ciclos

Definición

Un camino ***simple*** T *(en inglés* **Trail***) es un camino que no repite aristas:*

$$\forall i, j \;\; e_i \neq e_j$$

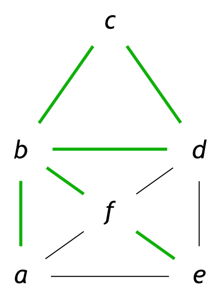
Un camino ***elemental*** P *(en inglés* **Path***) es un camino en el que todos los vértices son distintos:*

$$\forall i, j \;\; v_i \neq v_j$$

4.2 Conexión en grafos

Caminos, Circuitos y Ciclos

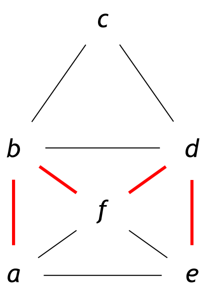
Ejemplo



$T : a - b - d - c - b - f - e$

4.2 Conexión en grafos
Caminos, Circuitos y Ciclos

Ejemplo



$P : a - b - f - d - e$

4.2 Conexión en grafos
Caminos, Circuitos y Ciclos

Definición

*Un camino **cerrado** es un camino que empieza y termina en el mismo vértice.*
*Un **circuito** C (en inglés* **C**ircuit*) es un camino cerrado que no repite aristas:*

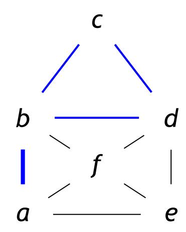
$$\forall i, j \quad e_i \neq e_j$$

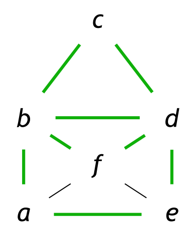
*Un **ciclo** Cy (en inglés* **Cy**cle*) es un camino cerrado en el que todos los vértices son distintos:*

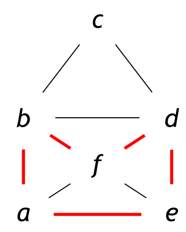
$$\forall i, j \quad v_i \neq v_j$$

4.2 Conexión en grafos
Caminos, Circuitos y Ciclos

Ejemplo







$a - b - d - c - b - a$; $\quad a - b - f - d - b - c - d - e - a$; $\quad a - b - f - d - e - a$

4.2 Conexión en grafos
Caminos, Circuitos y Ciclos

	Tipos de caminos	*¿Aristas repetidas?*	*¿Vértices repetidos?*	*¿Abierto?*
Walk	Camino	Permitidas	Permitidos	Sí
Trail	Camino simple	No Permitidas	Permitidos	Sí
Path	Camino Elemental	No Permitidas	No Permitidos	Sí
Circuit	Circuito	No Permitidas	Permitidos	No
Cycle	Ciclo	No Permitidas	No Permitidos	No

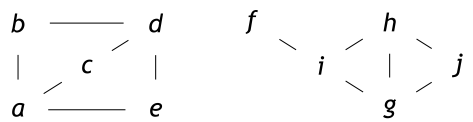
4.2 Conexión en grafos

Grafos conexos. Componentes conexas

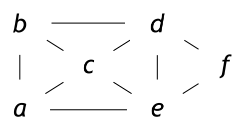
Definición

*Se dice que un grafo no dirigido $G = (V, E)$ es **conexo** si hay un camino entre cada par de vértices distintos del grafo.*

Ejemplo G_2 es un grafo conexo, pero G_1 no lo es.



Grafo $G_1(V_1, E_1)$



Grafo $G_2(V_2, E_2)$

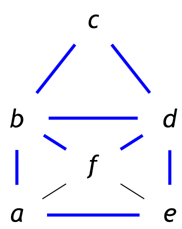
4.2 Conexión en grafos

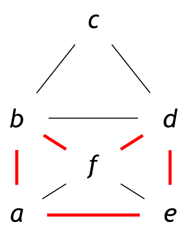
Grafos conexos. Componentes conexas

Teorema

En todo grafo conexo existe un camino elemental entre cada par de vértices distintos.

Ejemplo





4.2 Conexión en grafos

Grafos conexos. Componentes conexas

Definición

Dado un grafo (multigrafo) $G = (V, E)$, en el conjunto de vértices se define una relación

$$u\mathcal{R}v \iff \text{existe un camino de } u \text{ hasta } v$$

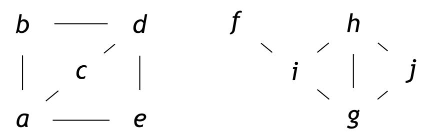
*Esta relación se llama de **accesibilidad** y es de equivalencia.*

*Se llama **componente conexa** a un subgrafo de G cuyo conjunto de vértices es una clase de equivalencia $[v]$ y las aristas son todas las que contienen a dichos vértices.*

4.2 Conexión en grafos

Grafos conexos. Componentes conexas

Ejemplo



Grafo $G_1(V_1, E_1)$

4.2 Conexión en grafos
Grafos conexos. Componentes conexas

- Un grafo es conexo si y solo si tiene exactamente una componente conexa.
- Además, un grafo que no es conexo es la unión de dos o más subgrafos conexos tales que dos a dos no tienen ningún vértice en común.
- Estos subgrafos conexos disjuntos son las ***componentes conexas*** del grafo.

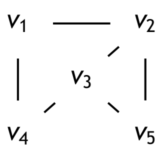
4.2 Conexión en grafos
Grafos conexos. Componentes conexas

Teorema (Número de caminos entre dos vértices)

Sea G un grafo con matriz de adyacencia M_G. El número de caminos de longitud k, $k \geq 0$ entre los vértices v_i y v_j es el número que ocupa la posición (i,j) de la matriz M_G^k.

(*Observación*: G puede ser dirigido o no; muligrafo o pseudografo)

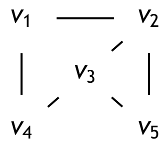
Ejemplo



$$M_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.2 Conexión en grafos
Grafos conexos. Componentes conexas

Ejemplo



$$M_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_G^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_G^4 = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 11 & 1 & 6 \\ 3 & 15 & 7 & 11 & 8 \\ 11 & 7 & 15 & 3 & 8 \\ 1 & 11 & 3 & 9 & 6 \\ 6 & 8 & 8 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Ejercicio Usa el teorema anterior para determinar si un grafo es conexo.

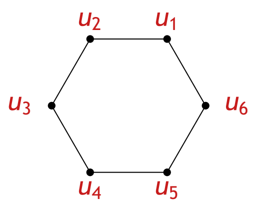
4.2 Conexión en grafos
Grafos conexos. Componentes conexas

- ✓ La conexión en un grafo es una propiedad muy útil.
- ✓ En las aplicaciones de la teoría de grafos al ámbito de las telecomunicaciones, lo mínimo que se le puede pedir a un sistema de comunicación es que todos los nodos sean accesibles unos a otros por ciertas rutas,
- ✓ es decir que el grafo que modela la red sea conexo.

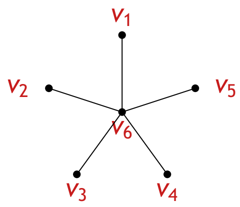
4.2 Conexión en grafos

Grafos conexos. Componentes conexas

Ejemplo Una manera de conectar entre sí 6 nodos economizando el cableado entre ellos sería mediante un ciclo de longitud 5, o bien mediante una *estrella* de 5 puntas.



C_6



W_5

4.2 Conexión en grafos

Grafos conexos. Componentes conexas

✓ Pero esto no es suficiente.

✓ A veces algún nodo o línea de comunicación puede fallar y

✓ sería deseable que la comunicación entre los restantes nodos no se viera interrumpida.

4.2 Conexión en grafos

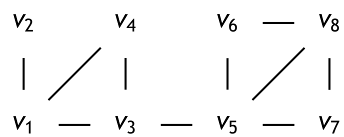
Grafos conexos. Componentes conexas

- A veces, eliminar un vértice y todas las aristas incidentes en él produce un subgrafo con más componentes conexas que el grafo inicial.
- A estos vértices se les llama ***vértices de corte*** o (***puntos de articulación***).
- Eliminar un vértice de corte de un grafo conexo produce un subgrafo que no es conexo.
- Análogamente, se llama ***arista de corte*** o ***puente*** a aquella arista cuya eliminación produce un grafo con más componentes conexas que el grafo original.

4.2 Conexión en grafos

Grafos conexos. Componentes conexas

Ejemplo



4.2 Conexión en grafos

Grafos conexos. Componentes conexas

Ejemplo

$$\begin{array}{ccccccc} v_2 & & v_4 & & v_6 & - & v_8 \\ | & / & | & & | & / & | \\ v_1 & - & v_3 & - & v_5 & - & v_7 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} v_2 & & v_4 & & v_6 & - & v_8 \\ | & / & | & & | & / & | \\ v_1 & - & v_3 & - & v_5 & - & v_7 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} v_2 & & v_4 & & v_6 & - & v_8 \\ | & / & | & & | & / & | \\ v_1 & - & v_3 & - & v_5 & - & v_7 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} v_2 & & v_4 & & v_6 & - & v_8 \\ | & / & | & & | & / & | \\ v_1 & - & v_3 & - & v_5 & - & v_7 \end{array}$$

Vértices de corte: v_1, v_3, v_5

4.2 Conexión en grafos

Grafos conexos. Componentes conexas

Ejemplo

$$\begin{array}{ccccccc} v_2 & & v_4 & & v_6 & - & v_8 \\ | & / & | & & | & / & | \\ v_1 & - & v_3 & - & v_5 & - & v_7 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} v_2 & & v_4 & & v_6 & - & v_8 \\ | & / & | & & | & / & | \\ v_1 & - & v_3 & - & v_5 & - & v_7 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} v_2 & & v_4 & & v_6 & - & v_8 \\ | & / & | & & | & / & | \\ v_1 & - & v_3 & - & v_5 & - & v_7 \end{array}$$

Aristas de corte: $\{v_1, v_2\}$, $\{v_3, v_5\}$

4.2 Conexión en grafos

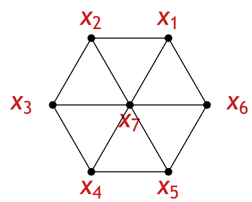
Grafos conexos. Componentes conexas

- El menor número de vértices que hay que eliminar en un grafo G para que se desconecte o llegue a ser trivial (esto es, un vértice aislado) se denota $\kappa(G)$.
- Esta cantidad se conoce como ***índice de vértice-conexión*** o ***conectividad***.
- Un grafo G se llama ***n*-conexo** si $\kappa(G) \geq n$.

4.2 Conexión en grafos

Grafos conexos. Componentes conexas

Ejemplo El grafo rueda de 7 vértices es un grafo 3-conexo.



Solución

✓ $\kappa(G) > 2$ ya que no desconecta el grafo la eventual eliminación de dos vértices cualesquiera.

✓ Pero no es 4-conexo, puesto que la eliminación de los vértices x_1, x_3 y x_7 desconecta el grafo.

✓ Así, $\kappa(G) = 3$.

4.2 Conexión en grafos

Conexión en grafos dirigidos

Definición (Walk)

Sea $G = (V, E)$ un multigrafo dirigido y sea k un entero no negativo. Un ***camino*** ***W*** *de* **longitud** *k desde el vértice v_0 hasta v_k es una secuencia finita $v_0, e_1, v_1, e_2, \cdots, e_k, v_k$ cuyos términos son alternativamente vértices y arcos de G tales que cada arco e_j es incidente con los vértices v_{j-1} y v_j, $j : 1, \ldots, k$.*

Se dice que el camino ***recorre*** *los arcos $e_1, \ldots, e_k$ y que* ***pasa por*** *los vértices $v_1, \cdots, v_{k-1}$, llamados* ***vértices interiores*** *del camino.*

El vértice v_0 se llama vértice ***inicial*** *y v_k se llama vértice* ***final****.*

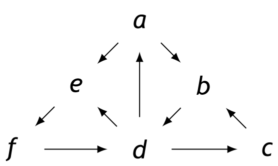
La ***longitud*** *del camino es el número de arcos que recorre.*

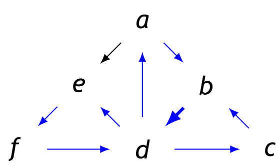
4.2 Conexión en grafos

Conexión en grafos dirigidos

- ✔ El vértice final de un arco coincide con el vértice inicial del siguiente arco del camino.
- ✔ Si no hay arcos múltiples, la secuencia de vértices $v_0, v_1, \cdots, v_k$ determina de forma única el camino.

Ejemplo





$a \to b \to d \to c \to b \to d \to e \to f \to d \to a$

4.2 Conexión en grafos

Conexión en grafos dirigidos

Definición

Un camino ***simple*** ***T*** *(en inglés* Trail*) es un camino que no repite arcos:*

$$\forall i, j \; e_i \neq e_j$$

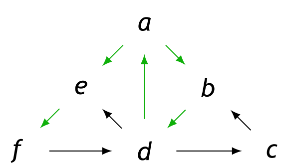
Un camino ***elemental*** ***P*** *(en inglés* Path*) es un camino en el que todos los vértices son distintos:*

$$\forall i, j \; v_i \neq v_j$$

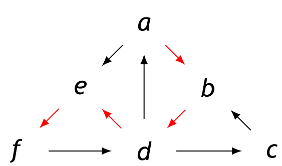
4.2 Conexión en grafos

Conexión en grafos dirigidos

Ejemplo



$a \to b \to d \to a \to e \to f$



$a \to b \to d \to e \to f$

4.2 Conexión en grafos

Conexión en grafos dirigidos

Definición

*Se dice que un grafo dirigido es **fuertemente conexo** si para cualesquiera vértices u y v hay un camino desde u hasta v y un camino desde v hasta u.*

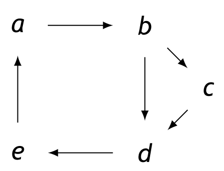
Definición

*Se dice que un grafo dirigido es **debilmente conexo** si hay un camino entre cada par de vértices del grafo no dirigido subyacente.*

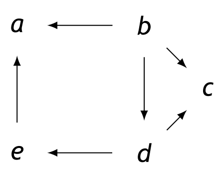
4.2 Conexión en grafos

Conexión en grafos dirigidos

Ejemplo



Grafo fuertemente conexo



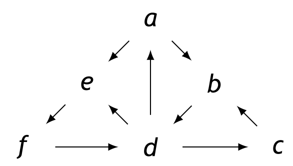
Grafo debilmente conexo

$b \to d \to e \to a \to b \to c \to d$

4.2 Conexión en grafos

Conexión en grafos dirigidos

Ejemplo



$a \to b \to d \to c \to b \to d \to e \to f \to d \to a$

4.2 Conexión en grafos

Conexión en grafos dirigidos

Definición

*Se llaman **componentes fuertemente conexas** o **componentes fuertes** de un grafo dirigido G a aquellos subgrafos de G que son fuertemente conexos pero que no están contenidos en ningún subgrafo fuertemente conexo mayor.*

*En un grafo dirigido se llama **condensación** al proceso de reemplazar cada una de las componentes fuertemente conexas por un sólo vértice.*

Ejemplo

- ***Las componentes fuertemente conexas del grafo de la Red***.
- ***Componente fuertemente conexa gigantesca*** conocida como ***GSCC***

4.3 Grafos Eulerianos y Hamiltonianos

4.3 Grafos Eulerianos y Hamiltonianos

- Caminos y circuitos eulerianos
- Caminos y ciclos hamiltonianos

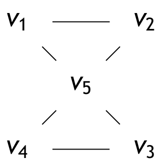
4.3 Grafos eulerianos

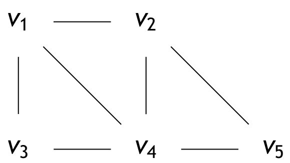
Definición

*Sea $G(V,E)$ un grafo (multigrafo) no dirigido y sean u y v vértices distintos. Un **camino euleriano** entre u y v es un camino que recorre cada arista del grafo exactamente una vez.*

*Un **circuito euleriano** es un circuito que recorre cada arista del grafo exactamente una vez.*

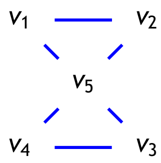
Ejemplo G_1 G_2

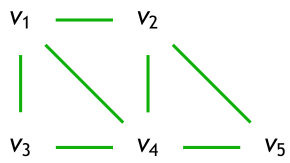




4.3 Grafos eulerianos

Ejemplo G_1 G_2





- Circuito euleriano en G_1 :

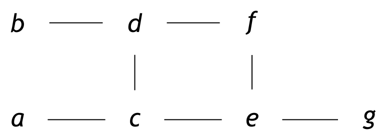
$$v_1 - -v_5 - -v_3 - -v_4 - -v_5 - -v_2 - -v_1$$

- Camino euleriano en G_2 :

$$v_1 - -v_3 - -v_4 - -v_5 - -v_2 - -v_1 - -v_4 - -v_2$$

4.3 Grafos eulerianos

Ejemplo G_3



- En G_3 no existe ni circuito ni camino euleriano.

4.3 Grafos eulerianos

Teorema

Un grafo (multigrafo) conexo tiene un circuito de Euler si y solo si todos los vértices son de grado par.

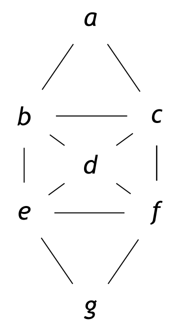
4.3 Grafos eulerianos

Algoritmo de Fleury (Descripción informal)

1. Se elige un vértice arbitrario y se construye un circuito.
2. Si ese circuito contiene todos los arcos, FIN.
3. En caso contrario, se considera un vértice común al circuito construido y a la parte del grafo que queda sin recorrer.
   (Este vértice está asegurado por ser G conexo.)
4. Empezando por ese vértice, se construye un circuito.
5. Se inserta este circuito en el circuito inicial.
6. Si ya se han recorrido todos los arcos, FIN.
7. En caso contrario, continuamos por (3).

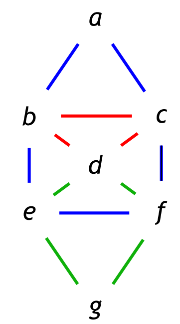
4.3 Grafos eulerianos

Ejemplo



4.3 Grafos eulerianos

Solución



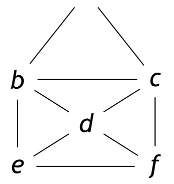
1. Primera iteración:
   $a - b - e - f - c - a$
2. Segunda iteración:
   $a - b - \underbrace{e}_{e - d - f - g - e} - f - c - a$
   Resultado:
   $a - b - e - d - f - g - e - f - c - a$
3. Tercera iteración:
   $a - b - e - \underbrace{d}_{d - b - c - d} - f - g - e - f - c - a$
   Resultado:
   $a - b - e - d - b - c - d - f - g - e - f - c - a$

4.3 Grafos eulerianos

Teorema

Un grafo (multigrafo) conexo tiene un camino de Euler entre los vértices u *y* v *si y solo si todos los vértices tienen grado par excepto* u *y* v *.*

Ejemplo Estudia si es posible dibujar el siguiente grafo sin levantar el lápiz del papel y no repetir arco.



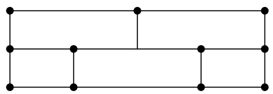
Solución

$$e - -b - -a - -c - -f - -d - -b - -c - -d - -e - -f$$

4.3 Grafos eulerianos

Ejercicio

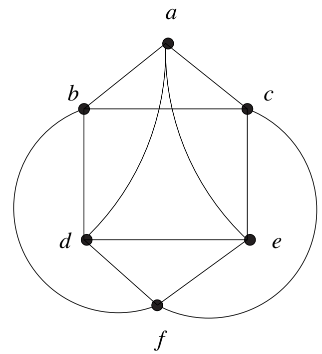
1. Estudia para qué valores de n los grafos C_n, K_n y $K_{n,n}$ tienen un circuito de Euler.
2. Estudia si es posible dibujar una línea continua que atraviese cada arco de la figura sin pasar por ningún vértice

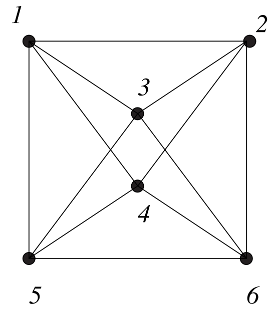


Sugerencia: Dibujar un grafo cuyos vértices representen a las regiones y las aristas representen a los cruces.

4.3 Grafos eulerianos

Ejercicio Determina en cual de los siguientes grafos hay un recorrido o un circuito de Euler. En caso de que los haya, indícalos.





4.3 Grafos hamiltonianos

Caminos y ciclos hamiltonianos

Definición

Se dice que un camino $v_0, v_1, \dots, v_n$ *del grafo* $G = (V, E)$ *es* ***hamiltoniano*** *si* $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ *y* $v_i \neq v_j$ *para* $0 \leq i < j \leq n$ *.*

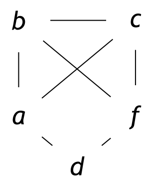
Se dice que un ciclo $v_0, v_1, \dots, v_n, v_0$ *(con* $n > 1$ *) del grafo* $G = (V, E)$ *es* ***hamiltoniano*** *si* $v_0, v_1, \dots, v_n$ *es un camino hamiltoniano.*

4.3 Grafos hamiltonianos

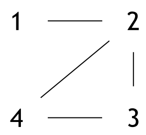
Caminos y ciclos hamiltonianos

Ejemplo

G_1



G_2

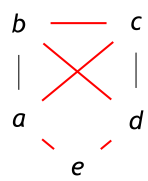


4.3 Grafos hamiltonianos

Caminos y ciclos hamiltonianos

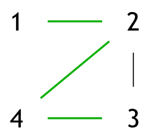
Solución

G_1



$a - c - b - d - e - a$

G_2



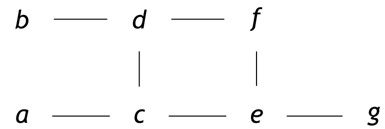
$1 - 2 - 4 - 3$

4.3 Grafos hamiltonianos

Caminos y ciclos hamiltonianos

Ejemplo

G_3



- En G_3 no existe ni ciclo ni camino hamiltoniano.

4.3 Grafos hamiltonianos

Teorema (Dirac)

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con n vértices, $n \geq 3$. Si todos los vértices de G tienen grado mayor o igual a $\frac{n}{2}$, entonces G contiene un ciclo hamiltoniano.

$$\forall v \in V, \delta(v) \geq \frac{n}{2} \implies G \text{ contiene un ciclo hamiltoniano}$$

4.3 Grafos hamiltonianos

Teorema (Ore)

Sea G un grafo simple con n vértices, $n \geq 3$. Si para cada par de vértices no adyacentes u y v de G se verifica $\delta(u) + \delta(v) \geq n$, entonces G contiene un ciclo hamiltoniano.

4.3 Grafos eulerianos y hamiltonianos

Ejercicio Sea G el grafo de la figura. Contesta razonadamente las siguientes preguntas:

1. ¿Tiene G un circuito de Euler o un ciclo de Hamilton? En caso afirmativo, indícalo.
2. ¿Es bipartito?