E. T. S. de INGENIERÍA INFORMÁTICA

Curso 2010/11

Matemática Discreta

Relación de Ejercicios 2

1. En cada uno de los siguientes apartados, determina los enteros q y r tales que $0 \leq r < |m|$ y $n = m \cdot q + r$.

   a) $n = 23,\ m = -7$; b) $n = -335,\ m = 24$; c) $n = -107,\ m = -23$

2. Da ejemplos de enteros n, m y k tales que

   a) n divide a $m \cdot k$, pero n no divide ni a m ni a k.

   b) n y m son divisores de k, pero $n \cdot m$ no es divisor de k.

3. Supongamos que n y m son enteros tales que $n > m > 0$ y $n = m \cdot q + r$.

   a) Demuestra que d es divisor común de n y m si y sólo si d es divisor común de m y r.

   b) Deduce que $\text{mcd}(m, n) = \text{mcd}(m, r)$.

4. Sean n y m enteros coprimos. Demuestra que entonces, m y $n + m \cdot k$ son coprimos para todo $k \in \mathbb{Z}^*$.

5. En cada uno de los siguientes apartados, expresa el $\text{mcd}(n, m)$ como combinación lineal de n y m.

   a) $n = 16,\ m = 135$; b) $n = 55,\ m = 34$; c) $n = 107,\ m = 23$

6. Sea n y m enteros coprimos. Usa la identidad de Bezout para deducir las siguientes propiedades.

   a) Si m divide a $n \cdot k$, entonces m divide a k.

   b) Si n y m son divisores de k, entonces $n \cdot m$ también es divisor de k.

7. Utiliza la identidad de Bezout para demostrar que, si n, m y k son enteros tales que $\text{mcd}(n, k) = 1 = \text{mcd}(n, m)$, entonces $\text{mcd}(n, m \cdot k) = 1$.

8. Utiliza la identidad de Bezout para demostrar que, si $d = \text{mcd}(n, m)$, entonces $\text{mcd}\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) = 1$.

9. Sean n y m enteros positivos cualesquiera. Demuestra que $\text{mcm}(n, m) \cdot \text{mcd}(n, m) = n \cdot m$.

10. *a*) Demuestra que si $2^n - 1$ es primo, entonces n es primo.

    b) Demuestra que si $n^p - 1$ es primo, entonces $n = 2$.

    c) Demuestra que si $2^n + 1$ es primo, entonces $n = 2^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Indicación: demostrar el contrarrecíproco.

11. Encuentra las posibles soluciones enteras no negativas de las ecuaciones:

    a) $36x + 14y = 2$; b) $33x + 29y = 2490$; c) $180x + 70y = 1840$.

12. Determina aquellos valores de $c \in \mathbb{Z}, 10 < c < 20$, para los cuales no tiene solución entera la ecuación $84x + 990y = c$. Halla las soluciones para los valores restantes de c.

13. Al ayudar a los estudiantes en sus cursos de programación, Juan observa que en promedio puede ayudar a un estudiante a depurar un programa en Delphi en 6 minutos, pero tarda 10 minutos en depurar un programa escrito en C^{++}. Si trabajo en forma contínua durante 104 minutos y no desperdició tiempo. ¿Cuántos programas depuró en cada lenguaje?

14. Consideramos tres enteros n, m y k. El máximo común divisor de n, m y k, denotado $\text{mcd}(n, m, k)$, se define como el mayor de los divisores comunes a los tres números.

    a) Demuestra que $\text{mcd}(n, m, k) = \text{mcd}(\text{mcd}(n, m), k)$

    b) Demuestra que existen enteros s, t, u tales que $n \cdot s + m \cdot t + k \cdot u = \text{mcd}(n, m, k)$.

    c) Utiliza el apartado anterior para resolver la ecuación diofántica

$$4x + 6y + 7z = 12$$

15. La unidad monetaria de un país es el “oreo” y solo existen billetes de 18, 20 y 45 oreos

    a) Prueba que se puede realizar compras por cualquier valor.

    b) ¿Cómo podría pagarse una compra de solo 1 oreo?

16. Resuelve las siguientes congruencias lineales:

a) $3x \equiv 1 \pmod{12}$	b) $3x \equiv 1 \pmod{11}$	b) $64x \equiv 32 \pmod{84}$
c) $2x + 8 \equiv 5 \pmod{33}$	d) $9 + 4x \equiv 21 \pmod{9}$	e) $15x \equiv 5 \pmod{100}$

17. En los apartados siguientes, calcula el menor entero positivo x que verifique la relación:

    a) $4^{30} \equiv x \pmod{19}$; b) $3^{201} \equiv x \pmod{11}$; c) $2^{11} \cdot 3^{13} \equiv x \pmod{7}$

18. Calcula el resto de dividir 100^{101} entre 7.

19. Según dicen los expertos, un virus informático apareció en Estados Unidos a las 12 en punto de la noche. ¿A qué hora llegó a España, si se infectó el primer ordenador 5^{100} horas después?.

20. Sea n un entero positivo cualquiera. Demuestra que:

    a) Si p es primo, entonces $n^p \equiv n \pmod{p}$.

    b) El último dígito de n^5 coincide con el último dígito de n.

    c) El entero $n^{13} - n$ es divisible por $2, 3, 5, 7$ y 13.

21. Encuentra el conjunto de enteros x que verifican el siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{cases} x \equiv -2 \pmod{5} \\ 2x \equiv 1 \pmod{7} \\ x \equiv 3 \pmod{8} \end{cases}$$

22. Resuelve, cuando sea posible, los sistemas:

a) $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{6} \\ x \equiv 3 \pmod{10} \\ x \equiv 8 \pmod{15} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{14} \\ x \equiv 10 \pmod{30} \\ x \equiv 6 \pmod{21} \end{cases}$

23. Encuentra un entero mútiplo de 11 que deja un resto igual a 1 cuando se divide por cada uno de los siguientes enteros: $2, 3, 5, 7$.

24. Encuentra el menor entero positivo cuyo resto cuando se divide por 11 es 8, que tiene el último dígito igual a 4 y es divisible por 27.

25. ¿Existe algún múltiplo de 28 cuyas dos últimas cifras sean 16?. En caso afirmativo, halla todos los múltiplos que cumplen esa condición?.

26. Un tesoro escondido de monedas de oro pasa a ser propiedad de una banda de 15 piratas. Cuando empiezan a repartirse las monedas, les sobran 3 monedas. La discusión por el reparto se "anima" y sólo quedan 7 piratas, pero, cuando se reparten las monedas entre ellos, sobran 2. La discusión continúa y el número de piratas se reduce a 4, que sí consiguen repartirse todas las monedas. ¿Cúal es el mínimo número de monedas que podía haber en el tesoro?

27. En una asignatura hay 100 alumnos matriculados. Para realizar el examen se intenta colocarlos en el aula A donde se pueden formar 6 filas iguales pero se quedan 17 sin asiento. Se trasladan al aula B en la que se pueden formar 7 filas iguales quedándose sin asiento 2. ¿Cuántos alumnos se han presentado?. Da todas las soluciones.

28. En un cierto juego se le entregan a Juan y Pedro un número desconocido de fichas. Se sabe que a Juan se le da el triple de fichas que a Pedro. Al colocar sus fichas en grupos de 8 observan que si Pedro tuviese tres fichas más y Juan tres fichas menos, les sobraría el mismo número de fichas. Después las colocan en grupos de 6 y observan que si Juan tuviese tres fichas más y Pedro tuviese una ficha menos, volverían a sobrarles el mismo número de fichas. Sabiendo que el número total de fichas es menor que 50, determina cuantas fichas recibe cada jugador.

29. Utiliza la congruencia módulo 9 para encontrar el dígito x en el producto: $89878 \cdot 58965 = 5299x56270$.

30. Determina la máxima potencia de 2 que divide a cada uno de los enteros siguientes:

    a) 1423408 b) 41578912246

31. Determina la máxima potencia de 5 que divide a cada uno de los enteros siguientes:

    a) 4860625 b) 235555790

32. Encuentra los posibles valores del dígito z en el siguiente número $1z750$ para que sea divisible por 21, es decir, divisible por 3 y por 7.

33. Desarrolla un test de divisibilidad por 37. Úsalo para determinar si los enteros 4567878 y 11092785 son divisibles por 37.