Estructuras Algebraicas para la Computación

Mariam Cobalea

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Tema 4: Sistemas de Ecuaciones Lineales

Tema 4: Sistemas de Ecuaciones Lineales

- Introducción.
- Equivalencia de sistemas. Matrices escalonadas.
- Existencia de soluciones. Método de Gauss-Jordan.
- Matrices elementales. Factorización LU.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Introducción

Definición

Una ***ecuación lineal en*** n ***variables*** $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *tiene la forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \qquad (1)$$

Los coeficientes $a_1, a_2, \dots, a_n$ *y el término constante* b *son elementos de un cuerpo* $\mathcal{K}$.

✓ Trabajaremos con el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales, el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos y los cuerpos finitos $\mathbb{Z}_p$.

✓ Las primeras letras del abecedario se usan para representar las constantes y las últimas para representar variables.

$a, b, c, \dots$	constantes
$x, y, z, \dots$	variables

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ejemplo **[Ecuaciones lineales y ecuaciones no lineales]**

- Las ecuaciones siguientes son lineales:

$$(i) \quad 3x + (\log 5)y = 7 \qquad (ii) \quad \tfrac{1}{2}x + y - \pi z = \sqrt{2}$$

$$(iii) \quad 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 18 \qquad (iv) \quad (sen\tfrac{\pi}{2})x_1 - 4x_2 = e^2$$

- Y son ecuaciones no lineales:

$$(v) \quad xy + z = 2 \qquad (vi) \quad \tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{y} = 4$$

$$(vii) \quad senx_1 2x_2 - 3x_3 = \sqrt{2} \qquad (viii) \quad e^x - 2y = 0$$

☛ Las ecuaciones lineales **no** contienen productos o raíces de las variables, ni funciones trigonométricas, exponenciales o logarítmicas.

☛ Las variables aparecen sólo elevadas a la **primera** potencia.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- Nos planteamos determinar todos los valores de las variables (***incógnitas***) $x_1, x_2, \cdots, x_n,$ que verifiquen la ecuación

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \qquad (1)$$

Definición

*Una **solución** de la ecuación lineal* $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ *(1) es una sucesión* $s_1, s_2, \cdots, s_n$ *de elementos del cuerpo* $\mathcal{K}$, *tales que la ecuación (1) se verifica cuando* $x_1 = s_1,\ x_2 = s_2, \cdots, x_n = s_n$ *se sustituyen en (1).*

Ejemplo $x_1 = 3,\ x_2 = -1,\ x_3 = 7$ es una solución de

$$2x_1 - 5x_2 + x_3 = 18$$

pues, $2(3) - 5(-1) + 7 = 18$
Esta no es la única solución, ya que $x_1 = 2,\ \ x_2 = -4,\ \ x_3 = -6$ es otra solución.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Definición

*Se llama **conjunto solución** al conjunto de todas las soluciones de una ecuación lineal. **Resolver** una ecuación lineal es hallar el conjunto solución. Se dice que dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución.*

Para describir el conjunto solución de una ecuación se suele utilizar una ***representación paramétrica***

Ejemplo [Representación paramétrica del conjunto solución]
Resuelve la ecuación lineal $x_1 + 2x_2 = 4$ en $\mathbb{R}$.

Solución: Para hallar el conjunto solución despejamos una de las variables en términos de la otra. Por ejemplo, si despejamos x_1, obtenemos:

$$x_1 = 4 - 2x_2$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

[Representación paramétrica del conjunto solución]
Ejemplo Resuelve la ecuación lineal $x_1 + 2x_2 = 4$ en $\mathbb{R}$.
Solución(cont.): $x_1 = 4 - 2x_2$

- ✓ La variable x_2 queda **libre**, lo que significa que podemos asignarle cualquier valor real.
- ✓ Por el contrario, la variable x_1 no es libre, ya que su valor depende del valor asignado a x_2.
- ✓ Para representar las infinitas soluciones de esta ecuación introducimos una tercera variable t, llamada ***parámetro***.
- ✓ Así pues, haciendo $x_2 = t$ podemos representar (especificar) el conjunto S de soluciones como

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 4 - 2t, \quad x_2 = t, \quad t \in \mathbb{R}\}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

[Representación paramétrica de un conjunto solución]
Ejemplo Resuelve la ecuación $x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6$ en $\mathbb{R}$.
Solución:

- ✓ Tomaremos como variables libres x_2 y x_3.
- ✓ Empezamos despejando x_1 : $x_1 = 6 + 3x_2 - 2x_3$
- ✓ Haciendo $x_2 = s$ y $x_3 = t$, obtenemos la representación paramétrica

$$x_1 = 6 + 3s - 2t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = t$$

  donde s y t son números reales arbitrarios.
- ✓ El conjunto solución S de la ecuación $x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6$ se puede especificar

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 6 + 3s - 2t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = t, \quad s, t \in \mathbb{R}\}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Definición

*Un **sistema de** m **ecuaciones lineales con** n **incógnitas**, o simplemente un **sistema lineal**, es un conjunto de* m *ecuaciones lineales con* n *incógnitas. Un sistema lineal viene dado por:*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{2}$$

Los subíndices i y j se usan de la siguiente manera:

- el primer subíndice i corresponde a la ecuación i -ésima,
- el segundo subíndice j se asocia con la j -ésima variable x_j.

Así, la i -ésima ecuación es $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$

Los a_{ij} (**coeficientes**) y los b_i (**términos independientes**) sos escalares de un cuerpo $\mathcal{K}$ que supondremos que es $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{Z}_p$ generalmente.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ejemplo

1. $$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 4z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & + & 7z & = & 3 \\ 3x & - & y & + & 5z & = & 1 \end{array}\right.$$

2. $$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 6 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & = & 14 \\ 3x & + & y & - & z & = & -2 \end{array}\right.$$

3. $$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 7z & = & 1 \\ x & - & 1y & + & z & = & -2 \\ 3x & - & 2y & + & 5z & = & -5 \end{array}\right.$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ejemplo

1. $$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & & & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array}\right.$$

2. $$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & & & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 10 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \end{array}\right.$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Definición

*Una **solución** de un sistema lineal es una sucesión de* n *escalares* $s_1, s_2, \cdots, s_n$ *que verifican todas y cada una de las ecuaciones del sistema. Es decir, los escalares* $s_1, s_2, \cdots, s_n$ *tienen la propiedad de que al tomar* $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \cdots, x_n = s_n$ *las* m *ecuaciones se convierten en igualdades.*

***Resolver** el sistema es hallar el conjunto de todas sus soluciones.*

Definición

Se dice que un sistema lineal es ***compatible*** *si tiene solución.*
Si la solución es única, se llama ***sistema compatible determinado*** *(S.C.D.) y se llama* ***sistema compatible indeterminado****(S.C.I.) si hay más de una solución.*
(En el caso de estar trabajando en $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ habrá infinitas soluciones).
Se llama ***sistema incompatible****(S.I.) si no tiene solución.*

Hay autores que llaman ***consistentes*** a los sistemas que tienen solución. Y a los sistemas que no tienen solución les llaman ***inconsistentes***.

Ejemplo

- El sistema
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 14 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{array}\right.$$
tiene solución única: $x_1 = 1,\ \ x_2 = -2,\ \ x_3 = 3$
- El sistema
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 4z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & + & 7z & = & 3 \\ 3x & - & y & + & 5z & = & 1 \end{array}\right.$$
es incompatible.

Definición (Sistemas equivalentes)

Se dice que dos sistemas de ecuaciones lineales (con las mismas incógnitas) son ***equivalentes*** *si tienen el mismo conjunto solución.*

Propiedad fundamental de la equivalencia

Dado un sistema de ecuaciones lineales podemos pasar a otro sistema equivalente realizando ***una*** *cualquiera de las siguientes manipulaciones:*

1. *Intercambiar el orden en el que figuran las ecuaciones en el sistema.*
2. *Multiplicar una de las ecuaciones por cualquier escalar no nulo.*
3. *Sumar a una ecuación un múltiplo de otra.*

A cada una de estas estas operaciones se le llama **operación elemental**.

- La aplicación sucesiva de operaciones elementales sobre las ecuaciones de un sistema lineal permite pasar de un sistema lineal a otro que, *teniendo las* **mismas** *soluciones que el planteado inicialmente*, es más fácil de resolver.
- ¿Cómo se efectúan de forma **eficiente** estas operaciones elementales ?

Ejemplo Se considera el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 14 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{array}\right. \qquad (3)$$

- Para eliminar x_1, sumamos (-2) veces la primera ecuación a la segunda y (-3) veces la primera ecuación a la tercera,

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} -7x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \\ -5x_2 & - & 10x_3 & = & -20 \end{array}\right.$$

- En este sistema de dos ecuaciones con las incógnitas x_2 y x_3, multiplicamos la segunda por $(-\frac{1}{5})$ y obtenemos

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} -7x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \\ x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \end{array}\right.$$

- Ahora al intercambiar las ecuaciones tendremos

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ -7x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

- Y al sumar 7 veces la primera ecuación a la segunda, podremos eliminar x_2
$10x_3 = 30$ ó bien $x_3 = 3$
- Al sustituir este valor de x_3 en la ecuación $x_2 + 2x_3 = 4$, nos queda $x_2 = -2$.
- Y al sustituir estos valores de x_2 y x_3 en la primera ecuación $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$, obtenemos $x_1 = 1$.
- Para verificar que $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ y $x_3 = 3$ es una solución del sistema inicial, comprobamos que estos valores de x_1, x_2 y x_3 satisfacen cada una de las ecuaciones de dicho sistema.

- El procedimiento de eliminación ha producido el siguiente sistema lineal:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ & & & & x_3 & = & 3 \end{array} \qquad (4)$$

- La importancia del procedimiento reside en el hecho de que los sistemas lineales (3) y (4) tienen **exactamente** las mismas soluciones, son equivalentes.
- El sistema (4) tiene la ventaja de que se puede resolver fácilmente y da como resultado los valores obtenidos para x_1, x_2 y x_3.

- Así vemos que, dado un sistema lineal, podemos encontrar sus soluciones, es decir, podemos resolverlo aplicando reiteradamente operaciones elementales hasta llegar a un sistema equivalente 'adecuado'.
- Esto puede hacerse directamente sobre el sistema como en el ejemplo anterior.
- Sin embargo, podemos usar otra representación del sistema inicial que nos permita simplificar los cálculos.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Expresión matricial de un sistema lineal

Dado el sistema lineal de m ecuaciones y n incógnitas

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

se definen las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Expresión matricial de un sistema lineal

El sistema lineal se puede escribir en forma matricial como

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

La matriz A es la ***matriz de coeficientes*** del sistema lineal
y la matriz

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

es la ***matriz aumentada*** del sistema lineal.

✔ La matriz de coeficientes y la matriz aumentada tienen una función esencial en la resolución de sistemas lineales.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Expresión matricial de un sistema lineal

Ejemplo El sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 14 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{array}\right. \tag{3}$$

se puede expresar

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix}$$

y el sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ & & & & x_3 & = & 3 \end{array}\right. \tag{4}$$

se expresa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Matrices escalonadas. Sistemas escalonados.

- A continuación, estudiamos cómo sistematizar la reducción de incógnitas de un sistema mediante manipulaciones en la matriz asociada.
- Trabajaremos para llegar a una matriz que represente a un sistema equivalente en el que se puedan deducir fácilmente las soluciones, como en el ejemplo.

Sistemas de Ecuaciones Lineales
Matrices escalonadas. Sistemas escalonados.

Definición (Matrices escalonadas)

*Una matriz $m \times n$ está en **forma escalonada por filas** si verifica:*

1. *Todas las filas que constan sólo de ceros, si las hay, están en la parte inferior de la matriz.*
2. *En cada fila, al leer de izquierda a derecha, la primera entrada distinta de cero es un 1, llamado la **entrada principal** de su fila.*
3. *Si las filas i y $i+1$ son consecutivas y no constan completamente de ceros, entonces la entrada principal de la fila $i+1$ está a la derecha de la entrada principal de la fila i.*

*Una matriz escalonada por filas se dice que está en **forma escalonada reducida por filas** si además verifica:*

4. *Si una columna contiene una entrada principal de alguna fila, entonces el resto de las entradas de esta columna son iguales a cero.*

Sistemas de Ecuaciones Lineales
Matrices escalonadas. Sistemas escalonados.

Ejemplo Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B está en forma escalonada, mientras que A y C están en forma escalonada reducida.

Definición (Sistemas escalonados)

*Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es un **sistema escalonado** si su matriz de coeficientes es escalonada. Y se dice que es un **sistema escalonado reducido** si su matriz es escalonada reducida.*

Sistemas de Ecuaciones Lineales
Operaciones elementales sobre las filas de una matriz

¿Cómo se transforma una matriz A en una matriz U escalonada reducida?

Definición (Operación elemental por filas)

*Una **operación elemental por filas** sobre una matriz $A = (a_{ij})$ es cualquiera de las siguientes operaciones:*

1. *Intercambiar dos filas de A.*
2. *Multiplicar una fila de A por un escalar no nulo.*
3. *Sumar un múltiplo de una fila a otra fila de A.*

Sistemas de Ecuaciones Lineales
Operaciones elementales sobre las filas de una matriz

Ejemplo Realizando la operación elemental $f_2 + (-2)f_1 \longrightarrow f_2$ sobre las filas de la matriz $(A|b)$, se obtiene la matriz $(A_1|b_1)$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2+(-2)f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) = (A_1|b_1)$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales
Matrices equivalentes / Sistemas equivalentes

✔ Realizar operaciones elementales sobre las filas de una matriz que representa a un sistema lineal equivale a efectuarlas sobre las ecuaciones del sistema.

Equivalencia de sistemas

Dado un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ podemos pasar a otro sistema equivalente realizando **una** cualquiera de las siguientes operaciones elementales de fila en la matriz $[A|b]$:

1. Intercambiar el orden en el que figuran las filas.
2. Multiplicar una fila por cualquier escalar no nulo.
3. Sumar a una fila un múltiplo de otra.

Sistemas de Ecuaciones Lineales
Operaciones elementales sobre las filas de una matriz

Ejemplo Realizar la operación elemental $f_2 + (-2)f_1 \longrightarrow f_2$ sobre las filas de la matriz $(A|b)$,

$$(A|b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2+(-2)f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) = (A_1|b_1)$$

equivale a efectuar sobre las ecuaciones del sistema (3) la operación que nos permite pasar al sistema (3,1)

$$(3)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 14 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{array}\right. \qquad (3{,}1)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ & - & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{array}\right.$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales
Matrices equivalentes por filas

Definición (Matrices equivalentes)

*Una matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}$ es **equivalente por filas** a una matriz $B \in \mathcal{M}_{mn}$, si efectuando una serie finita de operaciones elementales sobre las filas de A, se puede obtener B.*

Ejemplo La matriz $(A|b)$ es equivalente por filas a la matriz $(A_1|b_1)$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2+(-2)f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) = (A_1|b_1)$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales
Matrices equivalentes por filas

La equivalencia por filas de matrices verifica las siguientes propiedades:

- **Reflexiva:** Toda matriz es equivalente por filas a sí misma.
- **Simétrica:** Si A es equivalente por filas a B, entonces B es equivalente por filas a A.
- **Transitiva:** Si A es equivalente por filas a B y B es equivalente por filas a C, entonces A es equivalente por filas a C.

Por tanto, la equivalencia por filas es una **relación de equivalencia** en el conjunto de matrices $\mathcal{M}_{mn}$.

- Por ser la equivalencia por filas es una **relación de equivalencia** en el conjunto de matrices $\mathcal{M}_{mn}$, tendremos una **partición** de $\mathcal{M}_{mn}$ en **clases de equivalencia**.
- En cada clase estarán todas las matrices equivalentes entre sí.
- Además, teniendo en cuenta la propiedad simétrica, en vez de decir A es equivalente por filas a B y B es equivalente por filas a A diremos que “ A **y** B **son matrices equivalentes por filas**”.

Teorema

Toda matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}$ distinta de cero es equivalente por filas a una matriz en forma escalonada reducida por filas.

Demostración: Se hace proporcionando los pasos que se deben realizar en una matriz A para obtener una matriz en forma escalonada reducida por filas que sea equivalente a ella.

Ejemplo Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Ejemplo Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

- **Paso 1.** Determinar (contando de izquierda a derecha) la primera columna en A tal que no todas las entradas sean cero. Esta es la **columna pivote**.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 2 & 3 & -4 & 1 \\ \boxed{0} & 0 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{2} & 2 & -5 & 2 & 4 \\ \boxed{2} & 0 & -6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Columna pivote de A

- **Paso 2.** Identificar (contando de arriba hacia abajo) la primera entrada distinta de cero en la columna pivote.

  Este elemento es el **pivote**, que señalamos mediante un cuadrado.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{2} & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Pivote

- **Paso 3.** Intercambiar, en caso necesario, la primera fila con la fila donde aparece el pivote, de modo que éste se encuentre ahora en la primera fila.

  Llamamos a esta nueva matriz A_1.

$$A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

- **Paso 4.** Multiplicar la primera fila de A_1 por el inverso del pivote, así obtenemos la **entrada principal**.

  A la nueva matriz la llamamos A_2.

$$A_2 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

- **Paso 5.** Sumar múltiplos de la primera fila a las demás filas, para hacer igual a cero todas las entradas de la columna pivote, excepto la entrada principal.

  Llamaremos a la nueva matriz A_3.

$$A_3 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Paso 6.** Eliminar la primera fila de A_3 y aplicar los pasos 1 a 5 a la submatriz B que resulta.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{0} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & -4 & 1 \\ 0 & \boxed{\text{-2}} & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \sim B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{2} & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim B_2 = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \sim B_3 = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Transformación de una matriz a una forma escalonada reducida por filas

- **Paso 7.** Eliminar la primera fila de B_3 y repetir los pasos 1 a 5 a la matriz C que resulta.

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{2} & 3 & 4\\ 0 & 0 & \boxed{2} & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim C_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{2} & 3 & 4\\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sim C_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{3}{2} & 2\\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim C_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{3}{2} & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Transformación de una matriz a una forma escalonada reducida por filas

- **Paso 8.** Sea D la matriz que consta de las filas eliminadas seguidas de las filas de la matriz C_3 del paso 7. Efectuar las operaciones elementales necesarias para anular todas las entradas que aparezcan por encima de las entradas principales.

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim D_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{19}{4} & 7\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim D_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & -\frac{19}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

☛ La matriz final D_3 está en forma escalonada reducida por filas.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Solución de sistemas de ecuaciones lineales

¿Qué conexión existe entre matrices equivalentes y soluciones de sistemas lineales?

Teorema

Sean $Ax=b$ y $Cx=d$ dos sistemas lineales de m ecuaciones y n incógnitas. Si las matrices aumentadas $(A|b)$ y $(C|d)$ son equivalentes por filas, entonces ambos sistemas tienen exactamente las mismas soluciones.

Corolario

Sean $A, C \in \mathcal{M}_{mn}$. Si A y C son equivalentes por filas, entonces los sistemas lineales $Ax=0$ y $Cx=0$ tienen exactamente las mismas soluciones.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Existencia de soluciones

- ✓ Teniendo en cuenta que no todos los sistemas de ecuaciones lineales tienen solución, dado un sistema lineal es razonable plantearse, en primer lugar, si es compatible.
- ✓ El siguiente resultado nos enseña cómo se puede detectar la incompatibilidad de un sistema.

Teorema

El sistema de ecuaciones lineales $Ax=b$ es incompatible si y sólo si su matriz aumentada $(A|b)$ es equivalente por filas a una matriz en forma escalonada reducida por filas $(U|c)$ que tiene una fila en la que los n primeros elementos son iguales a cero y el último elemento es distinto de cero.

Ejemplo Sea el sistema lineal

$$\begin{cases} x_1 & & & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{cases}$$

Realizando operaciones elementales de fila en la matriz aumentada resulta

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim (A_1|b_1) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$(A_1|b_1) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim (U|c) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- ✓ Hemos llegado a una matriz escalonada reducida que tiene una fila cuyos 4 primeros elementos son iguales a cero y el último es igual a 1.
- ✓ El sistema lineal $Ax = b$ es equivalente al sistema correspondiente a la matriz $(U|c)$.
- ✓ Y este sistema es incompatible claramente,pues su última ecuación

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1$$

no se puede satisfacer para ningún valor de las incógnitas.

Teorema (Compatibilidad de sistemas de ecuaciones lineales)

Sea $Ux = c$ un sistema escalonado de m ecuaciones lineales y n incógnitas y sea r el número de filas de la matriz asociada U que tienen algún elemento no nulo, (las $m-r$ últimas filas de U sólo contienen ceros).

1. *El sistema de ecuaciones es **compatible** si y sólo si los últimos $m-r$ términos independientes son todos nulos.*
2. *Suponiendo que los $m-r$ últimos términos independientes son nulos, el sistema es **compatible determinado** si $r = n$ y es **compatible indeterminado** si $r < n$.*

Método de eliminación de Gauss-Jordan

Para resolver un sistema lineal $Ax = b$ procedemos así:

Paso 1.- Formar la matriz aumentada $(A|b)$.

Paso 2.- Mediante operaciones elementales de filas, transformar la matriz aumentada $(A|b)$ a su forma escalonada reducida por filas $(U|c)$.

Paso 3.- En cada fila distinta de cero de la matriz $(U|c)$ se despeja la incógnita correspondiente a la entrada principal de la fila. Las filas que constan completamente de ceros se pueden ignorar

Sistemas de Ecuaciones Lineales
Método de Gauss-Jordan

Ejemplo Resuelve en $\mathbb{R}$ el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & & & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 10 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \end{array}\right.$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales
Método de Gauss-Jordan

Paso 1.- La matriz aumentada es

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales
Método de Gauss-Jordan

Paso 2.- Realizamos operaciones elementales de fila en la matriz aumentada $(A|b)$ para obtener la matriz escalonada reducida por filas equivalente $(U|c)$.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim (A_1|b_1) = \left(\begin{array}{cccr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$(A_2|b_2) = \left(\begin{array}{cccr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim (A_3|b_3) = \left(\begin{array}{cccr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales
Método de Gauss-Jordan

Paso 2.- Realizamos operaciones elementales de fila en la matriz aumentada $(A|b)$ para obtener la matriz equivalente escalonada reducida por filas $(U|c)$.

$$(A_3|b_3) = \left(\begin{array}{cccr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim (A_4|b_4) = \left(\begin{array}{cccr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim (U|c) = \left(\begin{array}{cccr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de Gauss-Jordan

Paso 3.- En cada fila distinta de cero de la matriz $(U|c)$, se despeja la incógnita correspondiente a la entrada principal de la fila

$$(U|c) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{rclcl} x_1 & = & 1 & + & x_4 \\ x_2 & = & 3 & - & x_4 \\ x_3 & = & 1 & - & x_4 \\ x_4 & = & & & x_4 \end{array}$$

- Este sistema lineal es **compatible indeterminado**.
- El conjunto solución S se puede especificar

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 1 + x_4, \quad x_2 = 3 - x_4, \quad x_3 = 1 - x_4\}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ejercicios Estudia cada uno de los sistemas siguientes y halla todas las soluciones (si existen) usando el método de reducción de Gauss-Jordan

(1)
$$\begin{aligned} 3x - 4y + 6z &= 7 \\ 5x + 2y - 4z &= 5 \\ x + 3y - 5z &= 3 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} x + y - z &= 3 \\ 2x - y + 4z &= 3 \\ 3x + 2y - z &= 8 \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} x - y + 2z - t &= 0 \\ 2x + y - z + t &= 4 \\ -x + 2y + z - 2t &= -2 \\ 3x - y - 3z + t &= 1 \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} x + y + z - t &= 0 \\ 2x + 3y - z - 3t &= 0 \\ -3x - 2y - 2z + 4t &= 0 \\ 4x + 2y + 5z - 2t &= 1 \end{aligned}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Sistemas homogéneos

Definición

*Un sistema **homogéneo** es un sistema lineal de la forma*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

*La solución $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ del sistema homogéneo se conoce como la **solución trivial**. Una solución $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de un sistema homogéneo en donde no todas las x_i se anulan es una **solución no trivial**.*

☛ Un sistema homogéneo **siempre** es compatible, pues siempre tiene la solución trivial.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Sistemas homogéneos

Ejemplo Se considera el sistema homogéneo

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & & -2z & = & 0 \end{array}\right. \qquad (3)$$

La matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

es equivalente a

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que está en forma escalonada reducida por filas. Por lo tanto, la solución del sistema (3) es

$$x = y = z = 0$$

lo que significa que este sistema homogéneo sólo tiene la solución trivial.

Ejemplo Se considera el sistema homogéneo

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & w & = & 0 \\ x & & & & & + & w & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & & & = & 0 \end{array}\right. \qquad (4)$$

La matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es equivalente a

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

que está en forma escalonada reducida por filas.

Por lo tanto, la solución del sistema es

$$\begin{array}{rcr} x & = & -w \\ y & = & w \\ z & = & -w \\ w & = & w \end{array}$$

donde w es cualquier número real.

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -t,\ y = t,\ z = -t,\ w = t,\ t \in \mathbb{R}\}$$

☛ Este ejemplo muestra que un sistema homogéneo **puede** tener solución no trivial.

Teorema (Sistemas homogéneos con solución no trivial (I))

Sea $Ax = 0$ un sistema homogéneo de m ecuaciones y n incógnitas. Si $m < n$ (es decir, si el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas), entonces el sistema ***siempre*** *tiene una solución no trivial.*

Demostración:

- Si U es la matriz escalonada reducida por filas que es equivalente a la matriz A, entonces los sistemas homogéneos $Ax = 0$ y $Ux = 0$ son equivalentes.
- Si r es el número de filas distintas de cero de U, entonces $r \leq m$.
- Y ya que $m < n$, concluimos que $r < n$.
- Resolvemos r ecuaciones con n incógnitas en función de las $n - r$ incógnitas restantes.
- De esta forma, si una de estas $n - r$ incógnitas es distinta de cero, obtenemos una solución no trivial de $Ux = 0$ y con ello de $Ax = 0$.

También se puede usar este teorema de la siguiente manera:

Teorema (Sistemas homogéneos con solución no trivial (II))

Si A es una matriz $m \times n$ y el sistema $Ax = 0$ sólo tiene la solución trivial, entonces $m \geq n$.

Ejercicio Halla los valores de a y b tales que el sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{l} x - ay + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 2x - y - bz = 0 \\ y + z = 0 \end{array}\right\}$$

tenga soluciones no triviales (sin usar determinantes).

Matrices

Método práctico para determinar A^{-1}

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, buscamos una matriz $B = (b_{ij})$ tal que

$$AB = BA = \mathrm{I}_n$$

Denotamos las columnas de B mediante las matrices $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$, donde

$$\mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{ij} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} \qquad 1 \leq j \leq n$$

Matrices

Método práctico para determinar A^{-1}

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, buscamos una matriz $B = (b_{ij})$ tal que

$$AB = BA = \mathrm{I}_n$$

Denotamos las columnas de I_n como las matrices $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$, donde

$$\mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftarrow \textit{lugar} \quad jj$$

Matrices

Método práctico para determinar A^{-1}

- El problema de determinar la matriz B tal que

$$AB = \mathrm{I}_n \tag{5}$$

  equivale al problema de determinar m matrices $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$, tales que

$$A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j \qquad 1 \leq j \leq n \tag{6}$$

- Así, determinar B equivale a resolver n sistemas lineales de n ecuaciones con n incógnitas.
- Cada uno de estos sistemas se puede resolver por el método de Gauss-Jordan.

Matrices

Método práctico para determinar A^{-1}

- Para resolver el primer sistema lineal, formamos la matriz aumentada

$$(A\ |\mathbf{e}_1)$$

  y la transformamos en su forma escalonada reducida por filas.
- Hacemos lo mismo con

$$(A\ |\mathbf{e}_2), \cdots, (A\ |\mathbf{e}_n)$$

- Por ser A la matriz de coeficientes de cada uno de estos sistemas, podemos resolverlos simultáneamente.
- Para ello, formamos la matriz de tamaño $n \times 2n$

$$(A\ |\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n) = (A|\mathrm{I}_n)$$

  y la transformamos a la forma escalonada reducida por filas $(C|D)$.

$$(A\,|\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n) = (A|\mathrm{I}_n) \longrightarrow (U|C)$$

- Sean $\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\cdots,\mathbf{c}_n$ las n columnas de C, entonces la matriz $(U|C)$ corresponde a los n sistemas lineales

$$U\mathbf{x}_j = \mathbf{c}_j \qquad 1\le j\le n \tag{7}$$

- Ahora existen dos casos posibles:
  1. $\boxed{U=\mathrm{I}_n}$. En este caso, la ecuación (3) se escribe
  $$\mathrm{I}_n\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j = \mathbf{c}_j \qquad 1\le j\le n$$
  De este modo, ya hemos obtenido la inversa de A.
  2. $\boxed{U\neq\mathrm{I}_n}$. En este caso, U tiene una filas de ceros. Esto significa que alguno de los sistemas $A\mathbf{x}_j=\mathbf{e}_j \quad (1\le j\le n)$ no tiene solución única y por lo tanto, la matriz A **no** es invertible.

El procedimiento consta de los siguientes pasos:

Paso 1. Formar la matriz $(A|\mathrm{I}_n)$.

Paso 2. Transformar la matriz $(A|\mathrm{I}_n)$ a su forma escalonada reducida por filas.

Paso 3. Sea $(U|C)$ la matriz escalonada reducida por filas.

3.1 Si $U=\mathrm{I}_n$, entonces $C=A^{-1}$.

3.2 Si $U\neq\mathrm{I}_n$, entonces U tiene una fila de ceros. En este caso, A no es invertible, no existe A^{-1}.

Ejemplo Determina la inversa de

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\2&0&3\end{pmatrix}$$

Solución: Paso 1. Formamos la matriz $(A|\mathrm{I}_n)$.

$$(A|\mathrm{I}_n)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&2&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)$$

Ejemplo Determina la inversa de

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\2&0&3\end{pmatrix}$$

Solución (cont.): Paso 2. Se transforma la matriz $(A|\mathrm{I}_n)$ a su forma escalonada reducida por filas.

$$(A|\mathrm{I}_n)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}\boxed{1}&-1&2&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{f_3-2f_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&2&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&2&-1&-2&0&1\end{array}\right)$$

Solución (cont.): Paso 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-2f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

===

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_1-2f_3]{f_2+f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1+f_2} (U|C) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Solución (cont.): Paso 3. La matriz escalonada reducida por filas es

$$(U|C) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Ya que $U = \mathrm{I}$, entonces

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$$

Ejercicio Estudia si existe inversa de cada una de las siguientes matrices y, en caso afirmativo, hállala.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio Dadas las matrices A, B y C

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Resuelve la ecuación matricial $AX - 2B = C$.
2. Estudia si existe solución para la ecuación $X(A+B) = 3C$

Ejercicios Estudia cada uno de los sistemas siguientes y halla todas las soluciones (si existen) usando el método de eliminación de Gauss y usando el método de reducción de Gauss-Jordan

$$(5) \quad \begin{aligned} x + y + 2z + 3t &= 13 \\ x - 2y + z + t &= 8 \\ -x - 2y + 2z + 5t &= 20 \\ 2x - y - z + 4t &= 21 \\ 3x + y + z - t &= 1 \end{aligned} \qquad (6) \quad \begin{aligned} 2x + y + z - 2t &= 1 \\ 3x - 2y + z - 6t &= -2 \\ x + y - z - t &= -1 \\ 8x + y + 2z - 11t &= -1 \\ 5x - y + 2z - 8t &= 3 \end{aligned}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales
Método de Gauss-Jordan

Ejercicios

1. Usa el método de Gauss-Jordan para resolver en $\mathbb{Z}_4$ el siguiente sistema de ecuaciones:
$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=1 \\ x+2y=0 \end{array}\right\}$$
2. Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\cdots=\frac{x_n}{a_n}, \quad x_1+x_2+\cdots+x_n=\alpha, \quad a_i\neq 0, i=1,2,\ldots,n$$
    1. Utiliza el método de Gauss para clasificarlo para $n=4$.
    2. Generaliza el resultado para cualquier n.
3. La ecuación general de una sección cónica es
$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$
Encuentra la ecuación de la cónica que pasa por los puntos:
$(2,0)$, $(4,-3)$, $(0,-3)$, $(2,-6)$ y $(1,\frac{3}{2}\sqrt{3}-3)$.

Sistemas de Ecuaciones Lineales
Discusión de sistemas con parámetros

A veces debemos determinar la compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales con parámetros en los coeficientes y/o en los términos independientes.

Ejercicio Discute y resuelve, cuando sea posible, el siguiente sistema lineal que está en función del parámetro a.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & -4 \\ x & & -y & + & (a+2)z & = & -3a-5 \\ 4x & + & 2y & + & (a+6)z & = & -3a^2-8 \end{array}\right. \qquad (8)$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales
Discusión de sistemas con parámetros

Ejercicio Estudia la compatibilidad de cada uno de los siguientes sistemas en función del parámetro α y resuélvelo cuando sea posible (sin usar determinantes)

(1)
$$\begin{array}{l} x+2y+4z-3t=2 \\ 3x+7y+5z-5t=3 \\ 5x+12y+6z-7t=\alpha \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{l} x+y+\alpha z=1 \\ x+\alpha y+z=1 \\ \alpha x+y+z=1 \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{l} \alpha x+y+z=1 \\ x+\alpha y+z=\alpha \\ x+y+\alpha z=\alpha^2 \end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ x+3y+2z=5 \\ 2x+3y+(\alpha^2-1)z=\alpha+1 \end{array}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales
Discusión de sistemas con parámetros

Ejercicio Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & + & \beta y & + & z & = & 1 \\ x & + & \alpha\beta y & + & z & = & \beta \\ x & + & \beta y & + & \alpha z & = & 1 \end{array}\right\}$$

1. Estudia la compatibilidad según los valores de los parámetros α y β.
2. Para $\alpha=0$ y $\beta=1$
    1. Resuelve el sistema
        - (a) Por el método de Gauss.
        - (b) Por el método de Gauss-Jordan.

Factorización LU

En esta sección aprenderemos cómo

1. factorizar una matriz como producto de una matriz triangular inferior L y una matriz escalonada U.
2. usar esta factorización para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Factorización LU

Definición

Sea $A \in \mathcal{M}_{mn}$. Si la matriz A se puede escribir como producto de una matriz triangular inferior L y una matriz escalonada U, se dice que $A = LU$ es una **factorización** *LU de A.*

Ejemplos

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = LU$$

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = LU$$

Factorización LU

Ejemplos

$$(c) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = LU$$

Factorización LU

Sea A una matriz $m \times n$. Supongamos que sabemos factorizar A en la forma

$$A = LU$$

donde L es una matriz $m \times m$ triangular inferior y U es una matriz escalonada $m \times n$.
Entonces el sistema lineal $Ax = b$ se puede resolver en dos pasos más fáciles:

$$Ax = LUx = L(Ux) = Ly = b, \quad Ux = y$$

1. Se despeja y de la ecuación
$$Ly = b$$
2. Se despeja x de la ecuación
$$Ux = y$$

Factorización LU

Ejemplo 1 Usa la factorización LU de A,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

para resolver el sistema

$$Ax = \begin{pmatrix} 11 \\ 70 \\ 17 \end{pmatrix} = b$$

Factorización LU

Solución

$$Ax = LUx = L(Ux) = b$$

1. Se resuelve el sistema triangular inferior $Ly = b$.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} y_1 & & & & & = & 11 & \Longrightarrow & y_1 & = & 11 \\ 5y_1 & + & y_2 & & & = & 70 & \Longrightarrow & y_2 & = & 70 - 5y_1 = 15 \\ -2y_1 & + & 3y_2 & + & y_3 & = & 17 & \Longrightarrow & y_3 & = & 17 + 2y_1 - 3y_2 = -6 \end{array} \right.$$

2. Se resuelve el sistema $Ux = y$ por sustitución regresiva

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 11 & \Longrightarrow & x_1 & = & 1 \\ & & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 15 & \Longrightarrow & x_2 & = & -2 \\ & & & - & 2x_3 & = & -6 & \Longrightarrow & x_3 & = & 3 \end{array} \right.$$

Factorización LU

Ejercicio Usa la factorización LU de A, para resolver el sistema

$$Ax = \begin{pmatrix} 5 \\ 21 \\ -20 \end{pmatrix} = b'$$

Factorización LU

Solución:

$$Ax = LUx = L(Ux) = b'$$

1. Se resuelve el sistema triangular inferior $Ly = b'$.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} y_1 & & & & & = & 5 & \Longrightarrow & y_1 & = & 5 \\ 5y_1 & + & y_2 & & & = & 21 & \Longrightarrow & y_2 & = & -4 \\ -2y_1 & + & 3y_2 & + & y_3 & = & -20 & \Longrightarrow & y_3 & = & 2 \end{array} \right.$$

2. Se resuelve el sistema $Ux = y$ por sustitución regresiva

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 & \Longrightarrow & x_1 & = & 2 \\ & & 3x_2 & + & 7x_3 & = & -4 & \Longrightarrow & x_3 & = & 1 \\ & & & - & 2x_3 & = & 2 & \Longrightarrow & x_2 & = & -1 \end{array} \right.$$

Factorización LU

Hemos estudiado tres tipos de operaciones elementales sobre las filas de una matriz:

1. Intercambiar dos filas.
2. Multiplicar una fila por un número no nulo.
3. Sumar un múltiplo de una fila a otra fila.

Ahora estudiamos cómo se pueden expresar estas operaciones usando el producto de matrices.

Factorización LU

Matrices elementales

Definición

Una matriz $E \in \mathcal{M}_{n\times n}$ *se llama* **matriz elemental** *si se puede obtener de la matriz identidad* I_n *mediante una única operación elemental por filas.*

Ejemplo [Matrices elementales y no elementales]

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (c)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Factorización LU

Matrices elementales

Ejemplo [Matrices elementales y no elementales]

$$(d)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (e)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(f)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad (g)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Factorización LU

Matrices elementales

☛ Las **matrices elementales** son útiles porque **permiten expresar** las **operaciones elementales por filas** como **producto de matrices**

Teorema

Sea E *la matriz elemental obtenida al efectuar una operación elemental sobre las filas de* I_n*. El resultado de efectuar esa misma operación elemental sobre las filas de* A *coincide con el producto* $E \cdot A$*.*

Ejemplo [Matrices elementales y operaciones elementales por filas]

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Factorización LU
Matrices elementales

Teorema

Sea E la matriz elemental obtenida al efectuar una operación elemental sobre las filas de I_n. El resultado de efectuar esa misma operación elemental sobre las filas de A coincide con el producto $E \cdot A$.

Ejemplo: [Matrices elementales y operaciones elementales por filas]

$$(b)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 9 & 6 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Factorización LU
Matrices elementales

Definición

Sean A y B matrices $m \times n$. Se dice que B es **equivalente por filas** *a la matriz A si existe una secuencia finita de matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tal que*

$$B = E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1 \cdot A$$

Ejemplo Dadas las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

probamos que la matriz B es equivalente por filas a la matriz A

Factorización LU
Matrices elementales

Ejemplo

$$E_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 3 & 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} = A_1$$

$$E_2 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 3 & 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \end{pmatrix} = A_2$$

$$E_3 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

$$E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = B$$

$$E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Factorización LU
Inversa de matrices elementales

- ✓ Sabemos que **no** todas las matrices cuadradas son invertibles.
- ✓ Sin embargo, **todas** las matrices elementales son invertibles.
- ✓ Además, la inversa de una matriz elemental **también** es una matriz elemental.

Teorema

Si E es una matriz elemental, entonces E^{-1} existe y es también una matriz elemental.

☛ Para hallar la inversa de una matriz elemental E basta invertir la operación elemental utilizada para obtener E.

Ejemplo

$$(E_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Factorización LU
Cálculo de la matriz inversa usando matrices elementales

Teorema
Una matriz cuadrada A es invertible si y sólo si se puede expresar como producto de matrices elementales.

Demostración:

- Si una matriz A es invertible, entonces alguna secuencia de operaciones elementales de fila transformará A en la matriz identidad I
$$A \sim A_1 \sim A_2 \sim \cdots \sim A_k = \mathrm{I}$$
- Ya que cada una de estas operaciones es equivalente a la premultiplicación por una matriz elemental, existen matrices elementales $E_1, E_2, ..., E_{k-1}, E_k$ tales que $E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A = \mathrm{I}$
- Por lo tanto,
$$A = \left(E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_2 \cdot E_1\right)^{-1} = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdots E_{k-1} \cdot E_k^{-1}$$

Factorización LU

Teorema
Si A es una matriz $m \times n$ que se puede reducir a la forma escalonada U (sin intercambios de fila), entonces A se puede factorizar
$$A = L \cdot U$$
donde L es una matriz $m \times m$ triangular inferior con 1 en la diagonal principal. El elemento ℓ_{ij} $(i > j)$ de L proviene de la operación elemental $f_i - \ell_{ij} f_j \longrightarrow f_i$ que se usó para hacer 0 en la posición ij durante la reducción.

Demostración:

- Si una matriz A se puede reducir a la forma escalonada U, entonces alguna secuencia de operaciones elementales de fila transformará A en la matriz U
$$A \sim A_1 \sim ... \sim A_k = U$$

Factorización LU

Demostración (cont.):
$$A \sim A_1 \sim ... \sim A_k = U$$

- Ya que cada una de estas operaciones es equivalente a la premultiplicación por una matriz elemental, existen matrices elementales $E_1, E_2, ..., E_k$ tales que
$$E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A = U$$
- De donde se obtiene,
$$A = \left(E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_2 \cdot E_1\right)^{-1} \cdot U =$$
$$= E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} \cdot E_k^{-1} \cdot U$$
- Por lo tanto,
$$E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} \cdot E_k^{-1} = L$$

Factorización LU
¿Cómo encontrar la matriz L ?

Ejemplo 1 Halla la factorización LU de la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{pmatrix}$$

Factorización LU

¿Cómo encontrar la matriz L ?

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{pmatrix} \underset{f_3+(2)f_1}{\xrightarrow{f_2+(-5)f_1}} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 9 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3+(-3)f_2} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = U$$

$$E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = U \implies A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot U = L \cdot U$$

$$E_1^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_2^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_3^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Factorización LU

¿Cómo encontrar la matriz L ?

Ejemplo 1 Halla la factorización LU de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = U \implies A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot U = L \cdot U \implies L = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1}$$

$$E_1^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_2^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_3^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Factorización LU

Ejercicio Resuelve mediante la factorización LU los sistemas de ecuaciones lineales $Ax=b$ y $Ax=b^*$

$$A=\begin{pmatrix} 20 & 4 & 4 \\ 10 & 14 & 5 \\ 5 & 5 & 12 \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} 280 \\ 290 \\ 220 \end{pmatrix} \qquad b^*=\begin{pmatrix} 400 \\ 500 \\ 600 \end{pmatrix}$$

Ejercicio Usando la factorización LU, resuelve los sistemas $A^3x=b$ en cada apartado:

$$(1) \quad A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 27 \\ 29 \\ 122 \end{pmatrix}$$

(Sin efectuar A^3)

Bibliografía

Métodos matemáticos: Algebra lineal y Geometría
P. Alberca y D. Martín (Ediciones Aljibe)

Algebra lineal J. de Burgos (Ed. McGraw Hill)

Algebra lineal J.B. Fraleigh y R.A. Beauregard (Ed. Addison Wesley)

Algebra lineal con aplicaciones y Mathlab
B. Kolman y D. Hill (Ed. Prentice Hall)

Algebra lineal con aplicaciones G. Nakos y D. Joyner (Ed. Thomson)

Algebra lineal y sus aplicaciones G. Strang (Ed. Addison Wesley)

Problemas de Álgebra
A. de la Villa (Librería I.C.A.I. Univ. Pontifícia de Comillas)