Estructuras Algebraicas para la Computación

Mariam Cobalea

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Tema 2: Retículos y Álgebras de Boole

- Retículos ordenados y retículos algebraicos.
- Tipos de retículos y propiedades.
  - Distributivos
  - Acotados
  - Complementados
- Álgebras de Boole. Expresiones y funciones booleanas.

Retículos ordenados

- Empezamos introduciendo una estructura llamada ***retículo*** que es más general que el ***álgebra de Boole***.
- Ciertos retículos son importantes en teorías abstractas de computación, desarrolladas a partir de la noción de ***aproximación***.

Definición

*Sea $(\mathcal{L}, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Se dice que $(\mathcal{L}, \preceq)$ es un **retículo** si cada par de elementos $a, b \in \mathcal{L}$ tiene mínima cota superior y máxima cota inferior en $\mathcal{L}$:*

$$\text{mínima cota superior}\{a,b\} \in \mathcal{L} \quad \text{y} \quad \text{máxima cota inferior}\{a,b\} \in \mathcal{L}$$

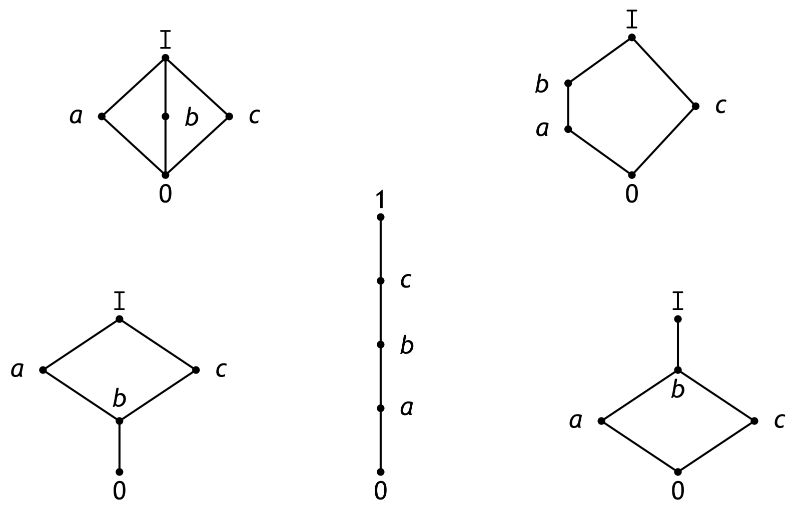
Notación:

$$\text{mínima cota superior}\{a,b\} = \textbf{m.c.s.}\{a,b\},$$

$$\text{máxima cota inferior}\{a,b\} = \textbf{m.c.i.}\{a,b\}$$

Retículos ordenados

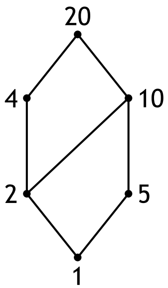
Ejemplos Son retículos ordenados



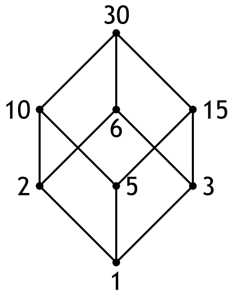
Retículos ordenados

Ejemplos

- $(D_n, |)$, en particular para $n = 20$ y $n = 30$:



$(D_{20}, |)$

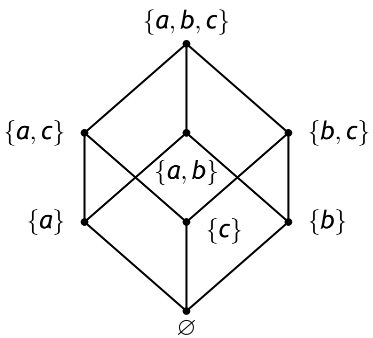


$(D_{30}, |)$

Retículos ordenados

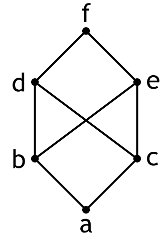
Ejemplos

- $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$, en particular para $S = \{a, b, c\}$



Retículos ordenados

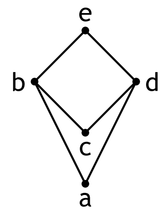
Ejercicio ¿Es retículo el conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$?



$(A, \preceq)$

Retículos ordenados

Ejercicio ¿Es retículo el conjunto parcialmente ordenado $(B, \ll)$?



$(B, \ll)$

Propiedades de los retículos

Usando la definición de retículo ordenado, en todo retículo $(\mathcal{L}, \preceq)$ se pueden definir dos operaciones binarias $\sqcup$ y $\sqcap$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{llll} \sqcup: & \mathcal{L}\times\mathcal{L} & \longrightarrow & \mathcal{L} \\ & (a,b) & \longmapsto & \text{m.c.s.}\{a,b\} = a \sqcup b \quad (\text{se lee: } a \textbf{ más } b) \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \sqcap: & \mathcal{L}\times\mathcal{L} & \longrightarrow & \mathcal{L} \\ & (a,b) & \longmapsto & \text{m.c.i.}\{a,b\} = a \sqcap b \quad (\text{se lee: } a \textbf{ por } b) \end{array}$$

Propiedades de los retículos

Ejemplos

1. En el retículo ordenado $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ se definen las operaciones:

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(S),\ A \sqcup B = \text{m.c.s.}\{A,B\} = A \cup B \in \mathcal{P}(S),$$

$$A \sqcap B = \text{m.c.i.}\{A,B\} = A \cap B \in \mathcal{P}(S)$$

2. En el retículo ordenado $(\mathbb{Z}^+, |)$ se definen las operaciones:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}^+,\ a \sqcup b = \text{m.c.s.}\{a,b\} = m.c.m.(a,b) \in \mathbb{Z}^+,$$

$$a \sqcap b = \text{m.c.i.}\{a,b\} = m.c.d.(a,b) \in \mathbb{Z}^+$$

3. En el retículo ordenado $(\mathcal{D}_n, |)$ se definen las operaciones:

$$\forall a, b \in D_n,\ a \sqcup b = \text{m.c.s.}\{a,b\} = m.c.m.(a,b) \in D_n,$$

$$a \sqcap b = \text{m.c.i.}\{a,b\} = m.c.d.(a,b) \in D_n$$

Propiedades de los retículos

Teorema

Sea el retículo $(\mathcal{L}, \preceq)$ y sea $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$ el sistema algebraico que determina. En $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$ se verifican las siguientes propiedades:

1. Conmutativa :	$a \sqcup b$	$=$	$b \sqcup a$	$a \sqcap b$	$=$	$b \sqcap a$
2. Asociativa :	$a \sqcup (b \sqcup c)$	$=$	$(a \sqcup b) \sqcup c$	$a \sqcap (b \sqcap c)$	$=$	$(a \sqcap b) \sqcap c$
3. Absorción :	$a \sqcup (a \sqcap b)$	$=$	a	$a \sqcap (a \sqcup b)$	$=$	a

Ejemplo Dado $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$, obtenemos $(\mathcal{P}(S), \cup, \cap)$ que verifica:

1. Conmutativa:	$A \cup B$	$=$	$B \cup A$	$A \cap B$	$=$	$B \cap A$
2. Asociativa:	$A \cup (B \cup C)$	$=$	$(A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C)$	$=$	$(A \cap B) \cap C$
3. Absorción:	$A \cup (A \cap B)$	$=$	A	$A \cap (A \cup B)$	$=$	A

Retículos algebraicos $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$

Estas propiedades se usan para dar una definición axiomática de ***retículo algebraico***.

Definición

Sean $\sqcup$ y $\sqcap$ dos operaciones binarias definidas en un conjunto $\mathcal{L}$.

*Se dice que $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$ es un **retículo algebraico** si para todo $a, b, c \in \mathcal{L}$ se verifican las propiedades: $\sqcap$ que verifican las propiedades*

1. Conmutativa:	$a \sqcup b$	$=$	$b \sqcup a$	$a \sqcap b$	$=$	$b \sqcap a$
2. Asociativa:	$a \sqcup (b \sqcup c)$	$=$	$(a \sqcup b) \sqcup c$	$a \sqcap (b \sqcap c)$	$=$	$(a \sqcap b) \sqcap c$
3. Absorción:	$a \sqcup (a \sqcap b)$	$=$	a	$a \sqcap (a \sqcup b)$	$=$	a

Principio de Dualidad

Teorema

Dado un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$, *se define la relación* $\succeq$

$$\text{para cada } a, b \in A, \quad a \succeq b \iff b \preceq a$$

Se verifica:

1. $(A, \succeq)$ *también es un conjunto parcialmente ordenado.*
2. *Si* $(A, \preceq)$ *es un retículo, entonces* $(A, \succeq)$ *también lo es.*

Principio de Dualidad

Los conjuntos parcialmente ordenados $(A, \preceq)$ y $(A, \succeq)$ están muy relacionados, al igual que las estructuras algebraicas definidas en ellos. Concretamente,

- la operación $\sqcup$ de $(A, \preceq)$ coincide con la operación $\sqcap$ de $(A, \succeq)$ y
- la operación $\sqcap$ de $(A, \preceq)$ coincide con la operación $\sqcup$ de $(A, \succeq)$.

Principio de Dualidad

Si un enunciado se verifica para un retículo, entonces también se verifica el enunciado que resulta al reemplazar la relación $\preceq$ por la relación $\succeq$, la operación $\sqcup$ por la operación $\sqcap$ y la operación $\sqcap$ por la operación $\sqcup$.

Retículos algebraicos $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$

Teorema

Sea $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$ *un retículo algebraico. Se verifican las propiedades:*

4. Idempotencia: $a \sqcup a = a, \quad a \sqcap a = a$, *para todo* $a \in \mathcal{L}$

5. $a \sqcup b = b \iff a \sqcap b = a$, *para todo* $a, b \in \mathcal{L}$

Demostración: Ejercicio

Indicación: Hay que justificar que las propiedades ***1. Conmutativa***, ***2. Asociativa*** y ***3. Absorción*** implican las propiedades **4** y **5**

Retículo algebraico $\implies$ Retículo ordenado

- Según hemos visto, a partir de un **retículo ordenado** se puede llegar a un **retículo algebraico**.
- A continuación, se establece que a partir de un **retículo algebraico** podemos obtener un **retículo ordenado**.

Teorema

Dado el retículo algebraico $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$, *se define una relación* $\ll$ *en* $\mathcal{L}$ *de la siguiente manera:*

$$a \ll b \iff a \sqcup b = b$$

Entonces $(\mathcal{L}, \ll)$ *es un conjunto parcialmente ordenado en el que para todo* $a, b \in \mathcal{L}$, *se verifica:*

$$m.c.s.\{a, b\} \in \mathcal{L}, \quad m.c.i.\{a, b\} \in \mathcal{L}$$

y en el cual $m.c.s.\{a, b\} = a \sqcup b$ *y* $m.c.i.\{a, b\} = a \sqcap b$.

Subretículos

Definición

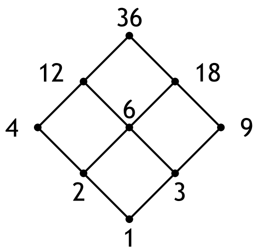
Sea $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$ *un retículo y sea* $\mathcal{M}$ *un subconjunto no vacío de* $\mathcal{L}$.
Se dice que $\mathcal{M}$ *es un* ***subretículo*** *de* $\mathcal{L}$ *si para todo* $x, y \in \mathcal{M}$,

$$x \sqcup y \in \mathcal{M}, \quad x \sqcap y \in \mathcal{M}$$

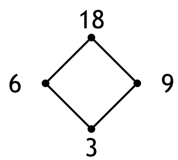
Es decir, $\mathcal{M}$ es ***subretículo*** de $\mathcal{L}$ si tiene estructura de retículo con respecto a la restricción de las operaciones $\sqcup$ y $\sqcap$ de $\mathcal{L}$ sobre $\mathcal{M}$.

Subretículos

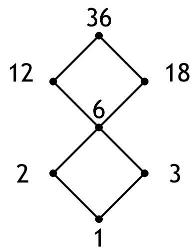
Ejemplos Estudia los subconjuntos parcialmente ordenados $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$



D_{36}



$\mathcal{M}_1$

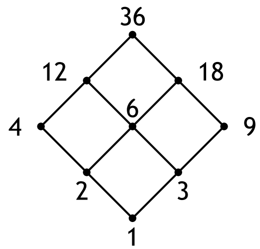


$\mathcal{M}_2$

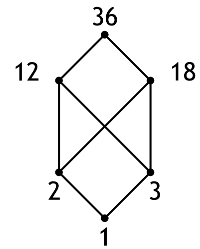
- Claramente $\mathcal{M}_1 = \{3, 6, 9, 18\}$ es un subretículo del retículo D_{36}.
- Podemos comprobar que $\mathcal{M}_2 = \{1, 2, 3, 6, 12, 18, 36\}$ es retículo con las mismas operaciones que D_{36}.
  Luego, $\mathcal{M}_2$ es un subretículo del retículo D_{36}.

Subretículos

Ejemplos



D_{36}

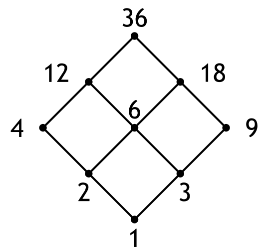


$\mathcal{M}_3$

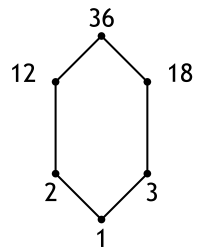
- El subconjunto parcialmente ordenado $\mathcal{M}_3 = \{1, 2, 3, 12, 18, 36\}$ no tiene estructura de retículo, puesto que no existe $mcs\{2, 3\}$.
  Por lo tanto, $\mathcal{M}_3$ no es un subretículo de D_{36}.

Subretículos

Ejemplo



D_{36}



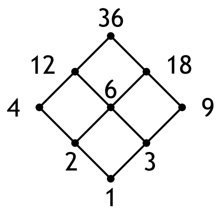
$\mathcal{M}_4$

- $\mathcal{M}_4 = \{1, 2, 3, 12, 18, 36\}$ no es subretículo del retículo D_{36}, ya que

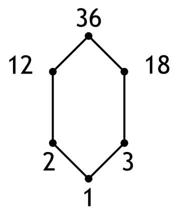
$$12 \sqcap 18 = 6 \notin \mathcal{M}_4$$

Subretículos

Ejemplo



D_{36}



$\mathcal{M}_4$

- Aunque $\mathcal{M}_4$ no es subretículo de D_{36}, se pueden definir en $\mathcal{M}_4$ operaciones $\sqcup'$ y $\sqcap'$ que le dan estructura de retículo

$$2 \sqcup' 3 = 12 \sqcup' 18 = 36 \qquad 12 \sqcap' 18 = 2 \sqcap' 3 = 1$$
$$2 \sqcup' 18 = 3 \sqcup' 12 = 36 \qquad 3 \sqcap' 12 = 2 \sqcap' 18 = 1$$
$$2 \sqcup' 12 = 12 \qquad 2 \sqcap' 12 = 2$$
$$3 \sqcup' 18 = 18 \qquad 3 \sqcap' 18 = 3$$

☛ Un subconjunto parcialmente ordenado que es retículo, puede que no sea subretículo.

Retículo producto

Teorema

Sean $(\mathcal{L}_1, \preceq_1)$ y $(\mathcal{L}_2, \preceq_2)$ retículos. Entonces $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$ es un retículo con la relación de orden producto $\preceq$ y las operaciones $\sqcup$ y $\sqcap$ definidas mediante

$$(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2) \iff x_1 \preceq_1 y_1 \quad \wedge \quad x_2 \preceq_2 y_2$$

$$(x_1, x_2) \sqcup (y_1, y_2) = (x_1 \sqcup_1 y_1,\ x_2 \sqcup_2 y_2)$$

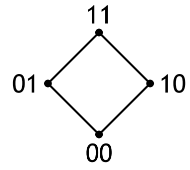
$$(x_1, x_2) \sqcap (y_1, y_2) = (x_1 \sqcap_1 y_1,\ x_2 \sqcap_2 y_2)$$

Al retículo $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$ se le llama ***retículo producto***.

Retículo producto

Ejemplo 1 $\mathcal{L}_1 = \mathbb{B} = \{0, 1\} = \mathcal{L}_2$; $\qquad \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 = \{00, 01, 10, 11\}$

$\mathbb{B}$

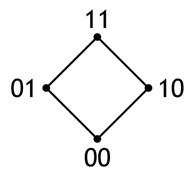


$\mathbb{B} \times \mathbb{B}$

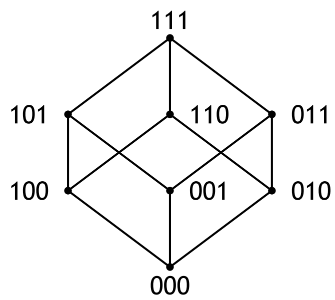
Retículo producto

Ejemplo 2 $\mathcal{L}_1 = \mathbb{B}$, $\qquad \mathcal{L}_2 = \mathbb{B}^2$

$\mathcal{L}_1$



$\mathcal{L}_2$



$\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$

Homomorfismos e isomorfismos de retículos

Definición

Sean los retículos $(\mathcal{L}_1, \sqcup_1, \sqcap_1)$ *y* $(\mathcal{L}_2, \sqcup_2, \sqcap_2)$ *y sea* $f\colon \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$.
Se dice que f *es un*

1. $\sqcup$ ***-homomorfismo**, si* $x \sqcup_1 y = z \implies f(x) \sqcup_2 f(y) = f(z)$
2. $\sqcap$ ***-homomorfismo**, si* $x \sqcap_1 y = z \implies f(x) \sqcap_2 f(y) = f(z)$
3. ***homomorfismo de orden**, si* $x \leq_1 y \implies f(x) \leq_2 f(y)$

Se dice que f *es un **homomorfismo** de retículos si* f *es* $\sqcup$ *-homomorfismo y* $\sqcap$ *-homomorfismo.*

Los homomorfismos de retículos si son inyectivos, sobreyectivos o biyectivos se llaman ***monomorfismos***, ***epimorfismos*** o ***isomorfismos*** respectívamente.

Homomorfismos e isomorfismos de retículos

Teorema

Si $f\colon \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *es un* $\sqcup$ *-homomorfismo o un* $\sqcap$ *-homomorfismo, entonces es un homomorfismo de orden*

Es decir,

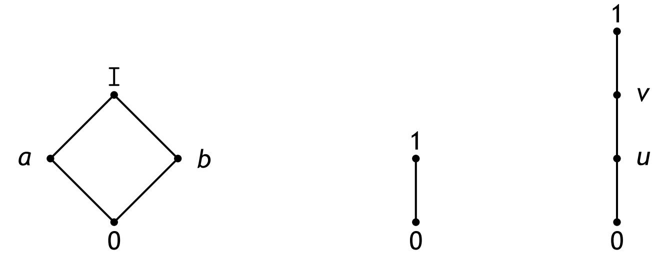
$$\left\{ \begin{array}{c} f\colon \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2 \\ (1)\ f(x \sqcup_1 y) = f(x) \sqcup_2 f(y) \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{c} f\colon \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2 \\ (3)\ x \leq_1 y \implies f(x) \leq_2 f(y) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} f\colon \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2 \\ (2)\ f(x \sqcap_1 y) = f(x) \sqcap_2 f(y) \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{c} f\colon \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2 \\ (3)\ x \leq_1 y \implies f(x) \leq_2 f(y) \end{array} \right\}$$

Homomorfismos e isomorfismos de retículos

El recíproco no es cierto. No toda función entre retículos que conserva el orden, conserva también las operaciones $\sqcup$ y $\sqcap$.

Contrajemplo Se consideran los retículos



$\mathcal{L}_1$ $\mathcal{L}_2$ $\mathcal{L}_3$

Homomorfismos e isomorfismos de retículos

Contrajemplo Se definen las funciones:

$$f\colon \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2, \quad f(0) = f(a) = f(b) = 0, \quad f(\mathrm{I}) = 1$$

$$g\colon \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2, \quad g(\mathrm{I}) = g(a) = g(b) = 1, \quad g(0) = 0$$

$$h\colon \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_3, \quad h(0) = 0, \quad h(a) = u, \quad h(b) = v, \quad h(\mathrm{I}) = 1$$

Justifica que:

- Las tres funciones son homomorfismos de orden.
- La función f es un $\sqcap$ -homomorfismo, pero no es $\sqcup$ -homomorfismo.
- La función g es un $\sqcup$ -homomorfismo, pero no es $\sqcap$ -homomorfismo.
- La función h no es $\sqcap$ -homomorfismo ni tampoco $\sqcup$ -homomorfismo.

Isomorfismos de retículos

Teorema

Sean $(\mathcal{L}_1, \leq_1)$ *y* $(\mathcal{L}_2, \leq_2)$ *retículos. La función* $f\colon \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *es un isomorfismo de retículos si y sólo si es biyectiva y para todo* $a, b \in \mathcal{L}_1$,

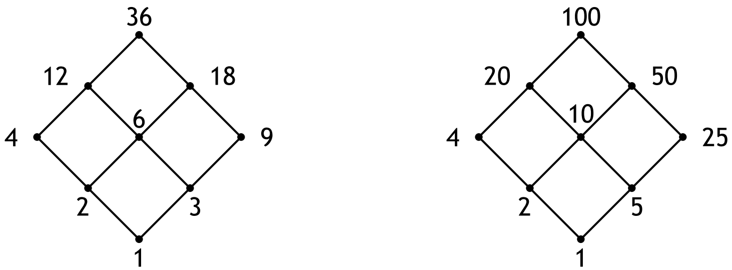
$$a \leq_1 b \iff f(a) \leq_2 f(b)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} f \text{ biyectiva} \\ f(a \sqcup_1 b) = f(a) \sqcup_2 f(b) \\ f(a \sqcap_1 b) = f(a) \sqcap_2 f(b) \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{c} f \text{ biyectiva} \\ a \leq_1 b \iff f(a) \leq_2 f(b) \end{array} \right\}$$

- Dos retículos **isomorfos** son **idénticos** algebraicamente y también como conjuntos parcialmente ordenados.
- Por lo tanto, sus diagramas de Hasse sólo se diferenciarán en las etiquetas de los vértices.

Isomorfismos de retículos

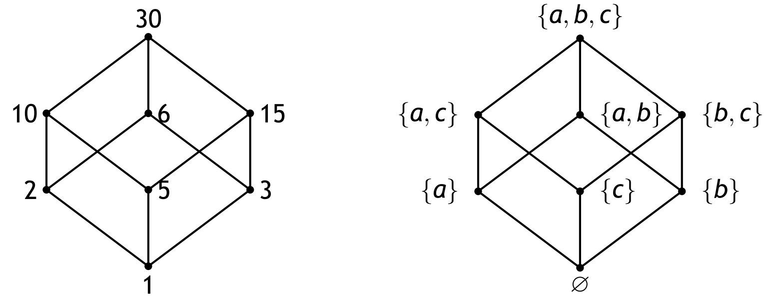
Ejemplo Son retículos isomorfos $(D_{36}, |)$ y $(D_{100}, |)$



D_{36} $\quad$ D_{100}

Isomorfismos de retículos

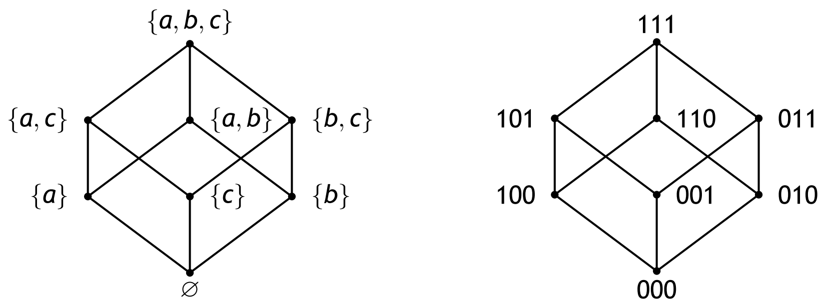
Ejemplo Son retículos isomorfos $(D_{30}, |)$ y $(\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \subseteq)$



$(\mathcal{D}_{30}, |)$ $\quad$ $(\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \subseteq)$

Isomorfismos de retículos

Ejemplo Son retículos isomorfos $\big(\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \subseteq\big)$ y $\big(\mathbb{B}_3, \preceq\big)$



$\big(\mathcal{P}(\{a,b,c\})\big)$ $\quad$ $(\mathbb{B}^3, \preceq)$

Tipos de Retículos

Definición

Se dice que el retículo $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$ *es* **distributivo** *si para cada* $a, b, c \in \mathcal{L}$ *se verifica:*

$$\begin{aligned} a \sqcap (b \sqcup c) &= (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) \\ a \sqcup (b \sqcap c) &= (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c) \end{aligned}$$

Ejemplos

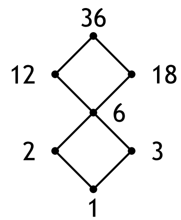
- $(\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \cup, \cap)$ es distributivo.
  En general, $(\mathcal{P}(S), \cup, \cap)$ es un retículo distibutivo.
- D_6, D_{12}, D_{36}, ... son retículos distributivos.
  En general, D_n es un retículo distibutivo.

Retículos distributivos

Teorema

Si $\mathcal{L}'$ *es un subretículo de un retículo distributivo* $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$, *entonces* $\mathcal{L}'$ *también es distributivo.*

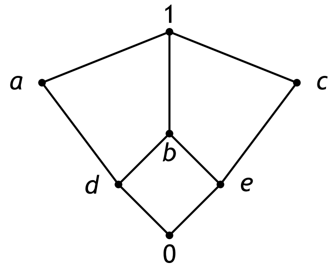
Ejemplo Estudia si el retículo de la figura es distributivo.



Solución: Se comprueba fácilmente que es distributivo, teniendo en cuenta que es un subretículo de D_{36} y aplicando el teorema anterior.

Retículos distributivos

Ejercicio Estudia si es distributivo el retículo



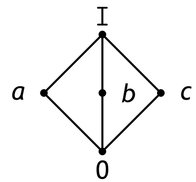
Solución: No es distributivo, ya que

$$\left\{ \begin{aligned} d \sqcup (a \sqcap c) &= d \sqcup 0 = d \\ (d \sqcup a) \sqcap (d \sqcup c) &= a \sqcap 1 = a \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} a \sqcap (d \sqcup c) &= a \sqcap 1 = a \\ (a \sqcap d) \sqcup (a \sqcap c) &= d \sqcup 0 = d \end{aligned} \right\}$$

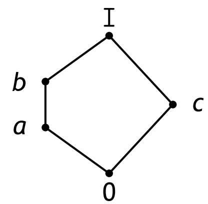
Retículos no distributivos

Los retículos no distributivos más representativos son:

Retículo $\mathcal{L}_1$ (Diamante)



Retículo $\mathcal{L}_2$ (Pentágono)



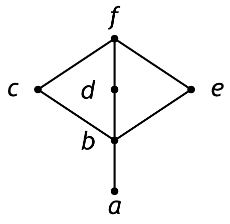
$$\left\{ \begin{aligned} a \sqcap (b \sqcup c) &= a \sqcap \mathrm{I} = a \\ (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) &= 0 \sqcup 0 = 0 \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} a \sqcup (b \sqcap c) &= a \sqcup 0 = a \\ (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c) &= b \sqcap \mathrm{I} = b \end{aligned} \right\}$$

Caracterización de retículos no distributivos

Teorema

Un retículo es no distributivo si y sólo si contiene un subretículo isomorfo a uno de los dos retículos $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ anteriores.

Ejemplo 1 Estudia si es distributivo el retículo $\mathcal{M}_1$

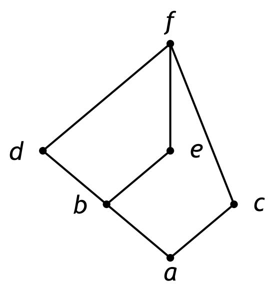


$\mathcal{M}_1$

Solución: El retículo $\mathcal{M}_1$ no es distributivo, pues contiene el subretículo $\{b, c, d, e, f\}$ que es isomorfo al diamante.

Caracterización de retículos no distributivos

Ejemplo 2 Estudia si es distributivo el retículo $\mathcal{M}_2$

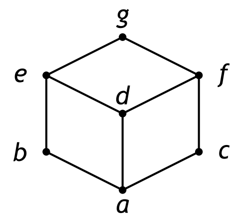


$\mathcal{M}_2$

Solución: El retículo $\mathcal{M}_2$ no es distributivo, ya que contiene el subretículo $\{a, b, c, d, f\}$ que es isomorfo al pentágono.

Retículos distributivos

Ejercicio Estudia si es distributivo el retículo $\mathcal{M}_3$



Solución 1: El retículo $\mathcal{M}_3$ no es distributivo ya que

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} e \sqcap (b \sqcup c) & = & e \sqcap g & = & e \\ (e \sqcap b) \sqcup (e \sqcap c) & = & b \sqcup a & = & b \end{array} \right\}$$

Solución 2: El retículo $\mathcal{M}_3$ no es distributivo porque contiene el subretículo $\{a, b, c, e, g\}$ que es isomorfo al pentágono.

Retículos distributivos

Teorema

Sea $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$ un retículo distributivo y sean $a, b, c \in \mathcal{L}$ tales que

$$a \sqcup b = a \sqcup c \qquad y \qquad a \sqcap b = a \sqcap c$$

Entonces $b = c$.

Demostración:

$$b \overset{(Abs.)}{=} b \sqcup (b \sqcap a) \overset{(Conm.)}{=} b \sqcup (a \sqcap b) \overset{(Hip.)}{=} b \sqcup (a \sqcap c)$$

$$\overset{(Dist.)}{=} (b \sqcup a) \sqcap (b \sqcup c) \overset{(Conm.)}{=} (a \sqcup b) \sqcap (b \sqcup c)$$

$$\overset{(Hip.)}{=} (a \sqcup c) \sqcap (b \sqcup c) \overset{(Dist.)}{=} (a \sqcap b) \sqcup c \overset{(Hip.)}{=} (a \sqcap c) \sqcup c \overset{(Abs.)}{=} c$$

Retículos Acotados

Definición

*Sea $(\mathcal{L}, \preceq)$ un retículo. Se llama **primer elemento** de $\mathcal{L}$ al elemento que es anterior a todo elemento del retículo. Se denota por 0 y se le llama también **extremo inferior** o **ínfimo**. Se llama **último elemento** de $\mathcal{L}$ al elemento que es posterior a todo elemento del retículo. Se denota I y se le llama también **extremo superior** o **supremo**.*

Ejemplo

- En $(\mathbb{Z}^+, \leq)$ el primer elemento es 1 y no existe último elemento.
- En $(\mathbb{Z}^-, \leq)$ no existe primer elemento y el último elemento es 1.
- En $(\mathbb{Z}, \leq)$ no existe primer elemento ni último elemento.

Retículos Acotados

Ejemplos

- En el retículo $\left(\mathcal{P}(\{a,b,c,d\}), \subseteq\right)$ el primer elemento es $\varnothing$ y el último elemento es $\{a,b,c,d\}$.
- En general, dado un conjunto S, en el retículo $\left(\mathcal{P}(S), \subseteq\right)$ el primer elemento es $\varnothing$ y el último elemento es S.
- En $(D_{20}, |)$ el primer elemento es 1 y el último elemento es 20.
- En general, dado un entero positivo n, en el retículo $(D_n, |)$ el primer elemento es 1 y el último elemento es n.
- En $\left(\mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B}), \preceq\right)$ el primer elemento es la función cero y el último elemento es la función uno.

Retículos acotados

Definición

*Un retículo $\mathcal{L}$ con primer elemento 0 y último elemento I se llama **retículo acotado***

Ejemplos Son retículos acotados:

- $(D_n, |)$
- $\left(\mathcal{P}(S), \subseteq\right)$
- $\left(\mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B}), \preceq\right)$

☛ Dado un conjunto cualquiera S, $\left(\mathcal{P}(S), \subseteq\right)$ es retículo acotado. Los extremos son el conjunto vacío y el conjunto S.

☛ Si S es un conjunto infinito, entonces $\mathcal{P}(S)$ también es infinito. En este caso tenemos que $\left(\mathcal{P}(S), \subseteq\right)$ es un **retículo infinito** que es **acotado.**

Retículos acotados

- En general, no todos los retículos infinitos serán acotados.
- Por ejemplo, $(\mathbb{Z}^+, |)$ no es acotado, ya que no tiene último elemento.
- Sin embargo, se verifica:

Teorema

Todo retículo finito es acotado.

Demostración: Sea $(\mathcal{L}, \preceq)$ un retículo finito.

$$\mathcal{L} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

✓ Comprobamos que el producto $x_1 \sqcap \cdots \sqcap x_n$ de todos sus elementos es anterior a todos ellos y la suma de todos $x_1 \sqcup \cdots \sqcup x_n$ supera a cualquiera de ellos.

✓ Por lo tanto, $x_1 \sqcap \cdots \sqcap x_n$ es el primer elemento y $x_1 \sqcup \cdots \sqcup x_n$ es el último elemento.

Retículos acotados

Teorema

Sea $(\mathcal{L}, \preceq)$ *un retículo acotado. Para todo elemento* $a \in \mathcal{L}$ *se verifica:*

1. $a \sqcup 0 = a \qquad a \sqcap 0 = 0$
2. $a \sqcap I = a \qquad a \sqcup I = I$

Demostración:

1. Por definición de primer elemento, para todo elemento $a \in \mathcal{L}$:
$$0 \preceq a \implies a \sqcup 0 = a \iff a \sqcap 0 = 0$$
2. Por definición de último elemento, para todo elemento $a \in \mathcal{L}$:
$$a \preceq \mathrm{I} \implies a \sqcap \mathrm{I} = a \iff a \sqcup \mathrm{I} = \mathrm{I}$$

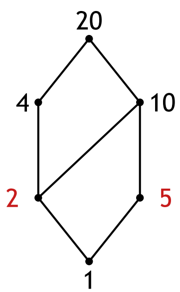
Retículos acotados
Átomos

Definición

Sea $(\mathcal{L}, \preceq)$ *un retículo acotado. Se llama* ***átomo*** *a cada elemento que es sucesor inmediato del primer elemento.*

Ejemplos

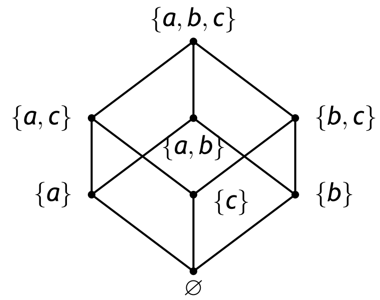
- Los átomos del retículo D_{20} son 2 y 5.



Retículos acotados
Átomos

Ejemplos

- En $P(S)$ los átomos son los subconjuntos unitarios.



- Los átomos de $F(S, \mathbb{B})$ son las funciones que toman el valor 1 exactamente en **un** elemento del dominio.

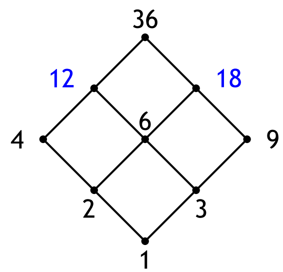
Retículos acotados
Superátomos

Definición

Sea $(\mathcal{L}, \preceq)$ *un retículo acotado. Se llama* ***superátomo*** *a cada elemento cuyo sucesor inmediato es el último elemento.*

Ejemplos

- Los superátomos del retículo D_{36} son 12 y 18.



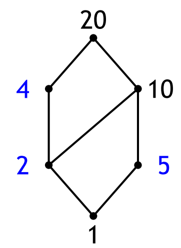
Retículos acotados
Elementos $\sqcup$ -*irreducibles*

Definición

Se dice que $x \in \mathcal{L}$ *es un elemento* ***irreducible por unión***, $\sqcup$ ***-irreducible*** *ó* ***disyuntivamente irreducible*** *si verifica:*

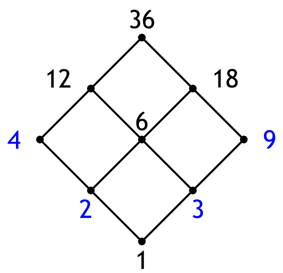
$$x = y \sqcup z \Longrightarrow x = y \quad \text{ó bien} \quad x = z$$

Ejemplos Los elementos $\sqcup$ -irreducibles de D_{20} son 2, 4 y 5.



Retículos acotados
Elementos $\sqcup$ -*irreducibles*

Ejemplos Los elementos $\sqcup$ -irreducibles de D_{36} son 2, 3, 4 y 9.



Ejercicio

Sea $0 \neq x \in \mathcal{L}$. Demuestra que x es un elemento $\sqcup$ -irreducible si y sólo si es sucesor inmediato de un elemento exactamente.

Retículos acotados
Átomos / Elementos $\sqcup$ -*irreducibles*

Teorema

Los átomos son elementos $\sqcup$ *-irreducibles.*

Demostración: Ejercicio:

El recíproco no es cierto.

Contraejemplo

En el retículo $(D_{36}, |)$, el elemento 4 es $\sqcup$ -irreducible, pero no es un átomo ya que no es sucesor inmediato del primer elemento.

Retículos acotados
Descomposición en unión de elementos $\sqcup$ -irreducibles irredundantes

Sea $a \in \mathcal{L}$, que se puede expresar de la forma

$$a = d_1 \sqcup d_2 \sqcup \ldots \sqcup d_n$$

donde los d_i son elementos $\sqcup$ -irreducibles.

¿Qué quiere decir que los elementos d_i son ***irredundantes***?

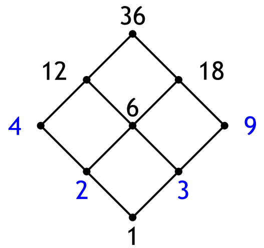
- ✓ Si $d_j \preceq d_k$, es decir, $d_j \sqcup d_k = d_k$, entonces se puede suprimir d_j de la descomposición de a.
- ✓ Así, la expresión es ***irredundante*** si ningún d_j precede a d_k.

Retículos acotados

Descomposición como suma de elementos $\sqcup$ -irreducibles irredundantes

Ejemplo En D_{36} el elemento 18 se expresa de la forma:

$$18 = m.c.s.(6, 9) = m.c.s.(m.c.s.(2, 3), 9) = m.c.s.(2, m.c.s.(3, 9))$$



$$18 = 6 \sqcup 9 = (2 \sqcup 3) \sqcup 9 = 2 \sqcup (3 \sqcup 9) = 2 \sqcup 9$$

Retículos acotados

Descomposición como suma de elementos $\sqcup$ -irreducibles irredundantes

Teorema

Sea $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$ *un retículo finito. Entonces cada* $a \in \mathcal{L}$ *se puede expresar*

$$a = d_1 \sqcup d_2 \sqcup \ldots \sqcup d_t$$

donde los d_i *son elementos* $\sqcup$ *-irreducibles irredundantes.*

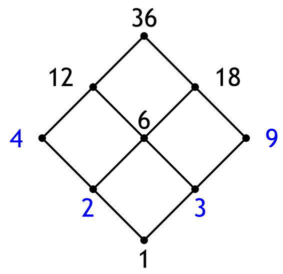
Demostración:

- ✓ Si a no es $\sqcup$ -irreducible, entonces $a = b_1 \sqcup b_2$.
- ✓ Si b_1 y b_2 no son $\sqcup$ -irreducibles, se reemplazan por sus expresiones.
- ✓ Se repite este proceso hasta que se exprese a como suma de elementos $\sqcup$ -irreducibles: $a = d_1 \sqcup d_2 \sqcup \ldots \sqcup d_n$
- ✓ Si algún d_j precede a algún d_k, entonces se suprime d_j.
- ✓ Continuando este proceso se obtiene la descomposición pedida.

Retículos acotados

Descomposición como suma de elementos $\sqcup$ -irreducibles irredundantes

Ejemplo



$$36 = 12 \sqcup 18 = (4 \sqcup 6) \sqcup (6 \sqcup 9) = 4 \sqcup (6 \sqcup 6) \sqcup 9 =$$

$$= 4 \sqcup 6 \sqcup 9 = 4 \sqcup (2 \sqcup 3) \sqcup 9 = (4 \sqcup 2) \sqcup (3 \sqcup 9) = 4 \sqcup 9$$

Retículos acotados

Descomposición como suma de elementos $\sqcup$ -irreducibles irredundantes

Ejercicio

1. Dibuja el diagrama de Hasse de $(D_{150}, |)$.
2. Da una lista de los átomos y otra lista de los elementos $\sqcup$ -irreducibles.
3. Expresa 150, 50 y 75 mediante elementos $\sqcup$ -irreducibles (en más de una forma si es posible).

Elementos Complementarios

Definición

*Sea $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$ un retículo acotado con primer elemento 0 y último elemento $\mathtt{I}$ y sean $a, b \in \mathcal{L}$. Se dice que a y b son **complementarios** (uno es el complemento del otro) si:*

$$a \sqcup b = \mathtt{I} \quad \text{y} \quad a \sqcap b = 0$$

*También se dice que b es un **complemento** de a y que a es un **complemento** de b.*

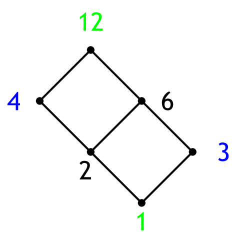
En todo retículo acotado se verifica que 0 e $\mathtt{I}$ son complementarios.

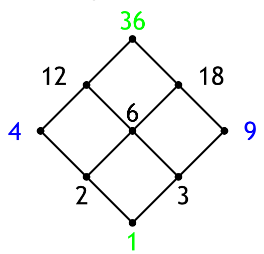
Elementos Complementarios

En un retículo acotado un elemento $x \in \mathcal{L}$ puede no tener complemento, tener un único complemento o puede tener más de un complemento.

Ejemplos

- En el retículo $(D_{12}, |)$ no tienen complemento 2, ni 6; 3 tiene un único complemento que es 4; son complementarios 1 y 12.



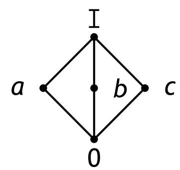


- En el retículo $(D_{36}, |)$ no tienen complemento 2, 3, 6, 12 ni 18; 4 tiene un único complemento que es 9; son complementarios 1 y 36.

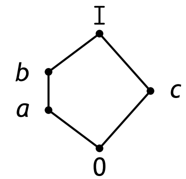
Elementos Complementarios

Ejemplo

- En el retículo $\mathcal{L}_1$ (diamante)
  - a y b son complementarios, ya que $a \sqcup b = \mathtt{I}$ y $a \sqcap b = 0$
  - a y c son complementarios, ya que $a \sqcup c = \mathtt{I}$ y $a \sqcap c = 0$
  - b y c son complementarios, ya que $b \sqcup c = \mathtt{I}$ y $b \sqcap c = 0$



Retículo $\mathcal{L}_1$ (diamante)



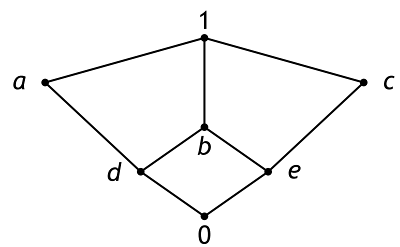
Retículo $\mathcal{L}_2$ (pentágono)

- En el retículo $\mathcal{L}_2$ (pentágono):
  - a y c son complementarios, ya que $a \sqcup c = \mathtt{I}$ y $a \sqcap c = 0$
  - b y c son complementarios, ya que $b \sqcup c = \mathtt{I}$ y $b \sqcap c = 0$

Elementos Complementarios

Ejemplo

- En el retículo



  - 0 y 1 son complementarios.
  - a y c son complementarios, ya que $a \sqcup c = 1$ y $a \sqcap c = 0$.
  - a y e son complementarios, ya que $a \sqcup e = 1$ y $a \sqcap e = 0$.
  - d y c son complementarios, ya que $d \sqcup c = 1$ y $d \sqcap c = 0$.
  - b no tiene complemento.

Retículos complementados

Definición

Un retículo $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$ *se llama* ***complementado*** *si cada elemento tiene al menos un complemento.*

Ejemplo

- $(D_6, m.c.m., m.c.d.)$ es un retículo complementado.
- $(D_{12}, m.c.m., m.c.d.)$ no es un retículo complementado, ya que 2 no tiene complemento.

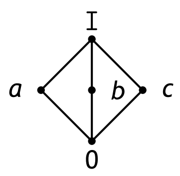
Ejercicio

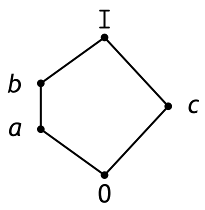
- Demuestra que $(D_n, m.c.m., m.c.d.)$ es complementado si y sólo si $n = p_1^1 \cdot p_2^1 \cdots p_k^1$, donde cada $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ son primos distintos.

Retículos complementados

Ejemplos

- Los retículos $\mathcal{L}_1$ (Diamante) y $\mathcal{L}_2$ (Pentágono) son complementados.





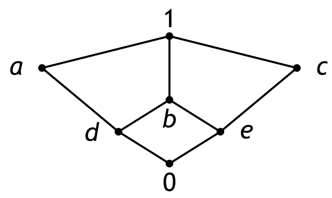
$$\left\{ \begin{array}{lclclcl} a \sqcup b & = & \mathrm{I}; & a \sqcap b & = & 0 \\ a \sqcup c & = & \mathrm{I}; & a \sqcap c & = & 0 \end{array} \right\} \qquad \left\{ \begin{array}{lclclcl} a \sqcup c & = & \mathrm{I}; & a \sqcap c & = & 0 \\ b \sqcup c & = & \mathrm{I}; & b \sqcap c & = & 0 \end{array} \right\}$$

Teorema

Sea $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$ *un retículo distributivo y acotado con* 0 *y* I. *Entonces cada elemento* $a \in \mathcal{L}$ *tiene a lo sumo un complemento.*

Demostración: **Ejercicio**

Ejemplo El retículo



no es distributivo, ya que hemos encontrado que c tiene dos complementarios a y d.

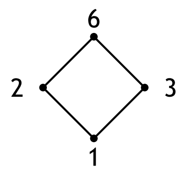
Complemento de un elemento

Definición

Sea $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$ *un retículo complementado y distributivo y sea* $x \in \mathcal{L}$.
El ***complemento*** *del elemento* $a \in \mathcal{L}$ *es el único elemento* $\bar{a} \in \mathcal{L}$ *tal que*

$$a \sqcup \bar{a} = I \qquad y \qquad a \sqcap \bar{a} = 0$$

Ejemplo



$$\left\{ \begin{array}{lclcl} 2 \sqcup 3 & = & m.c.m.(2,3) & = & 6 \\ 2 \sqcap 3 & = & m.c.d.(2,3) & = & 1 \end{array} \right\}$$

Por lo tanto, $\overline{2} = 3$ y $\overline{3} = 2$.

Complemento de un elemento

Ejemplo Para $n = p_1^1 \cdot p_2^1 \cdots p_k^1$, donde cada $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ son primos distintos, se demuestra que D_n es un retículo complementado.
Cada elemento $x \in D_n$ es de la forma

$$x = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}, \text{ con } 0 \leq a_i \leq 1$$

y su complemento viene dado por

$$\overline{x} = p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdots p_k^{b_k},$$

donde

$$b_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a_i = 1 \\ 1 & \text{si} \quad a_i = 0 \end{cases}$$

Complemento de un elemento

Ejemplo $\left(\mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B}), \leq\right)$ es un retículo complementado.
En el retículo $\left(\mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B}), \leq\right)$ cada elemento tiene un único complemento.

El complemento de la función $f\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ es la función

$$\overline{f}\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$$

definida

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad f(x) = 1 \\ 1, & \text{si} \quad f(x) = 0 \end{cases}$$

Operación complemento

En todo retículo distributivo y complementado podemos definir una función de $\mathcal{L}$ en sí mismo que asigna a cada elemento $a \in \mathcal{L}$ su complemento $\overline{a}$.

Esto es, tenemos una operación unaria en $\mathcal{L}$.

$$\begin{array}{cccc} - : & \mathcal{L} & \to & \mathcal{L} \\ & a & \mapsto & \overline{a} \end{array}$$

Ejemplo En $\left(\mathcal{P}(S), \cup, \cap\right)$ el complemento de cada $X \subseteq S$ es el conjunto $\overline{X} = S - X$. Se puede definir la operación unaria

$$\begin{array}{cccc} - : & \mathcal{P}(S) & \to & \mathcal{P}(S) \\ & X & \mapsto & \overline{X} = S - X \end{array}$$

Retículos

Ejercicio Da ejemplos (si existen) de:

1. Un **conjunto parcialmente ordenado** que no sea **retículo ordenado**.
2. Un **retículo acotado** que no sea finito.
3. Un **retículo distributivo** que no sea complementado.
4. Un **retículo complementado** que no sea distributivo.

Retículos de Boole

Definición

*Se llama **retículo de Boole** a un retículo distributivo y complementado.*

Ejemplo

- Sea $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ un conjunto parcialmente ordenado con un orden parcial $\leq$, donde $0 \leq 0$, $0 \leq 1$, $1 \leq 1$. Se verifica que $(\mathbb{B}, \leq)$ es un retículo ordenado. Las operaciones $\sqcup$ y $\sqcap$ correspondientes son:

$\sqcup$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\sqcap$	0	1
0	0	0
1	0	1

Se puede demostrar fácilmente que $(\mathbb{B}, \sqcup, \sqcap)$ es un retículo distributivo y complementado, con

$$\overline{0} = 1 \quad \text{y} \quad \overline{1} = 0$$

Retículos de Boole

Propiedades

Un retículo de Boole es un conjunto con dos operaciones binarias $\sqcup$ y $\sqcap$ y una operación unaria $-$ que verifica todas las propiedades que hemos estudiado. Además verifica las leyes de DeMorgan y la propiedad de involución.

Teorema

Sea $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap, -)$ un retículo de Boole. Para todo $a, b \in \mathcal{L}$ se verifican las propiedades:

- *DeMorgan* $\quad \overline{(a \sqcup b)} = \overline{a} \sqcap \overline{b} \qquad \overline{a \sqcap b} = \overline{a} \sqcup \overline{b}$
- *Involución* $\quad \overline{\overline{a}} = a$

Demostración: Ejercicio

Retículos de Boole

A los retículos de Boole se les llama también ***álgebras de Boole***.

Se les llama generalmente ***retículos de Boole*** cuando el énfasis está en el orden parcial subyacente, mientras que se les llama ***álgebras de Boole*** cuando se quiere resaltar las operaciones algebraicas $\sqcup$, $\sqcap$ y $-$.

Las álgebras de Boole se pueden definir también usando solamente las operaciones algebraicas (Axiomática de Huntington).

Se demuestra que ambas definiciones son equivalentes.

Bibliografía

Matemáticas discreta y combinatoria
R.P. Grimaldi (Ed. Addison Wesley)

Estructuras de matemáticas discretas para la computación
B. Kolman y R.C. Busby (Ed. Prentice Hall)

2000 problemas resueltos de Matemática Discreta
S. Lipschutz y M. Lipson (Ed. McGraw Hill)

Matemática Discreta y sus aplicaciones
K. Rosen (Ed. McGraw Hill)

Matemática Discreta
K.A. Ross y C.R.B. Wright (Ed. Prentice Hall).