Evaluación continua: Cálculo para la computación

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Málaga

Dispone de **20 minutos** para resolver el siguiente ejercicio:

1. Desarrolle en serie de Fourier la función de periodo 2π

$$g(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si } x \in (0, \pi] \\ \pi + x & \text{si } x \in (-\pi, 0] \end{cases}$$

2. Utilícelo para sumar la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Prueba A33: 17 de mayo de 2010

Dispone de **20 minutos** para resolver el siguiente ejercicio:
Consideramos la región A encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2$ y $g(x) = \frac{1}{2}x$. Plantee las integrales definidas que permiten calcular los volúmenes de revolución que se indican:

1. Volumen de revolución obtenido al hacer girar la región A alrededor del eje OY.
2. Volumen de revolución obtenido al hacer girar la región A alrededor del eje $x = 3$
3. Volumen de revolución obtenido al hacer girar la región A alrededor del eje OX.
4. Volumen de revolución obtenido al hacer girar la región A alrededor del eje $y = -1$

Prueba A32: 10 de mayo de 2010

Dispone de **15 minutos** para resolver el siguiente ejercicio:

- Aproxime el valor de la integral

$$\int_0^2 (2x - x^2)dx$$

  usando la suma inferior asociada a una partición regular de 10 subintervalos.

- Determine el valor exacto de la integral anterior y el error cometido con la suma inferior.

Prueba A31: 4 de mayo de 2010

Dispone de **15 minutos** para resolver el siguiente ejercicio:

- Compruebe que la función $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$ es solución de la ecuación:

$$y' = \sec^2 x - y \operatorname{tg} x + y^2.$$

- Resuelve la ecuación para la condición inicial $y(0) = 1$.

Prueba A30: 3 de mayo de 2010

Dispone de **15 minutos** para resolver el siguiente ejercicio:

- Compruebe que la función

$$f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4 - e^{3x^2}}}$$

  es solución de la ecuación $y' + 3xy = xy^3$ con condición inicial $y(0) = 2$.

- El problema de condiciones iniciales descrito en el apartado anterior, ¿puede tener más soluciones? Conteste razonadamente.
- Clasifique la ecuación anterior como uno de los tipos estudiados en el tema (variables separables, exactas, lineales, Bernouilli, Ricatti,...). No hay que resolver la ecuación.

Dispone de **15 minutos** para resolver el siguiente ejercicio:

- Encuentre la solución general de la ecuación:

$$y' + 2y = \operatorname{sen} x$$

- Encuentre la solución particular asociada a las condiciones iniciales $y(\pi) = 0$

Prueba A28: 26 de abril de 2010

Dispone de **15 minutos** para resolver el siguiente ejercicio:

- Encuentre la solución general de la ecuación:

$$y' = \exp(3x + 2y)$$

- Encuentre la solución particular asociada a las condiciones iniciales $y(0) = 0$

Prueba A27: 19 de abril de 2010

Dispone de **15 minutos** para resolver el siguiente ejercicio:

- Demuestre que la siguiente ecuación es exacta:

$$\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{x^2 y'}{(x-y)^2} = 0$$

- Resuélvala.

Prueba A26: 12 de abril de 2010

Dispone de **15 minutos** para calcular la siguiente primitiva:

$$\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{(x-1)^2}\,dx$$

Prueba A25: 6 de abril de 2010

Dispone de **15 minutos** para calcular la siguiente primitiva:

$$\int \frac{dx}{\cos x - \operatorname{sen} x}$$

El cambio de variable $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ conduce a la integral

$$\int \frac{-2dt}{t^2 + 2t - 1} = \int \frac{dt}{\sqrt{2}(t + \sqrt{2} + 1)} - \int \frac{dt}{\sqrt{2}(t - \sqrt{2} + 1)} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \log(t + \sqrt{2} + 1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \log(t - \sqrt{2} + 1)$$

Por lo que

$$\int \frac{dx}{\cos x - \operatorname{sen} x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{2} + 1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \log(\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \sqrt{2} + 1)$$

Prueba A24: 22 de marzo de 2010

Dispone de **15 minutos** para calcular las dos primitivas siguientes:

$$\int (x^2 - 1)e^{2x} dx \qquad\qquad \int \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

Para calcular $\int (x^2-1)e^{2x}dx$ aplicamos integración por partes dos veces

$$
\begin{aligned}
\int (x^2-1)e^{2x}dx = & \\
& \left[\begin{array}{rl} u = x^2-1 & \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = e^{2x} & \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right. \\
=& \frac{1}{2}(x^2-1)e^{2x} - \int xe^{2x} \\
& \left[\begin{array}{rl} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} & \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right. \\
=& \frac{1}{2}(x^2-1)e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \int \frac{1}{2}e^{2x}dx \\
=& \frac{1}{2}(x^2-1)e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x}dx \\
=& \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}dx
\end{aligned}
$$

Prueba A24: 22 de marzo de 2010

$$\int \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$

$$\left[\; t = \operatorname{arc\,sen} x \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right.$$

$$= \int t\, dt = \frac{t^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen}^2 x$$

Dispone de **15 minutos** para resolver el siguiente ejercicio:

- Determine los puntos críticos del campo $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sobre la superficie $z^2 - xy = 1$.
- Elija uno de ellos y clasifíquelo.

Prueba A22: 9 de marzo de 2010

Dispone de **15 minutos** para resolver el siguiente ejercicio:

- Demuestre que $(-1/4, -1/2)$ es un punto crítico del campo $f(x, y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$.

- Determine la diferencial segunda de f en $(-1/4, -1/2)$ y utilícela para clasificarlo.

Prueba A22: 9 de marzo de 2010

Como Maxima, podemos calcular fácilmente el polinomio de Taylor para comprobar si hemos hecho bien los cálculos:

```
(%i1) f: exp(2*x+3*y)*(8*x^a2-6*x*y+3*y^2)$
(%i2) taylor(f,[x,y],[-1/4,-1/2],2);
```

$$(\%o2) \quad \frac{1}{2\,e^2} + \frac{28\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 - 36\left(y+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right) + 3\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}{4\,e^2} + \ldots$$

Por lo tanto, podemos deducir fácilmente que es punto silla:

$$d^2 f_{(-1/4,-1/2)}(u_1,u_2) = \frac{1}{4e^2}(28u_1^2 - 36u_1u_2 + 3u_2^2) =$$

$$= \frac{3}{4e^2}\left(\frac{28}{3}u_1^2 - 12u_1u_2 + u_2^2\right) = \frac{3}{4e^2}\left(\frac{28}{3}u_1^2 + (u_2-6u_1)^2 - 36u_1^2\right) =$$

$$= \frac{3}{4e^2}\left((u_2-6u_1)^2 - \frac{80}{3}u_1^2\right)$$

Prueba A21: 2 de marzo de 2010

Dispone de **15 minutos** para resolver el siguiente ejercicio:

- Calcule la *tasa de cambio puntual* de $f(x, y, z) = \dfrac{z}{x^2 + y^2}$ en el punto $(-1, 1, 3)$ a lo largo de la recta $x = -1 - 2t$, $y = 1 + t$, $z = 3 + 2t$ y en el sentido de decrecimiento de la y.

- La *tasa de cambio puntual* es $D_{\mathbf{u}} f(-1,1,3) = \nabla f(-1,1,3) \cdot \mathbf{u}$, en donde $\mathbf{u}$ es un vector unitario en la dirección y sentido descrito. El vector $(-2,1,2)$ está en la dirección dada por la recta; dado que el sentido debe ser el de decrecimiento de y, debemos cambiar el signo del vector, $(2,-1,-2)$; finalmente, consideramos el vector unitario en esa dirección y sentido:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{9}}(2,-1,-2) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{-2xz}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-2yz}{(x^2+y^2)^2}, \frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

$$\nabla f(-1,1,3) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$D_{\mathbf{u}} f(-1,1,3) = \nabla f(-1,1,3) \cdot \mathbf{u} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{7}{6}$$

Prueba A20: 26 de enero de 2010

Dispone de **15 minutos** para resolver el siguiente ejercicio:

- Para el campo $f(x, y, z) = xy + yz + zx$, el punto $\mathbf{a} = (-1, 0, 1)$ y el vector $\mathbf{v} = (2, -1, 0)$, determine la función $f_{\mathbf{a},\mathbf{v}}(t)$.
- Utilice la función del apartado anterior para calcular $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a})$.
- Calcule el vector gradiente de f en $\mathbf{a}$ mediante derivación.

Prueba A20: 26 de enero de 2010

Dispone de **15 minutos** para resolver el siguiente ejercicio:

- $$f_{\mathbf{a},\mathbf{v}}(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) = f(-1 + 2t, -t, 1) = \\ = -(-1 + 2t)t - t - 1 + 2t = -2t^2 + 2t - 1$$

- $f'_{\mathbf{a},\mathbf{v}}(t) = -4t + 2$
  $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = f'_{\mathbf{a},\mathbf{v}}(0) = 2$

- $\nabla f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$;
  $\nabla f(-1, 0, 1) = (1, 0, -1)$.
  Si calculamos la derivada direccional del apartado anterior con el vector gradiente, obtenemos el mismo resultado:

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{v}) = \\ = \nabla f(-1, 0, 1) \cdot (2, -1, 0) = (1, 0, -1) \cdot (2, -1, 0) = 2$$