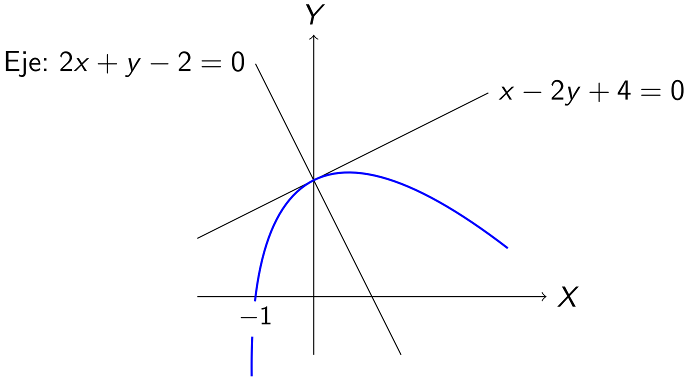
Evaluación continua: Cálculo para la computación

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Málaga

Dispone de **15 minutos** para resolver el siguiente ejercicio: *Determine una parametrización de la siguiente parábola.*



Prueba A18: 21 de enero de 2010

- La ecuación cartesiana de la parábola tiene la forma:

$$(2x + y - 2)^2 + A(x - 2y + 4) = 0$$

  Dado que pasa por el punto $(-1, 0)$, se verifica que $16 + 3A = 0$ y por lo tanto $A = -16/3$.

- Una parametrización de la parábola se determina resolviendo el siguiente sistema en x e y:

$$\begin{aligned} 2x + y - 2 &= t \\ x - 2y + 4 &= 3t^2/16 \end{aligned}$$

  Es decir: $x(t) = \frac{1}{80}(3t^2 + 32t), \quad y(t) = -\frac{1}{40}(3t^2 - 8t - 80)$

Prueba A17: 19 de enero de 2010

Dispone de **15 minutos** para resolver el siguiente ejercicio:

1. Identifique el siguiente lugar geométrico y determine los elementos necesarios para dibujarlo (ejes, centro, vértices,...).

$$17x^2 + 12xy + 22y^2 - 18x + 12y + 5 = 0$$

Prueba A16: 14 de enero de 2010

Dispone de **15 minutos** para resolver el siguiente ejercicio:

Identifique los siguientes lugares geométricos y para cada uno de ellos determine las características necesarias para dibujarlos.

1. $2x^2 + 2y^2 - 4x + 12y + 19 = 0$
2. $2y^2 + x - 4y + 1 = 0$
3. $x^2 - 4y^2 - 2x - 16y - 15 = 0$

Prueba A16: 14 de enero de 2010

1. $2x^2 + 2y^2 - 4x + 12y + 19 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-1)^2 + 2(y+3)^2 = 1$
   Circunferencia de radio $1/\sqrt{2}$ y centro en $(-1, -3)$.

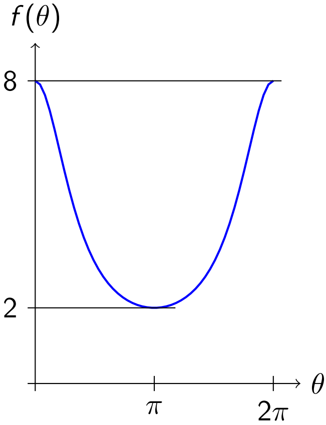
2. $2y^2 + x - 4y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(y-1)^2 + (x-1)$
   Parábola con vértice en $(-1, 1)$, con eje $Y = 1$, recta tangente al vértice $X = -1$ y apertura hacia la izquierda.

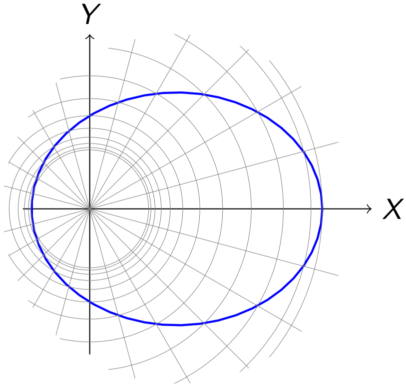
3. $x^2 - 4y^2 - 2x - 16y - 15 = 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 4(y+2)^2$
   Son dos rectas: $x - 1 = 2(y+2)$ y $x - 1 = -2(y+2)$.

Prueba A15: 12 de enero de 2010

Dispone de **15 minutos** para resolver el siguiente ejercicio:

1. Dibuje la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{16}{5 - 3\cos x}$ para $x \in [0, 2\pi]$.
2. A partir de la gráfica anterior, dibuje la curva polar $r = f(\theta)$.
3. Demuestre que la curva polar anterior es una elipse.


$f(\theta)$
8
2
π
2π
θ


Y
X

- Si sabemos que es una elipse, la simetría nos indica que el eje OX es uno de sus ejes y que los puntos $(-2,0)$ y $(8,0)$ son los vértices en ese eje. Por lo tanto, el centro de la elipse está en el punto $(3,0)$ y la ecuación de la elipse debe ser de la forma

$$\frac{(x-3)^2}{5^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Para determinar el parámetro b, utilizamos cualquier otro punto de la curva. Por ejemplo, $\theta = \pi/2$ da el punto $(0, 16/5)$ y por lo tanto

$$\frac{(-3)^2}{5^2} + \frac{16^2}{5^2 b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 4$$

- Es decir, si la curva es una elipse, su ecuación sería $\dfrac{(x-3)^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$. Para comprobarlo, basta con verificar esta igualdad para

$$x = \frac{16\cos\theta}{5 - 3\cos\theta}, \quad y = \frac{16\sin\theta}{5 - 3\cos\theta}.$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{5^2}\left(\frac{16\cos\theta}{5-3\cos\theta}-3\right)^2+\frac{1}{4^2}\frac{16^2\sin^2\theta}{(5-3\cos\theta)^2}
&= \frac{1}{5^2}\frac{(25\cos\theta-15)^2}{(5-3\cos\theta)^2}+\frac{4^2\sin^2\theta}{(5-3\cos\theta)^2}\\
&= \frac{(5\cos\theta-3)^2}{(5-3\cos\theta)^2}+\frac{4^2\sin^2\theta}{(5-3\cos\theta)^2}\\
&= \frac{5^2\cos^2\theta-2\cdot 3\cdot 5\cos\theta+9+4^2-4^2\cos^2\theta}{(5-3\cos\theta)^2}\\
&= \frac{9\cos^2\theta-2\cdot 3\cdot 5\cos\theta+5^2}{(5-3\cos\theta)^2}\\
&= 1
\end{aligned}
$$

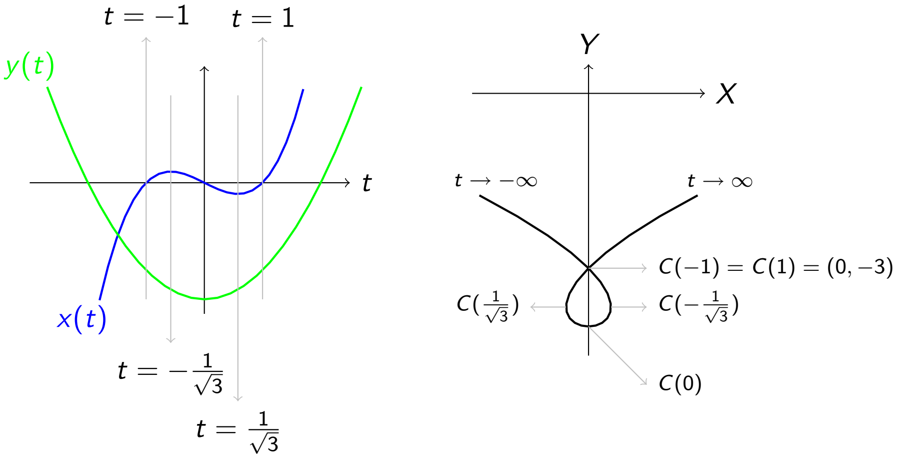
Prueba A14: 15 de diciembre de 2009

Dispone de **15 minutos** para resolver el siguiente ejercicio:

1. Represente gráficamente las funciones

$$x(t) = t(t-1)(t+1), \quad \text{e} \quad y(t) = t^2 - 4.$$

2. Dibuje la curva parametrizada $(x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$.
3. Determine los puntos de la curva anterior cuya recta tangente es paralela al eje OY.



Los puntos $C(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = (\frac{2}{\sqrt{27}}, -\frac{11}{3})$ y $C(\frac{1}{\sqrt{3}}) = (-\frac{2}{\sqrt{27}}, -\frac{11}{3})$ son los puntos de tangencia vertical.

Prueba A13: 3 de diciembre de 2009

Dispone de **15 minutos** para resolver el siguiente ejercicio:

1. Sume la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} x^n$$

utilizando las siguientes indicaciones.

- Siguiendo el método explicado en clase, derive y/o integre la función f para conseguir una serie geométrica que se puede sumar usando la fórmula correspondiente.
- Deshaga las operaciones de derivación y/o integración. Para ello, utilice `wxMaxima`:
  Derivación: `diff(H(x),x)`
  Integración: `integrate(G(x),x)`

Prueba A13: 3 de diciembre de 2009

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} x^n$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) x^{n-1}$$

$$xf'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) x^n$$

$$\int xf'(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x}, \quad |x| < 1$$

Prueba A13: 3 de diciembre de 2009

$$\int xf'(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x}, \quad |x| < 1$$

$$\texttt{fun} : \texttt{diff}(\texttt{x}^2/(1-\texttt{x}), \texttt{x})$$

$$xf'(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2} + \frac{2x}{1-x}$$

$$f'(x) = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x}$$

$$\texttt{integrate}(\texttt{fun}/\texttt{x}, \texttt{x})$$

$$f(x) = -\log(1-x) + \frac{1}{1-x} + C$$

$$f(x) = -\log(1-x) + \frac{1}{1-x} - 1, \quad (f(0) = 0)$$

Prueba A12: 1 de diciembre de 2009

Dispone de **15 minutos** para resolver el siguiente ejercicio:

1. Teniendo en cuenta que $\operatorname{arc\,tg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$, determine una serie numérica cuya suma sea π.

2. Utilice la serie anterior y alguno de los métodos estudiados en el tema para aproximar el valor de π con un error menor que 10^{-4}.

Prueba A12: 1 de diciembre de 2009

1. La serie de Taylor de la función arc tg es

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad |x| \le 1$$

   Por lo tanto, $\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4}{2n+1}$.

2. La serie es alternada y por lo tanto:

$$|S - S_N| \le \frac{4}{2N+3} < \frac{4}{2N+2} = \frac{2}{N+1}$$

   Para que $|S - S_N| \le 10^{-4}$, es suficente que $N \ge 20000$.

Prueba A11: 26 de noviembre de 2009

Dispone de **15 minutos** para resolver el siguiente ejercicio:

1. Determine el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3+n^2-2}$

2. Determine el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$

3. Determine el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n}$

Prueba A11: 26 de noviembre de 2009

1. Teniendo en cuenta la equivalencia de infinitos, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3+n^2-2}$ tiene el mismo carácter que $\displaystyle\sum_n \frac{n}{n^3} = \sum_n \frac{1}{n^2}$, que es la serie 2-armónica y por lo tanto es convergente

2. Por el criterio de condensación, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$ tiene el mismo carácter que la serie $\displaystyle\sum_k 2^k \frac{\log 2^k}{2^k} = \sum_k (k \log 2)$.
   Esta serie, y por lo tanto la propuesta, es divergente, ya que no verifica la condición necesaria: $\displaystyle\lim_{k\to\infty} (k \log 2) = \infty$.

Para poder aplicar el criterio de condensación, debemos comprobar que la sucesión es decreciente: la función $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$, es decreciente en $x \in [3, \infty)$, ya que en este intervalo la derivada es negativa, $f'(x) = \dfrac{1 - \log x}{x^2}$; por lo tanto, la sucesión $a_n = f(n)$ es decreciente si $n \geq 3$.

3 Por el apartado anterior, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\log n}{n}$ no es absolutamente convergente. Dado que es una serie alternada, aplicamos el criterio de Leibniz. En el apartado anterior hemos demostrado que la sucesión es decreciente, solo tenemos que calcular su límite, para lo que utilizamos el criterio de Stöltz:

$$\lim \frac{\log n}{n} = \lim \frac{\log(n+1) - \log n}{n + 1 - n} = \lim \log \frac{n+1}{n} = 0$$

Por lo tanto, la serie propuesta es condicionalmente convergente.

Prueba A10: 23 de noviembre de 2009

Dispone de **15 minutos** para resolver el siguiente ejercicio:

Calcule la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - n}$ de la siguiente forma

1. Exprese como suma de fracciones simples la expresion $\dfrac{1}{2n^2 - n}$.
2. Use la constante γ de Euler para simplificar la expresión de la sucesión de sumas parciales, S_n, de la serie.
3. Calcule el límite de S_n.

Prueba A10: 23 de noviembre de 2009

1. $\dfrac{1}{2n^2 - n} = \dfrac{2}{2n-1} - \dfrac{1}{n}$.

Prueba A10: 23 de noviembre de 2009

1. $$\frac{1}{2n^2 - n} = \frac{2}{2n-1} - \frac{1}{n}.$$
2. $$S_n = 2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)$$

1. $\dfrac{1}{2n^2-n} = \dfrac{2}{2n-1} - \dfrac{1}{n}$.

2. $S_n = 2\Big(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dots+\dfrac{1}{2n-3}+\dfrac{1}{2n-1}\Big)-\Big(1+\dfrac{1}{2}+\dots+\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n}\Big)$

$$\begin{aligned} S_n = 2\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1}\Big) \\ - 2\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-2}\Big) \\ - \Big(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n = 2\Big(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1}\Big) - \Big(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}\Big) \\ - \Big(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\Big) \end{aligned}$$

$$S_n = 2\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right) - \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)$$
$$-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$
$$= 2x_{2n-1} + 2\log(2n-1) - x_{n-1} - \log(n-1) - x_n - \log n$$

$$S_n = 2x_{2n-1} + 2\log(2n-1) - x_{n-1} - \log(n-1) - x_n - \log n$$

$$\lim S_n = \lim\left(2x_{2n-1} - x_{n-1} - x_n + \log\frac{(2n-1)^2}{n(n-1)}\right)$$

$$\lim S_n = \lim\left(2x_{2n-1} - x_{n-1} - x_n + \log\frac{(2n-1)^2}{n(n-1)}\right) = 2\gamma - \gamma - \gamma + \log 4$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2-n} = \log 4$$

Prueba A09: 16 de noviembre de 2009

Dispone de **15 minutos** para resolver el siguiente ejercicio.
Consideramos las siguientes sucesiones:

$$a_n = (n+1)^2 + (n+2)^2 + \cdots + (n+n)^2, \qquad b_n = n^3 - 1, \qquad n \geq 2$$

1. Exprese la sucesión a_n haciendo uso del operador $\sum$.
2. Escriba el término a_{n+1}.
3. Calcule y simplifique $a_{n+1} - a_n$.
4. Utilice el Criterio de Stöltz para calcular el límite: $\lim \dfrac{a_n}{b_n}$.

Prueba A08: 12 de noviembre de 2009

Dispone de **15 minutos** para resolver el siguiente ejercicio.
Consideramos la siguiente sucesión:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{4} \\ a_n = \dfrac{1}{4} + (a_{n-1})^2 \end{cases}$$

1. Use inducción para demostrar que a_n es creciente.
2. Use inducción para demostrar que a_n está acotada por $\dfrac{1}{2}$.
3. ¿Podemos afirmar que a_n es convergente? En tal caso, calcule su límite.

Prueba A07: 9 de noviembre de 2009

Dispone de **15 minutos** para resolver los siguientes ejercicios.

1. Reduzca el exponente de $\cos^4\theta$ para expresarla usando funciones trigonométricas sobre múltiplos de θ.

2. Demuestre que la sucesión $a_n = \dfrac{n}{2^n}$ es decreciente.

Prueba A06: 5 de noviembre de 2009

Dispone de **15 minutos** para resolver los siguientes ejercicios.

1. Calcule el valor principal del logartimo de $\mathrm{i} + \sqrt{3}$.
2. Resuelva la ecuación $\cos z = -2$ y exprese los resultados en forma binómica.

Prueba A05: 3 de noviembre de 2009

Dispone de **15 minutos** para resolver los siguientes ejercicios.

1. Exprese $\cos 4\theta$ como un polinomio en $\cos\theta$.
2. Halle las tres raíces cúbicas de -8.

Dispone de **10 minutos** para contestar las siguientes cuestiones.

1. Un polinomio con coeficientes complejos no reales, ¿puede tener raíces reales?
2. Si $p(x)$ tiene coeficientes complejos no reales y z es una raíz compleja, ¿es necesario que $\bar{z}$ sea raíz de $p(x)$?
3. Si $z, w \in \mathbb{C}$, ¿es cierto que $\overline{z + i \cdot w} = z - i \cdot w$?

Prueba A03: 22 de octubre de 2009

Dispone de **10 minutos** para resolver las siguientes cuestiones.

1. Factorice el polinomio $q(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$ sabiendo que tiene a -1 por raíz.
2. Escriba como suma de fracciones simples la función

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{2}{x^3 + 2x^2 + 3x + 2}$$

Prueba A02: 20 de octubre de 2009

Dispone de **15 minutos** para resolver las siguientes cuestiones.

1. Determine el polinomio de Taylor de orden 3 en $x_0 = 1$ de la función

$$f(x) = \sqrt{x}$$

2. Escriba en forma de "cuadrados completos" el polinomio $p(x) = 2x^2 + 5x - 3$ y deduzca a partir de ella su forma factorizada. Es decir, NO utilice la fórmula de la ecuación de segundo grado.

Dispone de **15 minutos** para resolver las siguientes cuestiones.

1. Evalúe y simplifique el número: $\binom{3/2}{3}$.

2. Utilice la división de polinomios (Ruffini) para centrar el polinomio $p(x) = 2x^2 - 8x + 11$ en $x_0 = 2$.