Matemática Discreta

Mariam Cobalea

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

- La noción de ‘‘conjunto’’ es uno de los conceptos básicos de Matemáticas.
- La Teoría de Conjuntos se define mediante un Sistema Axiomático.
- Se entiende por
    - ***conjunto***: cualquier colección de objetos que se puede tratar como una entidad.
    - ***elemento***: cada uno de esos objetos.

Los objetos de un conjunto pueden ser

- físicos (un conjnto de estudiantes o un conjunto de ciudades), o bien
- abstractos (un conjunto de números o de ideas)

Dado un objeto x y un conjunto S, puede ocurrir que:

1. x sea un elemento de S, entonces se escribe:

$$x \in S$$

   y se lee:

   x pertenece a S

2. x no sea un elemento de S, entonces se escribe:

$$x \notin S$$

   y se lee:

   x no pertenece a S

- Un conjunto se caracteriza por sus elementos.

- Por lo tanto, un conjunto se puede especificar estableciendo qué objetos están en él.

- Esto se puede hacer de varias maneras:
  - ***Explícitamente***
  - ***Implícitamente***

Explícitamente

- ✓ En algunos casos se puede dar una lista de sus elementos.
- ✓ La notación que se usa es la siguiente:
  los elementos se separan por comas y la lista se delimita por llaves.

  Por ejemplo, un conjunto cuyos elementos son 0 y 1 se designa

  $$\{0, 1\}$$

- ✓ Cuando el número de elementos sea suficientemente grande se pueden usar puntos suspensivos. Por ejemplo, el conjunto de los enteros múltiplos de tres se denota

  $$\{\cdots, -6, -3, 0, 3, 6, \cdots\}$$

☛ ¡OJO!: Hay que tener cuidado de que no exista ambigüedad.

Ejemplo Si escribimos $\{3, 5, 7, \cdots, 23\}$ se puede interpretar como

1. Enteros impares desde 3 hasta 23, que es el conjunto $\{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23\}$, o bien
2. Enteros primos desde 3 hasta 23, que es el conjunto $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$

Conjuntos numéricos

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$: Conjunto de los números **naturales**.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$: Conjunto de los números **enteros**.
- $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$: Conjunto de los números **enteros positivos**.
- $\mathbb{Q}$: Conjuntos de los números **racionales**.
- $\mathbb{R}$: Conjuntos de los números **reales**.

Implícitamente

- ✓ En otros casos no podemos (o no nos interesa) dar la lista. Por eso, necesitamos otra forma de describir estos conjuntos.
- ✓ Esta especificación se hace mediante un predicado $\mathcal{P}$ con una variable libre.
- ✓ La notación es

$$S = \{\ x \quad | \quad \mathcal{P}(x)\ \}$$

que significa

“ **S** es el conjunto de todos los elementos **x** que verifican el predicado $\mathcal{P}$ ”

Ejemplo El conjunto S de las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ se puede representar

$$\{\ x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\ \}$$

- Para determinar si un elemento c está en S, basta con estudiar si el predicado $\mathcal{P}$ se verifica para dicho elemento.

- Un elemento c estará en S si y solo si verifica el predicado $\mathcal{P}$.

$$c \in S \iff \mathcal{P}(c) \quad \text{es verdadero}$$

Ejemplo $3 \in S = \{ \, x \mid x^2 - 5x + 6 = 0 \, \}$, ya que

$$3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$$

Ejercicio Sea $A = \{x \mid 3x = 6\}$ ¿Es $A = 2$?

Ejemplo El conjunto de enteros comprendidos entre 0 y 1 se puede representar:

$$\{\, x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge 0 < x < 1\}$$

- Como sabemos, no existen enteros comprendidos entre 0 y 1.
- Así pues, nos encontramos con un conjunto **sin** elementos.
- A este conjunto se le conoce como ***conjunto vacío*** y se denota $\emptyset$.

$$\emptyset = \{\}$$

- En muchas aplicaciones, es habitual trabajar en un conjunto fijo, un conjunto que contiene todos los objetos que estamos considerando.
- Este conjunto se llama **Universo** o **conjunto universal** y se denota $\mathcal{U}$.

Definición

*Dos conjuntos A y B son **iguales** si tienen los mismos elementos.*

$$A = B \quad \overset{def.}{\iff} \quad \forall x \; (\; x \in A \iff x \in B \;)$$

Cada elemento del conjunto A es un elemento del conjunto B y cada elemento del conjunto B es un elemento del conjunto A.

Ejemplo Son iguales los conjuntos

$$A = \{ \; x \mid x^2 - 5x + 6 = 0 \; \} \quad \text{y} \quad B = \{2, 3\}$$

- Un conjunto se especifica explícitamente con una lista y el orden en la lista **no** importa

$$\{a, b, c, \} = \{b, a, c\}$$

- Además, $\{a, b, a\} = \{a, b\} = \{a, a, a, b, b\}$ son especificaciones diferentes del mismo conjunto.
- Por otra parte, el mismo conjunto se puede especificar implícitamente con distintos predicados.

  Ejemplo

$$\{x \mid x = 0\} = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -1 < x < 1\}$$

Teoría de Conjuntos

Igualdad e Inclusión de conjuntos

Definición

Dados los conjuntos A y B, se dice que A está ***contenido*** *en B si todo elemento de A es también un elemento de B.*

$$A \subseteq B \quad \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \quad \forall x (x \in A \ \rightarrow \ x \in B)$$

Se denota $A \subseteq B$ y se lee:

“el conjunto A ***está contenido*** en el conjunto B”

- Si $A \subseteq B$, se dice que A es un ***subconjunto*** de B.
- Y si en el conjunto B podemos encontrar elementos que no están en A, decimos que A es un ***subconjunto propio*** de B. Lo denotamos $A \subset B$.

$$A \subset B \iff A \subset B \ \wedge \ A \neq B$$

Ejemplo Sean los conjuntos:

$A = \{3, 5\}$, $B = \{x \mid x \text{ es un entero primo menor que } 9\}$, $C = \{2, 3, 5, 7\}$

- Veamos que A es un subconjunto propio de B
  - ➢ $3 \in A$ y 3 un entero primo menor que 9, luego $3 \in B$
  - ➢ $5 \in A$ y 5 es un entero primo menor que 9, luego $5 \in B$
  - ➢ $7 \in B$ pero $7 \notin A$
  - ➢ Por lo tanto, $A \subset B$.
- Veamos que $B = C$
  - ➢ $C \subseteq B$, ya que todo elemento de C es un elemento de B.
  - ➢ Como además todo elemento de B está en C, tenemos que $B \subseteq C$.
  - ➢ Así, $B = C$.

Ejercicio 1 Sean los conjuntos:

$B = \{1, 3\},\ C = \{1, 5, 9\},\ D = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ E = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Inserte el símbolo correcto $\subseteq$ o $\not\subseteq$ entre:

i) B y C	ii) B y D
iii) B y E	iv) C y D
v) C y E	vi) D y E

Teorema

El conjunto vacío está contenido en todos los conjuntos.

☛ **¡OJO!**: **NO** hay que confundir la pertenencia $\in$ de un elemento en un conjunto con la inclusión $\subseteq$ entre conjuntos.

Ejercicio 2

Establece si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

i) $a \in \{a\}$	ii) $a \subseteq \{a\}$
iii) $\{a\} \in \{a\}$	iv) $\{a\} \subseteq \{a\}$
v) $\{a, b\} \in \{a, \{a, b\}\}$	vi) $\{a, b\} \subseteq \{a, \{a, b\}\}$

Ejercicio 2

Establece si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

i) $a \in \{a\}$ ii) $a \subseteq \{a\}$

iii) $\{a\} \in \{a\}$ iv) $\{a\} \subseteq \{a\}$

v) $\{a, b\} \in \{a, \{a, b\}\}$ vi) $\{a, b\} \subseteq \{a, \{a, b\}\}$

Ejercicio 3

Establece si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

i) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ ii) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

iii) $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$ iv) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$

☛ $\{\emptyset\}$ representa un conjunto cuyo único elemento es el conjunto vacío.

Definición

El ***conjunto de las partes*** *de un conjunto S, denotado $\mathcal{P}(S)$, es el conjunto de todos sus posibles subconjuntos.*

$$\mathcal{P}(S) = \Big\{ X \mid X \subseteq S \Big\}$$

Ejemplo 1 Para el conjunto $S = \{1, 2, \}$, tenemos que

$$\mathcal{P}(S) = \Big\{ \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\} \Big\}$$

Ejemplo 2

Dado un alfabeto Σ, un ***lenguaje*** es cualquier subconjunto de Σ^*.

Así, el conjunto $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ de las partes de Σ^* es el conjunto de todos los posibles lenguajes que se pueden definir con símbolos de Σ.

Representación en ordenador

Dado un conjunto S formado por n elementos, cada subconjunto $X \subseteq S$ se puede representar mediante cadenas binarias de longitud n.

De esta forma, el conjunto de todas las posibles cadenas binarias de longitud n representará al conjunto $\mathcal{P}(S)$.

Ejemplo El subconjunto $C = \{a, c\}$ del conjunto $S = \{a, b, c\}$ se puede representar como la cadena binaria 101.
Y el conjunto

$$\Big\{000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111\Big\}$$

representará al conjunto de las partes de S.

Dados los conjuntos A y B, podemos formar otros conjuntos a partir de ellos.

Definición

*La **unión** de dos conjuntos A y B es el conjunto*

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$$

Definición

*La **intersección** de dos conjuntos A y B es el conjunto*

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$

*Si $A \cap B = \varnothing$, se dice que los conjuntos A y B son **disjuntos**.*

Teorema

Sean los conjuntos $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$. Se verifican las siguientes propiedades:

1. ***Conmutativa*** : $A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$
2. ***Asociativa*** : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. ***Absorción*** : $A \cup (A \cap B) = A \qquad A \cap (A \cup B) = A$
4. ***Idempotencia*** : $A \cup A = A \qquad A \cap A = A$

Teorema

Sean los conjuntos $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$. Se verifican las siguientes propiedades:

5. Cotas : $A \subseteq B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$

6. Identidad : $\varnothing \cup A = A \qquad A \cap \mathcal{U} = A$

7. Dominancia : $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U} \qquad \varnothing \cap A = \varnothing$

8. Distributiva :

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

- La propiedad asociativa de la unión y de la intersección permite prescindir de los paréntesis cuando aplicamos estos operadores a más de dos conjuntos

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- También podremos utilizar expresiones del tipo

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i, \qquad \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

para representar la unión y la intersección, respectivamente, de una familia de conjuntos.

Definición

*Una **partición** de un conjunto S es una familia $\pi = \{S_1, ..., S_k\}$ de subconjuntos de S, tales que son disjuntos dos a dos y su unión es S.*

- $\forall i, j \;\; S_i \cap S_j = \varnothing$,
- $S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_k = S$

Ejemplo La familia $\pi = \{\ \{1,3\}, \{2,5\}, \{4\}\}$ es una partición del conjunto

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Ejemplo Una partición del conjunto $\mathbb{N}$ es

$$\{\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es par }\},\ \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es impar }\}\}$$

Ejercicio Dado el conjunto $S = \{a, b, c\}$, halla el conjunto de todas las particiones de S.

Definición

*La **diferencia** de dos conjuntos A y B es el conjunto de elementos de A que no están en B*

$$A - B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$

- ✔ $A - B$ también se llama ***complemento relativo*** de B en A.
- ✔ Para $A \subseteq \mathcal{U}$, el complemento relativo de A en $\mathcal{U}$ recibe el nombre de ***complementario*** de A y se denota $\overline{A}$.

Ejemplo $A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{3, 5, 7\}, \quad A - B = \{1, 2, 4\}$

Ejercicio Demuestra que $A - B = A \cap \overline{B} \qquad (*)$

Teorema

Sean los conjuntos $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$. Se verifican las siguientes propiedades:

9. Complemento: $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$; $\quad A \cap \overline{A} = \varnothing$

10. DeMorgan: $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\quad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

11. Involución: $\overline{\overline{(A)}} = A$

Teoría de Conjuntos

Sean $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$. Se verifican las siguientes propiedades:

1. **Conmutativa:** $A \cup B = B \cup A$; $\quad A \cap B = B \cap A$
2. **Asociativa:** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $\quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. **Absorción:** $A \cup (A \cap B) = A$; $\quad A \cap (A \cup B) = A$
4. **Idempotencia:** $A \cup A = A$; $\quad A \cap A = A$

Extremos: $\varnothing, \ \mathcal{U}, \quad \varnothing \subseteq A \subseteq \mathcal{U}$

5. **Cotas:** $A \subseteq B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$
6. **Identidad:** $\varnothing \cup A = A$; $\quad A \cap \mathcal{U} = A$
7. **Dominancia:** $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$; $\quad \varnothing \cap A = \varnothing$
8. **Distributiva:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
9. **Complemento:** $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$; $\quad A \cap \overline{A} = \varnothing$
10. **DeMorgan:** $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\quad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
11. **Involución:** $\overline{\overline{(A)}} = A$

- Para poder trabajar con mayor flexibilidad con los subíndices, otra posible notación para la unión e intersección de familias de conjuntos será

$$\bigcup_{i=\mathrm{I}} A_i, \qquad \bigcap_{i=\mathrm{I}} A_i$$

- Sobre estas notaciones extendidas, podremos aplicar las propiedades de distribución y de De Morgan generalizadas:

$$A \cap \bigcup_{i\in \mathrm{I}} B_i = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i); \qquad A \cup \bigcap_{i\in \mathrm{I}} B_i = \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i)$$

$$\overline{\bigcup_{i\in \mathrm{I}} B_i} = \bigcap_{i\in I}\overline{B_i} \qquad \overline{\bigcap_{i\in \mathrm{I}} B_i} = \bigcup_{i\in I}\overline{B_i}$$

Ejercicio Sean los conjuntos
$A_1 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $A_2 = \{0, 1, 2\}$, $A_3 = \{-1, 0, 1\}$ y sea el conjunto de índices $\mathtt{I} = \{1, 2, 3\}$. Determina los siguientes conjuntos:

(a) $\displaystyle\bigcup_{i \in \mathtt{I}} A_i$ (b) $\displaystyle\bigcap_{i \in \mathtt{I}} A_i$

Tomando $\mathbb{Z}$ como conjunto universal, determina:

(c) $\displaystyle\bigcup_{i \in \mathtt{I}} \overline{A_i}$ (d) $\displaystyle\bigcap_{i \in \mathtt{I}} \overline{A_i}$

Ejercicio

En el conjunto de los números naturales se consideran los subconjuntos

P: conjunto de números primos; D: conjunto de múltiplos de dos;

T: conjunto de múltiplos de tres; $\mathtt{I}$: conjunto de números impares y

S: conjunto de múltiplos de seis.

- Determina: $a)$ $P \cap \mathtt{I}$, $b)$ $P \cap D$, $c)$ $D \cap T$, $d)$ $D \cap S$, $e)$ $\mathtt{I} \cap S$.
- Describe el complementario de: $f)$ P, $g)$ $\mathtt{I}$, $h)$ D.
- Determina: $i)$ $P \cup \mathtt{I}$, $j)$ $P - \mathtt{I}$, $k)$ $\overline{D \cap \mathtt{I}}$.

Teorema (Propiedades de la diferencia de conjuntos)

Sean $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$. Se verifican las siguientes propiedades:

Elemento Neutro	:	$A - \varnothing$	$=$	A
Elemento Simétrico	:	$A - A$	$=$	$\varnothing$
Antidistributiva	:	$A - (B \cup C)$	$=$	$(A - B) \cap (A - C)$
		$A - (B \cap C)$	$=$	$(A - B) \cup (A - C)$
Distrib. de $\cap$ ***resp.*** $-$	:	$A \cap (B - C)$	$=$	$(A \cap B) - (A \cap C)$
Distrib. de $-$ ***resp.*** $\cap$	:	$(A \cap B) - C$	$=$	$(A - C) \cap (B - C)$
Distrib. de $-$ ***resp.*** $\cup$	:	$(A \cup B) - C$	$=$	$(A - C) \cup (B - C)$

☛ ¡OJO!: Ya que la diferencia no es conmutativa, la distributividad de $\cap$ resp. $-$ solo es válida por la izquierda

Definición

La ***diferencia simétrica*** *de los conjuntos A y B es el conjunto*

$$A \triangle B = \{x \in \mathcal{U} \mid (x \in A \ \wedge \ x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$

Ejemplo La diferencia simétrica de $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 5, 7\}$ es

$$A \triangle B = \{1, 2, 4, 5, 7\}$$

Ejercicio: Demuestra que

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

Teorema (Propiedades de la diferencia simétrica de conjuntos)

Sean $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$. Se verifican las siguientes propiedades:

Asociativa: $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$

Elemento Neutro: $A \triangle \varnothing = A$

Elemento Simétrico: $A \triangle A = \varnothing$

Distributiva de la intersección

respecto de $\triangle$ $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

Ejercicio 1 Sean $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$. Demuestra que:

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

Solución: Podemos demostrar esta igualdad usando las propiedades de la unión, intersección y complementación de conjuntos.

$$\begin{aligned}
(A \cap B) - (A \cap C) &= (A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)} && \text{(Def. 2 diferencia de conj.)} \\
&= (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) && \text{(De Morgan)} \\
&= \Big((A \cap B) \cap \overline{A}\Big) \cup \Big((A \cap B) \cap \overline{C}\Big) && \text{(Distributiva)} \\
&= \emptyset \ \cup \ \Big((A \cap B) \cap \overline{C}\Big) && \text{(Complemento)} \\
&= \Big((A \cap B) \cap \overline{C}\Big) && \text{(Identidad)} \\
&= \Big(A \cap (B \cap \overline{C})\Big) && \text{(Asociativa)} \\
&= A \cap (B - C)
\end{aligned}$$

Ejercicio 2 Sean $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$. Demuestra o refuta

$$A - (B \triangle C) = (A - B) \triangle (A - C)$$

Solución: Esta igualdad no se verifica, por eso hay que refutarla. Para ello, basta con dar conjuntos A, B y C tales que

$$A - (B \triangle C) \neq (A - B) \triangle (A - C)$$

Si tomamos $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $C = \{-3, -1, 2, 4\}$, tenemos que

$$(B \triangle C) = \{0, 1, 3, -3, -1\}, \qquad A - (B \triangle C) = \{-2, 2\}$$

Sin embargo,

$$(A - B) = \{-3, -2, -1\}, \qquad (A - C) = \{-2, 0, 1\},$$

$$(A - B) \triangle (A - C) = \{-3, -1, 0, 1\}$$

Ejercicio Sean A, B y C subconjuntos de un universo $\mathcal{U}$.

1. Demuestra que son ciertas las siguientes igualdades:
   1. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$
   2. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
   3. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
   4. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$
   5. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$
2. Da un contraejemplo para demostrar que no se verifican las igualdades:
   1. $A - (B - C) = (A - B) - C$
   2. $(A - B) \cup B = A$
   3. $A - (B \cap C) = (A - B) \cap (A - C)$
   4. $A \triangle (B \cup C) = (A \triangle B) \cup (A \triangle C)$
   5. $A - (B \triangle C) = (A - B) \triangle (A - C)$