3.3. Extremos de campos escalares

3.3.1. Extremos libres

En ocasiones, nos puede interesar encontrar los máximos o mínimos de una función de varias variables (por ejemplo, encontrar el volumen máximo de una caja con un área lateral determinada o encontrar las dimensiones de una caja que tiene mínima área lateral para un volumen dado). Para ello, podemos generalizar los conceptos de máximo local y mínimo local de un campo escalar.

Dado un campo escalar f definido sobre $\mathbb{R}^n$

1. diremos que un punto $\vec{x}_0$ es un máximo local para f, si hay algún entorno A tal que $\vec{x}_0 \in A$ y $f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x})$, $\forall \vec{x} \in A$

2. diremos que un punto $\vec{x}_0$ es un mínimo local para f, si hay algún entorno A tal que $\vec{x}_0 \in A$ y $f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x})$, $\forall \vec{x} \in A$

Al igual que en el caso de funciones reales de variable real, en el que el teorema de Taylor nos daba la clave para el estudio de máximos y mínimos de funciones, la generalización de este teorema al caso de varias variables será determinante a la hora del estudio de máximos y mínimos de campos escalares.

En el caso de funciones reales de variable real, un punto x_0 decíamos que era un **punto crítico** de f, si en dicho punto, la recta tangente era horizontal, es decir, si $f'(x_0) = 0$. En el caso de campos escalares definidos sobre $\mathbb{R}^2$, diremos que un punto $\vec{x}_0$ es un **punto crítico** de f si el plano tangente es horizontal, es decir si $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$. Generalizando esa definición, diremos que $\vec{x}_0$ es un **punto crítico** de un campo escalar f definido sobre $\mathbb{R}^n$ si $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$.

También se puede probar que, al igual que en el caso de funciones reales de variable real, si una función es diferenciable, los máximos y mínimos locales, si existen, se encuentran entre los puntos críticos; en aquel caso, para decidir si cada punto crítico es máximo, mínimo o punto de silla, el polinomio de Taylor de segundo orden nos proporcionaba el siguiente criterio:

1. Si x_0 es un punto crítico de una función real de variable real f dos veces derivable y $f''(x_0) > 0$, entonces en x_0 la función tiene un mínimo local.

2. Si x_0 es un punto crítico de una función real de variable real f dos veces derivable y $f''(x_0) < 0$, entonces en x_0 la función tiene un máximo local.

3. Si x_0 es un punto crítico de una función real de variable real f dos veces derivable y $f''(x_0) = 0$, entonces este criterio no nos permite afirmar nada acerca de la naturaleza del punto crítico x_0

Para la generalización del polinomio de Taylor de orden 2 que, en el caso de funciones reales de variable real era

$$P_{2,f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

haciendo el cambio $x = x_0 + h$, lo podemos reescribir como

$$P_{2,f,x_0}(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot h^2$$

Ya sabemos que el papel que desempeña $f'(x_0)$ es el mismo que el que desempeña $\nabla f(\vec{x}_0)$ en el caso de campos escalares.

En el caso de que las derivadas parciales cruzadas de segundo orden sean iguales, la matriz

$$\begin{pmatrix} D_{11}f(\vec{x}_0) & D_{12}f(\vec{x}_0) & \dots & D_{1n}f(\vec{x}_0) \\ D_{21}f(\vec{x}_0) & D_{22}f(\vec{x}_0) & \dots & D_{2n}f(\vec{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1}f(\vec{x}_0) & D_{n2}f(\vec{x}_0) & \dots & D_{nn}f(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

es simétrica. A esta matriz se le conoce por el nombre de **matriz Hessiana** del campo escalar f en el punto $\vec{x}_0$ y la notaremos por $Hf(\vec{x}_0)$

Así, la aplicación $q_{\vec{x}_0} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $q_{\vec{x}_0}(\vec{h}) = \vec{h} \cdot Hf(\vec{x}_0) \cdot \vec{h}^t$ es una forma cuadrática. Esta aplicación va a ser la que juege al papel del tercer sumando en la generalización del polinomio de Taylor de orden 2 al caso de campos escalares, con lo que

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) \sim f(\vec{x}_0) + \vec{h} \cdot \nabla f(\vec{x}_0)^t + \frac{1}{2} \cdot \vec{h} \cdot Hf(x_0) \cdot \vec{h}^t$$

1. Si $q_{\vec{x}_0}(\vec{h}) > 0$, para todo $\vec{h} \neq 0$ (se dice que la forma cuadrática es **definida positiva**), entonces $\vec{x}_0$ es un mínimo local del campo escalar f

2. Si $q_{\vec{x}_0}(\vec{h}) < 0$, para todo $\vec{h} \neq 0$ (se dice que la forma cuadrática es **definida negativa**), entonces $\vec{x}_0$ es un máximo local del campo escalar f

3. Si $q_{\vec{x}_0}(\vec{h}_1) > 0$, para algún $\vec{h}_1 \neq 0$ y $q_{\vec{x}_0}(\vec{h}_2) < 0$, para algún $\vec{h}_2 \neq 0$ (se dice que la forma cuadrática es **no definida**), entonces $\vec{x}_0$ no es ni mínimo local ni máximo local del campo escalar f

4. En cualquier otro caso, no podemos afirmar nada acerca de la naturaleza del punto crítico $\vec{x}_0$

Así, el único problema es determinar el "signo"de la forma cuadrática.

3.3.2. Extremos de campos definidos sobre $\mathbb{R}^2$

Para clasificar la forma cuadrática asociada a la matriz Hessiana de un campo escalar definido sobre $\mathbb{R}^2$, podemos utilizar el siguiente criterio:

Sea $f(x,y)$ un campo escalar dos veces diferenciable definido sobre $\mathbb{R}^2$, (x_0,y_0) un punto crítico de f y sea $Hf(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$

- Si $|Hf(x_0,y_0)| > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$, entonces el punto (x_0,y_0) es un mínimo local de f
- Si $|Hf(x_0,y_0)| > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$, entonces el punto (x_0,y_0) es un máximo local de f
- Si $|Hf(x_0,y_0)| < 0$, entonces el punto (x_0,y_0) no es ni mínimo local ni máximo local de f
- En caso contrario, no podemos afirmar nada acerca de la naturaleza del punto (x_0,y_0)

EJEMPLO 3.1.
Para determinar los extremos de $f(x,y) = -4x^3 + 6x^2y + 3y^4 - 4y^3$ tengamos en cuenta que las derivadas parciales de primer orden se anulan únicamente en los puntos

$$P_0 = (0,0), \quad P_1 = (0,1), \quad P_2 = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

Aunque este criterio no nos permite afirmar nada acerca de la naturaleza del primer punto, sí nos permite afirmar que el último punto no es extremo local y el segundo punto es un mínimo local. ♣

En ocasiones, si queremos estudiar la naturaleza de un punto (x_0,y_0) que es punto crítico para un campo escalar $f(x,y)$, y:

- a través de una curva $a(t)$ tal que $a(t_0) = (x_0,y_0)$ se tiene que t_0 es máximo local para $g(t) = f(a_1(t), a_2(t))$ y a través de otra curva $b(t)$ que cumpla que $b(t_0) = (x_0,y_0)$ se tiene que t_0 es mínimo local para $h(t) = f(b_1(t), b_2(t))$, podemos afirmar que (x_0,y_0) no es ni máximo local ni mínimo local del campo escalar f
- a través de una curva $c(t)$ tal que $c(t_0) = (x_0,y_0)$ se tiene que t_0 no es ni máximo local ni mínimo local para $k(t) = f(c_1(t), c_2(t))$, entonces (x_0,y_0) tampoco es ni máximo local ni mínimo local de f

EJEMPLO 3.2.
Estudiemos los extremos de $f(x,y) = x^6 - y^4$, cuyo único punto crítico es el $(0,0)$. El criterio de la matriz Hessiana no nos permite afirmar nada acerca de su naturaleza.

Consideremos la curva $a(t) = (0,t)$ que pasa por $(0,0)$ cuando $t = 0$. La función $g(t) = f(0,t) = -t^4$ alcanza un máximo local en $t = 0$, puesto que $g'(0) = g''(0) = g'''(0) = 0$ y $g^{(4}(0) = -24 < 0$

Sin embargo, si consideramos la curva $b(t) = (t,0)$ que pasa por $(0,0)$ cuando $t = 0$, podemos afirmar que $t = 0$ es un mínimo local para $h(t) = f(t,0) = t^6$, puesto que $h'(0) = h''(0) = \ldots = h^{(5}(0) = 0$ y $h^{(6}(0) = 720 > 0$

Por tanto, el punto $(0,0)$ no es extremo local para $f(x,y) = x^6 - y^4$, cosa que no podríamos afirmar utilizando el criterio de la matriz Hessiana ♣

EJEMPLO 3.3.
El único punto crítico del campo escalar $f(x,y) = x^3 + y^3$ es el punto $(0,0)$, del que podemos afirmar que no es ni máximo local ni mínimo local, puesto que al considerar la curva $c(t) = (t,0)$ que pasa por $(0,0)$ para $t = 0$, tal valor nos proporciona un punto de silla de la función $k(t) = f(t,0) = t^3$ ♣

EJERCICIO
Estudiar el resto de los puntos críticos del ejemplo 3.1. (*Indicación: Utilizar la curva* $u(t) = (t,0)$)

3.3.3. Extremos de campos definidos sobre $\mathbb{R}^n$

Puesto que el criterio enunciado en la sección anterior sólo es de aplicación en el caso de campos escalares definidos sobre $\mathbb{R}^2$, necesitamos una generalización para el caso en el que queramos estudiar un campo escalar definido sobre $\mathbb{R}^n$.

De entre los múltiples criterios existentes para clasificar formas cuadráticas definidas en $\mathbb{R}^n$, podemos utilizar el siguiente:

El criterio del polinomio característico

Supongamos que $\vec{a}$ es punto crítico de una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dos veces diferenciable y construyamos el siguiente polinomio(*llamado polinomio característico*):

$$p(u) = |Hf(\vec{a}) - u \cdot I| \text{ siendo } I \text{ la matriz identidad de } n \times n$$

1. Si $p(u)$ es de grado n, ninguno de sus coeficientes es nulo y tienen signos alternos, entonces $\vec{a}$ es un mínimo local de f
2. Si $p(u)$ es de grado n, ninguno de sus coeficientes es nulo y tienen todos el mismo signo, entonces $\vec{a}$ es un máximo local de f

3. Si $p(u)$ es de grado n, sus coeficientes nulos están seguidos y llegan hasta el término independiente, y los no nulos alternan o tienen el mismo signo, entonces no podemos afirmar nada

4. En otro caso, $\vec{a}$ es un punto de silla de f; es decir, no es extremo local de f

EJEMPLO 3.4.
Determinar y clasificar todos los puntos críticos del campo escalar, definido sobre $\mathbb{R}^3$ como $f(x,y,z) = xy + xz + yz - 2x - 2y - 2z$ ♣

3.3.4. Extremos condicionados

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dos veces diferenciable y supongamos que queremos determinar los extremos de esa función con las condiciones $g_i(\vec{x}) = 0$ con $i = 1, 2, \dots k$

Construyamos la función $L(\vec{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(\vec{x}) - \lambda_1 \cdot g_1(\vec{x}) - \dots - \lambda_k \cdot g_k(\vec{x})$ (*esta función es la que se conoce como Lagrangiana y los coeficientes λ_k, multiplicadores de Lagrange*), supongamos que $(a_1, \dots, a_n, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ es un punto crítico de L y construyamos también el polinomio

$$p(u) = \begin{vmatrix} 0 & Jg(\vec{a}) \\ (Jg(\vec{a}))^t & HF(\vec{a}) - u \cdot I \end{vmatrix}$$

siendo $F(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \alpha_1 \cdot g_1(\vec{x}) - \dots - \alpha_k \cdot g_k(\vec{x})$, 0 la matriz nula de $k \times k$ e I la matriz identidad de $n \times n$

1. Si $p(u)$ es de grado $n-k$, ninguno de sus coeficientes es nulo y tienen signos alternos, entonces $\vec{a}$ es un mínimo local de f sujeto a las condiciones g_i

2. Si $p(u)$ es de grado $n-k$, ninguno de sus coeficientes es nulo y tienen todos el mismo signo, entonces $\vec{a}$ es un máximo local de f sujeto a las condiciones g_i

3. Si $p(u)$ es de grado $n-k$, sus coeficientes nulos están seguidos y llegan hasta el término independiente, y los no nulos alternan o tienen el mismo signo, entonces no podemos afirmar nada

4. En otro caso, el punto $\vec{a}$ no es extremo local de f

EJEMPLO 3.5.
Determinar y clasificar los puntos críticos de la función $f(x,y,z) = z$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 + z^3 - 2x + 4y + 3z + 1 = 0$

La función Lagrangiana es, en este caso

$$L(x,y,z,\lambda) = z - \lambda \cdot (x^2 + y^2 + z^3 - 2x + 4y + 3z + 1)$$

y sus derivadas parciales respectivas son

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z,\lambda) = -2\lambda(x-1)$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z,\lambda) = -2\lambda(y+2)$$
$$\frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z,\lambda) = 1-3\lambda(z^2+1)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda) = -(x^2+y^2+z^3-2x+4y+3z+1)$$

Así, los puntos críticos tendrán que ser solución del sistema

$$\left.\begin{array}{c} \lambda(x-1)=0 \\ \lambda(y+2)=0 \\ 1-3\lambda(z^2+1)=0 \\ x^2+y^2+z^3-2x+4y+3z+1=0 \end{array}\right\}$$

De la primera ecuación obtenemos que, o bien $\lambda = 0$ o bien $x = 1$, pero λ no puede ser cero, puesto que entonces no se cumpliría la tercera ecuación. Por tanto, $x = 1$

Un razonamiento análogo aplicado a la segunda ecuación nos conduce a que $y = -2$. Llevando estas igualdades a la última ecuación, deducimos que $z = 1$. Todo esto, al llevarlo a la tercera ecuación nos obliga a afirmar que $\lambda = \frac{1}{6}$

En definitiva, que el único punto crítico de la función Lagrangiana es el punto $(x,y,z,\lambda) = \left(1,-2,1,\frac{1}{6}\right)$

Así, como $F(x,y,z) = z - \frac{1}{6}(x^2+y^2+z^3-2x+4y+3z+1)$ y además

$$\left.\begin{array}{r} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = \frac{-1}{3}(x-1) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = \frac{-1}{3}(y+2) \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = \frac{1}{2}(1-z^2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{-1}{3} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y,z) = 0 & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y,z) = 0 & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{-1}{3} & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}(x,y,z) = 0 & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}(x,y,z) = 0 & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(x,y,z) = -z \end{array}\right.$$

y podemos afirmar que el polinomio característico para el único punto crítico es

$$p(u) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & \frac{-1}{3}-u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3}-u & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -1-u \end{vmatrix} = 36\left(\frac{1}{3}+u\right)^2 = 4(1+3u)^2$$

y el criterio del polinomio característico afirma que el punto en cuestión es un máximo local

♣

Al igual que en el caso de funciones reales de variable real, si tenemos que estudiar el comportamiento de un campo escalar continuo f en un subconjunto A cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$, sabemos que en algún punto se alcanza su máximo y en algún punto se alcanza su mínimo. Para localizar dicho punto, podemos proceder como sigue:

1. Buscaremos extremos locales en el interior del conjunto A como en el apartado anterior. Caso de que algunos extremos de f estuvieran fuera de A, tales puntos quedarían excluidos.
2. Buscaremos extremos (locales y absolutos) de f en la frontera del conjunto (*podemos utilizar el criterio anterior*), obteniendo así otro conjunto de puntos.
3. Evaluando la función en los puntos obtenidos en los dos apartados anteriores, decidimos cuál o cuáles son máximos absolutos y cuál o cuáles son mínimos absolutos.

EJEMPLO 3.6.
Encontrar los extremos del campo escalar $f(x, y) = 2x^3 + 3y^2$ dentro del círculo $x^2 + y^2 \leq 1$

1. El único punto crítico que tiene el campo escalar es el $(0, 0)$ que no es extremo local.
2. En la frontera del conjunto, el campo presenta dos máximos locales, en los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$, y dos mínimos locales, en los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$
3. Evaluando la función f en los únicos puntos obtenidos en los apartados anteriores, podemos concluir que el campo f tiene un mínimo absoluto en $(-1, 0)$ (en el cual el campo vale -2) y dos máximos absolutos en los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$ (en los cuales el campo vale 3)

♣

EJERCICIO
Encontrar los extremos absolutos, dentro del círculo $x^2 + y^2 \leq 4$, del campo escalar definido por $f(x, y) = x^2y^2 - x^2 - y^2$