Estructuras Algebraicas para la Computación

Mariam Cobalea

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Tema 8: Espacios euclídeos

Tema 8: Espacios euclídeos

- Formas bilineales.
- Producto Escalar.
- Norma de un vector. Distancias.
  Ángulo entre vectores. Ortogonalidad.
- Bases ortogonales y ortonormales. Proyección ortogonal.
- Existencia de bases ortogonales y ortonormales.
  Método de Gram-Schmidt.
- Diagonalización ortogonal.
- Formas cuadráticas.

Formas bilineales

Definición 1

*Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathcal{K}$. Se llama **forma bilineal** a una aplicación $\varphi\colon \mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathcal{K}$ que verifica:*

1. $\varphi(\vec{u}+\vec{v},\vec{w})=\varphi(\vec{u},\vec{w})+\varphi(\vec{v},\vec{w})$
2. $\varphi(\vec{u},\vec{v}+\vec{w})=\varphi(\vec{u},\vec{v})+\varphi(\vec{u},\vec{w})$
3. $\varphi(c\vec{u},\vec{v})=\varphi(\vec{u},c\vec{v})=c\varphi(\vec{u},\vec{v})$

Ejemplos Son formas bilineales las aplicaciones

1. $\varphi:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida
$$\varphi(\vec{x},\vec{y})=x_1y_1+2x_2y_1+3x_1y_2+4x_2y_2$$
2. $\varphi:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida
$$\varphi(\vec{x},\vec{y})=2x_1y_1+x_2y_1+5x_1y_2+3x_2y_2$$

Formas bilineales

Ejemplos Son formas bilineales las aplicaciones

3. $\varphi:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definida
$$\varphi(\vec{x},\vec{y})=-x_1y_2-x_1y_3-2x_2y_1+x_2y_2-x_2y_3-2x_3y_1+2x_3y_2+2x_3y_3$$
4. $\varphi\colon\ \mathbb{R}_3(t)\times\mathbb{R}_3(t)\ \to\ \mathbb{R}$ definida
$$\varphi(p(t),q(t))=\sum_{i=1}^{3}p(i)q(i)$$
5. $\varphi\colon\ \mathbb{R}_3(t)\times\mathbb{R}_3(t)\ \to\ \mathbb{R}$ definida
$$\varphi(p(t),q(t))=p(1)q(0)+p(0)q(1)$$

Formas bilineales

Matriz asociada a una forma bilineal en una base $\mathcal{B}$

Veamos que las formas bilineales definidas sobre espacios vectoriales de dimensión finita se pueden expresar matricialmente.

Ejemplo Sea la forma bilineal $\varphi(\vec{x},\vec{y}) = 2x_1y_1 + x_2y_1 + 5x_1y_2 + 3x_2y_2$

$$\varphi(\vec{x},\vec{y}) = 2x_1y_1 + x_2y_1 + 5x_1y_2 + 3x_2y_2 = (2x_1 + x_2)y_1 + (5x_1 + 3x_2)y_2$$

$$= (2x_1 + x_2, 5x_1 + 3x_2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, podemos expresar

$$\varphi(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}^t \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \vec{y}$$

Formas bilineales

Matriz asociada a una forma bilineal en una base $\mathcal{B}$

Teorema 1

Sea $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ una base de un espacio vectorial $\mathcal{V}$. Toda forma bilineal $\varphi\colon \mathcal{V}\times\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ queda determinada dando las imágenes $\varphi(\vec{v}_i, \vec{v}_j)$ de los vectores de la base.

Demostración: Por ser $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ una base, para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{x},\vec{y}) &= \varphi(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n,\ y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2 + \cdots + y_n\vec{v}_n) \\
&= x_1y_1\varphi(\vec{v}_1,\vec{v}_1) + x_1y_2\varphi(\vec{v}_1,\vec{v}_2) + \cdots + x_1y_n\varphi(\vec{v}_1,\vec{v}_n) + \\
&\quad x_2y_1\varphi(\vec{v}_2,\vec{v}_1) + x_2y_2\varphi(\vec{v}_2,\vec{v}_2) + \cdots + x_2y_n\varphi(\vec{v}_2,\vec{v}_n) + \cdots + \\
&\quad x_ny_1\varphi(\vec{v}_n,\vec{v}_1) + x_ny_2\varphi(\vec{v}_n,\vec{v}_2) + \cdots + x_ny_n\varphi(\vec{v}_n,\vec{v}_n)
\end{aligned}$$

$$= (x_1, x_2, \dots, x_n)_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \varphi(\vec{v}_1,\vec{v}_1) & \varphi(\vec{v}_1,\vec{v}_2) & \dots & \varphi(\vec{v}_1,\vec{v}_n) \\ \varphi(\vec{v}_2,\vec{v}_1) & \varphi(\vec{v}_2,\vec{v}_2) & \dots & \varphi(\vec{v}_2,\vec{v}_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi(\vec{v}_n,\vec{v}_1) & \varphi(\vec{v}_n,\vec{v}_2) & \dots & \varphi(\vec{v}_n,\vec{v}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Formas bilineales

Matriz asociada a una forma bilineal en una base $\mathcal{B}$

Definición 2

Se llama **matriz asociada a la forma bilineal** $\varphi\colon \mathcal{V}\times\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ **respecto a la base** $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ *a la matriz*

$$A = (a_{ij}),\ \textit{donde } a_{ij} = \varphi(\vec{v}_i, \vec{v}_j),\ \textit{para cada } i, j : 1, \dots, n$$

$$A = \begin{pmatrix} \varphi(\vec{v}_1,\vec{v}_1) & \varphi(\vec{v}_1,\vec{v}_2) & \dots & \varphi(\vec{v}_1,\vec{v}_n) \\ \varphi(\vec{v}_2,\vec{v}_1) & \varphi(\vec{v}_2,\vec{v}_2) & \dots & \varphi(\vec{v}_2,\vec{v}_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi(\vec{v}_n,\vec{v}_1) & \varphi(\vec{v}_n,\vec{v}_2) & \dots & \varphi(\vec{v}_n,\vec{v}_n) \end{pmatrix}$$

Formas bilineales

Matriz asociada a una forma bilineal en una base $\mathcal{B}$

Ejercicios Para cada una de las formas bilineales, halla la matriz asociada respecto a la base canónica:

1. $\varphi(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2$
2. $\varphi(p(t), q(t)) = p(1)q(0) + p(0)q(1)$
3. $\varphi(p(t), q(t)) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$
4. $\varphi(\vec{x},\vec{y}) = -x_1y_2 - x_1y_3 - 2x_2y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 - 2x_3y_1 + 2x_3y_2 + 2x_3y_3$
5. $\varphi(\vec{x},\vec{y}) = -x_1y_2 - x_1y_3 - 2x_2y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 - 2x_3y_1 + 2x_3y_2 + 2x_3y_3$

Formas bilineales

Influencia de un cambio de base en la Matriz asociada a una forma bilineal

¿Cómo cambia la matriz asociada a una forma bilineal cuando se efectúa un cambio de base?

Teorema 2

Sea $\mathcal{V}$ *un espacio vectorial de dimensión* n *sobre el cuerpo* $\mathcal{K}$ *y sea una forma bilineal*

$$\varphi \colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{K}$$

Si A_1 *es la matriz asociada a* φ *en la base* $\mathcal{B}_1$ *de* $\mathcal{V}$ *y* A_2 *es la matriz asociada a* φ *en la base* $\mathcal{B}_2$ *de* $\mathcal{V}$ *, entonces se verifica que:*

$$A_2 = P^t A_1 P$$

donde P *es la matriz de cambio de base de* $\mathcal{B}_2$ *a* $\mathcal{B}_1$ *.*

Formas bilineales

Forma bilineal simétrica

Definición 3

Sea $\varphi \colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{K}$ *una forma bilineal. Se dice que la forma bilineal es* **simétrica** *si para todo* $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$

$$\varphi(\vec{v}, \vec{w}) = \varphi(\vec{w}, \vec{v})$$

Ejemplo La forma bilineal $\varphi(p(t), q(t)) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$ es simétrica, ya que para todo $p(t), q(t) \in \mathbb{R}(t)$

$$\varphi(p(t), q(t)) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt = \int_{-1}^{1} q(t)p(t)dt = \varphi(q(t), p(t))$$

Teorema 3

Una forma bilineal $\varphi \colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{K}$ *es simétrica si, y sólo si, su matriz asociada respecto a cualquier base es simétrica.*

Formas bilineales

Formas bilineales

Tema 8: Espacios euclídeos

Tema 8: Espacios euclídeos

- Formas bilineales.
- Producto Escalar.
- Norma de un vector. Distancias.
  Ángulo entre vectores. Ortogonalidad.
- Bases ortogonales y ortonormales. Proyección ortogonal.
- Existencia de bases ortogonales y ortonormales.
  Método de Gram-Schmidt.
- Diagonalización ortogonal.
- Formas cuadráticas.

Producto escalar

Definición 4

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial definido sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Un ***producto escalar*** *es una función $\varphi\colon \mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{R}$ que verifica:*

1. $\varphi(\vec{u},\vec{v}) = \varphi(\vec{v},\vec{u})$
2. $\varphi(\vec{u},\vec{v}+\vec{w}) = \varphi(\vec{u},\vec{v}) + \varphi(\vec{u},\vec{w})$
3. $\varphi(c\vec{u},\vec{v}) = \varphi(\vec{u},c\vec{v}) = c\varphi(\vec{u},\vec{v})$
4. $\varphi(\vec{v},\vec{v}) > 0$ *y* $\varphi(\vec{v},\vec{v}) = 0$ *si, y sólo si,* $\vec{v} = \vec{0}$

☛ Un ***producto escalar*** es una forma bilineal $\varphi\colon \mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{R}$ simétrica y definida positiva.

Producto escalar

Ejemplos

1. La función $(\ |\ )\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definida

$$(\vec{x}\mid\vec{y}) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

es un producto escalar. Se llama ***producto escalar euclídeo***.

✔ Para denotar el producto escalar de dos vectores $\vec{v},\vec{w}$ podemos usar distintos símbolos

$$\varphi(\vec{v},\vec{w}),\qquad <\vec{v},\vec{w}>,\qquad (\vec{v}\mid\vec{w}),\qquad \vec{v}\cdot\vec{w}$$

✔ Para distinguir el producto escalar euclídeo definido en $\mathbb{R}^n$ de otros productos escalares usaremos la notación siguiente:

$$\vec{v}\cdot\vec{w} := \text{producto escalar euclídeo en } \mathbb{R}^n$$

$$<\vec{v},\vec{w}> := \text{producto escalar general en un espacio vectorial } \mathcal{V}$$

Producto escalar

Ejemplos

2. La función $\langle\ \rangle\colon \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida

$$\langle\vec{x},\ \vec{y}\rangle = x_1y_1 + 7x_2y_2$$

es otro producto escalar en $\mathbb{R}^2$.

Este ejemplo se puede generalizar demostrando que:

$$<\vec{v},\vec{w}> = c_1v_1w_1 + c_2v_2w_2 + \ldots + c_nv_nw_n,\quad \text{con}\ \ c_i > 0$$

es un producto escalar en $\mathbb{R}^n$.

Las constantes positivas c_i se llaman ***pesos***.

Producto escalar

Ejercicios Demuestra que:

1. La función $<>: \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida

$$< A, B >= a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

es un producto escalar en $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

2. La función $\langle\rangle: \mathbb{R}_2(t) \times \mathbb{R}_2(t) \to \mathbb{R}$ definida

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$$

es un producto escalar en $\mathbb{R}_2(t)$.

Espacio vectorial euclídeo

Definición 5

*Se llama **espacio euclídeo** a un espacio vectorial real en el que se ha definido un producto escalar.*

Ejemplos Son espacios euclídeos:

1. $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar euclídeo $(\,|\,): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definido
$$(\vec{x} \mid \vec{y}) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

2. $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar $(\,|\,): \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido
$$(\vec{x} \mid \vec{y}) = x_1y_1 + 7x_2y_2$$

3. $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar $(\,|\,): \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido
$$(\vec{x} \mid \vec{y}) = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2$$

Producto escalar

Ejercicios

3. En el espacio vectorial $\mathcal{C}[0, 2\pi]$ de las funciones reales continuas con valores reales definidas en el intervalo $[0, 2\pi]$, se define $\langle\,\rangle: \mathcal{C}[0, 2\pi] \times \mathcal{C}[0, 2\pi] \to \mathbb{R}$

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

Demuestra que es un producto escalar en $\mathcal{C}[0, 2\pi]$.

4. En el espacio vectorial $\mathcal{C}[a, b]$ de las funciones reales continuas con valores reales definidas en el intervalo $[a, b]$, se define $\langle\,\rangle: \mathcal{C}[a, b] \times \mathcal{C}[a, b] \to \mathbb{R}$

$$\langle f, g\rangle = \int_a^{b} f(t)g(t)dt$$

Demuestra que es un producto escalar en $\mathcal{C}[a, b]$.

Espacio vectorial euclídeo

Ejemplos Son espacios euclídeos:

4. $(\mathbb{R}_2(t), \langle\,\rangle)$, donde $\langle\,\rangle$ es el producto escalar
$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$$

5. $(\mathcal{C}[0, 2\pi], \langle\,\rangle)$, donde $\langle\,\rangle$ es el producto escalar
$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

6. $(\mathcal{C}[a, b], \langle\,\rangle)$, donde $\langle\,\rangle$ es el producto escalar
$$\langle f, g\rangle = \int_a^{b} f(t)g(t)dt$$

Tema 8: Espacios euclídeos

Tema 8: Espacios euclídeos

- Formas bilineales.
- Producto Escalar.
- Norma de un vector. Distancias.
  Ángulo entre vectores. Ortogonalidad.
- Bases ortogonales y ortonormales. Proyección ortogonal.
- Existencia de bases ortogonales y ortonormales.
  Método de Gram-Schmidt.
- Diagonalización ortogonal.
- Formas cuadráticas.

Espacio vectorial euclídeo

Norma de un vector. Distancias

Definición 6

Sea $(\mathcal{V}, <\,>)$ *un espacio vectorial euclídeo. Llamamos* ***norma*** *de un vector* $\vec{v} \in \mathcal{V}$ *al número real*

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{<\vec{v}, \vec{v}>}$$

Ejemplo La norma del vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ del espacio $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual es

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

Espacio vectorial euclídeo

Norma de un vector. Distancias

Definición 7

Sea $(\mathcal{V}, <\,>)$ *un espacio vectorial euclídeo. Se dice que* $\vec{u} \in \mathcal{V}$ *es un vector* ***unitario*** *si* $\|\vec{u}\| = 1$

Ejemplo En el espacio $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, el vector

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

es unitario.

☛ Si $\vec{v}$ es un vector no nulo, el vector $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ es unitario.

Espacio vectorial euclídeo

Norma de un vector. Distancias

Definición 8

Sea $(\mathcal{V}, <\,>)$ *un espacio vectorial euclídeo. Llamamos* ***distancia*** *entre dos vectores* $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$ *al número real*

$$d(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\|$$

Ejemplo La distancia entre los vectores $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar euclídeo es

$$d(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\| = \sqrt{(7-3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{17}$$

Espacio vectorial euclídeo

Norma de un vector. Distancias

Teorema 4 (Propiedades de la norma)

Sea $(\mathcal{V}, < >)$ *un espacio vectorial euclídeo y sean* $c \in \mathbb{R}$, $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$.

1. $\|\vec{v}\| = 0$ *si, y sólo si,* $\vec{v} = 0$
2. $\|c\vec{v}\| = |c|\ \|\vec{v}\|$
3. $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ *(Desigualdad triangular)*

Teorema 5 (Propiedades de la distancia)

Sean $\vec{v}$, $\vec{w}$ *vectores de un espacio euclideo* $(\mathcal{V}, < >)$. *Entonces*

1. $d(\vec{v}, \vec{w}) \geq 0$
2. $d(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ *si, y sólo si,* $\vec{v} = \vec{w}$
3. $d(\vec{v}, \vec{w}) = d(\vec{w}, \vec{v})$
4. $d(\vec{v}, \vec{w}) \leq d(\vec{v}, \vec{u}) + d(\vec{u}, \vec{w})$ *(Desigualdad triangular)*

Espacio vectorial euclídeo

Norma de un vector. Distancias

Teorema 6 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sean $\vec{v}$, $\vec{w}$ *vectores de un espacio euclideo* $(\mathcal{V}, < >)$. *Entonces*

$$< \vec{v}\ ,\ \vec{w} >^2 \leq < \vec{v}\ ,\ \vec{v} > < \vec{w}\ ,\ \vec{w} >$$

Ejercicio Sean las funciones $f(x) = 1$ y $g(x) = x$ en el espacio vectorial $\mathcal{C}[0, 1]$, con el producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Comprueba que

$$|\ \langle f, g\rangle\ | \leq \|f\|\|g\|$$

Espacio vectorial euclídeo

Ángulo entre vectores. Ortogonalidad

Partiendo de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene

$$< \vec{v}\ ,\ \vec{w} >^2 \leq \|\vec{v}\|^2\ \|\vec{w}\|^2 \iff \left(\frac{< \vec{v}\ ,\ \vec{w} >}{\|\vec{v}\|\ \|\vec{w}\|}\right)^2 \leq 1$$

$$\iff -1 \leq \frac{< \vec{v}\ ,\ \vec{w} >}{\|\vec{v}\|\ \|\vec{w}\|} \leq 1$$

Como consecuencia, existe un único ángulo θ tal que

$$\cos\theta = \frac{< \vec{v}\ ,\ \vec{w} >}{\|\vec{v}\|\ \|\vec{w}\|}$$

Definición 9

Sean $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *vectores en un espacio euclídeo* $(\mathcal{V}, < >)$. *El* ***ángulo*** *entre dos vectores* $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$, *no nulos, viene dado por*

$$ang(\vec{v}, \vec{w}) = \theta = \arccos\frac{< \vec{v}\ ,\ \vec{w} >}{\|\vec{v}\|\ \|\vec{w}\|}$$

Espacio vectorial euclídeo

Ángulo entre vectores. Ortogonalidad

Ejemplos

1. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar euclídeo, el ángulo de los vectores $\vec{v} = (1, 2, 1, 0)$ y $\vec{w} = (0, 1, 0, 1)$ es

$$\theta = \arccos\frac{2}{\sqrt{6}\sqrt{2}}$$

2. En $R_3(x)$ se considera el producto escalar

$$(p|q) = \sum_{i=1}^{3} p(i)q(i)$$

Halla el ángulo determinado por los polinomios $x^2 + 1$ y $x^2 - 3x + 1$

Solución: $\theta = \arccos\frac{\sqrt{43}}{43}$

Definición 10 (Vectores ortogonales)

Sea $(\mathcal{V}, < >)$ *un espacio vectorial euclídeo y sean* $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$. *Se dice que* $\vec{v}$ *es* ***ortogonal*** *a* $\vec{w}$ *si su producto escalar es cero.*
Además, cuando un vector $\vec{v}$ *es ortogonal a todos los vectores de un subespacio* $\mathcal{W}$ *se dice que* $\vec{v}$ *es* ***ortogonal*** *a* $\mathcal{W}$

Ejemplo En el espacio $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, los vectores

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son ortogonales.

Ejemplo En el espacio euclídeo $\mathcal{C}[0, 2\pi]$, las funciones

$$\operatorname{sen} t \quad \text{y} \quad \cos t$$

son ortogonales, ya que

$$\langle \operatorname{sen} t, \cos t \rangle = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \cdot \cos t dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} 2t dt = \left. \frac{-\cos 2t}{4} \right|_0^{2\pi} = 0$$

- ✔ La ortogonalidad depende del producto escalar que se elige.
- ✔ Dos vectores pueden ser ortogonales con respecto a un producto escalar y **no** serlo con respecto a otro producto.

Teorema 7 (Generalización del teorema de Pitágoras)

Sea $(\mathcal{V}, < >)$ *un espacio vectorial euclídeo. Dos vectores* $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$ *son ortogonales si, y sólo si, verifican:*

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$$

Tema 8: Espacios vectoriales euclideos

Tema 8: Espacios euclídeos

1. Formas bilineales
2. Producto Escalar.
3. Norma de un vector. Distancias.
   Ángulo entre vectores. Ortogonalidad.
4. Bases ortogonales y ortonormales. Proyección ortogonal.
5. Existencia de bases ortogonales y ortonormales.
   Método de Gram-Schmidt.
6. Diagonalización ortogonal.
7. Formas cuadráticas.

Espacio vectorial euclídeo

Bases ortogonales y ortonormales

Definición 11 (Sistema ortogonal)

*Sea $(\mathcal{V}, <>)$ un espacio vectorial euclídeo. Se dice que un sistema de vectores $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m\} \subset \mathcal{V}$ es **ortogonal** si cada vector $\vec{v}_i$ es ortogonal a todos los demás.*

Ejemplo En el espacio $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual el sistema

$$\left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

es ortogonal,

$$(1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad (1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (-1,2,-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Espacio vectorial euclídeo

Bases ortogonales y ortonormales

Ejemplo En el espacio euclídeo $\mathcal{C}[0, 2\pi]$, el sistema

$$\{\operatorname{sen} t, \cos t\}$$

es ortogonal, ya que verifica

$$\langle \operatorname{sen} t, \cos t \rangle = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \cdot \cos t dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} 2t dt = \left.\frac{-\cos 2t}{4}\right|_0^{2\pi} = 0$$

Espacio vectorial euclídeo

Bases ortogonales y ortonormales

Teorema 8

Si un sistema de vectores es ortogonal, entonces es linealmente independiente.

Demostración: *Ejercicio*

Corolario 1

En un espacio euclídeo $(\mathcal{V}, <>)$ de dimensión n cualquier sistema ortogonal de n vectores no nulos es una base de $\mathcal{V}$.

Ejemplo En el espacio $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar canónico el sistema

$$\left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

es una base, ya que es ortogonal.

Definición 12 (Sistema ortonormal)

Sea $(\mathcal{V}, <>)$ un espacio vectorial euclídeo. Se dice que un sistema de vectores $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m\} \subset \mathcal{V}$ es **ortonormal** *si es un sistema ortogonal y cada vector $\vec{u}_i$ es unitario.*

Ejemplo En el espacio $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual,

$$\left\{\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}$$

es un sistema ortonormal.

Ejemplo Halla las coordenadas del vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ respecto a la base ortonormal

$$\mathcal{B} = \left\{\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}$$

$$< \vec{v}, \vec{u}_1 > = (1,0,2)\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{3}}, \qquad < \vec{v}, \vec{u}_2 > = (1,0,2)\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{-3}{\sqrt{6}},$$

$$< \vec{v}, \vec{u}_3 > = (1,0,2)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Teorema 9 (Coordenadas en una base ortonormal)

Sea $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base ortonormal del espacio euclídeo $(\mathcal{V}, <>)$. Entonces la representación de cada vector $\vec{v} \in \mathcal{V}$ en la base $\mathcal{B}$ viene dada por

$$\vec{v} = < \vec{v}, \vec{u}_1 > \vec{u}_1 + < \vec{v}, \vec{u}_2 > \vec{u}_2 + \ldots + < \vec{v}, \vec{u}_n > \vec{u}_n$$

- Las coordenadas de un vector $\vec{v}$ en la base ortonormal $\mathcal{B}$ se llaman **coeficientes de Fourier** de $\vec{v}$ respecto a la base $\mathcal{B}$.

Tema 8: Espacios vectoriales euclideos

1. Formas bilineales
2. Producto Escalar.
3. Norma de un vector. Distancias.
   Ángulo entre vectores. Ortogonalidad.
4. Bases ortogonales y ortonormales. Proyección ortogonal.
5. Existencia de bases ortogonales y ortonormales.
   Método de Gram-Schmidt.
6. Diagonalización ortogonal.
7. Formas cuadráticas.

Espacio vectorial euclídeo
Proyección ortogonal

Definición 13 (Proyección ortogonal)

Sean $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *vectores de un espacio euclídeo* $(\mathcal{V}, <\,>)$, *con* $\vec{w} \neq 0$. *La* **proyección ortogonal** *de* $\vec{v}$ *sobre* $\vec{w}$ *viene dado por*

$$proy_{\vec{w}}\vec{v} = \frac{<\vec{v}, \vec{w}>}{<\vec{w}, \vec{w}>}\vec{w}$$

☛ Si $\vec{w}$ es unitario, entonces $<\vec{w}, \vec{w}> = ||\vec{w}||^2 = 1$, y la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ queda

$$proy_{\vec{w}}\vec{v} = <\vec{v}, \vec{w}> \vec{w}$$

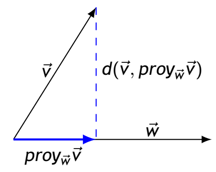
Espacio vectorial euclídeo
Proyección ortogonal

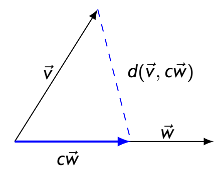
Teorema 10 (Proyección ortogonal y distancia)

Sean $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *vectores de un espacio euclídeo* $(\mathcal{V}, <\,>)$, *con* $\vec{w} \neq 0$. *Entonces*

$$d(\vec{v}, proy_{\vec{w}}\vec{v}) < d(\vec{v}, c\vec{w}), \; c \neq \frac{<\vec{v}, \vec{w}>}{<\vec{w}, \vec{w}>}$$

☛ $proy_{\vec{w}}\vec{v}$ es el múltiplo escalar de $\vec{w}$ más cercano a $\vec{v}$.





Espacio vectorial euclídeo
Proyección ortogonal

Ejemplo Sean $f(x) = 1$ y $g(x) = x$. Usando el producto escalar definido en $\mathcal{C}[0, 1]$, halla la proyección ortogonal de f sobre g.

Solución:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\langle g, g\rangle = ||g||^2 = \int_0^1 g(x)g(x)dx = \int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Luego, la proyección ortogonal de f sobre g es

$$proy_g f = \frac{\langle f, g\rangle}{\langle g, g\rangle}g = \frac{1/2}{1/3}x = \frac{3}{2}x$$

Definición 14 (Proyección ortogonal sobre un subespacio $\mathcal{W}$)

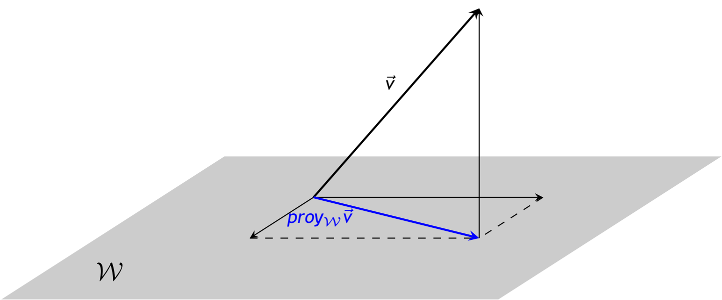
Sea $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_r\}$ *una base ortogonal de un subespacio vectorial* $\mathcal{W}$ *de un espacio euclídeo* $(\mathcal{V}, < >)$. *La* **proyección ortogonal** *de un vector* $\vec{v} \in \mathcal{V}$ *sobre* $\mathcal{W}$, *denotada por* $proy_{\mathcal{W}}\vec{v}$ *viene dada por*

$$proy_{\mathcal{W}}\vec{v} \;=\; \frac{< \vec{v}, \vec{w}_1 >}{< \vec{w}_1, \vec{w}_1 >}\vec{w}_1 + \frac{< \vec{v}, \vec{w}_2 >}{< \vec{w}_2, \vec{w}_2 >}\vec{w}_2 + \cdots + \frac{< \vec{v}, \vec{w}_r >}{< \vec{w}_r, \vec{w}_r >}\vec{w}_r$$

Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}$ *una base ortonormal de un subespacio vectorial* $\mathcal{W}$ *de un espacio euclídeo* $(\mathcal{V}, < >)$. *La* **proyección ortogonal** *de un vector* $\vec{v} \in \mathcal{V}$ *sobre* $\mathcal{W}$, *denotada por* $proy_{\mathcal{W}}\vec{v}$ *viene dada por*

$$proy_{\mathcal{W}}\vec{v} \;= < \vec{v}, \vec{u}_1 > \vec{u}_1 + < \vec{v}, \vec{u}_2 > \vec{u}_2 + \cdots + < \vec{v}, \vec{u}_r > \vec{u}_r$$

Ejemplo



Definición 15 (Complemento ortogonal)

Sea $\mathcal{W}$ *un subespacio vectorial de un espacio euclídeo* $(\mathcal{V}, < >)$. *El* **complemento ortogonal** *de* $\mathcal{W}$, *denotado por* $\mathcal{W}^{\perp}$ *es*

$$\mathcal{W}^{\perp} = \left\{ \vec{x} \in \mathcal{V} \;\middle|\; < \vec{x}, \vec{w} >= 0, \text{ para todo } \vec{w} \in \mathcal{W} \right\}$$

Teorema 11

Sea $\mathcal{W}$ *un subespacio vectorial de un espacio euclídeo* $(\mathcal{V}, < >)$. *Entonces*

1. $\mathcal{W}^{\perp}$ *es subespacio vectorial de* $\mathcal{V}$.
2. $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^{\perp} = \{\vec{0}\}$
3. *Si* $dim\mathcal{V} = n$, *entonces* $dim\mathcal{W}^{\perp} = n - dim\mathcal{W}$.

Teorema 12 (Descomposición ortogonal)

Sea $\mathcal{W}$ *un subespacio vectorial finito de un espacio euclídeo* $(\mathcal{V}, <>)$. *Entonces todo vector* $\vec{v} \in \mathcal{V}$ *tiene una representación única en la forma*

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

donde $\vec{v}_1 \in \mathcal{W}$ *y el vector* $\vec{v}_2$ *es ortogonal a* $\mathcal{W}$.

Los vectores $\vec{v}_1$ *y* $\vec{v}_2$ *vienen determinados por*

- $\vec{v}_1 = \langle \vec{v}, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 + \langle \vec{v}, \vec{u}_2 \rangle \vec{u}_2 + \cdots + \langle \vec{v}, \vec{u}_r \rangle \vec{u}_r = proy_{\mathcal{W}} \vec{v}$

  $proy_{\mathcal{W}} \vec{v}$: **proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\mathcal{W}$**

- $\vec{v}_2 = \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 - \langle \vec{v}, \vec{u}_2 \rangle \vec{u}_2 - \cdots - \langle \vec{v}, \vec{u}_r \rangle \vec{u}_r$

  $\vec{v}_2$: **componente de $\vec{v}$ ortogonal a $\mathcal{W}$**

Ejemplo Sea el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ y el subespacio

$$\mathcal{W} = \mathcal{L}\left(\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix}\right)$$

La **proyección ortogonal** del vector $\vec{v}$ **sobre** el subespacio $\mathcal{W}$ es

$$proy_{\mathcal{W}} \vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 + \langle \vec{v}, \vec{u}_2 \rangle \vec{u}_2 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-\frac{1}{5}) \begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/25 \\ 1 \\ -3/25 \end{pmatrix}$$

La **componente de** $\vec{v}$ **ortogonal a** $\mathcal{W}$ es

$$\vec{v} - proy_{\mathcal{W}} \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4/25 \\ 1 \\ -3/25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21/25 \\ 0 \\ 28/25 \end{pmatrix}$$

Ejercicio En $\mathbb{R}^4$ consideramos el subespacio vectorial $\mathcal{L}$ generado por el sistema de vectores

$$\{\vec{v}_1 = (1, 1, 1, 1)^t,\ \vec{v}_2 = (1, -2, 1, -2)^t,\ \vec{v}_3 = (1, 2, 4, 2)^t\}$$

Definimos el **complemento ortogonal** de $\mathcal{L}$ como el conjunto

$$\mathcal{L}^\perp = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^4 \mid \vec{w} \cdot \vec{v} = 0, \text{ para todo } \vec{v} \in \mathcal{L}\}$$

1. Halla las ecuaciones cartesianas de $\mathcal{L}$.
2. Estudia si $\mathcal{L}^\perp$ es un subespacio vectorial y, en caso afirmativo, halla una base.
3. Dado el vector $\vec{u} = (2, 0, 0, 8)^t$, halla vectores $\vec{v} \in \mathcal{L}$ y $\vec{w} \in \mathcal{L}^\perp$ tales que $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$.

Ejercicio En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios

$$\mathcal{L}_1 = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & = & 0 \\ 2x_2 - x_3 & = & 0 \end{array}\right\}, \quad \mathcal{L}_2 = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + ax_2 + bx_3 = 0 \right\}$$

1. Calcula los valores de a y b para que $\mathcal{L}_1$ sea ortogonal a $\mathcal{L}_2$.
2. Halla una base $\mathcal{B}_1$ de $\mathcal{L}_1$ y otra base $\mathcal{B}_2$ de $\mathcal{L}_2$ tales que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ sea una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Tema 8: Espacios vectoriales euclideos

Tema 8: Espacios euclídeos

1. Formas bilineales
2. Producto Escalar.
3. Norma de un vector. Distancias.
   Ángulo entre vectores. Ortogonalidad.
4. Bases ortogonales y ortonormales. Proyección ortogonal.
5. Existencia de bases ortogonales y ortonormales.
   Método de Gram-Schmidt.
6. Diagonalización ortogonal.
7. Formas cuadráticas.

Espacio vectorial euclídeo

Teorema 13

Todo espacio euclídeo de dimensión finita tiene una base ortonormal.

Demostración:

1. En primer lugar, partiendo de una base cualquiera

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$$

se construye una base ortogonal

$$\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n\}$$

2. A continuación, normalizando los vectores de $\mathcal{B}'$, se forma la base ortonormal

$$\mathcal{B}'' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$$

Este proceso de construcción se conoce como:

Método de ortonormalización de Gram-Schmidt

Espacio vectorial euclídeo

Método de ortonormalización de Gram-Schmidt

Sea $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ una base de un espacio euclídeo $(\mathcal{V}, < >)$.

1. Se forma la base $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n\}$, donde los $\vec{w}_j$ son

$$\begin{aligned}
\vec{w}_1 &= \vec{v}_1 \\
\vec{w}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{<\vec{v}_2, \vec{w}_1>}{<\vec{w}_1, \vec{w}_1>}\vec{w}_1 \\
\vec{w}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{<\vec{v}_3, \vec{w}_1>}{<\vec{w}_1, \vec{w}_1>}\vec{w}_1 - \frac{<\vec{v}_3, \vec{w}_2>}{<\vec{w}_2, \vec{w}_2>}\vec{w}_2 \\
&\vdots \\
\vec{w}_j &= \vec{v}_j - \frac{<\vec{v}_j, \vec{w}_1>}{<\vec{w}_1, \vec{w}_1>}\vec{w}_1 - \frac{<\vec{v}_j, \vec{w}_2>}{<\vec{w}_2, \vec{w}_2>}\vec{w}_2 \cdots - \frac{<\vec{v}_j, \vec{w}_{j-1}>}{<\vec{w}_{j-1}, \vec{w}_{j-1}>}\vec{w}_{j-1} \\
&\vdots \\
\vec{w}_n &= \vec{v}_n - \frac{<\vec{v}_n, \vec{w}_1>}{<\vec{w}_1, \vec{w}_1>}\vec{w}_1 - \frac{<\vec{v}_n, \vec{w}_2>}{<\vec{w}_2, \vec{w}_2>}\vec{w}_2 \ldots - \frac{<\vec{v}_n, \vec{w}_{n-1}>}{<\vec{w}_{n-1}, \vec{w}_{n-1}>}\vec{w}_{n-1}
\end{aligned}$$

$\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n\}$ es una base ortogonal de $\mathcal{V}$.

Espacio vectorial euclídeo

Método de ortonormalización de Gram-Schmidt (cont.)

2. Llamando $\vec{u}_j = \frac{1}{\|\vec{w}_j\|}\vec{w}_j$, $j : 1, \ldots, n$, el conjunto de vectores

$$\mathcal{B}'' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$$

es una base ortonormal de $\mathcal{V}$.

Ejemplo Aplica el Método de ortonormalización de Gram-Schmidt a la siguiente base de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\}$$

Espacio vectorial euclídeo

Existencia de bases ortogonales y ortonormales. Método de Gram-Schmidt

Solución: Formamos la base ortogonal $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{w}_1}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{w}_1}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}\vec{w}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{w}_2}{\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2}\vec{w}_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1/2}{1/2} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Espacio vectorial euclídeo

Existencia de bases ortogonales y ortonormales. Método de Gram-Schmidt

Solución:

$$\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\}$$

Normalizando cada vector de la base $\mathcal{B}'$ obtenemos $\mathcal{B}'' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{w}_1\|}\vec{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\|\vec{w}_2\|}\vec{w}_2 = \frac{1}{1/\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_3 = \frac{1}{\|\vec{w}_3\|}\vec{w}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tema 8: Espacios vectoriales euclideos

Tema 8: Espacios euclídeos

1. Formas bilineales
2. Producto Escalar.
3. Norma de un vector. Distancias.
   Ángulo entre vectores. Ortogonalidad.
4. Bases ortogonales y ortonormales. Proyección ortogonal.
5. Existencia de bases ortogonales y ortonormales.
   Método de Gram-Schmidt.
6. Diagonalización ortogonal.
7. Formas cuadráticas.

Diagonalización ortogonal

Definición 16 (Matriz ortogonal)

*Se dice que una matriz Q es **ortogonal** si $Q^tQ = \mathcal{I}$. Es decir,*

$$Q^t = Q^{-1}$$

Ejemplo

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Diagonalización ortogonal

Teorema 14

Sea $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^n$ y sea P la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}$ a la base canónica $\mathcal{C}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base ortonormal si, y sólo si, P es una matriz ortogonal.

Ejemplo

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

es la matriz del cambio de la base ortonormal

$$\mathcal{B} = \{\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

a la base canónica.

Diagonalización ortogonal

Definición 17

*Se dice que una matriz A es **diagonalizable ortogonalmente** si existe una matriz ortogonal P tal que $P^tAP = D$.*

Ejemplo Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

La matriz A es diagonalizable ortogonalmente, ya que

$$P^tAP = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Diagonalización ortogonal

Teorema 15

Sea A una matriz de orden n. Son equivalentes:

1. *A es diagonalizable ortogonalmente.*
2. *A tiene un sistema de n vectores propios ortonormales.*

Demostración: (1) $\Longrightarrow$ (2)

- ✓ La matriz A es diagonalizable ortogonalmente si, y sólo si, existe una matriz ortogonal P tal que $P^tAP = D$ diagonal.
- ✓ Los vectores columnas de P son los vectores propios de A.
- ✓ Al ser P ortogonal, estos vectores columna son ortonormales.
- ✓ Por lo tanto, A tiene n vectores propios ortonormales.

Diagonalización ortogonal

1. A es diagonalizable ortogonalmente.
2. A tiene un sistema de n vectores propios ortonormales.

Demostración: (2) $\Longrightarrow$ (1)

- ✓ Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ el sistema ortonormal de vectores propios de la matriz A.
- ✓ Este sistema de vectores propios nos asegura que la matriz A es diagonalizable.
- ✓ Por otra parte, que el sistema de vectores propios sea ortonormal hace que la matriz de cambio de base P sea ortogonal.

Diagonalización ortogonal

Teorema 16

Si una matriz A es diagonalizable ortogonalmente, entonces es simétrica.

Demostración:

✓ Por definición, A es diagonalizable ortogonalmente si existe una matriz ortogonal P tal que $P^tAP = D$.

✓ $P^tAP = P^{-1}AP = D \implies A = PDP^{-1} = PDP^t$

✓ Luego, $A^t = (PDP^t)^t = PDP^t = A$.

Diagonalización ortogonal

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Valores propios

$\lambda_1 = 2,\ \alpha_1 = 2$

$\lambda_2 = 5,\ \alpha_2 = 1$

Los **subespacios propios** son:

$$\mathcal{U}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\} = \mathcal{L}\left[\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\mathcal{U}_8 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-z=0 \wedge y-z=0\} = \mathcal{L}\left[\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

Diagonalización ortogonal

Ejemplo (cont.)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Base de vectores propios de A

$$\left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

- Podemos observar que $\vec{v}_3$ es ortogonal a $\vec{v}_1$ y a $\vec{v}_2$; pero $\vec{v}_1$ **no** es ortogonal a $\vec{v}_2$.
- Ortogonalizando la base de $\mathcal{U}_2$, obtenemos la base
$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
- Ahora, la base de vectores propios $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{v}_3\}$ ya es ortogonal.
- Normalizando nos queda una base de vectores propios ortonormal.

Diagonalización ortogonal

Ejemplo (cont.)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Base de vectores propios ortogonales de A

$$\left\{\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Normalizando nos queda una base de vectores propios ortonormal

$$\left\{\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Diagonalización ortogonal

Ejemplo (cont.) Así, obtenemos la diagonalización ortogonal de la matriz simétrica A,

$$D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}=P^tAP=P^t\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}P$$

donde P es la matriz ortogonal siguiente

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

Diagonalización ortogonal

- En este ejemplo ha sido decisivo que el vector propio $\vec{v}_3$ correspondiente al valor propio $\lambda_2=5$ fuese **ortogonal** a los vectores propios $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ correspondientes a $\lambda_1=2$.
- El siguiente teorema muestra que esta **ortogonalidad** no es casual, sino que es una consecuencia de la **simetría** de A.

Teorema 17

Si una matriz A es simétrica, entonces los vectores propios que pertenecen a subespacios propios distintos son ortogonales.

Demostración: Sean $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ vectores propios asociados a los valores propios distintos λ_1,λ_2. Veamos que son ortogonales.

$$\begin{array}{lllllll} A\vec{v}_1 & = & \lambda_1\vec{v}_1 & \Longrightarrow & \vec{v}_2^tA\vec{v}_1 & = & \vec{v}_2^t\lambda_1\vec{v}_1 \Longrightarrow \vec{v}_1^tA\vec{v}_2 = \vec{v}_1^t\lambda_1\vec{v}_2\\ A\vec{v}_2 & = & \lambda_2\vec{v}_2 & \Longrightarrow & \vec{v}_1^tA\vec{v}_2 & = & \vec{v}_1^t\lambda_2\vec{v}_2\end{array}$$

De aquí, $\vec{v}_1^t\lambda_1\vec{v}_2=\vec{v}_1^t\lambda_2\vec{v}_2 \Longrightarrow \vec{v}_1^t(\lambda_1-\lambda_2)\vec{v}_2=0 \Longrightarrow \vec{v}_1^t\vec{v}_2=0$

Diagonalización ortogonal

Teorema 18

Sea $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Entonces:

1. *A sólo tiene valores propios reales.*
2. *Si un valor propio λ tiene orden de multiplicidad k, la dimensión del subespacio propio $\mathcal{U}_\lambda$ es k.*

Conclusión:

Toda matriz simétrica $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable ortogonalmente.

Diagonalización ortogonal

Procedimiento para diagonalizar ortogonalmente una matriz simétrica A

1. Se encuentra una base para cada subespacio propio de A.
2. Se aplica el proceso de Gram-Schmidt a cada una de estas bases para obtener una base ortonormal de cada subespacio propio.
3. Se forma una matriz P cuyas columnas son los vectores de las bases ortonormales obtenidas.

   Esta matriz diagonaliza ortogonalmente a la matriz A.

$$P^tAP=D$$

Diagonalización ortogonal

Ejemplo Diagonaliza ortogonalmente la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

1. Se encuentra una base para cada subespacio propio de A.
   - Los valores propios son $\begin{cases} \lambda_1 = 2, & \alpha_1 = 2 \\ \lambda_2 = 8, & \alpha_2 = 1 \end{cases}$
   - Los subespacios propios son:

$$\mathcal{U}_2 = \mathcal{L}\left[\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \qquad \mathcal{U}_8 = \mathcal{L}\left[\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

Diagonalización ortogonal

2. Se aplica el proceso de Gram-Schmidt a cada una de estas bases para obtener una base ortonormal de cada subespacio propio.

$$\mathcal{U}_2 = \mathcal{L}\left[\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \qquad \mathcal{U}_8 = \mathcal{L}\left[\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

3. Se forma una matriz P cuyas columnas son los vectores de las bases ortonormales obtenidas.

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar que, efectívamente, $P^tAP = D = diag(2, 2, 8)$

Diagonalización ortogonal

Ejercicio Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -7 & 2 & -3 & -2 \\ -5 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Estudia si A es diagonalizable.
2. En caso afirmativo, halla una matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.
3. Justifica si es posible encontrar una matriz ortogonal Q tal que Q^tAQ sea diagonal.

Diagonalización ortogonal

Ejercicio Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Halla una matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.
2. Halla una matriz Q tal que Q^tAQ sea diagonal.

Ejercicio Diagonaliza las matrices simétricas siguientes, calculando una matriz de paso ortogonal:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tema 8: Espacios vectoriales euclideos

Tema 8: Espacios euclídeos

1. Formas bilineales
2. Producto Escalar.
3. Norma de un vector. Distancias.
   Ángulo entre vectores. Ortogonalidad.
4. Bases ortogonales y ortonormales. Proyección ortogonal.
5. Existencia de bases ortogonales y ortonormales.
   Método de Gram-Schmidt.
6. Diagonalización ortogonal.
7. Formas cuadráticas.

Formas cuadráticas

Definición 18

Se llama ***forma cuadrática*** *generada por la forma bilineal simétrica*

$$\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

a la aplicación $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definida:* $\Phi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}, \vec{x})$, *para todo* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

- Si $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ viene dada por $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^t A \vec{y}$, la forma cuadrática queda determinada por $\Phi(\vec{x}) = \vec{x}^t A \vec{x}$

Ejemplo Sea la forma bilineal $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^t A \vec{y}$, donde $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. La forma cuadrática generada por φ es

$$\Phi(\vec{x}) = \vec{x}^t A \vec{x} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2$$

Formas cuadráticas

El desarrollo de una forma cuadrática $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en términos de las variables $x_1, \ldots, x_n$ corresponde a un polinomio homogéneo de grado 2,

$$\sum_{ij} p_{ij} x_i x_j$$

Si $A = (a_{ij})$ es la matriz simétrica asociada a la forma cuadrática Φ entonces

a_{ii} coincide con el coeficiente p_{ii} del término x_i^2 y
$a_{ij} + a_{ji}$ coincide con el coeficiente p_{ij} del término $x_i x_j$

Luego, para que la matriz simétrica A represente a la forma cuadrática Φ se debe cumplir

$$a_{ii} = p_{ii}$$
$$a_{ij} = a_{ji} = \tfrac{1}{2} p_{ij}$$

Formas cuadráticas

Ejemplo Dada la forma cuadrática $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida

$$\Phi(\vec{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$$

exprésala en forma matricial mediante una matriz simétrica $A = (a_{ij})$

Solución:

$$\begin{array}{rclrclcl} a_{11} & = & 1; & a_{12} & = & a_{21} & = & -4/2 \\ a_{22} & = & 5; & a_{23} & = & a_{32} & = & 6/2 \\ a_{33} & = & -1; & a_{31} & = & a_{13} & = & 4/2 \end{array}$$

$$\Phi(\vec{x}) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Formas cuadráticas
Expresión canónica de una forma cuadrática

Sea la forma cuadrática $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\Phi(\vec{x}) = (x_1, \dots, x_n)\ A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Reducirla a su ***expresión canónica*** es encontrar una base $\mathcal{B}'$ respecto a la que la matriz asociada sea diagonal

$$\Phi(\vec{x}) = (x'_1, \dots, x'_n)_{\mathcal{B}'}\ D \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \text{, con } D \text{ diagonal}$$

Así,

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i {x'}_i^2$$

Formas cuadráticas
Expresión canónica de una forma cuadrática

- Teniendo en cuenta que la matriz asociada a la forma cuadrática es simétrica, podemos asegurar que existe una base ortonormal $\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$, tal que la matriz que representa a la forma cuadrática en dicha base es diagonal.
- Como hemos estudiado, esta base $\mathcal{B}'$ estará formada por los vectores propios ortonormalizados y la matriz de paso P es ortogonal.
- De esta manera, tendremos que

$$P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} \implies \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = P^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

Formas cuadráticas
Expresión canónica de una forma cuadrática

- Desarrollando:

$$\begin{cases} x'_1 &= c_{11}x_1 &+ & \dots & c_{1n}x_n \\ \vdots & & & & \\ x'_i &= c_{i1}x_1 &+ & \dots & c_{in}x_n \\ \vdots & & & & \\ x'_n &= c_{n1}x_1 &+ & \dots & c_{nn}x_n \end{cases}$$

- Por tanto, respecto a la base ortonormal $\mathcal{B}'$ de vectores propios, la forma cuadrática se puede expresar

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (c_{i1}x_1 + \dots + c_{in}x_n)^2$$

Esta es la ***expresión canónica*** de la forma cuadrática Φ

Formas cuadráticas
Expresión canónica de una forma cuadrática

Ejemplo Expresa en forma canónica la forma cuadrática

$$\Phi(\vec{x}) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3$$

Solución: La matriz asociada a la forma cuadrática es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Los valores propios de A son: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = \sqrt{2}$; $\lambda_3 = -\sqrt{2}$
- Los vectores propios son: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- La base de vectores propios $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es ortogonal (¿Por qué?)

Solución(cont.): Normalizando los vectores de la base ortogonal $\mathcal{B}$ se obtiene la base ortonormal

$$\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \ \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \ \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\}$$

La matriz de paso P de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{C}$ es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Solución(cont.): El cambio de base viene dado por

$$P\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} \implies \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = P^t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

Así,

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 \\ x'_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ x'_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

Por lo tanto, respecto a la base ortonormal $\mathcal{B}'$ de vectores propios, la forma cuadrática se puede expresar

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{x}) &= \sqrt{2}x'^2_2 - \sqrt{2}x'^2_3 \\ &= \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 - \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2\end{aligned}$$

Ejercicio Halla la expresión canónica de cada una de las formas cuadráticas

1. $\Phi_1(\vec{x}) = 4x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 4xz - 8yz$
2. $\Phi_2(\vec{x}) = 3x^2 + 6y^2 + 3z^2 - 4xy - 8xz - 4yz$
3. $\Phi_3(\vec{x}) = 2x^2 - 10xy - 8xz - 7y^2 - 10yz + 2z^2$

Ejercicio En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida:

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = 4x_1y_1 + 2y_1x_3 + 6x_2y_2 + 2x_1y_3 + 4x_3y_3$$

1. Estudia si es un producto escalar.
2. En caso afirmativo, halla una base ortonormal a partir de la base canónica.
3. Determina la forma cuadrática generada por φ y halla su expresión canónica.

Definición 19

Sea $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática $\Phi(\vec{x}) = \vec{x}^t A\vec{x}$, con A simétrica. Se dice que la forma cuadrática o que la matriz simétrica es:

1. ***definida positiva** si $\Phi(\vec{x}) = \vec{x}^t A\vec{x} > 0$, para todo $\vec{0} \neq \vec{x} \in \mathbb{R}^n$*
2. ***definida negativa** si $\Phi(\vec{x}) = \vec{x}^t A\vec{x} < 0$, para todo $\vec{0} \neq \vec{x} \in \mathbb{R}^n$*
3. ***semidefinida positiva** si $\Phi(\vec{x}) = \vec{x}^t A\vec{x} \geq 0$, para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$*
4. ***semidefinida negativa** si $\Phi(\vec{x}) = \vec{x}^t A\vec{x} \leq 0$, para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$*
5. ***indefinida** si existen $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ no nulos, tales que $\Phi(\vec{x}) = \vec{x}^t A\vec{x} > 0$ y $\Phi(\vec{y}) = \vec{y}^t A\vec{y} < 0$*

Ejemplo La función $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\Phi(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 5x_3^2$$

es una forma cuadrática semidefinida positiva, ya que para todo $\vec{0} \neq \vec{x} \in \mathbb{R}^2$

$$\Phi(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 5x_3^2 = (x_1 - x_2)^2 + 5x_3^2 \geq 0$$

Por lo tanto, para todo $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$, con $x_1 = x_2$ y $x_3 = 0$,

$$\Phi(\vec{x}) = 0$$

Por ejemplo, para $\vec{x} = (7, 7, 0)^t$,

$$\Phi(\vec{x}) = 0$$

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

llamaremos A_k a las submatrices:

$$A_1 = (a_{11}),\ A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ \dots, A_n = A$$

Teorema 19 (Matriz definida positiva)

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Son equivalentes:

1. *Para todo $\vec{0} \neq \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x}^t A\vec{x} > 0$*
2. *Todos los pivotes (sin intercambio de filas) son mayores que cero.*
3. *Todos los valores propios de A son mayores que cero.*
4. *Para cualquier submatriz A_k, se verifica $det(A_k) > 0$, $k : 1, 2, ..., n$. (Todos los menores principales son positivos)*

Ejemplo $\Phi(\vec{x}) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Teorema 20 (Matriz definida negativa)

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *una matriz simétrica. Son equivalentes:*

1. *Para todo vector* $\vec{0} \neq \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{x}^t A \vec{x} < 0$
2. *Todos los pivotes (sin intercambio de filas) son menores que cero.*
3. *Todos los valores propios de* A *son menores que cero.*
4. *Para cualquier submatriz* A_k, *se verifica* $(-1)^k det(A_k) > 0$, $k : 1, 2, \ldots, n$.

Ejemplo $\Phi(\vec{x}) = -2x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Teorema 21 (Matriz semidefinida positiva)

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *una matriz simétrica. Son equivalentes:*

1. *Para todo vector* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{x}^t A \vec{x} \geq 0$.
2. *Todos los pivotes son mayores o iguales a cero.*
3. *Todos los valores propios de* A *son mayores o iguales a cero.*
4. *Para cualquier submatriz* A_k, *se verifica* $det(A_k) \geq 0, \quad k : 1, 2, \ldots, n$. *(Todos los menores principales son positivos o se anulan y el último vale cero)*

Ejemplo $\Phi(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 5x_3^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Teorema 22 (Matriz semidefinida negativa)

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *una matriz simétrica. Son equivalentes:*

1. *Para todo vector* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{x}^t A \vec{x} \leq 0$.
2. *Todos los pivotes son menores o iguales a cero.*
3. *Todos los valores propios de* A *son menores o iguales a cero.*
4. *Para cualquier submatriz* A_k, *se verifica* $(-1)^k det(A_k) \geq 0$, $k : 1, 2, \ldots, n$. *(Los menores principales alternan el signo, empezando por negativo y el último vale cero)*

Ejemplo $\Phi(\vec{x}) = -3x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2 - x_3^2$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Teorema 23 (Matriz indefinida)

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *una matriz simétrica.*

1. A *es indefinida si, y sólo si, existen valores propios* λ_1 *y* λ_2 *tales que* $\lambda_1 > 0$ *y* $\lambda_2 < 0$.
2. *Si existe* k *tal que* $det(A_k) < 0$ *y* $det(A_{k+1}) < 0$, *la matriz* A *es indefinida.*

Ejemplo $\Phi(\vec{x}) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 - x_3^2$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Formas cuadráticas

Criterios de clasificación de formas cuadráticas

Ejercicio Clasifica las siguientes matrices simétricas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Formas cuadráticas

Criterios de clasificación de formas cuadráticas

Teorema 24 (Criterio del polinomio característico)

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *una matriz simétrica con polinomio característico*

$$p_A(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \cdots + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_n\lambda^n, \quad c_n = (-1)^n$$

1. A *es definida positiva si, y sólo si, para todo* i, $c_i \neq 0$ *y los coeficientes tienen signos alternos.*
2. A *es definida negativa si, y sólo si, para todo* i, $c_i \neq 0$ *y todos los coeficientes tienen el mismo signo.*
3. A *es semidefinida positiva si, y sólo si, existe* $r < n$ *tal que* $c_0 = \ldots = c_r = 0$ *y los demás coeficientes tienen signos alternos.*
4. A *es semidefinida negativa si, y sólo si, existe* $r < n$ *tal que* $c_0 = \ldots = c_r = 0$ *y los demás coeficientes tienen el mismo signo.*
5. *En cualquier otro caso,* A *es indefinida.*

Formas cuadráticas

Criterios de clasificación de formas cuadráticas

Ejercicio Clasifica las siguientes matrices simétricas usando el criterio del polinomio característico:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tema 8: Espacios euclídeos

Bibliografía

Algebra lineal J. de Burgos (Ed. McGraw Hill)

Algebra lineal J.B. Fraleigh y R.A. Beauregard (Ed. Addison Wesley)

Algebra lineal con aplicaciones y Mathlab
B. Kolman y D. Hill (Ed. Prentice Hall)

Algebra lineal R. Larson, B.H. Edwards y D.C. Falvo (Ed. Pirámide)

Algebra lineal con aplicaciones G. Nakos y D. Joyner (Ed. Thomson)

Algebra lineal y sus aplicaciones G. Strang (Ed. Addison Wesley)

Problemas de Álgebra
A. de la Villa (Librería I.C.A.I. Univ. Pontifícia de Comillas)