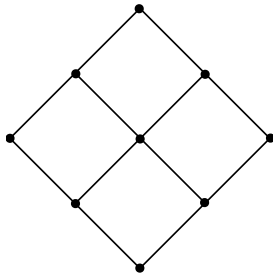


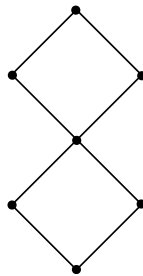
Estructuras Algebraicas para la Computación

Relación de Ejercicios 2.1

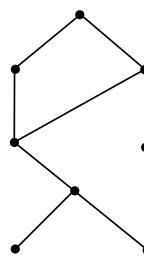
1. En los siguientes apartados determina si el diagrama de Hasse representa un retículo ordenado



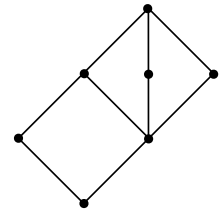
(a)



(b)



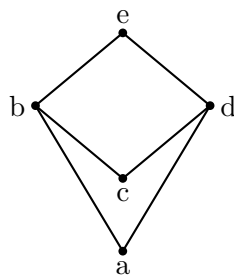
(c)



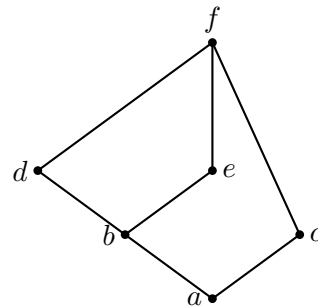
(d)

En caso afirmativo, estudia si es complementado y si es distributivo.

2. Justifica por qué no es **retículo** el conjunto parcialmente ordenado (A, \preceq)



(A, \preceq)



(\mathcal{M}, \preceq)

3. Justifica por qué no es distributivo el retículo (\mathcal{M}, \preceq) y estudia si es complementado.

4. Da ejemplos (si existen) de:

- Un **conjunto parcialmente ordenado** que no sea **retículo ordenado**.
- Un **retículo acotado** que no sea finito.
- Un **retículo distributivo** que no sea complementado.
- Un **retículo complementado** que no sea distributivo.
- Un álgebra de Boole con 24 elementos.

5. Sea D_{60} el conjunto de todos los divisores de 60 con la relación divisibilidad

- Dibuja su diagrama de Hasse.
- Da una lista de los átomos y otra lista de los elementos \sqcup -irreducibles de D_{60} .
- Expresa 60, 12 y 20 mediante elementos \sqcup -irreducibles (en más de una forma si es posible).
- Determina los elementos que tienen complemento.

6. Se considera el retículo $(D_n, |)$ con $n = p_1^1 \cdot p_2^1 \cdots p_k^1$, donde cada $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ son primos. Estudia si es posible definir una función

$$\begin{array}{ccc} \bar{\cdot}: & D_n & \longrightarrow D_n \\ & x & \longmapsto \bar{x} \end{array}$$

tal que $m.c.d.(x, \bar{x}) = 1$ y $m.c.m.(x, \bar{x}) = n$.

7. En el conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B})$ de las funciones de \mathbb{B}^2 en \mathbb{B} se considera la relación \preceq definida:

$$f \preceq g \iff f(x) \leq g(x) \text{ para cada } x \in \mathbb{B}^2$$

- Dibuja el diagrama de Hasse de $(\mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B}), \preceq)$.
- Señala los átomos y superátomos.
- Estudia si es posible definir una función

$$\begin{array}{ccc} -: & \mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B}) & \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B}) \\ & f & \longmapsto g \end{array}$$

tal que $(f+g)(x) = 1$ y $(f \bullet g)(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{B}^2$.

- Justifica si $\mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B})$ es un álgebra de Boole.

8. En un álgebra de Boole \mathcal{A} se define la operación \oplus (xor) de la siguiente manera: $a \oplus b = a\bar{b} + \bar{a}b$.

- Determina $a \oplus a$, $a \oplus 0$, $a \oplus 1$ y $a \oplus \bar{a}$.
- Demuestra o refuta cada una de las siguientes afirmaciones

- | | |
|---|--|
| <i>i)</i> $a \oplus b = 0 \Rightarrow a = b$ | <i>ii)</i> $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ |
| <i>iii)</i> $a \oplus b = \bar{a} \oplus \bar{b}$ | <i>iv)</i> $a \oplus bc = (a \oplus b)(a \oplus c)$ |
| <i>v)</i> $a(b \oplus c) = ab \oplus ac$ | <i>vi)</i> $\overline{a \oplus b} = \bar{a} \oplus b = a \oplus \bar{b}$ |
| <i>vii)</i> $a \oplus b = a \oplus c \Rightarrow b = c$ | |

9. Encuentra un conjunto S tal que $\mathcal{P}(S)$ y \mathbb{B}^5 sean isomorfos como álgebras de Boole.

10. Sea el conjunto $A = \{a, b, c\}$. Estudia si es posible definir un isomorfismo $\phi: D_{105} \rightarrow \mathcal{P}(A)$.

En caso afirmativo, halla $\phi(35)$ y $\phi(21)$.

11. Se consideran las álgebras de Boole $\mathcal{A}_1 = D_{2310}$ y $\mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(\{a, b, c, d, e\})$ y se define la función $f: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ del siguiente modo:

$$f(2) = \{a\} \quad f(3) = \{b\} \quad f(5) = \{c\} \quad f(7) = \{d\} \quad f(11) = \{e\}$$

- Expresa, si es posible, los elementos 110, 210 y 330 en función de **átomos** y **superátomos**.
- Determina cuáles deben ser las imágenes de $f(35)$, $f(110)$, $f(210)$ y $f(330)$ para que f sea isomorfismo de álgebras de Boole.
- Estudia si se puede definir otra función $g: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ que también sea **isomorfismo de álgebras de Boole**.
- En caso afirmativo, determina $g(110)$, $g(210)$ y $g(330)$.
- ¿Cuántos isomorfismos diferentes se pueden definir entre \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 ?

12. a) Da ejemplos de retículos no distributivos.
 b) Usa alguno de estos ejemplos para probar que no todo elemento tiene complemento y, en caso de tenerlo, no tiene por qué ser único.
 c) Demuestra que en todo retículo distributivo si el complemento existe, es único.

13. Demuestra o refuta:

- a) Todo conjunto ordenado es un retículo.
 b) Si \mathcal{L} es un retículo finito, entonces es acotado.
 c) Si \mathcal{L} es un retículo complementado, entonces es un álgebra de Boole.
 d) Si \mathcal{A} es un álgebra de Boole y $a, b, c \in \mathcal{A}$ son tales que $a + b = a + c$, entonces $b = c$.
 e) Existe $n \in \mathbb{N}_{250}$ tal que D_n y $\mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B})$ son isomorfos como álgebras de Boole.
 f) En el álgebra de Boole $(D_{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}, +, \cdot)$ se verifica

$$\overline{(x \cdot 3)} \cdot (77 + 3) = 231\bar{x} + 77$$

- g) En el álgebra de Boole $(D_{210}, +, \cdot)$ se verifica

$$\overline{(x \cdot 3)} \cdot (35 + 3) = 105\bar{x} + 35$$

14. a) Define una función booleana de \mathbb{B}^3 en \mathbb{B} y halla su forma normal disyuntiva.
 b) Halla la forma normal disyuntiva de la función booleana $F : \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{B}$ dada en forma conjuntiva

$$F(x, y, z) = (x + y + z)(x + y + \bar{z})(x + \bar{y} + \bar{z})$$

15. Encuentra los valores de w, x, y, z que satisfacen el siguiente sistema

$$\begin{array}{rcl} x & + & \bar{x}y & = & 0 \\ \bar{x}y & & & = & \bar{x}z \\ \bar{x}y & + & \bar{x}\bar{z} & + & zw & = & \bar{z}w \end{array}$$