Tema 4: Teoría de Grafos

Mariam Cobalea

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Tema 4: Teoría de Grafos

Tema 4: Teoría de Grafos

4.4 Isomorfismo de grafos

Definición

Se dice que dos grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ *y* $G_2 = (V_2, E_2)$ *son* ***isomorfos*** *si existe una función biyectiva* $\phi\colon V_1 \to V_2$ *tal que*

$$\forall u, v \in V_1,\ \{u, v\} \in E_1 \iff \{\phi(u), \phi(v)\} \in E_2$$

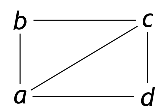
Esta función ϕ *se llama* ***isomorfismo de grafos***.

En otras palabras, dos grafos son isomorfos si entre sus vértices existe una función biyectiva que conserva las adyacencias en los dos sentidos.

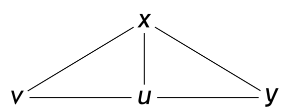
Matricialmente, esto significa que existe una reordenación de los vértices de G_1 y G_2 de manera que las matrices de adyacencia, según estas reordenaciones, son exactamente iguales.

4.4 Isomorfismos de grafos

Ejemplo 1 Son grafos isomorfos



$G_1(V_1, E_1)$



$G_2(V_2, E_2)$

ya que podemos establecer una biyección $\phi\colon V_1 \to V_2$ que conserva las adyacencias

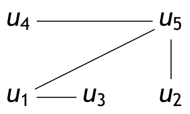
$$\begin{array}{ccccc} \phi & : & V_1 & \to & V_2 \\ & & a & \mapsto & u \\ & & b & \mapsto & v \\ & & c & \mapsto & x \\ & & d & \mapsto & y \end{array} \qquad \left\{ \begin{array}{rlcl} (i) & \{a,b\} \in E_1 & \iff & \{\phi(a) = u, \phi(b) = v\} \in E_2 \\ (ii) & \{a,c\} \in E_1 & \iff & \{\phi(a) = u, \phi(c) = x\} \in E_2 \\ (iii) & \{a,d\} \in E_1 & \iff & \{\phi(a) = u, \phi(d) = y\} \in E_2 \\ (iv) & \{b,c\} \in E_1 & \iff & \{\phi(b) = v, \phi(c) = x\} \in E_2 \\ (v) & \{c,d\} \in E_1 & \iff & \{\phi(c) = x, \phi(d) = y\} \in E_2 \end{array} \right.$$

4.4 Isomorfismos de grafos

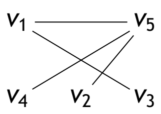
- La relación de isomorfía entre grafos es una relación de equivalencia.
- Cada clase de equivalencia definida por esta relación es un conjunto de grafos isomorfos al que llamaremos ***grafo no etiquetado***.

4.4 Isomorfismos de grafos

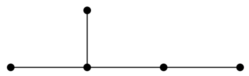
Ejemplo 2 Los grafos G_1 y G_2 de la siguiente figura son isomorfos; basta tomar la función dada por $\phi(u_i) = v_i$. Ambos, como grafos isomorfos, pertenecen a la clase representada por un grafo no etiquetado que podemos dibujar, por ejemplo, como G_3.



Grafo G_1



Grafo G_2



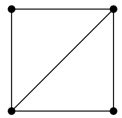
Grafo G_3

4.4 Isomorfismos de grafos

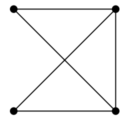
- Verificar que dos grafos son isomorfos o no lo son puede ser un problema difícil.
- Para la resolución de este problema se suelen buscar datos necesariamente comunes a todos los grafos de una clase de (equivalencia) isomorfía.
- A estos datos se les llama ***invariantes*** de un grafo.
- Son invariantes de un grafo
  1. su número de vértices: $|V|$,
  2. su número de aristas: $|E|$,
  3. la lista de grados de los vértices, $\delta(v)$, para los $v \in V$.
  4. ...

4.4 Isomorfismos de grafos

Ejercicio Comprueba que son isomorfos los grafos G_1 y G_2.

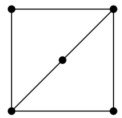


Grafo G_1

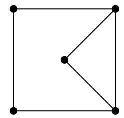


Grafo G_2

Ejercicio Comprueba que no son isomorfos los grafos H_1 y H_2.



Grafo H_1



Grafo H_2

Isomorfismos de grafos (Caminos e Isomorfismos)

Ejemplo Estudia si son isomorfos o no los grafos siguientes

Grafo G_1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	2	3	4	1	5	6	3
6	3	4	5	7	7	6		
		9			8			

Grafo G_2

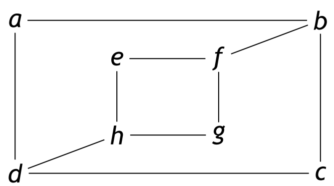
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	4	3	2	1	3	9	8
6	5	7	7	6	2	4		
	6				5			

Solución

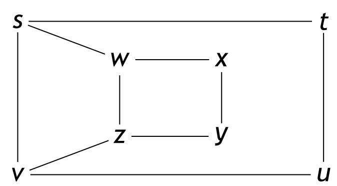
- Ambos grafos tienen la misma lista de grados $(3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1)$
- Pero el grafo G_1 es conexo y el grafo G_2 tiene tres componentes conexas de vértices respectivos $\{1, 2, 5, 6\}, \{3, 4, 7\}, \{8, 9\}$.

4.4 Isomorfismos de grafos

Ejercicio Estudia si son isomorfos los siguientes grafos



Grafo G_1



Grafo G_2

Solución:

✓ Ambos grafos tienen: 8 vértices y 10 aristas; 4 vértices de grado 2 y 4 vértices de grado 3.

✓ Como estos invariantes coinciden, podemos pensar que son isomorfos.

4.4 Isomorfismos de grafos

Solución: (cont.)

✓ Sin embargo **no** son isomorfos.

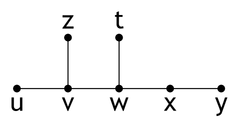
✓ Para comprobarlo, se debe observar que cualquier isomorfismo de G_1 en G_2 debe hacer corresponder al vértice a de G_1 un vértice de G_2 que tenga el mismo grado que a.

✓ Ya que $\delta(a) = 2$, al vértice a debe corresponderle uno de los vértices t, u, x, y, que son los vértices de grado 2 del grafo G_2.

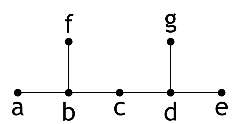
✓ Pero cada uno de estos cuatro vértices es adyacente a otro vértice de grado 2 de G_2, lo que **no** es cierto para el vértice a de G_1.

4.4 Isomorfismos de grafos

Ejercicio Estudia si son isomorfos los siguientes grafos



Grafo G_1

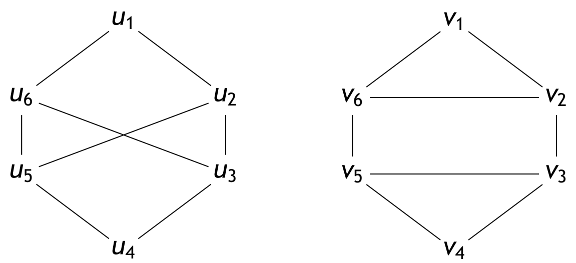


Grafo G_2

- Estudiar el número de caminos y circuitos nos puede ayudar a determinar si dos grafos son isomorfos o no.
- Por ejemplo, la existencia de un circuito de una longitud concreta es un invariante útil que se puede usar para mostrar que dos grafos no son isomorfos.
- Además podemos utilizar los caminos a la hora de construir posibles isomorfismos.

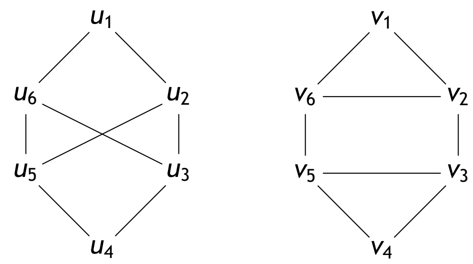
El próximo ejemplo ilustra cómo se puede utilizar la existencia de un circuito para demostrar que dos grafos no son isomorfos.

Ejercicio Determina si son isomorfos o no los grafos siguientes:



Grafo G Grafo H

Solución: Grafo G Grafo H

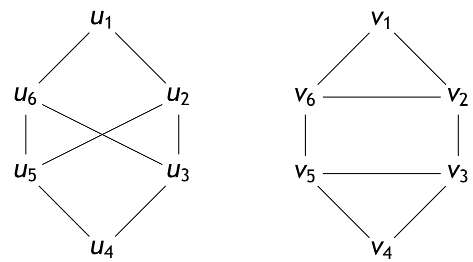


✓ Tanto G como H tienen 6 vértices y 8 aristas.

✓ Ambos tienen 4 vértices de grado 3 y 2 vértices de grado 2.

✓ Por tanto, en los dos grafos coinciden tres invariantes: número de vértices, número de aristas y grados de los vértices.

Solución: Grafo G Grafo H



✓ Sin embargo, H contiene un ciclo de longitud 3: v_1, v_2, v_6, v_1, mientras que G **no** contiene ningún ciclo de longitud 3 (se puede comprobar fácilmente que todos los ciclos de G tienen longitud ≥ 4).

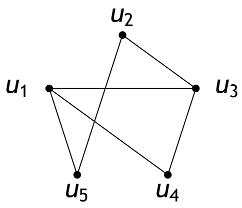
✓ Como la existencia de un ciclo de longitud 3 es un invariante bajo isomorfismo, G y H **no** son isomorfos.

Isomorfismos de grafos

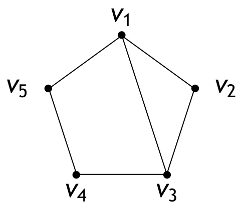
Caminos e Isomorfismos

En el siguiente ejemplo se usan los caminos para encontrar funciones que sean posibles isomorfismos.

Ejemplo Determina si los grafos G y H son isomorfos o no.



G



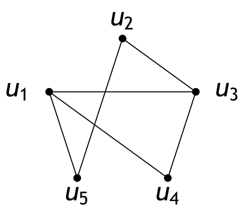
H

Isomorfismos de grafos

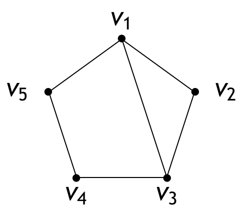
Caminos e Isomorfismos

Solución:

G



H



- ✓ Tanto G como H tienen 5 vértices y 6 aristas,
- ✓ ambos tienen dos vértices de grado 3 y tres vértices de grado 2 y
- ✓ ambos contienen un ciclo de longitud 3, un ciclo de longitud 4 y un ciclo de longitud 5.
- ✓ Como todos estos invariantes coinciden, G y H pueden ser isomorfos.

Isomorfismos de grafos

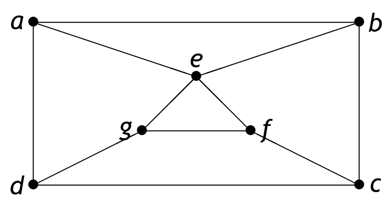
Caminos e Isomorfismos

Solución: (cont.)

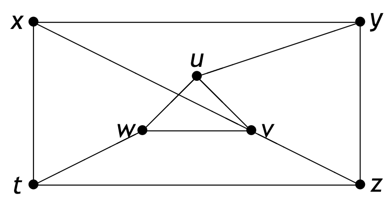
- ✓ Para hallar un posible isomorfismo, podemos trazar caminos que pasen por **todos** los vértices, de manera que los vértices correspondientes tengan los **mismos** grados en los dos grafos.
- ✓ Por ejemplo, los caminos u_1, u_4, u_3, u_2, u_5 en G y v_3, v_2, v_1, v_5, v_4 en H pasan por todos los vértices del grafo, empiezan en un vértice de grado 3, pasan por vértices de grados 2, 3 y 2, respectivamente, y acaban en un vértice de grado 2.
- ✓ Siguiendo estos caminos, definimos la función $\phi \colon V_G \to V_H$
  $\phi(u_1) = v_3, \quad \phi(u_4) = v_2, \quad \phi(u_3) = v_1, \quad \phi(u_2) = v_5$ y $\phi(u_5) = v_4$.
- ✓ Se puede demostrar que ϕ es un isomorfismo de grafos entre G y H comprobando que conserva las adyacencias o bien comprobando que, para ordenaciones adecuadas de los vértices, las matrices de adyacencia de G y de H coinciden.

Isomorfismos de grafos

Ejercicio Estudia si los siguientes grafos son isomorfos:



G_1



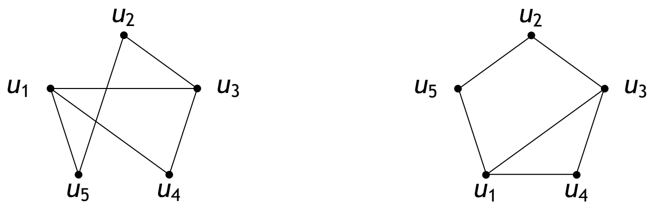
G_2

4.5 Planaridad

Definición

Se dice que un grafo es **plano** *si puede dibujarse en el plano sin que se corten ningún par de aristas. (Por* corte de aristas *se entiende la intersección de líneas que representan a las aristas en un punto distinto de sus extremos). A este dibujo se le llama* **representación plana** *del grafo.*

Ejemplo



G

4.5 Planaridad

Un grafo puede ser plano aunque habitualmente se dibuje con cortes de aristas, ya que cabe la posibilidad de que se pueda dibujar de manera diferente sin ningún corte.

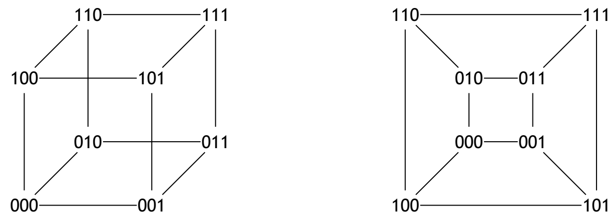
Ejemplo

Grafo K_4

4.5 Planaridad

Un grafo puede ser plano aunque habitualmente se dibuje con cortes de aristas, ya que cabe la posibilidad de que se pueda dibujar de manera diferente sin ningún corte.

Ejemplo



Grafo Q_3

4.5 Planaridad

- Siempre hay muchas maneras de representar un grafo.
- Podemos demostrar que un grafo es plano mostrando una representación plana.
- Es más difícil demostrar que un grafo no es plano.
- Estudiaremos la existencia de condiciones que nos aseguren que se puede encontrar al menos una forma de representar el grafo en el plano sin que se corten ningún par de aristas

4.5 Planaridad
Fórmula de Euler

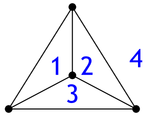
- Una representación plana de un grafo G divide al plano en ***regiones***, partes del plano que quedan delimitadas por las aristas y los vértices, (se incluye una región no acotada.)

Definición

*Una **región** de un grafo plano es una sección maximal del plano tal que cualesquiera par de puntos se pueden conectar por una curva que no corta ninguna arista. A las regiones también se les llama **caras**.*

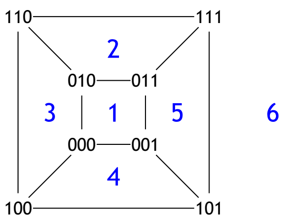
☛ La frontera de cada cara o región es un ciclo.

Ejemplo: La representación plana del grafo K_4 divide al plano en 4 regiones



4.5 Planaridad
Fórmula de Euler

Ejemplo: La representación plana del grafo Q_3 divide al plano en 6 regiones



4.5 Planaridad
Fórmula de Euler

Ejercicio: Dibuja una representación plana del grafo y señala las regiones

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_2	v_1	v_1	v_1	v_3	v_3	v_4
v_3	v_4	v_4	v_2	v_6	v_4	v_6
v_4		v_5	v_3		v_5	
		v_6	v_6		v_7	
			v_7			

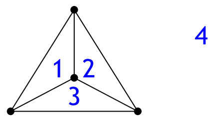
4.5 Planaridad
Fórmula de Euler

- Euler demostró que todas las representaciones planas de un mismo grafo dividen al plano en el mismo número de regiones.
- Esto lo hizo encontrando una relación entre el número de regiones, el número de aristas y el número de vértices de un grafo plano.

Teorema (Fórmula de Euler)

Sea $G = (V, E)$ un grafo plano conexo con $|V| = v$, $|E| = e$. Sea r el número de regiones de una representación plana de G. Entonces, $v - e + r = 2$.

Ejemplo: En el grafo K_4 hay 4 vértices, 6 aristas y 4 regiones: $4 - 6 + 4 = 2$



4.5 Planaridad
Fórmula de Euler

Teorema

El grafo $K_{3,3}$ es un grafo no plano.

Demostración:
Supongamos que $K_{3,3}$ fuese plano. Usando el teorema anterior, debería tener $9 - 6 + 2 = 5$ regiones.
Por otra parte, en $K_{3,3}$ cada ciclo debe contener al menos 4 aristas (por ser bipartito). Luego cada región debe estar acotada por un ciclo de 4 aristas al menos. Así, el número de aristas de todas las regiones debe ser mayor o igual que $4r$.
Pero ya que cada arista es común a dos regiones, se contará como máximo dos veces. Por eso, el número total de aristas debe ser menor o igual a $2e$.

$$4r \leq 2e \Longrightarrow 4r \leq 2 \cdot 9 \Longrightarrow r \leq \frac{18}{4} = 4{,}5 < 5$$

4.5 Planaridad
Fórmula de Euler

La fórmula de Euler se puede utilizar para establecer desigualdades que tiene que cumplir cualquier grafo plano.

Corolario (1)

Sea $G = (V, E)$ un grafo plano conexo sin bucles con $|V| = v$ vértices, $|E| = e$ aristas, r regiones y $v \geq 3$ y $e > 2$. Entonces, $3r \leq 2e$ y $e \leq 3v - 6$.

La demostración se basa en el concepto de ***grado*** de una región, que se define como el número de aristas que delimitan la región.

4.5 Planaridad
Fórmula de Euler

Este resultado nos permite demostrar que K_5 es un grafo no plano.

- ✓ El grafo K_5 es conexo y no tiene bucles.
- ✓ En K_5 tenemos $v = 5$ vértices y $e = 10$ aristas.
- ✓ Pero $3 \cdot 5 - 6 = 9 \not\geq 10$.

En general se puede deducir

Si G es un grafo conexo sin bucles con $|E| = e > 2$ y $e > 3v - 6$, entonces G es no plano.

4.5 Planaridad
Fórmula de Euler

Si G es un grafo conexo sin bucles con $|E| = e > 2$ y $e > 3v - 6$, entonces G es no plano.

☛ El recíproco de este resultado no se verifica.

- El contraejemplo es el grafo $K_{3,3}$ que sabemos es un grafo no plano.
- El grafo $K_{3,3}$ es conexo sin bucles con $e = 9$ arcos y $v = 6$ vértices.
- Se verifica $3 \cdot v - 6 = 12 \geq 9 = e$, aunque ya sabemos que $K_{3,3}$ es un grafo no plano.

4.5 Planaridad

Corolario (2)

Sea G un grafo plano conexo. Entonces G tiene un vértice de grado menor o igual a 5.

Demostración: Sea G un grafo plano conexo con v vértices y e aristas.
Supongamos que el grado de cada vértice es mayor que 5, para todo $u \in V, \delta(u) \geq 6$. Así, $\sum_{u \in V} \delta(u) \geq 6 \cdot v$

Sabemos que
$$\sum_{u \in V} \delta(u) = 2|E| = 2 \cdot e$$
y si todos los vértices tienen grado mayor o igual que 6, tenemos que
$$2 \cdot e = \sum_{u \in V} \delta(u) \geq 6 \cdot v$$
Aplicando ahora el corolario 1, $2e \leq 2(3v - 6) = 6v - 12$

De esta manera nos quedaría: $6 \cdot v \leq 2 \cdot e \leq 6 \cdot v - 12,$ lo que es una contradicción.

4.5 Planaridad

Finalmente, se puede usar el siguiente corolario del teorema para demostrar que el grafo $K_{3,3}$ es no plano.

Corolario (3)

Si un grafo plano simple conexo tiene e aristas y v vértices, con $v \geq 3$ y no contiene ciclos de longitud tres, entonces $e \leq 2v - 4$.

Demostración:

La demostración es parecida a la del primer corolario.

El hecho de que no haya ciclos de longitud 3 implica que el grado de cualquier región debe ser al menos 4.

4.5 Planaridad

Ejercicio: Demuestra que el grafo $K_{3,3}$ es no plano.

Solución:

- ✓ $K_{3,3}$ es conexo y no contiene ciclos de longitud 3 (por ser bipartito).
- ✓ El grafo $K_{3,3}$ tiene 9 arcos y 6 aristas.
- ✓ Sin embargo, $e = 9 \not\leq 8 = 2v - 4$.
- ✓ Luego, $K_{3,3}$ es no plano.

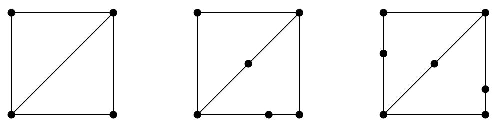
4.5 Planaridad

Grafos Homeomorfos

Definición

Se dice que los grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son **homeomorfos** *si se puede obtener el uno del otro insertando o eliminando vértices de grado 2.*

Ejemplo:



4.5 Planaridad

Grafos Homeomorfos

Teorema

Si dos grafos conexos son homeomorfos, entonces ambos son planos o no planos.

De aquí se deduce el siguiente

Corolario

Cualquier grafo que es homeomorfo a K_5 *o a* $K_{3,3}$ *es no plano.*

4.5 Planaridad

Teorema de Kuratowski

El matemático polaco Kazimierz Kuratowski estableció en 1930 el siguiente teorema que caracteriza los grafos planos utilizando el concepto de homeomorfismo de grafos.

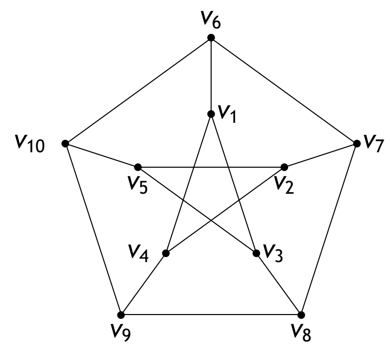
Teorema (Kuratowski)

Un grafo es no plano si, y sólo si, contiene un subgrafo que es homeomorfo al grafo K_5 *ó al grafo* $K_{3,3}$.

4.5 Planaridad

Teorema de Kuratowski

Ejemplo: Estudia si es plano el grafo de Petersen

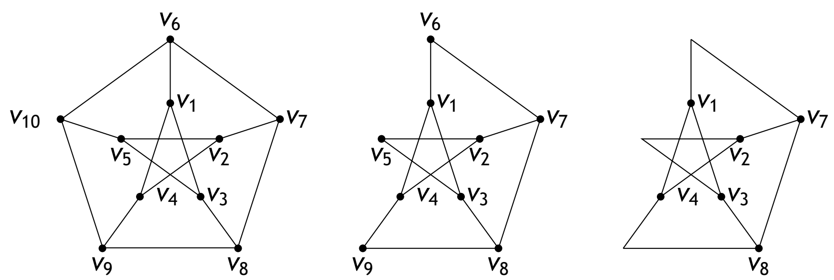


4.5 Planaridad

Teorema de Kuratowski

Ejemplo: Estudia si es plano el grafo de Petersen

Solución:



4.6 Coloración de Grafos

Introducción

Colorear los vértices de un grafo consiste en asignar un color a cada vértice del grafo de manera que dos vértices adyacentes no tengan el mismo color.

Definición

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple y $C = \{1, 2, \ldots, m\}$ un conjunto de m colores. Una **coloración** *con m colores de los vértices del grafo G es una función $c : V \to C$ tal que si $u, v \in V$ y $\{u, v\} \in E$, entonces $c(u) \neq c(v)$.*

- Se puede colorear un grafo asignando un color distinto a cada vértice.
- Sin embargo, para la mayor parte de los grafos, se puede encontrar una coloración que utiliza menos colores que el número de vértices del grafo.
- ¿Cuál es el número mínimo que se requiere?

4.6 Coloración de Grafos

Definición

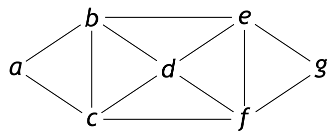
El **número cromático** *del grafo es el mínimo número de colores necesario para su coloración. Se denota $\chi(G)$.*

Para determinar que el número cromático de un grafo es m son necesarios dos pasos:

1. Demostrar que el grafo se puede colorear con m colores.
2. Demostrar que el grafo no se puede colorear usando menos de m colores.

4.6 Coloración de Grafos

Ejemplo 1 Halla el número cromático del grafo G de la figura



Solución:

- ✓ $\chi(G) \geq 3$, ya que a los vértices a, b y c se les debe asignar colores distintos.
- ✓ Para ver si se puede colorear G con 3 colores, le asignamos el rojo al vértice a, el azul al vértice b y el verde al vértice c.
- ✓ Entonces, d se puede (y se tiene que) colorear en rojo, ya que es adyacente a b y a c. Además el vértice e se puede (y se tiene que) colorear en verde, ya que sólo es adyacente a vértices coloreados en rojo y en azul, y f se puede (y se tiene que) colorear en azul, ya que sólo es adyacente a vértices coloreados en rojo y en verde.
- ✓ Finalmente, g se puede (y se tiene que) colorear en rojo.

4.6 Coloración de Grafos

Algoritmo para colorear los vértices de un grafo

Sea $G = (V, E)$ un grafo.

- Se ordenan los vértices del grafo según su grado $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$

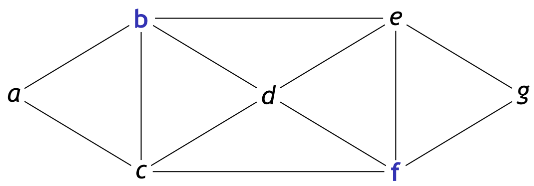
$$\delta(v_1) \geq \delta(v_2) \geq \ldots \delta(v_{n-1}) \geq \delta(v_n)$$

- Se asigna el color 1 al primer vértice v_1, es decir, $c(v_1) = 1$.
- Siguiendo la lista de vértices, se asigna el color 1 a cada vértice que no sea adyacente a v_1 ni a ningún vértice coloreado con 1.
- Se asigna el color 2 al primer vértice de la lista que no esté coloreado aun.
- Siguiendo la lista de vértices, se asigna el color 2 a cada vértice que no esté coloreado aun y que no sea adyacente a ningún vértice coloreado con 2.
- Se repite este proceso hasta que todos los vértices estén coloreados.

4.6 Coloración de Grafos

Ejemplo 1

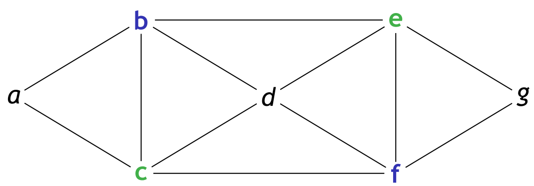
Grados	4	4	4	4	4	2	2
Vértices	b	c	d	e	f	a	g
Color	1				1		



4.6 Coloración de Grafos

Ejemplo 1

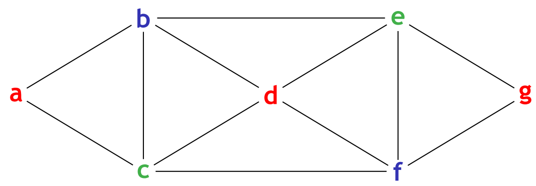
Grados	4	4	4	4	4	2	2
Vértices	b	c	d	e	f	a	g
Color	1	2		2	1		



4.6 Coloración de Grafos

Ejemplo 1

Grados	4	4	4	4	4	2	2
Vértices	b	c	d	e	f	a	g
Color	1	2	3	2	1	3	3



4.6 Coloración de Grafos

Ejemplo 2 ¿Cuál es el número cromático del grafo K_n ?

Solución:

- ✓ $\chi(K_n) \leq n$, ya que puede construirse una coloración del grafo asignando un color distinto a cada vértice.
- ✓ ¿Hay alguna coloración que use menos colores? La respuesta es NO.
- ✓ No puede asignarse el mismo color a dos vértices distintos, ya que dos vértices cualesquiera de este grafo siempre son adyacentes.
- ✓ Por lo tanto, el número cromático de K_n es n.

4.6 Coloración de Grafos

Ejemplo 3 ¿Cuál es el número cromático del grafo $K_{m,n}$?

Solución:

- ✓ Podría pensarse que el número de colores depende de m y n.
- ✓ Sin embargo, sólo se necesitan dos colores.
- ✓ Se colorea el conjunto de m vértices de un color y el conjunto de n vértices de un segundo color.
- ✓ Como los arcos conectan siempre un vértice del conjunto de m vértices con uno del conjunto de n vértices, ningún par de vértices adyacentes se colorea del mismo color.

- ☛ Todo grafo simple bipartito y conexo tiene número cromático 2 (o 1, si no tiene arcos), ya que el razonamiento anterior se aplica a cualquier grafo con esas características.
- ☛ Recíprocamente, cualquier grafo con número cromático 2 es bipartito.

4.6 Coloración de Grafos

Ejemplo 4 ¿Cuál es el número cromático del grafo C_n ?

Solución:

- ✓ En primer lugar, empezamos con algunos caso particulares, por ejemplo $n = 6$.
- ✓ Elegimos un vértice y lo coloreamos de rojo.
- ✓ Continuamos siguiendo el sentido de las agujas del reloj y le asignamos un segundo color (azul) al siguiente vértice al que llegamos.
- ✓ Proseguimos en el sentido de las agujas del reloj: el siguiente vértice se puede colorear en rojo, el cuarto en azul y el quinto en rojo.
- ✓ Finalmente, el sexto vértice que es adyacente al primero, puede colorearse en azul. Por tanto, el número cromático del grafo C_n es 2.

4.6 Coloración de Grafos

Ejemplo 4 ¿Cuál es el número cromático del grafo C_n ?

Solución: (cont.)

- ✓ A continuación tomamos $n = 5$ y consideramos C_5.
- ✓ Elegimos un vértice y lo coloreamos en rojo.
- ✓ Moviéndonos en el sentido de las agujas del reloj, tenemos que asignarle un segundo color (digamos azul) al siguiente vértice que alcanzamos.
- ✓ Prosiguiendo en el sentido de las agujas del reloj, el tercer vértice se puede colorear en rojo y el cuarto en azul.
- ✓ El quinto vértice no puede colorearse en rojo ni en azul ya que es adyacente al cuarto y al primero.
- ✓ Luego, hace falta utilizar un tercer color para ese vértice.
- ✓ Por lo tanto, el número cromático de C_5 es 3.

(Observa que habríamos necesitado tres colores también, si hubiéramos seguido el sentido contrario a las agujas del reloj.)

4.6 Coloración de Grafos

Ejemplo 4 ¿Cuál es el número cromático del grafo C_n ?

Solución: (cont.)

- ✓ En general, se necesitan 2 colores para colorear C_n cuando n es par.
- ✓ Para construir una coloración, simplemente se elige un vértice y se colorea en rojo.
- ✓ Se procede recorriendo el grafo en el sentido de las agujas del reloj (utilizando un representación plana del grafo) coloreando el siguiente vértice en azul, el tercero en rojo y así sucesivamente.
- ✓ El vértice n -ésimo se puede colorear en azul, ya que los dos vértices adyacentes a él (esto es, el vértice $n-1$ -ésimo y el primero) están coloreados en rojo.

(Se elige el rojo para los vértices impares y el azul para los pares).

4.6 Coloración de Grafos

Ejemplo 4 ¿Cuál es el número cromático del grafo C_n ?
Solución: (cont.)

- ✓ Cuando n es impar y $n > 1$, el número cromático de C_n es 3.
- ✓ Para comprobarlo, elegimos un vértice inicial.
- ✓ Para usar sólo dos colores, tenemos que ir alternando los colores a medida que recorremos el grafo en el sentido de las agujas del reloj.
- ✓ Sin embargo, el n -ésimo vértice al que llegamos es adyacente a dos vértices de distinto color, a saber, el vértice $n-1$ -ésimo y el primero.
- ✓ Por tanto tiene que emplearse un tercer color.

4.6 Coloración de Grafos
Aplicaciones de la coloración de grafos

La coloración de grafos tiene una gran variedad aplicaciones en problemas relacionados con planificación y asignación.

- **Programación de exámenes finales** ¿Cómo se pueden programar los exámenes finales de una universidad de modo que ningún estudiante tenga dos exámenes al mismo tiempo?
  Solución: Este problema de planificación se puede resolver utilizando un modelo con grafos en el que los vértices representan las asignaturas y hay un arco entre dos vértices si hay un estudiante matriculado en las asignaturas representadas por dichos vértices. Cada segmento horario reservado para un examen final se representa mediante un color diferente. Una programación de los exámenes corresponde a una coloración del grafo asociado.

4.6 Coloración de Grafos

Ejercicios

1. Demuestra que un grafo simple es bipartito si y solo si su número cromático es 2.
2. Diseña un algoritmo que permita determinar si un grafo es bipartito, obteniendo el conjunto de vértices V como la unión de dos conjuntos disjuntos V_1 y V_2. (*Sugerencia*: Tomando el conjunto de vértices $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, partir de la situación inicial $V_1 = \{1\}$ y $V_2 = \varnothing$. Ir añadiendo al conjunto V_2 los vértices adyacentes a vértices del conjunto V_1 y recíprocamente, comprobando en cada adición si su intersección es vacía.)

4.6 Coloración de Grafos
Aplicaciones de la coloración de grafos

Ejercicio
El jefe de una escuela tiene que programar las fechas de los exámenes finales de 7 asignaturas: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$. Se sabe que los siguientes pares de asignaturas tienen alumnos en común:

$$\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_1, a_7\}, \{a_2, a_3\}, \{a_2, a_4\}, \{a_2, a_5\}, \{a_2, a_7\},$$

$$\{a_3, a_4\}, \{a_3, a_6\}, \{a_3, a_7\}, \{a_4, a_5\}, \{a_4, a_6\}, \{a_5, a_6\}, \{a_5, a_7\}, \{a_6, a_7\}$$

¿Cuántos días son necesarios para realizar todos los exámenes de modo que ningún estudiante tenga dos exámenes el mismo día?

4.6 Coloración de Grafos

Aplicaciones de la coloración de grafos

Ejercicio

En un laboratorio hay una serie de compuestos químicos, a, b, c, d, e, f, g, h que hay que almacenar en cajas para su traslado. No pueden ser almacenados en una misma caja dos compuestos que reaccionen entre sí (como ácidos y bases). Los productos que reaccionan vienen dados por la siguiente tabla:

a	b	c	d	e	f	g	h
b	a	a	b	b	c	d	e
c	d	e	e	c	h	e	f
	e	f	g	d		h	g
				g			
				h			

¿Cómo podemos elegir los elementos que hemos de introducir en cada caja?

4.6 Coloración de Grafos

Aplicaciones de la coloración de grafos

Ejercicio

¿Cuántos canales distintos se necesitan para 6 estaciones localizadas a las distancias que se muestran en la siguiente tabla si dos estaciones no pueden usar el mismo canal cuando están a menos de 150 Km una de la otra?

	1	2	3	4	5	6
1	–	85	175	200	50	100
2	85	–	125	175	100	160
3	175	125	–	100	200	250
4	200	175	100	–	210	220
5	50	100	200	210	–	100
6	100	160	250	220	100	–

4.6 Coloración

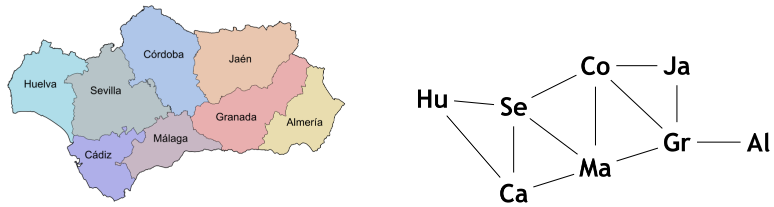
Aplicaciones de la coloración de grafos:Coloración de mapas

Cada mapa se puede representar mediante un grafo en el que:

- cada vértice representa una región del mapa y
- las aristas conectan dos vértices que indiquen regiones con frontera común.

Este grafo se llama ***grafo dual*** del mapa.

Ejemplo



Por construcción, los grafos duales de mapas son grafos planos.

4.6 Coloración

Aplicaciones de la coloración de grafos:Coloración de mapas

Colorear las regiones de un mapa es asignar colores a dichas regiones, de manera que dos regiones con frontera común reciban distinto color.
Esto equivale a colorear los vértices de su grafo dual, que es plano.
En 1976 se demostró el teorema de los 4 colores, conjeturado en 1852.

Teorema (Guthrie/ Appel/ Haken)

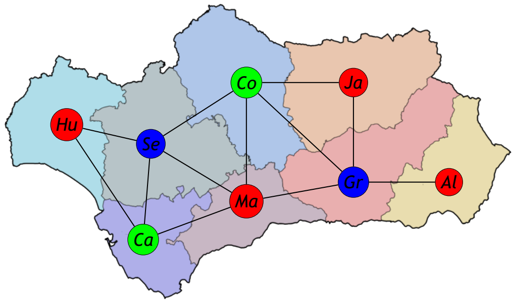
El número cromático de un grafo plano es menor o igual a 4.

De este teorema se deduce el siguiente

Corolario

Todo mapa se puede colorear con 4 colores.

Ejemplo Coloración del mapa de Andalucía.



	Ma	Gr	Co	Se	Ca	Hu	Ja	Al
δ	4	4	4	4	3	3	2	1