Recordemos que decimos de un polinomio que es *homogéneo* de grado k si es suma de monomios todos ellos de grado k. Los polinomios homogéneos de grado 2 reciben el nombre de *formas cuadráticas* y podemos decidir facilmente si una forma cuadrática $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es definida positiva, definida negativa, semidefinida o no definida una vez que la tengamos reescrita de la forma

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 \cdot (P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n))^2 + a_2 \cdot (P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n))^2 +$$

$$+ \ldots + a_n \cdot (P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n))^2$$

siendo cada P_i un polinomio homogéneo de grado 1. Para ello, podemos seguir el siguiente método (de Lagrange o de compleción de cuadrados):

1. Si $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ presenta alguna variable elevada al cuadrado, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que es x_1, con lo que $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es de la forma

   $$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a \cdot x_1^2 + P(x_2, x_3, \ldots, x_n) \cdot x_1 + R(x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

   siendo $R(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ y $P(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ polinomios homogéneos de grado 2 y 1 respectivamente y a una constante no nula. Así, la forma cuadrática Q podemos reescribirla como

   $$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a \cdot \left(x_1 + \frac{P(x_2, x_3, \ldots, x_n)}{2a} \right)^2 +$$

   $$+ R(x_2, x_3, \ldots, x_n) - \frac{(P(x_2, x_3, \ldots, x_n))^2}{4a}$$

   lo que reduce nuestro problema a la forma cuadrática

   $$Q^*(x_2, x_3, \ldots, x_n) = R(x_2, x_3, \ldots, x_n) - \frac{(P(x_2, x_3, \ldots, x_n))^2}{4a}$$

   que tiene una variable menos que $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

2. Si $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ no presenta ninguna variable elevada al cuadrado, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es de la forma

   $$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a \cdot x_1 \, x_2 + P_1(x_3, x_4, \ldots, x_n) \cdot x_1 +$$

   $$+ P_2(x_3, x_4, \ldots, x_n) \cdot x_2 + R(x_3, x_4, \ldots, x_n)$$

siendo $R(x_3, x_4, \ldots, x_n)$, $P_1(x_3, x_4, \ldots, x_n)$ y $P_2(x_3, x_4, \ldots, x_n)$ polinomios homogéneos de grado 2, 1 y 1 respectivamente y a una constante no nula. Así, la forma cuadrática Q podemos reescribirla como

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{a}{4}\left(x_1 + x_2 + \frac{P_1 + P_2}{a}\right)^2 - \frac{a}{4}\left(x_1 - x_2 - \frac{P_1 - P_2}{a}\right)^2 +$$

$$+R(x_3, x_4, \ldots, x_n) - \frac{P_1(x_3, x_4, \ldots, x_n) \cdot P_2(x_3, x_4, \ldots, x_n)}{a}$$

lo que reduce nuestro problema a la forma cuadrática $Q^*(x_3, x_4, \ldots, x_n) =$

$$= R(x_3, x_4, \ldots, x_n) - \frac{P_1(x_3, x_4, \ldots, x_n) \cdot P_2(x_3, x_4, \ldots, x_n)}{a}$$

que tiene dos variables menos que $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Ejemplos

1. Para escribir $Q(x, y, z) = 4x^2 + 8xy + 12xz + 16yz + 4z^2$ como suma de cuadrados, tengamos en cuenta que sí presenta alguna variable al cuadrado. Así, reescribiéndola de la forma descrita en el apartado 1, tenemos que

$$Q(x, y, z) = 4x^2 + (8y + 12z)x + 16yz + 4z^2$$

Por tanto, siendo $a = 4$, $P(y, z) = 8y + 12z$ y $R(y, z) = 16yz + 4z^2$, la podemos reescribir como

$$Q(x, y, z) = 4\left(x + \frac{8y + 12z}{8}\right)^2 + 16yz + 4z^2 - \frac{(8y + 12z)^2}{16} =$$

$$= 4\left(x + y + \frac{3}{2}z\right)^2 + 16yz + 4z^2 - \left(\frac{8y + 12z}{4}\right)^2 =$$

$$= (2x + 2y + 3z)^2 + 16yz + 4z^2 - (2y + 3z)^2 =$$

$$= (2x + 2y + 3z)^2 + 16yz + 4z^2 - 4y^2 - 12yz - 9z^2 =$$

$$= (2x + 2y + 3z)^2 - 4y^2 + 4yz - 5z^2 = (2x + 2y + 3z)^2 + Q^*(y, z)$$

siendo $Q^*(y, z) = -4y^2 + 4yz - 5z^2$

Para escribir $Q^*(y, z) = -4y^2 + 4yz - 5z^2$ como suma de cuadrados, tengamos en cuenta que ésta también presenta alguna variable al cuadrado. Así, reescribiéndola de la forma descrita en el apartado 1, tenemos que

$$Q^*(y,z) = -4y^2 + (4z)y - 5z^2$$

Por tanto, siendo $a^* = -4$, $P^*(z) = 4z$ y $R^*(z) = -5z^2$, la podemos reescribir como

$$Q^*(y,z) = -4\left(y + \frac{4z}{-8}\right)^2 - 5z^2 - \frac{16z^2}{-16} = -4\left(y - \frac{z}{2}\right)^2 - 5z^2 + z^2 =$$

$$= -(2y-z)^2 - 4z^2$$

Llevando esta igualdad a $Q(x,y,z)$, tenemos que

$$Q(x,y,z) = (2x+2y+3z)^2 - (2y-z)^2 - 4z^2$$

2. Para escribir $Q(x,y,z) = x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz$ como suma de cuadrados, tengamos en cuenta que sí presenta alguna variable al cuadrado. Así, reescribiéndola de la forma descrita en el apartado 1, tenemos que

$$Q(x,y,z) = x^2 + (-6y+2z)x + 5y^2 - 2yz + 5z^2$$

Por tanto, siendo $a = 1$, $P(y,z) = -6y+2z$ y $R(y,z) = 5y^2 - 2yz + 5z^2$, la podemos reescribir como

$$Q(x,y,z) = \left(x + \frac{-6y+2z}{2}\right)^2 + 5y^2 - 2yz + 5z^2 - \frac{(-6y+2z)^2}{4} =$$

$$= (x-3y+z)^2 + 5y^2 - 2yz + 5z^2 - \left(\frac{-6y+2z}{2}\right)^2 =$$

$$= (x-3y+z)^2 + 5y^2 - 2yz + 5z^2 - (-3y+z)^2 =$$

$$= (x-3y+z)^2 + 5y^2 - 2yz + 5z^2 - 9y^2 + 6yz - z^2 =$$

$$= (x-3y+z)^2 - 4y^2 + 4yz + 4z^2 = (x-3y+z)^2 + Q^*(y,z)$$

siendo $Q^*(y,z) = -4y^2 + 4yz + 4z^2$

Para escribir $Q^*(y,z) = -4y^2 + 4yz + 4z^2$ como suma de cuadrados, tengamos en cuenta que ésta también presenta alguna variable al cuadrado. Así, reescribiéndola de la forma descrita en el apartado 1, tenemos que

$$Q^*(y,z) = -4y^2 + (4z)y + 4z^2$$

Por tanto, siendo $a^* = -4$, $P^*(z) = 4z$ y $R^*(z) = 4z^2$, la podemos reescribir como

$$Q^*(y,z) = -4\left(y + \frac{4z}{-8}\right)^2 + 4z^2 - \frac{16z^2}{-16} = -4\left(y - \frac{z}{2}\right)^2 + 4z^2 + z^2 =$$

$$= -(2y-z)^2 + 5z^2$$

Llevando esta igualdad a $Q(x,y,z)$, tenemos que

$$Q(x,y,z) = (x-3y+z)^2 - (2y-z)^2 + 5z^2$$

3. Para escribir $Q(x,y,z,t) = 4xy - 12xz - 12yt + 4zt$ como suma de cuadrados, tengamos en cuenta que no presenta ninguna variable al cuadrado. Reescribiéndola de la forma descrita en el apartado 2, tenemos que

$$Q(x,y,z,t) = 4xy + (-12z)x + (-12t)y + 4zt$$

Así, siendo $a = 4$, $P_1(z,t) = -12z$, $P_2(z,t) = -12t$ y $R(z,t) = 4zt$, la podemos reescribir como

$$Q(x,y,z,t) = \frac{4}{4}\left(x + y + \frac{-12z-12t}{4}\right)^2 - \frac{4}{4}\left(x - y - \frac{-12z-(-12t)}{4}\right)^2 +$$

$$+4zt - \frac{(-12z)(-12t)}{4} = (x+y-3z-3t)^2 - (x-y+3z-3t)^2 - 32zt =$$

$$= (x+y-3z-3t)^2 - (x-y+3z-3t)^2 + Q^*(z,t)$$

siendo $Q^*(z,t) = -32zt$

Para escribir $Q^*(z,t) = -32zt$ como suma de cuadrados, tengamos en cuenta que ésta tampoco presenta ninguna variable al cuadrado. Así, según la igualdad expresada en el apartado 2, para $a = -32$ y siendo nulos el resto de polinomios, tenemos que

$$Q^*(z,t) = \frac{-32}{4}\left(z + t + \frac{0}{-32}\right)^2 - \frac{-32}{4}\left(z - t - \frac{0}{-32}\right)^2 =$$

$$= -8(z+t)^2 + 8(z-t)^2$$

Llevando esta igualdad a $Q(x,y,z,t)$, tenemos que

$$Q(x,y,z,t) = (x+y-3z-3t)^2 - (x-y+3z-3t)^2 - 8(z+t)^2 + 8(z-t)^2$$

4. Para escribir $Q(x,y,z,t) = 2x^2 + 4xy - 28xz + 8zt$ como suma de cuadrados, tengamos en cuenta que sí presenta alguna variable al cuadrado. Así, reescribiéndola de la forma descrita en el apartado 1, tenemos que

$$Q(x,y,z,t) = 2x^2 + (4y-28z)x + 8zt$$

Por tanto, siendo $a = 2$, $P(y,z,t) = 4y - 28z$ y $R(y,z,t) = 8zt$, la podemos reescribir como

$$Q(x,y,z,t) = 2\left(x + \frac{4y-28z}{4}\right)^2 + 8zt - \frac{(4y-28z)^2}{8} =$$

$$= 2(x+y-7z)^2 + 8zt - 2\frac{(4y-28z)^2}{16} = 2(x+y-7z)^2 + 8zt - \left(\frac{4y-28z}{4}\right)^2 =$$

$$= 2(x+y-7z)^2 - (y-7z)^2 + 8zt = 2(x+y-7z)^2 - (y-7z)^2 + Q^*(z,t)$$

siendo $Q^*(z,t) = 8zt$

Teniendo en cuenta lo realizado en el ejemplo anterior, podemos reescribir $Q^*(z,t)$ como

$$Q^*(z,t) = 2(z+t)^2 - 2(z-t)^2$$

y llevando esta igualdad a $Q(x,y,z,t)$, tenemos que

$$Q(x,y,z,t) = 2(x+y-7z)^2 - (y-7z)^2 + 2(z+t)^2 - 2(z-t)^2$$

5. Para reescribir $Q(u_1,u_2,u_3) = 2u_1u_2 + 2u_1u_3 + 2u_2u_3$ como suma de cuadrado, tengamos en cuenta que no presenta ninguna variable al cuadrado. Así, reescribiéndola de la forma descrita en el apartado 2, tenemos que

$$Q(u_1,u_2,u_3) = 2u_1u_2 + (2u_3)u_1 + (2u_3)u_2$$

Por tanto, siendo $a = 2$, $P_1(u_3) = 2u_3$, $P_2(u_3) = 2u_3$ y $R(u_3) = 0$, la podemos reescribir como

$$Q(u_1, u_2, u_3) = \frac{2}{4}\left(u_1 + u_2 + \frac{2u_3 + 2u_3}{2}\right)^2 - \frac{2}{4}\left(u_1 - u_2 - \frac{2u_3 - 2u_3}{2}\right)^2 +$$

$$+0 - \frac{(2u_3)(2u_3)}{2} = \frac{1}{2}\left(u_1 + u_2 + 2u_3\right)^2 - \frac{1}{2}(u_1 - u_2)^2 - 2u_3^2$$