Tema 3: Técnicas de Recuento

Mariam Cobalea

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Tema 3: Técnicas de Recuento

Tema 3: Técnicas de Recuento

Introducción

- Con el fin de **comparar, evaluar** o **predecir**, frecuentemente debemos **contar** los objetos de un conjunto finito.
- Por ejemplo, una manera de **comparar** el coste de aplicar dos algoritmos es determinar (o al menos, estimar) el **número de operaciones** que ejecuta cada uno al resolver un problema.
- Esto se hace a menudo contando solo ciertas clases de operaciones que son ejecutadas por los algoritmos.
- Así pues, el coste de un método directo para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas se puede estimar contando el número de multiplicaciones y divisiones realizadas.

Tema 3: Técnicas de Recuento

Introducción

- El coste de algunos algoritmos de **ordenación** (clasificación) se puede estimar contando el **número** de **comparaciones** hechas entre los datos.
- El coste de utilizar una particular **estructura de datos** se puede estimar determinando las **longitudes** de búsqueda media y máxima para los items almacenados en dicha estructura de datos.

Tema 3: Técnicas de Recuento
Introducción

- Problemas tales como estos requieren **contar** los elementos de un conjunto o enumerar los elementos de un conjunto que tienen una propiedad común.
- Para ello, usaremos distintas estrategias. Una de estas estrategias consiste en usar la **analogía**, reconociendo que el conjunto que se quiere contar tiene el **mismo** número de elementos que algún otro conjunto que es más fácil de contar.
- Estudiaremos diferentes 'modelos' teóricos que describen conjuntos cuyos elementos sabemos contar.
- Para contar los elementos de un conjunto deberemos buscar el modelo que se ajuste a nuestro conjunto.
- Tanto en la descripción de los modelos, como en el análisis mediante el que buscamos un modelo, son fundamentales las operaciones entre conjuntos que aprendimos en el primer tema.

Tema 3: Técnicas de Recuento
Introducción

Ejemplo

¿Cuántos partidos se necesita programar para determinar el campeón de un torneo de tenis en el que hay 64 participantes?

Solución 1

El problema se resuelve fácilmente:

Empezamos con las 32 partidas de los 32-avos de final	32
Proseguimos con las 16 de los dieciseisavos de final	16
Después los 8 octavos de final	8
Los 4 cuartos de final	4
Las 2 semifinales	2
Y la final	1

Total: 32 +16 + 8 +4 +2 + 1= 63

Tema 3: Técnicas de Recuento
Introducción

Ejemplo

¿Cuántos partidos se necesita programar para determinar el campeón de un torneo de tenis en el que hay 64 participantes?

Solución 2

Si observamos que

- cada partido determina un perdedor y
- sólo hay un campeón al final del torneo,

podemos deducir que se necesitan exactamente 63 partidos (uno menos que el número de participantes).

Tema 3: Técnicas de Recuento
Introducción

Hemos calculado el número de elementos de un conjunto y además de una manera **inteligente** y más fácil de generalizar a un número cualquiera de participantes.

➢ En general, para determinar el campeón de un torneo de tenis en el que hay n participantes serán necesarios $n-1$ partidos.

Si ahora aplicamos la primera fórmula a 512 jugadores, por ejemplo, obtenemos:

$$256+128+64+32+16+8+4+2+1=511$$

Con la segunda fórmula es sencillamente:

$$512-1=511$$

Tema 3: Técnicas de Recuento
Introducción

Con este ejemplo se muestra lo que se pretende al desarrollar las técnicas de recuento:

- **contar** todos los elementos que conforman un conjunto finito,
- de forma **inteligente**, para que se puedan obtener fórmulas generalizables a situaciones afines.

Este ejemplo también ilustra la técnica de contar el ***complemento*** de un conjunto:

➢ El conjunto de **no campeones** en un torneo de tenis es el **complementario** del conjunto de **campeones** en el conjunto de participantes.

Tema 3: Técnicas de Recuento
Introducción

- También nos planteamos ***enumerar*** los elementos de un conjunto finito; es decir, dado un conjunto definido por una cierta propiedad, diseñar algoritmos que presenten todos los elementos del conjunto.
- Para ello, nuestra tarea consiste en determinar una **secuencia de pasos** (etapas) bien definida para **construir** todos los elementos del conjunto pero no otros objetos.
- El número de objetos construidos se puede calcular a partir de los números de los resultados de los distintos pasos en el proceso.
- La inducción y el concepto relacionado de ***recursión*** también proporcionan técnicas de recuento.

Tema 3: Técnicas de Recuento
Introducción: Notaciones y propiedades previas

- **Factorial:** $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2$

$$(n+1)! = (n+1)\cdot n!$$

- **Número combinatorio:** $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!} = 1; \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

- **Binomio de Newton:** $\displaystyle(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$

- **Función parte entera o suelo:** Para cada $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ es el mayor entero menor o igual que x

Tema 3: Técnicas de Recuento
Recuento elemental

Definición (Conjunto finito)

*Se dice que un conjunto A es **finito** si existe un número natural n, tal que se puede establecer una función biyectiva entre $\mathbb{N}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ y el conjunto A. Este entero n se llama **cardinal** de A y se denota*

$$|A| = n$$

- Para $A = \varnothing$, $|A| = 0$
- Establecer una biyección entre $\mathbb{N}_n$ y un conjunto A es asignar a cada elemento de $\{0, 1, \dots, n-1\}$ un elemento de A. Esto es ***contar*** el número de elementos de A .

Ejemplo El cardinal de $A = \{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\}$ es 8, ya que existe una función biyectiva de entre $\{0, 1, 2, ..., 7\}$ y A.

Ejemplo

¿Cuántos términos tienen la progresión aritmética 22, 25, 28, 31, ..., 181?

Solución

- Los términos de esta progresión se pueden escribir en la forma

$$22, 22+3, 22+3\cdot 2, ..., 22+3\cdot k = 181, \quad \text{donde } k = \frac{181-22}{3} = 53$$

- Se define la función $f\colon \{0,1,2,...,53\} \to \{22,25,28,...,181\}$

$$f(i) = 22 + 3i$$

- Esta función es biyectiva.
- Por lo tanto, la progresión $22, 25, 28, 31, ..., 181$ tiene 54 términos.

Principio de la Suma **(Recuento caso por caso)**

Si un procedimiento se puede separar en t casos, cuyos conjuntos de resultados son mutuamente excluyentes, con

s_1 posibles resultados para el primer caso,

s_2 resultados para el segundo caso, . . . y

s_t resultados para el caso t ,

entonces el número total de resultados del procedimiento es

$$s_1 + \cdots + s_t$$

Teorema (Regla de la suma)

Si A *y* B *son conjuntos* **finitos disjuntos**, *entonces* $A \cup B$ *es finito y*

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Corolario

Si $A_1, \ldots, A_k$ *son conjuntos* **finitos y disjuntos dos a dos**, *entonces*

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i \quad \textit{es finito} \quad \textit{y} \quad \Big|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big| = |A_1| + \cdots + |A_k|$$

Ejemplo

¿Cuántos números enteros hay que son mayores que 1 y menores que 123 o mayores que 230 y menores que 451?

Solución: Sean los conjuntos

$$A_1 = \{x \in \mathbb{Z} | 1 < x < 123\} \quad \text{y} \quad A_2 = \{x \in \mathbb{Z} | 230 < x < 451\}$$

Se nos pide hallar el cardinal de su unión $A_1 \cup A_2$.

Como no tienen elementos comunes, podemos aplicar la regla de la suma

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$$

Ejemplo ¿Cuántos números enteros hay que son mayores que 1 y menores que 123 o mayores que 230 y menores que 451?

Solución: (cont.) Teniendo en cuenta que

$$A_1 = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 < x < 123\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 \leq x \leq 122\}$$

$$A_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid 230 < x < 451\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 231 \leq x \leq 450\}$$

y que el número de enteros que se hallan entre dos dados $m \geq n$, ambos inclusive, es igual a $m - n + 1$,

$$|A_1| = 122 - 2 + 1 = 121, \quad |A_2| = 450 - 231 + 1 = 220$$

tenemos que,

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| = 121 + 220 = 341$$

Principio de Multiplicación **(Recuento secuencial)**

Si una actividad se puede realizar en t pasos **sucesivos** y

el paso 1 puede realizarse de r_1 formas,

el paso 2 puede realizarse de r_2 formas, . . . y

el paso t puede realizarse de r_t formas,

entones el número total de formas posibles de realizar esa actividad es

$$r_1 \cdot r_2 \cdots r_t$$

Teorema (Regla del Producto)

Sean A *y* B *conjuntos finitos tales que* $|A| = n$ *y* $|B| = m$. *Entonces* $A \times B$ *es finito y* $|A \times B| = n \cdot m$.

Teorema

Sean $A_1, \ldots, A_k$ *conjuntos finitos, con* $|A_j| = n_j$. *Entonces* $A_1 \times \cdots \times A_k$ *es finito y*

$$|A_1 \times \cdots \times A_k| = n_1 \cdots n_k, \quad \textit{donde} \quad n_j = |A_j| \quad j : 1, \ldots, k$$

Ejemplos

1. El número de enteros de cuatro cifras que no tienen cifras repetidas es $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.
2. El número de palabras clave de longitud 4 que se pueden formar con los símbolos del alfabeto $\{0, 1, \cdots, 9\}$ es 10^4 .
3. El número de formas en que se puede responder a un cuestionario de diez preguntas del tipo V ó F basándose tan sólo en la conjetura es 2^{10} .
4. Idem si cada pregunta tiene 4 respuestas posibles, hay 4^{10} formas de responder.

Ejemplo

1. ¿Cuántos divisores positivos tiene el número 112000 ?
2. ¿Cuántos son impares?
3. ¿Cuántos son múltiplos de 6?

Solución: La descomposición en factores primos de 112000 es $2^7 \cdot 5^3 \cdot 7$.
Los divisores positivos de 112000 son los enteros de la forma

$$2^a \cdot 3^b \cdot 7^c, \text{ donde, } 0 \le a \le 7, \quad 0 \le b \le 3, \quad 0 \le c \le 1$$

Así, cada divisor queda determinado por una terna abc que cumple las tres condiciones anteriores.

1. Aplicando la regla del producto, el número de divisores positivos de 112000 es $(7+1)\cdot(3+1)\cdot(1+1) = 8 \cdot 4 \cdot 2 = 64$
2. Un divisor será impar si $a = 0$. Luego, el número de divisores impares es $(3+1)\cdot(1+1) = 4 \cdot 2 = 8$
3. No hay divisores de 112000 que sean múltiplos de 6, ya que $3 \nmid 112000$.

Ejercicios

1. La producción de una pieza consta de cuatro etapas. Hay seis líneas de montaje disponibles para la primera etapa, cuatro para la segunda, cinco para la tercera y tres para la última. Determina el número de maneras diferentes en que se puede fabricar la pieza en este proceso.
2. Una llave se fabrica realizando incisiones de profundidad variable en ciertas posiciones de una pieza matriz. Si hay 10 niveles de profundidad, ¿cuántas posiciones se necesitan para fabricar un millón de llaves diferentes?

Teorema

Sean A y B conjuntos finitos con $|A| = n$ y $|B| = m$. Entonces existen m^n funciones de A en B .

Ejercicio Determina cuantos enteros se pueden representar con secuencias de n dígitos, donde cada dígito se elige del conjunto $\{0, 1, 2, \dots, b-1\}$, para $b \ge 2$.

Solución: La representación de cada entero se puede identificar con una función $f\colon \{1, 2, \dots, n\} \to \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$.

Luego, podemos representar b^n enteros.

Corolario

Si A es un conjunto finito, entonces hay $2^{|A|}$ subconjuntos de A . Es decir, $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Demostración: Se establece una biyección entre $\mathcal{P}(A)$ y el conjunto $\mathcal{X}$ de las funciones de A en $\{0, 1\}$

$$\mathcal{X} = \{\chi_C \mid \chi_C \ \text{ función característica asociada a cada subconjunto } C \text{ de } A\}$$

$$\chi_C \colon A \to \{0, 1\}$$

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in C \\ 0 & \text{si } x \notin C \end{cases}$$

Definición (Permutaciones)

Sea X un conjunto de n elementos **distintos** *y $r \leq n$. Se llama r* **- permutación** *de X a cada secuencia de r elementos de X.*

- También se llaman **permutaciones** ó **variaciones de n elementos tomados de r en r.**
- ☛ $r \leq n$.
- ☛ se tiene en cuenta el orden.
- ☛ no se admite repetición.

Ejemplo Si $X = \{a, b, c, d, e\}$, entonces

$acbe, \ cade, \ bedc, \ldots$

son algunas de las 4 -permutaciones de X.

Teorema

Sea X un conjunto de n elementos **distintos** *y $r \leq n$. Entonces el número total de las r -permutaciones de X, denotado $P(n, r)$, es*

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1)$$

Demostración: Usando el principio del producto, un objeto de X se puede elegir de n maneras y, habiendo elegido éste, un segundo objeto se puede elegir de $n-1$ maneras y así hasta que los r objetos se hayan elegido. Por lo tanto, $P(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1)$

- Si $r = n$, se llama una ***permutación*** de X y el número $P(n, n)$ de permutaciones de X es

$$P(n, n) = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Ejemplo ¿Cuántos enteros comprendidos entre 1 y 9999 tienen cifras distintas?

Solución: Consideramos los siguientes conjuntos disjuntos:

1. X_1 : Enteros de una cifra sin cifras repetidas
2. X_2 : Enteros de dos cifras sin cifras repetidas
3. X_3 : Enteros de tres cifras sin cifras repetidas
4. X_4 : Enteros de cuatro cifras sin cifras repetidas

La respuesta es $|X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4|$.

Aplicando la regla del producto, tenemos que

$$|X_1| = 9 \ , \quad |X_2| = 9 \cdot 9 \ , \quad |X_3| = 9 \cdot 9 \cdot 8 \ , \quad |X_4| = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7.$$

Aplicando la regla de la suma, obtenemos

$$|X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4| = 9 + 9 \cdot 9 + 9 \cdot 9 \cdot 8 + 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$$

Permutaciones y el Problema de Asignación

Consideramos un conjunto de n posiciones **distintas** colocadas en un **orden** definido y se nos pide asignar r objetos **distintos** a estas posiciones de manera que ninguna posición pueda recibir más de un objeto. Entonces, el número de maneras de asignar estos r objetos es también $P(n, r)$.

✓ Usando el principio del producto, cualquier objeto arbitrario se puede asignar a una de las posiciones de n maneras y, consecuentemente, el siguiente se puede asignar de $n-1$ maneras y así sucesivamente.

Ejemplo Se quiere nombrar un presidente, un secretario y un tesorero de un comité de seis personas a, b, c, d, e, f. ¿De cuántas formas se puede hacer?

Solución $P(6, 3) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

Permutaciones Generalizadas

Se considera una colección X de n objetos de k tipos diferentes (los objetos de cada tipo son indistinguibles y un objeto de un tipo no es idéntico a ningún objeto de otro tipo). Una ***permutación generalizada*** es cualquier secuencia ordenada de los n objetos.

Si n_j es el número de objetos del tipo j para cada $j = 1 \dots k$, el número de permutaciones generalizadas se denota $P(n; n_1, \dots, n_k)$.

Teorema

$$P(n; n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_k!}$$

Ejemplo

Las letras de la palabra **IMPRIMIR** se pueden agrupar en cuatro tipos:

- uno para I,
- otro para M,
- otro para P y
- otro para R.

Una permutación generalizada es, por ejemplo, **PMIRIRMI**.

El número de permutaciones generalizadas de las letras de la palabra **IMPRIMIR** es

$$\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 2!}$$

Definición (Combinaciones)

Si X es un conjunto de $\mathbf{n}$ elementos distintos y $\mathbf{r} \leq \mathbf{n}$, se llama r ***- combinación*** *de X a cualquier subconjunto de $\mathbf{r}$ elementos de X.*

- **no** se tiene en cuenta el orden.
- **no** se admite repetición.

El número de r -combinaciones de n elementos se denota $C(n, r)$.

Teorema

$$C(n, r) \cdot r! = P(n, r)$$

Corolario

$$C(n, r) = C(n, n - r)$$

Combinaciones y el Problema de Asignación

Sea X un conjunto de $\mathbf{n}$ posiciones **distintas** colocadas en un orden definido y se nos pide asignar $\mathbf{r}$ objetos **idénticos** a estas posiciones de manera que ninguna posición reciba más de un objeto. Entonces el número de maneras de asignar estos $\mathbf{r}$ objetos es $\mathbf{C(n, r)}$.

Demostración:

- ✓ Sea $\mathbf{t}$ el número total de maneras de asignar estos $\mathbf{r}$ objetos.
- ✓ Si todos los objetos fuesen distintos, cada una de estas asignaciones daría lugar a $\mathbf{r!}$ asignaciones.
- ✓ En este caso, el número total de asignaciones habría sido $\mathbf{t \cdot r!}$.
- ✓ Pero si los objetos fuesen distintos, $\mathbf{P(n, r)}$ es el número de asignaciones.
- ✓ Por lo tanto, $\mathbf{t} = \dfrac{\mathbf{P(n, r)}}{\mathbf{r!}} = \mathbf{C(n, r)}$.

El Problema de Asignación y Combinaciones Generalizadas

Se considera una colección X de n objetos de k tipos diferentes (los objetos de cada tipo son indistinguibles y un objeto de un tipo no es idéntico a ningún objeto de otro tipo).

Si n_j es el número de objetos del tipo j para cada $j = 1 \dots k$,

- ✓ los n_1 objetos idénticos del tipo $\mathbf{1}$ se pueden asignar a $\mathbf{n}$ posiciones (de tal forma que ninguna posición reciba más de un objeto) de $\mathbf{C(n, n_1)}$ maneras.

- ✓ Después, los $\mathbf{n_2}$ objetos del tipo $\mathbf{2}$ serán colocados de $\mathbf{C(n - n_1, n_2)}$ maneras.
- ✓ Procedemos de esta manera hasta que todos los sitios están ocupados.
- ✓ Por el principio del producto, el número de maneras en que los $\mathbf{n}$ objetos se pueden situar es

$$C(n, n_1) \cdot C(n - n_1, n_2) \cdot C(n - n_1 - n_2, n_3) \cdots C(n - n_1 - n_2 - \cdots - n_{k-1}, n_k)$$

- ✓ Y este número se denota $\mathbf{C(n; n_1, n_2, \dots, n_k)}$.

El siguiente resultado conecta las permutaciones generalizadas y las combinaciones.

Teorema

$$P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = C(n; n_1, n_2, \dots, n_k)$$

donde $n_1 + n_2 + \dots + n_k \leq n$.

Teorema (El teorema multinomial)

En un término típico de la expansión de $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$ *la variable* x_i $(i : 1, 2, \dots, k)$ *aparece* n_i *veces (donde* $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$*) y el coeficiente de este término típico es* $C(n; n_1, n_2, \dots, n_k)$.

Es decir,

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=0}^{n_1+n_2+\dots+n_k=n} C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$$

Ejemplo
Para $n = 2$ tenemos

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{r=n} C(n,r)x^r y^{n-r}$$

La parte derecha de la igualdad se llama ***expansión binomial*** de $(x+y)^n$.

Los coeficientes $C(n,r)$ que aparecen en la expansión binomial se llaman ***coeficientes binomiales***.

✔ Los coeficientes binomiales de $(x+y)^n$ se pueden calcular (de forma recursiva) si sabemos los coeficientes binomiales de $(x+y)^{n-1}$ usando la fórmula de Pascal

$$C(n,r) = C(n-1,r) + C(n-1,r-1)$$

✔ Por eso, los coeficientes binomiales se pueden colocar en forma de triángulo conocido como ***triángulo de Pascal***:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & & & \dots & & & & & \end{array}$$

✔ En esta representación, los $n+1$ coeficientes de la expansión binomial de $(x+y)^n$ aparecen en la n -ésima fila.

Combinaciones con repetición
Sea X es un conjunto de n elementos. Se llama **combinación con repetición** de r elementos de X a cada colección de r elementos de X.

- ☛ **no** se tiene en cuenta el orden.
- ☛ se admite **repetición**.

Ejemplo En el conjunto $X = \{a,b,c\}$, posibles elecciones de siete elementos son:

$$\{b,a,b,c,b,a,b\};\ \{a,a,b,c,c,b,a\} = \{a,a,b,a,b,c,c\} = \{a,a,a,b,b,c,c\}\dots$$

- El número de combinaciones con repetición de r elementos elegidos en un conjunto de n elementos se denota $CR(n,r)$

Teorema (Combinaciones con repetición)
Si X es un conjunto de cardinalidad $\mathbf{n}$ *, entonces el número de maneras de elegir* $\mathbf{r}$ *elementos de X (permitiendo la repetición) es*

$$CR(n,r) = C(r+n-1, n-1) = \binom{r+n-1}{n-1}$$

Demostración:

- ➣ Cada elección se puede identificar con una cadena binaria de longitud $\mathbf{r}+\mathbf{n}-1$, con $\mathbf{r}$ unos exactamente.
- ➣ Por tanto, el número pedido coincide con el número de estas cadenas, que es

$$C(r+n-1,r) = C(r+n-1,n-1)$$

Una versión equivalente de este teorema es:

Teorema

El número de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$$

es $CR(n,r) = C(r+n-1, r) = \binom{r+n-1}{r} = \binom{r+n-1}{r}$.

Ejemplo Halla el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27$$

Solución:

- El conjunto de soluciones enteras no negativas de esta ecuación es

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{N}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27 \ \wedge \ x_j \geq 0, j : 1, \dots, 4\}$$

- El **número** de soluciones enteras no negativas de esta ecuación es el cardinal del conjunto A
- Aplicando el teorema anterior,

$$|A| = C(27+4-1, 4-1) = \binom{27+4-1}{4-1} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3!}$$

Ejemplo Halla el número de soluciones enteras de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27$$

tales que $x_1 \geq 0,\ x_2 > 4,\ x_3 \geq 1,\ x_4 > 0$

Solución:

- Se considera el conjunto de todas las soluciones enteras no negativas

$$A = \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{N}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27\}$$

- El conjunto de soluciones con las restricciones dadas será

$$\begin{aligned} A_1 =& \{(x_1, \dots, x_4) \in A : \ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 5,\ x_3 \geq 1,\ x_4 \geq 1\} \\ =& \{(y_1, \dots, y_4) \in \mathbb{N}^4 : y_1 + (5+y_2) + (1+y_3) + (1+y_4) = 27,\ y_j \geq 0,\ j : 1, \dots, 4\} \\ =& \{(y_1, \dots, y_4) \in \mathbb{N}^4 : y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 27 - 7 \ \wedge \ y_j \geq 0,\ j : 1, \dots, 4\} \end{aligned}$$

- El **número** de estas soluciones es

$$|A_1| = C(27-7+4-1, 4-1) = \binom{27-7+4-1}{4-1} = \frac{23 \cdot 22 \cdot 21}{3!}$$

Ejercicios

1. Se dispone de una gran cantidad de bolas rojas, azules y verdes. ¿De cuántas formas se pueden seleccionar nueve bolas?
2. Halla cuántos números naturales entre mil y cien mil tienen la propiedad de que la suma de sus dígitos es 9 y son todos distintos de cero.
3. Una clase de 43 estudiantes vota para elegir la fecha de un examen. Cada uno vota por uno de los cinco posibles días. Determina cuántos resultados se pueden obtener en la votación.

Tema 3: Técnicas de Recuento

Recuento elemental

El modelo de selección

El número de maneras de seleccionar $\mathbf{r}$ elementos de un conjunto de $\mathbf{n}$ es:

1. $P(n,r)$ si los elementos seleccionados son **distintos** y el **orden** en que se seleccionan es importante.
2. $C(n,r)$ si los elementos seleccionados son **distintos** y el **orden** en que se seleccionan **no** es importante.
3. n^r si los elementos seleccionados **no** son necesariamente **distintos** y el **orden** en que se seleccionan es importante.
4. $C(r+n-1,n-1)$ si los elementos seleccionados **no** son necesariamente **distintos** y el **orden** en que se seleccionan **no** es importante.

Tema 3: Técnicas de Recuento

Recuento elemental

El modelo de asignación

El número de maneras de asignar $\mathbf{r}$ objetos a $\mathbf{n}$ posiciones distintas es:

1. $P(n,r)$ si los objetos son **distintos** y ninguna posición puede acoger a más de un objeto.
2. $C(n,r)$ si los objetos son **idénticos** y ninguna posición puede acoger a más de un objeto.
3. n^r si los objetos son **distintos** y no hay restricción sobre el número de objetos asignados a cada posición.
4. $C(r+n-1,n-1)$ si los objetos son **idénticos** y no hay restricción sobre el número de objetos asignados a cada posición.

Tema 3: Técnicas de Recuento

Principio de Dirichlet

- Este principio fue enunciado por primera vez por Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859).
- También se conoce como *principio de distribución de Dirichlet*, *principio de las cajas de Dirichlet* o *principio del palomar*.

Teorema (Principio de Dirichlet)

Sean A y B conjuntos finitos tales que $|A| = \mathbf{r} > \mathbf{n} = |B|$. Entonces **no** *es posible definir una función* **inyectiva** *de A en B.*

De otra forma:

Principio de las cajas

Si se quieren repartir $\mathbf{r}$ objetos distintos en $\mathbf{n}$ cajas distintas y $\mathbf{r} > \mathbf{n}$, entonces en alguna caja debemos poner más de un objeto.

Tema 3: Técnicas de Recuento

Principio de Dirichlet

Ejemplo En cualquier grupo de 13 personas podemos encontrar dos que han nacido en el mismo mes.

Ejercicio Un cuestionario consta de 10 preguntas de selección múltiple, con cinco respuestas posibles cada una. ¿Cuál debe ser el mínimo número de alumnos para el cual podamos garantizar que, por lo menos, dos de ellos tendrán exactamente las mismas respuestas para todas las preguntas?

Solución:

Como cada pregunta se puede contestar de 5 formas distintas, la prueba se puede responder de $5^{10} = 9765625$ formas diferentes.
Luego, para tener certeza de que, por lo menos, dos estudiantes van a tener las mismas respuestas, el número de estudiantes debe ser al menos

$$5^{10} + 1 = 9765626$$

Ejercicio Demuestra que si escogemos cinco números cualesquiera entre el 1 y el 8, entonces dos de ellos suman 9.

Solución

- ✓ Los pares de elementos que suman 9 son:

$$\{1,8\}, \{2,7\}, \{3,6\} \text{ y } \{4,5\}$$

  Estos son los cuatro nidos.
- ✓ Las ''palomas'' son los 5 números del subconjunto.
- ✓ Cada número va al ''nido'' correspondiente, por ejemplo, el 1 va a $\{1,8\}$, el 2 va al $\{2,7\}$, ...
- ✓ Como $5 > 4$, hay al menos dos números que van al mismo nido, es decir, hay dos números que suman 9.

Tema 3: Técnicas de Recuento
Principio de Dirichlet

Ejercicios Demuestra que:

1. Si se eligen 5 puntos cualesquiera en el interior de un triángulo equilátero de lado 1, entonces al menos dos de ellos distan entre sí menos de $\frac{1}{2}$.
2. Si se eligen diez puntos cualesquiera en el interior de un triángulo equilátero de lado 1, entonces al menos dos de ellos se encuentran a una distancia no superior a $\frac{1}{3}$.
3. Si se eligen cinco puntos $P_1, P_2, \ldots, P_5$ en el interior de un cuadrado $\mathcal{S}$ de lado 1, entonces al menos una de las distancias $d_{i,j} = d(P_i, P_j)$ es menor que $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Tema 3: Técnicas de Recuento
Principio de Dirichlet

Principio de las cajas generalizado

Sean $\mathbf{r}$ y $\mathbf{n}$ enteros positivos tales que $\mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{m}, \quad 0 < \mathbf{m} < \mathbf{k}$.
Si se quieren repartir $\mathbf{r}$ objetos distintos en $\mathbf{n}$ cajas distintas, entonces en alguna caja debemos poner más de $\mathbf{k}$ objetos.

Ejemplo

En un grupo de 25 personas hay tres que han nacido el mismo mes.

$$25 = 12 \cdot 2 + 1$$

Tema 3: Técnicas de Recuento
Principio de Dirichlet

Teorema (Principio de Dirichlet generalizado)

Sean A y B conjuntos finitos tales que $|A| = \mathbf{r}$, $|B| = \mathbf{n}$, $\mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{m}$, $0 < \mathbf{m} < \mathbf{k}$. Entonces para cada función $f : A \to B$, la preimagen de algún $b \in B$ tiene más de $\mathbf{k}$ elementos.

$$|f^{-1}(b)| > \mathbf{k}$$

Ejemplo

En un grupo de 22 personas hay cuatro que han nacido el mismo día de la semana.

$$22 = 7 \cdot 3 + 1$$

Corolario (Principio de la media)

Sean los enteros $m_1, m_2, \ldots, m_k$ *tales que*

$$\frac{\sum_{j=1}^{k} m_j}{k} > p$$

Entonces para algún $j : 1, 2, \ldots, k$ *se tiene que* $m_j > p$.

Ejercicio

1. ¿Cuántas veces debemos tirar un dado para obtener el mismo resultado al menos dos veces?
2. Idem al menos tres veces.
3. Idem al menos n veces, para $n \geq 4$.

Solución: Indicación:

- Los ''nidos'' son los 6 resultados posibles: 1,2,3,4,5,6.
- Las ''palomas'' son las tiradas, cada una de ellas ''cae'' en un nido.

Ejercicio Demuestra que si elegimos $n+1$ números del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$, necesariamente dos de ellos serán coprimos.

Solución:

- Tomaremos como nidos los conjuntos
  $$\{1,2\}, \quad \{3,4\}, \quad \{5,6\}, \quad \ldots \quad \{2n-1, 2n\}$$
- Ya que solo hay n y queremos coger $n+1$ números, necesariamente tendremos que coger dos del mismo nido;
- esos dos números son consecutivos y, en consecuencia, primos entres sí.

Teorema (Principio de Inclusión-Exclusión (I))

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *conjuntos finitos no vacíos. Entonces*

$$\left|\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right| = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq k} \left|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}\right| \qquad (1)$$

- Para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, el sumatorio $\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq k}$ recorre todas las intersecciones de exactamente j conjuntos, es decir, tiene $\binom{k}{j}$ sumandos.

- Antes de abordar la demostración general analizaremos ejemplos pequeños, con 2 y 3 conjuntos.
- Para $k = 2$: $\quad |A_1 \cup A_2| = \underbrace{|A_1| + |A_2|}_{j=1} \underbrace{-|A_1 \cap A_2|}_{j=2}.$
  Al sumar el número de elementos de cada conjunto en $(j = 1)$, los elementos de la intersección se 'cuentan' dos veces, por esa razón, debemos descontarlos en $(j = 2)$.
- Para $k = 3$: $\quad |A_1 \cup A_2 \cup A_3| =$
  $\underbrace{|A_1| + |A_2| + |A_3|}_{j=1} \underbrace{-|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3|}_{j=2} \underbrace{+|A_1 \cap A_2 \cap A_3|}_{j=3}.$
  Si un elemento está en la intersección de exactamente dos conjuntos, el análisis sería similar al del apartado anterior. Si está en la intersección de los 3, se contaría 3 veces en $(j = 1)$, se descontarían 3 veces en $(j = 2)$ y se volvería a contar una vez en $(j = 3)$.

Demostración:

- Siguiendo con el razonamiento de los ejemplos anteriores, si un elemento de $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ está exactamente en m de estos conjuntos, entonces la fórmula los contará $m = \binom{m}{1}$ veces en $(j = 1)$, los descontará $\binom{m}{2}$ veces en $(j = 2)$, los volverá a contar $\binom{m}{3}$ veces en $(j = 3)$ y así sucesivamente.

- Por lo tanto, en el lado derecho de la igualdad, ese elemento se habrá contado sólo una vez, ya que:

$$\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \binom{m}{4} + \ldots + (-1)^{m+1}\binom{m}{m} = \binom{m}{0} = 1$$

Ejemplo Halla cuantos enteros positivos menores o iguales que 1000 son divisibles por 7 o por 11.

Solución:

- Si consideramos el conjunto A_1 de los múltiplos de 7 y el conjunto A_2 de los múltiplos de 11, el número requerido es $|A_1 \cup A_2|$.
- Por el Principio de Inclusión-Exclusión,

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| =$$

$$= \lfloor \frac{1000}{7} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{11} \rfloor - \lfloor \frac{1000}{7 \cdot 11} \rfloor =$$

$$= 142 + 90 - 12 = 220$$

- Un conjunto y su complementario son disjuntos, por lo que la ley de De Morgan permite deducir el siguiente corolario del principio de la suma:

Corolario (Principio de Inclusión-Exclusión (II))

Si $A_1, \ldots, A_k$ son subconjuntos no vacíos de un conjunto finito A, entonces

$$\left|\bigcap_{j=1}^{k} \overline{A_j}\right| = |A| - \left|\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right| \qquad (2)$$

Ejemplo

1. Halla cuántos enteros no superiores a 100 son primos.
2. Determina el número de enteros positivos menores que 600 que son coprimos con 600.

Ejemplo Halla el número de soluciones enteras de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

tales que

$$0 \le x_1 \le 3, \quad 0 \le x_2 \le 4, \quad 0 \le x_3 \le 6$$

Solución: Si consideramos los conjuntos

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 11\}$$
$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in A \ : \ x_1 \ > \ 3\}$$
$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in A \ : \ x_2 \ > \ 4\}$$
$$A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in A \ : \ x_3 \ > \ 6\}$$

el número de soluciones que verifican las condiciones requeridas es

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3|$$

Ejemplo Halla el número de soluciones enteras de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

tales que

$$0 \le x_1 \le 3, \quad 0 \le x_2 \le 4, \quad 0 \le x_3 \le 6$$

Solución:(cont.) Aplicando el Principio de Inclusión-Exclusión,

$$\begin{aligned} |\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| &= |A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\ &= |A| - \big(|A_1| + |A_2| + |A_3|\big) \\ &\quad + \big(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|\big) \\ &\quad - \big(|A_1 \cap A_2 \cap A_3|\big) \end{aligned}$$

Ejemplo Halla el número de soluciones enteras de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

tales que

$$0 \le x_1 \le 3, \quad 0 \le x_2 \le 4, \quad 0 \le x_3 \le 6$$

Solución: (cont.)

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 11\}$$

$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in A \mid x_1 \ > \ 3\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in A \mid x_1 \ \ge \ 4\} \Rightarrow |A_1| = \binom{11 - 4 + 3 - 1}{3 - 1}$$

$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in A \mid x_2 \ > \ 4\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in A \mid x_2 \ \ge \ 5\} \Rightarrow |A_2| = \binom{11 - 5 + 3 - 1}{3 - 1}$$

$$A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in A \mid x_3 \ > \ 6\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in A \mid x_3 \ \ge \ 7\} \Rightarrow |A_3| = \binom{11 - 7 + 3 - 1}{3 - 1}$$

Ejemplo Halla el número de soluciones enteras de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

tales que

$$0 \le x_1 \le 3, \quad 0 \le x_2 \le 4, \quad 0 \le x_3 \le 6$$

Solución: (cont.)

$$A_1 \cap A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in A \mid x_1 \ \ge \ 4 \ \wedge x_2 \ \ge \ 5\} \Rightarrow |A_1 \cap A_2| = \binom{2 + 3 - 1}{3 - 1} = 6$$

$$A_1 \cap A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in A \mid x_1 \ \ge \ 4 \ \wedge x_3 \ \ge \ 7\} \Rightarrow |A_1 \cap A_3| = \binom{0 + 3 - 1}{3 - 1} = 1$$

$$A_2 \cap A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in A \mid x_2 \ \ge \ 5 \ \wedge x_3 \ \ge \ 7\} = \varnothing \ \Rightarrow \ A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing$$

$$\Rightarrow |A_2 \cap A_3| = 0 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Por lo tanto, $|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| = 78 - (36 + 28 + 15) + (6 + 1 + 0) - 0 = 6$