Estructuras Algebraicas para la Computación

Mariam Cobalea

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Tema 5: Espacios Vectoriales

Tema 5: Espacios Vectoriales

- El espacio $\mathbb{R}^n$.
- Espacios y subespacios vectoriales.
- Sistemas de generadores.
- Dependencia e independencia lineal.
- Bases y dimensión.
- Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales.
- Coordenadas y cambio de base.

Espacios Vectoriales

El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

Dado el cuerpo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ de los números reales, el producto cartesiano de $\mathbb{R}$ por sí mismo n veces $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ se denota $\mathbb{R}^n$.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, i : 1, 2, \ldots, n\}$$

Se llaman:

- ✓ **vectores** los elementos de $\mathbb{R}^n$
- ✓ **escalares** los elementos del cuerpo $\mathbb{R}$

Espacios Vectoriales

El espacio $\mathbb{R}^n$

Definición 1 (Suma de vectores en $\mathbb{R}^n$)

*Sea el cuerpo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ de los números reales. En $\mathbb{R}^n$ se define la operación **suma** de vectores de la forma:*

$$\begin{array}{rrcl} + : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \mapsto & \mathbf{x} + \mathbf{y} \end{array}$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Definición 2 (Producto por un escalar en $\mathbb{R}^n$)

Sea el cuerpo $(\mathbb{R},+,\cdot)$ de los números reales. En $\mathbb{R}^n$ se define la operación ***producto*** *de un* ***escalar*** $c \in \mathbb{R}$ *por un vector* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *de la forma:*

$$\begin{array}{rccc} \cdot & : & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & (c,\mathbf{x}) & \mapsto & c\cdot\mathbf{x} \end{array}$$

$$c\cdot\mathbf{x} = c\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\cdot x_1 \\ c\cdot x_2 \\ \vdots \\ c\cdot x_n \end{pmatrix}$$

Ejemplos Dados $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, halla:

1. $u + v$
2. $2u$
3. $v - 2u$

Teorema 1 (Propiedades de la suma de vectores)

Sean u, v, w $\in \mathbb{R}^n$. Entonces

1. $u + v \in \mathbb{R}^n$.
2. $u + v = v + u$
3. $u + (v + w) = (u + v) + w$
4. $u + \mathbf{0} = u$
5. $u + (-u) = \mathbf{0}$

Teorema 2 (Propiedades del producto por un escalar)

Sean u, v $\in \mathbb{R}^n$ y sean c, d $\in \mathbb{R}$. Entonces

6. $c\ u \in \mathbb{R}^n$
7. $c\ (u + v) = c\ u + c\ v$
8. $(c + d)\ u = c\ u + d\ u$
9. $c(d\ u) = (cd)\ u$
10. $1\ u = u$

✓ Usando estas 10 propiedades se pueden realizar manipulaciones algebraicas de los vectores de $\mathbb{R}^n$ de manera muy similar a como se hace con números reales.

Espacios Vectoriales

El espacio $\mathbb{R}^n$

Teorema 3 (Propiedades del vector cero y del opuesto)

Sea $\mathbf{v}$ un vector de $\mathbb{R}^n$ y sea c un escalar. Se verifican:

1. *El neutro es único. Es decir, si $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{v}$, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.*
2. *El opuesto es único. Es decir, si $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$.*
3. $0\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$
4. $c\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$
5. *Si $c\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$, entonces $c = 0$ ó bien $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.*
6. $-(-\mathbf{v}) = \mathbf{v}$

Espacios Vectoriales

✓ Las operaciones de suma de vectores y producto por un escalar verifican las 10 propiedades enunciadas en los teoremas anteriores.

✓ Muchas magnitudes matemáticas (tales como matrices, polinomios y funciones) comparten también estas propiedades.

✓ Todo conjunto que satisface esas diez propiedades (o **axiomas**) se llama **espacio vectorial**, y sus elementos se llaman **vectores**.

Espacios Vectoriales

Definición 3 (Espacio vectorial sobre un cuerpo)

Sea $\mathcal{V}$ un conjunto no vacío, a cuyos elementos llamaremos **vectores**. *Se considera un cuerpo $\mathcal{K}$ a cuyos elementos llamaremos* **escalares**. *Se dice que $\mathcal{V}$ es un* **espacio vectorial** *sobre $\mathcal{K}$ si en $\mathcal{V}$ hay definidas:*

1. *una operación interna $+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ tal que $(\mathcal{V}, +)$ es grupo abeliano.*
2. *una ley de composición externa $\cdot : \mathcal{K} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ que verifica las siguientes propiedades:*
   1. **Distributiva respecto a vectores:** $\forall c \in \mathcal{K},\quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V},\quad c(\vec{v} + \vec{w}) = c\vec{v} + c\vec{w}$
   2. **Distributiva respecto a escalares:** $\forall c, d \in \mathcal{K},\quad \forall \vec{v} \in \mathcal{V},\quad (c + d)\vec{v} = c\vec{v} + d\vec{v}$
   3. **Pseudoasociativa:** $\forall c, d \in \mathcal{K},\quad \forall \vec{v} \in \mathcal{V},\quad c(d\vec{v}) = (c \cdot d)\vec{v}$
   4. **Neutralidad:** $\exists 1 \in \mathcal{K},$ *tal que* $\forall \vec{v} \in \mathcal{V},\quad 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

Espacios Vectoriales

Ejemplos Son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$:

- El conjunto $\mathbb{R}^n$ de las n -tuplas ordenadas de números reales con las operaciones usuales.
- El conjunto $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ de matrices $2x3$, con las operaciones usuales de suma y producto por un escalar.
- El conjunto $\mathbb{R}_2(x)$ de los polinomios de la forma

$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

donde a_0, a_1, a_2 son números reales. La suma de dos polinomios $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ y $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$, es la ususal

$$p(x) + q(x) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

y el producto por un escalar $c \in \mathbb{R}$, es

$$c \cdot p(x) = (c \cdot a_2)x^2 + (c \cdot a_1)x + (c \cdot a_0)$$

Espacios Vectoriales

Ejemplos Son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$:

- El conjunto $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$ de las funciones reales definidas en el intervalo $[0,1]$.

  La suma está definida

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

  y el producto por un escalar $c \in \mathbb{R}$

$$(c \cdot f)(x) = c \cdot [f(x)]$$

- El conjunto $\mathcal{C}([a,b])$ de las funciones reales continuas definidas en el intervalo $[a,b]$.

Espacios Vectoriales

Ejemplos Espacios vectoriales importantes que se citarán a menudo:

- $\mathbb{R}$:= conjunto de los números reales.
- $\mathbb{R}^2$:= conjunto de los pares ordenados de números reales.
- $\mathbb{R}^3$:= conjunto de las ternas ordenadas de números reales.
- $\mathbb{R}^n$:= conjunto de las n -tuplas ordenadas de números reales.
- $\mathcal{C}(-\infty,\infty)$:= conjunto de las funciones continuas en toda la recta real.
- $\mathcal{C}[a,b]$:= conjunto de las funciones continuas en el intervalo $[a,b]$.

Espacios Vectoriales

Ejemplos Espacios vectoriales importantes que se citarán a menudo:

- $\mathcal{K}_n(x)$: = conjunto de los polinomios de una indeterminada con coeficientes en el cuerpo $\mathcal{K}$ de grado menor o igual a n.
- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{K})$: = conjunto de las matrices $m \times n$ con entradas en el cuerpo $\mathcal{K}$.
- $\mathcal{M}_{n,n}(\mathcal{K})$: = conjunto de las matrices cuadradas $n \times n$ con entradas en el cuerpo $\mathcal{K}$.

Espacios Vectoriales

Teorema 4 (Propiedades de los vectores)

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathcal{K}$. Para cualesquiera $c,d \in \mathcal{K}$ y $\vec{u},\vec{v} \in \mathcal{V}$ se verifica:

1. $0\vec{v} = \vec{0}$.
2. $c\vec{0} = \vec{0}$.
3. *Si* $c\vec{v} = \vec{0}$, *entonces* $c = 0$ *ó bien* $\vec{v} = \vec{0}$.
4. $(-c)\vec{v} = -(c\vec{v}) = c(-\vec{v})$.
5. $c(\vec{u}-\vec{v}) = c\vec{u} - c\vec{v}$.
6. $(c-d)\vec{v} = c\vec{v} - d\vec{v}$.
7. *Si* $c\vec{v} = d\vec{v}$, *con* $\vec{v} \neq \vec{0}$, *entonces* $c = d$.
8. *Si* $c\vec{u} = c\vec{v}$, *con* $c \neq 0$, *entonces* $\vec{u} = \vec{v}$.

Espacios Vectoriales

Demostración:

1. $c\vec{v} \;= (c+0)\vec{v} \;= c\vec{v} + 0\vec{v} \;\Rightarrow 0\vec{v} \;= \vec{0}$
2. $c\vec{v} \;= c(\vec{v}+\vec{0}) \;= c\vec{v} + c\vec{0} \;\Rightarrow c\vec{0} \;= \vec{0}$
3. Si $c\vec{v} = \vec{0}$ y $c \neq 0$, entonces $c^{-1}c\vec{v} = c^{-1}\vec{0} = \vec{0}$
4. $c\vec{v} + (-c)\vec{v} \;= (c+(-c))\vec{v} \;= 0\vec{v} \;= \vec{0} \;\Rightarrow (-c)\vec{v} \;= -(c\vec{v})$
   $c\vec{v} + c(-\vec{v}) = c(\vec{v} + (-\vec{v})) = c\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow c(-\vec{v}) = -(c\vec{v})$

Espacios Vectoriales

Demostración:

5. Ejercicio
6. Ejercicio
7. $c\vec{v} = d\vec{v} \;\Rightarrow\; c\vec{v} - d\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow (c-d)\vec{v} = \vec{0}$.
   Luego, $c = d$, ya que $\vec{v} \neq \vec{0}$.
8. Si $c\vec{u} = c\vec{v}$, con $c \neq 0$, entonces $c^{-1}(c\vec{u}) = c^{-1}(c\vec{v})$.
   Luego, $\vec{u} = \vec{v}$.

Espacios Vectoriales

Subespacios vectoriales

Definición 4 (Subespacio Vectorial)

Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto no vacío del espacio vectorial $\mathcal{V}$. Se dice que $\mathcal{U}$ es ***subespacio vectorial*** *de $\mathcal{V}$ si $\mathcal{U}$ tiene estructura de espacio vectorial con las mismas operaciones que $\mathcal{V}$.*

Ejemplo

- El subconjunto $\mathcal{U}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_1 = 0 \right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$
- El subconjunto $\mathcal{U}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_2 = x_3 \right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$

Espacios Vectoriales

Subespacios vectoriales

Teorema 5 (Caracterización de los subespacios vectoriales)

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathcal{K}$ y sea $\emptyset \neq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Entonces $\mathcal{U}$ es subespacio vectorial de $\mathcal{V}$ si, y sólo si, se verifican las siguientes propiedades:

1. *Si $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{U}$, entonces $\vec{v} + \vec{w} \in \mathcal{U}$*
2. *Si $c \in \mathcal{K}$ y $\vec{v} \in \mathcal{U}$, entonces $c\vec{v} \in \mathcal{U}$*

- Usando el teorema anterior resulta más fácil determinar si un subconjunto es subespacio vectorial.
- En vez de comprobar todos los axiomas de la definición de espacio vectorial nos basta con demostrar que se verifican (1) y (2).

Ejemplo El subconjunto

$$\mathcal{U} = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_2 = x_3 \right\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

Ejercicio

1. En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se considera el subconjunto $\mathcal{A}$ formado por las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$
Demuestra que $\mathcal{A}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Sea el espacio vectorial $\mathcal{V} = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Estudia si los subconjuntos siguientes son subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$.
   1. $\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid |A| = 0\}$
   2. $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid A^2 = A\}$
3. Sea $\mathcal{V}$ el espacio vectorial de las funciones reales de variable real. Demuestra que:
   1. El conjunto de las funciones pares es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$.
   2. El conjunto de las funciones tales que $f(x^2) = (f(x))^2$ no es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$.

Definición 5 (Intersección de subespacios vectoriales)

Sean $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ subespacios vectoriales de un espacio vectorial $\mathcal{V}$.
*La **intersección** de $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ es el conjunto*

$$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \left\{ \vec{u} \in \mathcal{V} \mid \vec{u} \in \mathcal{U}_1 \quad \text{y} \quad \vec{u} \in \mathcal{U}_2 \right\}$$

de todos los vectores de $\mathcal{V}$ que están en $\mathcal{U}_1$ y en $\mathcal{U}_2$.

Ejemplo La intersección de los subespacios

$$\mathcal{U}_1 = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0 \right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{U}_2 = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0 \right\}$$

es

$$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3 = 0 \right\}$$

Teorema 6

La intersección de dos subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$.

Demostración: Sean $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$. Entonces

- El vector $\vec{0} \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \Longrightarrow \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \neq \emptyset$
- Sean $\vec{v}$ y $\vec{w} \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$. Veamos que $\vec{v} + \vec{w} \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$.

Demostración:

- Por definición de intersección de subespacios,

$$\vec{v} \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \Longleftrightarrow \vec{v} \in \mathcal{U}_1 \quad \text{y} \quad \vec{v} \in \mathcal{U}_2$$

$$\vec{w} \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \Longleftrightarrow \vec{w} \in \mathcal{U}_1 \quad \text{y} \quad \vec{w} \in \mathcal{U}_2$$

- Por ser $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ subespacios, tenemos que $\vec{v} + \vec{w} \in \mathcal{U}_1$ y $\vec{v} + \vec{w} \in \mathcal{U}_2$.
- Por lo tanto, $\vec{v} + \vec{w} \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$.

Demostración (cont.):

- Sean $a \in \mathcal{K}$ y $\vec{v} \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$. Veamos que $a\vec{v} \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$.
- Por definición de intersección de subespacios,

$$\vec{v} \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \Longleftrightarrow \vec{v} \in \mathcal{U}_1 \quad \text{y} \quad \vec{v} \in \mathcal{U}_2$$

- Por ser $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ subespacios, tenemos que $a\vec{v} \in \mathcal{U}_1$ y $a\vec{v} \in \mathcal{U}_2$
- Por lo tanto, $a\vec{v} \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$.

Definición 6 (Unión de subespacios vectoriales)

Sean $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ subespacios vectoriales de un espacio vectorial $\mathcal{V}$. La ***unión*** *de $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ es el conjunto*

$$\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 = \{\vec{u} \in \mathcal{V} \mid \vec{u} \in \mathcal{U}_1 \quad o \quad \vec{u} \in \mathcal{U}_2\}$$

de todos los vectores de $\mathcal{V}$ que están en $\mathcal{U}_1$ o en $\mathcal{U}_2$.

Ejemplo La unión de los subespacios

$$\mathcal{U}_1 = \left\{\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{U}_2 = \left\{\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\right\}$$

es

$$\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 = \left\{\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0 \quad \text{ó} \quad x_3 = 0\right\}$$

☛ En general, la **unión** de **subespacios vectoriales** no es un **subespacio.**

Espacios Vectoriales
Sistemas de generadores

Definición 7 (Sistema de vectores)
*Un **sistema de vectores** es todo subconjunto* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \subset \mathcal{V}$.

Ejemplo

- En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, un sistema de vectores es

$$\left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

- En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2(x)$, un sistema de vectores es

$$\{2 - x + x^2,\ 2x + x^2,\ 4 - 4x + x^2\}$$

- En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, un sistema de vectores es

$$\left\{A = \begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 0\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix}0 & -1\\2 & 2\end{pmatrix}\right\}$$

Espacios Vectoriales
Sistemas de generadores

Definición 8 (Combinación lineal)
*Una **combinación lineal** de los vectores del sistema* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \subset \mathcal{V}$ *es toda expresión de la forma*

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *son escalares del cuerpo* $\mathcal{K}$.

Ejemplo Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. La expresión

$$2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$$

es una combinación lineal del sistema $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

Espacios Vectoriales
Sistemas de generadores

Ejemplo (cont.) Por ser $\mathbb{R}^3$ un espacio vectorial, obtenemos

$$2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 = 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Así, decimos que **el vector** $\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$ **se expresa como combinación lineal de los vectores** $\vec{v}_1, \vec{v}_2$.

En general, si un vector

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n$$

diremos que **el vector** $\vec{v}$ **se expresa como combinación lineal de los vectores** $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$.

Espacios Vectoriales
Sistemas de generadores

✓ El vector $\vec{0}$ se expresa como combinación lineal de cualquier sistema de vectores

$$\vec{0} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \cdots + 0\vec{v}_n$$

✓ Todo vector $\vec{v}$ se puede expresar como combinación lineal de cualquier sistema al que pertenezca

$$\vec{v} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \cdots + 0\vec{v}_n + 1 \cdot \vec{v}$$

Espacios Vectoriales

Sistemas de generadores

Ejercicio Sean los vectores

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Estudia si $\mathbf{w}$ se puede expresar como combinación lineal de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$.

Solución: Se deben determinar escalares a, b y c tales que

$$\mathbf{w} = a\ \mathbf{v}_1 + b\ \mathbf{v}_2 + c\ \mathbf{v}_3$$

Espacios Vectoriales

Sistemas de generadores

Solución: Escribimos

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

De aquí obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & -b & + & 3c & = & -1 \\ a & + & b & + & c & = & -2 \\ 4a & + & 2b & + & 2c & = & -2 \end{array}$$

Resolvemos el sistema y obtenemos

$$a = 1 \qquad b = -2 \qquad c = -1$$

Por tanto, $\mathbf{w}$ se puede escribir como combinación lineal de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 - 2\,\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$$

Espacios Vectoriales

Sistemas de generadores

Ejercicio En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2(x)$, se consideran los vectores

$$2 - x + x^2, \quad 2x + x^2, \quad 4 - 4x + x^2$$

- Estudia si $4 - 4x + x^2$ se puede expresar como combinación lineal de $2 - x + x^2$ y $2x + x^2$.

Espacios Vectoriales

Sistemas de generadores

Ejercicio En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, se consideran los vectores

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Estudia si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ se puede expresar como combinación lineal de $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Espacios Vectoriales
Sistemas de generadores

Teorema 7 (Subespacio generado por un sistema de vectores)

Sea $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ *un sistema de vectores de un espacio vectorial* $\mathcal{V}$.
El conjunto de todas las combinaciones lineales

$$\left\{a_1\vec{v}_1 + \cdots + a_p\vec{v}_p \mid a_1, \ldots, a_p \in \mathcal{K}\right\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$.

- Este subespacio se llama ***subespacio generado*** por $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ y se denota

$$\mathcal{L}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$$

- El sistema $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ se llama ***sistema generador*** del subespacio.

Ejercicio

1. Determina $a, b \in \mathbb{R}$ para que el vector $(1, 0, a, b)$ pertenezca al subespacio generado por el sistema $\{(1, 4, -5, 2), (1, 2, 3, -1)\}$
2. Estudia si el sistema $\{(1, 1, 2), (1, 2, 0), (1, 0, 3)\}$ genera $\mathbb{R}^3$.

Espacios Vectoriales
Sistemas de generadores

Ejemplo (cont.)
Podemos encontrar otros sistemas generadores de

$$\mathcal{W} = \left\{\vec{w} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\right\}$$

Por ejemplo

$$\left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Espacios Vectoriales
Sistemas de generadores

Ejemplo En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$, el sistema

$$\left\{\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

es un sistema generador del subespacio

$$\mathcal{W} = \left\{\vec{w} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\right\}$$

En efecto,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{W} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Espacios Vectoriales
Sistemas de generadores

✓ Estudiaremos cómo **determinar sistemas que generan el mismo subespacio** y

✓ aprenderemos a **pasar de uno a otro** que sea más fácil de manejar.

✓ También nos ocuparemos de buscar un **sistema** que **genere todo** el espacio vectorial $\mathcal{V}$.

Ejemplo En $\mathbb{R}^3$ se consideran los sistemas de vectores

$$\left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \quad y \quad \left\{\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

y el vector $\vec{v} = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$.

Teniendo en cuenta que

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \qquad \text{y} \qquad \vec{v}_2 = \vec{u}_1 - \vec{u}_3$$

resulta

$$\vec{v} = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + 2(\vec{u}_1 - \vec{u}_3) = (1+2)\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3 = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3$$

Lema 1 (**Transitividad** de las combinaciones lineales)

Sean $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ y $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\}$ sistemas de vectores de un espacio vectorial $\mathcal{V}$. Si un vector $\vec{v}$ se expresa como una combinación lineal de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ y cada uno de estos vectores, a su vez, es combinación lineal de $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\}$, entonces el vector $\vec{v}$ también podrá ser expresado linealmente en función de los vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\}$.

Demostración: Sean $\{v_1, \ldots, v_p\}$ y $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, tales que para cada $i : 1, 2, \ldots, p$, $\vec{v}_i = b_{i1}\vec{u}_1 + b_{i2}\vec{u}_2 + \cdots + b_{im}\vec{u}_m$ con $b_{ij} \in \mathbb{R}$, $j : 1, \ldots, m$.

Si $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_p\vec{v}_p$, con $a_i \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}\vec{v} &= a_1(b_{11}\vec{u}_1 + b_{12}\vec{u}_2 + \cdots + b_{1m}\vec{u}_m) + \\ &\quad a_2(b_{21}\vec{u}_1 + b_{22}\vec{u}_2 + \cdots + b_{2m}\vec{u}_m) + \quad \cdots + \\ &\quad a_p(b_{p1}\vec{u}_1 + b_{p2}\vec{u}_2 + \cdots + b_{pm}\vec{u}_m) \\ &= (a_1b_{11} + a_2b_{21} + \cdots + a_pb_{p1})\vec{u}_1 + \\ &\quad (a_1b_{12} + a_2b_{22} + \cdots + a_pb_{p2})\vec{u}_2 + \quad \cdots + \\ &\quad (a_1b_{1m} + a_2b_{2m} + \cdots + a_pb_{pm})\vec{u}_m\end{aligned}$$

Definición 9 (Sistemas equivalentes de vectores)

*Sean $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_p\}$ y $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_m\}$ dos sistemas de vectores. Se dice que son **equivalentes** si cada vector del primer sistema se expresa como combinación lineal de los vectores del segundo sistema y viceversa.*

Ejemplo Estudia si son equivalentes los sistemas

$$\left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

y

$$\left\{\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Espacios Vectoriales
Sistemas de generadores

Solución: Los sistemas

$$\left\{\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\vec{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\vec{v}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\vec{v}_4=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

y

$$\left\{\vec{u}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\vec{u}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\vec{u}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

son equivalentes, ya que

$$\begin{array}{lllllll}\vec{v}_1 & = & 3\vec{u}_1-\vec{u}_2-\vec{u}_3, & \quad & \vec{u}_1 & = & \vec{v}_2-2\vec{v}_3+\vec{v}_4\\ \vec{v}_2 & = & 2\vec{u}_1-\vec{u}_2-\vec{u}_3, & & \vec{u}_2 & = & \vec{v}_2-3\vec{v}_3+\vec{v}_4\\ \vec{v}_3 & = & \vec{u}_1-\vec{u}_2, & & \vec{u}_3 & = & -\vec{v}_3+\vec{v}_4\\ \vec{v}_4 & = & \vec{u}_1-\vec{u}_2+\vec{u}_3 & & & & \end{array}$$

Espacios Vectoriales
Sistemas de generadores

Teorema 8 (Criterio de equivalencia de sistemas de vectores)

Los sistemas $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v}_p\}$ y $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\cdots,\vec{u}_m\}$ son equivalentes si, y sólo si, generan el mismo subespacio.

$$\mathcal{L}(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v}_p)=\mathcal{L}(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\cdots,\vec{u}_m)$$

Demostración: Ejercicio

Espacios Vectoriales
Sistemas de generadores

- ✓ La equivalencia de sistemas de vectores verifica las propiedades **reflexiva, simétrica** y **transitiva.**
- ✓ Por lo tanto es una **relación de equivalencia** en $\mathcal{V}$.
- ✓ Como toda relación de equivalencia particionará a $\mathcal{V}$ en **clases de equivalencia.**
- ✓ En cada clase estarán todos los sistemas que generen el **mismo** subespacio.

Espacios Vectoriales
Dependencia e Independencia Lineal

Definición 10 (Dependencia e Independencia lineal)

*Se dice que un sistema de vectores $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\}$ es **linealmente dependiente** (**l. d.**) si algún vector del sistema se puede expresar como combinación lineal de los demás.*

*Es caso contrario, si ninguno de sus vectores se puede expresar como combinación lineal de los demás, se dice que el sistema es **linealmente independiente** (**l. i.**)*

Ejemplo

- En $\mathbb{R}^3$ el sistema $\left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}\right\}$ es **linealmente dependiente**, ya que podemos encontrar la combinación lineal

$$2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 = 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix} = \vec{v}_3$$

- El sistema $\left\{\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ del mismo espacio vectorial es **linealmente independiente** puesto que ninguno de sus vectores se puede expresar como combinacion lineal de los demás.

Ejemplos

- En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2(x)$, el sistema $\{2 - x + x^2, 2x + x^2, 4 - 4x + x^2\}$ es **linealmente dependiente**, porque

$$4 - 4x + x^2 = 2(2 - x + x^2) - (2x + x^2)$$

- En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, el sistema $\left\{A = \begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 0\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix}0 & -1\\2 & 2\end{pmatrix}\right\}$ es **linealmente dependiente**, porque

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -1\\2 & 2\end{pmatrix} = B + C$$

Ejemplo

- En el espacio vectorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, el sistema $\{1, \cos(2x), \cos^2 x\}$ es **linealmente dependiente**, ya que

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}\cos(2x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

- En el espacio vectorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, el sistema $\{\operatorname{sen} x \cos x, \operatorname{sen} 2x\}$ es **linealmente dependiente**,ya que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

Teorema 9 (Criterio de la dependencia lineal)

1. *El sistema de vectores* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ *es* **linealmente dependiente** *si, y sólo si, existe alguna combinación lineal*

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_p\vec{v}_p = \vec{0}$$

con algún coeficiente a_i *no nulo.*

2. *El sistema de vectores* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ *es* **linealmente independiente** *si, y sólo si, , de toda combinación lineal*

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_p\vec{v}_p = \vec{0}$$

se deduce que **todos** *los coeficientes* a_i *son nulos.*

Ejemplo 1 El sistema

$$\left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}\right\}$$

es linealmente dependiente, ya que podemos encontrar una combinación lineal igual a $\vec{0}$ con algún coeficiente no nulo

$$2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 - \vec{v}_3 = 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix} = \vec{0}$$

Ejercicio Estudia para qué valores $a, b \in \mathbb{R}$ es linealmente independiente el sistema $\{(a,1,a),(b,a,b),(1,b,a)\}$

¿Cómo pasar de un sistema de vectores de $\mathbb{R}^n$ a otro sistema equivalente que sea escalonado?

Teorema 10

Dado un sistema de vectores, pasamos a otro sistema equivalente si efectuamos **una** *de las siguientes transformaciones:*

1. *Permutar dos vectores.*
2. *Multiplicar cualquier vector por un escalar distinto de cero.*
3. *Sumar a cualquier vector una combinación lineal de los vectores restantes.*
4. *Eliminar del sistema cualquier vector que sea combinación lineal de los vectores restantes.*

Cada una de estas transformaciones se llama: **transformación elemental**.

Demostración: Ejercicio

Ejemplo 2 El sistema

$$\left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\right\}$$

es **l. i.**, ya que de cualquier combinación lineal igual a $\vec{0}$

$$a_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

deducimos $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

- En este ejemplo de $\mathbb{R}^3$ ha sido muy fácil detectar la independencia lineal porque el sistema es **escalonado**
- En general, en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ si el sistema es escalonado es inmediato deducir que los coeficientes a_i son todos nulos.

Ejemplo En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera el sistema

$$\mathcal{S} = \left\{\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{u}_4 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}\right\}$$

Halla un sistema escalonado que sea equivalente a $\mathcal{S}$

Solución: Aplicando transformaciones elementales se obtienen los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{rcl} \vec{u}_1 &=& (1,1,1)\\ \vec{u}_2 &=& (1,2,3)\\ \vec{u}_3 &=& (1,0,1)\\ \vec{u}_4 &=& (1,-1,-3)\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} \vec{v}_1 &=& (1,1,1)\\ \vec{v}_2 &=& (0,1,2)\\ \vec{v}_3 &=& (0,-1,0)\\ \vec{v}_4 &=& (0,-2,-4)\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} \vec{w}_1 &=& (1,1,1)\\ \vec{w}_2 &=& (0,1,2)\\ \vec{w}_3 &=& (0,0,2)\\ \vec{w}_4 &=& (0,0,0)\end{array}$$

- Por ser $\vec{w}_4 = (0,0,0)$, se deduce que **el vector** $\vec{u}_4$ **es combinación lineal de los vectores anteriores.** Luego $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es un sistema equivalente a $\mathcal{S}$
- $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ es un sistema escalonado equivalente a $\mathcal{S}$

Ejemplo 3

- En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2(x)$, el sistema $\{x^2, 1+x, -1+x\}$ es **linealmente independiente** porque si una combinación lineal

$$ax^2 + b(1+x) + c(-1+x) = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

entonces

$$ax^2 + (b+c)x + (b-c) = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Por consiguiente,

$$a = 0, \qquad b + c = 0, \qquad b - c = 0$$

De donde

$$a = b = c = 0$$

Ejemplo 4

- En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2(x)$, el sistema $\{1-x^2, 1+x, 1-x\}$ es **linealmente independiente** porque si una combinación lineal

$$a(1-x^2) + b(1+x) + c(1-x) = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

entonces

$$(-a)x^2 + (b-c)x + (a+b+c) = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Por consiguiente,

$$-a = 0, \qquad b - c = 0, \qquad a + b + c = 0$$

De donde

$$a = b = c = 0$$

Ejemplo 5 En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, el sistema

$$\left\{A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right\}$$

es **linealmente independiente** porque si una combinación lineal

$$aA + bB + cM + dN = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} a+b & -a-c+d \\ 2a+2c & -2b-2c-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 5(cont.)

$$\begin{pmatrix} a+b & -a-c+d \\ 2a+2c & -2b-2c-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & b & & & & & = & 0 \\ -a & & & - & c & + & d & = & 0 \\ 2a & & & + & 2c & & & = & 0 \\ & - & 2b & - & 2c & - & 2d & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 0 \\ b & = & 0 \\ c & = & 0 \\ d & = & 0 \end{array}\right.$$

Teorema 11 (Propiedades de la dependencia lineal)

1. *Si un sistema* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ *es linealmente independiente, entonces cualquier subconjunto de él también es linealmente independiente.*

2. *Si un sistema contiene a un sistema linealmente dependiente, entonces también es linealmente dependiente. En particular, si un sistema contiene al vector* $\vec{0}$, *dicho sistema es linealmente dependiente.*

Demostración:

1. Sea $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\} \subseteq \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$, donde $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ es linealmente independiente.

✓ Entonces, de cualquier combinación lineal

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_m\vec{v}_m = \vec{0}$$

podemos obtener

$$a_1\vec{v}_1 + \cdots + a_m\vec{v}_m + 0\vec{v}_{m+1} + \cdots + 0\vec{v}_p = \vec{0}$$

✓ De aquí, por ser $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ un sistema l. i., deducimos que

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$$

Demostración (cont.):

2. Sea $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\} \subseteq \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$, donde $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$ es un sistema linealmente dependiente.

✓ Entonces, existe una combinación lineal

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_m\vec{v}_m = \vec{0}$$

con algún coeficiente a_i no nulo.

✓ De esta combinación lineal podemos pasar a

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_m\vec{v}_m + 0\vec{v}_{m+1} + \cdots + 0\vec{v}_p = \vec{0}$$

✓ Así, tenemos una combinación lineal igual a $\vec{0}$ con algún coeficiente no nulo con los vectores del sistema $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m, \ldots, \vec{v}_p\}$.

✓ Por lo tanto, dicho sistema es **linealmente dependiente**.

Teorema 12 (Propiedades de la independencia lineal)

1. *Si un vector* $\vec{v} \in \mathcal{V}$ *se expresa de forma* **única** *como combinación lineal de los vectores del sistema* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$, *entonces* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$ *es linealmente independiente.*

2. *Si* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$ *es un sistema linealmente independiente, entonces todo vector* $\vec{v} \in \mathcal{L}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m)$ *se expresa de forma* **única**.

Demostración:

1. Supongamos que $\boxed{a_1\vec{v}_1 + \cdots + a_m\vec{v}_m = \vec{v} \quad (1)}$ de forma **única**.

✓ Consideramos $\boxed{b_1\vec{v}_1 + \cdots + b_m\vec{v}_m = \vec{0} \quad (2)}$

✓ Sumando (1) y (2), obtenemos

$$(b_1 + a_1)\vec{v}_1 + \cdots + (b_m + a_m)\vec{v}_m = \vec{v}$$

✓ De aquí, por ser única la expresión de $\vec{v}$, resulta

$$\left\{ \begin{array}{rclcrcl} b_1 + a_1 & = & a_1 & \Longrightarrow & b_1 & = & 0 \\ & \vdots & & & & \vdots & \\ b_m + a_m & = & a_m & \Longrightarrow & b_m & = & 0 \end{array} \right.$$

✓ Por lo tanto, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$ es **linealmente independiente.**

Demostración:

2. Supongamos que un vector $\vec{v} \in \mathcal{L}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m)$ se puede expresar de dos formas distintas en función del sistema $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ que es linealmente independiente:

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_m\vec{v}_m = a'_1\vec{v}_1 + a'_2\vec{v}_2 + \cdots + a'_m\vec{v}_m$$

✓ De aquí obtenemos

$$(a_1 - a'_1)\vec{v}_1 + (a_2 - a'_2)\vec{v}_2 + \cdots + (a_m - a'_m)\vec{v}_m = \vec{0}$$

✓ Y, por ser $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ un sistema l.i.

$$(a_1 - a'_1) = (a_2 - a'_2) = \cdots = (a_m - a'_m) = 0$$

✓ Luego $a_1 = a'_1, \quad a_2 = a'_2, \ldots, \quad a_m = a'_m$

✓ Pero esto es una contradicción con la suposición inicial.

✓ Por tanto, solo hay una forma de expresar cada vector $\vec{v}$ en función de un sistema linealmente independiente. □

Teorema 13

Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$ un sistema linealmente dependiente (con algún vector no nulo), entonces podemos encontrar un subsistema linealmente independiente que genere el mismo subespacio.

Demostración:

✓ Por ser $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ un sistema l.d., podemos encontrar un vector (supongamos $\vec{v}_m$) que se exprese como combinación lineal de los demás.

✓ Entonces eliminamos $\vec{v}_m$ y estudiamos el sistema $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{m-1}\}$.

- ✓ Si es linealmente independiente, ya hemos encontrado el subsistema buscado.
- ✓ En caso contrario, repetimos el mismo proceso.

Demostración (cont.):

✓ Continuando de esta forma, pasaremos del sistema inicial

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$$

a otro sistema

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\}$$

con $r \leq m$.

✓ En este nuevo sistema habrá sólo un vector no nulo o bien **ninguno de los vectores se expresará como combinación lineal de los demás.**

✓ Es decir, **este subsistema será linealmente independiente.**

Demostración (cont.):
Veamos ahora que genera el mismo subespacio

$$\mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m) = \mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r)$$

Demostraremos la igualdad mediante la doble inclusión.

✓ Ya que $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\} \subseteq \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$, se verfica

$$\mathcal{L}(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_r) \subseteq \mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m)$$

Ejemplo En el sistema linealmente dependiente

$$\left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

tenemos

$$\vec{v}_3 = 2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$$

✓ Así pues, eliminamos $\vec{v}_3$.

✓ A continuación estudiamos el sistema $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ y comprobamos que ninguno de sus vectores se expresa en función del otro.

✓ Por lo tanto, este es el subsistema l. i. buscado.

Demostración (cont.):

✓ Por otra parte, cada vector $\vec{v} \in \mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m)$, se expresa

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_r\vec{v}_r + a_{r+1}\vec{v}_{r+1} + \cdots + a_m\vec{v}_m$$

✓ Sustituyendo cada uno de los vectores $\vec{v}_{r+1}, \vec{v}_{r+2}, \ldots, \vec{v}_m$ por su expresión respecto a los demás, obtenemos una combinación lineal de los vectores

$$\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$$

✓ Luego

$$\mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m) \subseteq \mathcal{L}(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_r)$$

✓ Por lo tanto,

$$\mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m) = \mathcal{L}(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_r)$$

□

Ejemplo (cont.)
Además, para todo vector $\vec{v}$ que se exprese como combinación lineal de

$$\left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \vec{v} &= a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 \\ &= a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c(2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2) \\ &= (a + 2c)\vec{v}_1 + (b + 3c)\vec{v}_2 \end{aligned}$$

Espacios Vectoriales
Bases y dimensión: Introducción

- Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial distinto de $\{\vec{0}\}$.
- Entonces existirá al menos un vector $\vec{0} \neq \vec{v} \in \mathcal{V}$.
- Luego, en $\mathcal{V}$ existe al menos un sistema linealmente independiente formado por lo menos por un vector.
- Por lo tanto, en $\mathcal{V}$ son posibles dos casos:
  - Existe un sistema **l.i.** que contiene un nº de vectores tan grande como se quiera.
  - Existe un sistema **l.i.** que contiene el nº **máximo** de vectores.
- Los espacios vectoriales del último caso se llaman **espacios vectoriales de tipo finito**
- En particular, un espacio vectorial de este tipo será cualquier subespacio generado por un sistema finito de vectores.

Espacios Vectoriales
Bases y dimensión

Definición 11 (Base de un espacio vectorial)

Se dice que el sistema $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ *es una **base** de* $\mathcal{V}$ *si*

1. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ *es generador y*
2. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ *es linealmente independiente.*

Ejemplo

- $\left\{\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ es una base del subespacio

$$\mathcal{W} = \left\{\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x_3\right\}$$

- $\mathcal{C} = \left\{\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ es una base del espacio $\mathbb{R}^3$, llamada **base canónica** o **standard**.

Espacios Vectoriales
Bases y dimensión

Ejemplos

- El sistema $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ es una base de $\mathbb{R}_n(x)$ y se llama **base standard** de $\mathbb{R}_n(x)$.
- El sistema $\{1, x, x^2, ..., x^n, ...\}$ es una base de $\mathbb{R}(x)$ y se llama **base standard** de $\mathbb{R}(x)$.
- El sistema

$$\left\{E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

  es una base de $\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ y se llama **base standard** de $\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$.
- El sistema $\{E_{11}, E_{12}, ..., E_{1n}, E_{21}, E_{22}, ..., E_{2n}, \ldots, E_{m1}, E_{m2}, ..., E_{mn}\}$ es una base de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ y se llama **base standard** de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$.

Espacios Vectoriales
Bases y dimensión

Ejercicios

1. En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se considera el subconjunto $\mathcal{A}$ formado por las matrices de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

   - Demuestra que $\mathcal{A}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   - Halla una base de $\mathcal{A}$

Teorema 14

1. *Si* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ *es una base de un espacio vectorial* $\mathcal{V}$ *y* $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k\}$ *es un sistema linealmente independiente, entonces* $k \leq n$.
2. *Si* $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ *y* $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$ *son bases de un espacio vectorial* $\mathcal{V}$, *entonces* $n = m$.

- La **base** es el sistema **l. i.** con el **máximo** número de vectores.
- Todas las bases tienen el **mismo** número de vectores.

A este número n se le llama **dimensión** del espacio vectorial y escribimos

$$dim(\mathcal{V}) = n$$

Por definición, el espacio vectorial $\{\vec{0}\}$ tiene dimensión cero.

Ejemplo

- $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión n, ya que

$$\mathcal{C} = \left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

  es una base.
- $\mathbb{R}_n(x)$ tiene dimensión $n+1$, ya que $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ es una base.
- $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ tiene dimensión $m \cdot n$, ya que

$$\{E_{11}, E_{12}, ..., E_{1n}, E_{21}, E_{22}, ..., E_{2n}, \ldots, E_{m1}, E_{m2}, ..., E_{mn}\}$$

  es una base.

Ejercicio En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se considera el subconjunto $\mathcal{A}$ formado por las matrices de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

1. Demuestra que $\mathcal{A}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Halla una base de $\mathcal{A}$

Ejercicio En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas reales de orden dos se considera el subconjunto $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b+c \\ -b+c & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Prueba que $\mathcal{E}$ es un espacio vectorial y que

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base.

Ejemplo En $\mathbb{R}^4$, el subespacio

$$\mathcal{W} = \mathcal{L}\left(\left\{\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{u}_4 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \vec{u}_5 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}\right)$$

tiene dimensión 3, ya que podemos encontrar la base

$$\mathcal{B}_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\right\}$$

También son bases

$$\mathcal{B}_2 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\3\\5\end{pmatrix}\right\} \qquad \mathcal{B}_3 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Teorema 15 (Propiedades de la dimensión)

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial de dimensión n. Entonces

1. *Cualquier sistema $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{n+1}\}$ con $n+1$ vectores es* **l.d.**
2. *Un sistema de n vectores es base de $\mathcal{V}$ si, y sólo si, es generador* **o** *es linealmente independiente.*

$$\left\{ \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \text{ es base} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (1)\ \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \text{ es generador} \\ \text{ó bien} \\ (2)\ \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \text{ es l. i.} \end{array} \right\}$$

3. *Si $\mathcal{L}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$, entonces $\dim(\mathcal{L}) \leq n$.*

Ejercicios

2. Demuestra que $\{1+x, -1+x, x^2\}$ es una base de $\mathbb{R}_2(x)$.
3. Sea $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ una base de un espacio vectorial $\mathcal{V}$. Prueba que
$$\mathcal{B}_2 = \{2\vec{v}_1, -\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_4 - \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_3\}$$
también es una base de $\mathcal{V}$.

Ejemplo

- Demuestra que el sistema $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$.

Solución:

✓ Estamos en un espacio vectorial de dimensión 4 y tenemos un sistema con 4 vectores exactamente;

✓ así pues, probaremos que es base demostrando que es linealmente independiente ó bien que es generador.

✓ En este caso, (por ser escalonado), es inmediato que es linealmente independiente.

☛ En general, **en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ (de dimensión n) cualquier sistema escalonado formado por n vectores es una base.**

¿Cómo podemos obtener una base de todo el espacio vectorial $\mathcal{V}$ a partir de un sistema linealmente independiente?

Teorema 16 (Completación de la base)

Si en un subespacio vectorial $\mathcal{L}$ de dimensión m se ha elegido una base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_m\}$, entonces en el espacio vectorial $\mathcal{V}$ de dimensión n podemos elegir los vectores $\vec{u}_{m+1}, \cdots, \vec{u}_n$ de tal forma que el sistema $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_m, \vec{u}_{m+1}, \cdots, \vec{u}_n\}$ será la base de $\mathcal{V}$.

$$\textit{Base del subespacio } \mathcal{L}: \quad \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_m\}$$

$$\textit{Base de } \mathcal{V}: \quad \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_m, \vec{u}_{m+1}, \cdots, \vec{u}_n\}$$

Ejercicio En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera el subespacio $\mathcal{L}$ generado por el sistema

$$\left\{\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}\right\}$$

Halla una base para $\mathcal{L}$ y complétala para $\mathbb{R}^3$.

Solución:

Para determinar una base de $\mathcal{L}$ basta encontrar un sistema l. i. que sea equivalente al sistema generador de $\mathcal{L}$

$$\begin{array}{lcl} \vec{u}_1 &=& (-1,2,0) \\ \vec{u}_2 &=& (2,1,3) \\ \vec{u}_3 &=& (1,8,6) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{lcl} \vec{v}_1 &=& (-1,2,0) \\ \vec{v}_2 &=& (0,5,3) \\ \vec{v}_3 &=& (0,10,6) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{lcl} \vec{w}_1 &=& (-1,2,0) \\ \vec{w}_2 &=& (0,5,3) \\ \vec{w}_3 &=& (0,0,0) \end{array}$$

Así, tenemos la base $\left\{\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ del subespacio $\mathcal{L}$.

Esta base puede completarse fácilmente a una base de $\mathbb{R}^3$, basta con añadir el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En este ejemplo ha resultado tan fácil completar la base porque teníamos vectores escalonados. Los que faltan se obtienen añadiendo otros vectores escalonados hasta tener exactamente 3 vectores.

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, si tenemos que completar una base de un subespacio vectorial $\mathcal{L}$ procedemos de la siguiente manera:

1. Buscamos un sistema escalonado que sea equivalente al sistema dado.
2. Añadimos aquellos vectores necesarios para completar un sistema escalonado con n vectores.

Ejercicio En el espacio $\mathbb{R}^5$ se considera el subespacio $\mathcal{L}$ generado por el sistema

$$\mathcal{S}=\left\{\vec{u}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix},\vec{u}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\vec{u}_3=\begin{pmatrix}2\\4\\4\\6\\6\end{pmatrix},\vec{u}_4=\begin{pmatrix}3\\6\\5\\8\\8\end{pmatrix},\vec{u}_5=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$$

Halla un base de $\mathbb{R}^5$ a partir de una base de $\mathcal{L}$.

Solución: En primer lugar, realizamos transformaciones elementales para encontrar un sistema escalonado equivalente al sistema inicial.

$$\begin{array}{lll} \vec{u}_1 & = & (1,2,1,2,1) \\ \vec{u}_2 & = & (1,2,3,4,5) \\ \vec{u}_3 & = & (2,4,4,6,6) \\ \vec{u}_4 & = & (3,6,5,8,8) \\ \vec{u}_5 & = & (1,2,1,2,2) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{lll} \vec{v}_1 & = & (1,2,1,2,1) \\ \vec{v}_2 & = & (0,0,2,2,4) \\ \vec{v}_3 & = & (0,0,2,2,4) \\ \vec{v}_4 & = & (0,0,2,2,5) \\ \vec{v}_5 & = & (0,0,0,0,1) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \vec{w}_1 & = & (1,2,1,2,1) \\ \vec{w}_2 & = & (0,0,2,2,4) \\ \vec{w}_3 & = & (0,0,0,0,0) \\ \vec{w}_4 & = & (0,0,0,0,1) \\ \vec{w}_5 & = & (0,0,0,0,1) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{lll} \vec{x}_1 & = & (1,2,1,2,1) \\ \vec{x}_2 & = & (0,0,2,2,4) \\ \vec{x}_3 & = & (0,0,0,0,0) \\ \vec{x}_4 & = & (0,0,0,0,1) \\ \vec{x}_5 & = & (0,0,0,0,0) \end{array}$$

Solución (cont.): Después eliminamos los vectores igual a cero del último sistema y añadimos algún vector que permita completar un sistema escalonado con 5 vectores.

$$\begin{array}{lll} \vec{x}_1 & = & (1,2,1,2,1) \\ \vec{x}_2 & = & (0,0,2,2,4) \\ \vec{x}_3 & = & (0,0,0,0,0) \\ \vec{x}_4 & = & (0,0,0,0,1) \\ \vec{x}_5 & = & (0,0,0,0,0) \end{array} \quad \begin{array}{lll} \vec{x}_1 & = & (1,2,1,2,1) \\ -- & -- & ------- \\ \vec{x}_2 & = & (0,0,2,2,4) \\ -- & -- & ------- \\ \vec{x}_4 & = & (0,0,0,0,1) \end{array} \quad \begin{array}{l} (1,2,1,2,1) \\ \boxed{(0,\ *\ ,\ *\ ,\ *\ ,\ *)} \\ (0,0,2,2,4) \\ \boxed{(0,\ 0,\ 0,\ *\ ,\ *)} \\ (0,0,0,0,1) \end{array}$$

De esta forma, una posible base de $\mathbb{R}^5$ es

$$\mathcal{B}=\left\{\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix},\vec{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\vec{v}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\\4\end{pmatrix},\vec{v}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\vec{v}_5=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Definición 12

*El **rango** de un sistema de vectores es la dimensión del subespacio que genera.*

Ejemplo El sistema

$$\mathcal{S}=\left\{\vec{u}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix},\vec{u}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\vec{u}_3=\begin{pmatrix}2\\4\\4\\6\\6\end{pmatrix},\vec{u}_4=\begin{pmatrix}3\\6\\5\\8\\8\end{pmatrix},\vec{u}_5=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$$

genera un subespacio $\mathcal{L}$ de dimensión 3.

Por lo tanto, el rango de $\mathcal{S}$ es 3.

Espacios Vectoriales
Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

Toda matriz lleva asociados dos sistemas de vectores, uno formado por los vectores fila y el otro formado por los vectores columna.

Ejemplo Para la matriz $A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

tenemos el sistema de vectores fila

$$\{(1,0,4,2),(3,1,7,5),(1,0,3,2)\}$$

y el de vectores columna

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Espacios Vectoriales
Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

- La dimensión del subespacio que genera el sistema de vectores fila de A se puede determinar efectuando operaciones elementales en las filas de A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Así obtenemos que la dimensión del subespacio generado por el sistema de vectores fila de A es 3.
- Análogamente, efectuando operaciones elementales en las columnas de A, hallamos que la dimensión del subespacio vectorial generado por los vectores columna de A es 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Espacios Vectoriales
Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

Para cada matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, podemos definir

Rango de filas de A es el rango del sistema de los vectores fila de A.
Rango de columnas de A es el rango de los vectores columna de A.

Teorema 17

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, la dimensión del subespacio generado por el sistema de vectores fila de A coincide con la dimensión del subespacio generado por el sistema de vectores columna.

Así, teniendo en cuenta el teorema anterior, tenemos la siguiente

Definición 13 (Rango de una matriz)

Sea A una matriz $m \times n$. ***Rango de*** *A es el rango de filas (o de columnas) de A. Se denota $rang(A)$.*

Espacios Vectoriales
Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

Ejemplo Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

podemos hallar su rango mediante operaciones elementales en sus filas

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De esta forma, tenemos que $rang(A) = 2$.

Teorema 18

Si A es una matriz $m \times n$, entonces el sistema lineal homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ que se llama **núcleo** *de A y se denota $\mathcal{N}(A)$*

$$\mathcal{N}(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$$

La dimensión de $\mathcal{N}(A)$ se llama **nulidad** *de A.*

Ejemplo Halla el núcleo de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \qquad + 3x_4 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = -2x_2 - 3x_4 \\ x_2 = \quad x_2 \\ x_3 = \qquad\quad -x_4 \\ x_4 = \qquad\quad\ \ x_4 \end{array}\right\}$$

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- $\mathcal{N}(A)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$, que está determinado por el sistema homogéneo

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \qquad + 3x_4 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 = 0 \end{array}\right\}$$

  ecuaciones cartesianas del subespacio.
- Una **base** de $\mathcal{N}(A)$ es

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Teorema 19

Si A es una matriz $m \times n$ de rango r, entonces la dimensión del espacio de soluciones del sistema lineal $A\vec{x} = \vec{0}$ es $n - r$. Es decir,

$$n = rango(A) + nulidad(A)$$

Ejemplo Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

tenemos que $\text{rango}(A) = 2$ y $\text{nulidad}(A) = 2$

$$\dim(\mathbb{R}^4) = 4 = \text{rango}(A) + \text{nulidad}(A)$$

Teorema 20

Si $\vec{x}_p$ *es una solución del sistema lineal* $A\vec{x} = \vec{b}$, *entonces toda solución de este sistema es de la forma* $\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h$, *donde* $\vec{x}_h$ *es una solución del sistema homogéneo asociado* $A\vec{x} = \vec{0}$.

Ejemplo Halla el conjunto de vectores solución del sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & & -2x_3 + & x_4 & = & 5 \\ 3x_1 + & x_2 & -5x_3 & & = & 8 \\ x_1 & +2x_2 & & -5x_4 & = & -9 \end{array}\right\}$$

Espacios Vectoriales
Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

Solución:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -5 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & -5 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (U|c)$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & & -2x_3 + & x_4 & = & 5 \\ & x_2 + & x_3 & -3x_4 & = & -7 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 2x_3 - x_4 + 5 \\ x_2 = -x_3 + 3x_4 - 7 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{array}\right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Espacios Vectoriales
Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

Espacios Vectoriales
Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

Definición 14 (Suma de subespacios)

*Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$. La **suma** de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ es el conjunto*

$$\mathcal{U}+\mathcal{W}=\left\{\vec{v}\in\mathcal{V} \mid \vec{v}=\vec{u}+\vec{w}, \quad \text{con} \quad \vec{u}\in\mathcal{U} \quad \text{y} \quad \vec{w}\in\mathcal{W}\right\}$$

de todos los vectores de $\mathcal{V}$ que se expresan como suma de un vector de $\mathcal{U}$ y un vector de $\mathcal{W}$.

Ejemplo

$$\mathcal{U}=\left\{\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid x_1-x_3=0\right\} \qquad \mathcal{W}=\left\{\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2=0\right\}$$

$$\mathcal{U}+\mathcal{W}=\left\{\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid \vec{x}=\vec{u}+\vec{w}, \quad \text{con} \quad \vec{u}\in\mathcal{U} \quad \text{y} \quad \vec{w}\in\mathcal{W}\right\}$$

Espacios Vectoriales
Suma de subespacios vectoriales

Demostración (II):

2. Sean $\vec{v}$ y $\vec{v'}\in\mathcal{U}+\mathcal{W}$. Veamos que $\vec{v}+\vec{v'}\in\mathcal{U}+\mathcal{W}$.
   Por definición de suma de subespacios,

$$\vec{v}\in\mathcal{U}+\mathcal{W} \Longleftrightarrow \vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2, \quad \text{con} \quad \vec{v}_1\in\mathcal{U} \quad \text{y} \quad \vec{v}_2\in\mathcal{W}$$

$$\vec{v'}\in\mathcal{U}+\mathcal{W} \Longleftrightarrow \vec{v'}=\vec{v'}_1+\vec{v'}_2, \quad \text{con} \quad \vec{v'}_1\in\mathcal{U} \quad \text{y} \quad \vec{v'}_2\in\mathcal{W}$$

   Por ser $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ subespacios, tenemos que

$$\vec{v}_1+\vec{v'}_1\in\mathcal{U} \quad \text{y} \quad \vec{v}_2+\vec{v'}_2\in\mathcal{W}$$

   Por lo tanto,

$$\vec{v}+\vec{v'}=\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v'}_1+\vec{v'}_2=(\vec{v}_1+\vec{v'}_1)+(\vec{v}_2+\vec{v'}_2)\in\mathcal{U}+\mathcal{W}.$$

Espacios Vectoriales
Suma de subespacios vectoriales

Teorema 21

La suma de dos subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$ también es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$.

Demostración (I): Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$.
Entonces

1. Por ser $\mathcal{U}$ subespacio de $\mathcal{V}$, al menos $\vec{0}\in\mathcal{U}$.
   De la misma forma, al menos $\vec{0}\in\mathcal{W}$.
   Luego, $\vec{0}=\vec{0}+\vec{0}\in\mathcal{U}+\mathcal{W}$.
   Por lo tanto, $\mathcal{U}+\mathcal{W}\neq\emptyset$.

Espacios Vectoriales
Suma de subespacios vectoriales

Demostración (III):

3. Sean $a\in\mathcal{K}$ y $\vec{v}\in\mathcal{U}+\mathcal{W}$. Veamos que $a\vec{v}\in\mathcal{U}+\mathcal{W}$.
   Por definición de suma de subespacios,

$$\vec{v}\in\mathcal{U}+\mathcal{W} \Longleftrightarrow \vec{v}=\vec{u}+\vec{w}, \quad \text{con} \quad \vec{u}\in\mathcal{U} \quad \text{y} \quad \vec{w}\in\mathcal{W}$$

   Por ser $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ subespacios, tenemos que $a\vec{u}\in\mathcal{U}$ y $a\vec{w}\in\mathcal{W}$.
   Por lo tanto,

$$a\vec{v}=a(\vec{u}+\vec{w})=a\vec{u}+a\vec{w}\in\mathcal{U}+\mathcal{W}$$

Espacios Vectoriales
Suma de subespacios vectoriales

Lema 2

Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$. Si $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ es una base de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p\}$ es una base de $\mathcal{W}$. Entonces el subespacio suma $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ está generado por $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p\}$

$$\mathcal{U} + \mathcal{W} = \mathcal{L}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p)$$

Ejemplo La suma de los subespacios

$$\mathcal{U} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_3 = 0 \right\} \qquad \mathcal{W} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0 \right\}$$

es un subespacio generado por el sistema

$$\mathcal{B}_{\mathcal{U}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{W}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Teorema 22

Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$. Entonces

$$dim(\mathcal{U} + \mathcal{W}) = dim(\mathcal{U}) + dim(\mathcal{W}) - dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$$

Ejemplo Dados los subespacios

$$\mathcal{U} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_3 = 0 \right\} \qquad \mathcal{W} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0 \right\}$$

comprobamos que se verifica

$$dim(\mathcal{U}) + dim(\mathcal{W}) - dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) = 2 + 2 - 1 = 3$$

$$dim(\mathcal{U} + \mathcal{W}) = 3$$

Ejercicio En $\mathbb{R}^4$ se consideran los vectores

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1. Halla la base de la suma de los subespacios

$$\mathcal{U} = \mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{u}_2), \quad \mathcal{W} = \mathcal{L}(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$$

2. Comprueba el teorema de la dimensión.

Definición 15 (Suma directa de subespacios)

Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$ tales que $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\vec{0}\}$. Se dice que la suma de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ es **suma directa** *y la denotamos $\mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$.*

Ejemplo

$$\mathcal{U} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0 \right\} \text{ y } \mathcal{W} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0 \right\}$$

Ejercicio En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios $\mathcal{U}=\mathcal{L}(\vec{u})$ y $\mathcal{W}=\mathcal{L}(\vec{w})$, donde

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{w}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$$

- Halla $\mathcal{U}\cap\mathcal{W}$ y $\mathcal{U}+\mathcal{W}$.
- Estudia si la suma de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ es suma directa.

Definición 16 (Subespacios suplementarios)

Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$. Decimos que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ son **suplementarios** *si*

$$\mathcal{U}\cap\mathcal{W}=\{\vec{0}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{U}\oplus\mathcal{W}=\mathcal{V}$$

Ejemplo Los subespacios

$$\mathcal{U}=\left\{\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid x_1=0\right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{W}=\left\{\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid x_2=0\right\}$$

son suplementarios.

Ejercicio Demuestra que los subespacios

$$\mathcal{U}=\left\{\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x_1-x_2 &=& 0\\ x_1-x_3 &=& 0\end{array}\right\}$$

y

$$\mathcal{W}=\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

son suplementarios.

Ejercicio En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios

$$\mathcal{L}_1=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x_1-x_2 &=& 0\\ 2x_2-x_3 &=& 0\end{array}\right\}, \qquad \mathcal{L}_2=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid x_1+\alpha x_2+\beta x_3 = 0\right\}$$

Estudia si existen valores de α y β tales que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ sean suplementarios.

Dada una base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ de un espacio vectorial $\mathcal{V}$, para cada vector $\vec{x} \in \mathcal{V}$ podemos encontrar una **única** combinación lineal

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = \vec{v}$$

A estos escalares $x_1, \ldots, x_n$ se les llama **coordenadas** del vector $\vec{x}$ respecto a la base $\mathcal{B}$.

Así, decimos que **el vector $\vec{x}$ tiene las coordenadas** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **respecto a la base** $\mathcal{B}$ y se denota

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{ó bien} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Espacios Vectoriales
Coordenadas y cambio de base

Ejemplo En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, dada la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

el vector $\vec{v}$ de coordenadas $(2, 3, 4)$ respecto a dicha base es

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = 2\vec{w}_1 + 3\vec{w}_2 + 4\vec{w}_3 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Espacios Vectoriales
Coordenadas y cambio de base

✔ En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, si consideramos la *base canónica*

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{, para todo vector } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

se verifica

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

Es decir, **las coordenadas de un vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ respecto a la base canónica $\mathcal{C}$ coinciden con sus componentes** $x_1, \ldots, x_n$.

Espacios Vectoriales
Coordenadas y cambio de base

La base es de gran importancia en el estudio de los espacios vectoriales de dimensión finita.

En primer lugar, fijada una base $\mathcal{B}$, cada vector $\vec{x} \in \mathcal{V}$ se identifica con sus coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respecto a esa base.

Y así, trabajamos en el cuerpo $\mathcal{K}$, pues **todas las operaciones con los vectores quedan reducidas a operaciones con los elementos del cuerpo.**

Para sumar dos vectores basta sumar sus coordenadas y para multiplicar un escalar por un vector es suficiente multiplicar las coordenadas de dicho vector por el escalar.

Cambio de base

- ✓ Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial de dimensión n.
- ✓ Todo vector $\vec{x} \in \mathcal{V}$ queda unívocamente determinado por sus coordenadas respecto a una base.
- ✓ Al existir más de una base, las coordenadas de un mismo vector $\vec{x}$ variarán al pasar de una base a otra.
- ✓ Estudiamos qué relación guardarán entre sí las coordenadas respecto a una y otra base.

Ejercicio En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Expresa el vector $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ respecto a cada base.

Teorema 23 (Cambio de base)

Sean $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\vec{v'}_1, \cdots, \vec{v'}_n\}$ bases de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ sobre el cuerpo $\mathcal{K}$. Si

$$\begin{cases} \vec{v'}_1 &= a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{v}_n \\ \vec{v'}_2 &= a_{12}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + \cdots + a_{n2}\vec{v}_n \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ \vec{v'}_n &= a_{1n}\vec{v}_1 + a_{2n}\vec{v}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{v}_n \end{cases}$$

entonces la matriz del cambio de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ es

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Demostración: Sean $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\vec{v'}_1, \cdots, \vec{v'}_n\}$ bases de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ sobre el cuerpo $\mathcal{K}$. Cada vector $\vec{x} \in \mathcal{V}$ tendrá coordenadas respecto a cada base:

$$\vec{x} = x'_1\vec{v'}_1 + x'_2\vec{v'}_2 + \cdots + x'_n\vec{v'}_n = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

$$\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Espacios Vectoriales

Coordenadas y cambio de base

Demostración:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

1. Expresamos cada vector de la base $\mathcal{B}'$ respecto a la base $\mathcal{B}$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \vec{v'}_1 & = & a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{v}_n \\ \vec{v'}_2 & = & a_{12}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + \cdots + a_{n2}\vec{v}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \vec{v'}_n & = & a_{1n}\vec{v}_1 + a_{2n}\vec{v}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{v}_n \end{array} \right.$$

Espacios Vectoriales

Coordenadas y cambio de base

Demostración:

2. En la expresión de $\vec{x}$, sustituimos cada vector de la base $\mathcal{B}'$ por su expresión respecto a la base $\mathcal{B}$ y efectuamos las operaciones

$$\begin{array}{rcl} \vec{x} & = & x'_1\vec{v'}_1 + x'_2\vec{v'}_2 + \cdots + x'_n\vec{v'}_n \\ & = & x'_1(a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{v}_n) + \\ & & x'_2(a_{12}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + \cdots + a_{n2}\vec{v}_n) + \\ & & \dots \\ & & x'_n(a_{1n}\vec{v}_1 + a_{2n}\vec{v}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{v}_n) \\ & & \\ & = & (a_{11} \cdot x'_1 + a_{12} \cdot x'_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x'_n)\vec{v}_1 + \\ & & (a_{21} \cdot x'_1 + a_{22} \cdot x'_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x'_n)\vec{v}_2 + \\ & & \dots \\ & & (a_{n1} \cdot x'_1 + a_{n2} \cdot x'_2 + \cdots + a_{nn} \cdot x'_n)\vec{v}_n \end{array}$$

Espacios Vectoriales

Coordenadas y cambio de base

Demostración:

$$\begin{array}{rcl} \vec{x} & = & x'_1\vec{v'}_1 + x'_2\vec{v'}_2 + \cdots + x'_n\vec{v'}_n \\ & & \dots \\ & = & \left. \begin{array}{l} (a_{11} \cdot x'_1 + a_{12} \cdot x'_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x'_n)\vec{v}_1 + \\ (a_{21} \cdot x'_1 + a_{22} \cdot x'_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x'_n)\vec{v}_2 + \\ \dots \\ (a_{n1} \cdot x'_1 + a_{n2} \cdot x'_2 + \cdots + a_{nn} \cdot x'_n)\vec{v}_n \end{array} \right\} \end{array}$$

3. De aquí, por ser única la expresión de $\vec{x}$ respecto a la base $\mathcal{B}$

$$\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n$$

deducimos las **ecuaciones** del **cambio de base**

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & a_{11} \cdot x'_1 + a_{12} \cdot x'_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x'_n \\ x_2 & = & a_{21} \cdot x'_1 + a_{22} \cdot x'_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x'_n \\ & & \dots \\ x_n & = & a_{n1} \cdot x'_1 + a_{n2} \cdot x'_2 + \cdots + a_{nn} \cdot x'_n \end{array} \right\}$$

Espacios Vectoriales

Coordenadas y cambio de base

Demostración:

4. La **expresión matricial** del **cambio de base** es

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad P[\vec{x}]_{\mathcal{B}'} = [\vec{x}]_{\mathcal{B}}$$

La matriz

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se llama **matriz de cambio** de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$.

También se llama **matriz de paso** de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$.

Ejercicio En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

1. Halla la matriz de paso P de la base $\mathcal{C}$ a la base $\mathcal{B}$
2. Halla la matriz de paso Q de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{C}$
3. ¿Qué relación existe entre las matrices P y Q ?

Teorema 24 (Inversa de la matriz del cambio de base)

Si P es la matriz de cambio de una base $\mathcal{B}'$ a otra base $\mathcal{B}$ de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ de dimensión n, entonces P es invertible y la matriz de cambio de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ es P^{-1}.

Demostración: Teniendo en cuenta el lema anterior, sea P la matriz del cambio de base $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$. Entonces, para todo vector $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = P[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}'} \qquad \text{y} \qquad [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}'} = Q[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$$

Luego,

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = P\big(Q[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}\big)$$

De donde, $P \cdot Q = \mathrm{I}$

Por lo tanto, la matriz del cambio de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ es $Q = P^{-1}$

Ejercicio Sea $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ una base de un espacio vectorial $\mathcal{V}$.

1. Prueba que
$$\mathcal{B}_2 = \{2\vec{v}_1, -\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_4 - \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_3\}$$
también es una base de $\mathcal{V}$.
2. Halla las matrices del cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ y de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.
3. Si un vector de $\mathcal{V}$ tiene coordenas $(0, a, 0, a)$ respecto de la base $\mathcal{B}_1$, ¿qué coordenadas tendrá respecto de la base $\mathcal{B}_2$?

Ejercicio Sean $\mathcal{B} = \{x-1, x^2+x, -x^2+1\}$ y $\mathcal{B}' = \{x+1, x-1, x^2-1\}$ bases del espacio vectorial $\mathbb{R}_2(x)$ de polinomios de grado menor o igual que 2.

1. Calcula las coordenadas de $p(x) = x^2 + 2x + 1$ y $q(x) = x^2 - 2x + 1$ respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.
2. Encuentra la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ y úsala para calcular las coordenadas de ambos polinomios respecto a la base $\mathcal{B}$
3. Compara los resultados.

Espacios Vectoriales
Coordenadas y cambio de base

Ejercicio Sean $\mathcal{B} = \{2x^2 + x, x^2 + 3, x\}$ y $\mathcal{B}' = \{x^2 + 1, x - 2, x + 3\}$ bases del espacio vectorial $\mathbb{R}_2(x)$ de polinomios de grado menor o igual que 2.

1. Calcula las coordenadas de $p(x) = 8x^2 - 4x + 6$ y $q(x) = 7x^2 - x + 9$ respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.
2. Encuentra la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ y úsala para calcular las coordenadas de ambos polinomios respecto a la base $\mathcal{B}'$
3. Compara los resultados.

Espacios Vectoriales
Bibliografía

Métodos matemáticos: Algebra lineal y Geometría
P. Alberca y D. Martín (Ediciones Aljibe)

Algebra lineal J. de Burgos (Ed. McGraw Hill)

Algebra lineal J.B. Fraleigh y R.A. Beauregard (Ed. Addison Wesley)

Algebra lineal con aplicaciones y Mathlab
B. Kolman y D. Hill (Ed. Prentice Hall)

Algebra lineal con aplicaciones G. Nakos y D. Joyner (Ed. Thomson)

Algebra lineal y sus aplicaciones G. Strang (Ed. Addison Wesley)

Problemas de Álgebra
A. de la Villa (Librería I.C.A.I. Univ. Pontifícia de Comillas)