Matemática Discreta

Mariam Cobalea

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Relaciones

- Relación *n*-aria: $\mathcal{R} \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$
  - ✓ Bases de datos relacionales
  - Relación binaria: $\mathcal{R} \subseteq A_1 \times A_2$
    - Definición de relación binaria. Dominio y Rango.
    - Operaciones con relaciones.
    - Relación inversa. Composición de relaciones.
    - Representación de relaciones binarias.
  - Relación binaria definida sobre un conjunto $\mathcal{R} \subseteq A \times A$
    - Propiedades: Reflexiva, Simétrica, Antisimétrica, Transitiva, Conexa,
    - Relaciones de orden.
    - Relaciones de equivalencia. Particiones.

Las conexiones entre elementos de conjuntos se representan usando una estructura llamada **relación**.

Cada día tratamos con relaciones tales como las de

- una empresa, su número de teléfono y su dirección;
- un empleado, su antigüedad y su salario;
- una persona y un pariente

Las relaciones se pueden usar para resolver problemas tales como

- determinar qué pares de ciudades están unidas por una línea aérea en una red,
- encontrar un orden viable para las diferentes fases de un proyecto complicado, o
- diseñar una manera útil de almacenar información en una base de datos.

Las relaciones entre los elementos de más de dos conjuntos se llaman n-arias y se pueden usar para representar **bases de datos** informáticas.

Estas representaciones nos ayudan a responder preguntas acerca de la información almacenada en dichas bases de datos.

Definición (n-tuplas ordenada)

Una **n-tupla ordenada** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *es una colección ordenada que tiene a_1 como su primer elemento, a_2 como su segundo elemento, . . . , a_n como su n-enésimo elemento.*
En particular, las 2-tuplas (a_1, a_2) *se llaman* **pares ordenados**.

Definición

Decimos que las n-tuplas ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ son **iguales** *si y solo si*

$$a_i = b_i,\ i : 1, 2, \ldots, n$$

Definición (Producto cartesiano)

*El **producto cartesiano** de los conjuntos A y B, denotado $A \times B$, es el conjunto de todos los pares ordenados (a, b), donde $a \in A$ y $b \in B$.*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}$$

Definición (Producto cartesiano)

*El **producto cartesiano** de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, denotado $A_1 \times A_2 \times \cdots A_n$, es el conjunto de todas las n-tuplas ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, donde $a_j \in A_j$, $j : 1, 2, ..., n$.*

$$A_1 \times A_2 \times \cdots A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_j \in A_j,\ j : 1, 2, ..., n\}$$

Ejemplo $A = \{1, 2, 3\},\ B = \{r, s\}$

$$A \times B = \{(1, r), (1, s), (2, r), (2, s), (3, r), (3, s)\}$$

		B	
		r	s
	1	(1,r)	(1,s)
A	2	(2,r)	(2,s)
	3	(3,r)	(3,s)

Definición (Relación n-aria)

*Una **relación n-aria** en los conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$ es un subconjunto $\mathcal{R}$ del producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots A_n$.*

$$\mathcal{R} \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots A_n$$

*A los conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$ se les llama **dominios** de la relación y n es el **grado** de la relación.*

Ejemplos

1. La relación $\mathcal{R}$ que consta de las n-tuplas (dni, alumno, centro, titulación, asignatura 1, calificación 1, asignatura 2, calificación 2, ...) que representa expedientes de los universitarios de la UMA.

Ejemplos

2. Sea $\mathcal{R}$ la relación que consta de las 5- tuplas (l, n, o, d, s) que representan vuelos comerciales, donde l indica la línea aérea, n es el número de vuelo, o es la ciudad de origen, d es la ciudad de destino y s es la hora de salida.
   Por ejemplo, si Iberia tiene el vuelo $IB0227$ de Málaga a Madrid a las $22:25$, entonces
   (Iberia, $IB0227$, Málaga, Madrid, $22:25$) pertenece a $\mathcal{R}$.
   El grado de esta relación es 5 y sus dominios son el conjunto de todas las líneas aéreas, el conjunto de números de vuelo, el conjunto de ciudades y el conjunto de horas de salida.

- El modelo relacional de datos representa una base de datos como una **relación *n*-aria**.
- Por ejemplo, una base de datos de registros de estudiantes puede estar formada por campos que contienen el dni, el nombre, la titulación en que está matriculado y la nota media del estudiante.
- Los registros de los estudiantes se representan por 4-tuplas de la forma (DNI, NOMBRE, TITULACIÓN, NOTA MEDIA).
- Un ejemplo de base de datos con 6 registros es:
  (24,123456, GARCÍA, INFORMÁTICA, 6,35)
  (24123457, MARTÍN, BIOLOGÍA, 7,85)
  (24123465, PÉREZ, MEDICINA, 8,90)
  (24234157, NÚÑEZ, INFORMÁTICA, 6,25)
  (24321543, LÓPEZ, MEDICINA, 6,75)
  (24351245, MARTÍN, TELECOMUNICACIÓN, 7,95)

Las relaciones que se utilizan para representar bases de datos se llaman también **tablas**, ya que estas relaciones se muestran con frecuencia en forma de tabla.
Cada columna de la tabla corresponde a un **atributo** de la base de datos.
Por ejemplo, en la tabla se muestra la misma base de datos de estudiantes.

24,123456	GARCÍA	INFORMÁTICA	6,35
24123457	MARTÍN	BIOLOGÍA	7,85
24123465	PÉREZ	MEDICINA	8,90
24234157	NÚÑEZ	INFORMÁTICA	6,25
24321543	LÓPEZ	MEDICINA	6,75
24351245	MARTÍN	TELECOMUNICACIÓN	7,95

Los atributos de esta base de datos son:

DNI,**NOMBRE**, **TITULACIÓN** y **NOTA MEDIA**.

Definición (Relación binaria)

Se llama **relación binaria** *de A en B a todo subconjunto de $A \times B$*

$$\mathcal{R} \subseteq A \times B$$

- Dada una relación $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, si $(a, b) \in \mathcal{R}$, se dice que el elemento a ***está relacionado con*** el elemento b y se puede escribir $a\mathcal{R}b$.

Ejemplos $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ y $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$

1. $\mathcal{R}_1 = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_3, b_4), (a_4, b_3)\} \subseteq A \times B$
2. $\mathcal{R}_2 = \{(b_1, c_2), (b_2, c_1), (b_2, c_4), (b_3, c_3)\} \subseteq B \times C$

Ejemplos

3. Sean los conjuntos $A_1 = \mathbb{R}^+$ y $A_2 = \mathbb{R}$. Se considera la relación

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid x = y^2\}$$

4. Dados los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 5\} \text{ y } B = \{y \in \mathbb{R} \mid -4 \leq y \leq 4\}$$

se define la relación

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\}$$

Definición (Dominio y Rango de una relación binaria)

Sea $\mathcal{R}$ una relación binaria definida del conjunto A en el conjunto B.
Se llama **dominio** *de la relación al subconjunto de elementos de A que se relacionan con algún elemento de B. Se denota $Dom(\mathcal{R})$.*

$$Dom(\mathcal{R}) = \{a \in A \mid \exists b \in B,\ (a, b) \in \mathcal{R}\}$$

Se llama **rango** *de la relación al conjunto de elementos de B con los que se relaciona algún elemento de A.*

$$Rango(\mathcal{R}) = \{b \in B \mid \exists a \in A,\ (a, b) \in \mathcal{R}\}$$

Ejemplo

Sean $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ y $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$.

1. $\mathcal{R}_1 = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_3, b_4), (a_4, b_3)\}$
   - Dominio de $\mathcal{R}_1 = \{a_1, a_3, a_4\} \subset A$
   - Rango de $\mathcal{R}_1 = \{b_1, b_2, b_3, b_4\} = B$
2. $\mathcal{R}_2 = \{(b_1, c_2), (b_2, c_1), (b_2, c_4), (b_3, c_3)\}$
   - Dominio de $\mathcal{R}_2 = \{b_1, b_2, b_3\} \subset B$
   - Rango de $\mathcal{R}_2 = \{c_1, c_2, c_3, c_4\} \subset C$

Ejemplo Dados los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 5\} \qquad \text{y} \qquad B = \{y \in \mathbb{R} \mid -4 \leq y \leq 4\}$$

se define la relación

3. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\}$
   - El **dominio** de $\mathcal{R}$ está formado por aquellos elementos $x \in A$ para los que existe $y \in B$ tal que $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

     Dominio de $\mathcal{R} = \{x \in A \mid -3 \leq x \leq 3\}$
   - El **rango** de $\mathcal{R}$ está formado por aquellos elementos $y \in B$ para los que existe $x \in A$ tal que $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

     Rango de $\mathcal{R} = \{y \in B \mid -2 \leq x \leq 2\}$

Ejercicio Halla el dominio y el rango de la relación $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida

$$x\mathcal{R}y \iff x^2 + 2y = 100$$

Ejercicio Describe el dominio y el rango de cada una de las relaciones siguientes:

- $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, definida $n \,\mathcal{R}\, x \iff n = x^2$.
- $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, definida $y \,\mathcal{S}\, m \iff y^2 = m - 1$.

- Ya que las relaciones son conjuntos, podemos combinar dos o más relaciones con las distintas operaciones entre conjuntos que hemos aprendido anteriormente: unión, intersección, diferencia y diferencia simétrica de relaciones.

- Además, también podremos realizar otras operaciones, como la relación inversa y la composición.

Definición

Sean los conjuntos A y B y sean las relaciones $\mathcal{R}_1 \subseteq A \times B$ y $\mathcal{R}_2 \subseteq A \times B$.

1. $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 = \{(a,b) \in A \times B \mid (a,b) \in \mathcal{R}_1 \quad ó \quad (a,b) \in \mathcal{R}_2\}$
2. $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \{(a,b) \in A \times B \mid (a,b) \in \mathcal{R}_1 \quad y \quad (a,b) \in \mathcal{R}_2\}$
3. $\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2 = \{(a,b) \in A \times B \mid (a,b) \in \mathcal{R}_1 \quad y \quad (a,b) \notin \mathcal{R}_2\}$
4. $\overline{\mathcal{R}_1} = \{(a,b) \in A \times B \mid (a,b) \notin \mathcal{R}_1\}$
5. $\mathcal{R}_1 \triangle \mathcal{R}_2 = \{(a,b) \in A \times B \mid (a,b) \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \quad y \quad (a,b) \notin \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2\}$

Ejemplo Sean los conjuntos $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{x,y,z,t\}$ y las relaciones

$$\mathcal{R}_1 = \{(1,x),(2,y),(3,z)\} \quad \mathcal{R}_2 = \{(1,x),(1,y),(3,z),(3,t)\}$$

(1) $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 = \{(1,x),(2,y),(3,z),(1,y),(3,t)\}$

(2) $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \{(1,x),(3,z)\}$ **(3)** $\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2 = \{(2,y)\}$ **(4)** $\overline{\mathcal{R}_1} = (A \times B) - \mathcal{R}_1$

(5) $\mathcal{R}_1 \triangle \mathcal{R}_2 = \{(2,y),(1,y),(3,t)\}$

Ejemplos Sea A el conjunto de alumnos de 1º de Informática y sea B el conjunto de libros de Matemática Discreta de la biblioteca.
Se definen las relaciones R_1 y R_2:

- $a\mathcal{R}_1 b$: ‘‘al estudiante a se le recomienda el libro b’’
- $a\mathcal{R}_2 b$: ‘‘el estudiante a consulta el libro b’’

1. $a(R_1 \cup R_2)b$: ‘‘el estudiante a tiene recomendado el libro b o consulta el libro b’’.
2. $a(R_1 \cap R_2)b$: ‘‘el estudiante a tiene recomendado y consulta el libro b’’.
3. $a(R_1 - R_2)b$: ‘‘el estudiante a tiene recomendo el libro b, pero no lo consulta’’
4. $a(R_2 - R_1)b$: ‘‘el estudiante a consulta el libro b, aunque no lo tiene recomendado’’.
5. $a(R_1 \triangle R_2)b$: ‘‘el estudiante a tiene recomendo el libro b, pero no lo consulta o bien el estudiante a consulta el libro b, aunque no lo tiene recomendado’’.

Definición (Relación inversa)

*Sea $\mathcal{R}$ una relación binaria de A en B. Se llama **relación inversa** de $\mathcal{R}$ a la relación binaria de B en A definida por:*

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in \mathcal{R}\}$$

Ejemplo Sean $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ y $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$.

La relación inversa de

$$\mathcal{R}_1 = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_3, b_4), (a_4, b_3)\}$$

es

$$\mathcal{R}_1^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_1), (b_4, a_3), (b_3, a_4)\}$$

Ejercicio

Determina las relaciones inversas $\mathcal{R}^{-1}$ y $\mathcal{S}^{-1}$ de las relaciones

- $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, definida $n\,\mathcal{R}\,x \iff n = x^2$.
- $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, definida $y\,\mathcal{S}\,m \iff y^2 = m - 1$.

Definición (Composición de relaciones)

Sean los conjuntos A, B y C y las relaciones binarias

$$\mathcal{R} \subseteq A \times B \quad \text{y} \quad \mathcal{S} \subseteq B \times C$$

La ***composición*** *de las relaciones* $\mathcal{R}$ *y* $\mathcal{S}$ *es el subconjunto de $A \times C$*

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \{(a,c) \in A \times C \mid \exists b \in B,\ (a,b) \in \mathcal{R} \quad \text{y} \quad (b,c) \in \mathcal{S}\}$$

$$= \{(a,c) \in A \times C \mid \exists b \in B, \quad a\mathcal{R}b \quad \text{y} \quad b\mathcal{S}c\}$$

$$a(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})c \quad \Longleftrightarrow \quad \exists b \in B, \quad a\mathcal{R}b \quad \text{y} \quad b\mathcal{S}c$$

Ejemplo Sean $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ y $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$.

La composición de las relaciones

$$\mathcal{R}_1 = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_3, b_4), (a_4, b_3)\}$$

$$\mathcal{R}_2 = \{(b_1, c_2), (b_2, c_1), (b_2, c_4), (b_3, c_3)\}$$

es la relación

$$\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 = \{(a_1, c_1), (a_1, c_2), (a_1, c_4), (a_4, c_3)\}$$

Ejercicio Dadas las relaciones:

- $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, definida $n \, \mathcal{R} \, x \iff n = x^2$
- $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, definida $y \, \mathcal{S} \, m \iff y^2 = m - 1$

Encuentra, si es posible, una expresión para las relaciones

- $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$
- $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$
- $(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})^{-1}$
- $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1}$

Además describe el dominio y el rango de cada una de ellas.

Definición (Matriz de adyacencia)

Sea $\mathcal{R}$ *una relación binaria definida del conjunto* $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ *en el conjunto* $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$*. Se llama* ***matriz de adyacencia*** *asociada a* $\mathcal{R}$ *a la matriz* $\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = (m_{ij})$ *dada por*

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & si \quad (a_i, b_j) \in \mathcal{R} \\ 0, & si \quad (a_i, b_j) \notin \mathcal{R} \end{cases}$$

Ejemplos La relación $\mathcal{R}_1 = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_3, b_4), (a_4, b_3)\}$ definida de $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ en $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, se puede representar matricialmente

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio En el conjunto $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ se establece la relación binaria $\mathcal{R}$ definida de la siguiente forma

$$a\mathcal{R}b \iff \text{mcd}(a, b) = 1$$

1. Escribe el conjunto de pares ordenados de $\mathcal{R}$.
2. Representa matricialmente la relación.

- Las matrices de adyacencia son ejemplos de **matrices booleanas**, es decir, matrices cuyos elementos están en el conjunto $\{0, 1\}$.
- Las matrices de adyacencia permiten traducir las operaciones entre relaciones en operaciones entre matrices, que a su vez se expresan a partir de operaciones simples en el conjunto $\{0, 1\}$:

$$x \vee y = \max\{x, y\}$$

$$1 \vee 1 = 1$$
$$1 \vee 0 = 1$$
$$0 \vee 1 = 1$$
$$0 \vee 0 = 0$$

$\vee$	1	0
1	1	1
0	1	0

$$x \wedge y = \min\{x, y\}$$

$$1 \wedge 1 = 1$$
$$1 \wedge 0 = 0$$
$$0 \wedge 1 = 0$$
$$0 \wedge 0 = 0$$

$\wedge$	1	0
1	1	0
0	0	0

Las operaciones definidas anteriormente, inducen varias operaciones entre matrices booleanas:

1. $(m_{ij}) \vee (n_{ij}) = (m_{ij} \vee n_{ij})$
2. $(m_{ij}) \wedge (n_{ij}) = (m_{ij} \wedge n_{ij})$
3. $(m_{ij}) \odot (n_{ij}) = \left(\bigvee_k (m_{ik} \wedge n_{kj}) \right)$

   Este producto coincide con el producto habitual de matrices, pero sustituyendo $\sum$ por $\bigvee$.

Ejemplo

1. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema

Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ relaciones binarias de A en B:

1. $\mathcal{M}_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}} \vee \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$
2. $\mathcal{M}_{\mathcal{R}\cap\mathcal{S}} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}} \wedge \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$
3. $\mathcal{M}_{\mathcal{R}^{-1}} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{t}$ *(matriz transpuesta)*

Teorema

Sean los conjuntos A, B y C y las relaciones binarias $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, $\mathcal{S} \subseteq B \times C$

4. $\mathcal{M}_{\mathcal{R}\circ\mathcal{S}} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}} \odot \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$

Ejemplo $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$
$C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$

$\mathcal{R} = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_3, b_4), (a_4, b_3)\}$ $\mathcal{S} = \{(b_1, c_2), (b_2, c_1), (b_2, c_4), (b_3, c_3)\}$

$\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \{(a_1, c_1), (a_1, c_2), (a_1, c_4), (a_4, c_3)\}$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} \odot \mathcal{M}_{\mathcal{S}} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}\circ\mathcal{S}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio Dados los conjuntos $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ y $C = \{c_1, c_2, c_3\}$, se establecen las relaciones $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_3$ siguientes:

$$\mathcal{R}_1 = \{(a_1, b_1), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_3, b_4)\}$$

$$\mathcal{R}_2 = \{(a_1, b_3), (a_2, b_2), (a_3, b_1)\}$$

$$\mathcal{R}_3 = \{(b_2, c_1), (b_2, c_3), (b_3, c_2), (b_4, c_3)\}$$

Usa las matrices asociadas para determinar las relaciones:

$a)$ $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ $\qquad$ $b)$ $\mathcal{R}_1^{-1} \cup \mathcal{R}_2^{-1}$ $\qquad$ $c)$ $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_3$

Relación binaria definida en un conjunto

Definición

Una **relación binaria definida sobre un conjunto** A *es cualquier subconjunto* $\mathcal{R} \subseteq A \times A$.

Ejemplos

1. Dado un conjunto S, una relación binaria definida en el conjunto $\mathcal{P}(S)$ es la inclusión $\subseteq$.
2. La relación $\leq$ entre números.
3. La relación $|$ de divisibilidad definida en $\mathbb{N}$.

☛ Para relaciones de un conjunto en sí mismo, tiene sentido componer una relación consigo misma; en adelante, utilizaremos la siguiente notación: $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$

Relación binaria definida en un conjunto

Ejemplos

4. Dado un conjunto de ciudades $C = \{c_1, \ldots, c_5\}$, en la tabla se dan los precios $c(c_i, c_j)$ del vuelo entre cada par de ciudades.

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
c_1	–	140	100	150	200
c_2	140	–	200	160	220
c_3	100	200	–	190	250
c_4	150	160	190	–	150
c_5	200	220	250	150	–

Se considera la relación $\mathcal{R}$ definida $c_i \mathcal{R} c_j \iff c(c_i, c_j) \leq 180$.

$$\mathcal{R} = \{(c_1, c_2), (c_1, c_3), (c_1, c_4), (c_2, c_1), (c_2, c_4), (c_3, c_1),$$
$$(c_4, c_1), (c_4, c_2), (c_4, c_5), (c_5, c_4)\}$$

Definición

Sea $\mathcal{R}$ una relación binaria definida sobre un conjunto A. Se dice que

- $\mathcal{R}$ *es* **reflexiva** *si para todo $a \in A$:* $\quad a\mathcal{R}a$
- $\mathcal{R}$ *es* **simétrica** *si para todo $a, b \in A$:* $\quad a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a$
- $\mathcal{R}$ *es* **antisimétrica** *si para todo $a, b \in A$:* $\quad a\mathcal{R}b$ *y* $b\mathcal{R}a \implies a = b$
- $\mathcal{R}$ *es* **transitiva** *si para todo $a, b, c \in A$:* $\quad a\mathcal{R}b$ *y* $b\mathcal{R}c \implies a\mathcal{R}c$
- $\mathcal{R}$ *es* **conexa** *si para todo $a, b \in A$:* $\quad a\mathcal{R}b$*, o bien* $b\mathcal{R}a$

Relación binaria definida en un conjunto

Propiedades

Ejemplos

1. Son relaciones reflexivas:
   $\leq$ entre números, $\subseteq$ entre conjuntos, semejanza de triángulos, ...
2. Son relaciones simétricas:
   semejanza de triángulos, paralelismo entre rectas, perpendicularidad entre rectas, ...
3. Son relaciones antisimétricas:
   $\leq$ entre números, $|$ divisibilidad entre números naturales,
   $\subseteq$ entre conjuntos ...
4. Son relaciones transitivas:
   $\leq$ entre números, semejanza de triángulos, paralelismo entre rectas,
   $\subseteq$ entre conjuntos, $|$ divisibilidad entre números naturales, ...

Relación binaria definida en un conjunto

Propiedades

- $\mathcal{I} = \{(a,a) \mid a \in A\}$ es la ***relación identidad***.

Teorema

Sea $\mathcal{R}$ una relación binaria definida en un conjunto A.

1. *$\mathcal{R}$ es reflexiva si y solo si* $\quad \mathcal{I} \subseteq \mathcal{R}$
2. *$\mathcal{R}$ es simétrica si y solo si* $\quad \mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$
3. *$\mathcal{R}$ es antisimétrica si y solo si* $\quad \mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subseteq \mathcal{I}$
4. *$\mathcal{R}$ es transitiva si y solo si* $\quad \mathcal{R}^2 \subseteq \mathcal{R}$

En el caso de relaciones definidas en conjuntos $A = \{a_1, ..., a_n\}$, la matriz de adyacencia nos ayuda a analizar las propiedades definidas anteriormente.

Teorema

Sea $\mathcal{R}$ una relación binaria definida en un conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = (m_{ij})$, $\quad \mathcal{M}_{\mathcal{R}^2} = (n_{ij})$.

1. *$\mathcal{R}$ es reflexiva si y solo si* $\quad m_{ii} = 1$ *para todo i*
2. *$\mathcal{R}$ es simétrica si y solo si* $\quad m_{ij} = m_{ji}$ *para todo i, j*
3. *$\mathcal{R}$ es antisimétrica si y solo si* $\quad m_{ij} \wedge m_{ji} = 0$ *para todo i, j, $i \neq j$*
4. *$\mathcal{R}$ es transitiva si y solo si* $\quad n_{ij} = 1 \implies m_{ij} = 1$
5. *$\mathcal{R}$ es conexa si y solo si* $\quad m_{ij} = 1$*, o bien* $m_{ji} = 1$ *para todo i, j*

Relación binaria definida en un conjunto

Propiedades

Ejercicio 1 En el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ se define la relación

$$\mathcal{R} = \{(a, b), (b, d), (c, b), (d, a)\}$$

Estudia qué propiedades verifica.

Ejercicio 2 En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se define la relación

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 5)\}$$

Estudia si $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2$ es transitiva.

Ejercicio 3 Se considera la relación binaria $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida

$$a\mathcal{R}b \iff a \leq b + 1$$

Estudia las propiedades de la relación $\mathcal{R}$.

Definición (Relación de orden parcial)

Sea $\mathcal{R}$ *una relación binaria definida sobre un conjunto no vacío* A. *Se dice que* $\mathcal{R}$ *es una* **relación de orden parcial** *si es* **reflexiva**, **antisimétrica** *y* **transitiva.**

El par $(A, \mathcal{R})$ *se llama* ***conjunto parcialmente ordenado.***

Ejemplo

- $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Notación: Para denotar las relaciones de orden usaremos los símbolos

$$\preceq \qquad\qquad \lll \qquad\qquad \sqsubseteq$$

Relaciones de orden

Vocabulario : Cuando $a \preceq b$, se dice que:

- el elemento a ***es anterior*** al elemento b,
- el elemento b ***es posterior*** al elemento a,
- el elemento a ***precede*** al elemento b,
- el elemento b ***supera*** al elemento a.

☛ Las relaciones de orden permiten **comparar** los elementos de un conjunto.

Relaciones de orden

Ejemplo

En el conjunto $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ se considera la relación $\mid$ de divisibilidad:

$$2 \mid 2,\ 2 \mid 4,\ 2 \mid 10,\ 2 \mid 12,\ 2 \mid 20,\ 4 \mid 4,\ 4 \mid 12,$$

$$4 \mid 20,\ 5 \mid 5,\ 5 \mid 10,\ 5 \mid 20,\ 10 \mid 10,\ 10 \mid 20,\ 12 \mid 12,\ 20 \mid 20$$

$$\mathcal{R}_{|} = \{(2,2), (2,4), (2,10), (2,12), (2,20), (4,4), (4,12), (4,20),$$
$$(5,5), (5,10), (5,20), (10,10), (10,20), (12,12), (20,20)\}$$

Teorema (Orden Producto)

Sean $(A, \preceq_1)$ *y* $(B, \preceq_2)$ *dos conjuntos parcialmente ordenados.*
En el conjunto $A \times B$ *se define la relación* $\preceq$*:*

$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 \preceq_1 a_2 \quad \wedge \quad b_1 \preceq_2 b_2$$

$(A \times B, \preceq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado. Esta relación se llama* **orden producto**.

Ejercicio En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se considera el **orden producto** construido a partir de la relación $\leq$. Representa gráficamente con qué puntos del plano se relaciona el punto $(1, 2)$.

Teorema (Orden Lexicográfico)

Sean $(A, \preceq_1)$ y $(B, \preceq_2)$ dos conjuntos parcialmente ordenados. En el conjunto $A \times B$ se define la relación $\sqsubseteq$

$$(a_1, b_1) \sqsubseteq (a_2, b_2) \iff a_1 \prec_1 a_2 \quad \vee \quad \big(a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 \preceq_2 b_2\big)$$

$(A \times B, \sqsubseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Esta relación se llama **orden lexicográfico**.

Ejercicio

En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se define el orden lexicográfico $\sqsubseteq$ construido a partir de la relación $\leq$. Determina qué puntos del plano están relacionados con $(1, 2)$.

Relaciones de orden

Ejercicio En el conjunto $A = (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}$ se define la relación binaria:

$$(x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2 \text{ y además } \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

1. Demuestra que $\mathcal{R}$ es una relación de orden y estudia si es un orden total.
2. Representa el conjunto de elementos comparables con $(1, 1)$.
3. Representa el conjunto de elementos comparables con $(2, 4)$.

Relaciones de equivalencia

Definición

Sea $\mathcal{R}$ una relación binaria definida en un conjunto A. Se dice que $\mathcal{R}$ es una ***relación de equivalencia*** *si es* **reflexiva**, **simétrica** *y* **transitiva**.

Ejemplos Son relaciones de equivalencia:

1. La relación de igualdad entre fracciones

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \iff p \cdot s = q \cdot r$$

2. La relación definida en $\mathbb{Z}$ como:

$$a \equiv_3 b \iff a - b \text{ es múltiplo de } 3$$

Notación: Para denotar las relaciones de equivalencia usaremos los símbolos: $\approx$ $\equiv$ $\sim$ $\cong$

Ejercicio

En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ se establece una relación binaria

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4), (4,2), (4,3), (4,4)\}$$

Justifica que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

Ejercicio Demuestra que son relaciones de equivalencia:

1. $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida $a\mathcal{R}b$ si y sólo si $a = b$ o bien $a = -b$.
2. $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida $a\mathcal{R}b$ si y sólo si $a - b \in \mathbb{Z}$.

Definición (Clases de equivalencia)

*Sea $\sim$ una relación de equivalencia definida en un conjunto A y sea $a \in A$. La **clase de equivalencia** de a es el subconjunto de elementos de A que son equivalentes al elemento a. Se denota $[a]_\sim$.*

$$[a]_\sim = \{x \in A \mid x \sim a\}$$

- ✓ Si $b \in [a]_\sim$, se dice que b es un ***representante*** de esta clase de equivalencia.
- ✓ **Cualquier** elemento de una clase se puede usar como representante de dicha clase.

Ejemplos

1. Las clases de equivalencia de la relación

$$\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$$

definida en el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$ son

$$[1] = \{1\}, \quad [2] = \{2,3,4\} = [3] = [4]$$

2. La clase de equivalencia de 0 para la relación $\equiv_3$ es

$$[0]_3 = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

3. La clase de equivalencia de 1 para la relación $\equiv_3$ es

$$[1]_3 = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

Lema

Sea $\sim$ *una relación de equivalencia definida en un conjunto* A *y sean* $a, b \in A$. *Entonces:*

- $[a]_\sim = [b]_\sim \iff a \sim b$
- $[a]_\sim \neq [b]_\sim \implies [a]_\sim \cap [b]_\sim = \varnothing$

☛ Las clases de equivalencia de dos elementos de A son idénticas o disjuntas.

Teorema

Sea $\sim$ una relación de equivalencia definida en un conjunto A. Entonces la colección de todas las clases de equivalencia forma una partición de A que se llama ***conjunto cociente*** *y se denota $A_{/\sim}$.*

Ejemplo Para la relación de equivalencia

$$\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$$

definida en el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$, el conjunto cociente $A_{/\mathcal{R}}$ es

$$\Big\{\{1\},\{2,3,4\}\Big\}$$

- Las relaciones de equivalencia permiten **clasificar** los elementos de un conjunto.

Teorema

Si π es una partición de un conjunto A, podemos definir una relación de equivalencia cuyas clases de equivalencia sean los bloques de la partición.

Demostración Dada una partición $\pi = \{A_1, ..., A_k\}$ del conjunto A, definimos una relación $\sim_\pi$ de la siguiente manera:

$$\forall a, b \in A,\ a \sim_\pi b \iff \exists j,\ a, b \in A_j$$

Claramente, la relación $\sim_\pi$ es de equivalencia.

Ejemplo Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, la colección de conjuntos

$$\left\{A_1 = \{1, 3, 5\},\ A_2 = \{4, 6\},\ A_3 = \{2\}\right\}$$

forma una partición de A.
La relación de equivalencia inducida es

$$\mathcal{R}_{\pi} = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),$$

$$(5,1),(5,3),(5,5),(4,4),(4,6),(6,4),(6,6),(2,2)\}$$

Ejercicios

1. En el conjunto $\mathbb{Z}$ se define la relación binaria

$$a\mathcal{R}b \iff a^2 - b^2 = a - b$$

   - Demuestra que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
   - Determina el conjunto cociente.

2. En el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se define la relación binaria

$$(a_1, b_1)\mathcal{R}(a_2, b_2) \iff a_1 - a_2 = b_1 - b_2$$

   - Estudia si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
   - En caso afirmativo, determina las clases de equivalencia de los elementos $(0, 0)$ y $(3, 5)$.

Relaciones de equivalencia

Ejercicios

3. Define (si es posible) una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$ tal que la clase de equivalencia C_a de cada $a \in \mathbb{R}$ sea

$$C_a = \{a, -a\}$$

4. Idem en $\mathbb{R}^2$ tal que la clase de equivalencia $C_{(a,b)}$ de cada $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sea

$$C_{(a,b)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = b \quad \text{ó} \quad y = -b\}$$

Relaciones de equivalencia

Ejercicio

5. Sea $\mathcal{R}$ una relación binaria definida en un conjunto A. Se dice que $\mathcal{R}$ es ***circular*** si para todos los elementos a, b y $c \in A$ se verifica que

$$\left(a\mathcal{R}b \text{ y } b\mathcal{R}c\right) \implies c\mathcal{R}a$$

Demuestra que una relación reflexiva y circular es de equivalencia.