Tema 3: Técnicas de Recuento

Mariam Cobalea

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Tema 3: Técnicas de Recuento

Tema 3: Técnicas de Recuento

3.3 Principio de Inclusión-Exclusión

- Principio de Inclusión-Exclusión (I) : $|A_1 \cup \cdots \cup A_n|$
- Principio de Inclusión-Exclusión (II) : $|\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}|$
- Simetría en el Principio de Inclusión-Exclusión:
  - Permutaciones completas (Desarreglos).
  - Distribuciones:
    - Funciones Sobreyectivas.
    - Relaciones de equivalencia: Números de Stirling y Números de Bell.

3.3 Principio de Inclusión-Exclusión

Teorema (Principio de Inclusión-Exclusión (I))

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *conjuntos finitos no vacíos. Entonces*

$$\left|\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right| = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_j\leq k} \left|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}\right| \qquad (1)$$

- Para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, el sumatorio $\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_j\leq k}$ recorre todas las intersecciones de exactamente j conjuntos, es decir, tiene $\binom{k}{j}$ sumandos.

- Antes de abordar la demostración general analizaremos ejemplos pequeños, con 2 y 3 conjuntos.
- Para $k = 2$: $|A_1 \cup A_2| = \underbrace{|A_1| + |A_2|}_{j=1} \underbrace{-|A_1 \cap A_2|}_{j=2}$.

  Al sumar el número de elementos de cada conjunto en $(j = 1)$, los elementos de la intersección se 'cuentan' dos veces, por esa razón, debemos descontarlos en $(j = 2)$.
- Para $k = 3$: $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| =$
  $\underbrace{|A_1| + |A_2| + |A_3|}_{j=1} \underbrace{-|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3|}_{j=2} \underbrace{+|A_1 \cap A_2 \cap A_3|}_{j=3}$.

  Si un elemento está en la intersección de exactamente dos conjuntos, el análisis sería similar al del apartado anterior. Si está en la intersección de los 3, se contaría 3 veces en $(j = 1)$, se descontarían 3 veces en $(j = 2)$ y se volvería a contar una vez en $(j = 3)$.

Demostración:

- Siguiendo con el razonamiento de los ejemplos anteriores, si un elemento de $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ está exactamente en m de estos conjuntos, entonces la fórmula los contará $m = \binom{m}{1}$ veces en $(j = 1)$, los descontará $\binom{m}{2}$ veces en $(j = 2)$, los volverá a contar $\binom{m}{3}$ veces en $(j = 3)$ y así sucesivamente.
- Por lo tanto, en el lado derecho de la igualdad, ese elemento se habrá contado sólo una vez, ya que:

$$\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \binom{m}{4} + \ldots + (-1)^{m+1}\binom{m}{m} = \binom{m}{0} = 1$$

Ejemplo Halla cuantos enteros positivos menores o iguales que 1000 son divisibles por 7 o por 11.

Solución:

- Si consideramos el conjunto A_1 de los múltiplos de 7 y el conjunto A_2 de los múltiplos de 11, el número requerido es $|A_1 \cup A_2|$.
- Por el Principio de Inclusión-Exclusión,

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| =$$

$$= \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{7 \cdot 11} \right\rfloor =$$

$$= 142 + 90 - 12 = 220$$

- Un conjunto y su complementario son disjuntos, por lo que la ley de De Morgan permite deducir el siguiente corolario del principio de la suma:

Corolario (Principio de Inclusión-Exclusión (II))

Si $A_1, \ldots, A_k$ son subconjuntos no vacíos de un conjunto finito A, entonces

$$\left| \bigcap_{j=1}^{k} \overline{A_j} \right| = |A| - \left| \bigcup_{j=1}^{k} A_j \right| \qquad (2)$$

Ejemplo

1. Halla cuántos enteros no superiores a 100 son primos.
2. Determina el número de enteros positivos menores que 600 que son coprimos con 600.

3.3 Principio de Inclusión-Exclusión

Ejemplo Halla el número de soluciones enteras de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

tales que

$$0 \leq x_1 \leq 3, \quad 0 \leq x_2 \leq 4, \quad 0 \leq x_3 \leq 6$$

Solución: Si consideramos los conjuntos

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 \;:\; x_1 + x_2 + x_3 = 11\}$$

$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in A \;:\; x_1 > 3\}$$

$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in A \;:\; x_2 > 4\}$$

$$A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in A \;:\; x_3 > 6\}$$

el número de soluciones que verifican las condiciones requeridas es

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3|$$

3.3 Principio de Inclusión-Exclusión

Ejemplo Halla el número de soluciones enteras de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

tales que

$$0 \leq x_1 \leq 3, \quad 0 \leq x_2 \leq 4, \quad 0 \leq x_3 \leq 6$$

Solución:(cont.) Aplicando el Principio de Inclusión-Exclusión,

$$\begin{aligned}
|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| &= |A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\
&= |A| - \big(|A_1| + |A_2| + |A_3|\big) \\
&\quad + \big(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|\big) \\
&\quad - \big(|A_1 \cap A_2 \cap A_3|\big)
\end{aligned}$$

3.3 Principio de Inclusión-Exclusión

Ejemplo Halla el número de soluciones enteras de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

tales que

$$0 \leq x_1 \leq 3, \quad 0 \leq x_2 \leq 4, \quad 0 \leq x_3 \leq 6$$

Solución: (cont.)

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 \;:\; x_1 + x_2 + x_3 = 11\}$$

$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in A \mid x_1 > 3\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in A \mid x_1 \geq 4\} \Rightarrow |A_1| = \binom{11 - 4 + 3 - 1}{3 - 1}$$

$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in A \mid x_2 > 4\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in A \mid x_2 \geq 5\} \Rightarrow |A_2| = \binom{11 - 5 + 3 - 1}{3 - 1}$$

$$A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in A \mid x_3 > 6\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in A \mid x_3 \geq 7\} \Rightarrow |A_3| = \binom{11 - 7 + 3 - 1}{3 - 1}$$

3.3 Principio de Inclusión-Exclusión

Ejemplo Halla el número de soluciones enteras de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

tales que

$$0 \leq x_1 \leq 3, \quad 0 \leq x_2 \leq 4, \quad 0 \leq x_3 \leq 6$$

Solución: (cont.)

$$A_1 \cap A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in A \mid x_1 \geq 4 \wedge x_2 \geq 5\} \Rightarrow |A_1 \cap A_2| = \binom{2 + 3 - 1}{3 - 1} = 6$$

$$A_1 \cap A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in A \mid x_1 \geq 4 \wedge x_3 \geq 7\} \Rightarrow |A_1 \cap A_3| = \binom{0 + 3 - 1}{3 - 1} = 1$$

$$A_2 \cap A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in A \mid x_2 \geq 5 \wedge x_3 \geq 7\} = \varnothing \;\Rightarrow\; A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing$$

$$\Rightarrow |A_2 \cap A_3| = 0 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Por lo tanto, $|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| = 78 - (36 + 28 + 15) + (6 + 1 + 0) - 0 = 6$

3.3 Principio de Inclusión-Exclusión

Permutaciones Completas

Podemos usar el Principio de Inclusión-Exclusión para contar el número de permutaciones de n objetos que no dejan a ninguno en su posición inicial.

Ejemplo Dados los elementos $1, 2, 3, 4, 5,$ una permutación que no deja a ningún elemento en su posición original es 21453

Definición

*Se llama **permutación completa** de n elementos a toda función biyectiva $f: \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $f(i) \neq i$ para todo $i : 1, \dots, n$*

Teorema

El número de permutaciones completas de un conjunto de n elementos es

$$\mathcal{D}_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

3.3 Principio de Inclusión-Exclusión

Permutaciones Completas

Teorema

El número de permutaciones completas de un conjunto de n elementos es

$$\mathcal{D}_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

Demostración:

✓ Sea P el conjunto de todas las permutaciones de n elementos.

✓ Se denota P_i el conjunto de las permutaciones que dejan fijo al elemento i, para $i : 1, \dots, n.$

✓ Entonces $\mathcal{D}_n = |\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \dots \cap \overline{P_n}|$

3.3 Principio de Inclusión-Exclusión

Permutaciones Completas

Demostración: (cont.)

✓ Usando el Principio de Inclusión-Exclusión,

$$\mathcal{D}_n = |\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \dots \cap \overline{P_n}| = |P| - |P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n|$$

$$= n! - \left(\sum_{i=1}^{n} |P_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |P_i \cap P_j| + \dots + (-1)^{n+1} |P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n|\right)$$

✓ Para calcular $\sum_{i=1}^{n} |P_i|$ tenemos en cuenta que

$$|P_1| = (n-1)! = |P_2| = |P_3| = \dots = |P_n|$$

Ya que hay $C(n, 1) = \binom{n}{1}$ maneras de elegir 1 elemento de un conjunto de n, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} |P_i| = \binom{n}{1}(n-1)!$$

3.3 Principio de Inclusión-Exclusión

Permutaciones Completas

Demostración: (cont.)

✓ Análogamente calculamos $\sum_{1 \le i < j \le n} |P_i \cap P_j|$, teniendo en cuenta que

$$|P_1 \cap P_2| = (n-2)! = |P_1 \cap P_3| = \dots = |P_{n-1} \cap P_n|$$

Ya que hay $C(n, 2) = \binom{n}{2}$ maneras de elegir 2 elementos de un conjunto de n, tenemos

$$\sum_{1 \le i < j \le n} |P_i \cap P_j| = \binom{n}{2}(n-2)!$$

3.3 Principio de Inclusión-Exclusión

Permutaciones Completas

Demostración: (cont.)

✓ En general, podemos hallar $\displaystyle\sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_m\leq n} |P_{i_1}\cap P_{i_2}\cap P_{i_m}|$, teniendo en cuenta que para $1\leq m\leq n$,

$$|P_{i_1}\cap P_{i_2}\cap P_{i_m}| = (n-m)!$$

Ya que hay $C(n,m)=\binom{n}{m}$ maneras de elegir m elementos de un conjunto de n, tenemos

$$\sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_m\leq n} |P_{i_1}\cap P_{i_2}\cap P_{i_m}| = \binom{n}{m}(n-m)!$$

3.3 Principio de Inclusión-Exclusión

Permutaciones Completas

Demostración: (cont.)

✓ Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_n = n! - \Big(\sum_{i=1}^{n}|P_i| \; - \sum_{1\leq i<j\leq n}|P_i\cap P_j| + \ldots + (-1)^{n+1}|P_1\cap P_2\cap\ldots\cap P_n|\Big) \\
= n! - \left(\binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \ldots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}(n-n)!\right) \\
= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \ldots + (-1)^{n}\binom{n}{n}(n-n)! \\
= n! - \frac{n!}{1!(n-1)!}(n-1)! + \frac{n!}{2!(n-2)!}(n-2)! - \ldots + (-1)^{n}\frac{n!}{n!(n-n)!}(n-n)! \\
= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n}\frac{1}{n!}\right)
\end{aligned}$$

3.3 Principio de Inclusión-Exclusión

Permutaciones Completas

Ejercicio

1. ¿De cuántas formas se pueden disponer los números $1, 2, \ldots, 10$ para que ninguno ocupe su posición natural?
2. Se tienen que asignar asientos a un grupo de 50 estudiantes para dos exámenes distintos en el mismo aula. ¿De cuantas formas se puede hacer si no queremos que ningún estudiante esté sentado en el mismo sitio en los dos exámenes?

3.3 Principio de Inclusión-Exclusión

Funciones Sobreyectivas

Teorema (Funciones Sobreyectivas)

Si $|A| = r$ y $|B| = n$ y $n\leq r$, entonces el número de funciones sobreyectivas de A en B es

$$\mathcal{F}_{\mathcal{S}} = n^r - \binom{n}{1}\cdot(n-1)^r + \binom{n}{2}\cdot(n-2)^r - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\cdot 1^r = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n}{j}\cdot(n-j)^r$$

- Este resultado coincide con el número de maneras de distribuir r objetos distintos en n cajas distintas sin dejar ninguna caja vacía.

3.3 Principio de Inclusión-Exclusión

Funciones Sobreyectivas

Demostración:

- ✓ Sea $F(A,B)$ el conjunto de todas las funciones de A en B.
- ✓ Se denota F_i el conjunto de las funciones de A en B que dejan sin preimagen al elemento b_i, para $i: 1,\dots,n$.
- ✓ Entonces $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} = |\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \dots \cap \overline{F_n}|$
- ✓ Usando el Principio de Inclusión-Exclusión,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mathcal{S}} = |\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \dots \cap \overline{F_n}| &= |F(A,B)| - |F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n| \\ &= n^r - \Big(\sum_{i=1}^{n} |F_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |F_i \cap F_j| + \dots + (-1)^{n+1} |F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n|\Big)\end{aligned}$$

3.3 Principio de Inclusión-Exclusión

Funciones Sobreyectivas

Demostración:

- ✓ Para calcular $\sum_{i=1}^{n} |F_i|$ tenemos en cuenta que

$$|F_1| = (n-1)^r = |F_2| = |F_3| = \dots = |F_n|$$

Ya que hay $C(n,1) = \binom{n}{1}$ maneras de elegir 1 elemento de un conjunto de n, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} |F_i| = \binom{n}{1} (n-1)^r$$

3.3 Principio de Inclusión-Exclusión

Funciones Sobreyectivas

Demostración: (cont.)

- ✓ Análogamente calculamos $\sum_{1 \le i < j \le n} |F_i \cap F_j|$, teniendo en cuenta que

$$|F_1 \cap F_2| = (n-2)^r = |F_1 \cap F_3| = \dots = |F_{n-1} \cap F_n|$$

Ya que hay $C(n,2) = \binom{n}{2}$ maneras de elegir 2 elementos de un conjunto de n, tenemos

$$\sum_{1 \le i < j \le n} |F_i \cap F_j| = \binom{n}{2} (n-2)^r$$

3.3 Principio de Inclusión-Exclusión

Funciones Sobreyectivas

Demostración: (cont.)

- ✓ En general, podemos hallar $\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_m < n} |F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap F_{i_m}|$, teniendo en cuenta que para $1 \le m < n$,

$$|F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap F_{i_m}| = (n-m)^r$$

Ya que hay $C(n,m) = \binom{n}{m}$ maneras de elegir m elementos de un conjunto de n, tenemos

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_m < n} |F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap F_{i_m}| = \binom{n}{m} (n-m)^r$$

- ✓ Por definición de función, $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n = \varnothing$.
- ✓ Luego, $|F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n| = 0$

3.3 Principio de Inclusión-Exclusión
Funciones Sobreyectivas

Demostración: (cont.)

✓ Por lo tanto,

$$\mathcal{F}_S = n^r - \Big(\sum_{i=1}^{n}|F_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|F_i\cap F_j| + \ldots + (-1)^n \sum_{1\le i_1<\ldots<i_{n-1}\le n}|F_{i_1}\cap F_{i_2}\cap F_{i_{n-1}}|\Big)$$

$$= n^r - \left(\binom{n}{1}(n-1)^r - \binom{n}{2}(n-2)^r + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n-1}(1)^r\right)$$

$$= n^r - \binom{n}{1}(n-1)^r + \binom{n}{2}(n-2)^r - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(1)^r$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n}{j}\cdot(n-j)^r$$

3.3 Principio de Inclusión-Exclusión
Funciones Sobreyectivas

Ejercicio

1. Cuatro estudiantes que van a compartir piso tienen que realizar siete tareas antes que empiece el curso.
   ¿De cuántas maneras se pueden repartir las tareas si cada uno debe realizar al menos una?
2. Un investigador tiene 5 ayudantes y participa en un proyecto que exige la síntesis de 9 compuestos.
   ¿De cuántas maneras puede el investigador asignar estas síntesis a los 5 ayudantes para que cada uno trabaje al menos en una?
3. Una empresa contrata a once nuevos empleados para sus cuatro oficinas. ¿De cuántas maneras es posible destinarlos? ¿Y si cada oficina debe recibir al menos un nuevo empleado?

3.3 Principio de Inclusión-Exclusión
Funciones Sobreyectivas

Ejercicio Se consideran siete pelotas de distintos colores y cuatro recipientes numerados **I**, **II**, **III**, **IV**.

1. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir las pelotas sin dejar ningún recipiente vacío?
2. Si una de las pelotas es blanca, ¿de cuántas formas podemos hacer la distribución para que no quede ningún recipiente vacío y la pelota blanca esté en el recipiente **III**?
3. Si se elimina la numeración de los recipientes de modo que no sea posible diferenciarlos, ¿de cuántas formas se pueden distribuir, con la posibilidad de recipiente(s) vacío(s)?

3.3 Principio de Inclusión-Exclusión
Números de Stirling de 2ª clase

Teorema

El número de maneras de distribuir r objetos distintos en n cajas idénticas sin dejar ninguna caja vacía es

$$S(r,n) = \frac{1}{n!}\left(n^r - \binom{n}{1}\cdot(n-1)^r + \binom{n}{2}\cdot(n-2)^r - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\cdot 1^r\right)$$

☛ $S(r,n)$ es el número de **relaciones de equivalencia** con n clases que se pueden definir en un conjunto de r elementos.

Teorema

Sean n y r dos enteros positivos tales que ($n \leq r$). Entonces

$$S(1,1) = 1, \quad S(r,r) = 1$$

$$S(r+1,n) = S(r,n-1) + nS(r,n)$$

Demostración:

- Para $r = 1 = n$, está claro que $S(1,1) = 1$, pues sólo hay una manera de distribuir 1 objeto en 1 caja.
- $S(r,r) = 1$, ya que distribuir r objetos distintos en r cajas idénticas se puede hacer también solo de una manera

Teorema

Sean n y r dos enteros positivos tales que ($n \leq r$). Entonces

$$S(1,1) = 1, \quad S(r,r) = 1$$

$$S(r+1,n) = S(r,n-1) + nS(r,n)$$

Demostración:

- $S(r+1,n)$ cuenta el número de maneras en que $r+1$ objetos distintos se pueden distribuir en n cajas idénticas, sin que ninguna caja quede vacía.
- Hay $S(r,n-1)$ maneras de distribuir r objetos distintos en $n-1$ cajas idénticas, sin que ninguna caja quede vacía.
- Después asignamos el objeto a_{r+1} a la caja n -ésima.

Teorema

Sean n y r dos enteros positivos tales que ($n \leq r$). Entonces

$$S(1,1) = 1, \quad S(r,r) = 1$$

$$S(r+1,n) = S(r,n-1) + nS(r,n)$$

Demostración:

✔ Alternativamente, se pueden distribuir los objetos distintos $a_1, \ldots, a_r$ en n cajas idénticas sin que ninguna caja quede vacía y, a continuación, asignamos el objeto $r+1$ a cualquiera de las n cajas.

Ejemplo Tabla de los números de Stirling de 2ª clase

$S(4,1)=1$	$S(4,2)=7$	$S(4,3)=6$	$S(4,4)=1$
$\{a,b,c,d\}$	$\{a,b\},\{c,d\}$	$\{a,b\},\{c\},\{d\}$	$\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}$
	$\{a,c\},\{b,d\}$	$\{a,c\},\{b\},\{d\}$	
	$\{a,d\},\{b,c\}$	$\{a,d\},\{b\},\{c\}$	
	$\{a,b,c\},\{d\}$	$\{b,c\},\{a\},\{d\}$	
	$\{a,b,d\},\{c\}$	$\{b,d\},\{a\},\{c\}$	
	$\{a,c,d\},\{b\}$	$\{c,d\},\{a\},\{b\}$	
	$\{b,c,d\},\{a\}$		

Ejercicio

1. Dado el conjunto {a, b, c, d, e }, halla el número de particiones que tienen tres bloques.

   Solución:

$$S(5,3) = S(4,2) + 3 \cdot S(4,3) = 7 + 3 \cdot 6 = 25$$

Ejercicio

2. ¿De cuántas formas puede factorizarse $30\,030$ en tres factores (cada uno mayor que 1), si no importa el orden de los factores?

   Solución: $30\,030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$

$$\begin{aligned} S(6,3) &= S(5,2) + 3 \cdot S(5,3) \\ &= \Big(S(4,1) + 2 \cdot S(4,2)\Big) + 3\Big(S(4,2) + 3 \cdot S(4,3)\Big) \\ &= 1 + (2+3) \cdot S(4,2) + 9 \cdot S(4,3) \\ &= 1 + 5 \cdot 7 + 9 \cdot 6 = 90 \end{aligned}$$

Ejercicio

3. Completa la tabla siguiente indicando el número de maneras de distribuir nueve objetos en cinco recipientes:

Objetos	Recipientes	Recipientes vacíos	Número
Indistinguibles	Distinguibles	Permitidos	
Distinguibles	Distinguibles	Permitidos	
Distinguibles	Distinguibles	No Permitidos	
Distinguibles	Indistinguibles	No Permitidos	

4. En un departamento de n profesores se asigna la docencia de n asignaturas. Si hay un profesor de baja, ¿de cuántas maneras se puede hacer?

Teorema

El número de **relaciones de equivalencia** *que se pueden definir en un conjunto de r elementos es*

$$B(r) = \sum_{n=1}^{n=r} S(r,n)$$

☛ $B(r)$ es el número de **particiones** que se pueden establecer en un conjunto de r elementos.

Tema 3: Técnicas de Recuento

3.4 Funciones generadoras

3.4 Funciones generadoras

- Introducción.
- Funciones generadoras.
- Manipulación de funciones generadoras: Identidades básicas.
- Cálculo de coeficientes.

3.4 Funciones generadoras

Introducción

✓ Sabemos hallar el **número** de **soluciones enteras** de ecuaciones como:

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_n = r$$

donde r es un entero determinado y cada e_j es un entero que puede estar sujeto a una restricción adicional.

✓ A continuación estudiaremos cómo resolverlos de manera **más eficiente**.

3.4 Funciones generadoras

Introducción

Ejemplo Determina el número de soluciones enteras de

$$e_1 + e_2 + e_3 = 17$$

donde e_1, e_2, e_3 son enteros no negativos tales que

$$2 \leq e_1 \leq 5, \qquad 3 \leq e_2 \leq 6, \qquad 4 \leq e_3 \leq 7$$

Solución:

✓ Consideramos tres polinomios $p_1(z)$, $p_2(z)$ y $p_3(z)$, uno para cada variable.

✓ Ya que $2 \leq e_1 \leq 5$, el polinomio $p_1(z)$ se define $z^2 + z^3 + z^4 + z^5$.

✓ Ya que $3 \leq e_2 \leq 6$, el polinomio $p_2(z)$ se define $z^3 + z^4 + z^5 + z^6$.

✓ Ya que $4 \leq e_3 \leq 7$, el polinomio $p_3(z)$ se define $z^4 + z^5 + z^6 + z^7$.

3.4 Funciones generadoras

Introducción

Solución:

✓ Multiplicamos estos polinomios para obtener un polinomio $P(z)$

$$P(z) = (z^2 + z^3 + z^4 + z^5) \cdot (z^3 + z^4 + z^5 + z^6) \cdot (z^4 + z^5 + z^6 + z^7) = \sum_{j=9}^{18} c_j z^j$$

✓ En $P(z)$ se obtiene z^{17} al multiplicar un z^{e_1} del primer factor por un z^{e_2} del segundo factor y por un z^{e_3} del tercer factor, donde los exponentes e_1, e_2 y e_3 verifican la ecuación $e_1 + e_2 + e_3 = 17$ con $2 \leq e_1 \leq 5, \quad 3 \leq e_2 \leq 6, \quad 4 \leq e_3 \leq 7.$

✓ ¿De cuántas maneras se puede formar la potencia 17 de z en $P(z)$?

✓ Por ejemplo, podemos elegir z^4 en $p_1(z)$, z^6 en $p_2(z)$, y z^7 en $p_3(z)$ y multiplicarlos.

✓ Esto es sólo una manera de obtener z^{17}, que corresponde a la solución $e_1 = 4$, $e_2 = 6$ y $e_3 = 7$.

Solución:

- ✓ Cada solución corresponde a una forma de obtener z^{17} en $P(z)$.
- ✓ Por lo tanto, para determinar el número de soluciones hallaremos el coeficiente c_{17} de z^{17} en el polinomio $P(z)$.

En general, el número de soluciones enteras de la ecuación

$$e_1 + e_2 + e_3 = r$$

tales que

$$2 \le e_1 \le 5, \qquad 3 \le e_2 \le 6, \qquad 4 \le e_3 \le 7$$

es el coeficiente de z^r en el desarrollo de

$$P(z) = (z^2 + z^3 + z^4 + z^5) \cdot (z^3 + z^4 + z^5 + z^6) \cdot (z^4 + z^5 + z^6 + z^7) = \sum_{j=9}^{18} c_j z^j$$

☛ Este polinomio es un ejemplo de **función generadora**.

- ✓ La secuencia c_n, finita en este caso, de las soluciones de una familia de problemas ha sido **generada** por el polinomio $P(z)$.
- ✓ Aunque la expansión del polinomio supone en realidad ''contar una a una'' las soluciones, el proceso es puramente mecánico y las propiedades de los polinomio evitan tener que establecer estrategias para el recorrido exhaustivo de las soluciones.
- ✓ En el ejemplo anterior, puesto que tenemos las restricciones $2 \le e_1 \le 5$, $3 \le e_2 \le 6$, y $4 \le e_3 \le 7$, sólo es posible plantear ecuaciones $e_1 + e_2 + e_3 = n$ en las que $n \le 18$.

  ¿Podemos utilizar el mismo método si, por ejemplo, cambiamos la restricción sobre e_3 a $4 \le e_3$?

- ✓ Si la restricción sobre e_3 es $4 \le e_3$, la función generadora de las soluciones sería:

$$P(z) = (z^2 + z^3 + z^4 + z^5)\,(z^3 + z^4 + z^5 + z^6)\,(z^4 + z^5 + z^6 + z^7 + z^8 + \dots),$$

  en donde el último paréntesis incluye una ''suma infinita''.
- ✓ Con estas restricciones, podemos preguntarnos por el número de soluciones de la ecuaciones $e_1 + e_2 + e_3 = n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto, necesitamos generar una sucesión infinita c_n, $n \in \mathbb{N}$.
- ✓ Sin embargo, ahora no podremos usar simplemente el producto de polinomios y tendremos que recurrir a las **series de potencias** para determinar la sucesión de coeficientes.
  (Volveremos más adelante al ejemplo)

Definición

*Si a_n $(n : 0, 1, 2, \dots)$ es el número de soluciones de un problema combinatorio, la **función generadora (ordinaria)** para este problema combinatorio es la serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

- Las funciones generadoras se denominan también **generatrices**.
- Vamos a aprender a usar las funciones generadoras para determinar la forma explícita de una sucesión.
- Aunque vamos a trabajar con series de potencias, nunca necesitaremos conocer su campo de convergencia, ya que la validez de los resultados obtenidos sobre los coeficientes es independiente de dicho campo.

Polinomios

Un polinomio se puede considerar como un caso particular de serie de potencias formal, en la cual todos los coeficientes a partir de uno en adelante son nulos:

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_k z^k = a_0 + a_1 z + \ldots + a_k z^k + 0 \cdot z^{k+1} + 0 \cdot z^{k+2} + \ldots$$

Las operaciones definidas para series formales extienden las operaciones análogas definidas para polinomios.

Suma de series formales

La **suma** de dos series formales $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot z^n$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \cdot z^n$$

Producto por un escalar

El producto de una serie formal por un escalar se obtiene multiplicando cada coeficiente de la serie por el escalar:

$$c \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n \cdot z^n$$

Producto de series de potencias formales

El producto de dos series de potencias formales se define

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot z^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{n} a_j \cdot b_{n-j}\Big) z^n$$

o sea

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots) \cdot (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots) \\ = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \ldots\end{aligned}$$

Cociente de dos series formales

Si $b_0 \neq 0$, entonces el cociente de dos series

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n\Big) / \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot z^n\Big)$$

es la única serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n$ tal que

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot z^n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$$

Los coeficientes $c_0, c_1, c_2, \ldots$ se obtienen despejándolos de

$$\begin{aligned} b_0 c_0 &= a_0, \\ b_0 c_1 + b_1 c_0 &= a_1, \\ b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 &= a_2, \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

3.4 Funciones generadoras

Series de potencias formales

- El cociente de 1 entre $1-z$ es una serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n$ tal que

$$(1-z)(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots) = 1$$

de donde,

$$\begin{aligned} &c_0 = 1, \\ &c_1 - c_0 = 0, \text{ es decir } c_1 = c_0 = 1, \\ &c_2 - c_1 = 0, \text{ es decir } c_2 = c_1 = 1, \end{aligned}$$

y así sucesivamente todos los c_i son 1.

Por lo tanto,

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$$

3.4 Funciones generadoras

Series de potencias formales

- Ya que $\dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots,$ se tiene también que

$$\frac{1}{z-a} = \left(-\frac{1}{a}\right) \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{a}\right)} = \left(-\frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{z}{a} + \frac{z^2}{a^2} + \ldots\right)$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n$$

3.4 Funciones generadoras

Series de potencias formales

Derivación de una serie formal

La derivada de la serie de potencias formal $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ es

$$\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot z^{n-1}$$

3.4 Funciones generadoras

Series de potencias formales

Identidades básicas (I)

1. $$\sum_{n=0}^{m} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^m = \frac{1 - z^{m+1}}{1-z}$$
2. $$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \frac{1}{1-z}$$
3. $$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n$$
4. $$(1+z)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

3.4 Funciones generadoras
Series de potencias formales

Identidades básicas (II)

Si $m \in \mathbb{N}$, entonces

5. $(1+z)^m = \binom{m}{0}z^0 + \binom{m}{1}z^1 + \cdots + \binom{m}{m}z^m$

6. $(1-z^r)^m = \binom{m}{0}(-z^r)^0 + \binom{m}{1}(-z^r)^1 + \cdots + \binom{m}{m}(-z^r)^m$

7. $(1-z)^{-m} = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{j+m-1}{j}z^j$

3.4 Funciones generadoras
Series de potencias formales

7. $(1-z)^{-m} = \sum_{j\geq 0}\binom{j+m-1}{j}z^j$

Demostración:

$$(1-z)^{-m} = \left((1-z)^{-1}\right)^m = \left(\frac{1}{1-z}\right)^m = (1+z+z^2+\cdots+z^k+\dots)^m$$

$$= \sum_{e_i\geq 0} z^{e_1}\cdot z^{e_2}\cdots z^{e_m} = \sum_{j\geq 0} c_j z^j = \sum_{j\geq 0}\binom{j+m-1}{j}z^j$$

☛ El coeficiente $c_j = \binom{j+m-1}{j}$ es el número de soluciones enteras de la ecuación $e_1 + \dots + e_m = j$, con $e_i \geq 0$.

3.4 Funciones generadoras
Cálculo de coeficientes

Ejemplo Determina el número de soluciones enteras de

$$e_1 + e_2 + e_3 = 17$$

donde e_1, e_2, e_3 son enteros no negativos tales que

$$2 \leq e_1 \leq 5, \qquad 3 \leq e_2 \leq 6, \qquad 4 \leq e_3 \leq 7$$

Solución: Como hemos demostrado, el número de soluciones con las restricciones dadas es el coeficiente de z^{17} en el desarrollo de

$$P(z) = (z^2+z^3+z^4+z^5)\cdot(z^3+z^4+z^5+z^6)\cdot(z^4+z^5+z^6+z^7)$$

Para calcular este coeficiente usamos las identidades básicas estudiadas anteriormente.

3.4 Funciones generadoras
Cálculo de coeficientes

Solución:

$$\begin{aligned}
P(z) &= (z^2+z^3+z^4+z^5)\cdot(z^3+z^4+z^5+z^6)\cdot(z^4+z^5+z^6+z^7)\\
&= z^2(1+z+z^2+z^3)\cdot z^3(1+z+z^2+z^3)\cdot z^4(1+z+z^2+z^3)\\
&= z^9(1+z+z^2+z^3)^3\\
&= z^9\left(\frac{1-z^4}{1-z}\right)^3\\
&= z^9\cdot(1-z^4)^3\cdot(1-z)^{-3}
\end{aligned}$$

✓ El coeficiente de z^{17} en $P(z) = z^9\cdot(1-z^4)^3\cdot(1-z)^{-3}$ coincide con el coeficiente de z^8 en $H(z) = (1-z^4)^3\cdot(1-z)^{-3}$

Solución:

$$
\begin{aligned}
H(z) &= (1-z^4)^3\cdot(1-z)^{-3}\\
&= \sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}(-z^4)^i\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3-1}{k}z^k
\end{aligned}
$$

Los términos con z^8 se obtienen para

$$
\begin{aligned}
i=0,\quad k=8:&\quad \binom{3}{0}(-z^4)^0\cdot\binom{8+3-1}{8}z^8=\binom{3}{0}\cdot\binom{8+3-1}{8}z^8\\
i=1,\quad k=4:&\quad \binom{3}{1}(-z^4)^1\cdot\binom{4+3-1}{4}z^4=-\binom{3}{1}\cdot\binom{4+3-1}{4}z^8\\
i=2,\quad k=0:&\quad \binom{3}{2}(-z^4)^2\cdot\binom{0+3-1}{0}z^0=\binom{3}{2}\cdot\binom{0+3-1}{0}z^8
\end{aligned}
$$

3.4 Funciones generadoras

Cálculo de coeficientes

Solución: Por lo tanto, el coeficiente c_{17} de z^{17} en $P(z)$ es

$$
\begin{aligned}
c_{17} &= \binom{3}{0}\cdot\binom{8+3-1}{8}-\binom{3}{1}\cdot\binom{4+3-1}{4}+\binom{3}{2}\cdot\binom{0+3-1}{0}\\
&= \binom{10}{8}-3\cdot\binom{6}{4}+\binom{3}{2}\cdot\binom{2}{0}\\
&= \binom{10}{2}-3\cdot\binom{6}{2}+3\cdot 1\\
&= 45-45+3=3
\end{aligned}
$$

3.4 Funciones generadoras

Cálculo de coeficientes

Ejemplo Halla el número de soluciones enteras de la ecuación

$$x_1+x_2+x_3=10$$

tales que

$$2\le x_1\le 4,\quad 2\le x_2\le 4,\quad 2\le x_3\le 4$$

Solución El número de soluciones con las restricciones dadas es el coeficiente de z^{10} en el desarrollo de

$$G(z)=(z^2+z^3+z^4)\cdot(z^2+z^3+z^4)\cdot(z^2+z^3+z^4)=\sum_{j=6}^{12}c_jz^j$$

3.4 Funciones generadoras

Cálculo de coeficientes

Solución:

$$
\begin{aligned}
G(z) =&(z^2+z^3+z^4)\cdot(z^2+z^3+z^4)\cdot(z^2+z^3+z^4)\\
=&z^2(1+z+z^2)\cdot z^2(1+z+z^2)\cdot z^2(1+z+z^2)\\
=&z^6(1+z+z^2)^3\\
=&z^6\left(\frac{1-z^3}{1-z}\right)^3\\
=&z^6\cdot(1-z^3)^3\cdot(1-z)^{-3}
\end{aligned}
$$

✓ El coeficiente de z^{10} en $G(z)=z^6\cdot(1-z^3)^3\cdot(1-z)^{-3}$ coincide con el coeficiente de z^4 en $H(z)=(1-z^3)^3\cdot(1-z)^{-3}$

3.4 Funciones generadoras
Cálculo de coeficientes

Solución:

$$\begin{aligned} H(z) =& (1-z^3)^3 \cdot (1-z)^{-3} \\ =& \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} (-z^3)^i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3-1}{k} z^k \end{aligned}$$

Los términos con z^4 se obtienen para

$i = 0, \quad k = 4:$ $\quad \binom{3}{0}(-z^3)^0 \cdot \binom{4+3-1}{4} z^4 = \binom{3}{0} \cdot \binom{4+3-1}{4} z^4$

$i = 1, \quad k = 1:$ $\quad \binom{3}{1}(-z^3)^1 \cdot \binom{1+3-1}{1} z^1 = -\binom{3}{1} \cdot \binom{1+3-1}{1} z^4$

3.4 Funciones generadoras
Cálculo de coeficientes

Solución: Por lo tanto, el coeficiente c_{10} de z^{10} en $G(z)$ es

$$\begin{aligned} c_{10} =& \binom{3}{0} \cdot \binom{4+3-1}{4} - \binom{3}{1} \cdot \binom{1+3-1}{1} \\ =& \binom{6}{4} - \binom{3}{1} \cdot \binom{3}{1} \\ =& \binom{6}{2} - \binom{3}{1} \cdot \binom{3}{1} \\ =& 15 - 9 = 6 \end{aligned}$$

3.4 Funciones generadoras
Funciones generadoras y Problemas de recuento

Ejemplo Ahora consideramos el problema de hallar el número de soluciones enteras de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 = r$$

donde cada variable está comprendida entre 2 y 4.
Es decir, $2 \le x_1 \le 4, \quad 2 \le x_2 \le 4, \quad 2 \le x_3 \le 4.$

- ✓ El valor de r varía entre 6 y 12.
- ✓ Para una elección fija de r, sea a_r el número de soluciones enteras de la ecuación.
- ✓ Entonces a_r es el coeficiente de z^r en la función generadora $G(z)$ del problema, donde $G(z) = (z^2 + z^3 + z^4)^3$ que es igual a

$$z^6 + 3z^7 + 6z^8 + 7z^9 + 6z^{10} + 3z^{11} + z^{12}$$

3.4 Funciones generadoras
Funciones generadoras y Problemas de recuento

Ejemplo Si a_r es el número de maneras de seleccionar r bolas de una colección de bolas azules, rojas y verdes, tal que el número de bolas azules seleccionadas es a lo sumo 2, el número de bolas rojas es a lo sumo 3 y el número de bolas verdes es como mínimo 4,entonces a_r es el número de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = r$, donde

$$0 \le x_1 \le 2, \quad 0 \le x_2 \le 3, \quad 4 \le x_3$$

Por nuestro estudio anterior, a_r es el coeficiente de z^r en la función generadora

$$\begin{aligned} G(z) =& (1+z+z^2)(1+z+z^2+z^3)(z^4+z^5+z^6+\dots) \\ =& (1+z+z^2)(1+z+z^2+z^3) z^4 \sum_{n=0}^{\infty} z^n \end{aligned}$$

Tema 3: Técnicas de Recuento

3.5 Ecuaciones de Recurrencia

3. 5 Ecuaciones de Recurrencia

- Introducción: Recuento recursivo.
- Ecuaciones de recurrencia lineales con coeficientes constantes. Definiciones y ejemplos.
- Resolución de recurrencias lineales usando funciones generadoras.
- Resolución de recurrencias lineales sin usar funciones generadoras.
  - Caso homogéneo
  - Caso no homogéneo

Tema 4: Ecuaciones de Recurrencia

Introducción: Recuento recursivo.

✓ Las definiciones recursivas se pueden usar para resolver problemas de recuento.

✓ Supongamos que queremos contar el número de maneras en que se puede realizar un proceso dado.

✓ Si el proceso se puede considerar como la realización sucesiva de un número de tareas y el número t_n de maneras de ejecutar la tarea n se puede calcular a partir de los números $t_{n-1}, t_{n-2}, \ldots, t_{n-k}$ para algún $k < n$,

✓ entonces podremos escribir una ecuación de la forma

$$t_n = \varphi(t_{n-1}, t_{n-2}, \ldots, t_{n-k}, n)$$

donde φ es una función de $k+1$ variables.

✓ Una ecuación de esta forma se llama ***ecuación de recursión***.

3.5 Ecuaciones de Recurrencia

Definición

*Una **relación de recurrencia** para la sucesión $\{a_n\}$ es una ecuación que determina el término a_n en función de los términos anteriores.*
*Se dice que una sucesión es una **solución** de la recurrencia si para todo entero n sus términos verifican la relación.*

✓ Las ***condiciones iniciales*** para una sucesión especifican los términos que preceden al primer término en el que está definida la relación de recurrencia.

✓ Las condiciones iniciales y la relación de recurrencia determinan de forma única la sucesión.

Ejemplo Sea $\{a_n\}$ una sucesión que verifica la relación de recurrencia

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$$

Si $a_0 = 2$ y $a_1 = 6$, entonces $a_2 = 10$ y $a_3 = 14$.

3.5 Ecuaciones de Recurrencia

Ejemplo Determina si la sucesión $a_n = 3n$ es solución de la recurrencia

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Solución: Si $a_n = 3n$ para todo entero n, entonces

$$2a_{n-1} - a_{n-2} = 2(3(n-1)) - 3(n-2) = 6n - 6 - 3n + 6 = 3n$$

Luego, $a_n = 3n$ verifica la recurrencia dada.

Por lo tanto, decimos que $a_n = 3n$ es **solución** de la recurrencia

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$$

3.5 Ecuaciones de Recurrencia

Ejemplo Determina si la sucesión $a_n = 2^n$ es solución de la relación de recurrencia

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Solución: Si $a_n = 2^n$ para todo n, se tiene que

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} a_0 & = & 2^0 & = & 1 \\ a_1 & = & 2^1 & = & 2 \end{array} \right\}$$

Por tanto,

$$2a_1 - a_0 = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 3 \neq 2^2 = a_2$$

y se concluye que $a_n = 2^n$ **no** es solución para la recurrencia dada.

3.5 Ecuaciones de Recurrencia

Ejemplo Determina si la sucesión $a_n = 5$ es solución de la relación de recurrencia

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Solución: Si $a_n = 5$ para todo n, entonces

$$2a_{n-1} - a_{n-2} = 2 \cdot 5 - 5 = 5 = a_n$$

Luego, $a_n = 5$ es solución para la recurrencia dada.

3.5 Ecuaciones de Recurrencia

Ecuaciones de recurrencia lineales con coeficientes constantes

Definición

*Una relación de **recurrencia lineal homogénea** de **orden** $\mathbf{k}$ y con **coeficientes constantes** es una relación de recurrencia de la forma*

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \cdots + c_k \cdot a_{n-k}$$

donde $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ *y* $c_k \neq 0$.

Las relaciones de recurrencia lineales se estudian por dos razones fundamentales: se presentan a menudo y se pueden resolver sistemáticamente.

3.5 Ecuaciones de Recurrencia

Ecuaciones de recurrencia lineales con coeficientes constantes

Ejemplos

1. $f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ n \geq 2$ es una relación de recurrencia lineal y homogénea de orden 2.
2. La relación $a_n = a_{n-4}$ es una relación de recurrencia lineal y homogénea de orden 4.
3. La relación $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2$ no es lineal.
4. La relación $q_{n+1} = 2q_n + 4^n$ no es homogénea.

3.5 Ecuaciones de Recurrencia

Resolución de recurrencias lineales homogéneas

Ejercicio De una sucesión sabemos que

$$5u_n = 3u_{n-1} + 4u_{n-2}$$

para cualquier $n \geq 2$.

1. ¿Es una recurrencia lineal?
2. ¿Es homogénea?
3. ¿Cuál es su orden?
4. ¿Cuántos términos iniciales hace falta conocer para definir la sucesión?

Justifica tus respuestas.

3.5 Ecuaciones de Recurrencia

Modelos con relaciones de recurrencia

Ejemplo 1 Un robot sube escaleras de forma errática. A veces sube dos peldaños de golpe, a veces sólo uno. Halla una fórmula para expresar el número de maneras distintas de subir n peldaños.

Solución: Consideramos la sucesión $\{b_n\}$, donde cada término b_k indica el número de maneras distintas de subir k peldaños. Claramente,

$$\begin{cases} b_1 & = & 1, \ b_2 = 2 \\ b_{n+2} & = & b_{n+1} + b_n, \ n \geq 0 \end{cases}$$

ya que un peldaño se puede subir de **una** forma y **dos** peldaños de **dos** maneras (los dos de golpe o uno detrás de otro)y para subir $n+2$ peldaños, el robot debe subir 1 peldaño después de haber subido $n+1$ peldaños o bien subir 2 peldaños después de haber subido n.

3.5 Ecuaciones de Recurrencia

Modelos con relaciones de recurrencia

Ejemplo 2 Sea q_n el número de palabras de longitud n que se pueden formar con símbolos del alfabeto $\{0, 1\}$ con la propiedad de no tener dos ceros consecutivos. Determina $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Solución:

- Para $n = 0$, la palabra de longitud 0 con esta propiedad es $\{\epsilon\}$, así $q_0 = 1$.
- Para $n = 1$, las palabras de longitud 1 con esta propiedad son $\{0, 1\}$, así $q_1 = 2$.
- Para $n = 2$, las palabras de longitud 2 con esta propiedad son $\{01, 11, 10\}$, así $q_2 = 3$.

3.5 Ecuaciones de Recurrencia

Modelos con relaciones de recurrencia

Solución: (cont.) Para $n \geq 2$, se puede obtener una palabra de longitud n sin ceros consecutivos de una de estas maneras:

- añadiendo un 1 a una palabra de longitud $n-1$ sin ceros consecutivos:

$$\underbrace{- \cdots -}_{n-1} 1$$

- añadiendo un cero a una palabra de longitud $n-1$ sin ceros consecutivos y que acabe en 1:

$$\underbrace{\underbrace{- - - \cdots - - -}_{n-2} \ 1}_{n-1} \ 0$$

Por lo tanto, para todo $n \geq 2$, $q_n = q_{n-1} + q_{n-2}$.

3.5 Ecuaciones de Recurrencia

Resolución de recurrencias lineales usando funciones generadoras

Ejemplo Usa funciones generadoras para resolver la recurrencia lineal

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1$$

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0,\quad n \geq 2$$

Solución: La función generadora asociada a la sucesión es

$$G(z) = a_0 + a_1 \cdot z + a_2 \cdot z^2 + \ldots + a_n \cdot z^n + \ldots$$

Multiplicando $G(z)$ por $(1 - 3z + 2z^2)$ obtenemos:

$$\begin{array}{rcccccc} G(z) = & a_0 & +a_1 z & +a_2 z^2 & +a_3 z^3 & +a_4 z^4 & \ldots \\ -3zG(z) = & & -3a_0 z & -3a_1 z^2 & -3a_2 z^3 & -3a_3 z^4 & \ldots \\ +2z^2G(z) = & & & +2a_0 z^2 & +2a_1 z^3 & +2a_2 z^4 & \ldots \\ \hline (1-3z+2z^2)G(z) = & a_0 + (a_1 - 3a_0)z & & & & & \end{array}$$

Al sumar las tres series, los sumandos de grado mayor o igual que 2 se anulan, debido a la definición recursiva de a_n.

$$(1 - 3z + 2z^2)G(z) = z$$

3.5 Ecuaciones de Recurrencia

Resolución de recurrencias lineales usando funciones generadoras

Solución: (cont.) A partir de $(1 - 3z + 2z^2)G(z) = z$ obtenemos

$$G(z) = \frac{z}{1 - 3z + 2z^2} = \frac{z}{(1-z)(1-2z)}$$

$$= \frac{-1}{1-z} + \frac{1}{1-2z}$$

De donde

$$\begin{aligned} G(z) &= (-1)(1 + z + z^2 + \ldots) + (1 + 2z + 2^2z^2 + 2^3z^3 + \ldots) \\ &= (2^1 - 1)z + (2^2 - 1)z^2 + (2^3 - 1)z^3 + \ldots + (2^n - 1)z^n + \ldots \\ &= (2^0 - 1)z^0 + (2^1 - 1^1)z + (2^2 - 1^2)z^2 + (2^3 - 1^3)z^3 + \ldots + (2^n - 1^n)z^n + \ldots \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$a_n = 2^n - 1^n,\quad \text{para todo } n \geq 0$$

3.5 Ecuaciones de Recurrencia

Resolución de recurrencias lineales usando funciones generadoras

Ejemplo Sea q_n el número de palabras de longitud n construidas con las letras del alfabeto $\{a, b, c, d\}$ que tienen un número impar de letras $b's$.

- Demuestra que

$$q_{n+1} = 4^n + 2q_n,\quad n \geq 1$$

- Halla la función generadora $Q(z)$ de $\{\ q_n\ \}$ y demuestra que

$$q_n = \frac{1}{2}(4^n - 2^n)$$

3.5 Ecuaciones de Recurrencia

Resolución de recurrencias lineales usando funciones generadoras

Solución: $q_0 = 0$, ya que la palabra vacía no tiene un nº impar de $b's$

Para $n \geq 1$, veamos que $q_{n+1} = 4^n + 2q_n$

En efecto, cada palabra de longitud $n+1$ con un número **impar** de $b's$ se forma añadiendo:

- ➢ a, c ó d a una palabra de longitud **n** con un número **impar** de $b's$.
  (Así obtenemos $3q_n$ palabras.)
- ➢ b a una palabra de longitud n con un número **par** de $b's$.
  (Así obtenemos $4^n - q_n$ palabras.)

Por lo tanto,

$$q_{n+1} = 3q_n + (4^n - q_n) = 2q_n + 4^n$$

Solución: (cont.) Multiplicando por $(1-2z)$ la función generadora

$$Q(z) = q_0 + q_1 \cdot z + q_2 \cdot z^2 + \ldots + q_n \cdot z^n + \ldots$$

obtenemos:

$$\begin{array}{rccccccc}
Q(z) = & q_0 & +q_1 z & +q_2 z^2 & +q_3 z^3 & +\ldots & +q_n z^n & +\ldots \\
-2zQ(z) = & & -2q_0 z & -2q_1 z^2 & -2q_2 z^3 & -\ldots & -2q_{n-1} z^n & -\ldots \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
(1-2z)Q(z) = \;& q_0 + (q_1 - 2q_0)z + (q_2 - 2q_1)z^2 + \cdots + (q_n - 2q_{n-1})z^n + \ldots \\
=\;& 0 + 4^0 \cdot z + 4^1 \cdot z^2 + 4^2 \cdot z^3 + \cdots + 4^n \cdot z^{n+1} + \ldots \\
=\;& z(4^0 \cdot z^0 + 4^1 \cdot z^1 + 4^2 \cdot z^2 + \cdots + 4^n \cdot z^n + \ldots) \\
=\;& z(1-4z)^{-1}
\end{aligned}$$

Solución: (cont.) A partir de $(1-2z)Q(z) = \dfrac{z}{(1-4z)}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
Q(z) =& \frac{z}{(1-4z)(1-2z)} \\
=& \frac{\frac{1}{2}}{1-4z} + \frac{(\frac{-1}{2})}{1-2z}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$q_n = \frac{1}{2} \cdot 4^n - \frac{1}{2} 2^n = \frac{1}{2}(4^n - 2^n), \quad n \geq 0$$

Definición

*Una relación de **recurrencia lineal homogénea** de **orden** k y con **coeficientes constantes** es una relación de recurrencia de la forma*

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \cdots + c_k \cdot a_{n-k}$$

donde $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ *y* $c_k \neq 0$.
La ecuación

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \ldots - c_k = 0$$

se llama ecuación característica.

Ejemplo Para la recurrencia lineal homogénea de orden 2

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$$

la ecuación característica es $r^2 - 3r + 2 = 0$

- Las soluciones de la ecuación característica determinan la forma de la expresión explícita de la sucesión definida por la relación de recurrencia.

Teorema

Sean $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, *tales que la ecuación característica*

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

tiene dos raíces distintas r_1 *y* r_2. *Entonces la sucesión* $\{a_n\}$ *es una solución de la recurrencia lineal*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

si y sólo si

$$a_n = \alpha_1 {r_1}^n + \alpha_2 {r_2}^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde α_1, α_2 *son constantes.*

3.5 Ecuaciones de Recurrencia
Resolución de recurrencias lineales homogéneas

Ejemplo Halla la solución de la recurrencia lineal

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1, \quad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

Solución:

- La ecuación característica es $\ r^2 - 3r + 2 = 0$
- Hallamos las raíces:
$$r^2 - 3r + 2 = (r-2)(r-1) = 0 \implies r_1 = 2, \quad r_2 = 1$$
- Aplicando el teorema, la solución de la recurrencia es
$$a_n = \alpha_1 \cdot 2^n + \alpha_2 \cdot 1^n$$
- Determinamos α_1 y α_2 usando las condiciones iniciales:
$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \alpha_1 \cdot 2^0 & + & \alpha_2 \cdot 1^0 & = & 0 \\ \alpha_1 \cdot 2^1 & + & \alpha_2 \cdot 1^1 & = & 1 \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{rcrcl} \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 0 \\ 2\alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 1 \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{rcr} \alpha_1 & = & 1 \\ \alpha_2 & = & -1 \end{array}\right\}$$
- Por lo tanto, la **única** solución de esta relación de recurrencia que verifica las condiciones iniciales es $\quad a_n = 2^n - 1^n, \quad n \geq 0$

3.5 Ecuaciones de Recurrencia
Resolución de recurrencias lineales homogéneas

Ejemplo Halla la solución de la recurrencia lineal

$$a_0 = 2,\ a_1 = 7, \quad a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

Solución:

- La ecuación característica es $\ r^2 - r - 2 = 0$
- Hallamos las raíces:
$$r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1) = 0 \implies r_1 = 2, \quad r_2 = -1$$
- Aplicando el teorema, la solución de la recurrencia es
$$a_n = \alpha_1 \cdot 2^n + \alpha_2 \cdot (-1)^n$$
- Determinamos α_1 y α_2 usando las condiciones iniciales:
$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \alpha_1 \cdot 2^0 & + & \alpha_2 \cdot (-1)^0 & = & 2 \\ \alpha_1 \cdot 2^1 & + & \alpha_2 \cdot (-1)^1 & = & 7 \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{rcrcl} \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 2 \\ 2\alpha_1 & - & \alpha_2 & = & 7 \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{rcr} \alpha_1 & = & 3 \\ \alpha_2 & = & -1 \end{array}\right\}$$
- Por lo tanto, la única solución de esta relación de recurrencia que verifica las condiciones iniciales es: $\quad a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n, \quad n \geq 0$

3.5 Ecuaciones de Recurrencia
Resolución de recurrencias lineales homogéneas

Ejemplo La solución de la sucesión

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

es

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

3.5 Ecuaciones de Recurrencia
Resolución de recurrencias lineales homogéneas

Teorema

Sean $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Si la ecuación característica

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

tiene una raíz doble r_0, entonces la sucesión $\{a_n\}$ es una solución de la recurrencia lineal

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

si y sólo si

$$a_n = \alpha_1 r_0{}^n + \alpha_2 n \cdot r_0{}^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde α_1, α_2 son constantes.

Ejemplo Halla la solución de la recurrencia lineal

Solución: $a_0 = 1,\ a_1 = 6,\ a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$

- La ecuación característica es: $r^2 - 6r + 9 = 0$
- Hallamos las raíces:
$$r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2 = 0 \implies r_0 = 3 \quad \text{(doble)}$$
- Aplicando el teorema, la solución de la recurrencia es:
$$a_n = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot n \cdot 3^n$$
- Determinamos α_1 y α_2 usando las condiciones iniciales:
$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 \cdot 3^0 + \alpha_2 \cdot 0 \cdot 3^0 = 1 \\ \alpha_1 \cdot 3^1 + \alpha_2 \cdot 1 \cdot 3^1 = 6 \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = 1 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 6 \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \end{array}\right\}$$
- Por lo tanto, la única solución de esta relación de recurrencia que verifica las condiciones iniciales es: $a_n = 3^n + n3^n, \quad n \geq 0$

Ejemplo Halla la solución de la recurrencia lineal

Solución: $a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$

- La ecuación característica es: $r^2 - 4r + 4 = 0$
- Hallamos las raíces:
$$r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0 \implies r_0 = 2 \quad \text{(doble)}$$
- Aplicando el teorema, la solución de la recurrencia es:
$$a_n = \alpha_1 \cdot 2^n + \alpha_2 \cdot n \cdot 2^n$$
- Determinamos α_1 y α_2 usando las condiciones iniciales:
$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 \cdot 2^0 + \alpha_2 \cdot 0 \cdot 2^0 = 1 \\ \alpha_1 \cdot 2^1 + \alpha_2 \cdot 1 \cdot 2^1 = 1 \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = 1 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = (-\frac{1}{2}) \end{array}\right\}$$
- Por lo tanto, la única solución de esta relación de recurrencia que verifica las condiciones iniciales es: $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}n\right)2^n, \quad n \geq 0$

Teorema

Sean $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, *tales que la ecuación característica*
$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \ldots - c_k = 0$$
tiene k *raíces distintas* $r_1, r_2, \ldots, r_k$. *Entonces la sucesión* $\{a_n\}$ *es una solución de la recurrencia lineal*
$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$
si y sólo si
$$a_n = \alpha_1 {r_1}^n + \alpha_2 {r_2}^n + \ldots + \alpha_k {r_k}^n, \ n = 0, 1, 2, \ldots$$
donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *son constantes.*

Ejemplo Halla la solución de la recurrencia lineal

$$a_0 = 2,\ a_1 = 5,\ a_2 = 15,\ \ a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$$

Solución:

- Hallamos las raíces de la ecuación característica:
$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = (r-1)(r-2)(r-3) = 0 \implies r_1 = 1,\ r_2 = 2,\ r_3 = 3$
- Aplicando el teorema, la solución de la recurrencia es:
$$a_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 3^n$$
- Determinamos α_1, α_2 y α_3 usando las condiciones iniciales
$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 \cdot 1^0 + \alpha_2 \cdot 2^0 + \alpha_3 \cdot 3^0 = 2 \\ \alpha_1 \cdot 1^1 + \alpha_2 \cdot 2^1 + \alpha_3 \cdot 3^1 = 5 \\ \alpha_1 \cdot 1^2 + \alpha_2 \cdot 2^2 + \alpha_3 \cdot 3^2 = 15 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 5 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 = 15 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = 2 \end{array}\right\}$$
- Por lo tanto, la única solución de esta relación de recurrencia que verifica las condiciones iniciales es: $a_n = 1^n - 2^n + 2 \cdot 3^n, \quad n \geq 0$

Teorema

Sean $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, *tales que la ecuación característica*

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \ldots - c_k = 0$$

tiene t *raíces distintas* $r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_t$ *con multiplicidades respectivas*

$$\mathbf{m_1} \geq 1, \mathbf{m_2} \geq 1, \ldots, \mathbf{m_t} \geq 1, \quad \mathbf{m_1} + \mathbf{m_2} + \ldots + \mathbf{m_t} = k.$$

Entonces la sucesión $\{a_n\}$ *es una solución de la recurrencia lineal*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

si y sólo si

$$a_n = p_1(n) \cdot r_1{}^n + p_2(n) \cdot r_2{}^n + \ldots + p_t(n) \cdot r_t{}^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $p_i(n)$ *son polinomios de grado menor que* $\mathbf{m_i}$ *para* $1 \leq i \leq t$.

Ejemplo Halla la solución de la recurrencia lineal

Solución: $a_0 = 1,\ a_1 = -2,\ a_2 = -1,\ a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$

- La ecuación característica es: $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$
- Hallamos las raíces de la ecuación característica:
  $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r+1)^3 = 0 \implies r_1 = -1,\ \mathbf{m_1} = 3$
- Aplicando el teorema, la solución de la recurrencia es:
  $$a_n = \alpha_1 \cdot (-1)^n + \alpha_2 \cdot n \cdot (-1)^n + \alpha_3 \cdot n^2 \cdot (-1)^n,\ n \geq 0$$
- Determinamos α_1, α_2 y α_3 usando las condiciones iniciales

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1 \cdot (-1)^0 + \alpha_2 \cdot 0 \cdot (-1)^0 + \alpha_3 \cdot 0^2 \cdot (-1)^0 &=& 1 \\ \alpha_1 \cdot (-1)^1 + \alpha_2 \cdot 1 \cdot (-1)^1 + \alpha_3 \cdot 1^2 \cdot (-1)^1 &=& -2 \\ \alpha_1 \cdot (-1)^2 + \alpha_2 \cdot 2 \cdot (-1)^2 + \alpha_3 \cdot 2^2 \cdot (-1)^2 &=& -1 \end{array}\right\}$$

Ejemplo Halla la solución de la recurrencia lineal

$$a_0 = 1,\ a_1 = -2,\ a_2 = -1,\ a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$$

Solución: (cont.)

- Determinamos α_1, α_2 y α_3 usando las condiciones iniciales

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & 1 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 & = & -2 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 & = & -1 \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & 1 \\ \alpha_2 & = & 3 \\ \alpha_3 & = & -2 \end{array}\right\}$$

- Por lo tanto, la única solución de esta relación de recurrencia que verifica las condiciones iniciales es:

$$a_n = (1 + 3n - 2n^2) \cdot (-1)^n$$

Ejercicios

1. Halla una fórmula explícita para las sucesiones de los siguientes apartados:
   1. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ y $u_n = -2u_{n-1} + 3u_{n-2}$ para todo $n \geq 2$.
   2. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ y $u_n - 5u_{n-1} + 6u_{n-2} = 0$ para todo $n \geq 2$.
   3. $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ y $u_n - 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = 0$ para todo $n \geq 2$.
2. Se sabe que las raíces de la ecuación característica de una recurrencia lineal y homogénea son
   -2 triple, -1 doble y 3 simple. ¿De qué orden es la recurrencia? ¿Qué forma tiene la solución general? Justifica las respuestas.
3. Halla una recurrencia lineal homogénea cuyo término general sea
   1. $u_n = 3^{n+2} + n3^{n-2}$
   2. $u_n = 2^{n+1} + n2^{n-1}$

Definición

*Una **relación de recurrencia lineal no homogénea** de **orden** k con **coeficientes constantes** es una relación de recurrencia de la forma*

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \cdots + c_k \cdot a_{n-k} + F(n)$$

donde $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, $c_k \neq 0$ *y la función* $F(n)$ *es no nula.*

La relación de recurrencia

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \cdots + c_k \cdot a_{n-k}$$

*se llama **relación de recurrencia homogénea asociada**.*

Ejemplos

1. $u_{n+2} - 4u_{n+1} + 3u_n = -4n$
2. $a_n = 3a_{n-1} + 2n$
3. $q_{n+1} = 2q_n + 4^n$

- En este curso, sólo vamos a trabajar con recurrencias no homogéneas en las cuales la función F es de la forma $F(n) = p(n)b^n$, en donde $b \in \mathbb{R}$ y $p(n)$ es un polinomio.

Teorema

Sea $b \in \mathbb{R}$ *y* $p(n)$ *un polinomio de grado* e. *La solución de la recurrencia lineal no homogénea con coeficientes constantes*

$$a_{n+k} = c_1 \cdot a_{n+k-1} + c_2 \cdot a_{n+k-2} + \cdots + c_k \cdot a_n + b^n \cdot p(n) \qquad (RLnH)$$

con valores iniciales $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ *coincide con la solución de la recurrencia lineal homogénea con coeficientes constantes cuya ecuación característica es*

$$(r^n - c_1 r^{n-1} - \ldots - c_k)(r-b)^{e+1} = 0$$

☛ Los valores iniciales $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+e}$ se determinan a partir de (RLnH) y de las condiciones iniciales $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$.

Ejemplo Resuelve la recurrencia

$$a_0 = 3,\ a_1 = -2,\ a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 2 \qquad (\text{RLnH } 1)$$

Solución:

1. Aplicando el teorema anterior, sabemos que la solución de la recurrencia lineal (RLnH 1) coincide con la solución de la recurrencia lineal homogénea cuya ecuación característica es
$$(r^2 - r - 2)(r-1)^{0+1} = 0$$
2. Hallamos las raíces de la ec. característica
$$(r^2 - r - 2)(r-1) = (r+1)(r-2)(r-1) = 0 \Longrightarrow r_1 = -1,\ r_2 = 2,\ r_3 = 1$$
3. La solución viene dada por
$$a_n = \alpha_1(-1)^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 1^n$$

3.5 Ecuaciones de Recurrencia

Resolución de recurrencias lineales no homogéneas

Solución: (cont.) $a_n = \alpha_1(-1)^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 1^n$

4. Usamos la ecuación de recurrencia y las condiciones iniciales a_0 y a_1 para determinar el término a_2.

$$a_2 = a_1 + 2a_0 + 2 = -2 + 2 \cdot 3 + 2 = 6$$

5. Hallamos las constantes α_1, α_2 y α_3 usando $a_0 = 3,$ $a_1 = -2$ y $a_2 = 6$.

$$\left\{ \begin{array}{lll} n = 0, & a_0 = & 3 = \alpha_1(-1)^0 + \alpha_2 \cdot 2^0 + \alpha_3 \cdot 1^0 \\ n = 1, & a_1 = & -2 = \alpha_1(-1)^1 + \alpha_2 \cdot 2^1 + \alpha_3 \cdot 1^1 \\ n = 2, & a_2 = & 6 = \alpha_1(-1)^2 + \alpha_2 \cdot 2^2 + \alpha_3 \cdot 1^2 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = & 3 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 & = & -2 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3 & = & 6 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & 3 \\ \alpha_2 & = & 1 \\ \alpha_3 & = & -1 \end{array} \right\}$$

6. La solución de (RLnH 1) es $a_n = 3 \cdot (-1)^n + 1 \cdot 2^n + (-1) \cdot 1^n, \quad n \geq 0$

3.5 Ecuaciones de Recurrencia

Resolución de recurrencias lineales no homogéneas

Ejemplo Resuelve la recurrencia

$$a_0 = 4, \quad a_{n+1} - 2a_n = 3^{n+1} \qquad (RLnH\ 2)$$

Solución:

1. Aplicando el teorema anterior, sabemos que la solución de la recurrencia lineal $(RLnH\ 2)$ coincide con la solución de la recurrencia lineal homogénea cuya ecuación característica es
$$(r-2)(r-3)^{0+1} = 0$$
2. Hallamos las raíces de la ec. característica
$$(r-2)(r-3) = 0 \implies r_1 = 2, \quad r_2 = 3$$
3. La solución de la recurrencia (RLnH 2) es:
$$a_n = \alpha_1 \cdot 2^n + \alpha_2 \cdot 3^n$$

3.5 Ecuaciones de Recurrencia

Resolución de recurrencias lineales no homogéneas

Solución: (cont.)

4. Usamos la ecuación de recurrencia y la condición inicial a_0 para determinar el término a_1.

$$a_{n+1} = 2a_n + 3 \cdot 3^n$$

$$a_1 = 2 \cdot a_0 + 3 \cdot 3^0 = 2 \cdot 4 + 3 = 11$$

5. Hallamos las constantes α_1 y α_2 usando $a_0 = 4$ y $a_1 = 11$.

$$\left\{ \begin{array}{lll} n = 0, & a_0 = & 4 = \alpha_1 \cdot 2^0 + \alpha_2 \cdot 3^0 \\ n = 1, & a_1 = & 11 = \alpha_1 \cdot 2^1 + \alpha_2 \cdot 3^1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 + \alpha_2 & = & 4 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 & = & 11 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & 1 \\ \alpha_2 & = & 3 \end{array} \right\}$$

6. La solución de la recurrencia (RLnH 2) es:

$$a_n = 2^n + 3 \cdot 3^n, \quad n \geq 0$$