Estructuras Algebraicas para la Computación

Mariam Cobalea

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Tema 6: Aplicaciones Lineales

Tema 6: Aplicaciones Lineales

- Aplicaciones lineales. Definiciones y propiedades.
- Núcleo e imagen.
- Espacios vectoriales isomorfos.
- Expresión matricial de una aplicación lineal.
- Influencia del cambio de base en la matriz asociada a la aplicación lineal.

Aplicaciones Lineales

Definición 1

Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathcal{K}$.
*Se dice que la aplicación $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es una **aplicación lineal** de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$ si para todo $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ y todo $c \in \mathcal{K}$ se verifica:*

1. $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$
2. $\varphi(c\vec{u}) = c\varphi(\vec{u})$

Ejemplo 1 La función

$$\begin{array}{cccc} \varphi\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

es una aplicación lineal, ya que conserva la suma y la ley externa.

Aplicaciones Lineales

Para las aplicaciones lineales se usa la misma terminología que para las funciones.

Dada la aplicación lineal $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$,

- $\mathcal{V}$ se llama **dominio**
- $\mathcal{W}$ se llama **codominio**
- Si $\vec{\boldsymbol{v}} \in \mathcal{V}$ y $\vec{\boldsymbol{w}} \in \mathcal{W}$ son tales que $\varphi(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{w}}$, se dice que $\vec{\boldsymbol{w}}$ es la **imagen** de $\vec{\boldsymbol{v}}$ mediante φ.
- El conjunto de todas las imágenes de vectores de $\mathcal{V}$ se llama **imagen** de φ.
- El conjunto de todos los $\vec{\boldsymbol{v}} \in \mathcal{V}$, tales que $\varphi(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{w}}$, se llama **preimagen** de $\vec{\boldsymbol{w}}$.

Aplicaciones Lineales

Dos aplicaciones lineales muy simples son:

- la **aplicación cero**

$$\begin{array}{rccc} \varphi_0\colon & \mathcal{V} & \to & \mathcal{W} \\ & \vec{u} & \mapsto & \vec{0} \end{array}$$

- la **aplicación identidad**

$$\begin{array}{rccc} 1_{\mathcal{V}}\colon & \mathcal{V} & \to & \mathcal{V} \\ & \vec{u} & \mapsto & \vec{u} \end{array}$$

Aplicaciones Lineales

Propiedades de las aplicaciones lineales

Teorema 1 (Propiedades de las aplicaciones lineales)

Sea $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una aplicación lineal y sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$. Se verifican las siguientes propiedades:

1. $\varphi(\vec{0}_{\mathcal{V}}) = \vec{0}_{\mathcal{W}}$
2. $\varphi(-\vec{u}) = -\varphi(\vec{u})$
3. $\varphi(\vec{u} - \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v})$
4. *Si* $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_m\vec{v}_m$, *entonces*

$$\varphi(\vec{v}) = \varphi(c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_m\vec{v}_m) = c_1\varphi(\vec{v}_1) + \cdots + c_m\varphi(\vec{v}_m).$$

Aplicaciones Lineales

Propiedades de las aplicaciones lineales

Teorema 2 (Propiedades de las aplicaciones lineales)

Sea $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una aplicación lineal. Se verifica:

1. *Si $\mathcal{V}_1$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$, entonces $\varphi(\mathcal{V}_1)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{W}$.*
2. *Si $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_k\}$ es un sistema generador de un subespacio vectorial $\mathcal{U}$ de $\mathcal{V}$, entonces $\{\varphi(\vec{u}_1), \cdots, \varphi(\vec{u}_k)\}$ es un sistema generador de $\varphi(\mathcal{U})$.*
3. *Si $\mathcal{W}_1$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{W}$, entonces la preimagen $\varphi^{-1}(\mathcal{W}_1)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$.*

Aplicaciones Lineales

Composición de aplicaciones lineales

Teorema 3 (Composición de aplicaciones lineales)

Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathcal{K}$ y sean las aplicaciones lineales $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ y $\psi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$. La composición

$$\begin{array}{rcccl} \psi\circ\varphi\colon & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{W} & \\ & \vec{u} & \mapsto & (\psi\circ\varphi)(\vec{u}) & = \psi(\varphi(\vec{u})) \end{array}$$

es también una aplicación lineal.

Demostración: Para cualesquiera $\vec{u}, \vec{u}' \in \mathcal{U}$ y $c, d \in \mathcal{K}$

$$(\psi\circ\varphi)(c\cdot\vec{u} + d\cdot\vec{u}') = \psi\Big(\varphi(c\cdot\vec{u} + d\cdot\vec{u}')\Big) = \psi\Big(c\cdot\varphi(\vec{u}) + d\cdot\varphi(\vec{u}')\Big) =$$

$$c\cdot\Big(\psi(\varphi(\vec{u}))\Big) + d\cdot\Big(\psi(\varphi(\vec{u}'))\Big) = c\cdot\Big((\psi\circ\varphi)(\vec{u})\Big) + d\cdot\Big((\psi\circ\varphi)(\vec{u}')\Big)$$

Aplicaciones Lineales
Composición de aplicaciones lineales

Ejemplo Halla la composición de las aplicaciones lineales

$$\begin{array}{cccc} \varphi_1: & \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_3 \\ 2x_3 + x_4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \varphi_2: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 3x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Aplicaciones Lineales
Composición de aplicaciones lineales

Solución: La composición de las aplicaciones lineales

$$\begin{array}{cccc} \varphi_1: & \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_3 \\ 2x_3 + x_4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \varphi_2: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 3x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

es la aplicación lineal $\varphi_3 = \varphi_2 \circ \varphi_1$ definida

$$\begin{array}{cccc} \varphi_3: & \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x_1 + 4x_2 - x_3 \\ 3x_1 + 5x_3 + 4x_4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Aplicaciones Lineales
Aplicación lineal definida por una matriz

Teorema 4 (Aplicación lineal definida por una matriz)

Sea la matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$. La aplicación T definida por

$$T(\vec{v}) = A\vec{v}$$

es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

Ejemplo Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

la aplicación $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ es lineal, ya que conserva la suma y la ley externa:

$$A(\vec{x} + \vec{x}') = A\vec{x} + A\vec{x}' \qquad A(c \cdot \vec{x}) = c \cdot \left(A(\vec{x})\right)$$

Aplicaciones Lineales
Ejemplos de aplicaciones lineales

Ejemplo Son aplicaciones lineales:

- las **simetrías** respecto a los ejes

$$\begin{array}{cccccc} \varphi_1: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 & & \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} \varphi_2: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 & & \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejemplo Son aplicaciones lineales:

- la **simetría** respecto al origen de coordenadas

$$\begin{array}{rccc} \varphi_3: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

- la **rotación** de $\theta \in [0, 2\pi)$ radianes

$$\begin{array}{rccc} \varrho: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejemplo Si $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ son dos subespacios suplementarios de un espacio vectorial $\mathcal{V}$, se llaman **proyecciones** a las aplicaciones:

$$\begin{array}{rccc} p_1: & \mathcal{V} & \to & \mathcal{U}_1 \\ & \vec{u} & \mapsto & \vec{u}_1 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} p_2: & \mathcal{V} & \to & \mathcal{U}_2 \\ & \vec{u} & \mapsto & \vec{u}_2 \end{array}$$

donde $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ es la descomposición de un vector $\vec{u} \in \mathcal{V}$ como suma de $\vec{u}_1 \in \mathcal{U}_1$ y $\vec{u}_2 \in \mathcal{U}_2$.

Estas proyecciones son aplicaciones lineales.

Ejemplo Sea $\mathcal{C}'[a,b]$ el espacio vectorial de las funciones con derivada continua en $[a,b]$. La función derivada $\mathcal{D}_x$ definida

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{D}_x: & \mathcal{C}'[a,b] & \to & \mathcal{C}[a,b] \\ & f & \mapsto & \frac{d}{dx}[f] \end{array}$$

es una aplicación lineal, ya que para cualesquiera $f, g \in \mathcal{C}'[a,b]$ y $c \in \mathbb{R}$ sabemos que se verifica:

$$\mathcal{D}_x(f+g) = \frac{d}{dx}[f+g] = \frac{d}{dx}[f] + \frac{d}{dx}[g] = \mathcal{D}_x(f) + \mathcal{D}_x(g)$$

$$\mathcal{D}_x(c \cdot f) = \frac{d}{dx}[c \cdot f] = c \cdot \left(\frac{d}{dx}[f]\right) = c \cdot \mathcal{D}_x(f)$$

La aplicación lineal $\mathcal{D}_x$ se llama **operador derivada.**

Ejemplo Sea $\mathbb{R}(x)$ el espacio vectorial de las funciones polinómicas. La aplicación integración entre 0 y 1, definida:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{I}: & \mathbb{R}(x) & \to & \mathbb{R} \\ & p & \mapsto & \int_a^b p(x)dx \end{array}$$

es lineal ya que para cualesquiera $p, q \in \mathbb{R}(x)$ y $c \in \mathbb{R}$ sabemos que se verifica:

$$\mathcal{I}(p+q) = \int_a^b [p(x)+q(x)]\,dx = \int_a^b p(x)dx + \int_a^b q(x)dx = \mathcal{I}(p) + \mathcal{I}(q)$$

$$\mathcal{I}(c \cdot p) = \int_a^b [c \cdot p(x)]\,dx = c \cdot \int_a^b p(x)dx = c \cdot \mathcal{I}(p)$$

Definición 2 (Núcleo de una aplicación lineal)

Se llama ***núcleo*** *de una aplicación lineal* $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *al conjunto de vectores de* $\mathcal{V}$ *cuya imagen es el elemento neutro de* $\mathcal{W}$*. Se denota* $Ker\varphi$

$$Ker\varphi = \{\vec{v} \in \mathcal{V} \mid \varphi(\vec{v}) = \vec{0}_{\mathcal{W}}\} = \varphi^{-1}(\{\vec{0}_{\mathcal{W}}\})$$

✔ Se observa que $Ker\varphi \neq \emptyset$, ya que $\varphi(\vec{0}_{\mathcal{V}}) = \vec{0}_{\mathcal{W}}$

Teorema 5

El núcleo de una aplicación lineal $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *es subespacio vectorial de* $\mathcal{V}$

Demostración: Ejercicio

Ejemplo Halla el núcleo de la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejemplo Halla el núcleo de la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solución: Por definición,

$$Ker\varphi = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathbb{R}^2}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Solución:

- Los vectores de $Ker\varphi$ verifican:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

- Resolviendo este sistema homogéneo obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \left.\begin{array}{rcr} x_1 & = & x_3 \\ x_2 & = & -x_3 \\ x_3 & = & x_3 \end{array}\right\}$$

- Por lo tanto, una base de $Ker\varphi$ es $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Aplicaciones Lineales
Núcleo e Imagen de una aplicación lineal

Corolario 1
Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *la aplicación lineal dada por*

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}$$

El núcleo de T *es el espacio solución de* $A\vec{x} = \vec{\mathbf{0}}$.

Ejercicio Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

halla el núcleo de la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}$$

Aplicaciones Lineales
Núcleo e Imagen de una aplicación lineal

Ejercicio Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

halla el núcleo de la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ definida

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}$$

Aplicaciones Lineales
Núcleo e Imagen de una aplicación lineal

Definición 3 (Imagen de una aplicación lineal)
Se llama ***imagen*** *de una aplicación lineal* $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *al conjunto de vectores de* $\mathcal{W}$ *que son imágenes de vectores de* $\mathcal{V}$. *Se denota* $Im\varphi$.

$$Im\varphi = \{\vec{w} \in \mathcal{W} \mid \ \exists \vec{v} \in \mathcal{V},\ \varphi(\vec{v}) = \vec{w}\} = \varphi(\mathcal{V})$$

Teorema 6
La imagen de una aplicación lineal $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *es subespacio vectorial de* $\mathcal{V}$

Demostración: *Ejercicio*

Aplicaciones Lineales
Núcleo e Imagen de una aplicación lineal

Teorema 7
Sea $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *una aplicación lineal y sea* $\mathcal{U}$ *subespacio vectorial de* $\mathcal{V}$. *Si* $\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m\}$ *es una* **base** *de* $\mathcal{U}$, *entonces* $\{\varphi(\vec{v}_1), \cdots, \varphi(\vec{v}_m)\}$ *es un* **sistema generador** *de* $\varphi(\mathcal{U})$.

Demostración: Ejercicio

Corolario 2
Sea $\mathcal{V}$ *un espacio vectorial de dimensión finita y sea* $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *una aplicación lineal. Si* $\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ *es una* **base** *de* $\mathcal{V}$, *entonces* $\{\varphi(\vec{v}_1), \cdots, \varphi(\vec{v}_n)\}$ *es un* **sistema generador** *de* $Im\varphi$.

- ☛ Si $\mathcal{V}$ tiene dimensión finita, entonces $Im\varphi$ también es un espacio vectorial de dimensión finita. Además $dim(Im\varphi) \leq dim(\mathcal{V})$.

Ejemplo Se considera la aplicación lineal del ejemplo 1

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_2+x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

✓ Ya que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$, para cada $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$,

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

✓ Así, $\varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = x_1\varphi(\vec{e}_1) + x_2\varphi(\vec{e}_2) + x_3\varphi(\vec{e}_3)$

✓ Por lo tanto, un sistema generador de $\mathrm{Im}\varphi$ es

$$\left\{\varphi(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Ejemplo Se considera la aplicación lineal

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ x_2-x_3 \\ 2x_1+x_2+3x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

✓ Ya que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$, para cada $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$,

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

✓ Así, $\varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = x_1\varphi(\vec{e}_1) + x_2\varphi(\vec{e}_2) + x_3\varphi(\vec{e}_3)$

✓ Por lo tanto, un sistema generador de $\mathrm{Im}\varphi$ es

$$\left\{\varphi(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

Corolario 3

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la aplicación lineal dada por $T(\vec{x}) = A\vec{x}$. El espacio de columnas de A coincide con la imagen de T.

Ejemplo Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

halla la imagen de la aplicación lineal aplicación lineal $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ definida $T(\vec{x}) = A\vec{x}$

Ejemplo Halla la imagen de la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ definida

$$T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}\vec{x}$$

Solución:

- $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}\right)$
- Una base de $\mathrm{Im}(T)$ es

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

Aplicaciones Lineales
Núcleo e Imagen de una aplicación lineal

Definición 4 (Rango y nulidad de una aplicación lineal)

*Sea $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una aplicación lineal. La dimensión del núcleo de φ se llama **nulidad** de φ y se denota **nul**φ. La dimensión de $Im(\varphi)$ se llama **rango** de φ y se denota **rango**(φ).*

Ejemplo Sea la aplicación lineal

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\textbf{rango}(\varphi) = dim(\mathrm{Im}\varphi) = 2 \quad \text{y} \quad \textbf{nul}\varphi = dim(Ker\varphi) = 1.$$

Aplicaciones Lineales
Núcleo e Imagen de una aplicación lineal

Ejercicio Halla el rango y la nulidad de la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ definida

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}$$

donde la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Aplicaciones Lineales
Dimensiones del Núcleo y la Imagen

Teorema 8

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita y sea $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una aplicación lineal. Entonces

$$dim(\mathcal{V}) = dim(Ker\varphi) + dim(Im\varphi) = \textbf{nul}\varphi + \textbf{rango}(\varphi)$$

Ejemplo Para la aplicación lineal del ejemplo 1

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

se verifica

$$dim(\mathbb{R}^3) = 3 = 1 + 2 = dim(Ker\varphi) + dim(\mathrm{Im}\varphi)$$

Aplicaciones Lineales
Dimensiones del Núcleo y la Imagen

Ejercicio Determina el núcleo y la imagen y comprueba el teorema de la dimensión en cada una de las aplicaciones lineales siguientes:

1. $$\begin{array}{cccc} \varphi_1 : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. $$\begin{array}{cccc} \varphi_2 : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Aplicaciones Lineales

Dimensiones del Núcleo y la Imagen

Solución (1)

$$\begin{array}{cccc} \varphi_1 : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

- El sistema generador de $Im\varphi$ es

$$\left\{ \varphi(\vec{e}_1) = \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi(\vec{e}_2) = \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi(\vec{e}_3) = \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

- Una base de $Im\varphi$ será un sistema equivalente que sea linealmente independiente.

Aplicaciones Lineales

Dimensiones del Núcleo y la Imagen

Solución (1) (cont.)

- Obtenemos una base de $Im\varphi$ realizando operaciones elementales:

$$\begin{array}{lcl} \vec{u}_1 & = & (1,0,1) \\ \vec{u}_2 & = & (2,1,1) \\ \vec{u}_3 & = & (-1,1,-2) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{lcl} \vec{v}_1 & = & (1,0,1) \\ \vec{v}_2 & = & (0,1,-1) \\ \vec{v}_3 & = & (0,1,-1) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{lcl} \vec{w}_1 & = & (1,0,1) \\ \vec{w}_2 & = & (0,1,-1) \\ \vec{w}_3 & = & (0,0,0) \end{array}$$

- Así, una base de $Im\varphi$ es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ y $dim(Im\varphi) = 2$
- Usando esta base hallamos las ecuaciones paramétricas de $Im\varphi$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in Im\varphi \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & = & \alpha \\ y_2 & = & \beta \\ y_3 & = & \alpha - \beta \end{array} \right.$$

Aplicaciones Lineales

Dimensiones del Núcleo y la Imagen

Solución (1) (cont.)

- A partir de las ecuaciones paramétricas de $Im\varphi$ hallamos las ecuaciones cartesianas, utilizando el método de Gauss-Jordan

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & y_1 \\ \beta & = & y_2 \\ \alpha - \beta & = & y_3 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 1 & -1 & y_3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & y_3 - y_1 + y_2 \end{array} \right)$$

- Por lo tanto, los vectores de $Im\varphi$ verifican: $y_1 - y_2 - y_3 = 0$

$$Im\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y_1 - y_2 - y_3 = 0 \right\}$$

Aplicaciones Lineales

Dimensiones del Núcleo y la Imagen

Solución (1) (cont.)

- Por definición de núcleo,

$$Ker\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- Según está definida la aplicación, los vectores del núcleo verifican:

$$\left. \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array} \right\}$$

- Resolviendo este sistema homogéneo obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left. \begin{array}{rcl} x_1 & = & 3x_3 \\ x_2 & = & -x_3 \\ x_3 & = & x_3 \end{array} \right\} \Longrightarrow Ker\varphi = \mathcal{L} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Así, $dim(\mathbb{R}^3) = 3 = 1 + 2 = dim(Ker\varphi) + dim(Im\varphi)$

Aplicaciones Lineales

Dimensiones del Núcleo y la Imagen

Ejercicio Determina el núcleo y la imagen y comprueba el teorema de la dimensión en cada una de las aplicaciones lineales siguientes:

3. $$\varphi_3 : \mathbb{R}_2(t) \to \mathbb{R}_2(t)$$
$$\varphi_3(1) = 1,\ \varphi_3(t-1) = t+1,\ \varphi_3(t^2 - 2t + 1) = t^2 + 2t + 1$$

4. $\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$
$$\psi \begin{pmatrix} a & b+c \\ -b+c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2b+c \\ -2b+c & 0 \end{pmatrix}$$
donde
$$\mathcal{E} = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M = \begin{pmatrix} a & b+c \\ -b+c & a \end{pmatrix}, \qquad a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

Aplicaciones Lineales

Aplicaciones lineales inyectivas y sobreyectivas

- Dada una aplicación lineal, hemos estudiado que la imagen de un sistema generador también es generador.
- Sin embargo, la imagen de un sistema linealmente independiente no es, necesariamente, linealmente independiente. (Ejemplo 1)
- En el siguiente teorema, se dan condiciones para que la independencia lineal se conserve mediante una aplicación lineal.

Teorema 9 (Caracterización de las aplicaciones lineales inyectivas)

Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathcal{K}$.

1. *La aplicación lineal $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es inyectiva si, y sólo si, $Ker\varphi = \{\vec{0}_{\mathcal{V}}\}$*
2. *$Ker\varphi = \{\vec{0}_{\mathcal{V}}\}$ si, y sólo si, todo sistema linealmente independiente de $\mathcal{V}$ tiene por imagen un sistema linealmente independiente de $\mathcal{W}$.*

Demostración: Ejercicio

Aplicaciones Lineales

Aplicaciones lineales inyectivas y sobreyectivas

Ejemplo Estudia si es inyectiva la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida
$$T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$$

Corolario 4

Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathcal{K}$, tales que $\mathcal{V}$ es de dimensión finita y sea $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una aplicación lineal.

1. *φ es inyectiva si, y sólo si, la imagen de cada base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{V}$ es una base de $Im\varphi$.*
2. *φ es inyectiva si, y sólo si, $dim(\mathcal{V}) = dim(Im\varphi)$.*

Aplicaciones Lineales

Aplicaciones lineales inyectivas y sobreyectivas

Teorema 10

Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales, tales que $\mathcal{W}$ es de dimensión finita. Una aplicación lineal $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es un sobreyectiva si, y sólo si, el rango de φ es igual a la dimensión de $\mathcal{W}$.

Ejemplo La aplicación lineal
$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$
es sobreyectiva, pues tiene rango 2.

Aplicaciones Lineales

Isomorfismos de espacios vectoriales

Definición 5

*Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathcal{K}$. Una aplicación lineal $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ que sea biyectiva se llama **isomorfismo**.*
*Un isomorfismo $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, de un espacio en sí mismo, recibe el nombre de **automorfismo**.*

Ejemplo La aplicación $\varphi\colon \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, definida $\varphi(A) = A^t$ es un isomorfismo.

Teorema 11

Una aplicación lineal $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es un isomorfismo si, y sólo si,

$$Ker\varphi = \{\vec{0}\} \qquad y \qquad Im\varphi = \mathcal{W}$$

Aplicaciones Lineales

Isomorfismos de espacios vectoriales

Teorema 12

1. *La composición de isomorfismos es también un isomorfismo.*
2. *Si $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es un isomorfismo, entonces $\varphi^{-1}\colon \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ también es un isomorfismo.*

En el caso particular de los espacios vectoriales de dimensión finita se verifican además los siguientes resultados.

Teorema 13

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial dimensión finita.

1. *Una aplicación lineal $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es un isomorfismo si, y sólo si,*
$$dim\mathcal{V} = dim\big(\varphi(\mathcal{V})\big) = dim\mathcal{W}$$
2. *Una aplicación lineal $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ es un automorfismo si, y sólo si, es inyectiva ó bien es sobreyectiva.*

Aplicaciones Lineales

Isomorfismos de espacios vectoriales de dimensión finita

Teorema 14

Dos espacios vectoriales $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$, de dimensión finita, son isomorfos si, y sólo si, tienen la misma dimensión.

Ejemplo Son espacios vectoriales isomorfos:

- $\mathbb{R}^4$
- $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$
- $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$
- $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$
- $\mathbb{R}_3(x)$

Aplicaciones Lineales

Aplicaciones Lineales
Determinación y Existencia de una aplicación lineal

¿Qué datos son necesarios para determinar una aplicación lineal?

Es evidente que no hará falta conocer las imágenes de todos los vectores, bastará conocer las imágenes de algunos vectores y, a partir de esto, sabiendo que la aplicación es lineal, podemos hallar las imágenes de los demás vectores.

A continuación vamos a localizar este número mínimo de imágenes de vectores que determinan, una aplicación lineal.

Aplicaciones Lineales
Determinación y Existencia de una aplicación lineal

Teorema 15

Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathcal{K}$.

- *Si $dim(\mathcal{V}) = n$ y $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ es una base de $\mathcal{V}$ y si $\mathcal{S} = \{\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_n\}$ es un sistema cualquiera de vectores de $\mathcal{W}$, entonces existe una única aplicación lineal*

$$\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

tal que $\varphi(\vec{v}_i) = \vec{w}_i, \quad i : 1, \cdots, n.$

- *Si además $\mathcal{S}$ es un sistema linealmente independiente, la aplicación φ es inyectiva.*

Aplicaciones Lineales
Determinación y Existencia de una aplicación lineal

Demostración:

Si existiera una aplicación lineal φ que cumpla esas condiciones, para todo $\vec{x} \in \mathcal{V}$ debería verificarse que

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i(\varphi(\vec{v}_i)) = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{w}_i$$

Así pues, la única solución posible del problema es la aplicación

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathcal{V} & \to & \mathcal{W} \\ & \vec{x} & \mapsto & \varphi(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{w}_i \end{array}$$

Terminamos la demostración justificando que esta aplicación es lineal.

Aplicaciones Lineales
Expresión matricial de una aplicación lineal

- Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo $\mathcal{K}$ y sea $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una aplicación lineal.
- Considerando las bases $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ de $\mathcal{V}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_m\}$ de $\mathcal{W}$, tenemos

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{W} \\ & \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} & \mapsto & \varphi(\vec{x}) = \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} \end{array}$$

- Estudiaremos la conexión que existe entre las coordenadas de $[\vec{x}]_{\mathcal{B}_1}$ y las coordenadas de su imagen $[\varphi(\vec{x})]_{\mathcal{B}_2}$

Aplicaciones Lineales

Expresión matricial de una aplicación lineal

- Buscamos una expresión que nos permita hallar las coordenadas respecto a la base $\mathcal{B}_2$ de la imagen de cada vector $\vec{x} \in \mathcal{V}$ a partir de sus coordenadas respecto a la base $\mathcal{B}_1$.
- Hemos estudiado que la aplicación lineal φ queda determinada dando las imágenes de los vectores $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n$ de la base $\mathcal{B}_1$; es decir, especificando $\varphi(\vec{v}_1), \cdots, \varphi(\vec{v}_n)$.
- Así, dado $\vec{x} \in \mathcal{V}$ tendremos

$$\begin{array}{rcl} \vec{y} = \varphi(\vec{x}) & = & \varphi(x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_n\vec{v}_n) = \\ & = & x_1\varphi(\vec{v}_1) + \cdots + x_n\varphi(\vec{v}_n) \end{array}$$

Aplicaciones Lineales

Expresión matricial de una aplicación lineal

$$\begin{array}{rcl} \vec{y} = \varphi(\vec{x}) & = & \varphi(x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_n\vec{v}_n) = \\ & = & x_1\varphi(\vec{v}_1) + \cdots + x_n\varphi(\vec{v}_n) \end{array}$$

- Ya que $\varphi(\vec{v}_1), \cdots, \varphi(\vec{v}_n) \in \mathcal{W}$, podremos expresarlos respecto a $\mathcal{B}_2$

$$\begin{array}{rcl} \varphi(\vec{v}_1) & = & a_{11}\vec{w}_1 + a_{21}\vec{w}_2 + \cdots + a_{m1}\vec{w}_m \\ \varphi(\vec{v}_2) & = & a_{12}\vec{w}_1 + a_{22}\vec{w}_2 + \cdots + a_{m2}\vec{w}_m \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(\vec{v}_n) & = & a_{1n}\vec{w}_1 + a_{2n}\vec{w}_2 + \cdots + a_{mn}\vec{w}_m \end{array}$$

Aplicaciones Lineales

Expresión matricial de una aplicación lineal

- Sustituyendo $\varphi(\vec{v}_1), \cdots, \varphi(\vec{v}_n)$ por su expresión respecto a la base $\mathcal{B}_2$ y efectuando las operaciones, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} \vec{y} & = & \varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_n\vec{v}_n) = x_1\varphi(\vec{v}_1) + \cdots + x_n\varphi(\vec{v}_n) \\ & = & x_1(a_{11}\vec{w}_1 + \cdots + a_{m1}\vec{w}_m) + \cdots + x_n(a_{1n}\vec{w}_1 + \cdots + a_{mn}\vec{w}_m) \\ & = & (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)\vec{w}_1 + \cdots + (a_{m1}x_1 + \cdots a_{mn}x_n)\vec{w}_m \\ & = & y_1\vec{w}_1 + \cdots + y_m\vec{w}_m \end{array}$$

- Por lo tanto,

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\ y_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_m & = & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n \end{array}\right\}$$

Aplicaciones Lineales

Expresión matricial de una aplicación lineal

- Estas ecuaciones determinan la aplicación lineal $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ en las bases $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ de $\mathcal{V}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_m\}$ de $\mathcal{W}$.
- La expresión matricial de φ respecto a las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ es

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} \qquad A[\vec{x}]_{\mathcal{B}_1} = [\vec{y}]_{\mathcal{B}_2}$$

- La matriz $A = (a_{ij})$ se llama ***matriz asociada*** a la aplicación lineal φ respecto a las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$.

Cada columna de la matriz A coincide con las coordenadas de la imagen de cada vector $\vec{v}_j$ de la base $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ de $\mathcal{V}$ expresado respecto de la base $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_m\}$ de $\mathcal{W}$.

Ejemplo Halla la matriz asociada a la aplicación lineal

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

respecto a las bases $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Solución: Para hallar la matriz asociada a $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ respecto a las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ se calculan las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base $\mathcal{B}_1$ expresados en la base $\mathcal{B}_2$.

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a_{11} & = & 2 \\ a_{21} & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a_{12} & = & 1 \\ a_{22} & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_{13}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a_{13} & = & 0 \\ a_{23} & = & 1 \end{array} \right.$$

Solución: La matriz asociada a la aplicación lineal

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

respecto a las bases $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio Halla la matriz asociada a la aplicación lineal

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & - & x_4 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 \end{pmatrix} \end{array}$$

respecto a las bases $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Aplicaciones Lineales
Cambio de base como aplicación lineal

Sean $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\vec{v'}_1, \cdots, \vec{v'}_n\}$ bases de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ sobre el cuerpo $\mathcal{K}$.

Cada vector $\vec{x} \in \mathcal{V}$ tendrá coordenadas respecto a cada base:

$$\vec{x} = x'_1\vec{v'}_1 + x'_2\vec{v'}_2 + \cdots + x'_n\vec{v'}_n = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

$$\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Aplicaciones Lineales
Cambio de base como aplicación lineal

- La expresión matricial del cambio de base

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad A[\vec{x}]_{\mathcal{B}'} = [\vec{x}]_{\mathcal{B}}$$

se corresponde con la expresión matricial de un automorfismo

$$1_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$$

$$A[\vec{x}]_{\mathcal{B}'} = [\vec{x}]_{\mathcal{B}}$$

Cada columna de la matriz asociada a esta aplicación lineal $1_{\mathcal{V}}$ respecto a las bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}$ coincide con las coordenadas de cada vector de la base $\mathcal{B}'$ expresado respecto a la nueva base $\mathcal{B}$.

Aplicaciones Lineales
Cambio de base como aplicación lineal

- En nuestro estudio anterior encontramos una expresión que nos permite hallar las coordenadas respecto a la base $\mathcal{B}$ de cada $\vec{x} \in \mathcal{V}$ a partir de las coordenadas respecto a la base $\mathcal{B}'$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad A[\vec{x}]_{\mathcal{B}'} = [\vec{x}]_{\mathcal{B}}$$

Aplicaciones Lineales
Influencia de un cambio de base en la matriz asociada a una aplicación lineal

Fijadas las bases $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{V}$ y $\mathcal{B}_2$ en $\mathcal{W}$, cada aplicación lineal $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ tiene asociada una matriz A

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_1 & & \mathcal{B}_2 \\ \mathcal{V} & \xrightarrow[A]{\varphi} & \mathcal{W} \\ \vec{x} & \mapsto & \varphi(\vec{x}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} & \mapsto & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} \end{array}$$

Si consideramos otras bases $\mathcal{B}'_1$ en $\mathcal{V}$ y $\mathcal{B}'_2$ en $\mathcal{W}$, ¿qué matriz estará asociada a φ respecto a las nuevas bases?

Teorema 16

Si la aplicación lineal $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *tiene asociada la matriz* A *respecto de unas bases* $\mathcal{B}_1$ *y* $\mathcal{B}_2$, *entonces la matriz asociada a* φ *respecto a las bases* $\mathcal{B}_1'$ *y* $\mathcal{B}_2'$ *es la matriz*

$$B = Q^{-1}AP$$

donde P *es la matriz de paso de la base* $\mathcal{B}_1'$ *a la base* $\mathcal{B}_1$ *y* Q *es la matriz de paso de la base* $\mathcal{B}_2'$ *a la base* $\mathcal{B}_2$.

Demostración: Para cada vector $\vec{x} \in \mathcal{V}$,

$$[\varphi(\vec{x})]_{\mathcal{B}'_2} = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_m' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'_2} = Q^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} = Q^{-1}A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} = Q^{-1}AP\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'_1}$$

Demostración:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{B}_1' & & \mathcal{B}_1 & & \mathcal{B}_2 & & \mathcal{B}_2' \\
\mathcal{V} & \xrightarrow[P]{1_{\mathcal{V}}} & \mathcal{V} & \xrightarrow[A]{\varphi} & \mathcal{W} & \xrightarrow[Q^{-1}]{1_{\mathcal{W}}} & \mathcal{W} \\
\vec{x} & \mapsto & \vec{x} & \mapsto & \varphi(\vec{x}) & \mapsto & \varphi(\vec{x}) \\
\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'_1} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} & \mapsto & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} & \mapsto & \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_m' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'_2}
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_m' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'_2} = Q^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} = Q^{-1}A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} = Q^{-1}AP\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'_1}$$

Ejercicio Sea la aplicación lineal

$$\begin{array}{cccc}
\varphi\colon & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\
& \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_4 - x_3 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Determina la matriz asociada a φ respecto de:

1. las bases canónicas.
2. las bases $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Aplicaciones Lineales
Influencia de un cambio de base en la matriz asociada a una aplicación lineal

Corolario 5

Si el endomorfismo $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ *tiene asociada la matriz* A *respecto de la base* $\mathcal{B}$, *entonces la matriz asociada a* φ *respecto de la base* $\mathcal{B}'$ *es la matriz*

$$B = P^{-1}AP$$

donde P *es la matriz de paso de la base* $\mathcal{B}'$ *a la base* $\mathcal{B}$.

Aplicaciones Lineales
Influencia de un cambio de base en la matriz asociada a una aplicación lineal

Ejercicio Se sabe que el endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tiene asociada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

respecto a la base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

Determina la matriz B que corresponde a dicho endomorfismo en otra base $\mathcal{B}' = \{\vec{v}'_1, \vec{v}'_2\}$ dada por

$$\begin{cases} \vec{v}'_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ \vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \end{cases}$$

Aplicaciones Lineales
Influencia de un cambio de base en la matriz asociada a una aplicación lineal

Solución: Para determinar la matriz asociada a φ respecto a la base $\mathcal{B}'$ debemos calcular las coordenadas de las imágenes de cada uno de los vectores de la base $\mathcal{B}'$ expresados respecto a la misma base.

$$\varphi(\vec{v}'_1) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

$$\varphi(\vec{v}'_2) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Luego la matriz asociada a la aplicación lineal φ respecto al base $\mathcal{B}'$ es

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Aplicaciones Lineales
Influencia de un cambio de base en la matriz asociada a una aplicación lineal

Solución: Al mismo resultado podemos llegar teniendo en cuenta que cada cambio de base puede considerarse un automorfismo identidad cuya matriz asociada es la matriz de paso $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{B}' & & \mathcal{B} & & \mathcal{B} & & \mathcal{B}' \\
\mathbb{R}^2 & \xrightarrow[P]{1_{\mathbb{R}^2}} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow[A]{\varphi} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow[P^{-1}]{1_{\mathbb{R}^2}} & \mathbb{R}^2 \\
\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} & \mapsto & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} & \mapsto & \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}
\end{array}$$

La matriz de la aplicación lineal φ respecto a la base $\mathcal{B}'$ es

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Métodos matemáticos: Algebra lineal y Geometría
P. Alberca y D. Martín (Ediciones Aljibe)

Algebra lineal J. de Burgos (Ed. McGraw Hill)

Algebra lineal J.B. Fraleigh y R.A. Beauregard (Ed. Addison Wesley)

Algebra lineal con aplicaciones y Mathlab
B. Kolman y D. Hill (Ed. Prentice Hall)

Algebra lineal con aplicaciones G. Nakos y D. Joyner (Ed. Thomson)

Algebra lineal y sus aplicaciones G. Strang (Ed. Addison Wesley)

Problemas de Álgebra
A. de la Villa (Librería I.C.A.I. Univ. Pontifícia de Comillas)