E.T.S. de INGENIERÍA INFORMÁTICA

Curso 2010/2011

Matemática Discreta

Relación de Ejercicios 4.1

1. ¿Cuántas aristas debe tener un grafo con 5 vértices cuyos grados asociados a los vértices son 1,2,3,4,5?

2. Dibuja, si existen, grafos de cuatro vértices que tengan grados respectivos:

   a) 2, 2, 2 y 4; *b*) 2, 1, 2 y 1.

3. Si $G = (V, E)$ es un grafo conexo con $|E| = 17$ y $\delta(v) \geq 3$ para todo $v \in V$, ¿cuál es el valor máximo para $|V|$?

4. Dibuja, si existen, grafos con:

   a) 5 vértices, 6 aristas y sin ciclos de longitud 3.

   b) 5 vértices con grados 0, 5, 1, 3 y 2.

   c) 4 vértices con grados 2, 2, 2 y 3.

   d) 8 vértices, 9 aristas, plano conexo y con 3 caras.

5. Da ejemplos (si existen) de:

   a) Un grafo completo con 24 aristas.

   b) Un grafo bipartito completo $K_{m,12}$ con 72 aristas.

   c) Un grafo conexo que no tenga ciclos de Hamilton ni circuitos de Euler.

6. Estudia para qué valores de n los grafos C_n, K_n y $K_{n,n}$ tienen un circuito de Euler. Estudia igualmente para qué valores de n el grafo $K_{n,n}$ tiene un ciclo de Hamilton.

7. ¿Para qué valores de m y n el grafo $K_{m,n}$ tiene un circuito de Euler? ¿Y un ciclo de Hamilton?

8. Un grafo tiene 16 aristas y sus vértices tienen grado 3 ó 4. ¿Cuántos vértices de grado 3 y cuántos de grado 4 debe tener? Indica todas las soluciones posibles. ¿Existen grafos que, cumpliendo estas condiciones, tengan caminos de Euler? Dibuja un ejemplo.

9. Determina la veracidad de los siguientes enunciados:

   a) En el grafo completo K_n existen caminos de Euler si y sólo si n es par.

   b) En todo grafo plano conexo G hay un vértice v de grado menor o igual a 5.

   c) Un grafo G es bipartito si y sólo si tiene número cromático igual a 2.

10. Sea G el grafo dado por

a	b	c	d	e	f
b	a	b	a	b	a
d	c	d	c	d	c
f	e	f	e	f	e

    Estudia si G es:

    I) bipartito, II) conexo, III) euleriano, IV) hamiltoniano.

11. Sea G el grafo dado por

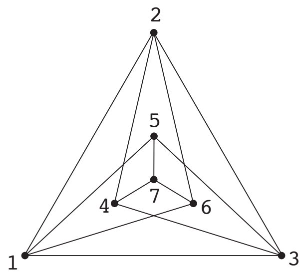
u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
u_3	u_3	u_1	u_1	u_3	u_4	u_1	u_2
u_4	u_4	u_2	u_2	u_7	u_7	u_5	u_5
u_7	u_8	u_5	u_6	u_8	u_8	u_6	u_6

Contesta razonadamente las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántas aristas tiene? *b*) ¿Es bipartito? *c*) ¿Es conexo? *d*) ¿Es euleriano?

e) ¿Cuál es su número cromático?

12. Sea G el grafo de la figura de la derecha. Contesta razonadamente las siguientes preguntas:



a) ¿Tiene G un circuito de Euler o un ciclo de Hamilton? En caso afirmativo, indícalo.

b) ¿Es bipartito? ¿Es plano?

c) Sea H el subgrafo de G obtenido al eliminar la arista $\{5, 7\}$. ¿Tiene H un camino de Euler?; en caso afirmativo, determínalo.

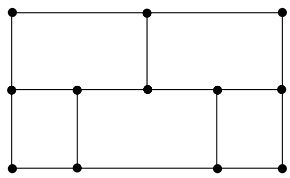
13. Sea G el grafo dado por

a	b	c	d	e	f
b	a	b	a	b	a
d	c	d	c	d	c
f	e	f	e	f	e

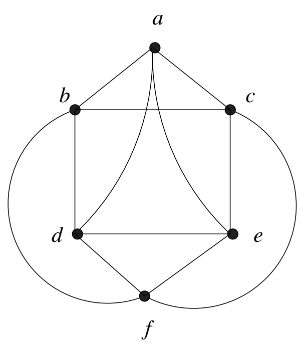
Estudia si G es:

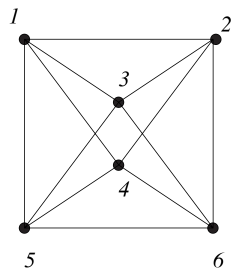
I) bipartito, II) conexo, III) euleriano, IV) hamiltoniano.

14. Justifica si es posible dibujar una línea continua que atraviese cada segmento de la siguiente figura exactamente una vez y sin pasar por ningún vértice.



15. Dados los siguientes grafos





a) Determina en cuáles hay un circuito de Euler y, en su caso, indícalos.

b) Determina si son isomorfos y, en tal caso, describe un isomorfismo de grafos entre ellos.

16. Consideremos los grafos bipartidos completos $K_{n,n}$ con $n \geq 1$. Escribe y resuelve una ecuación de recurrencia para el número de aristas de estos grafos.

17. Demuestra que los siguientes grafos dados por las matrices son isomorfos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

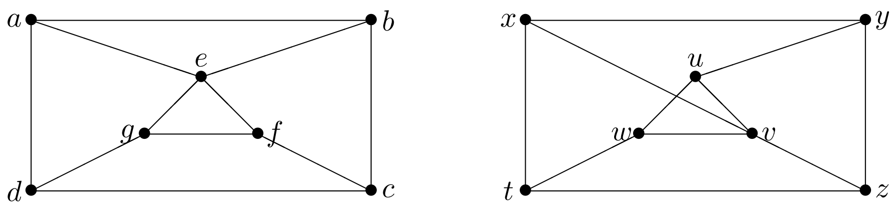
18. Sean G_1, G_2 y G_3 grafos dados por matrices de adyacencia

$$\mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determina la veracidad de los siguientes enunciados:

a) G_1 y G_2 son isomorfos, *b*) G_1 y G_3 son isomorfos, *c*) G_2 y G_3 son isomorfos.

19. Estudie si los siguientes grafos son isomorfos:

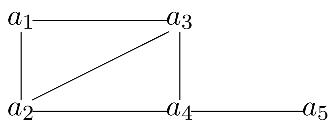


G_1 G_2

20. Dibuja, si es posible, un grafo plano con 8 aristas, 7 vértices y 4 regiones. Si no es posible, justifícalo.

21. Se desea diseñar una placa con 6 componentes electrónicos, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 y c_6, de manera que no se corten las pistas y que todos estén conectados entre sí, salvo c_1 con c_3 y c_4 con c_6. Razona si es posible.

22. Da una coloración del grafo de la derecha ordenando los vértices según su subíndice ¿Cuál es el polinomio cromático del grafo del dibujo? ¿Cuántas 5-coloraciones admite? ¿Cuál es su número cromático?



23. Se dispone de varios ordenadores conectados en red con recursos compartidos. Se desea realizar cinco tareas diferentes $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ sobre los recursos. El tiempo de ejecución de cada tarea es de una hora. En la tabla de la derecha se muestran las tareas que no se deben ejecutar simultaneamente por compartir algún recurso:

Tarea	No se debe ejecutar simultaneamente con
t_1	t_4
t_3	t_2, t_4, t_5
t_5	t_2, t_4

a) Encuentra una forma de programar las tareas.

b) Escribe una forma de programar las tareas que optimice el tiempo de ejecución.

24. En un laboratorio hay una serie de compuestos químicos, a, b, c, d, e, f, g, h que hay que almacenar en cajas para su traslado. No pueden ser almacenados en una misma caja dos compuestos que reaccionen entre sí (como ácidos y bases). Los productos que reaccionan vienen dados por la siguiente tabla:

a	b	c	d	e	f	g	h
b	a	a	b	b	c	d	e
c	d	e	e	c	h	e	f
	e	f	g	d		h	g
				g			
				h			

¿Cómo podemos elegir los elementos que hemos de introducir en cada caja? ¿Cuántas cajas serán necesarias para poder trasladar los productos?

25. El jefe de una escuela tiene que programar las fechas de los exámenes finales de 7 asignaturas: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$. Se sabe que los siguientes pares de asignaturas tienen alumnos en común:

$$\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_1, a_7\}, \{a_2, a_3\}, \{a_2, a_4\}, \{a_2, a_5\}, \{a_2, a_7\},$$
$$\{a_3, a_4\}, \{a_3, a_6\}, \{a_3, a_7\}, \{a_4, a_5\}, \{a_4, a_6\}, \{a_5, a_6\}, \{a_5, a_7\}, \{a_6, a_7\}$$

¿Cuántos días son necesarios para realizar todos los exámenes de modo que ningún estudiante tenga dos exámenes el mismo día?

26. El propietario de una tienda de mascotas recibe peces de 5 especies diferentes A, B, C, D y E.

Las especies A y B, B y C, C y D, D y E, E y A son depredadoras una de la otra, por lo que no pueden colocarse en la misma pecera. Usa la teoría de grafos para calcular el mínimo número de peceras necesario.