E.T.S. de INGENIERÍA INFORMÁTICA

Curso 2010/2011

Matemática Discreta

Relación de Ejercicios 3.2

1. Una empresa quiere repartir 100 lápices de memoria entre sus cuatro oficinas de manera que cada una reciba al menos 5, pero no más de 40. Sabiendo que se entregan en paquetes de cinco, ¿de cuántas maneras se puede hacer el reparto?

2. Determina el número de formas de repartir 3000 folios, en paquetes de 25, entre cuatro papelerías de modo que cada una reciba al menos 150 folios pero no más de 1000.

3. Calcula, utilizando funciones generadoras, el número de formas de seleccionar $3n$ pelotas de entre $2n$ azules, $2n$ rojas y $2n$ blancas.

4. Halla una fórmula explícita para las sucesiones de los siguientes apartados:

   a) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ y $u_n = -2u_{n-1} + 3u_{n-2}$ para todo $n \geq 2$.

   b) $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ y $u_n - 5u_{n-1} + 6u_{n-2} = 0$ para todo $n \geq 2$.

   c) $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ y $u_n - 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = 0$ para todo $n \geq 2$.

5. De una sucesión sabemos que $5u_n = 3u_{n-1} + 4u_{n-2}$ para cualquier $n \geq 2$. ¿Sabrías decir si dicha recurrencia es lineal, si es homogénea, cuál es su orden, cuál es su ecuación característica y cuántos términos iniciales hace falta conocer para definir una sucesión? Justifica tus respuestas.

6. Se sabe que las raíces de la ecuación característica de una recurrencia lineal y homogénea son

   -2 triple, -1 doble y 3 simple. ¿De qué orden es la recurrencia? ¿Qué forma tiene la solución general? Justifica las respuestas.

7. Halla una recurrencia lineal homogénea cuyo término general sea

   a) $u_n = 3^{n+2} + n3^{n-2}$

   b) $u_n = 2^{n+1} + n2^{n-1}$

8. Consideramos la ecuación de recurrencia $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + n$, con condiciones iniciales $u_0 = 0$, $u_1 = 1$.

   a) Resuelve la ecuación.

   b) Demuestra usando el principio inducción que la solución obtenida en el apartado anterior es correcta.

9. Halla una fórmula explícita para las sucesiones de los siguientes apartados:

   a) $u_0 = 0$, $u_n - 2u_{n-1} = 1$ para todo $n \geq 1$,

   b) $u_0 = 0$, $u_1 = 2$ y $u_n + 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = n^2$ para todo $n \geq 2$.

   c) $u_0 = 2$ y $u_n - u_{n-1} = 3n^2$ para todo $n \geq 1$.

   d) $u_0 = 1$ y $u_n - 2u_{n-1} = 2^{n-1}$ para todo $n \geq 1$.

   e) $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ y $u_n + 3u_{n-1} + 2u_{n-2} = 3^{n-2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   f) $u_0 = 2$ y $u_n - 3u_{n-1} = 5 \cdot 7^n$ para todo $n \geq 1$.

   g) $u_0 = 3$, $u_1 = -2$ y $u_n - 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = (n-2)2^{n-2}$ para todo $n \geq 0$.

   h) $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ y $u_n + 6u_{n-1} + 9u_{n-2} = (n-1)3^n$ para todo $n \geq 2$

10. Determina la solución general de una recurrencia lineal no homogénea cuya ecuación característica tiene una raíz igual a 2 que es doble, otra raíz simple igual a 3 y el término independiente es la función $(2n+4)2^n$.

11. Plantea y resuelve una ecuación de recurrencia para hallar el término general de la sucesión

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2k = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n$$

12. Usa una recurrencia lineal para encontrar una fórmula explícita para

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

13. Un rumor se difunde vía telefónica entre n personas. El rumor está totalmente difundido cuando todas las personas han hablado entre sí. Sea u_n el número de llamadas realizadas con n personas ($n \geq 2$). Encontrar una ecuación de recurrencia y resolverla.

14. Se considera la sucesión $\{q_n\}$, donde cada término q_k indica el número de cadenas de longitud k que se pueden formar con los símbolos del alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ tales que contienen dos "ceros" consecutivos.

   a) Define recursivamente la sucesión $\{q_n\}$.

   b) Da una fórmula general de dicha sucesión.

15. Se considera la sucesión $\{q_n\}$ del número de cadenas de longitud n que se pueden formar con símbolos del alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ con la propiedad de que no tienen dos ceros consecutivos. Plantea y resuelve una recurrencia lineal para q_n.

16. Un muchacho dispone de n monedas para comprar chucherías. Le gustan las palomitas, que cuestan 1 moneda cada bolsa y dos tipos de pasteles que cuestan 2 monedas cada uno. ¿De cuantas maneras se puede gastar las n monedas?