Ejercicio 12

Un metal tiene una frecuencia umbral de $4{,}5\cdot 10^{14}$ Hz para efecto fotoeléctrico.

a) Si el metal se ilumina con una radiación de $4\cdot 10^{-7}$ m de longitud de onda, ¿cuál será la energía cinética y la velocidad de los electrones emitidos?

b) Si el metal se ilumina con otra radiación distinta de forma que los electrones emitidos tengan una energía cinética el doble que en el caso anterior, ¿cuál será la frecuencia de esta radiación?

Datos:

Valor absoluto de la carga del electrón: $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,C$; Masa del electrón en reposo: $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}\,kg$; Constante de Planck: $h = 6{,}63\cdot 10^{-34}\,Js$; Velocidad de la luz en el vacío: $c = 3\cdot 10^{8}\,ms^{-1}$

Solución

a) La frecuencia de la radiación cuya longitud de onda es $\lambda = 4\cdot 10^{-7}\,m$ vale:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\cdot 10^{8}}{4\cdot 10^{-7}} = 7{,}5\cdot 10^{14}\,Hz$$

Al ser $\nu > \nu_0$ hay emisión de fotoelectrones, estando dada la energía cinética máxima de éstos por la relación de Einstein:

$$E_{c,máx} = h\nu - h\nu_0 = (6{,}63\cdot 10^{-34})(7{,}5\cdot 10^{14} - 4{,}5\cdot 10^{14}) = 1{,}99\cdot 10^{-19}\,J$$

A partir de esta energía cinética máxima calculamos la velocidad máxima de los fotoelectrones emitidos:

$$E_{c,máx} = \frac{1}{2} m_{e-} v_{máx}^2$$

$$v_{máx}^2 = \sqrt{\frac{2E_{c,máx}}{m_{e-}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}99\cdot 10^{-19}}{9{,}1\cdot 10^{-31}}} = 6{,}61\cdot 10^{5}\,ms^{-1}$$

b) Para que se duplique la energía cinética máxima de los fotoelectrones habrá de aumentar la frecuencia de la radiación incidente, cuyo valor despejamos de la relación de Einstein:

$$E'_{c,máx} = h\nu' - h\nu_0$$

$$\nu' = \frac{E'_{c,máx} + h\nu_0}{h}$$

$$\nu' = \frac{2\cdot 1{,}99\cdot 10^{-19} + (6{,}63\cdot 10^{-34})(4{,}5\cdot 10^{14})}{6{,}63\cdot 10^{-34}} = 1{,}05\cdot 10^{15}\,Hz$$

Ejercicio 13

Una radiación monocromática que tiene una longitud de onda en el vacío de 600 nm y una potencia de 0,54 W penetra en una célula fotoeléctrica de cátodo de cesio, cuyo trabajo de extracción es de 2,0 eV. Determine

a) El número de fotones por segundo que viajan con la radiación;

b) La longitud de onda umbral del efecto fotoeléctrico para el cesio;

c) La energía cinética de los electrones emitidos;

d) La velocidad con que llegan los electrones al ánodo si se aplica una diferencia de potencial de 100 V.

Datos:

Velocidad de la luz en el vacío: $c = 3\cdot 10^{8}\, ms^{-1}$; Valor absoluto de la carga del electrón: $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}\, C$; Masa del electrón: $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}\, kg$; Constante de Planck: $h = 6{,}63\cdot 10^{-34}\, Js$;

Solución

a) Recordando la definición de potencia: $P = \dfrac{E}{t}$, la relación de Planck: $E = h\nu$ y la relación entre frecuencia y longitud de onda, en el vacío: $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$, tenemos:

$E = Pt = nh\nu = nh\dfrac{c}{\lambda}$, de donde, para $t = 1s$:

$$n\,(n^{o}\, de\ fotones) = \frac{Pt\lambda}{hc} = \frac{0{,}54\cdot 1\cdot 600\cdot 10^{-9}}{6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}} = 1{,}63\cdot 10^{18}\ fotones$$

b) La longitud de onda umbral es la asociada con una energía igual al trabajo de extracción. Con las expresiones anteriores, queda:

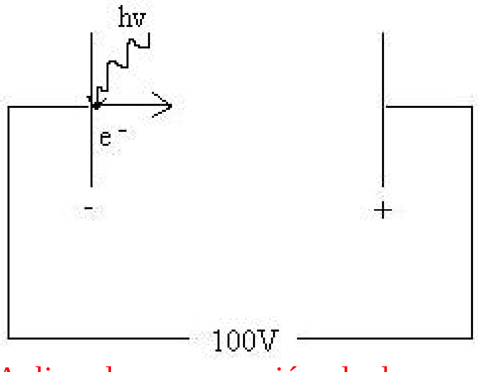
$$\Phi = h\nu_0 = h\frac{c}{\lambda_0};\quad \lambda_0 = \frac{hc}{\Phi} = \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}{2{,}0\,eV\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\, J/eV} = 6{,}22\cdot 10^{-7}\, m$$

c) La energía cinética de los fotoelectrones varía entre 0 y un valor máximo, que corresponde al mayor aprovechamiento de la energía del fotón incidente, y vale:

$$E_{c,máx} = h\nu - \Phi = h\frac{c}{\lambda} - \Phi = 6{,}63\cdot 10^{-34}\,\frac{3\cdot 10^{8}}{600\cdot 10^{-9}} - (2{,}0\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}) = 1{,}15\cdot 10^{-20}\, J$$

Por tanto: $0 \le E_{c,máx} \le 1{,}15\cdot 10^{-20}\, J$

d) Entre el ánodo y el cátodo se aplica una diferencia de potencial de 100 V:



Aplicando conservación de la energía total en el campo eléctrico, calculamos el incremento de la energía cinética del fotoelectrón, y de ahí, su velocidad final:

$$\Delta E_c = \Delta E_p = q(-\Delta V) = (-1{,}6\cdot 10^{-19})\cdot(-100) = 1{,}60\cdot 10^{-17}\, J$$

Para los fotoelectrones con $E_{c_i} = E_{c_{i_{mín}}} = 0$:

$$E_{c_f} = E_{c_i} + \Delta E_c = 0 + 1{,}60\cdot 10^{-17} = 1{,}60\cdot 10^{-17} = \frac{1}{2} m v_f^2$$

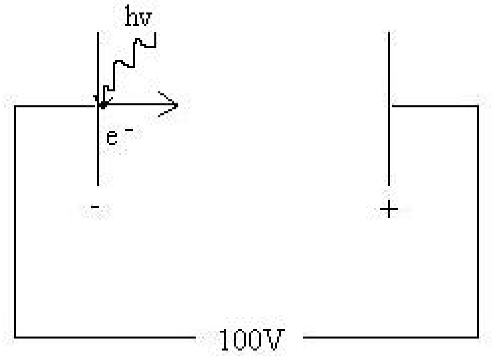
$$v_f = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}60\cdot 10^{-17}}{9{,}1\cdot 10^{-31}}} = 5{,}93\cdot 10^6\, ms^{-1}$$

Para los fotoelectrones con $E_{c_i} = E_{c_{i_{máx}}} = 1{,}15\cdot 10^{-20}\, J$:

$$E_{c_f} = E_{c_i} + \Delta E_c = 1{,}15\cdot 10^{-20} + 1{,}60\cdot 10^{-17} \approx 1{,}60\cdot 10^{-17} = \frac{1}{2} m v_f^2\,;$$

luego: $v_f \approx 5{,}93\cdot 10^6\, ms^{-1}$

Nota:
Aunque el enunciado no lo especifica, hemos supuesto que la diferencia de potencial de 100 V se aplica en directa, ya que si se aplicase en inversa, no llegarían electrones a la placa opuesta, al ser – en valor absoluto – la diferencia de potencial aplicada superior al potencial de frenado. En efecto, calculemos éste:



Por conservación de la energía total:

$$\Delta E_c = \Delta E_p\,; \quad 0 - E_{c_{máx,i}} = q(-\Delta V_{frenado})$$

$$\Delta V_{frenado} = \frac{E_{c_{máx,i}}}{q} = \frac{1{,}15\cdot 10^{-20}}{-1{,}6\cdot 10^{-19}} = -7{,}19\cdot 10^{-2}\, V$$

Dado que $|\Delta v| = |-100V| = 100V > |-7{,}19\cdot 10^{-2} V| = |\Delta v_{frenado}|$ los fotoelectrones no podrían llegar a la placa opuesta.

Ejercicio 14

El cátodo de una célula fotoeléctrica es iluminado con una radiación electromagnética de longitud de onda λ. La energía de extracción para un electrón del cátodo es 2,2 eV, siendo preciso establecer entre el cátodo y el ánodo una tensión de 0,4 V para aunlar la corriente fotoeléctrica. Calcular:

a) La velocidad máxima de los electrones emitidos.

b) Los valores de la longitud de onda de la radiación empleada λ y de la longitud de onda umbral λ_0

Datos:

Valor absoluto de la carga del electrón: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C$; Masa del electrón: $m_e = 9{,}109 \cdot 10^{-31}\,kg$; Constante de Planck: $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,Js$; Velocidad de la luz en el vacío: $c = 3 \cdot 10^{8}\,ms^{-1}$

Solución

a) y b) La frecuencia umbral: $\nu_0 = \dfrac{c}{\lambda_0}$ corresponde a un fotón cuya energía $h\nu_0$ es justamente el trabajo de extracción: Φ; por consiguiente:

$$\Phi = h\nu_0 = h\frac{c}{\lambda_0}; \quad \lambda_0 = \frac{hc}{\Phi} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,Js \cdot 3 \cdot 10^{8}\,ms^{-1}}{2{,}2\,eV \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,J/eV} = 5{,}65 \cdot 10^{-7}\,m$$

La energía cinética máxima de los fotoelectrones es anulada con la energía potencial debida al potencial de detención, por lo que:

$E_{c_{máx}} = \dfrac{1}{2} m_e v_{máx}^2 = q_e \Delta V$; despejando $v_{máx}$:

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{2q_e\Delta V}{m_e}} = \sqrt{\frac{2(-1{,}6 \cdot 10^{-19})(-0{,}4)}{9{,}109 \cdot 10^{-31}}} = 3{,}75 \cdot 10^{5}\,ms^{-1}$$

La ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico es:

$h\nu = h\dfrac{c}{\lambda} = \Phi + E_{c_{máx}} = h\dfrac{c}{\lambda_0} + q_e\Delta V$; de donde:

$$\lambda = \frac{hc}{\Phi + q_e\Delta V} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{(2{,}2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}) + (-1{,}60 \cdot 10^{-19})(-0{,}4)} = 4{,}78 \cdot 10^{-7}\,m$$

Ejercicio 15

Al iluminar un metal con luz de frecuencia: $2{,}5\cdot 10^{15}\,Hz$ se observa que emite electrones que pueden detenerse al aplicar un potencial de frenado de 7,2 V. Si la luz que se emplea con el mismo fin es de longitud de onda en el vacío: $1{,}78\cdot 10^{-7}\,m,$ dicho potencial pasa a ser de 3,8 V. Determine:

a) El valor de la constante de Planck;

b) La función de trabajo (ó trabajo de extracción) del metal.

Datos:

Valor absoluto de la carga del electrón: $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,C$; Velocidad de la luz en el vacío: $c = 3\cdot 10^{8}\,ms^{-1}$

Solución

a) y b) La frecuencia de la segunda luz es, en función de su velocidad de propagación en el vacío y su longitud de onda:

$$\nu_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{3\cdot 10^8}{1{,}78\cdot 10^{-7}} = 1{,}69\cdot 10^{15}\,Hz$$

De acuerdo a la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico cuando un metal cuya función de trabajo es Φ es iluminado con luz de frecuencia $\nu\ (\nu > \nu_0)$, la energía cinética máxima de los fotoelectrones emitidos está dada por:

$$E_{c_{máx}} = h\nu - \Phi;$$

esta energía cinética máxima puede anularse aplicando una diferencia de potencial – de frenado – : ΔV en inversa que, según la conservación de la energía en un campo eléctrico es:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0;\ (0 - E_{c_{máx}}) + q_e \Delta V = 0;\ E_{c_{máx}} = q_e \Delta V.$$

Combinando las dos últimas expresiones tenemos:

$$q_e \Delta V = h\nu - \Phi.$$

Si consideramos las dos situaciones que presenta el enunciado, podemos plantear este sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{matrix} q_e(\Delta V)_1 = h\nu_1 - \Phi \\ q_e(\Delta V)_2 = h\nu_2 - \Phi \end{matrix};$$

sustituyendo, queda:

$$\begin{matrix} (1{,}6\cdot 10^{-19})(-7{,}2) = 1{,}15\cdot 10^{-18} = h\cdot 2{,}5\cdot 10^{15} - \Phi \\ (1{,}6\cdot 10^{-19})(-3{,}8) = 6{,}08\cdot 10^{-19} = h\cdot 1{,}69\cdot 10^{15} - \Phi \end{matrix};$$

la solución a dicho sistema es:

Constante de Planck: $h = 6{,}68\cdot 10^{-34}\,Js$

Función de trabajo: $\Phi = 5{,}18\cdot 10^{-19}\,J$

Ejercicio 16

Los fotoelectrones expulsados de la superficie de un metal por una luz de 400 nm de longitud de onda en el vacío son frenados por una diferencia de potencial de 0,8V.

a) Determine la función de trabajo del metal.

b) ¿Qué diferencia de potencial se requiere para frenar los electrones expulsados de dicho metal por una luz de 300 nm de longitud de onda en el vacío?

Datos:

Valor absoluto de la carga del electrón: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C$; Constante de Planck: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,Js$; Velocidad de la luz en el vacío: $c = 3 \cdot 10^{8}\,ms^{-1}$

Solución

Al iluminar la superficie del metal con una luz de frecuencia: $\nu = \frac{c}{\lambda}$ – superior a la frecuencia umbral – se emiten fotoelectrones con una energía cinética cuyo valor máximo está dado por la teoría de Einstein:

$$E_{c_{máx}} = h\nu - \Phi = h\frac{c}{\lambda} - \Phi \,,$$

Donde Φ es la función de trabajo del metal.
Si se aplica una diferencia de potencial en inversa los electrones pueden ser frenados y detenidos, y recordando la conservación de la energía en el campo eléctrico resulta:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0; \quad E_{c_{máx}} + eV_i = 0 + eV_q; \quad E_{c_{máx}} = e\Delta V.$$

Tenemos entonces:

a) Para la luz de: $\lambda_1 = 400\,nm = 400 \cdot 10^{-9}\,m = 4 \cdot 10^{-7}\,m$:

$e\Delta V_1 = h\frac{c}{\lambda_1} - \Phi$; despejando:

$$\Phi = h\frac{c}{\lambda_1} - e\Delta V_1 = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\frac{3 \cdot 10^{8}}{4 \cdot 10^{-7}} - (-1{,}6 \cdot 10^{-19})(-0{,}8) = 3{,}69 \cdot 10^{-19}\,J$$

Nota: el potencial de detención es negativo al estar aplicando en inversa.

b) Para la luz de $\lambda_1 = 300\,nm = 300 \cdot 10^{-9}\,m = 3 \cdot 10^{-7}\,m$:

$$\Delta V_2 = \frac{h\frac{c}{\lambda_2} - \Phi}{e} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\frac{3 \cdot 10^{8}}{3 \cdot 10^{-7}} - 3{,}69 \cdot 10^{-19}}{-1{,}6 \cdot 10^{-19}} = -1{,}84\,V$$

Ejercicio 17

Si se ilumina con luz de $\lambda = 300\,nm$ la superficie de un material fotoeléctrico, el potencial de frenado vale 1,2 V. El potencial de frenado se reduce a 0,6 V por oxidación del material. Determine:

a) La variación de la energía cinética máxima de los electrones emitidos.

b) La variación de la función de trabajo del material y de la frecuencia umbral.

Datos:

Valor absoluto de la carga del electrón: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C$; Constante de Planck: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,Js$; Velocidad de la luz en el vacío: $c = 3 \cdot 10^{8}\,ms^{-1}$

Solución

a) La energía cinética máxima de los fotoelectrones es anulada con la energía potencial eléctrica debida al potencial de frenado, es decir: $E_{c_{máx}} = q_e \Delta V$.

Entonces:

$$\Delta E_{c_{máx}} = E_{c_{máx\,f}} - E_{c_{máx_i}} = q_e(\Delta V_f - \Delta V_i) = (-1{,}6 \cdot 10^{-19})[(-0{,}6) - (-1{,}2)] =$$

$$-9{,}6 \cdot 10^{-20}\,J = -0{,}6\,eV$$

La energía cinética máxima se reduce $-9{,}6 \cdot 10^{-20}\,J$

b) De la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico despejamos la función de trabajo Φ:

$$h\nu = h\frac{c}{\lambda} = \Phi + E_{c_{máx}}; \quad \Phi = h\frac{c}{\lambda} - E_{c_{máx}};$$ luego:

$$\Delta\Phi = \Delta\left(h\frac{c}{\lambda} - E_{c_{máx}}\right) = \Delta\left(h\frac{c}{\lambda}\right) - \Delta E_{c_{máx}} = -\Delta E_{c_{máx}};$$ es decir:

$\Delta\Phi = +9{,}60 \cdot 10^{-20}\,J = 0{,}6\,eV$ – un aumento de $9{,}6 \cdot 10^{-20}\,J$

Recordando que la función de trabajo y la frecuencia umbral ν_0 están relacionadas por: $\Phi = h\nu_0$ queda:

$$\Delta\Phi = \Delta(h\nu_0) = h(\Delta\nu_0); \quad \Delta\nu_0 = \frac{\Delta\Phi}{h} = \frac{9{,}6 \cdot 10^{-20}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}} = 1{,}45 \cdot 10^{14}\,s^{-1}$$