

Estructuras Algebraicas para la Computación

Relación de Ejercicios 6

1. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y) = (2x + y, x - y, 3y)$$

- a) Demuestra que es lineal.
- b) Halla una base de $\text{Ker}(f)$ y las ecuaciones cartesianas de $\text{Im}(f)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido por las ecuaciones

$$y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \quad y_2 = x_1 + x_2 - x_3 \quad y_3 = x_3$$

donde (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3) son las coordenadas de un vector y su transformado en la base canónica. Halla una base de $\text{Ker}(f)$ y las ecuaciones cartesianas de $\text{Im}(f)$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido por

$$f(x, y, z) = (y + z, x + z, y - x)$$

- a) Halla la matriz de f respecto a la base canónica.
- b) Halla una base de $\text{Ker}(f)$ y deduce si f es inyectiva.
- c) Halla las ecuaciones cartesianas de $\text{Im}(f)$ y su dimensión. Deduce si f es sobreyectiva.

4. Sea el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido

$$f(x, y, z) = (x - y + z, x + y + 2z, ax + by + cz) \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

- a) Halla la matriz asociada a f respecto a la base canónica de \mathbb{R}^3 .
- b) Determina, según los valores de a, b, c , la dimensión de $\text{Ker}(f)$ e $\text{Im}(f)$.
- c) Halla, según los valores de a, b, c , bases de $\text{Ker}(f)$

5. Sea la aplicación lineal $\tau : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida

$$\tau(1, 3, 5) = (1, 0)$$

$$\tau(0, 1, 1) = (1, 0)$$

$$\tau(0, 0, 1) = (0, 0)$$

- a) Halla la matriz asociada a τ respecto de las bases canónicas.
- b) Encuentra las ecuaciones cartesianas del subespacio $\tau(\mathcal{U})$, siendo

$$\mathcal{U} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

6. Sea la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 - x_1, x_3 - x_2, x_4 - x_3)$.

Determina la matriz asociada a f respecto de:

a) las bases canónicas.

b) las bases $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.

7. En \mathbb{R}^3 se consideran los subespacios $\mathcal{U} = \langle (1, 1, 1) \rangle$ y $\mathcal{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Encuentra una aplicación lineal $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $\text{Im}\varphi = \mathcal{W}$ y $\text{Ker}\varphi = \mathcal{U}$.

8. Sea $f: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ una aplicación lineal tal que:

$$f(1) = 1 \quad f(x) = x^2 \quad f(x^2) = x + x^3$$

a) Halla $f(a + bx + cx^2)$ para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$

b) Determina $\text{Ker}(f)$ e $\text{Im}(f)$

c) Deduce si f es inyectiva y/o sobreyectiva.

9. Sea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas reales de orden dos y sea \mathcal{E} el conjunto de las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b+c \\ -b+c & a \end{pmatrix}$$

a) Prueba que \mathcal{E} es un espacio vectorial y que $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base.

b) Halla la matriz del endomorfismo $\psi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ definido

$$\psi \begin{pmatrix} a & b+c \\ -b+c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2b+c \\ -2b+c & 0 \end{pmatrix}$$

en la base \mathcal{B} .

c) Determina el núcleo y la imagen de ψ .

10. En los espacios vectoriales $\mathbb{R}_3(x)$ y $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideran las bases

$$\mathcal{B} = \{x^3, x^2, x, 1\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}^* = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Se define el homomorfismo $\psi: \mathbb{R}_3(x) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\psi(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{pmatrix} a & b-d \\ c-b & 0 \end{pmatrix}$$

a) Halla la matriz de ψ en las bases citadas.

b) Encuentra una base del núcleo y las ecuaciones implícitas del subespacio imagen.

11. El endomorfismo $\tau: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tiene asociada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ en la base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

Determina la matriz B que corresponde a dicho endomorfismo en otra base $\mathcal{B}' = \{\vec{v}'_1, \vec{v}'_2\}$ dada por

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad \vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$