Guía docente de

Cálculo para la Computación

(Plan 2010)

E.T.S.I. Informática

Dpto. de Matemática Aplicada
Universidad de Málaga

Yo no enseño a mis alumnos, solo les proporciono las condiciones en las que puedan aprender.

Albert Einstein

Este libro está concebido como una "guía docente" para la asignatura *Cálculo para la computación* que se imparte en los tres grados que oferta la E. T. S. I. Informática de la Universidad de Málaga a partir del curso 2010/11. Su contenido es fruto del trabajo de los últimos seis años y en él han participado todos los profesores que durante este tiempo han impartido dicha asignatura.

A lo largo de estos años, se ha ido rediseñando, curso a curso, la asignatura. Varios son los factores que han intervenido en este proceso. En primer lugar, se ha adecuado el contenido de cada tema a las necesidades reales de un futuro graduado en informática, intensificando o relajando los contenidos de cada apartado en función de ello. En segundo lugar, se ha buscado adaptar la curva de aprendizaje de los alumnos a su base real de conocimientos y al tiempo que los planes de estudio estiman necesarios para preparar la asignatura. Posiblemente, este ha sido el factor más importante en el proceso de adaptación de los planes de estudio al Espacio Europeo de Educación Superior y el que más ha influido en el resultado final del programa que esta guía desarrolla.

En lugar de "libro", utilizamos la denominación de "guía docente" porque define mejor la estructura elegida. El contenido se divide en "temas", no en "capítulos", y cada tema se divide en “lecciones”, no en secciones. Cada tema se inicia con una descripción en términos docentes: se detallan los objetivos, los prerrequisitos y se da un esquema de su contenido.

Cada tema concluye con dos relaciones de ejercicios. La primera debe considerarse básica, contiene ejercicios de dificultad baja y media; estos ejercicios deben ser resueltos por el alumno a medida que estudia el tema. La segunda relación contiene ejercicios cuya dificultad se ajusta a los objetivos perseguidos y que deben ser resueltos por el alumno para completar el estudio óptimo de la unidad temática. Cada alumno debería elegir la cantidad final de ejercicios a resolver, en función de la facilidad o dificultad que encuentre al abordar el estudio de cada una de las partes de los temas.

Esta asignatura, tiene asignados 6 créditos E.C.T.S.[1]. En los documentos que desarrollan los planes de estudio de los diferentes grados, esta asignación de créditos se traducen en una dedicación de 150 horas por parte del alumno. Es decir, se entiende que un alumno “medio” necesitará aproximadamente 150 horas de trabajo total para prepararse y superar la asignatura, incluyendo las que emplee en el aula, laboratorios o exámenes). No vamos a entrar aquí en las dificultades al valorar todas las fases del trabajo del alumno, de sus necesidades específicas o la calidad de las horas de estudio, pero en cualquier caso, en la elaboración de este documento se ha intentado ajustar los contenidos de la asignatura y la metodología posterior a este tiempo de dedicación. Sin embargo, es evidente que un alumno concreto deberá incrementar o podrá reducir este tiempo de trabajo en función de su formación previa y de la “calidad” de las horas de estudio, ya sea en casa en las horas de clase.

La distribución de los contenidos del curso abandona, en algunos momentos, lo que puede considerarse una estructura clásica de un curso de cálculo; adémás, también se han eliminado secciones que, aunque aparecen habitualmente en este tipo de cursos, consideramos que son más propias de estudiantes de matemáticas puras. Por ejemplo, la lección dedicada a las ecuaciones diferenciales se plantea como continuación al cálculo de primitivas, ya que ambos temas comparten técnicas, y la resolución de ecuaciones diferenciales se sustenta en el cálculo de primitivas. Otro ejemplo destacable es que la integración se trata en el segundo tema desde el punto de vista numérico y posteriormente en el último tema para profundizar en su estudio.

En el diseño de la asignatura se ha seguido dos importantes premisas. Por un lado, se pretende que las destrezas a desarrollar por el alumno tengan dificultad ascendente, y para ello intentamos que, en la medida de lo posible, cada lección use,

[1]E.C.T.S. son la siglas de *European Credit Transfer System*, es decir, Sistema Europeo de Transferencia de Créditos.

y por lo tanto refuerce, los contenidos de las lecciones anteriores. Por otra parte, se ha evitado incluir, de forma exhaustiva, los contenidos que un alumno que accede a la universidad debería conocer por su formación preuniversitaría; sin embargo, en cada tema se dedicará parte del tiempo a recordar estos contenidos, pero siempre vinculado al desarrollo de nuevos conceptos.

Finalmente, me gustaría destacar una restricción adoptada durante la elección de los contenidos. A lo largo del curso, siempre trabajaremos con funciones expresadas en términos de funciones elementales y en consecuencia continuas y diferenciables. Desde el punto de vista matemático, se puede entender que esta restricción es demasiado fuerte, pero entendemos que las condiciones actuales de la formación previa del alumno y el limitado peso que las asignaturas de matemáticas tienen en las nuevas titulaciones, obligan a optar por una formación intensiva. De esta forma, entendemos que es preferible que el alumno conozca los diferentes modelos sobre funciones y ejemplos asequibles, dando una formación básica para futuros estudios más avanzados.

Índice general

TEMA 1

Preliminares

Objetivos. Los objetivos fundamentales del tema son (1) recordar y reforzar la manipulación de expresiones algebraicas, en especial los polinomios; (2) recordar y reforzar las técnicas de resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones; (3) saber calcular polinomios de Taylor; (4) saber operar con números complejos; y (5) saber utilizar los números complejos como herramienta en la resolución de problemas con números reales.

Prerrequisitos. Gran parte del contenido de este tema debe ser conocido por el alumno, por lo que parte del tiempo de preparación lo dedicará a recordar conocimientos: saber manejar con soltura expresiones algebraicas (resolución de ecuaciones, simplificación,...) en las que aparezcan funciones elementales de tipo polinómico, potenciales, logarítmicas y trigonométricas. Otro prerrequisito del tema será el cálculo de derivadas.

Contenido.

- Lección 1.1: Ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Dedicando especial atención a las ecuaciones y sistemas no lineales.
- Lección 1.2: Los números complejos. Conjuntos numéricos. Definición de número complejo. Funciones destacadas. Exponencial compleja. Fórmula de De Moivre
- Lección 1.3: El Binomio de Newton. Factorial, números combinatorios y Triángulo de Tartaglia-Pascal. Operador sumatorio. Binomio de Newton.
- Lección 1.4: Polinomios. Evaluación de polinomios: Método de Horner. Compleción de cuadrados. Cambio de centro de un polinomio. Polinomios de Taylor.
- Lección 1.5: Funciones racionales y fracciones simples.

Los contenidos de este primer tema giran alrededor de dos nociones básicas, los *polinomios* y los *números complejos*. Sin embargo, el tema está concebido para que gran parte del trabajo necesario para su estudio sea repasar y reforzar conceptos y técnicas que el alumno debe conocer al iniciar unos estudios universitarios.

Dentro de la lección dedicada a los polinomios, aparecen los polinomios de Taylor. Si bien hasta el tema siguiente no aprenderemos sus aplicaciones, la inclusión en este tema servirá para que el alumno repase las reglas de derivarión y las funciones elementales, a la vez que aprende algo nuevo. De la misma forma, los números complejos no representan un tema especialmente difícil de forma aislada, pero requiere que el alumno recuerde propiedades y técnicas de manipulación de potencias, logaritmos y funciones trigonométricas. Por estas razones, el tema se denomina *Preliminares*: alrededor de dos nociones relativamente simples se construye un tema pensado para repasar y para adaptarse.

Debemos pararnos brevemente en la última parte de la primera lección. Aunque la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones ocupen ese lugar en esta guía, su contenido será trasversal al tema y está pensado para que el alumno tenga un punto de referencia para aclarar las dudas que le puedan surgir sobre esos aspectos, aunque naturalmente, se estarán utilizando y resolviendo ecuaciones desde el primer día del curso.

Por último, debemos tener en cuenta que con este primer tema el alumno empieza a enfrentarse a un texto científico estructurado siguiendo unos convenios a los que debe adaptarse y cuyo aprendizaje también es importante para su formación posterior. Destacamos aquí algunos aspectos importantes

- Las definiciones, teoremas, ejemplos,... se numeran para poder localizarlos fácilmente cuando se haga referencia a ellos en otras partes del libro. De la misma forma, también se numeran algunas fórmulas y expresiones expuestas de forma destacada.
- Aunque en pocas ocasiones, usaremos *notas a pié de página* para incluir referencias externas y establecer relaciones con otras asignaturas, libros o temas de interés. Su contenido no es fundamental para el desarrollo y preparación de la asignatura.
- Los enunciados etiquetados con "Observación" se usarán para recoger aclaraciones sobre lenguaje matemático, símbolos y notaciones. El alumno debe aprender a utilizar con corrección el lenguaje matemático, lo que también repercutirá en su evaluación.

LECCIÓN 1.1

Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

La resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones es una herramienta básica en el desarrollo de múltiples ejercicios tanto de matemáticas como de otras materias científicas. Aunque el alumno conoce las técnicas básicas para el estudio de ecuaciones, es conveniente establecer algunas pautas, indicaciones y advertencias a través de varios ejemplos.

Ejemplo 1.1.1 Vamos a resolver la ecuación

$$\sqrt{x} = \sqrt{x^2 + x - 1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Antes de empezar, recordemos que, cuando trabajamos con números reales, $\sqrt{x}$ representa la raíz positiva; de esta forma, si queremos expresar la raíz negativa, escribiremos $-\sqrt{x}$.

El primer paso en la resolución es elevar al cuadrado ambos lados de la igualdad para eliminar las raíces, y aquí debemos tener en cuenta la siguiente observación para evitar un error demasiado frecuente: el cuadrado cancela la raíz (y viceversa), pero el resultado debe escribirse en valor absoluto, es decir:

$$\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = |a|, \text{ para todo } a \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, la ecuación inicial se convierte en dos ecuaciones

$$x = x^2 + x - 1, \qquad -x = x^2 + x - 1,$$

pero debemos verificar si las soluciones obtenidas lo son de la ecuación incial.

$$\begin{aligned} x = x^2 + x - 1 \quad &\Rightarrow \quad x = 1, x = -1 \\ -x = x^2 + x - 1 \quad &\Rightarrow \quad x = \sqrt{2} - 1, x = -\sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

Las soluciones negativas no son válidas, ya que no tienen raíces en $\mathbb{R}$; además, $\sqrt{2}-1$ tampoco es solución, ya que hace negativa la expresión $x^2 + x - 1$. Por lo tanto, solamente $x = 1$ es solución de la ecuación inicial. □

Ejemplo 1.1.2 Vamos a resolver la ecuación

$$x^3 - 2x^2 + x = 0.$$

Un error bastante frecuente es efectuar directamente la siguiente simplificación:

$$x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Hacemos esto porque dividimos ambos lados entre x, pero para hacer esto, debemos suponer que $x \neq 0$. Es preferible razonar de la siguiente forma. Sacando factor común x en la ecuación, obtenemos

$$x(x^2 - 2x + 1) = 0,$$

por lo que la ecuación se convierte en dos:

$$x = 0, \qquad x^2 - 2x + 1 = 0;$$

la primera es trivial y la segunda lleva a la solución $x = 1$.

La factorización de expresiones es, en general, una técnica bastante útil para la resolución de ecuaciones, como podremos comprobar en las lecciones siguients. $\square$

Ejemplo 1.1.3 De los sistemas de ecuaciones, solo los denominados *sistemas lineales* son resolubles de manera mecánica; siempre es posible decidir si tienen o no soluciones y, en tal caso, determinarlas. Entendemos que el alumno debe conocer la teoría básica asociada a estos sistemas, así que solo vamos a resolver un ejemplo para insistir en que el método más simple y eficiente para resolverlos es el denominado *método de Gauss* o *reducción*. La asignatura de *Estructuras algebraicas* dedicará un tema a este tipo de problemas.

En el desarrollo siguiente, utilizamos indicaciones para las operaciones realizadas: (e2) $\leftarrow$ (e2) $-$ (e1) indica que restamos la primera a la segunda ecuación y que el resultado pasa a ser la nueva segunda ecuación.

$$\left\{\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x + 2y + 2z &= 2 \\ -x + y + 3z &= -2 \end{aligned}\right\} \overset{\text{(e2)}\leftarrow\text{(e2)}-\text{(e1)}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ y + 3z &= 1 \\ -x + y + 3z &= -2 \end{aligned}\right\}$$

$$\overset{\text{(e3)}\leftarrow\text{(e3)}+\text{(e1)}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ y + 3z &= 1 \\ 2y + 2z &= -1 \end{aligned}\right\} \overset{\text{(e3)}\leftarrow\text{(e3)}-2*\text{(e2)}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2y + 6z &= 2 \\ -4z &= -3 \end{aligned}\right\}$$

El objetivo ha sido obtener un sistema "triangular", que se resuelve fácilmente de abajo hacia arriba.

$$\left.\left.\begin{matrix} \text{(e3)} \Rightarrow \boxed{z = \dfrac{3}{4}} \\ \text{(e2)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2y + 6\frac{3}{4} = 2 \Rightarrow \boxed{y = -\dfrac{5}{4}} \\ \text{(e1)} \right\} \Rightarrow x - \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

$\square$

Para los sistemas no lineales, no disponemos de algoritmos similares al de Gauss para calcular, si existe, la solución de cualquier sistema. En estos casos, solo podemos utilizar "heurísticas", es decir, reglas que, sin ser generales, son aplicables a muchos casos y, por lo tanto, es recomendable intentar su aplicación en primer lugar. No obstante, solo la experiencia y la intuición ayudarán a abordar con éxito este tipo de problemas.

1. *Sustitución:* Buscamos una ecuación que permita despejar fácilmente una variable, directamente o a partir de una factorización que divida el sistema en varios casos. La variable despejada se sustituye en el resto de las ecuaciones, obteniendo uno o varios sistemas con menos variables.

2. *Igualación:* Si una de las variables se puede despejar en todas las ecuaciones en las que aparece, podemos hacerlo y a partir de ahí, generar por igualación un sistema equivalente pero con menos variables.

3. *Reducción:* Este método de simplificación consiste en sumar o restar ecuaciones, posiblemente multiplicadas por constantes o por expresiones; el proceso es similar al utilizado en sistemas lineales. Aunque no consigamos eliminar una variable, intentaremos reducir de esta forma la complejidad de las ecuaciones antes de aplicar las otras técnicas.

En los ejemplos siguientes mostramos cómo aplicar las técnicas anteriores.

Ejemplo 1.1.4 Para resolver el sistema

$$\begin{aligned} x^2 - y &= 5 \\ 3x - y &= 1, \end{aligned}$$

nos fijamos en la segunda ecuación, que permite despejar fácilmente una variable en función de la otra.

$$\left.\begin{aligned} (\text{e2}) \Rightarrow\ y = 3x - 1 \\ (\text{e1})\ x^2 - y = 5 \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad x^2 - 3x + 1 = 5 \quad\Rightarrow\quad x = 4,\ x = -1$$

Debemos tener cuidado al escribir las soluciones de un sistema y asociar correctamente los distintos valores que tome cada variable. En este ejemplo, $x = 4$ conduce a $y = 11$ y $x = -1$ conduce a $y = -4$; debemos escribir las soluciones de forma que queden claras las asociaciones correctas, por ejemplo:

$$\{x_1 = 4, y_1 = 11\}, \qquad \{x_2 = -1, y_2 = -4\}. \qquad \square$$

En los sistemas de ecuaciones lineales caben tres posibilidades: que no tengan solución, que tengan solamente una solución o que tengan infinitas soluciones. Como podemos ver en el ejemplo anterior, en los sistemas no lineales tenemos más posibilidades y puede haber más de una solución aunque estas no sean infinitas.

Ejemplo 1.1.5 En el sistema

$$\begin{cases} 2x - xy = 0 \\ x - yz = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases}$$

elegimos en primer lugar la primera ecuación para factorizarla:

$$0 = 2x - xy = x(2 - y).$$

De esta forma, obtenemos dos posibilidades, o bien $x = 0$, o bien $y = 2$, lo que permite simplificar las otras ecuaciones para obtener dos sistemas más sencillos:

$$(1) \begin{cases} x = 0 \\ yz = 0 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad (2) \begin{cases} y = 2 \\ x - 2z = 0 \\ x^2 + 4 + z^2 = 1 \end{cases}$$

La segunda ecuación de (1), conduce a dos posibilidades, o bien $y = 0$, o bien $z = 0$, que generan dos sistemas triviales:

$$(1.1) \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z^2 = 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad (1.2) \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases}$$

Las soluciones obtenidas a partir de estos son

$$\{x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = -1\}, \qquad \{x_2 = 0, y_2 = 0, z_2 = 1\},$$
$$\{x_3 = 0, y_3 = -1, z_3 = 0\}, \qquad \{x_4 = 0, y_4 = 1, z_4 = 0\}.$$

El sistema (2) no tiene soluciones en $\mathbb{R}$, ya que su tercera ecuación es equivalente a $x^2 + z^2 = -3$. En la siguiente lección introduciremos los *números complejos*, con los que podremos expresar más soluciones para este sistema. □

Ejemplo 1.1.6 Vamos a resolver el sistema

$$xy^2 - y + 1 = 0$$
$$x^2y - x + 2 = 0$$

usando *reducción*. Si multiplicamos la primera ecuación por x y la segunda por y, obtenemos

$$\begin{aligned} x^2y^2 - xy + x &= 0 \\ x^2y^2 - xy + 2y &= 0. \end{aligned}$$

Ahora podemos eliminar los términos x^2y^2 y xy restando las dos ecuaciones para llegar a que $2y - x = 0$. Esta ecuación es más simple que cualquiera de las iniciales y, en particular, permite expresar x en función de y: $x = 2y$; llevando esta igualdad a la primera ecuación del sistema inicial, obtenemos

$$2y^3 - y + 1 = 0$$

Buscamos las soluciones de esta ecuación entre los divisores del término independiente y deducimos que $y = -1$ es una solución; por lo tanto,

$$0 = 2y^3 - y + 1 = (y + 1)(2y^2 - 2y + 1).$$

La ecuación $2y^2 - 2y + 1 = 0$ no tiene soluciones en $\mathbb{R}$ y por lo tanto, ya tenemos calculada la única solución del sistema: $y = -1$, $x = -2$. □

Ejemplo 1.1.7 Vamos a resolver el sistema

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 = 1 \\ &x = yz \\ &y = xz + 1 \end{aligned}$$

La variable z aparece en las ecuaciones segunda y tercera, y en ambas podemos despejarla fácilmente:

$$z = \frac{x}{y}, \qquad z = \frac{y-1}{x}. \tag{1.1}$$

Dado que hemos dividido entre x e y, posteriormente tendremos que analizar los casos en que $x = 0$ o $y = 0$. Aplicando *igualación* en (1.1) obtenemos

$$\frac{x}{y} = \frac{y-1}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 - y^2 + y = 0,$$

por lo que nuestro sistema inicial se ha convertido en

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= 0 \\ x^2 - y^2 + y &= 0 \end{aligned}$$

Ahora vemos que podemos simplificar fácilmente el término x^2 restando las dos ecuaciones, para llegar a una ecuación en y:

$$2y^2 - y - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = 1,\ y = -\frac{1}{2}.$$

Utilizando la primera ecuación, $x^2 + y^2 - 1 = 0$, y que $z = \frac{x}{y}$, completamos la resolución:

$$\{y_1 = 1, x_1 = 0, z_1 = 0\}, \qquad \{y_2 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, z_2 = -\sqrt{3}\},$$
$$\{y_3 = -\frac{1}{2}, x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, z_3 = \sqrt{3}\}.$$

Finalmente, debemos analizar qué ocurre si $x = 0$ o $y = 0$. El caso $x = 0$ conduce fácilmente a la primera solución obtenida anteriormente. Por la segunda ecuación, si $y = 0$, entonces $x = 0$, lo cual es imposible atendiendo a la primera ecuación inicial. $\square$

LECCIÓN 1.2

Los números complejos

En principio, los *números complejos* que introducimos en esta lección fueron definidos para cubrir una carencia de los números reales: hay ecuaciones polinómicas que no tienen solución en $\mathbb{R}$; por ejemplo, no hay ningún número real x, tal que $x^2 + 1 = 0$. Esta propiedad es la que los determina, pero veremos que podremos utilizarlos para resolver o analizar otros problemas geométricos y trigonométricos. En el campo de la ingeniería electrónica, los números complejos se usan en la descripción de señales periódicas y en el estudio de redes eléctricas.

Antes de introducir los números complejos, es conveniente recordar algunos conceptos. En concreto, vamos a repasar los conjuntos numéricos y las propiedades que rigen las operaciones dentro de ellos. En la asignatura de *Estructuras algebraicas* estudiaremos con detalle la estructura y propiedades de los siguientes conjuntos, aquí nos limitamos a recordar su denominación y notación.

- *Números naturales:* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- *Números enteros:* $\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \cup \{-1, -2, -3, \dots\}$.
- *Números racionales:* $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q};\ p, q \text{ enteros primos entre sí}, q \neq 0\right\}$.

Finalmente, el conjunto de los *Números Reales* se denota por $\mathbb{R}$, pero no es posible hacer una descripción sencilla de ellos tal y como hemos hecho con los otros. Tanto el conjunto de los números racionales como el de los reales con las operaciones de suma y producto, tienen estructura de *cuerpo ordenado*, es decir, en ellos se verifican las propiedades que enunciamos a continuación.

- *Asociatividad:* Todos los números reales a, b y c verifican
$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$
- *Existencia de elemento neutro y de unidad:* el número 0 es el elemento neutro para la suma y el número 1 es la unidad para el producto, es decir, para todo número real a
$$a + 0 = 0 + a = a, \qquad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$
- *Existencia de elementos opuestos e inversos:* el número $-a$ es el opuesto de a respecto de la suma, es decir, $a + (-a) = (-a) + a = 0$ para todo número real a. El número $a^{-1} = \frac{1}{a}$ es el inverso de a respecto del producto, es decir, $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$, para todo número real $a \neq 0$.

- *Conmutatividad:* Todos los números reales a y b verifican

$$a + b = b + a, \qquad a \cdot b = b \cdot a.$$

- *Distributividad:* Todos los números reales a, b y c verifican

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a.$$

  Si aplicamos estas igualdades de derecha a izquierda, decimos que *sacamos un factor común.*

- *Ley de tricotomía*: Cada par de números a y b verifica una y solo una de las siguientes relaciones:

$$a = b \qquad a < b \qquad b < a$$

  Esta propiedad también se enuncia diciendo que el orden entre números reales es *total.*

- *La suma es cerrada para el orden:* si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a + b > 0$.

- *El producto es cerrado para el orden:* si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $ab > 0$.

El alumno debe conocer estas propiedades, ya que las habrá usado para resolver ecuaciones e inecuaciones y para simplificar expresiones algebraicas en la resolución de múltiples ejercicios. Es conveniente que, a partir de ahora, se vaya acostumbrando a sus denominaciones y a entender su significado.

Como ya hemos dicho, no es posible describir fácilmente a los números reales para distinguirlos de los números racionales. Ambos conjuntos numéricos comparten las propiedades que acabamos de recordar, pero el conjunto de los números reales posee una propiedad adicional que no tiene el de los racionales y que recogemos en el resultado siguiente.

TEOREMA 1.2.1 *Toda sucesión de números reales monótona y acotada es convergente.*

Dejaremos para el tema siguiente, dedicado a las sucesiones y series de números reales, el estudio del significado y de las consecuencias de esta propiedad.

OBSERVACIÓN 1.2.2

1. La operación producto se expresa indistintamente con los símbolos '$\cdot$' o '$\times$', aunque en este curso, solo usaremos '$\cdot$'. Incluso omitiremos este símbolo si ello no conduce a error. Esta omisión es habitual porque, normalmente, utilizamos un único carácter para representar variables; de esta forma si, por ejemplo,

nos encontramos la expresión ab, necesariamente tiene que corresponder al producto de a por b. Sin embargo, en los programas y lenguajes informáticos, es habitual utilizar variables con varios caracteres, por lo que se hace imprescindible hacer explícito el operador producto.

2. A lo largo del curso vamos a usar muchas veces la palabra *algebraico*: hablamos de *expresiones algebraicas* para referirnos a expresiones en las que solo intervienen las operaciones de suma, diferencia, producto y cociente entre números y variables. En el caso de expresiones que involucren funciones, también consideraremos como algebraica la operación de *composición* de funciones. Por otra parte, hablamos de *propiedades algebraicas* de un concepto, de una función o de un operador, para referirnos a las propiedades en relación con esas mismas operaciones.

En el conjunto de los números reales, podemos formular ecuaciones polinómicas sin solución. Por ejemplo, dado que $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, no existe ningún número real tal que $x^2 = -1$, es decir, tal que $x^2 + 1 = 0$. Los números complejos se introducen para cubrir esta limitación, y la ecuación $x^2 + 1 = 0$ es la base de su definición.

Definición 1.2.3 *El* conjunto de los números complejos *es el menor cuerpo que contiene a* $\mathbb{R}$ *y al número* i *que verifica* $\mathrm{i}^2 = -1$.

Esta definición debe considerarse intuitiva e informal; la introducción formal queda fuera de los objetivos de este curso, aunque sí se hará en la asignatura de *Estructuras algebraicas.*

El número $\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$ se denomina *unidad imaginaria*. La definición anterior establece que los números complejos son expresiones algebraicas que involucran a la unidad imaginaria i y a cualquier número real. Sin embargo, las propiedades de cuerpo y la identidad $\mathrm{i}^2 = -1$ permitirán simplificar estas expresiones hasta llegar a una del tipo $a + b \cdot \mathrm{i}$, en donde, a y b son números reales; esta forma de escribir los números complejos se denomina *binómica* o *rectangular*.

Ejemplo 1.2.1 Vemos a continuación dos ejemplos de como simplificar cualquier expresión algebraica con complejos hasta reducirla a su forma binómica.

$$\begin{aligned}(2+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i}) &= 2 - 4\mathrm{i} + \mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2 \quad \text{(distributividad)}\\ &= 2 - 4\mathrm{i} + \mathrm{i} + 2 \quad \text{(definición de i)}\\ &= 4 - 3\mathrm{i}\end{aligned}$$

En las expresiones en las que aparezca un cociente, utilizaremos un simple "truco" para conseguir su simplificación:

$$\frac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} = \frac{(2+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})} = \frac{5\mathrm{i}}{5} = \mathrm{i}.$$

El número $a - b\mathrm{i}$ se denomina *conjugado* de $a + b\mathrm{i}$; en el desarrollo anterior hemos multiplicado numerador y denominador por el conjugado del denominador. Al operar el nuevo denominador, obtenemos un número real, por lo que el resultado es un número en forma binómica. □

El siguiente resultado recoge la propiedad que anunciábamos y que caracteriza al cuerpo de los números complejos.

TEOREMA 1.2.4 (TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA) *Toda ecuación polinómica con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene solución. Equivalentemente, todo polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$ puede factorizarse en factores de grado 1:*

$$P(z) = (z - z_0)^{m_0} \dots (z - z_n)^{m_n}.$$

Una de las lecciones de este tema está dedicada al estudio de los polinomios, pero entendemos que el alumno debe conocer la teoría básica y en particular la relación entre factorización de polinomios y ecuaciones polinómicas que se utiliza en este teorema.

EJEMPLO 1.2.2 El polinomio $x^2 + 1$ es irreducible en $\mathbb{R}$, pero admite la siguiente factorización en $\mathbb{C}$:

$$x^2 + 1 = x^2 - \mathrm{i}^2 = (x + \mathrm{i})(x - \mathrm{i}).$$ □

Decimos que un polinomio está *factorizado en* $\mathbb{R}$ si está escrito como producto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ y que tienen grado 1 o bien grado 2 pero son irreducibles. Decimos que está *factorizado en* $\mathbb{C}$ si está escrito como producto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{C}$, siendo todos ellos de grado 1.

EJEMPLO 1.2.3 La ecuación $x^4 + 1 = 0$ no tiene soluciones reales y por lo tanto su factorización en $\mathbb{R}$ tiene la siguiente forma

$$x^4 + 1 = (x^2 + Ax + B)(x^2 + Cx + D)$$

Expandiendo el lado derecho de la igualdad y agrupando los términos obtenemos

$$x^4 + 1 = x^4 + (A + C)x^3 + (B + AC + D)x^2 + (AD + BC)x + BD.$$

Ahora vamos a usar una propiedad que ya debe conocer el alumno, pero que recordaremos más adelante en el teorema 1.4.1: dos polinomios son iguales si y solo si los coeficientes correspondientes a los términos del mismo grado son iguales. Aplicando esto, obtenemos el sistema

$$A + C = 0, \quad B + AC + D = 0, \quad AD + BC = 0, \quad BD = 1.$$

De la primera ecuación deducimos que $C = -A$, y sustituyendo C por $-A$ en las dos ecuaciones centrales obtenemos:

$$\begin{aligned} D + B &= A^2 \\ A(D - B) &= 0 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación deducimos que, o bien $A = 0$ o bien $D - B = 0$. El caso $A = 0$ conduce a una contradicción, ya que el sistema se reduce a $B+\mathrm{D} = 0$, $B\mathrm{D} = 1$ y de aquí a $-B^2 = 1$, lo que es imposible al estar trabajado en $\mathbb{R}$. Seguimos a partir de $D - B = 0$ y nos fijamos en la siguiente parte del sistema

$$\begin{aligned} D + B &= A^2 \\ D - B &= 0; \end{aligned}$$

a partir de él, sumando y restando las ecuaciones, podemos expresar fácilmente las incógnitas D y B en función de A:

$$D = \frac{A^2}{2}, \qquad B = \frac{A^2}{2}.$$

Sustituyendo en la última ecuación del sistema inicial, $BD = 1$, obtenemos una ecuación en A con la que podemos determinar su valor:

$$\begin{aligned} \frac{A^2}{2} \cdot \frac{A^2}{2} &= 1 \\ A^4 &= 4 \\ A &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

A partir de aquí, se termina la resolución fácilmente para obtener dos posibles soluciones: $A = \sqrt{2}$, $B = 1$, $C = -\sqrt{2}$, $D = 1$; o bien $A = -\sqrt{2}$, $B = 1$, $C = \sqrt{2}$, $D = 1$. Las dos soluciones conducen a la misma factorización en $\mathbb{R}$:

$$x^4 + 1 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1). \qquad \square$$

Dado que todas las magnitudes físicas se pueden medir con números reales, se podría pensar que los números complejos solo son un objeto matemático abstracto sin interés práctico. Sin embargo, la utilidad de estos números no está en la descripción de magnitudes físicas, sino que constituyen una herramienta para resolver problemas algebraicos y geométricos. En el ejemplo anterior, hemos factorizado un polinomio en $\mathbb{R}$ usando solamente números reales; en el siguiente ejemplo, vamos a resolver el mismo ejercicio pero ayudándonos de los números complejos.

Ejemplo 1.2.4 Vamos a factorizar el polinomio $P(x) = x^4 + 1$ en $\mathbb{C}$ y en $\mathbb{R}$. Introduciendo números complejos, podemos realizar fácilmente la siguiente factorización:

$$x^4 + 1 = x^4 - \mathrm{i}^2 = (x^2 - \mathrm{i})(x^2 + \mathrm{i}).$$

Para seguir factorizando, resolvemos las ecuaciones $x^2 - \mathrm{i} = 0$ y $x^2 + \mathrm{i} = 0$. Para la primera, buscamos $x = a + b\mathrm{i}$ tal que $(a + b\mathrm{i})^2 = \mathrm{i}$, es decir,

$$\begin{aligned}(a + b\mathrm{i})^2 &= \mathrm{i}\\ a^2 - b^2 + 2ab\mathrm{i} &= \mathrm{i}\end{aligned}$$

A partir de esta igualdad, comparando las partes reales e imaginarias, construimos el siguiente sistemas de ecuaciones en $\mathbb{R}$:

$$a^2 - b^2 = 0, \qquad 2ab = 1,$$

cuyas soluciones son $\{a_1 = 1/\sqrt{2}, b_1 = 1/\sqrt{2}, \}$, $\{a_2 = -1/\sqrt{2}, b_2 = -1/\sqrt{2}, \}$; es decir, las soluciones de $x^2 - \mathrm{i} = 0$ son

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}.$$

Siguiendo el mismo método, obtenemos las soluciones de $x^2 + \mathrm{i} = 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}.$$

En consecuencia, la factorización en $\mathbb{C}$ del polinomio $x^4 + 1$ es

$$\begin{aligned}x^4 + 1 = &\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &\qquad\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

Emparejando adecuadamente los factores, es fácil obtener la factorización en $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}x^4 + 1 &= \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}1 - \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &\qquad\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &= \left(\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\right)\left(\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\right)\\ &= (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1).\end{aligned}$$

□

El esquema seguido en este ejemplo es muy habitual en matemáticas: para resolver un problema en $\mathbb{R}$, lo estudiamos antes en $\mathbb{C}$ para aprovecharnos de las propiedades adicionales; posteriormente volvemos a $\mathbb{R}$ para dar las soluciones deseadas. A lo largo del tema veremos más ejemplos de esta metodología.

También nos hemos encontrado en estos dos ejemplos con algo que será muy recurrente en matemáticas: los problemas admiten distintos caminos para llegar a su solución. Debemos aprender las distintas herramientas y métodos alternativos y saber elegir en cada momento el más adecuado y simple.

Ejemplo 1.2.5 En general, la resolución de ecuaciones algebraicas y sistemas de ecuaciones puede hacerse utilizando los mismos métodos que empleamos para ecuaciones y sistemas en el cuerpo de los reales. Esto se debe a que las transformaciones y simplificaciones necesarias son consecuencia de las propiedades de cuerpo. Vemos a continuación un ejemplo de sistemas de ecuaciones lineales que resolvemos utilizando el método de *reducción*.

$$\begin{aligned} \mathrm{i}x - y &= 2 \\ 2x + y &= \mathrm{i} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{i}x - y &= 2 \\ 2x + y &= \mathrm{i} \end{aligned}\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow} \left.\begin{aligned} 2\mathrm{i}x - 2y &= 4 \\ 2\mathrm{i}x + \mathrm{i}y &= -1 \end{aligned}\right\} \overset{(2)}{\Rightarrow} \quad (2+\mathrm{i})y = -5$$

En (1), hemos multiplicado la primera ecuación por 2 y la segunda por i; en (2), hemos restado la primera ecuación a la segunda. Terminamos de despejar y:

$$y = \frac{-5}{2+\mathrm{i}} = \frac{-10+5\mathrm{i}}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})} = \frac{-10+5\mathrm{i}}{4+1} = -2+\mathrm{i}.$$

Y utilizando la segunda ecuación inicial, determinamos x:

$$x = \frac{\mathrm{i}-y}{2} = \frac{\mathrm{i}+2-\mathrm{i}}{2} = 1 \qquad \square$$

Funciones destacadas. Si $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, con $x, y \in \mathbb{R}$, el número x se denomina *parte real* de z, $\mathrm{Re}(z) = x$, mientras que y se denomina *parte imaginaria*, $\mathrm{Im}(z) = y$. La figura 1.1 muestra la representación habitual de los números complejos como puntos en el plano, de forma que la abscisa se corresponde con la parte real y la ordenada se corresponde con la parte imaginaria. La longitud del segmento que une el origen de coordenadas y el número complejo se denomina *módulo*, $|z|$, y el ángulo que forma este segmento con la parte positiva del eje OX, se denomina *argumento*, $\mathrm{Arg}(z)$. La siguiente definición introduce formalmente todas estas funciones; en ella hacemos uso de la siguiente notación: $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En general, el superíndice $*$ sobre cualquier conjunto numérico, indice que excluimos al número 0.

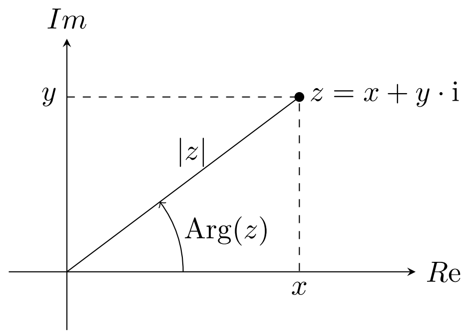


Figura 1.1: Representación gráfica de los números complejos

DEFINICIÓN 1.2.5
En las definiciones siguientes, $x, y \in \mathbb{R}$*,* $z \in \mathbb{C}$*:*

- *Conjugado de un número complejo:*

$$\bar{\cdot}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \overline{x + \mathrm{i}y} = x - \mathrm{i}y$$

- *Parte real de un número complejo:*

$$\mathrm{Re}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Re}(x + \mathrm{i}y) = x, \quad \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

- *Parte imaginaria de un número complejo:*

$$\mathrm{Im}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Im}(x + \mathrm{i}y) = y, \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \bar{z})$$

- *Módulo de un número complejo:*

$$|\cdot|\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+, \qquad |x + \mathrm{i}y| = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

- *Argumento de un número complejo:* $\quad \mathrm{Arg}\colon \mathbb{C}^* \to [0, 2\pi)$.
  Si $x = 0$*, entonces*

$$\mathrm{Arg}(\mathrm{i}y) = \frac{\pi}{2},\ \textit{si } y > 0, \quad \mathrm{Arg}(\mathrm{i}y) = \frac{3\pi}{2},\ \textit{si } y < 0$$

  y si $x \neq 0$*, entonces* $\mathrm{Arg}(x + \mathrm{i}y) = \theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ *de forma que:*

$$\theta \in [0, \pi] \ \textit{si } y \geq 0$$
$$\theta \in [\pi, 2\pi) \ \textit{si } y < 0$$

Obsérvese que, por su definición, el módulo de un número complejo es siempre positivo y su argumento es un ángulo entre 0 y 2π.

Ejemplo 1.2.6

1. $\mathrm{Re}(3 - 2\mathrm{i}) = 3$

2. $\mathrm{Im}(-1 + \mathrm{i}) = 1$

3. $|1 - \mathrm{i}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

4. $\mathrm{Arg}(-1 + \mathrm{i}) = \dfrac{3\pi}{4}$: los dos ángulos entre 0 y 2π cuyas tangentes son -1 son $\dfrac{3\pi}{4}$ y $\dfrac{7\pi}{4}$, pero dado que la parte imaginaria es positiva, el argumento es el primero de ellos. □

Proposición 1.2.6 *El operador conjugado verifica las siguientes propiedades: si $z, w \in \mathbb{C}$*

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}.$$

La demostración de esta proposición es una simple comprobación que debería ser fácilmente desarrollada por el estudiante. La principal consecuencia de esta propiedad es la siguiente.

Proposición 1.2.7 *Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$ es una raíz de P, entonces $\overline{z}$ también es raíz de P.*

En el ejemplo 1.2.4 hemos calculado las raíces del polinomio $P(x) = x^4 + 1$ y hemos podido comprobar que efectivamente verifica la propiedad de la proposición anterior. La demostración de la propiedad anterior es bastante simple. Supongamos que

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

y que $z \in \mathbb{C}$ es raíz de P; en el desarrollo siguiente, solo utilizamos la proposición anterior y que el conjugado de un número real es él mismo:

$$\begin{aligned}
a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 &= 0 \\
\overline{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0} &= 0 \\
\overline{a_n} \cdot \overline{z}^n + \cdots + \overline{a_1} \cdot \overline{z} + \overline{a_0} &= 0 \\
a_n \overline{z}^n + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 &= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, efectivamente $\overline{z}$ también es raíz del polinomio.

Ejemplo 1.2.7 Vamos a resolver la ecuación

$$z\overline{z} + 3(z - \overline{z}) = 13 + 12\mathrm{i}$$

En esta ecuación aparece la función conjugado y, por lo tanto, no son suficientes las propiedades algebraicas, así que necesitamos un tratamiento específico. Podemos utilizar dos métodos:

1. Si sustituimos z por $x+\mathrm{i}y$, convertimos la ecuación en un sistema de ecuaciones reales cuyas soluciones son la parte real y la parte imaginaria de las soluciones de la ecuación inicial. Este es el método que hemos seguido en la ecuación $x^2 - \mathrm{i} = 0$ del ejemplo 1.2.4.

2. Aplicando el operador conjugado a la ecuación inicial, obtenemos una segunda ecuación; podemos considerar las dos ecuaciones como un sistema de ecuaciones en $\mathbb{C}$ cuyas soluciones son la solución de la ecuación inicial y su conjugado; la resolución de este sistema se hará mediante transformaciones algebraicas.

Vamos a aplicar el segundo método a la ecuación propuesta para aclarar su funcionamiento. Si aplicamos el operador conjugado a los dos lados de la igualdad y aplicamos las propiedades de la proposición 1.2.6 obtenemos:

$$\bar{z}z + 3(\bar{z} - z) = 13 - 12\mathrm{i}$$

Si sustituimos $\bar{z}$ por w en ambas ecuaciones, obtenemos el siguiente sistema en z y w:

$$\begin{aligned} zw + 3(z - w) &= 13 + 12\mathrm{i} \\ wz + 3(w - z) &= 13 - 12\mathrm{i} \end{aligned}$$

Para resolverlo, basta con sumar y restar las dos ecuaciones, lo que nos lleva a un sistema equivalente pero más sencillo:

$$\begin{aligned} 6z - 6w = 24\mathrm{i} &\quad \text{(diferencia)} \\ 2zw = 26 &\quad \text{(suma)} \end{aligned}$$

De la primera ecuación, deducimos que $w = z - 4\mathrm{i}$, por lo que la segunda ecuación se convierte en

$$z^2 - 4\mathrm{i}z - 13 = 0,$$

cuyas soluciones son $z = \dfrac{4\mathrm{i} \pm \sqrt{-16 + 52}}{2} = \pm 3 + 2\mathrm{i}$. □

1.2.1. Exponencial compleja y fórmula de De Moivre

Una representación alternativa para los números complejos se obtiene al usar la función exponencial. Para introducirla, necesitamos en primer lugar, extender la definición de esta función a todos los números complejos.

Definición 1.2.8 *Definimos la función exponencial en el cuerpo de los números complejos como:* $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i} \operatorname{sen} y)$.

Es evidente que esta definición es coherente con la exponencial sobre números reales, ya que si $y = 0$:

$$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i} \operatorname{sen} y) = \mathrm{e}^x(\cos 0 + \mathrm{i} \operatorname{sen} 0) = \mathrm{e}^x$$

La otra razón por la que esta función se denomina exponencial es que comparte las propiedades algebraicas de su versión real.

Proposición 1.2.9

1. $\mathrm{e}^z\ \mathrm{e}^w = \mathrm{e}^{z+w}$, *para todo* $z, w \in \mathbb{C}$.

2. $(\mathrm{e}^z)^n = \mathrm{e}^{nz}$, *para todo* $z \in \mathbb{C}$ *y todo* $n \in \mathbb{N}$

Demostración: Solo es necesario probar la primera propiedad, ya que la segunda es consecuencia de ella. La demostración hace uso, solamente, de las fórmulas del seno y coseno de la suma de ángulos. Consideramos $z = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $w = x_2 + \mathrm{i}y_2$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^z\ \mathrm{e}^w &= \mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{x_2}(\cos y_1 + \mathrm{i} \operatorname{sen} y_1)(\cos y_2 + \mathrm{i} \operatorname{sen} y_2) \\
&= \mathrm{e}^{x_1+x_2}(\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2 \\
&\qquad + \mathrm{i}(\operatorname{sen} y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \operatorname{sen} y_2)) \\
&= \mathrm{e}^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) + \mathrm{i} \operatorname{sen}(y_1 + y_2)) \\
&= \mathrm{e}^{x_1+x_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(y_1+y_2)} = \mathrm{e}^{z+w}
\end{aligned}$$

♠

Si $|z| = r$ y $\operatorname{Arg}(z) = \theta$, entonces

$$z = r\cos\theta + \mathrm{i}\, r \operatorname{sen}\theta = r(\cos\theta + \mathrm{i} \operatorname{sen}\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

La expresión $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ se denomina *forma exponencial* del número z, que se determina a partir de su módulo y su argumento. Una representación alternativa a partir de estas dos componentes es la *forma polar* y que se suele escribir como r_θ; las dos representaciones son equivalentes en cuanto a sus consecuencias prácticas, pero preferimos utilizar la forma exponencial, ya que la manipulación de la misma se basa en las propiedades ya conocidas de la función exponencial.

Ejemplo 1.2.8

1. $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, ya que $|-1| = 1$ y $\operatorname{Arg}(-1) = \pi$.

2. $-i = \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/2}$, ya que $|-i| = 1$ y $\operatorname{Arg}(-i) = 3\pi/2$.

3. $1 - i = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}7\pi/4}$. □

La igualdad $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta$, se conoce como *igualdad de Euler* y aplicada a $\theta = \pi$ conduce a una identidad que relaciona las constantes matemáticas más importantes:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$$

Como consecuencia del segundo apartado de la proposición 1.2.9, obtenemos que $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ y a partir de aquí, deducimos la fórmula de De Moivre.

Corolario 1.2.10 (Fórmula de De Moivre) *Para todo número natural n y todo real θ:*

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen} n\theta.$$

Una importante aplicación de esta fórmula es obtener expresiones para simplificar funciones trigonométricas, según mostramos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.2.9 Si expandimos la igualdad de De Moivre para $n = 2$ obtenemos:

$$\cos 2\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen} 2\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)^2 = \cos^2\theta + 2\mathrm{i}\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \operatorname{sen}^2\theta$$

Fijándonos en la parte real y en la parte imaginaria, deducimos:

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta &= 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\end{aligned}$$

Es decir, hemos obtenido expresiones para escribir el seno y el coseno del múltiplo de un ángulo en terminos del seno y el coseno del mismo ángulo. En combinación con el binomio de Newton que estudiamos en la lección siguiente, podemos obtener fórmulas similares para cualquier múltiplo. Este tipo de igualdades son útiles para simplificar expresiones en las que intervengan distintos múltiplos de un mismo ángulo. □

Ejemplo 1.2.10 En otras ocasiones, nos interesará un proceso opuesto al del ejemplo anterior, es decir, reducir potencias de funciones trigonométricas a expresiones en términos del seno y coseno de múltiplos del ángulo. Para deducir estas expresiones partimos de las igualdades

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \\ \operatorname{sen} x &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} \qquad (1.2)\end{aligned}$$

que se deducen fácilmente sumando y restando respectivamente, las siguientes:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \operatorname{sen} x \\ e^{-ix} &= \cos x - i \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Vemos a continuación un ejemplo de como usar las igualdades 1.2 para el objetivo buscado.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{4}(e^{2i\theta} - e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}) \\ &= -\frac{1}{4}(e^{2i\theta} - 1 + e^{-2i\theta}) \\ &= -\frac{1}{4}((e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) - 1) \\ &= -\frac{1}{4}(2\cos(2\theta) - 1) = \frac{1 - 2\cos 2\theta}{4} \end{aligned}$$

En combinación con el binomio de Newton que estudiamos en la lección siguiente, podemos obtener fórmulas similares para cualquier potencia. □

Ejemplo 1.2.11 Otra de las aplicaciones de la fórmula de De Moivre es el cálculo de las raíces de los números complejos, que nos aparecen en la resolución de ecuaciones polinómicas. Por ejemplo, supongamos que queremos calcular los números complejos w, tales que $w^4 = -1$; es decir, las *raíces cuartas* de -1 y raíces del polinomio $P(z) = z^4 + 1$. Para calcularlas, partimos de la forma exponencial de -1,

$$-1 = e^{\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Sin embargo, el ángulo π no es el único que permite obtener una igualdad similar a la anterior; en general tenemos que:

$$-1 = e^{i(\pi + 2k\pi)}$$

Las raíces $w = re^{\theta i}$ que buscamos verifican entonces que:

$$w^4 = r^4 e^{4i\theta} = -1 = e^{i(\pi+2k\pi)}.$$

De donde deducimos que $r = 1$ y $4i\theta = i(\pi + 2k\pi)$. De la segunda igualdad, deducimos que solo cuatro valores de θ son argumentos de números complejos, los correspondientes a $k = 0, 1, 2, 3$:

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4}, \quad \theta_1 = \frac{3\pi}{4}, \quad \theta_2 = \frac{5\pi}{4}, \quad \theta_3 = \frac{7\pi}{4}$$

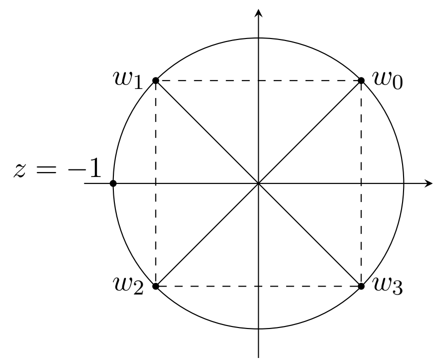


Figura 1.2: Raíces cuartas de $z = -1$

En consecuencia, -1 tiene cuatro raíces cuartas:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}} \\
w_1 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} = \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}} \\
w_2 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = \mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}} \\
w_3 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_3} = \mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

En la figura 1.2, se puede ver la representación de estas raíces en el plano complejo. Por otra parte, en el ejemplo 1.2.4, resolvimos el mismo problema a partir de la ecuación polinómica; como ya hemos mencionado antes, debemos acostumbrarnos a que un mismo problema puede resolverse de varias formas y debemos aprender a elegir la forma más adecuada según los datos concretos. □

Teorema 1.2.11 *Para cada número complejo $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ existen n numeros complejos distintos $w_0, \dots, w_{n-1}$ que verifican $w_k^n = z$. Estos números complejos son:*

$$w_k = \sqrt[n]{r}\exp\Big(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\mathrm{i}\Big), \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Hemos utilizado en este enunciado una notación alternativa para la función exponencial

$$\exp(x) = \mathrm{e}^x,$$

que es de gran ayuda cuando escribimos expresiones grandes en el exponente.

Observación 1.2.12 Antes de continuar, es conveniente hacer algunas observaciones sobre determinados aspectos de la notación utilizada hasta ahora.

1. En las expresiones matemáticas, se utilizan letras para representar variables y constantes, ya sea para denotar números o funciones. Para distinguir entre constantes y variables, es habitual utilizar letras cursivas para variables e incógnitas (x, y,...) y letras en redonda para representar constantes (e, i). El mismo criterio se sigue para las funciones: $f(x)$ representa una función arbitraria, mientras que $\cos(x)$ es la función coseno y $\exp(x)$ es la función exponencial. Este tipo de convenios tiene su contrapartida en los lenguajes de programación, que pueden utilizar determinas restricciones para expresar objetos constantes y objetos variables.

2. Tal y como sabemos, la notación $f(x)$ indica que f es el nombre dado a la función y (x) indica la letra usada en la expresión como variable *independiente*. De esta forma, siempre que queramos sustituir esta variable por un número o expresión, lo escribiremos delimitado por los paréntesis. Por lo tanto, deberemos escribir, por ejemplo, $\cos(\theta)$, $\exp(2x)$, $\log(x+1)$,... Sin embargo, es habitual en el lenguaje matemático prescindir de los paréntesis siempre y cuando esto no provoque confusión o ambigüedad. De esta forma, podremos escribir $\cos\theta$ o $\exp 2x$ y entenderemos que $\log x + 1$ es igual a $1 + \log(x)$. Tendremos que prestar mucha atención a este tipo de simplificaciones y añadir los paréntesis cuando no estemos seguros de que su ausencia provoque ambigüedades. En los lenguajes de programación, estas simplificaciones se usan raras veces.

LECCIÓN 1.3

El Binomio de Newton

En esta lección, introducimos la fórmula del binomio de Newton para calcular cualquier potencia de una suma de expresiones y que generaliza la siguiente:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Para expandir una potencia como $(a+b)^7$, bastaría con multiplicar siete veces la expresión $(a+b)$, eliminando los paréntesis adecuadamente con la propiedad distributiva; el binomio de Newton es simplemente una fórmula que nos "ahorra" este trabajo. Para poder entender la fórmula, necesitamos introducir algunos operadores que usaremos a lo largo de este curso.

DEFINICIÓN 1.3.1 (FACTORIAL) *Definimos el* factorial *de un número natural n, denotado por $n!$, como sigue:*

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ n! &= (n-1)! \cdot n \qquad \textit{para todo } n \geq 1 \end{aligned}$$

Esta forma de definir una función se denomina *recursiva*: la definición llama al mismo operador que se define, pero aplicado a un número menor, hasta llegar a un *caso base*, en este caso $0!$. Otra forma de escribir la definición del operador es

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \quad \text{para todo } n > 0$$

EJEMPLO 1.3.1

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2, \quad , \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10 = 3\,628\,800$$

□

DEFINICIÓN 1.3.2 (NÚMEROS COMBINATORIOS) *Sean n y k dos números naturales tales que $0 \leq k \leq n$. Se define el* número combinatorio $\binom{n}{k}$, *que se lee "n sobre k", como*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{1.3}$$

EJEMPLO 1.3.2

1. $\displaystyle \binom{10}{7} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120$

2. $\binom{0}{0} = \dfrac{0!}{0! \cdot 0!} = 1$

3. $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0! \cdot n!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$

4. $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{n! \cdot 0!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$

5. $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k}$ □

La forma habitual de calcular los números combinatorios es la que se ha utilizado en el apartado 1 del ejemplo anterior, es decir, se expande parcialmente el factorial del numerador y se simplifica con el numerador. Esto lo podemos hacer de forma general para obtener una expresión alternativa para los números combinatorios.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1) \cdot \cancel{(n-k)!}}{k! \cdot \cancel{(n-k)!}} = \\ = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \tag{1.4}$$

Esta fórmula es aplicable incluso si n es un número real, sea o no mayor que k, lo que permite generalizar la definición de los números combinatorios.

Definición 1.3.3 (Números combinatorios) *Sea x un número real y k un número natural. Se define el* número combinatorio $\binom{x}{k}$, *que se lee "x sobre k", como*

$$\binom{x}{0} = 1, \quad \binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!} \text{ si } k > 0$$

Para recordar esta fórmula, es útil tener en cuenta que el número de factores en el numerador debe ser exactamente k.

Ejemplo 1.3.3

$$\binom{1/3}{4} = \frac{(1/3)\cdot(-2/3)\cdot(-5/3)\cdot(-8/3)}{4!} = -\frac{2\cdot 5\cdot \cancel{8}}{3^4\cdot\cancel{4}\cdot 3\cdot\cancel{2}} = -\frac{10}{243}$$ □

Igual que para el factorial, es posible definir el operador "sobre k" de forma recursiva sobre el natural k. Aunque tal definición no es necesaria para evaluarlo normalmente, es conveniente conocer este tipo de definiciones para poder implementarlas con lenguajes de programación. Una posible definición es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\binom{x}{0} &= 1 \\
\binom{x}{k} &= \frac{x-k+1}{k}\binom{x}{k-1}, \text{ si } k > 0
\end{aligned}$$

La siguiente propiedad es la más importante de los números combinatorios, siendo el fundamento del *Triángulo de Tartaglia-Pascal*, que veremos a continuación, y del *Binomio de Newton*.

Proposición 1.3.4 *Para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $k \in \mathbb{N}$:*

$$\binom{x}{k} + \binom{x}{k+1} = \binom{x+1}{k+1}$$

Ejemplo 1.3.4 En este ejemplo, mostramos cómo se llega a esta igualdad en un caso particular; por esta razón, evitamos la realización de la mayoría de los cálculos intermedios. Este tipo de desarrollos nos ayudan a entender demostraciones generales, en las que manejamos variables y parámetros en lugar de números concretos.

$$\begin{aligned}
\binom{8}{3} + \binom{8}{4} &= \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3!} + \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4!} = \frac{4\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3!} + \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4!} = \\
&= \frac{4\cdot 8\cdot 7\cdot 6 + 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4!} = \frac{(4+5)\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4!} = \binom{9}{4} \qquad \square
\end{aligned}$$

A la vista de este ejemplo, debería ser fácil entender la demostración de la proposición 1.3.4:

$$\begin{aligned}
&\binom{x}{k} + \binom{x}{k+1} = \\
&= \frac{x\cdot(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} + \frac{x\cdot(x-1)\cdots(x-k+1)\cdot(x-k)}{(k+1)!} = \\
&= \frac{(k+1)\cdot x\cdot(x-1)\cdots(x-k+1)}{(k+1)\cdot k!} + \frac{x\cdot(x-1)\cdots(x-k)}{(k+1)!} = \\
&= \frac{(k+1+x-k)\cdot x\cdot(x-1)\cdots(x-k+1)}{(k+1)!} = \\
&= \frac{(x+1)\cdot x\cdot(x-1)\cdots(x-k+1)}{(k+1)!} = \binom{x+1}{k+1}
\end{aligned}$$

Triángulo de Tartaglia-Pascal. La propiedad 1.3.4 permite calcular los números combinatorios usando una representación geométrica que se donomina *Triángulo de Tartaglia* o *Triángulo de Tartaglia-Pascal*. Construimos este triángulo colocando en el vértice superior, el número $\binom{0}{0}$ y debajo de él colocamos los números $\binom{1}{0}$ y $\binom{1}{1}$; formamos así un primer triángulo con solo tres números. A partir de aquí, vamos añadiendo nuevas filas usando la siguiente regla: debajo de cada par de números, colocamos su suma:

$$
\begin{array}{ccc}
\binom{n}{k} & & \binom{n}{k+1} \\
& \searrow \quad \swarrow & \\
& \binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} &
\end{array}
\overset{\text{Prop. (1.3.4)}}{=}
\begin{array}{ccc}
\binom{n}{k} & & \binom{n}{k+1} \\
& \searrow \quad \swarrow & \\
& \binom{n+1}{k+1} &
\end{array}
$$

Adicionalmente, cada fila se comienza con $\binom{n}{0}=1$ y se termina con $\binom{n}{n}=1$. Vemos a continuación el triángulo resultante hasta la quinta fila, a la izquierda con los números combinatorios indicados y a la derecha con los valores resultantes.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
&&&&& \binom{0}{0} &&&&& \\
&&&& \binom{1}{0} && \binom{1}{1} &&&& \\
&&& \binom{2}{0} && \binom{2}{1} && \binom{2}{2} &&& \\
&& \binom{3}{0} && \binom{3}{1} && \binom{3}{2} && \binom{3}{3} && \\
& \binom{4}{0} && \binom{4}{1} && \binom{4}{2} && \binom{4}{3} && \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} && \binom{5}{1} && \binom{5}{2} && \binom{5}{3} && \binom{5}{4} && \binom{5}{5}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccc}
&&&&& 1 &&&&& \\
&&&& 1 && 1 &&&& \\
&&& 1 && 2 && 1 &&& \\
&& 1 && 3 && 3 && 1 && \\
& 1 && 4 && 6 && 4 && 1 & \\
1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1
\end{array}
$$

Operador sumatorio. Ademas de los números combinatorios, necesitamos introducir el operador $\sum$ o *sumatorio*, que se utiliza para expresar sumas con un cantidad variable de sumandos:

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

Los sumandos se expresan en función de una variable k que tomará valores entre dos números naturales m y n tales que $m \leq n$. Este operador es frecuente en los lenguajes de programación, en los que toma una sintaxis similar a

$$\texttt{sum}(f(k), k, m, n)$$

Este operador será usado muchas veces en esta y otras asignaturas de la carrera, por lo que el alumno tendrá muchas ocasiones para practicar y aprender a manejarlo corréctamente. Vemos a continuación algunos ejemplos sencillos pero que ayudarán a entender algunas propiedades de este operador.

Ejemplo 1.3.5

1. La variable utilizada como *índice* de cada sumando no influye en el resultado y podremos cambiarla por la letra que deseemos siempre que no interfiera en el resto del problema. Por ejemplo, en los sumatorios siguientes utilizamos índices distintos pero obtenemos el mismo resultado:

$$\sum_{k=1}^{10} k = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$
$$\sum_{i=1}^{10} i = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$

2. Obtenemos un ejemplo curioso, pero bastante frecuente, cuando el índice no aparece en la expresión del sumatorio, por ejemplo, $\sum\limits_{k=1}^{10} 2$: esta expresión tiene 10 sumandos, pero ninguno depende de k, todos valen 2, y por lo tanto:

$$\sum_{k=1}^{10} 2 = 2+2+2+2+2+2+2+2+2+2 = 10\cdot 2$$

3. Un sumatorio no es más que una suma, y por lo tanto le podemos aplicar las propiedades de esta operación. Por ejemplo, la siguiente igualdad no es más que la aplicación de la propiedad asociativa:

$$\sum_{k=1}^{8} k = \left(\sum_{k=1}^{4} k\right) + \left(\sum_{k=5}^{8} k\right)$$
$$1+2+3+4+5+6+7+8 = (1+2+3+4) \ + \ (5+6+7+8)$$

4. De la misma forma, si la expresión que hay dentro del sumatorio es también una suma, las propiedades de asociatividad y conmutatividad nos permitirán manipulaciones como la mostrada en el siguiente ejemplo:

$$\sum_{k=1}^{4}(k+1) = \left(\sum_{k=1}^{4} k\right) + \left(\sum_{k=1}^{4} 1\right)$$
$$(1+1)+(2+1)+(3+1)+(4+1) = (1+2+3+4) \ + \ (1+1+1+1)$$

   Usaremos la igualdad anterior de derecha a izquierda para unificar la suma de dos sumatorios. En tal caso, tendremos que asegurarnos de que el rango del índice es el mismo en los dos; una forma de conseguir esto, es apartando los sumandos que sea necesario:

$$\left(\sum_{k=1}^{5} k\right) + \left(\sum_{k=2}^{6} k^2\right) = 1 + \left(\sum_{k=2}^{5} k\right) + \left(\sum_{k=2}^{5} k^2\right) + 36 =$$
$$= 1 + \left(\sum_{k=2}^{5}(k+k^2)\right) + 36$$

5. Otra propiedad asociada a la suma es la distributividad, que también admite una formulación muy útil en combinación con los sumatorios.

$$\sum_{k=1}^{5} 2k = 2\sum_{k=1}^{5} k$$

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \qquad \square$$

Debemos asegurarnos de que todas las transformaciones que realicemos estén respaldadas por las propiedades de cuerpo, tal y como hemos hecho en los apartados del ejemplo anterior. En el ejemplo siguiente recogemos algunos errores bastante frecuentes en la manipulación de sumatorios.

Ejemplo 1.3.6

1. $\sum_{k=1}^{5} k^2 \neq \left(\sum_{k=1}^{5} k\right)^2$. Estas dos expresiones son distintas, ya que, en general, el cuadrado de una suma no es igual a la suma de los cuadrados

$$1^2 + 2^2 + 3^3 + 4^2 + 5^2 \neq (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2$$

2. Hemos visto anteriormente que gracias a la propiedad distributiva podemos sacar factores comunes a todos los sumandos del sumatorio. Sin embargo:

$$\sum_{k=1}^{5} k(k+1) \neq k\left(\sum_{k=1}^{5}(k+1)\right)$$

La variable k toma un valor distinto en cada sumando y por lo tanto no se puede considerar común a todos ellos. Debemos pensar siempre que la variable que funciona como índice solo tiene sentido dentro del sumatorio y no puede aparecer simultáneamente en otra posición. $\square$

Para poder simplificar correctamente expresiones que involucran sumatorios, es conveniente saber modificar modificar su índice. Recordemos que el índice sirve para generar una secuencia de números naturales consecutivos; por ejemplo, en el sumatorio $\sum_{k=1}^{10} f(k)$, el índice k genera la lista 1, 2, 3, …, 10. Sin embargo, esta misma lista de números la podemos generar de otras formas, tal y como ilustramos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1.3.7 Consideremos la siguiente suma, en la cual f puede ser cualquier función.

$$S = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8) + f(9) + f(10)$$

Las siguientes expresiones describen esa misma suma:

$$S = \sum_{k=1}^{10} f(k) \;=\; \sum_{k=0}^{9} f(k+1) \;=\; \sum_{k=2}^{11} f(k-1) \;=\; \sum_{k=0}^{9} f(10-k).$$

Partiendo de la primera, obtenemos las siguientes sustituyendo la variable k por otra expresión que también genere la misma secuencia de números naturales consecutivos (creciente o decreciente), modificando adecuadamente el valor inicial y final del índice. □

Veamos un último ejemplo en el que utilizamos las propiedades anteriores para evaluar un sumatorio.

Ejemplo 1.3.8 Vamos a calcular la suma de los n primeros números naturales, es decir, vamos a evaluar la suma

$$S = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n.$$

Vamos a hacer la suma para $n = 5$ para entender la idea que queremos utilizar. Si en lugar de sumar una vez la lista de números la sumamos dos veces, tendríamos lo siguiente:

$$S = \frac{1}{2}((1+2+3+4+5) + (1+2+3+4+5)).$$

En lugar de sumarlos tal y como aparecen en esta expresión, vamos a reordenarlos y agruparlos como se muestra a continuación.

$$\begin{array}{rlllll} S = \frac{1}{2}((1 & +2 & +3 & +4 & +5) \\ +(5 & +4 & +3 & +2 & +1)) = \\ = \frac{1}{2}((1+5) & +(2+4) & +(3+3) & +(4+2) & +(5+1)) = \\ = \frac{1}{2}(6 & +6 & +6 & +6 & +6) = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6 \end{array}$$

Ahora, vamos a repetir el mismo proceso utilizando sumatorios y sus propiedades.

$$S = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k\right)$$

En primer lugar, cambiamos el orden de los sumandos del segundo sumatorio y lo hacemos con el siguiente cambio de índices: $k \to (n+1-k)$.

$$S = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)\right)$$

A continuación, unimos los dos sumatorios usando la propiedad asociativa:

$$S = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}(k+(n+1-k))\right)$$

Tras simplificar la expresión del sumatorio, obtenemos otra independiente del índice cuya suma es igual a la expresión por el número de sumandos.

$$S = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}(k+(n+1-k))\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}(n+1)\right) = \frac{1}{2}n(n+1) \qquad \square$$

Binomio de Newton. Como veremos más adelante, el *Binomio de Newton* es otra consecuencia de la proposición 1.3.4 y consiste en una fórmula para "expandir" las potencias de una suma.

TEOREMA 1.3.5 (FÓRMULA DEL BINOMIO DE NEWTON) *Para todo par de números complejos a y b y todo número natural n, se verifica que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

También podemos escribir la fórmula del binomio usando "puntos suspensivos":

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \\ &= \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n.\end{aligned}$$

EJEMPLO 1.3.9

- $(x-y)^2 = \binom{2}{0}x^2(-y)^0 + \binom{2}{1}x(-y) + \binom{2}{2}x^0(-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- $(s+t)^3 = \binom{3}{0}s^3t^0 + \binom{3}{1}s^2t + \binom{3}{2}st^2 + \binom{3}{3}s^0t^3 = s^3 + 3s^2t + 3st^2 + t^3$
- $(z-2)^6 = z^6 - 12z^5 + 60z^4 - 160z^3 + 240z^2 - 192z + 64$
- $2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$ $\square$

En el siguiente ejemplo, vamos a calcular la potencia tercera de un binomio de tal manera que podamos "intuir" la demostración de la fórmula general.

Ejemplo 1.3.10 Calculamos la potencia tercera a partir del cuadrado, pero escribiendo los coeficientes como números combinatorios:

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) \\
&= (a+b)(\tbinom{2}{0}a^2 + \tbinom{2}{1}ab + \tbinom{2}{2}b^2) \\
&= a(\tbinom{2}{0}a^2 + \tbinom{2}{1}ab + \tbinom{2}{2}b^2) + b(\tbinom{2}{0}a^2 + \tbinom{2}{1}ab + \tbinom{2}{2}b^2) \\
&= \tbinom{2}{0}a^3 + \tbinom{2}{1}a^2b + \tbinom{2}{2}ab^2 + \tbinom{2}{0}a^2b + \tbinom{2}{1}ab^2 + \tbinom{2}{2}b^3 \\
&= a^3 + (\tbinom{2}{1} + \tbinom{2}{0})a^2b + (\tbinom{2}{2} + \tbinom{2}{1})ab^2 + b^3 \\
&= a^3 + \tbinom{3}{1}a^2b + \tbinom{3}{2}ab^2 + b^3
\end{aligned}$$

Como puede verse, en la última igualdad hemos usado la proposición 1.3.4 para sumar los pares de números combinatorios que aparecen en los dos sumandos centrales. □

Para hacer una demostración general a partir de la idea mostrada en este ejemplo, necesitamos aplicar "sucesivamente" los mismos pasos. La técnica que permite hacer esto formalmente se conoce como *Inducción matemática* y será estudiada con más detalle en la asignatura de *Matemática Discreta*. El principio de inducción matemática dice: para demostrar que todo los números naturales verifican una determinada propiedad $\mathcal{P}$, tenemos que:

(i) demostrar que el número 0 verifica la propiedad $\mathcal{P}$;

(ii) deducir que $n+1$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$ a partir de la suposición de que n verifica la propiedad.

El apartado (i) puede sustituirse por la misma prueba para otro número (1, 2,...), siendo la conclusión que todos los números a partir de él verifican la propiedad deseada. Por ejemplo, para el binomio de Newton podemos partir de la propiedad para el número 2, que coincide con la identidad notable ya conocida:

(i) $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 =$
$$= a^2 + 2ab + b^2 = \tbinom{2}{0}a^2 + \tbinom{2}{1}ab + \tbinom{2}{2}b^2$$

(ii) Supongamos que la fórmula es verdadera para 'n' y vamos a deducir a partir de ahí la correspondiente fórmula para '$n+1$', siguiendo el proceso que hemos visto para $n=2$ en el ejemplo 1.3.10. Partimos de la igualdad para n,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

y multiplicamos ambos lados por $(a+b)$:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Tenemos que operar en el lado derecho hasta llegar a la expresión deseada. En primer lugar, aplicamos la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \\ &= a\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\right) + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k\right) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}\end{aligned}$$

El siguiente paso será juntar los dos sumatorios, pero antes tenemos que asegurarnos de que podremos simplificar la expresión resultante. En este caso, buscamos que los exponentes de a y b en los dos sumatoris sean iguales y para ello basta con cambiar en el segundo sumatorio k por $k-1$; para hacer esto, tendremos que cambiar los valores inicial y final de k a 1 y $n+1$ respectivamente:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k\right) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} = \\ & \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k\right) + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k\end{aligned}$$

Todavía no podemos juntar los sumatorios, ya que ambos tienen valores iniciales y finales distintos. Para arreglar esto, basta con separar los sumandos iniciales o finales necesarios; en este caso, el primer sumando del primer sumatorio y el último sumando del segundo sumatorio:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k\right) + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k = \\ &= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k\right) + b^{n+1}\end{aligned}$$

Ya podemos unir los dos sumatorios:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k\right) + b^{n+1} = \\ &= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)a^{n-k+1}b^k\right) + b^{n+1}\end{aligned}$$

Para terminar, basta con aplicar la propiedad 1.3.4 para sumar los dos números combinatorios y volver a incorporar los sumandos sueltos en el sumatorio:

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) a^{n-k+1} b^k \right) + b^{n+1} =$$
$$= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k \right) + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k$$

Por lo tanto, efectivamente la expresión resultante coincide con la fórmula del binomio de Newton para $n+1$ y podemos concluir que la fórmula es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Es posible que la demostración anterior resulte demasiado compleja a estas alturas del curso, pero es conveniente hacer un esfuerzo por entenderla, ya que a lo largo del curso seguiremos utilizando las simplificaciones de sumatorios. Por otra parte, en la asignatura de *Matemática Discreta* se harán más ejercicios con demostraciones por inducción matemática y podrá utilizarse la demostración anterior como ejemplo adicional.

LECCIÓN 1.4

Polinomios

En las lecciones anteriores ya hemos trabajado con polinomios, ya que entendemos que el alumno conoce las operaciones entre ellos y sus propiedades más importantes. Sin embargo, la importancia de estas funciones elementales hace conveniente dedicar una lección a ellas, para seguir recordando propiedades y aprender algunas operaciones nuevas.

A lo largo de la lección, consideraremos la siguiente expresión como forma normalizada de un polinomio y que se denomina *forma expandida*:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0. \tag{1.5}$$

El número n debe ser *natural*, los *coeficientes* a_i pueden ser reales o complejos y x es la variable; si $a_n \neq 0$, se dice que n es el *grado* del polinomio. Para cada i, el *monomio* $a_i x^i$ se denomina *término* i-ésimo o término de grado i y el número a_i se denomina *coeficiente* i-ésimo.

Cualquier expresión algebraica dada con sumas y productos de números complejos y una variable, debe ser considerada polinomio, ya que las propiedades de cuerpo permiten transformarla hasta llegar a la forma expandida dada por (1.5).

La propiedad que enunciamos en el siguiente teorema justifica la técnica denominada *identificación de coeficientes*, que ya hemos usado en el ejemplo 1.2.3.

TEOREMA 1.4.1 *La función polinómica*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

es nula ($P(x) = 0$ para todo x) si y solo si $a_i = 0$ para todo i.

EJEMPLO 1.4.1 ¿Cúal es el valor de a si la siguiente igualdad es válida para todo x?

$$x^2 + ax + 4 = (x-2)^2$$

Obsérvese que, al decir que la igualdad debe ser valida para todo x, estamos estableciendo algo más fuerte que una ecuación, estamos estableciendo una identidad entre funciones.

$$\begin{aligned} x^2 + ax + 4 &= (x-2)^2 \\ x^2 + ax + 4 - (x-2)^2 &= 0 \\ x^2 + ax + 4 - x^2 + 4x - 4 &= 0 \\ (a+4)x &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando el teorema anterior a la última identidad entre funciones, podemos deducir que $a = -4$. El proceso seguido para el desarrollo de este ejemplo se denomina identificación de coeficientes, ya que podemos abreviarlo diciendo que dos polinomios son iguales si y solo si coinciden los coeficientes de los términos del mismo grado. □

El teorema anterior nos puede llevar a la conclusión de que la mejor forma de trabajar con un polinomio es a través de su forma expandida. Sin embargo, existen otras formas normales para una expresión polinómica que pueden ser más adecuadas según el ejercicio concreto que queramos abordar. Por ejemplo, ya hemos comprobado que la *forma factorizada* es conveniente para la resolución de ecuaciones polinómicas. Otras formas posibles son:

- *Cuadrados completos* para polinomios de grado 2.
- Forma *centrada* en un número arbitrario.
- *Descomposición factorial*, que veremos en el tema siguiente como técnica para *sumar series*.

Ya hemos dedicado varios ejemplos de la lección 1.2 a la forma factorizada de los polinomios y a su relación con la resolución de ecuaciones polinómicas. Esta relación es la establecida por el siguiente resultado.

Proposición 1.4.2 *Si $P(x_0) = 0$, entonces $P(x)$ es divisible por $x - x_0$.*

Ejemplo 1.4.2

1. La identidad $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ es suficiente para factorizar el siguiente polinomio:

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 - (-1))(x + 1)(x - 1) =$$
$$= (x + \mathrm{i})(x - \mathrm{i})(x + 1)(x - 1).$$

Y a partir de ella, resolvemos la ecuación polinómica $x^4 - 1 = 0$:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = \mathrm{i}, \quad x_4 = -\mathrm{i}.$$

2. Para factorizar $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ intentamos buscar alguna raíz “a ojo”, recordando que en un polinomio con coeficientes enteros, los divisores del término independiente son candidatos a raíz del polinomio. Para evaluar el polinomio utilizamos el método de Ruffini, cuyos detalles no recordamos aquí pero que

se pueden encontrar en cualquier manual de matemáticas de educación secundaria.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & & -1 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto, el polinomio es divisible por $x+1$ y

$$x^3+2x^2+2x+1=(x+1)(x^2+x+1).$$

Para completar la factorización, resolvemos la ecuación $x^2+x+1=0$:

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por lo tanto:

$$x^3+2x^2+2x+1=(x+1)(x+\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}) \qquad \square$$

1.4.1. Evaluación de polinomios: Método de Horner

La evaluación de un polinomio para valores concretos de la variable se basa en la realización de multiplicaciones y de sumas. Aunque esto puede parecer simple, si el grado del polinomio es elevado, este proceso supone la realización de muchas operaciones. Incluso si estas las hace un ordenador, el tiempo necesario puede ser alto. Para reducir el número de operaciones necesarias, vamos a introducir en esta sección el *Método de Horner*, que se basa simplemente en reescribir el polinomio en una forma más adecuada. Este proceso es muy simple y basta con analizarlo sobre un ejemplo para entenderlo, tal y como hacemos a continuación:

$$2x^3+3x^2-4x+1=x(2x^2+3x-4)+1=x(x(2x+3)-4)+1$$

Es decir, separando el término independiente, sacamos la variable x como factor común; en el polinomio de grado 2 que aparece como subexpresión, repetimos el proceso. Podemos observar que, si evaluamos el polinomio en su forma inicial, tenemos que realizar $3+2+1$ multiplicaciones y 3 sumas; sin embargo, si evaluamos el polinomio en la forma obtenida a la derecha, realizamos también 3 sumas pero solo 3 multiplicaciones. En general, si el polinomio tiene grado n, la evaluación del polinomio en su forma expandida requiere $\dfrac{n(n+1)}{2}$ multiplicaciones y n sumas, mientras que el método de Horner efectúa solamente n productos y n sumas.

La forma más simple de utilizar este método es mediante el algoritmo de Ruffini, que nos sirve para dividir polinomios, pero que también nos evalúa el polinomio en el punto. La justificación es la siguiente, si dividimos un polinomio $P(x)$ entre $x - x_0$, obtenemos la igualdad

$$P(x) = C(x)(x - x_0) + r, \quad r \in \mathbb{C},$$

en donde r es el resto de la división; de esta igualdad se deduce fácilmente que $P(x_0) = r$. Por ejemplo, si dividimos $P(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ entre $x - \mathrm{i}$, obtenemos

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 2 & 1 \\
\mathrm{i} & & \mathrm{i} & 2\mathrm{i}-1 & -2+\mathrm{i} \\
\hline
 & 1 & 2+\mathrm{i} & 2\mathrm{i}+1 & \boxed{-1+\mathrm{i}}
\end{array}$$

De donde deducimos que $P(\mathrm{i}) = -1 + \mathrm{i}$. No es dificil observar que la secuencia de operaciones realizadas para llegar al resto en el método de Ruffini coincide con la secuencia dada por el método de Horner.

1.4.2. Compleción de cuadrados

La compleción de cuadrados es una simple transformación de polinomios de grado 2, pero cuya aplicación permite resolver muchos problemas: resolución de ecuaciones de segundo grado, estudio y representación de parábolas, simplificación de expresiones, cálculo de primitivas,...

Transformar mediante *compleción de cuadrados* un polinomio de grado 2, $ax^2 + bx + c$ consiste en encontrar los parámetros A y B tales que

$$ax^2 + bx + c = a(x + A)^2 + B.$$

Hablamos de cuadrados completos porque en la expresión de la derecha la variable x aparece solamente un vez y dentro de un cuadrado.

Ejemplo 1.4.3 El primer método para conseguir esta transformación es utilizar identificación de coeficientes. Por ejemplo, para el polinomio $2x^2 - 3x + 1$ haríamos el siguiente proceso:

$$\begin{aligned}
2x^2 - 3x + 1 &= 2(x + A)^2 + B \\
2x^2 - 3x + 1 &= 2(x^2 + 2Ax + A^2) + B \\
2x^2 - 3x + 1 &= 2x^2 + 4Ax + 2A^2 + B
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$4A = -3 \quad \Rightarrow \quad A = -3/4, \qquad\qquad 2A^2 + B = 1 \quad \Rightarrow \quad B = 1 - 2\frac{9}{16} = -\frac{1}{8},$$

y de ahí: $2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$. □

Debemos acostumbrarnos, no obstante, a realizar esta transformación de una forma más rápida. Si nos fijamos en el caso particular $x^2 + bx$ y recordamos la fórmula del cuadrado de un binomio, es fácil concluir que la compleción de cuadrados tendrá la siguiente forma:

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \dots$$

Si elevamos al cuadrado "mentalmente", nos aparece el número $b^2/4$, que no está en el lado izquierdo, y por lo tanto debemos "eliminarlo", es decir:

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}$$

Si aprendemos a desarrollar mentalmente la igualdad anterior, el proceso de compleción de cuadrados podrá hacerse sin necesidad de plantear ninguna ecuación.

Ejemplo 1.4.4 Vamos a transformar el polinomio $2x^2 - 4x + 1$ usando el proceso explicado anteriormente:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x - 1 &= 2\left(\underbrace{x^2 - 2x} - \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(\underbrace{((x-1)^2 - 1)} - \frac{1}{2}\right) \\ &= 2(x-1)^2 - 2 - 1 \\ &= 2(x-1)^2 - 3 \end{aligned}$$ □

Ejemplo 1.4.5 En el ejemplo anterior, hemos sacado factor común al coeficiente de x^2 para que los cálculos siguientes sean más simples. En algunos casos será más sencillo proceder directamente sin hacer este paso.

$$\begin{aligned} \underbrace{4x^2 - 3x} + 1 &= \left(\underbrace{\left(\left(2x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right)} + 1\right) \\ &= \left(2x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} \end{aligned}$$ □

Ejemplo 1.4.6 Ya hemos resuelto varias ecuaciones de segundo grado aplicando la fórmula que todo estudiante sabe desde sus años de educación primaria. En realidad, no es más que una consecuencia de la compleción de cuadrados que hemos aprendido en esta sección. Resolvemos en este ejemplo una ecuación sin utilizar la fórmula y dejamos al alumno el ejercicio de deducir la fórmula para una ecuación general

$ax^2 + bx + c = 0$ siguiendo los mismos pasos.

$$
\begin{aligned}
x^2 - x - 2 &= 0 \\
\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) - 2 &= 0 \\
\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} &= 0 \\
\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{9}{4} \\
x - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, &\qquad x - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \\
x = 2, &\qquad x = -1
\end{aligned}
$$

□

1.4.3. Cambio de centro de un polinomio

Un polinomio *centrado en* x_0 es una expresión algebraica de la forma

$$a_n(x - x_0)^n + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + \cdots + a_2(x - x_0)^2 + a_1(x - x_0) + a_0 \tag{1.6}$$

También se dice que el polinomio esta expresado en *términos de* $(x - x_0)$. Naturalmente, estas expresiones son polinomios y con la ayuda del binomio de Newton podemos transformarlas fácilmente en su forma expandida. Por otra parte, la forma expandida de un polinomio no es mas que el polinomio centrado en $x_0 = 0$.

Veremos que esta forma alternativa de escribir un polinomio puede ser más conveniente que la expandida para determinadas operaciones y por lo tanto es muy importante disponer del siguiente resultado.

Teorema 1.4.3 *Para todo número x_0, cualquier polinomio $P(x)$ puede ser escrito de forma única como polinomio centrado en x_0.*

Vamos a apoyarnos en unos ejemplos sencillos, pero no triviales, para describir lo métodos de obtener la forma centrada de un polinomio en un punto determinado.

Ejemplo 1.4.7 Haciendo uso de simples operaciones algebraicas y del binomio de Newton, vamos a expresar el polinomio

$$P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$$

en términos de $(x + 1)$. Para ello, sustituimos x por $(x + 1) - 1$ y expandimos la expresión resultante sin eliminar en ningún momento los paréntesis de $(x+1)$:

$$\begin{aligned}
2x^3 - x^2 + 3x - 1 &= 2((x+1)-1)^3 - ((x+1)-1)^2 + 3((x+1)-1) - 1 \\
&= 2((x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 3(x+1) - 1) - \\
&\qquad ((x+1)^2 - 2(x+1) + 1) + 3(x+1) - 3 - 1 \\
&= 2(x+1)^3 - 7(x+1)^2 + 11(x+1) - 7
\end{aligned}$$ □

Ejemplo 1.4.8 La segunda forma para llegar a la forma centrada de un polinomio en un centro distinto de 0 hace uso de la división de polinomios. Nuevamente, queremos encontrar los coeficientes a_i tales que

$$P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1 = a_3(x+1)^3 + a_2(x+1)^2 + a_1(x+1) + a_0.$$

Vamos a razonar sobre la parte derecha para justificar el procedimiento que aplicaremos después. Si dividimos $P(x)$ entre $x+1$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{x+1} = \frac{a_3(x+1)^3 + a_2(x+1)^2 + a_1(x+1) + a_0}{x+1} &= \\
&= a_3(x+1)^2 + a_2(x+1) + a_1 + \frac{a_0}{x+1}
\end{aligned}$$

Es decir, $C_1(x) = a_3(x+1)^2 + a_2(x+1) + a_1$ es el cociente y a_0 es el resto de la división. Si ahora dividimos $C_1(x)$ de nuevo entre $x+1$,

$$\frac{C_1(x)}{x+1} = \frac{a_3(x+1)^2 + a_2(x+1) + a_1}{x+1} = a_3(x+1) + a_2 + \frac{a_1}{x+1}$$

obtenemos como resto al coeficiente a_1. Podemos seguir así sucesivamente y deducimos que la secuencia a_0, a_1, a_2,… es la de los restos que se obtiene al dividir $P(x)$ entre $x+1$ sucesivamente, descartando los restos. Para realizar esta secuencia de divisiones utilizamos el método de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrrl}
 & 2 & -1 & 3 & -1 & \\
-1 & & -2 & 3 & -6 & \\
\hline
 & 2 & -3 & 6 & \boxed{-7} & = a_0 \\
-1 & & -2 & 5 & & \\
\hline
 & 2 & -5 & \boxed{11} & = a_1 & \\
-1 & & -2 & & & \\
\hline
 & 2 & \boxed{-7} & = a_2 & & \\
-1 & & & & & \\
\hline
 & \boxed{2} & = a_3 & & &
\end{array}$$

Esto nos lleva a la misma expresión que hemos obtenido en el ejemplo anterior:

$$2x^3 - x^2 + 3x - 1 = 2(x+1)^3 - 7(x+1)^2 + 11(x+1) - 7$$ □

El método mostrado en este segundo ejemplo es el más simple y el más eficiente, ya que se basa en la evaluación de los polinomios usando el método de Horner. Sin embargo, es conveniente entender los otros métodos, que nos ayudan a recordar y aplicar varias propiedades que usaremos a lo largo del curso.

Ejemplo 1.4.9 Vamos a repetir el ejemplo anterior pero usando las derivadas sucesivas del polinomio. La igualdad que queremos conseguir es la siguiente,

$$P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1 = a_3(x+1)^3 + a_2(x+1)^2 + a_1(x+1) + a_0.$$

Para determinar los coeficientes a_i, vamos a hallar las derivadas sucesivas del polinomio en sus dos representaciones, la inicial y la centrada en -1, y evaluaremos ambas expresiones en el nuevo centro:

$$\left.\begin{aligned} P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1 &\Rightarrow P(-1) = -7 \\ P(x) = a_3(x+1)^3 + a_2(x+1)^2 + a_1(x+1) + a_0 &\Rightarrow P(-1) = a_0 \end{aligned}\right\} a_0 = -7$$

$$\left.\begin{aligned} P'(x) = 6x^2 - 2x + 3 &\Rightarrow P'(-1) = 11 \\ P'(x) = 3a_3(x+1)^2 + 2a_2(x+1) + a_1 &\Rightarrow P'(-1) = a_1 \end{aligned}\right\} a_1 = 11$$

$$\left.\begin{aligned} P''(x) = 12x - 2 &\Rightarrow P''(-1) = -10 \\ P''(x) = 3\cdot 2a_3(x+1) + 2a_2 &\Rightarrow P''(-1) = 2a_2 \end{aligned}\right\} a_2 = -10/2 = -5$$

$$\left.\begin{aligned} P'''(x) = 12 &\Rightarrow P'''(-1) = 12 \\ P'''(x) = 3\cdot 2a_3 &\Rightarrow P'''(-1) = 3\cdot 2a_3 \end{aligned}\right\} a_3 = 12/6 = 2$$

Esto nos lleva a la misma expresión que obtuvimos en los ejemplos anteriores:

$$2x^3 - x^2 + 3x - 1 = 2(x+1)^3 - 7(x+1)^2 + 11(x+1) - 7 \qquad \square$$

Si aplicamos el proceso mostrado en el ejemplo anterior a un polinomio genérico, deducimos el resultado de la siguiente proposición.

Proposición 1.4.4 *Si* $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$, *entonces* $a_k = \dfrac{P^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Esta proposición es la clave para la construcción de los polinomios de Taylor que estudiamos en la sección siguiente.

1.4.4. Polinomios de Taylor

Los polinomios son las funciones elementales más simples, ya que solo hacen uso de las operaciones suma, resta y producto. La situación ideal sería que el resto de las funciones elementales se pudieran convertir en polinomios, pero esto no es cierto en ningún caso. Sin embargo, sí es posible "aproximar" cualquier función elemental con polinomios, así como cualquier función que se pueda construir a partir de ellas en determinadas condiciones. Como veremos más detalladamente en el tema siguiente, para establecer un método de aproximación adecuado, debemos saber construir una aproximación de una función dada y también debemos poder mejorar la aproximación cuanto deseemos. En esta sección, solo vamos a aprender a construir los polinomios aproximantes, y será en el tema siguiente cuando aprendamos a controlar los errores de este método de aproximación.

DEFINICIÓN 1.4.5 *El polinomio de Taylor de orden n de la función f en el punto x_0 es un polinomio T, de grado menor o igual que n tal que su valor en x_0 y el valor de las n primeras derivadas coinciden con los de f:*

$$T^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Como consecuencia de la proposición 1.4.4, podemos deducir fácilmente la expresión de los polinomios de Taylor como polinomios centrados en x_0.

COROLARIO 1.4.6 *El polinomio de Taylor de la definición anterior, es único y viene dado por:*

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

El polinomio de Taylor en $x_0 = 0$ se denomina igualmente polinomio de McLaurin.

EJEMPLO 1.4.10 Para la función $f(x) = \mathrm{e}^x$, se verifica que $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$ y $f^{(n)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1$ para todo n. Por lo tanto, el polinomio de Taylor de orden n de la función exponencial en el punto 0 es:

$$T(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

En la figura 1.3, aparecen representadas la función exponencial y los polinomios de Taylor de orden 1, 2 y 4. En primer lugar, apreciamos el parecido de la función y sus polinomios, mayor cuanto mayor es el orden y cuanto más cerca estamos del punto $x_0 = 0$. Además, para el caso $n = 1$, observamos que la recta obtenida en su representación coincide con la recta tangente en el punto $x_0 = 0$. □

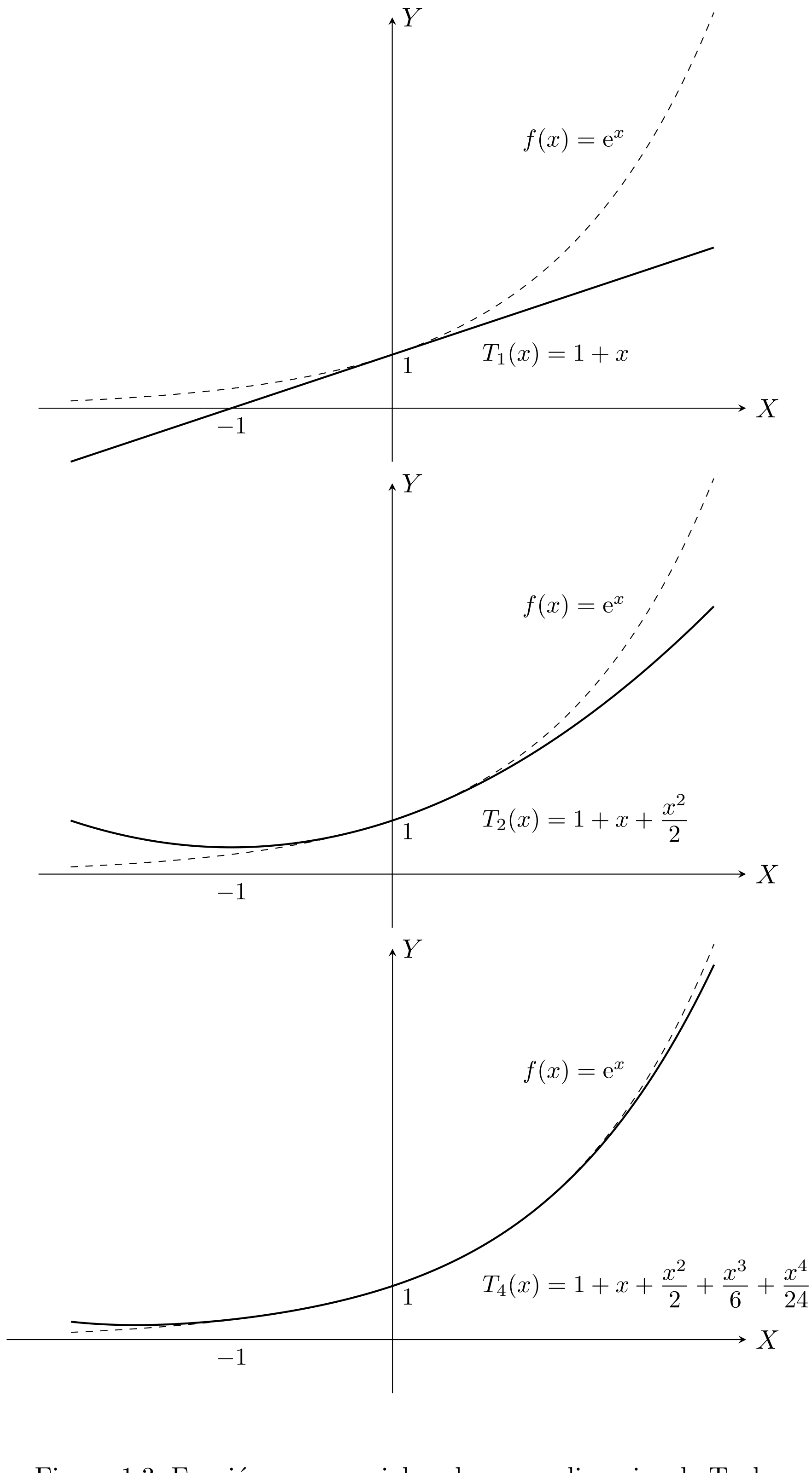


Figura 1.3: Función exponencial y algunos polinomios de Taylor.

Los polinomios de Taylor pueden calcularse en cualquier punto, pero debemos tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- Si queremos utilizarlos para aproximar magnitudes, solo tiene sentido usar los polinomios en los puntos para los cuales los coeficientes obtenidos sean números racionales, ya que el objetivo es estimar magnitudes reales con magnitudes racionales; esto será analizado con más detalle en el tema siguiente.

- Solo tendremos la posibilidad de controlar los errores cometidos para las funciones elementales y para algunas funciones construidas a partir de ellas.

- Sí trabajaremos con funciones arbitrarias cuando utilicemos los polinomios para deducir *propiedades locales* de la funciones, es decir, para estudiar qué es lo que ocurre en un entorno "muy pequeño" alrededor de un punto. Por ejemplo, todos los resultados de clasificación de puntos críticos en los problemas de optimización, se basan en los desarrollos de Taylor.

Ejemplo 1.4.11 Vamos a calcular el polinomio de Taylor de la función $\log x$ (logaritmo neperiano) en $x_0 = 1$. No podemos elegir a 0 como centro, ya que ese punto no está en el dominio; además, el número 1 es el único punto del dominio cuyas derivadas sucesivas son números racionales. Empezamos calculando las primeras derivadas sucesivas de la función $f(x) = \log x$, $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^{-1} \\ f''(x) &= -x^{-2} \\ f'''(x) &= 2x^{-3} \\ f^{(4)}(x) &= -3 \cdot 2x^{-4} \\ f^{(5)}(x) &= 4 \cdot 3 \cdot 2x^{-5} \end{aligned}$$

Podemos observar que:

- Aparece alternativamente el signo "$-$": las derivadas pares incluyen el signo, y las impares no. Por lo tanto, para el orden de derivación n, el signo será $(-1)^{n-1}$.

- No hemos multiplicado las constantes para poder observar como se construyen: en cada paso de derivación multiplicamos por el siguiente número natural. De esta forma, la constante correspondiente al orden de derivación n es $(n-1)!$.

- Finalmente, en cada derivada, la variable x aparece con un exponente negativo, cuyo valor absoluto coincide con el orden de derivación.

Es decir, con la observación de estas primeras derivadas podemos "intuir" que

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}, \quad n \geq 1 \tag{1.7}$$

Sin embargo, debemos hacer una demostración formal de esta afirmación usando inducción matemática (ver página 32):

(i) Para $n = 1$: $\quad (-1)^{1-1}(1-1)!x^{-1} = 1 \cdot 1x^{-1} = x^{-1} = f'(x)$.

(ii) Supongamos que la fórmula es válida para n y a partir de ahí, vamos a deducirla para $n+1$.

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n} \\ f^{(n+1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f^{(n)}(x)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}\right) \\ f^{(n+1)}(x) &= -n(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n-1} \\ f^{(n+1)}(x) &= (-1)^n n! x^{-(n+1)} \end{aligned}$$

Efectivamente, la última igualdad se corresponde con la fórmula (1.7) sustituyendo n por $n+1$.

Por lo tanto, podemos concluir que la fórmula es válida para todo n ∫.

El resto del ejemplo consiste simplemente en aplicar la fórmula del polinomio de Taylor:

$$f(1) = \log 1 = 0, \qquad f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$T(x) = 0 + 1 \cdot (x-1) - \frac{1!}{2!}(x-1)^2 + \frac{2!}{3!}(x-1)^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!}(x-1)^n$$

$$T(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x-1)^n$$

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}(x-1)^k \qquad \square$$

En general, puede ser bastante complicado hallar los polinomios de Taylor de funciones no elementales a partir de la definición, pero como es habitual en matemáticas, podemos facilitar estos cálculos estudiando el comportamiento respecto de las operaciones algebraicas y de la derivación.

Proposición 1.4.7

1. *El n-ésimo polinomio de Taylor de $f+g$ es la suma de los n-ésimos polinomios de Taylor de f y g*

2. *El n-ésimo polinomio de Taylor de $f \cdot g$ es el producto de los n-ésimos polinomios de Taylor de f y g* desechando los sumandos de grado mayor que *n.*

3. *El n-ésimo polinomio de Taylor de $f \circ g$ es la composición de los n-ésimos polinomios de Taylor de f y g* desechando los sumandos de grado mayor que n.

4. *La derivada del $(n+1)$–ésimo polinomio de Taylor de f, es el n–ésimo polinomio de Taylor de f'. Esta propiedad se suele aplicar en sentido inverso, a partir del polinomio de f', se obtiene el polinomio de f.*

A partir de estas propiedades y de los desarrollos de funciones elementales, es posible estudiar una amplia familia de funciones. Debemos observar sin embargo, que no siempre es práctico o útil el uso de los desarrollos de Taylor para funciones arbitrarias, ya que su cálculo directo puede ser imposible y, aunque la aplicación de las propiedades anteriores ayude en algunos casos, no proporciona una forma alternativa para calcular los *restos*, necesarios en el control de errores, según veremos en el tema siguiente. No obstante, estas propiedades sí pueden ser útiles para otras aplicaciones de polinomio de Taylor.

En la proposición anterior, no hemos incluido la propiedad correspondiente para la división de funciones. Aunque es posible enunciar tal propiedad, consideramos que la dificultad de su aplicación y las escasas consecuencias prácticas, permiten evitar su estudio en este curso.

Observación 1.4.8 En estas dos últimas secciones, hemos utilizado el operador de derivación de funciones reales y hemos utilizado distintas notaciones. Básicamente, existen dos formas de escribir el operador derivada:

$$f'(x), \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x).$$

La primera notación solo se puede utilizar sobre el nombre dado a la función; así, podremos escribir, $f'(x)$, $\cos'(x)$, $\exp'(x)$. La segunda notación, denominada *notación de Leibniz*, también se puede usar sobre el nombre de la función, pero es especialmente útil cuando queremos expresar la derivada de una expresión a la que no se le ha asignado un nombre:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3 - \operatorname{sen} x).$$

No podemos despreciar ninguna de las dos notaciones, cada una tiene sus ventajas y sus inconvenientes y por eso utilizaremos indistintamente las dos.

Finalmente, recordamos las correspondientes notaciones para las derivadas n-ésimas

$$f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x)$$

LECCIÓN 1.5

Funciones racionales y fracciones simples

Las funciones expresadas como cociente de polinomios se denominan *funciones racionales*. En esta sección, vamos a trabajar con polinomios con coeficientes reales y estamos interesados en la transformación de las expresiones racionales en una forma normal dada como suma de un polinomio y *fracciones simples*.

En primer lugar, hablaremos de funciones racionales *propias* si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, como por ejemplo

$$\frac{5x+4}{x^2-2x-8}, \qquad \frac{1}{x^5-8}.$$

Hablaremos de funciones racionales *impropias* si el grado del denominador es menor o igual que el grado del numerador, como por ejemplo

$$\frac{x^2-x}{x+3}, \qquad \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}$$

PROPOSICIÓN 1.5.1 *Cualquier función racional se puede expresar como suma de un polinomio y de una función racional propia.*

La transformación necesaria para conseguir la descomposición es simplemente la división de polinomios, tras la cual llegamos a la igualdad

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

en donde $C(x)$ el cociente y $R(x)$ el resto de dividir $P(x)$ entre $Q(x)$.

EJEMPLO 1.5.1 La función racional $\dfrac{x^6-2}{x^4+x^2}$ no es propia; dividimos para obtener la expresión de la proposición anterior.

$$\begin{array}{rrr|l}
\cancel{x^6} & -2 & & x^4+x^2 \\
\cancel{-x^6} & -x^4 & & \hline x^2-1 \\
\hline
 & \cancel{-x^4} & -2 & \\
 & \cancel{+x^4} & +x^2 & \\
\hline
 & & +x^2-2 &
\end{array}$$

Mostramos, pero no explicamos, los detalles de la división, que pueden consultarse en cualquier manual de matemáticas de secundaria. Ya podemos escribir la descomposición deseada.

$$\frac{x^6-2}{x^4+x^2} = x^2-1+\frac{x^2-2}{x^4+x^2}$$

□

DEFINICIÓN 1.5.2 (FRACCIÓN SIMPLE) *Las funciones racionales*

$$\frac{A}{(ax+b)^n}, \qquad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n},$$

en donde, $n \in \mathbb{N}$, $A, B, a, b, c \in \mathbb{R}$ *y* ax^2+bx+c *no tiene raíces reales, se denominan* fracciones simples.

Por ejemplo,

$$\frac{3}{2x+1}, \qquad \frac{-5}{x^3-3x^2+3x-1} = \frac{-5}{(x-1)^3},$$
$$\frac{x}{2x^2+2x+1}, \qquad \frac{1-x}{x^4+8x^2+16} = \frac{1-x}{(x^2+4)^2},$$

son fracciones simples. Sin embargo,

- $\dfrac{x}{x-2}$ no es fracción simple, ya que el denominador tiene grado 1 y el numerador no es una constante;
- $\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ no es simple, ya que el numerador tiene grado 2;
- $\dfrac{1}{x^3+4x}$ no es simple, ya que el denominador, $x(x^2+4)$, no se corresponde con una potencia de un polinomio de grado 1, ni con una potencia de un polinomio de grado 2;
- $\dfrac{2x+5}{(x^2-4)^3}$ no es simple, ya que el polinomio x^2-4 tiene raíces reales.

PROPOSICIÓN 1.5.3 *Cualquier función racional propia* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$*, se puede expresar como suma de fracciones simples. Concretamente, si*

$$Q(x) = a(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\dots(x-a_p)^{n_p}$$
$$(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}(x^2+b_2x+c_2)^{m_2}\dots(x^2+b_qx+c_q)^{m_q}$$

es la factorización en $\mathbb{R}$ *del polinomio* $Q(x)$*, entonces existen números reales* A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}*, tales que:*

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \left(\frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1n_1}}{(x-a_1)^{n_1}}\right) + \\
&+ \left(\frac{A_{21}}{x-a_2} + \frac{A_{22}}{(x-a_2)^2} + \dots + \frac{A_{2n_2}}{(x-a_2)^{n_2}}\right) + \\
&+ \dots + \\
&+ \left(\frac{A_{p1}}{x-a_p} + \frac{A_{p2}}{(x-a_p)^2} + \dots + \frac{A_{pn_p}}{(x-a_p)^{n_p}}\right) +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+b_1x+c_1}+\dots+\frac{B_{1m_1}x+C_{1m_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}}\right)+\\
&+\left(\frac{B_{21}x+C_{21}}{x^2+b_2x+c_2}+\dots+\frac{B_{2m_1}x+C_{2m_1}}{(x^2+b_2x+c_2)^{m_2}}\right)+\\
&+\dots+\\
&+\left(\frac{B_{q1}x+C_{q1}}{x^2+b_qx+c_q}+\dots+\frac{B_{qm_q}x+C_{qm_q}}{(x^2+b_1x+c_1)^{m_q}}\right)
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

El número de sumandos de la descomposición descrita en el resultado es la suma de las multiplicidades de los factores de Q. Para cada raíz real, se consideran tantos sumandos como su multiplicidad; los denominadores son las potencias sucesivas del correspondiente factor y los numeradores son constantes. Para cada factor de grado 2 irreducible (par de raíces complejas conjugadas), se consideran tantos sumandos como su multiplicidad; los denominadores son las potencias sucesivas del correspondiente factor y los numeradores son polinomios de grado menor o igual a 1.

Por lo tanto, para determinar la descomposición, partimos de la factorización del denominador y planteamos la igualdad (1.8) para determinar, mediante identificación de coeficientes, los números A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}

Ejemplo 1.5.2 Mostramos el proceso de descomposición en fracciones simples de la función racional propia $\dfrac{x^2-2}{x^4+x^2}$.

[Factorizamos el denominador,...

$$\frac{x^2-2}{x^4+x^2}=\frac{x^2-2}{x^2(x^2+1)}$$

[aplicamos el esquema de descomposición,...

$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

[sumamos...

$$=\frac{Ax(x^2+1)+B(x^2+1)+x^2(Cx+D)}{x^2(x^2+1)}$$

[y agrupamos.

$$=\frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+Ax+B}{x^2(x^2+1)}$$

Al igualar los coeficientes de los polinomios de los numeradores, obtenemos el siguiente sistema lineal de 4 ecuaciones y 4 incógnitas:

$$\begin{array}{rcrcr} x^3 & \to & A+C & = & 0 \\ x^2 & \to & B+D & = & 1 \\ x & \to & A & = & 0 \\ \text{TI} & \to & B & = & -2 \end{array}$$

cuya solución es $A = 0$, $B = -2$, $C = 0$ y $D = 3$. Por lo tanto:

$$\frac{x^2-2}{x^4+x^2} = -\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^2+1} \qquad \square$$

Ejemplo 1.5.3 La siguiente función racional también es propia y por lo tanto no es necesario dividir los polinomios:

$$\frac{6x^5+16x^4+22x^3+18x^2+20x-1}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)^2}$$

El denominador ya está factorizado, así que podemos pasar directamente a escribir la descomposición en fracciones simples:

$$\begin{aligned} &\frac{6x^5+16x^4+22x^3+18x^2+20x-1}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)^2} = \\ &\qquad = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+x+1)^2} \end{aligned}$$

Sumamos la expresión de la derecha tomando el denominador inicial como mínimo común múltiplo y obtenemos la siguiente igualdad de numeradores

$$\begin{aligned} &6x^5+16x^4+22x^3+18x^2+20x-1 = \\ &= A(x-1)(x+2)(x^2+x+1)^2 + B(x+2)(x^2+x+1)^2 + C(x-1)^2(x^2+x+1)^2 + \\ &\quad + (Dx+E)(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1) + (Fx+G)(x-1)^2(x+2) = \\ &\quad = (A+C+D)x^6 + (3A+B+D+E)x^5 + (3A+4B-2D+E+F)x^4 + \\ &\quad + (A+7B-2C-D-2E+G)x^3 + (-3A+8B+D-E-3F)x^2 + \\ &\qquad + (-3A+5B+2D-E+2F-3G)x + (-2A+2B+C+2E+2G) \end{aligned}$$

Por lo que, igualando coeficientes, obtenemos el siguiente sistema de siete ecuaciones lineales con siete incógnitas:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} x^6 & \to & 0 & = & A+C+D \\ x^5 & \to & 6 & = & 3A+B+D+E \\ x^4 & \to & 16 & = & 3A+4B-2D+E+F \\ x^3 & \to & 22 & = & A+7B-2C-D-2E+G \\ x^2 & \to & 18 & = & -3A+8B+D-E-3F \\ x & \to & 20 & = & -3A+5B+2D-E+2F-3G \\ \text{TI} & \to & -1 & = & -2A+2B+C+2E+2G \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} A & = & 1 \\ B & = & 3 \\ C & = & -1 \\ D & = & 0 \\ E & = & 0 \\ F & = & 1 \\ G & = & -2 \end{array}\right.$$

Por tanto, la descomposición final es:

$$\frac{6x^5+16x^4+22x^3+18x^2+20x-1}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)^2} =$$
$$= \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+2} + \frac{x-2}{(x^2+x+1)^2}$$

□

Relación de ejercicios (I)

1. Resuelva en $\mathbb{R}$ los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \\ xyz = 180 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 2z + 2 \end{cases}$$

2. Siga el método utilizado en el ejemplo 1.2.3 para factorizar en $\mathbb{R}$ el polinomio

$$x^4 - 2x^2 + 8x - 3.$$

3. Determine la forma binómica de los siguientes números complejos.

   a) $(5+3\mathrm{i})(2-\mathrm{i}) - (3+\mathrm{i})$; *b*) $(1-2\mathrm{i})^3$; *c*) $\dfrac{1}{\mathrm{i}}$; *d*) i^{-17}; *e*) $\dfrac{18+\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}$.

4. Resuelva la siguiente ecuación y exprese la solución en forma binómica:

$$\frac{2z}{1+\mathrm{i}} - \frac{2z}{\mathrm{i}} = \frac{5}{2+\mathrm{i}}.$$

5. Resuelva el siguiente sistema y exprese las soluciones en su forma binómica:

$$\begin{cases} 4z + 3w = 23 \\ z + \mathrm{i}w = 6 + 8\mathrm{i} \end{cases}$$

6. Resuelva la siguiente ecuación y exprese la solución en forma binómica:

$$z^2 + 2\overline{z} - 1 = 0.$$

7. Exprese en forma exponencial los siguientes números

   a) $1 - \mathrm{i}$, *b*) $-\sqrt{3} + \mathrm{i}$, *c*) $-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$,

8. Consideramos los números complejos $z = 1 + \mathrm{i}$, $w = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$.

   a) Calcule y simplifique el producto zw.

   b) Utilizando la forma exponencial de z y w, calcule el producto zw y exprese el resultado en forma exponencial y forma binómica.

   c) A partir de los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores, deduzca el valor de $\cos\frac{\pi}{12}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$ y $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$.

9. Utilice la fórmula de De Moivre para probar:

$$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$$

10. Exprese $\operatorname{sen}^6\theta$ en función del seno y coseno de múltiplos de θ.

11. *a*) Calcule las raíces cúbicas de $4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\mathrm{i}$ y exprésalas en forma binómica. (Indicación: utilice los resultados del ejercicio 8 de esta relación.)

    b) Represente gráficamente las raíces calculadas en el apartado anterior.

    c) A partir de los ejemplos y ejercicios sobre raíces complejas, deduzca cómo es la representación gráfica de las raíces n-ésimas de un número complejo $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

12. El método del ejemplo 1.2.3 solo se aplica fácilmente si el polinomio de grado cuatro no tiene término en x^3. Sin embargo, haciendo un simple cambio de variable, podemos convertir cualquier polinomio de grado cuatro en un polinomio sin término en x^3. Concretamente, si en $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ efectuamos el cambio de variable $x = t - \frac{a_3}{4a_4}$, obtenemos un polinomio cuya forma expandida no tiene término en t^3.

    a) Utilice el cambio de variable explicado anteriormente, para convertir el polinomio

    $$P(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 8$$

    en otro que no contiene término de grado 3.

    b) Factorice el polinomio obtenido en el apartado anterior siguiendo el método del ejemplo 1.2.3.

    c) Deshaciendo el cambio del primer apartado, obtenga la factorización en $\mathbb{R}$ de $P(x)$.

    d) Factorice en $\mathbb{C}$ el polinomio $P(x)$.

13. En este ejercicio vamos a calcular $\cos\frac{\pi}{5}$ utilizando números complejos.

    a) Utilice el ejercicio 9 de esta relación para deducir que $\cos\frac{\pi}{5}$ es raíz del polinomio

    $$P(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x + 1.$$

    b) Factorice el polinomio $P(x)$ determinando una raíz "a ojo" y utilizando el método del ejercicio 12 de esta relación.

    c) A partir de la factorización, calcule $\cos\frac{\pi}{5}$.

14. Utilice el método de Horner para evaluar el polinomio de McLaurin de orden 5 de la función exponencial en $x = 1/2$. Utilice una calculadora para comparar el resultado con $\mathrm{e}^{1/2} = \sqrt{\mathrm{e}}$.

15. Obtenga la forma centrada en -1 del polinomio $p(x) = x^3+x^2+x+1$. Resuelva este ejercicio usando las distintas formas estudiadas en el tema.

16. Para la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, determine los polinomios de Taylor de órdenes 1, 2, 3, 4 y 5 en $x_0 = 0$. Deduzca la expresión de su polinomio de Taylor de cualquier orden.

17. Consideremos la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$:

    a) Use la definición para determinar el polinomio de Taylor de $f(x)$, de orden 5 en el punto $x_0 = 0$.

    b) Use la proposición 1.4.7 para hallar el polinomio del apartado anterior.

18. Transforme los polinomios usando la técnica de completar cuadrados:

    a) $9x^2 - 6x + 7$, *b*) $5x^2 + 7x - 2$, *c*) $3x^2 + 1$.

19. Descomponga en suma de polinomios y fracciones simples las siguientes funciones racionales.

    a) $\dfrac{x^3}{x^2 + x - 2}$, *b*) $\dfrac{1}{x^4 + x^3 + x^2}$.

20. Obtenga la forma centrada en 2 del polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Deduzca a partir de ahí, la descomposición en fracciones simples de la función $\dfrac{P(x)}{(x-2)^4}$.

21. El objetivo de este ejercicio es utilizar el operador sumatorio para obtener una expresión equivalente de la suma $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$ utilizando las propiedades del operador sumatorio. Siguiendo el método explicado en el ejemplo 1.3.8, reescriba el proceso descrito a continuación para $n = 3$ usando el operador sumatorio y posteriormente generalícelo para cualquier n.

    $$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$$

    Si multiplicamos ambos lados de la igualdad por $\frac{1}{2}$ obtenemos:

    $$\frac{1}{2}S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}$$

    Si restamos las dos igualdades, miembro a miembro obtenemos:

    $$S_3 - \frac{1}{2}S_3 = \frac{1}{2}S_3 = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right) = 1 - \frac{1}{2^4}$$

    Por lo tanto, $S_3 = 2 - \dfrac{1}{2^3}$.

Relación de ejercicios (II)

1. Resuelva en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones y comprobar los resultados:

   a) $x - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{x+2}{3} - \frac{x-8}{2} \right) = 3(x-4) - 5(x-8)$ (Sol: $x = 10$)

   b) $x^2 - 4x + 3 = 0$ (Sol: $x = 1\ ,\ 3$)

   c) $2x^3 - 14x + 12 = 0$ (Sol: $x = 1,\ 2,\ -3$)

   d) $y \cdot (y^2 - 1) = 0$ (Sol: $y = 0,\ \pm 1$)

   e) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (Sol: $x = \pm 1\ ,\ \pm\sqrt{2}$)

   f) $\sqrt{u + 13} - u = 1$ (Sol: $u = 3$)

2. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método *de reducción* o *de Gauss*:

   a) $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$ (Sol: $(x, y) = (1, 4)$)

   b) $\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 2x - y - z = 6 \\ 3x - 2y + 2z = 10 \end{cases}$ (Sol: $(x, y, z) = (4z + 2, 7z - 2, z)$)

3. Resuelva en $\mathbb{R}$ los siguientes sistemas de ecuaciones:

   a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 4y \\ xyz = 180 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0 \\ 2y - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$ *c*) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z - x^2 = 1 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases}$

4. Simplifique y exprese el resultado en forma binómica:

   a) $\frac{1 - \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}}$, *b*) $\frac{1}{5 - 3\mathrm{i}} - \frac{1}{5 + 3\mathrm{i}}$, *c*) $\frac{1}{2}(1 + \mathrm{i})^2$, *d*) i^{2007}, *e*) $(1 - \mathrm{i})^8$.

5. Exprese en forma binómina las soluciones de la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{z} = \frac{2}{2 + 3\mathrm{i}} + \frac{1}{3 + 2\mathrm{i}}$$

6. Demuestre la proposición 1.2.6, es decir, demuestre que para todo $z, w \in \mathbb{C}$

   a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, *b*) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

7. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} z - w + u = 3 - \mathrm{i} \\ z + \mathrm{i}w = 6 + 8\mathrm{i} \\ w + 2\mathrm{i}u = -\mathrm{i} \end{cases}$

8. Resuelva la siguiente ecuación y exprese la solución en forma binómica:
$$z + \bar{z}\mathrm{i} - 5 = \frac{3 - z\bar{z}}{2\mathrm{i}}$$

9. Calcule el módulo de: $z = \dfrac{(1+2\mathrm{i})^3(4-3\mathrm{i})^4}{(3+4\mathrm{i})^4(2-\mathrm{i})^3}$.

10. Exprese en forma exponencial los siguientes números

    a) $\sqrt{3} - \mathrm{i}\sqrt{3}$, *b*) $-\sqrt{3} - \mathrm{i}$, *c*) $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, *d*) $\left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2$, *e*) $-3 + 3\mathrm{i}$.

11. Calcule las siguientes exponenciales complejas

    a) $\mathrm{e}^{15-8\mathrm{i}}$, *b*) $\exp(1 - \frac{5\pi}{3}\mathrm{i})$, *c*) $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}\mathrm{e}^{1-\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}$.

12. Exprese $\operatorname{sen} 3\theta$, $\cos 6\theta$ y $\operatorname{sen} 5\theta$ como polinomios en $\operatorname{sen}\theta$ o en $\cos\theta$.

13. Exprese $\cos^4\theta$, $\operatorname{sen}^3\theta$ y $\cos^5\theta$ en términos de senos y cosenos de múltiplos de θ.

14. Encuentre y represente gráficamente las raíces quintas de -1.

15. Encuentre y represente gráficamente las raíces sextas del número complejo $-\mathrm{i}$.

16. Encuentre y represente gráficamente las raíces cuartas de $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$

17. Evalúe y simplifique las siguientes expresiones:

    a) $5!$, *b*) $\dfrac{100!}{98!}$, *c*) $\dfrac{10!\cdot 5!}{6!\cdot 8!}$, *d*) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$,

    e) $\dbinom{7}{4}$, *f*) $\dbinom{100}{99}$, *g*) $\dbinom{3n+2}{3n}$, *h*) $\dbinom{1/2}{5}$.

18. Demuestre que para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$:
$$\binom{x}{k} = \frac{x-k+1}{k}\binom{x}{k-1}$$

19. Use la fórmula del Binomio de Newton para desarrollar en forma polinómica las siguientes expresiones:

    a) $(a+b)^7$, *b*) $(x-1)^4$, *c*) $\left(2x^3 - \dfrac{2}{5x^2}\right)^2$

    d) $(x-2)^5$, *e*) $(1-2x)^3$, *f*) $(z+1/2)^3$.

20. Calcule el valor de a, b, c y d para que se verifique:

    a) $(2-3y)^3 = 8 - 27y^3 + 2a^b y^2 - 4aby$

    b) $(x-c)^2 + d^2 = x^2 + x + 1$

21. Identifique el binomio de Newton equivalente a los siguientes polinomios:

    a) $x^2 - 4x + 4$

    b) $4x^2 - 4x + 1$

    c) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

    d) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

22. Calcule el cociente y el resto de las siguientes divisiones de polinomios:

    a) $(x^4 - 3x^2 + 7x - 2) : (x+1)$

    b) $(6x^4 - x^3 + 3x + 5) : (2x^2 + x - 2)$

    c) $(-6x^3 + 4x^2 + x - 7) : (3x+2)$

23. Averigüe el valor de m para que el resto obtenido de la división del polinomio $x^4 - 5x^2 + mx - 1$ entre $x+1$ sea -2.

24. Halle razonadamente una ecuación de segundo grado, con coeficientes enteros, que tenga por soluciones los números:

    a) 2 y -3, *b*) $\dfrac{1}{5}$ y 3.

25. Factorice en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ los siguientes polinomios (utilice los métodos aprendidos a lo largo del tema y en la relación de ejercicios).

    a) $z^3 + 8$, *b*) $y^4 + 81$, *c*) $z^4 + 5z^2 + 4$,

    d) $t^6 - 2t^4 + 4t^2$, *e*) $3x^3 - x^2 - 7x + 5$, *f*) $x^3 - 12x + 16$,

    g) $16x^4 - 56x^2 - 256x + 561$, *h*) $4x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 2x + 4$.

26. Obtenga la expresión polinómica centrada en $x = 1$ del polinomio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

27. Exprese los siguientes polinomios en términos de los monomios indicados:

    a) $2x^5 - 3x^2 + x - 4$ en potencias de $(x-1)$.

    b) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ en potencias de $(x+2)$.

28. Utilice la técnica de compleción de cuadrados sobre las siguientes expresiones:

    a) $x^2 - 2x$, *b*) $4x^2 + 8x - 1$, *c*) $x^2 - 9x + 2$.

29. Aplique la técnica de completar cuadrados al polinomio $ax^2 + bx + c$ para deducir la fórmula de la resolución de ecuaciones de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

30. *a*) ¿Cuál es el polinomio de orden 10 en el punto $x_0 = 3$ de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$?

    b) ¿Es cierto que el polinomio de Taylor de *orden 5* de una función tiene *grado 5*?

    c) Si el polinomio de orden 5 de una función f en el punto $x_0 = -2$ es $P(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$, ¿Cuánto vale la derivada tercera de f en "-2", $f^{(3)}(-2)$? ¿Podemos conocer el valor exacto de $f(0)$?

31. Calcule los polinomios de Taylor de órdenes 1, 2, 3, 4 y 5 en el punto $x_0 = 0$ de la función $\cos x$.

32. Calcule los polinomios de Taylor de órdenes 1, 2, 3, 4 y 5 en el punto $x_0 = 1$ de la función $\sqrt{x}$.

33. Calcule el polinomio de Taylor de orden 12 de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ en el punto $x = 0$.

34. Halle los polinomios de Taylor de las siguientes funciones en los puntos indicados y de los órdenes indicados:

    a) $f(x) = \operatorname{sen} x$, orden $2n$ en $\pi/2$
    b) $f(x) = \sqrt{x}$, orden 4 en 4
    c) $f(x) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x$, orden 8 en 0
    d) $f(x) = \operatorname{tg} x$, orden 5 en 0

35. Calcule el polinomio de Taylor de orden 3 de la función $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \operatorname{sen} x$ en el punto $x = 0$.

36. Descomponga en suma de polinomios y fracciones simples:

    a) $\dfrac{2x-3}{x^2-9}$,
    b) $\dfrac{8}{x^2+6x+5}$,
    c) $\dfrac{x-1}{x^3+x^2-6x}$,
    d) $\dfrac{x+1}{x^3+6x^2+9x}$,
    e) $\dfrac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x+2)^2}$,
    f) $\dfrac{4-x}{2x^2-x-3}$,
    g) $\dfrac{2x-1}{x^2+3x+10}$,
    h) $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)}$,
    i) $\dfrac{x^2}{1-x^4}$,
    j) $\dfrac{1}{x^6-2x^4+4x^2}$,
    k) $\dfrac{x^4+x^3-5x-1}{x^4+5x^2+4}$

TEMA 2

Sucesiones y series numéricas

Objetivos: Los objetivos son: (1) estudiar la convergencia de las sucesiones numéricas; (2) saber aplicar los criterios para estudiar la convergencia de series numéricas; (3) saber estudiar la convergencia de series de potencias; (4) saber sumar de forma exacta algunas series numéricas y de potencias; (5) conocer los fundamentos del cálculo numérico y saber resolver con sus técnicas algunos problemas: resolución de ecuaciones, integración numérica, evaluación de funciones, suma de series.

Prerrequisitos: Manipulación de expresiones y propiedades de las funciones elementales. Concepto de límite de una función y cálculo de límites (regla de L'Hôpital).

Contenido:

- Lección 2.1: Funciones reales. Funciones elementales. Limites y continuidad. Derivabilidad. Infinitésimos e infinitos equivalentes.
- Lección 2.2: Sucesiones. Límites de sucesiones.
- Lección 2.3: Introducción al cálculo numérico.Resolución aproximada de ecuaciones: método de las bisecciones y método de Newton. Integración numérica: método de los trapecios.
- Lección 2.4: Series Numéricas. Criterios de convergencia. Suma de series. Series de potencias. Series de Taylor. Evaluación aproximada de funciones elementales.

LECCIÓN 2.1

Funciones reales

Los conceptos y resultados que recogemos en esta lección deben ser conocidos por el alumno y, por lo tanto, su objetivo es que sirva para repasar y como referencia para el resto del curso.

Una *función real* es una relación que asocia a cada número de un conjunto $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}$, que se llama *dominio*, un único número real. Si llamamos f a la función, escribimos

$$f\colon \mathrm{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

y usamos $f(x)$ para representar al único número real asociado por f al número x. Habitualmente, las funciones se determinan mediante fórmulas que describen esta relación. Así por ejemplo, presentaremos una función diciendo: "sea $f\colon (1,2] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$"; en este caso, el intervalo $(1,2]$ es el dominio de f, lo que podemos indicar igualmente con $\mathrm{Dom}(f) = (1,2]$.

Aunque normalmente necesitaremos especificar el dominio de la función en el que vamos a trabajar, también es habitual que nos centremos solamente en la fórmula que define la función; en estos casos, consideramos que el dominio es el mayor conjunto sobre el que está definida dicha fórmula. Por ejemplo, si presentamos una función diciendo "sea $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$" entendemos que $\mathrm{Dom}(f) = (-1,1)$.

Funciones elementales. En este curso, vamos a trabajar principalmente con funciones definidas en *términos de funciones elementales*, es decir, funciones determinadas por operaciones algebraicas entre funciones elementales. Recordamos a continuación la lista de funciones que conoceos como *funciones elementales*:

- *Funciones polinómicas*, a las cuáles hemos dedicado una lección en el tema anterior.

- *Funciones potenciales*: $p_\alpha(x) = x^\alpha$, siendo α cualquier número real. Si $\alpha \in \mathbb{N}$, la correspondiente función potencial es un polinomio. El dominio de estas funciones depende de α, concretamente, si $\alpha \geq 0$, $\mathrm{Dom}(p_\alpha) = \mathbb{R}$ y si $\alpha < 0$, $\mathrm{Dom}(p_\alpha) = \mathbb{R}^*$.

- *Función exponencial*: $\exp(x) = \mathrm{e}^x$. Solo consideremos cómo elemental a la de base e, ya que el resto se pueden definir a partir de ella.

- *Función logaritmo neperiano*: $\log(x) = \ln(x) = \mathrm{L}(x)$. Estas son las tres notaciones habituales para el logaritmo con base e, aunque en este curso utilizaremos principalmente log. El resto de los logaritmos no se consideran como elementales, ya que se pueden definir a partir del neperiano.
- *Función seno (circular)*: $\operatorname{sen}(x)$.
- *Función coseno (circular)*: $\cos(x)$.
- *Función arco-seno*: $\operatorname{arc\,sen}(x)$, que es la función *inversa* del seno en el intervalo $[-\pi, \pi]$.
- *Función arco-coseno*: $\arccos(x)$, que es la función *inversa* del coseno en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Cuando hablamos de funciones, la operación de composición también se considera como operación algebraica; por ejemplo, la función $f(x) = \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2(x)}$ se construye *componiendo* la raíz cuadrada con la *suma* de la función constante y el *cuadrado* de la función seno.

Ejemplo 2.1.1 Aunque solo consideramos como elementales las relacionadas arriba, hay más funciones que importantes y con “nombre propios” que se estudian igualmente de forma especial.

1. Las funciones exponenciales con base distinta de e se pueden definir fácilmente a partir de la función exponencial:

$$a^x = \exp(\log(a^x)) = \exp(x \log a)$$

2. De la misma forma, los logaritmos con base distinta de e, se pueden definir a partir del logaritmo neperiano:

$$\begin{aligned} y &= \log_a(x) \\ a^y &= x \\ \log(a^y) &= \log(x) \\ y \log(a) &= \log(x) \\ y &= \frac{\log x}{\log a} \\ \log_a(x) &= \frac{\log x}{\log a} \end{aligned}$$

3. Es conveniente conocer el resto de las funciones trigonométricas, su definición a partir del seno y el coseno y las propiedades fundamentales de todas ellas:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

   Las correspondientes funciones inversas son $\operatorname{arc\,tg} x$, en $(-\pi/2, \pi/2)$, $\operatorname{arccotg} x$, en $(0, \pi)$, $\operatorname{arcsec} x$, en $[-\pi/2, \pi/2]$ y $\operatorname{arccosec} x$, en $[0, \pi]$.

4. *Funciones hiperbólicas.* Las funciones hiperbólicas se definen a partir de la función exponencial; las fundamentales son el *seno hiperbólico*, senh, y el *coseno hiperbólico*, cosh, que se definen como

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

   A partir de ellas se pueden definir el resto de las funciones hiperbólicas siguiendo el mismo esquema que para las funciones trigonométricas.

5. Podremos manejar expresiones potenciales en donde la variable de la función aparece tanto en la base como en el exponente, como por ejemplo: $f(x) = (1+x)^{2x}$. Estas expresiones se definen a partir de las funciones exponencial y logaritmo como sigue:

$$g(x)^{h(x)} = \exp(\log g(x)^{h(x)}) = \exp(h(x) \log g(x)). \qquad \square$$

Limites y continuidad. Recordemos la definición de límite de una función real de variable real.

DEFINICIÓN 2.1.1 *Sea $f\colon \mathrm{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Decimos que el límite de f cuando x tiende a $a \in \mathbb{R}$ es $\ell \in \mathbb{R}$ si: para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in \mathrm{D}$ y $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. En tal caso, escribimos:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

También podemos calcular límites cuando x tiene a $+\infty$ o a $-\infty$ así como concluir que el valor de un límite sea $+\infty$ o a $-\infty$. No incluimos la definición detallada de todas las situaciones posibles, ya que entendemos que deben ser conocidas por el alumno y además no necesitaremos trabajar con ellas.

En cualquier caso, estas definiciones no establecen métodos para decidir si un límite existe o no y en tal caso, determinarlo. La propiedad de *continuidad* de las funciones elementales y las propiedades algebraicas del operador límite son las herramientas para el estudio y cálculo de límites.

Definición 2.1.2 *Decimos que la función f es continua en $a \in \operatorname{Dom}(f)$, si*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Todas las funciones elementales son continuas en su dominio, así como todas las que se pueden definir en términos de funciones elementales.

Teorema 2.1.3 *Si una función está definida, en un entorno de un punto a, por una única expresión determinada por operaciones algebraicas (suma, producto, cociente y composición) entre funciones elementales, entonces la función es continua en a.*

Este resultado permite concluir que el interés práctico del estudio de cálculo de límites está exclusivamente en aquellos puntos que quedan fuera del dominio y en $\pm\infty$. En estos casos, las propiedades algebraicas que enunciamos a continuación y el teorema de L'Hôpital que recordaremos más adelante serán suficientes para calcular estos límites.

Proposición 2.1.4

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a}(f(x)) + \lim\limits_{x\to a}(g(x))$ *si ambos límites son reales.*
2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a}(f(x)) \cdot \lim\limits_{x\to a}(g(x))$ *si ambos límites son reales.*
3. *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 0$, *entonces* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a}(f(x))}$.
4. *Si* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, *entonces* $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = \lim\limits_{x\to b} f(x)$.

En los tres primeros apartados de esta proposición, solo consideramos limites reales. Para los límites infinitos se verifican también estas propiedades con algunas excepciones; vemos a continuación las operaciones válidas entre estos límites:

- $+\infty + \infty = +\infty$, $\quad -\infty - \infty = -\infty \quad$ y $\quad a \pm \infty = \pm\infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
- $(\pm\infty)(\pm\infty) = \pm\infty$, $\quad a(\pm\infty) = \pm\infty$ si $a \neq 0$. En ambos casos, aplicamos la regla de los signos para determinar el signo correcto.
- $\dfrac{1}{\pm\infty} = 0$, $\quad \dfrac{1}{0^+} = +\infty$, $\quad \dfrac{1}{0^-} = -\infty$. En donde, 0^+ indica que el límite del denominador es 0 pero que la función es positiva y 0^+ indica que el límite del denominador es 0 pero que la función es negativa.

Las situaciones que no están consideradas en las igualdades anteriores son:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right), \qquad \left(\frac{0}{0}\right), \qquad (0\cdot\infty), \qquad ((+\infty)-(+\infty)).$$

Si, en una primera evaluación, nos encontramos con uno de estos casos, diremos que el límite está *indeterminado (a priori)*; necesitaremos, por lo tanto, realizar transformaciones algebraicas que conviertan la expresión de la función en otra que sí permita calcular el límite.

Ejemplo 2.1.2

1. No podemos calcular el límite $\lim_{x\to+\infty} x^3 - 3x^2 + 1$ como suma de los límites
$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} -3x^2 + 1 = -\infty,$$
ya que nos encontramos con una indeterminación $(\infty - \infty)$. Sin embargo, si sacamos factor común el monomio x^3, convertimos la expresión en un producto, cuyo límite sí se puede calcular con las propiedades algebraicas:
$$\lim_{x\to+\infty} x^3 - 3x^2 + 1 = \lim_{x\to+\infty} x^3\big(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\big) = (+\infty\cdot 1) = +\infty$$

2. La idea utilizada en el apartado anterior permite calcular los límites en $+\infty$ y $-\infty$ de cualquier función racional.
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-2}{x^3+3x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{x^3}\cdot\frac{1-\frac{2}{x^4}}{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x\cdot\frac{1-\frac{2}{x^4}}{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}} = (-\infty\cdot 1) = -\infty \qquad \square$$

Debemos recordar que en muchas ocasiones necesitaremos calcular *límites laterales* para estudiar algunos límites.

Ejemplo 2.1.3 Evaluando el siguiente límite como cociente de funciones, nos encontramos una indeterminación:
$$\lim_{x\to1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-2x+1} = \left(\frac{0}{0}\right).$$
Esto significa que los dos polinomios son divisibles por $x-1$; por lo tanto, podemos factorizar numerador y denominador y simplificar el factor $x-1$:
$$\lim_{x\to1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to1}\frac{x^2+1}{x-1} = \left(\frac{2}{0}\right)$$
Para poder terminar la evaluación del límite, debemos determinar el signo de la función alrededor del punto 1 y, para ello, debemos evaluar límites laterales.
$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+1}{x-1} = \left(\frac{2}{0^+}\right) = +\infty$$
$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+1}{x-1} = \left(\frac{2}{0^-}\right) = -\infty$$
Por lo tanto, el límite inicial no existe. $\square$

Derivabilidad. Recordamos ahora la noción de derivabilidad de funciones reales, sus propiedades más importantes y sus aplicaciones.

Definición 2.1.5 *Decimos que f es derivable en $a \in \mathrm{Dom}(f)$ si el siguiente límite existe y es real*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

En tal caso, este límite se denota por $f'(a)$.

Otra forma equivalente de expresar el límite que define la derivada en un punto es la siguiente:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Además, otras notaciones posibles para la derivada de una función en un punto son

$$f'(a) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))\bigg|_{x=a}$$

En la mayoría de los casos, es suficiente con las propiedades algebraicas de la derivación y las derivadas de las funciones elementales para calcular la derivada de cualquier función.

Ejemplo 2.1.4 Aunque suponemos que el alumno debe conocer las derivadas de las funciones elementales, incluimos este ejemplo para que tenga un punto de referencia en caso de dudas.

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$. Obsérvese que si $0 \le \alpha < 1$, la función potencial es continua en $x = 0$ pero no es derivable.
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$.
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log x = \frac{1}{x}$.
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sen} x = \cos x$.
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\operatorname{sen} x$.
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arc\,sen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$. □

Proposición 2.1.6 (Propiedades algebraicas)

1. *Linealidad:* $(\alpha f+\beta g)'(x)=\alpha f'(x)+\beta g'(x)$, *para todo par de números reales* α, β.
2. $(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
3. $(f/g)'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
4. *Regla de la cadena:* $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$

Aunque es consecuencia de la regla del cociente, también es útil recordar la siguiente fórmula

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{f(x)}\right)=-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

Ejemplo 2.1.5 Deberíamos memorizar las derivadas de las funciones del ejemplo 2.1.1, aunque se deducen fácilmente a partir de las expresiones dadas en ese ejemplo.

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp(x\log a)=\exp(x\log a)\log a=a^x\log a.$
2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log_a(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\log x}{\log a}\right)=\dfrac{1}{x\log a}$
3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{tg}x=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)=\dfrac{(\cos x)(\cos x)+(\operatorname{sen}x)(\operatorname{sen}x)}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2x=\sec^2 x$
4. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{cotg}x=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\right)=\dfrac{-\operatorname{sen}^2x-\cos^2x}{\operatorname{sen}^2x}=-1-\operatorname{cotg}^2x=-\operatorname{cosec}^2x$
5. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{senh}(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}=\cosh x$
6. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}=\operatorname{senh}x$
7. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x)^{2x}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp(2x\log(1+x))=$
   $=\exp(2x\log(1+x))\cdot\Big(2\log(1+x)+\dfrac{2x}{1+x}\Big)=(1+x)^{2x}\Big(2\log(1+x)+\dfrac{2x}{1+x}\Big)$
8. Para hallar la derivada de la función $\operatorname{arc\,tg}x$ (y el resto de las funciones inversas) utilizamos las propiedades algebraicas y el procedimiento llamado *derivación implícita.*

$$\begin{aligned}f(x)&=\operatorname{arc\,tg}x\\ \operatorname{tg}(f(x))&=x\end{aligned}$$

Dado que estas funciones son iguales, sus derivadas también son iguales. En el lado izquierdo, derivamos usando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{tg}(f(x)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) \\ (1+\operatorname{tg}^2 f(x))f'(x) &= 1 \\ (1+x^2)f'(x) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned} \qquad \square$$

TEOREMA 2.1.7 (DE L'HÔPITAL)

1. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ *y existe el límite* $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, *entonces*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ *y existe el límite* $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, *entonces*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

EJEMPLO 2.1.6

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{\operatorname{sen}x}{6x} = \frac{1}{6} \qquad \square$$

Otra importante aplicación de la derivada es que nos permite estudiar la monotonía de las funciones usando el siguiente resultado.

TEOREMA 2.1.8 *Si I es un intervalo y $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es creciente en I. Análogamente, si I es un intervalo y $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es decreciente en I.*

Infinitésimos e infinitos equivalentes. Una de las aplicaciones del cálculo de límites es el estudio de la equivalencia de funciones convergentes a 0 o a infinito.

DEFINICIÓN 2.1.9 *Dos funciones f y g son equivalentes en a si*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

La equivalencia de funciones es realmente importante en los casos en que las dos funciones converge a 0 o divergen a $\pm\infty$ en a, ya que en ellos la definición de equivalencia da indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ respectivamente.

Definición 2.1.10

1. *Decimos que la función $f(x)$ es un infinitésimo en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $f(x) \neq 0$ en un entorno reducido de a.*

2. *Decimos que la función $f(x)$ es un infinito en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.*

Ejemplo 2.1.7 Para ver que $\operatorname{sen} x$ y x son dos infinitésimos equivalentes necesitamos comprobar que

1. efectivamente son infinitésimos:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} x = 0;$$

2. y que son equivalentes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \overset{(L'H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1. \qquad \square$$

Ejemplo 2.1.8 Las funciones polinomicas son infinitos en $a = \infty$ y son equivalentes al monómio de mayor grado:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{a_n x^n} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} = 1 \qquad \square$$

En el teorema siguiente vemos cómo se puede utilizar la equivalencia de funciones en el cálculo de límites de funciones.

Teorema 2.1.11 *Sean f y g dos infinitésimos (resp. infinitos) equivalentes en a y $h(x)$ otra función definida en un entorno de a. Entonces: $\lim\limits_{x\to a} f(x)h(x)$ existe si y solo si $\lim\limits_{x\to a} g(x)h(x)$ existe, y en tal caso coinciden.*

Este teorema justifica la técnica que se conoce como *sustitución de infinitésimos o infinitos equivalentes* ya que, en la práctica, las equivalencias dadas en el enunciado, se convierten en igualdades, de forma que, en las condiciones del teorema, escribimos:

$$\lim_{x\to a} h(x)f(x) = \lim_{x\to a} h(x)g(x)$$

Los infinitésimos e infinitos también pueden sustituirse si aparecen dividiendo al resto de la función y en general tendríamos que, en las condiciones del teorema anterior, y para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)}{(f(x))^\alpha} = \lim_{x\to a} \frac{h(x)}{(g(x))^\alpha}$$

No podemos sustituir infinitésimos o infinitos en cualquier situación y, en particular, no se pueden sustituir si aparecen como sumando.

EJEMPLO 2.1.9 Demostramos a continuación las equivalencias más importantes; en la mayoría de los cálculos, usamos el teorema de L'Hôpital.

1. $\operatorname{tg} x \equiv x$ en 0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

   Hemos usado la equivalencia demostrada en el ejemplo 2.1.7.

2. $1-\cos x \equiv \dfrac{x^2}{2}$ en 0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2/2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

3. $\operatorname{arc\,sen} x \equiv x$ en 0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

4. $\operatorname{arc\,tg} x \equiv x$ en 0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

5. $\mathrm{e}^x - 1 \equiv x$ en 0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$$

6. $\log(1+x) \equiv x$ en 0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 0$$

El siguiente resultado nos permite construir otras equivalencias a partir de las demostradas en el ejemplo anterior.

TEOREMA 2.1.12 *Sean f y g dos infinitésimos (resp. infinitos) equivalentes en a y sea $h(x)$ continua en b y tal que $h(b) = a$. Entonces, $f\circ h$ y $g\circ h$ son infinitésimos (resp. infinitos) equivalentes en b.*

En este enunciado, queda implícito que las composiciones se pueden realizar en un entorno de b.

EJEMPLO 2.1.10 Las siguientes equivalencias son deducibles a partir de las equivalencias básicas y el resultado anterior Con estos resultados se pueden deducir otras equivalencias:

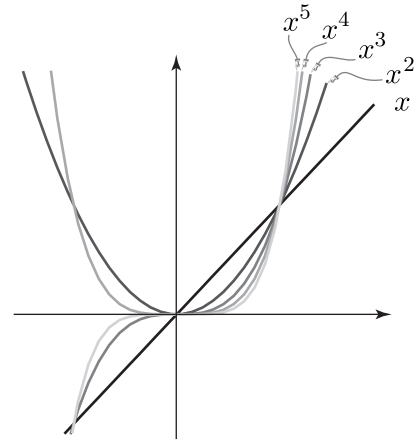
$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(x^2-1) &\equiv x^2-1 && \text{en } 1 \\ a^x - 1 &\equiv x\log a && \text{en } 0 \\ \log x &\equiv x-1 && \text{en } 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.11 La continuidad de la función exponencial y la propiedad de sustitución de infinitésimos, nos permite deducir la siguiente regla para la resolución de indeterminaciones del tipo (1^∞). Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$, entonces

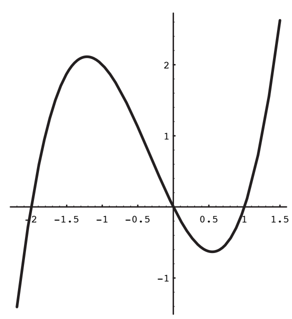
$$\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to 0} \exp(g(x)\log f(x)) = \lim_{x\to 0} \exp(g(x)(f(x)-1)) \qquad \square$$

2.1.1. Funciones elementales: gráficas

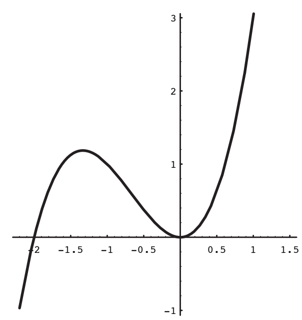
Cerramos este tema recogiendo las gráficas de las funciones elementales para que el alumno tenga un lugar de referencia cuando necesite recordarlas o resolver alguna duda. En el caso de las funciones polinómicas y de las racionales, solo hemos incluido algunos ejemplos. También añadimos las gráficas de otras funciones, que aunque no son elementales si será habitual su uso y por lo tanto también conviene visualizar rápidamente, como las funciones hiperbólicas.

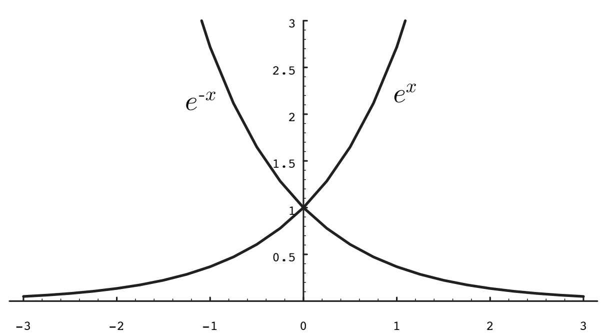


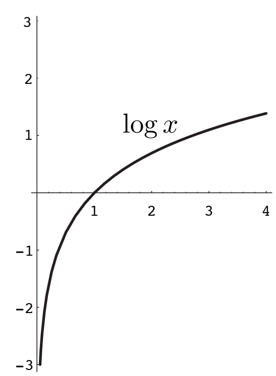
$x(x-1)(x+2)$



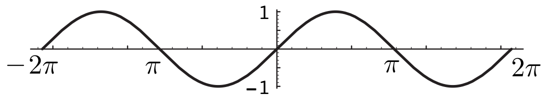
$x^2(x+2)$



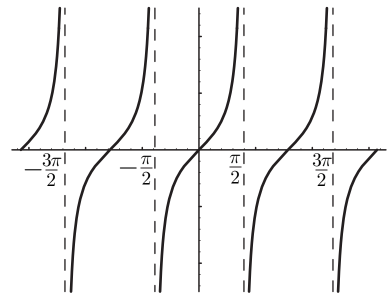




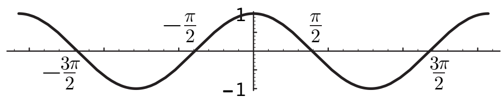
$\operatorname{sen} x$



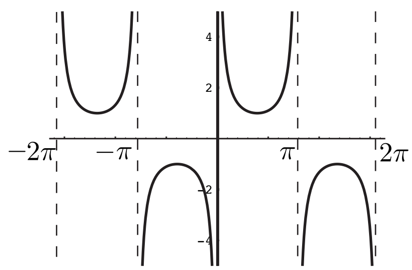
$\operatorname{tg} x$



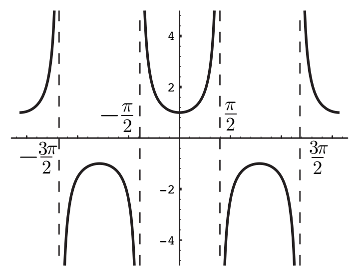
$\cos x$



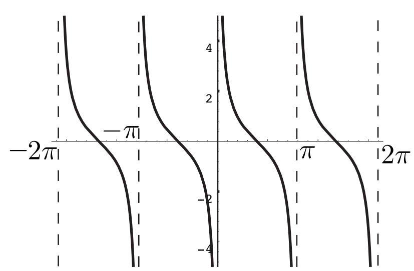
$\operatorname{cosec} x$



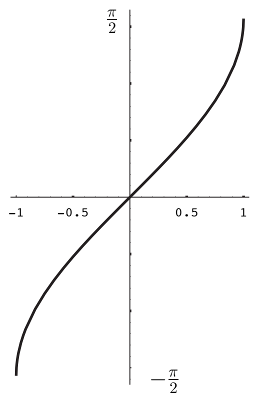
$\sec x$



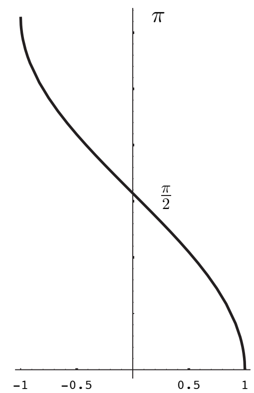
$\operatorname{cotg} x$



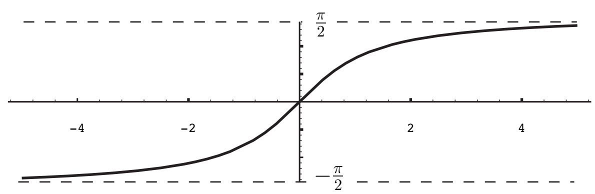
$\operatorname{arcsen} x$



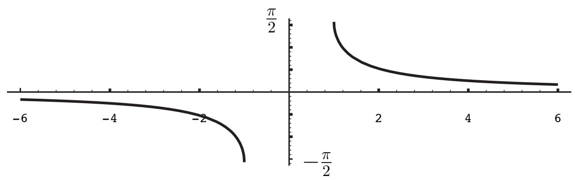
$\arccos x$



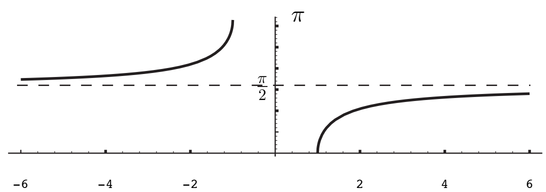
$\operatorname{arctg} x$



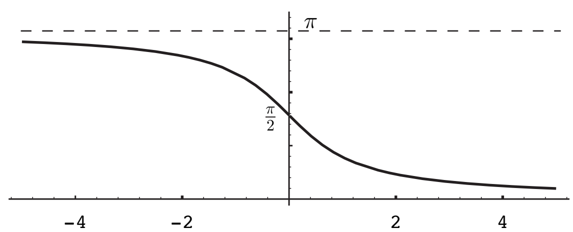
arccosec x

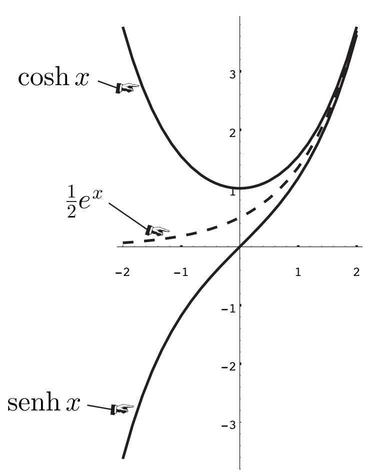


arcsec x

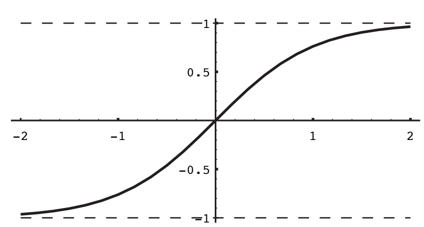


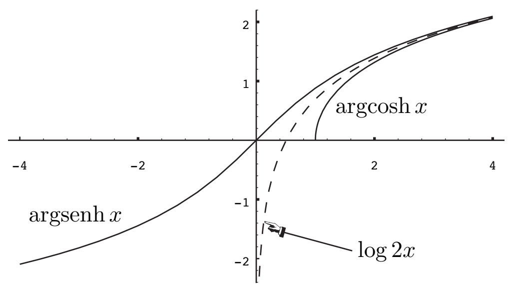
arccotg x

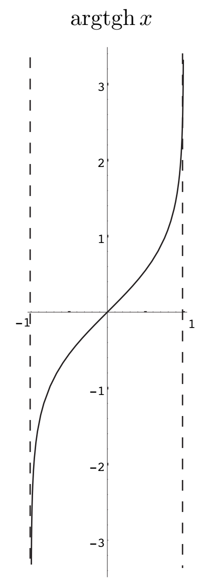


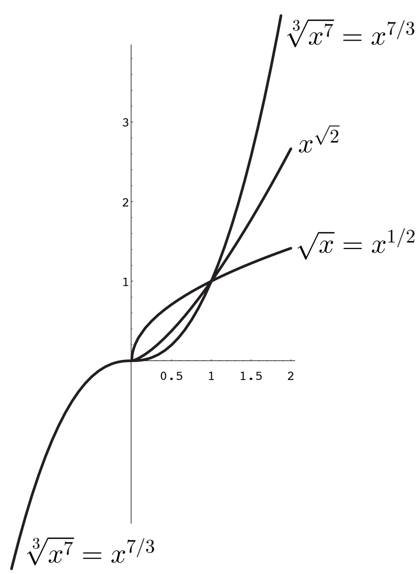


tgh x

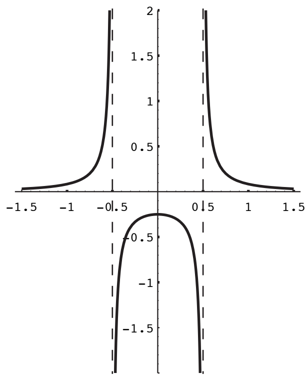



argcosh x
argsenh x
$\log 2x$

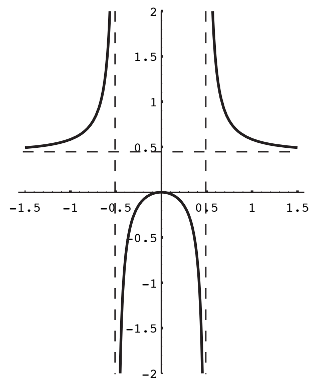

argtgh x


$\sqrt[3]{x^7} = x^{7/3}$
$x^{\sqrt{2}}$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$
$\sqrt[3]{x^7} = x^{7/3}$

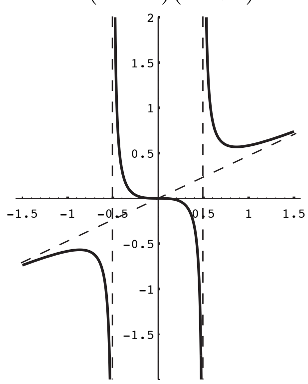
$$\frac{1}{4(2x-1)(2x+1)}$$



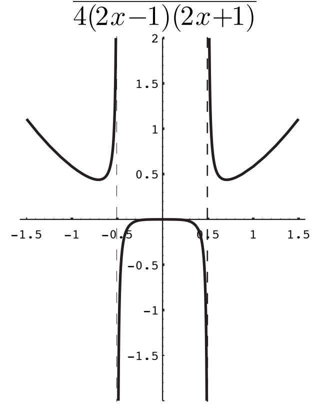
$$\frac{7x^2}{4(2x-1)(2x+1)}$$



$$\frac{7x^3}{4(2x-1)(2x+1)}$$



$$\frac{7x^4}{4(2x-1)(2x+1)}$$



LECCIÓN 2.2

Sucesiones

Una *sucesión* de números reales es una enumeración de los elementos de un conjunto de números reales, es decir, una regla que asocia un número real a cada número natural; por ejemplo:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \dots \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} & \dots \end{array} \tag{2.1}$$

Formalmente, una sucesión no es más que una aplicación $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Sin embargo, para las sucesiones es habitual escribir la variable como subíndice, es decir, a_n en lugar de $a(n)$. Por ejemplo, la sucesión definida en (2.1) se definiría

$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

Para representar la sucesión completa se utiliza la notación $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, aunque también es habitual escribir simplemente a_n si esta simplificación no conduce a error. Los números reales $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ son los *términos* de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y decimos que a_n es el *término n-ésimo*, el *término de índice* n o el término que ocupa la posición n.

Para simplificar, cuando hablamos de sucesiones de forma general, suponemos que $n \geq 0$, sin embargo, en ejemplos concretos, puede ser necesario considerar que los valores de la variable n empiezan en valor mayor. Por ejemplo, la sucesión

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

tiene sentido para $n \geq 2$.

Ejemplo 2.2.1

- Los términos de la sucesión $b_n = (-1)^n$ con $n \geq 0$ son

  $$1, -1, 1, -1, 1, \dots$$

  Como vemos, los números que ocupan una determinada posición pueden repetirse en otra. El conjunto de los términos de esta sucesión es $\{-1, 1\}$, sin embargo, en una sucesión no solo importa el conjunto de términos, sino la posición que ocupan en la enumeración.

- Los términos de la sucesión $c_n = \dfrac{2^n - 1}{n^2}$ con $n \geq 1$ son

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{2^1-1}{1^2}, & \dfrac{2^2-1}{2^2}, & \dfrac{2^3-1}{3^2}, & \dfrac{2^4-1}{4^2}, & \dots \\ \| & \| & \| & \| & \\ 1, & \dfrac{3}{4}, & \dfrac{7}{9}, & \dfrac{15}{16}, & \dots \end{array}$$

- Los términos de la sucesión $d_n = \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^n}$ con $n \geq 1$ son

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{1}{1^1}, & \dfrac{1+2}{2^2}, & \dfrac{1+2+3}{3^3}, & \dfrac{1+2+3+4}{4^4}, & \dots \\ \| & \| & \| & \| & \\ 1, & \dfrac{3}{4}, & \dfrac{2}{9}, & \dfrac{5}{128}, & \dots \end{array}$$

□

Hemos definido las sucesiones del ejemplo anterior dando una fórmula para el término n-ésimo en función de n, es decir, a partir del *término general*. Otra forma de definir sucesiones, de gran importación en computación, es mediante *recurrencias*, es decir, utilizando definiciones *recursivas*.

Ejemplo 2.2.2

- Consideremos la sucesión

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = n + a_{n-1} & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Como vemos, para determinar un término de la sucesión, debemos conocer los anteriores. Los términos de esta sucesión son

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \dots$$

En algunos caso, será fácil deducir una expresión para el término general a partir de la definición recursiva; por ejemplo, no es difícil deducir que

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Sin embargo, en la mayoría de los casos, esta conversión suele ser bastante complicada y deberemos estudiar las características de la sucesión a partir de su definición recursiva.

- En las definiciones recursivas, podemos utilizar más de un elemento previo de la sucesión. La siguiente sucesión, conocida como sucesión de Fibonacci, define cada término a partir de los dos inmediatamente anteriores.

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

  Los términos de esta sucesión son $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$ y su término general es

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n;$$

  la demostración de esta igualdad queda fuera de los contenidos de este curso, aunque sí será abordada en la asignatura de *Matemática Discreta*.

Definición 2.2.1 *Sea a_n una sucesión de números reales:*

1. *Decimos que a_n es* creciente *si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n.*
2. *Decimos que a_n es* decreciente *si $a_n \geq a_{n+1}$ para todo n.*

También hablaremos de sucesiones *estrictamente* crecientes o decrecientes si las desigualdades de las definiciones anteriores son estrictas, es decir, $<$ y $>$ respectivamente. En general, decimos que una sucesión es *monótona* si es creciente o decreciente.

Para estudiar la monotonía de una sucesión, podemos utilizar los siguientes métodos

- Utilizar las propiedades de la relación de orden para "transformar" la desigualdad $n < n+1$ en otra que relacione a_n con a_{n+1}.
- Comparar la diferencia $a_{n+1} - a_n$ con 0.
- Comparar el cociente $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ con 1.
- Utilizar el teorema 2.1.8 y la siguiente propiedad

  > Si f es una función creciente en $[N, \infty)$, entonces la sucesión $a_n = f(n)$ es creciente para $n \geq N$.

Usaremos uno u otro método dependiendo de la definición concreta de la sucesión.

Ejemplo 2.2.3 Vamos a analizar la monotonía de las sucesiones que hemos introducido como ejemplos hasta ahora.

1. La sucesión $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ es estrictamente decreciente:

$$\begin{aligned}
n &< n+1 \\
n+1 &< n+2 \quad \text{(Orden cerrado para la suma)} \\
\frac{n+1}{n+2} &< 1 \quad \text{(Orden cerrado para el producto)} \\
\frac{1}{n+2} &< \frac{1}{n+1} \quad \text{(Orden cerrado para el producto)} \\
a_{n+1} &< a_n
\end{aligned}$$

2. La sucesión $b_n = (-1)^n$ no es monótona: $b_1 = -1 < b_2 = 1$, pero $b_2 = 1 > b_3 = -1$.

3. La sucesión $d_n = \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^n}$ es estrictamente decreciente:

$$\begin{aligned}
\frac{d_{n+1}}{d_n} &= \frac{(1+2+3+\cdots+n+(n+1))n^n}{(1+2+3+\cdots+n)(n+1)^{n+1}} \\
&= \frac{2(n+1)(n+2)n^n}{2n(n+1)(n+1)^{n+1}} \\
&= \frac{n+2}{n(n+1)}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&< 1\cdot 1^n = 1
\end{aligned}$$

Para la segunda igualdad hemos usado la fórmula de la suma de los n primeros números naturales que demostramos en el ejemplo 1.3.8. Además, para el último paso, hemos utilizado que $\dfrac{n+2}{n(n+1)} < 1$, lo cual es cierto para todo $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
n &\geq 2 \\
n^2 &> 2 \\
n+n^2 &> n+2 \\
n(n+1) &> n+2 \\
1 &> \frac{n+2}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

Dado que $\dfrac{d_{n+1}}{d_n} < 1$, entonces $d_{n+1} < d_n$ y, por lo tanto, d_n es estrictamente decreciente si $n \geq 2$.

4. La sucesión $c_n = \dfrac{2^n - 1}{n^2}$ es creciente si $n \geq 2$. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{2^x - 1}{x^2}$ para $x \geq 2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2^x - 1}{x^2} \\ f'(x) &= \frac{2^x x^2 \log 2 - 2x(2^x - 1)}{x^4} \\ f'(x) &= \frac{2^x}{x^3}(x \log 2 - 2) + \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

"Ordenar" los factores y términos de $f'(x)$ ha sido la parte complicada del proceso. Si $x \geq 2$, entonces $x > \dfrac{2}{\log 2}$ y $x \log 2 - 2 > 0$; además, $2^x > 0$ y $x^3 > 0$, y por lo tanto $f'(x) > 0$ si $x \geq 2$. En consecuencia, f es estrictamente creciente en $[2, +\infty)$ y a_n lo es si $n \geq 2$. $\square$

DEFINICIÓN 2.2.2 *Decimos que una sucesión a_n está acotada si existe un número real M tal que $|a_n| \leq M$.*

Siguiendo esta definición, M es una *cota superior* de la sucesión y $-M$ es una *cota inferior*. Normalmente, determinaremos estas cotas por separado y hablaremos de sucesiones acotadas *superiormente* o *inferiormente*.

EJEMPLO 2.2.4

1. La sucesión $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ está acotada, ya que trivialmente $a_n > 0$ y $a_n < 1$.
2. La sucesión $b_n = (-1)^n$ está acotada, ya que $|(-1)^n| = 1$.
3. La sucesión $d_n = \dfrac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^n}$ está acotada. Trivialmente, $a_n > 0$ y además,
$$\frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^n} < \frac{n \cdot n}{n^n} = \frac{n^2}{n^n} < 1$$

2.2.1. Límites de sucesiones.

Las sucesiones se utilizan para describir la forma en la que nos acercamos o aproximamos a un número real que sea solución de un determinado problema. La noción de acercamiento o aproximación se formaliza con los conceptos de límite y convergencia.

Definición 2.2.3 *Decimos que* $\ell \in \mathbb{R}$ *es el* límite *de la sucesión* a_n *si para todo* $\varepsilon > 0$*, existe un número natural* N *tal que* $|a_n - \ell| < \varepsilon$ *para todo* $n \geq N$ *(véase la figura 2.1). En tal caso escribimos* $\lim a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ *y decimos que* a_n *es* convergente *y* converge *a* ℓ*.*

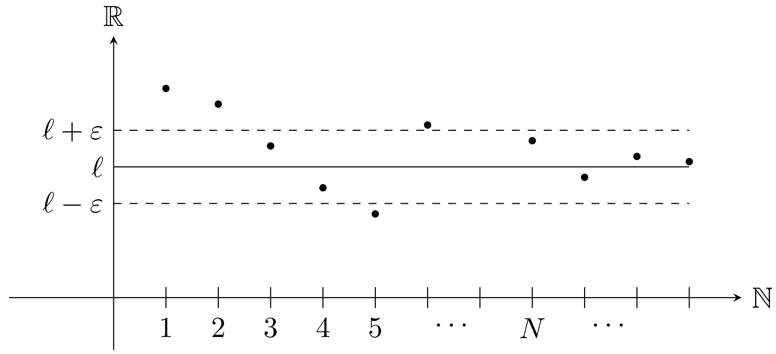


Figura 2.1: Si $\lim a_n = \ell$ entonces para $n \geq N$ los términos de la sucesión distan de ℓ menos de ε unidades.

Igual que para funciones, también podemos obtener límites cuyo valor sea $+\infty$ o $-\infty$; no incluimos las definiciones detalladas ya que suponemos que son conocidas por el alumno y porque no necesitaremos trabajar con ellas. Si una sucesión no es convergente, decimos que es *divergente* y hablaremos de *divergencia a infinito* o a *menos infinito* si el límite es $+\infty$ o $-\infty$ respectivamente.

La definición de límite no da ningún método para calcularlos, solo establece la propiedad que debemos verificar para comprobar si un número es o no límite. En este caso, las propiedades algebraicas y los límites de funciones serán las herramientas básicas para el estudio de límites de sucesiones. No detallamos aquí las propiedades algebraicas, ya que deben ser conocidas por el alumno y coinciden con las enunciadas para funciones en la proposición 2.1.4, pero sí introducimos el siguiente resultado que relación límites de sucesiones y límites de funciones; en el enunciado, utilizamos el conjunto $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, que se denomina $\mathbb{R}$ *ampliado.*

Teorema 2.2.4 (Caracterización secuencial) *Para todo* $a, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$*:*
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ *si y solo si: para toda sucesión* $\{x_n\} \subset D$*, con* $x_n \neq a$ *para todo* n*, y* $\lim x_n = a$*, se verifica que* $\lim f(x_n) = \ell$*.*

Si trabajamos con funciones continuas, entonces podemos sustituir ℓ por $f(a)$ en el teorema. Este resultado tiene importantes consecuencias prácticas respecto del cálculo de límites, usado conjuntamente con la propiedad de continuidad de las funciones definidas en términos de funciones elementales.

Ejemplo 2.2.5
$$\lim \operatorname{sen} \frac{\pi n - 1}{2 + 3n} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
ya que $\lim \frac{\pi n - 1}{2 + 3n} = \frac{\pi}{3}$, y $\lim\limits_{x \to \pi/3} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$, por ser continua la función seno. □

Ejemplo 2.2.6 También podemos usar la caracterización secuencial para demostrar que una función no tiene límite en algún punto. Por ejemplo, la función $\operatorname{sen} x$ NO tiene límite en $+\infty$, es decir, *"* $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$ *no existe"*. Para probar esto, tomamos dos sucesiones divergentes a $+\infty$,
$$x_n = 2\pi n \qquad\qquad y_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$
y dado que
$$\lim \operatorname{sen} x_n = \lim 0 = 0 \neq 1 = \lim 1 = \lim \operatorname{sen} y_n,$$
podemos concluir que la función $\operatorname{sen} x$ no tiene límite en $+\infty$. □

Otra importante consecuencia de la caracterización secuencial es que podemos deducir límites de sucesiones a partir de límites de funciones calculados con técnicas específicas, como la regla de L'Hôpital.

Ejemplo 2.2.7 Para calcular el límite de sucesiones $\lim \frac{\log n}{n}$, consideramos el límite de funciones $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\log x}{x}$, que calculamos usando la regla de L'Hôpital:
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$
Si tomamos $x_n = n$, se verifica que $\lim x_n = \lim n = +\infty$ y por la caracterización secuencial, sustituyendo x por $x_n = n$, obtenemos que $\lim \frac{\log n}{n} = 0$. □

Obsérvese que en el ejemplo anterior, no se ha aplicado la regla de L'Hôpital en el límite de sucesiones sino en un límite de funciones. Es decir, cambiar la n por la x no es un simple cambio de letra, con él representamos el cambio de considerar la expresión como función en lugar de como sucesión.

Recordamos a continuación la relación entre las propiedades de convergencia, monotonía y acotación. En primier lugar, no es difícil deducir que toda sucesión convergente está acotada, pero no es cierto que, en general, las sucesiones acotadas sean convergentes. En el tema anterior, enunciamos el teorema 1.2.1 que establecía la propiedad que diferencia al conjunto de los números reales del de los números racionales: *toda sucesión monónota y acotada de números reales es convergente.* A lo largo del tema, iremos viendo distintas consecuencias de esta propiedad que extendemos y detallamos en el siguiente resultado.

Proposición 2.2.5

- *Toda sucesión creciente y acotada superiormente es convergente.*
- *Toda sucesión decreciente y acotada inferiormente es convergente.*
- *Toda sucesión creciente y no acotada superiormente diverge a $+\infty$.*
- *Toda sucesión decreciente y no acotada inferiormente diverge a $-\infty$.*

Ejemplo 2.2.8 Consideramos la sucesión a_n definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{a_n} & \text{si} \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Vamos a demostrar que a_n es decreciente, acotada inferiormente y que su límite es $\sqrt{2}$. En primer lugar, demostramos por inducción que la sucesión está acotada inferiormente por 1 y superiormente por 2:

(i) $2 \geq a_0 = 2 > 1$.

(ii) Supongamos que $1 \leq a_k \leq 2$ y demostremos la desigualdad para a_{k+1}:

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \leq a_k \leq 2 \arrow[dl, "\text{(Inversos)}"'] \arrow[dr, "\text{(División por 2)}"] & \\
\frac{1}{2} \leq \dfrac{1}{a_k} \leq 1 \arrow[dr] & & \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{a_k}{2} \leq 1 \arrow[dl, "\text{(Suma miembro a miembro)}"] \\
 & 1 \leq \dfrac{a_k}{2} + \dfrac{1}{a_k} \leq 2 &
\end{tikzcd}$$

$$1 \leq a_{k+1} \leq 2$$

Por lo tanto, efectivamente $1 \leq a_n \leq 2$ para todo n.

Para demostrar el decrecimiento de la sucesión, observamos en primer lugar que

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n}{2} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n}{2} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n^2 - 2}{2a_n}$$

Por lo tanto, solo tenemos que demostrar que $a_n^2 \geq 2$ para todo n. Esta desigualdad la vamos a demostrar también por inducción.
Trivialmente, $a_0^2 = 4 > 2$; si $a_k^2 \geq 2$, entonces

$$a_{k+1}^2 = \left(\frac{a_k}{2} + \frac{1}{a_k}\right)^2 = \frac{a_k^2}{4} + \frac{1}{a_k^2} + 1 \overset{(*)}{\geq} 2\frac{a_{n-1}}{2}\frac{1}{a_{n-1}} + 1 = 2$$

La desigualdad $(*)$ es consecuencia de que $x^2 + y^2 \geq 2xy$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, ya que

$$\begin{aligned}(x-y)^2 &\geq 0\\ x^2 - 2xy + y^2 &\geq 0\\ x^2 + y^2 &\geq 2xy\end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión a_n es decreciente y acotada y en consecuencia es convergente. Supongamos que $\ell = \lim a_n$; entonces a_{n+1} también converge a ℓ y por lo tanto:

$$\ell = \lim a_{n+1} = \lim \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{\ell} = \frac{\ell^2 + 2}{2\ell}$$

y por lo tanto el número ℓ verifica que $\ell^2 = 2$, es decir, $\ell = \sqrt{2}$. □

Ejemplo 2.2.9 La sucesión

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es una sucesión creciente y acotada y en consecuencia es convergente. El límite de esta sucesión es un número irracional y *transcendente* (es decir, no es raíz de ningún polinomio de coeficientes racionales). Así se define el número denotado por e y que es base del logaritmo neperiano y de la función exponencial. Podemos aproximar el valor de este número tomando valores suficientemente altos de n; en las lecciones siguientes aprenderemos otras formas más eficientes para hacerlo. En concreto, las cinco primeras cifras significativas del número e son: $\mathrm{e} \approx 2.7182\ldots$. □

Ejemplo 2.2.10 La sucesión

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

es una sucesión decreciente y acotada y, en consecuencia, convergente. El límite se denomina *constante de Euler*, se denota por γ y su valor aproximado es $0.577\ldots$. □

De la constante γ de Euler se conocen muchas menos propiedades que para el número e o el número π; por ejemplo, no se sabe aún si este número es racional. También se puede utilizar para calcular otros límites.

Ejemplo 2.2.11

$$\lim \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\log n} = \lim \frac{a_n + \log n}{\log n} = \lim \left(\frac{a_n}{\log n} + 1 \right) = \left(\frac{\gamma}{\infty} + 1 \right) = 1 \qquad \square$$

Vemos en el resto de la sección distintos resultados que justifican otras tantas técnicas para el estudio de límites de sucesicones.

Teorema 2.2.6 (Teorema de Compresión)

1. *Sean a_n, b_n y c_n tres sucesiones tales que $a_n \le c_n \le b_n$ y $\lim a_n = \lim b_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$; entonces, $\lim c_n = \ell$.*
2. *Sea a_n una sucesión convergente a 0 y b_n una sucesión acotada; entonces, $\lim a_n b_n = 0$.*

Ejemplo 2.2.12 Para estudiar la convergencia de la sucesión

$$c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+k} = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}$$

buscamos dos sucesiones convergentes y con el mismo límite que permitan acotar el término general de la sucesión c_n:

$$0 \le \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n} \le$$
$$\le \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+1} + \cdots + \frac{1}{n^2+1} = n\frac{1}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1}$$

La primera desigualdad es trivial, ya que cada sumando es positivo y la segunda se deduce de que cada sumando es menor que el primero, ya que:

$$\begin{gathered} n \ge 1 \\ n^2+n \ge n^2+1 \\ \frac{1}{n^2+n} \le \frac{1}{n^2+1}. \end{gathered}$$

Dado que $\lim 0 = 0 = \lim \dfrac{n}{n^2+1}$, podemos deducir, aplicando el primer apartado del teorema 2.2.6, que $\lim c_n = 0$. $\square$

Ejemplo 2.2.13 Aplicando el segundo apartado del teorema 2.2.6, podemos deducir que

$$\lim \frac{\operatorname{sen} n}{n} = 0,$$

pues la sucesión $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$ se puede expresar como producto de una sucesión acotada $(\operatorname{sen} n)$ por otra sucesión $(\frac{1}{n})$ convergente a 0. $\square$

El siguiente resultado se aplica en el cálculo de límites de sucesiones y se asemeja bastante a la regla de L'Hôpital utilizada en el cálculo de límites de funciones.

TEOREMA 2.2.7 (CRITERIO DE STÖLTZ-CESARO) *Sea b_n una sucesión creciente y divergente a $+\infty$ y sea a_n otra sucesión: si el límite*

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

existe, entonces el límite $\lim \frac{a_n}{b_n}$ *también existe y ambos coinciden.*

EJEMPLO 2.2.14 Consideremos la sucesión $\dfrac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2}$, que verifica las condiciones del teorema 2.2.7. Entonces

$$\lim \frac{1 + 2 + \ldots n}{n^2} = \lim \frac{n + 1}{(n + 1)^2 - n^2} = \lim \frac{n + 1}{2n + 1} = \frac{1}{2}. \qquad \square$$

Tal y como hemos hecho en este ejemplo, es habitual utilizar el teorema de Stöltz como una igualdad:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

Sin embargo, debemos tener en cuenta que, si al estudiar el límite del lado derecho, deducimos que no existe, entonces *no podemos concluir* que el límite inicial tampoco exista; en estas situaciones debemos desestimar el uso de este criterio e intentar otro método.

EJEMPLO 2.2.15 Sean $a_n = (-1)^n$ y $b_n = n$ (b_n es creciente y divergente a $+\infty$); en este caso, la sucesión $\dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ es la sucesión $\{-2, 2, -2, \dots\}$ que es divergente y, sin embargo, la sucesión $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{(-1)^n}{n}$ es convergente a 0.

$\square$

El estudio de la convergencia y el cálculo del límite de una sucesión está relacionado con el comportamiento de los términos de la sucesión *a largo plazo*; por tanto, no es necesario que las condiciones que se exigen en los criterios anteriores se verifiquen para todos los términos de la sucesión, es suficiente que esto ocurra a partir de un término determinado. Por ejemplo, si un criterio exige que la sucesión sea creciente, no importará que los primero términos no verifican esta propiedad, será suficiente si la sucesión es creciente partir de un término.

Igual que para funciones, también podemos introducir la noción de equivalencia de infinitésimos e infinitos en sucesiónes. Estas equivalencias son una herramienta muy útil para el cálculo de límites y para el estudio de *series numéricas* que veremos en la lección siguiente.

Definición 2.2.8

1. *Dos sucesiones* a_n *y* b_n*, son equivalentes si* $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$*.*

2. *La sucesión* a_n *es un* infinitésimo *si* $\lim a_n = 0$ *y* $a_n \neq 0$ *para todo* $n \geq N$*.*

3. *La sucesión* a_n *es un* infinito *si* $\lim a_n = +\infty$*.*

La caracterización secuencial de límite de función, permite convertir las equivalencias básicas entre funciones en equivalencias entre sucesiones.

- $\operatorname{sen} x_n \equiv x_n$ si $\lim x_n = 0$.
- $\operatorname{tg} x_n \equiv x_n$ si $\lim x_n = 0$.
- $1 - \cos x_n \equiv \frac{x_n^2}{2}$ si $\lim x_n = 0$.
- $\operatorname{arc\,sen} x_n \equiv x_n$ si $\lim x_n = 0$.
- $\operatorname{arc\,tg} x_n \equiv x_n$ si $\lim x_n = 0$.
- $\mathrm{e}^{x_n} - 1 \equiv x_n$ si $\lim x_n = 0$.
- $\log x_n \equiv x_n - 1$ si $\lim x_n = 1$.

Por ejemplo, la equivalencia

$$\operatorname{sen} \frac{1}{n} \quad \equiv \quad \frac{1}{n}$$

es válida, ya que $\lim 1/n = 0$.

Ejemplo 2.2.16

$$\lim \left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{2n} = \lim \exp\left(2n \log\left(1 + \frac{1}{3n-1}\right)\right) =$$
$$= \lim \exp\left(2n\frac{1}{3n-1}\right) = \mathrm{e}^{2/3} \qquad \square$$

Aparte de las equivalencias deducidas de la equivalencias de funciones, disponemos de equivalencias específicas entre sucesiones.

Teorema 2.2.9 (Formula de Stirling)

$$\lim \frac{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n!} = 1$$

Es decir, las sucesiones $a_n = n!$ *y* $b_n = n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$ *son infinitos equivalentes.*

Ejemplo 2.2.17 Para calcular el límite de la sucesión $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ utilizamos la fórmula de Stirling, el criterio de Stöltz y algunas manipulaciones algebraicas:

$$\begin{aligned}
\lim \frac{n!}{n^n} &= \lim \frac{n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n^n} \quad \text{(F. de Stirling)}\\
&= \lim \frac{\sqrt{2\pi n}}{\mathrm{e}^n}\\
&= \lim \frac{\sqrt{2\pi(n+1)}-\sqrt{2\pi n}}{\mathrm{e}^{n+1}-\mathrm{e}^n} \quad \text{(Crit. de Stöltz)}\\
&= \lim \frac{(\sqrt{2\pi(n+1)}-\sqrt{2\pi n})(\sqrt{2\pi(n+1)}+\sqrt{2\pi n})}{\mathrm{e}^n(\mathrm{e}-1)(\sqrt{2\pi(n+1)}+\sqrt{2\pi n})}\\
&= \lim \frac{2\pi}{\mathrm{e}^n(\mathrm{e}-1)(\sqrt{2\pi(n+1)}-\sqrt{2\pi n})} = \left(\frac{2\pi}{\infty}\right) = 0
\end{aligned}$$

En la cuarta igualdad, hemos multiplicado numerador y denominador por la *expresión conjugada* a la que aparecía en el numerador; el objetivo es eliminar las raíces y la indeterminación $(\infty - \infty)$. □

Ejemplo 2.2.18 El cálculo hecho en el ejemplo 2.2.10 demuestra que las sucesiones $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ y $\log n$ son infinitos equivalentes. □

Aunque habitualmente utilizamos las equivalencias para “sustituir” funciones arbitrarias por polinomios, en algunos ocasiones puede que necesitemos introducir otro tipo de funciones cuyas propiedades faciliten las simplificaciones posteriores mejor que los polinomios. Este es el caso de la función logaritmo, que puede ayudar a eliminar exponentes. Vamos a utilizar esta idea en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.19 Una primera evaluación del límite que calculamos a continuación conduce a una indeterminación $(\infty - \infty)$.

$$\begin{aligned}
\lim(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) &= \lim \sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{\frac{n+1}{n}} - 1\right) \\
&= \lim \sqrt[3]{n} \log \sqrt[3]{\frac{n+1}{n}} \\
&= \lim \frac{1}{3} \sqrt[3]{n} \log \frac{n+1}{n} \\
&= \lim \frac{1}{3} \sqrt[3]{n} \left(\frac{n+1}{n} - 1\right) \\
&= \lim \frac{1}{3} \sqrt[3]{n} \frac{1}{n} \\
&= \lim \frac{1}{3n^{2/3}} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0
\end{aligned}$$

Tanto en la segunda como en la cuarta igualdad hemos utilizado la equivalencia

$$\log x \equiv x - 1, \quad \text{en } 1;$$

primero para poder "eliminar" el exponente $1/3$ y después para "eliminar" la función logaritmo. □

Ejemplo 2.2.20 Otra utilidad de la sustitución de sucesiones equivalentes es la simplificación de las sucesiones en el cálculo de límites para poder aplicar otras técnicas. Por ejemplo, el método adecuado para calcular el límite

$$\lim \frac{2^n - 1}{n^2}$$

es el criterio de Stöltz. Sin embargo, si lo aplicamos directamente, observamos que el límite resultante no se simplifica fácilmente por culpa del sumando -1 del numerador. Para arreglar esto, vamos a utilizar la siguiente equivalencia de infinitos: si $\lim x_n = +\infty$, entonces $x_n + a \equiv x_n$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\lim \frac{2^n - 1}{n^2} = \lim \frac{2^n}{n^2} = \lim \frac{2^{n+1} - 2^n}{(n+1)^2 - n^2} = \lim \frac{2^n \cancel{(2-1)}}{2n+1} = \\
= \lim \frac{2^{n+1} - 2^n}{2(n+1) + 1 - 2n - 1} = \lim 2^{n-1} = \infty
\end{aligned}$$ □

LECCIÓN 2.3

Introducción al cálculo numérico

Hemos presentado el conjunto de los números reales como un cuerpo ordenado con la propiedad de que *toda sucesión monótona y acotada es convergente*. Esta propiedad se conoce como *completitud*, y el cuerpo de los reales es el único cuerpo que la tiene. Por lo tanto, esta es la propiedad que permite construir o describir a los números reales; concretamente, podemos establecer un propiedad un poco más fuerte y que es la que realmente usamos: *todo número real puede ser construido como límite de una sucesión (monótona) de números racionales.* Por ejemplo, hemos definido el número e como límite de la sucesión $(1 + {}^{1}\!/_{n})^n$.

La representación decimal de los números, no es más que una forma de definir una sucesión de números racionales cuyo límite es el número deseado. Por ejemplo, si dividimos 1 entre 3, vamos generando una sucesión que sabemos convergente a ${}^{1}\!/_{3}$:

$$0.3, \quad 0.33, \quad 0.333, \quad 0.3333, \quad \cdots \to \frac{1}{3}$$

Algoritmos como el de la raíz cuadrada, tienen el mismo objetivo, generando dígito a dígito obtenemos la sucesión que converge a la raíz. Sin embargo, en general, no es posible describir fácilmente la sucesión de dígitos.

Aun así, en la mayoría de las aplicaciones prácticas, al trasladar las soluciones a situaciones reales, debemos hacerlo con resultados aproximados. Para ello, se construye una sucesión que converja a la solución y se elige el primer término que alcance la precisión deseada. Dependiendo de la aplicación, se buscará una mayor o menor exactitud; si α es un número real (magnitud) aproximado por el número racional r, la precisión o exactitud se expresa por un número ε tal que

$$|\alpha - r| < \varepsilon.$$

Se introduce el valor absoluto porque la aproximación puede ser por *exceso* o por *defecto*. La forma más habitual para expresar este error será mediante números del tipo

$$\varepsilon = \frac{1}{2} 10^{-\mathrm{d}}, \quad \mathrm{d} \in \mathbb{N},$$

ya que así se garantiza que la expresión decimal del número α esté redondeada correctamente en el d-ésimo decimal.

2.3.1. Resolución aproximada de ecuaciones

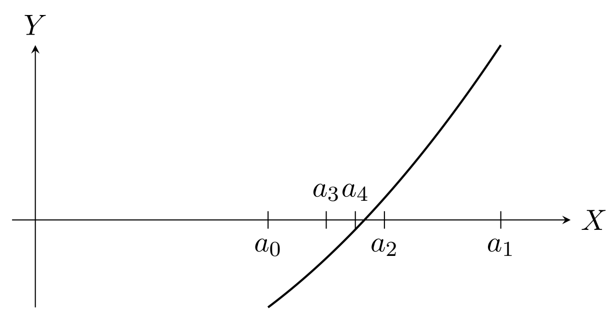
Nos planteamos en esta sección la resolución de ecuaciones, es decir, vamos a describir métodos para aproximar las *raíces* de funciones reales continuas,

$$f(\alpha) = 0$$

Método de las bisecciones. El método más simple se deduce de un importante resultado sobre funciones continuas:

TEOREMA 2.3.1 (DE BOLZANO) *Si $f(a)f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Este resultado se traduce en la característica gráfica más importante de las funciones continuas: su grafo, en un intervalo, se puede trazar "sin levantar el bolígrafo". El método de las bisecciones comienza localizando dos puntos sobre los cuales la función tome signos distintos y que por lo tanto nos dan una cota superior o inferior de la raíz; si tomamos ahora el punto medio, la función tomará en él un signo positivo o negativo y lo podremos utilizar para mejorar la cota superior o inferior de la raíz.



Si dividimos sucesivamente por el punto medio del intervalo que contiene la raíz, determinamos una sucesión cuyo límite es esta raíz. La sucesión así descrita es:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n + a_{n-1}}{2} & \text{si } f(a_n)f(a_{n-1}) < 0 \\ \dfrac{a_n + a_{n-2}}{2} & \text{si } f(a_n)f(a_{n-2}) < 0 \\ a_n & \text{si } f(a_n)f(a_{n-1})f(a_{n-2}) = 0 \end{cases}$$

Para cada n, determinamos un intervalo con uno de sus extremos en a_n, con amplitud $\dfrac{a_1 - a_0}{2^{n-1}}$ y que contiene a una raíz de f. Por lo tanto, si α es el límite de esta sucesión,

$$|\alpha - a_n| \leq \frac{a_1 - a_0}{2^{n-1}}.$$

Ejemplo 2.3.1 Vamos a construir los términos de la sucesión anterior hasta conseguir aproximar una solución de

$$x^2 - 2 = 0$$

con un error menor $\frac{1}{2}10^{-2}$. Consideramos la función $f(x) = x^2 - 2$; dado que $f(1) = -1 < 0$ y $f(2) = 2 > 0$, elegimos $a_0 = 1$, $a_1 = 2$; de esta forma, necesitaremos hacer 9 divisiones para conseguir el error deseado:

$$\frac{a_1 - a_0}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{200} \iff 2^{n-1} > 200 \iff n > 9$$

Los siguientes términos son:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1, \quad f(1) < 0 \\
a_1 &= 2, \quad f(2) > 0 \\
a_2 &= \frac{3}{2}, \quad f(3/2) > 0 \\
a_3 &= \frac{a_0 + a_2}{2} = \frac{5}{4}, \quad f(5/4) < 0 \\
a_4 &= \frac{a_2 + a_3}{2} = \frac{11}{8}, \quad f(11/8) < 0 \\
a_5 &= \frac{a_4 + a_2}{2} = \frac{23}{16}, \quad f(23/16) > 0 \\
a_6 &= \frac{a_5 + a_4}{2} = \frac{45}{32}, \quad f(45/32) < 0 \\
a_7 &= \frac{a_6 + a_5}{2} = \frac{91}{64}, \quad f(91/64) > 0 \\
a_8 &= \frac{a_7 + a_6}{2} = \frac{181}{128}, \quad f(181/128) < 0 \\
a_9 &= \frac{a_8 + a_7}{2} = \frac{363}{256}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{363}{256}$ nos da una aproximación hasta la segunda cifra decimal de la solución positiva de la ecuación, es decir, de $\sqrt{2}$,

$$\sqrt{2} \approx \frac{363}{256} \approx 1.41 \qquad \square$$

Método de Newton. El método de las bisecciones no es computacionalmente eficiente, es decir, son necesarios términos muy altos para conseguir una buena precisión. El método de Newton que presentamos ahora construye una sucesión que, si es convergente, converge más rápidamente a la raíz de la función dada.

La figura 2.2 muestra gráficamente como se construye la sucesión que converge a una raíz de una función f, es decir, $\lim a_n = \alpha$, siendo $f(\alpha) = 0$. Dado un término

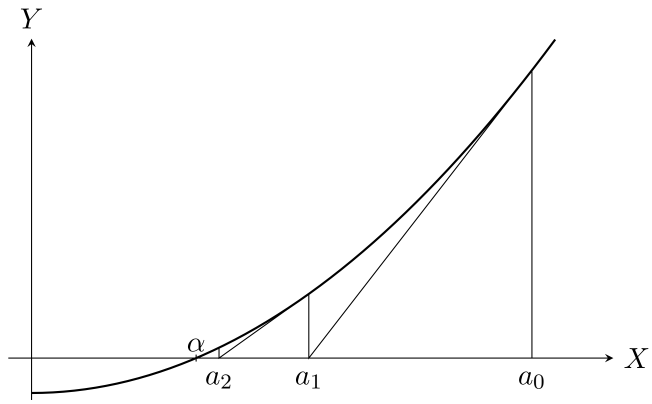


Figura 2.2: Representación gráfica del método de Newton.

a_n de la sucesión, para construir el siguiente trazamos la recta tangente en el punto $(a_n, f(a_n))$,

$$Y - f(a_n) = f'(a_n)(X - a_n); \tag{2.2}$$

el siguiente elemento de la sucesión es la abscisa del punto de corte de esta recta con el eje OX; por lo tanto, si hacemos $Y = 0$ y $X = a_{n+1}$ en (2.2), podemos despejar a_{n+1} para obtener la definición recursiva de a_n:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} \tag{2.3}$$

Ejemplo 2.3.2 Para determinar una solución de la ecuación $x^2 - 2 = 0$, tomamos la función $f(x) = x^2 - 2$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2 \\ f'(x) &= x^2 - 2 \\ a_0 &= 2 \\ a_{n+1} &= a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} = a_n - \frac{a_n^2 - 2}{2a_n} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

Esta es la sucesión que estudiamos en el ejemplo 2.2.8 y en él vimos que efectivamente es convergente a $\sqrt{2}$. □

En general, la sucesión (2.3) puede no ser convergente para algunas elecciones de a_0; además, determinados valores podrían conducir a una sucesión mal definida si, tras N iteraciones, $f'(a_N) = 0$. En la práctica, mediante el método de las bisecciones, buscaremos un valor para a_0 suficientemente cerca de la raíz.

Para estimar el error al tomar un término a_n de la sucesión como raíz de la función, usaremos la siguiente propiedad:

Si $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$, entonces $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

Sin embargo, esta propiedad solo es aplicable si $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right)$ toma valores cercanos a 1 en un entorno de la raíz y no será admisible si dicha derivada toma valores cercanos a 0.

Ejemplo 2.3.3 Vamos a calcular los primeros términos de la sucesión del ejemplo 2.3.2,

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_{n+1} &= \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

cuyo límite es $\sqrt{2}$, y el error asociado a cada término:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3/2 \\ a_2 &= \frac{17}{12}, & a_2 - a_1 &= \frac{1}{12} \\ a_3 &= \frac{577}{408}, & a_3 - a_2 &= \frac{1}{408} < \frac{1}{2}10^{-2} \\ a_4 &= \frac{665857}{470832}, & a_4 - a_3 &= \frac{1}{470832} < \frac{1}{2}10^{-5} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a_2 = \dfrac{17}{12}$ nos da dos decimales exactos; con el método de las bisecciones necesitamos 9 términos para conseguir la misma precisión. Con solo un término más, $a_3 = \dfrac{577}{408}$, conseguimos cinco decimales exactos. Por lo tanto,

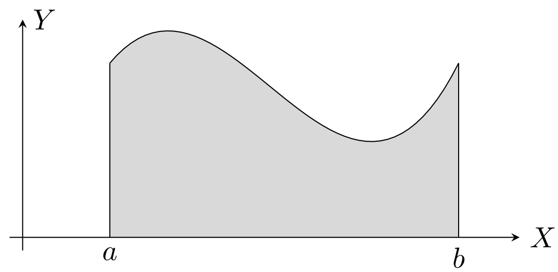
$$\sqrt{2} \approx \frac{577}{408} \approx 1.41421 \qquad \square$$

El siguiente dígito de la división 577/408 es 5, sin embargo debemos mantener en 1 el quinto dígito decimal, tal y como establece el método de Newton. De hecho, el sexto dígito de $\sqrt{2}$ es 3, lo que prueba que efectivamente el quinto dígito debe mantenerse en 1. $\square$

2.3.2. Integración numérica

El tema 6 está dedicado a las aplicaciones de la integral, tanto de una como de dos variables. Sin embargo, el alumno ya debe conocer la interpretación geométrica más básica de la integral de una variable en un intervalo cerrado $[a, b]$, que es lo que vamos a utilizar para describir los dos métodos de aproximación que introducimos en esta sección.

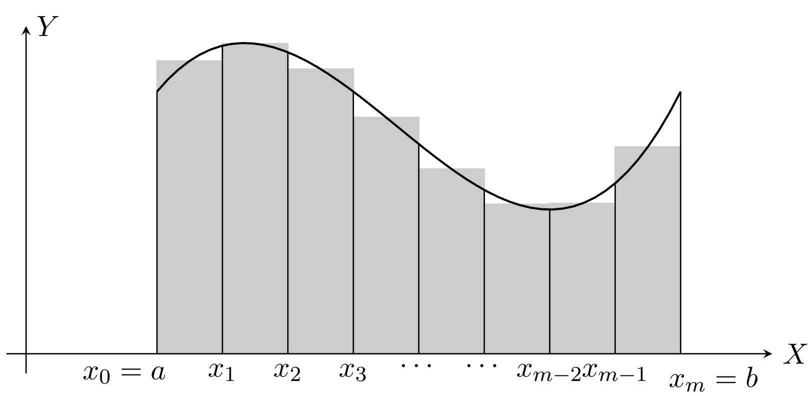
Concretamente, si f es continua y positiva en $[a, b]$, la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ es el área de la región comprendida entre el grafo de f el eje OX y las rectas $X = a$ y $X = b$.



En este modelo, podemos plantear fácilmente los cálculos necesarios para aproximar el valor de la integral como la suma de las áreas de varios rectángulos. Para describir estos rectángulos, elegimos un conjunto de puntos $P = \{x_0, \dots, x_m\}$ tal que $x_0 = a$, $x_m = b$ y $x_{k-1} < x_k$, para cada $k = 1, \dots, m$. Los segmentos del eje OX determinados por x_{k-1} y x_k son las bases de los rectángulos y la altura se determina evaluando la función en cualquier punto del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$:

$$\sum_{k=1}^{m} f(x_k^*)(x_k - x_{k-1}). \tag{2.4}$$

El área calculada con esta expresión es la de la región poligonal que aparece sombreada en la figura



Los conjuntos P así definidos se denominan *particiones* de $[a, b]$; los conjuntos $\xi = \{x_1^*, \dots, x_m^*\}$, en donde $x_{k-1} \le x_k^* \le x_k$ para cada k, se denominan *elección* de puntos en la partición P. La expresión dada en (2.4) se denomina suma de Riemann para P y ξ:

$$\mathcal{R}(P,\xi) = \sum_{k=1}^{m} f(x_k^*)(x_k - x_{k-1}).$$

Ejemplo 2.3.4 Consideremos la función $f(x) = 2x - x^2$ en el intervalo $[0,2]$. Consideremos los puntos $x_k = \frac{k}{4}$, para cada $k = 0,\dots,8$ y los puntos $x_k^* = \frac{k}{4}$ para cada $k = 1,\dots,8$. Evidentemente, $P = \{x_k \mid k = 0,\dots,8\}$ es una partición y $\xi = \{x_k^* \mid k = 1,\dots,8\}$ es una elección de puntos en P.

$$P = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2\}, \quad \xi = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2\}.$$

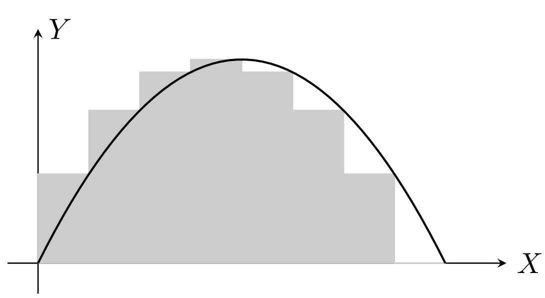
Para calcular la suma de Riemann, observamos en primer lugar que, para cada $k = 1,\dots,8$

$$x_k - x_{k-1} = \frac{k}{4} - \frac{k-1}{4} = \frac{1}{4};$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(P,\xi) &= \sum_{k=1}^{m} f(x_k^*)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{8} f\big(\frac{k}{4}\big)\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{8}\big(2\frac{k}{4} - \frac{k^2}{16}\big) = \\
&= \frac{1}{4}\Big(\big(\frac{1}{2} - \frac{1^2}{16}\big) + \big(\frac{2}{2} - \frac{2^2}{16}\big) + \big(\frac{3}{2} - \frac{3^2}{16}\big) + \big(\frac{4}{2} - \frac{4^2}{16}\big) + \\
&\qquad + \big(\frac{5}{2} - \frac{5^2}{16}\big) + \big(\frac{6}{2} - \frac{6^2}{16}\big) + \big(\frac{7}{2} - \frac{7^2}{16}\big) + \big(\frac{8}{2} - \frac{8^2}{16}\big)\Big) = \frac{21}{16}
\end{aligned}$$

En la siguiente figura, vemos el grafo de la función f; la región poligonal sombreada corresponde a la aproximación dada por esta suma de Riemann.



□

Las aproximaciones dadas por las sumas de Riemann pueden ser mejoradas aumentando el número de puntos y reduciendo la amplitud de los subintervalos determinados por las particiones. De esta forma, haciendo que estas amplitudes tiendan a 0, conseguiremos el valor exacto del área. Para formalizar esta idea, necesitamos la noción de norma de una partición: llamamos *norma* de la partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ al número

$$\|P\| = \text{máx}\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \dots, m\}.$$

Es decir la norma es la amplitud del mayor subintervalo de la partición.

TEOREMA 2.3.2 *Sea f una función continua en $[a, b]$. Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos una partición P_n del intervalo $[a, b]$ tal que* $\text{lím} \|P_n\| = 0$ *y una elección ξ_n de puntos en P_n. Entonces* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \text{lím}\, \mathcal{R}(P_n, \xi_n)$.

Habitualmente, para aproximar las integrales definidas se trabaja con particiones *regulares* del intervalo, es decir, particiones que dividen el intervalo en subintervalos de la misma amplitud; concretamente, para cada n consideraremos la partición de n subintervalos de amplitud $(b-a)/n$. En este caso, la fórmula del teorema 2.3.2 queda:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \text{lím}\, \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*). \tag{2.5}$$

Como puntos intermedios, elegiremos aquellos sobre los cuales se fácil evaluar la función del integrando.

EJEMPLO 2.3.5 Vamos a considerar nuevamente la función $f(x) = 2x - x^2$ del ejemplo 2.3.4. En aquel ejemplo, hemos calculado la suma de Riemann asociada a la partición regular de 8 subintervalos y tomando los extremos superiores de los subintervalos como elección. Ahora, vamos a considerar este mismo tipo de partición para cualquier número de subintervalos n. Los elementos de estas particiones, $P_n = \{x_{n,k}\}$, son

$$x_{n,k} = \frac{2k}{n}, \quad k = 0, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N};$$

y los puntos de la elección ξ_n son $x^*_{n,k} = x_{n,k} = \frac{2k}{n}$ para $k = 1, \dots, n$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (2x - x^2)\mathrm{d}x &= \text{lím}\, \mathcal{R}(P_n, \xi_n) \\
&= \text{lím} \sum_{k=1}^{n} (2x_{n,k} - x_{n,k}^2)(x_{n,k} - x_{n,k-1}) \\
&= \text{lím} \sum_{k=1}^{n} \big(2\frac{2k}{n} - \frac{4k^2}{n^2}\big)\frac{2}{n} \\
&= \text{lím} \left(\frac{8}{n^2} \sum_{k=1}^{n} i\right) - \text{lím} \left(\frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^{n} i^2\right)
\end{aligned}$$

Los dos límites se pueden calcular usando el criterio de Stöltz.

$$
\begin{aligned}
&= \lim \frac{8(n+1)}{(n+1)^2 - n^2} - \lim \frac{8(n+1)^2}{(n+1)^3 - n^3} \\
&= \frac{8}{2} - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

Ahora podemos comparar este resultado con la aproximación obtenida en el ejemplo 2.3.4:

$$\frac{4}{3} - \frac{21}{16} = \frac{1}{48} = 0.0208\widehat{3} < \frac{1}{2}10^{-1} \qquad \square$$

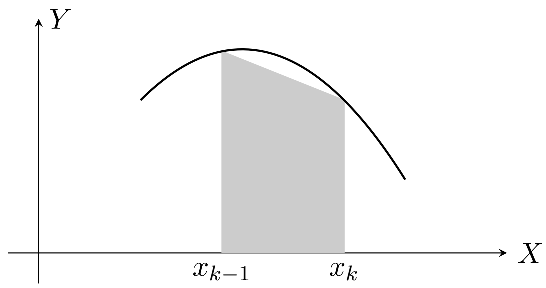
Es decir, el primer decimal de la aproximación era exacto, lo cual es bastante bueno teniendo en cuenta que solo hemos considerado 8 sumandos. $\square$

Realmente, el método descrito en esta sección se corresponde con la definición formal de la integral definida o *Integral de Riemann*. Esta integral existe si cualquier sucesión de sumas de Riemann, con normas convergentes a 0, converge al mismo número real. Las funciones continuas son integrables y por eso el teorema 2.3.2 permite elegir cualquier sucesión para calcular la integral.

La teoría asociada a las sumas de Riemann no es solo importante como método de aproximación, sino que además es la forma de probar que una magnitud puede definirse o calcularse mediante integrales: cualquier magnitud que se puede aproximar por sumas de Riemann de una función continua, tiene a la integral como valor exacto.

Método de los trapecios. Como hemos dicho arriba, las sumas de Riemann son la base para la definición de la integral definida, pero no son un buen método de aproximación; en particular, no disponemos de ningún resultado para controlar el error cometido con una determinada suma de Riemann.

En el *método de los trapecios*, en lugar de tomar rectángulos para aproximar el área de cada una de las franjas dadas por la partición vamos considerar los trapecios formados por los puntos de la gráfica correspondientes a los extremos de cada subintervalo.



El área de cada uno de estos trapecios es $\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})$. Si tomamos particiones regulares de n subintervalos, $x_k - x_{k-1} = (b-a)/n$, y por lo tanto:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}, \quad x_k = a + k\frac{b-a}{n}$$

Podemos simplificar fácilmente el sumatorio para obtener la expresión definitiva del método de los trapecios:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{2} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{2} = \\ &= \frac{f(x_0)}{2} + \left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(x_k)}{2} + \frac{f(x_k)}{2}\right) + \frac{f(x_n)}{2} = \\ &= \frac{f(x_0)}{2} + \left(\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right) + \frac{f(x_n)}{2} = \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right), \quad x_k = a + k\frac{b-a}{n} \tag{2.6}$$

Teorema 2.3.3 *Sea f una función dos veces derivable en $[a,b]$ y t_n la sucesión convergente a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ definida en (2.6). Entonces*

$$\left|t_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{M(b-a)^3}{12(n-1)^2},$$

en donde $M = \max\{|f^{(2)}(x)|\colon a \le x \le b\}$

Ejemplo 2.3.6 Vamos a aproximar la integral del ejemplo 2.3.4

$$\int_0^2 (2x - x^2)\mathrm{d}x$$

con un error menor que $\frac{1}{2}10^{-3}$, es decir, con dos decimales exactos.

Para utilizar el teorema anterior, necesitamos calcular las segunda derivada de la función:

$$f'(x) = 2 - 2x, \qquad f''(x) = -2.$$

Por lo tanto $M = \text{máx}\{|f^{(2)}(x)| \colon 0 \leq x \leq 2\} = 2$. El número n de subintervalos a considerar en el método de los trapecios debe verificar

$$\frac{1}{2}10^{-3} = \frac{1}{2000} \geq \frac{M(b-a)^3}{12(n-1)^2}\frac{2 \cdot 2^3}{12(n-1)^2} = \frac{4}{3(n-1)^2}.$$

Despejando n, obtenemos que $n \geq 53$:

$$\frac{b-a}{2n}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) + f(x_{i-1})) = \frac{2}{53}\sum_{i=1}^{53}\Big(f\big(\frac{2i}{n}\big) + f\big(\frac{2(i-1)}{n}\big)\Big) = \frac{3744}{2809} \approx 1.332$$

Efectivamente, en esta aproximación tenemos los dos primeros decimales exactos, ya que el valor real es $1.\widehat{3}$. □

Ejemplo 2.3.7 Vamos a calcular la integral

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

usando el método de los trapecios y a determinar la partición necesaria para aproximarla con un error menor que $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$.

La fórmula 2.5 aplicada a la integral propuesta es

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \text{lím}\,\frac{2-1}{n}\left(\frac{1 + 1/2}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right) = \text{lím}\left(\frac{3}{4n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n}{n+k}\right) =$$
$$= \text{lím}\left(\frac{3}{4n} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n+k}\right) = \text{lím}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n+k}$$

Este límite se calcula fácilmente utilizando la constante de Euler:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n} - \log n \quad \Longrightarrow \quad \text{lím}\, a_n = \gamma$$

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \text{lím}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n+k} = \text{lím}\sum_{k=n+1}^{2n-1}\frac{1}{k} = \text{lím}\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{1}{k}\right) - \text{lím}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) =$$
$$= \text{lím}(a_{2n-1} + \log(2n-1) - a_n - \log n) = \text{lím}(a_{2n-1} - a_n + \log\frac{2n-1}{n}) =$$
$$= \gamma - \gamma + \log 2 = \log 2$$

Si utilizamos el término

$$t_n = \frac{3}{4n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+k}$$

para aproximar la integral, el error ε, se acota como sigue:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x} \\
f'(x) &= -\frac{1}{x^2}, \quad 1 \leq x \leq 2 \\
f''(x) &= \frac{2}{x^3}, \quad 1 \leq x \leq 2 \\
f''(x) &\leq \frac{2}{1^3} = 2 = M, \quad \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\
\varepsilon &\leq \frac{M(b-a)^3}{12(n-1)^2} = \frac{2}{12(n-1)^2} = \frac{1}{6(n-1)^2}
\end{aligned}$$

Para que este error sea menor que $\frac{1}{2}10^{-3}$ basta con que $n \geq 20$ y en este caso:

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} \approx \frac{3}{80} + \sum_{k=1}^{19} \frac{1}{20+k} = \frac{3704272447868483}{5342931457063200} \approx 0.693 \qquad \square$$

LECCIÓN 2.4

Series Numéricas

Estamos acostumbrados a sumar una cantidad finita de números (dos números, tres, cuatro,...) pero ¿es posible sumar un conjunto infinito de números? La intuición nos puede jugar una mala pasada, haciéndonos pensar que al sumar "infinitos" números se obtendrá "infinito". Y, aunque en algunas ocasiones sea así, también es posible que el resultado de sumar "infinitos" números sea un número real.

Por ejemplo, supongamos que nos colocamos a un metro de distancia a un determinado punto y que nos acercamos a él dando pasos de la siguiente forma: cada paso tiene como longitud exactamente la mitad de la distancia que nos separa del destino. Si fuéramos capaces de dar pasos "tan pequeños", esta claro que nunca llegaríamos a nuestro objetivo, es decir, por muchos pasos que demos, como mucho recorreríamos 1 metro. Si pudiésemos dar pasos indefinidamente, la distancia recorrida sería

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

y esta "suma infinita" valdría exactamente 1.

Además de formalizar la noción de suma infinita, en esta lección nos vamos a plantear dos cuestiones. Por un lado, vamos a estudiar condiciones que debe cumplir una sucesión de números para poder afirmar que puede ser sumada; por otra parte, en aquellos casos en los que podamos obtener la suma, estudiaremos si es posible hallar el valor exacto o, en caso contrario, cómo aproximarla.

Definición 2.4.1 *Sea a_n una sucesión de números reales.*

1. *La sucesión $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por*

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

   se denomina serie numérica asociada a a_n *y se denota* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. *El número a_n se denomina* término n-ésimo de la serie *y el número S_n es* la n-ésima suma parcial de la serie.

3. *Denominaremos* suma de la serie *al límite, si existe, de la sucesión de sumas parciales; si este límite es ℓ, escribiremos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \cdots + a_n + \cdots = \ell$$

Si este límite es un número real, diremos que la serie es convergente*, en caso contrario diremos que es* divergente*; si el límite es* $+\infty$ *o* $-\infty$*, diremos que la serie* diverge a $+\infty$ o $-\infty$ *respectivamente.*

4. *La convergencia o divergencia de una serie se denomina* carácter de la serie*.*

En la definición anterior hemos considerado que el primer elemento de la suma es a_1; esto lo hacemos por simplicidad, pero en la práctica podremos iniciar la suma en cualquier término de la sucesión. En estos casos, debemos entender que suma parcial S_n es la suma hasta el término a_n. Por otra parte, el sumando inicial repercute en el valor de la suma, pero, como veremos más adelante, no influye en el carácter de la serie.

Ejemplo 2.4.1 Consideremos la sucesión $a_n = \dfrac{1}{2^n}$, $n \geq 0$. La sucesión de sumas parciales de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

Utilizando los métodos de la lección anterior, concretamente el criterio de Stöltz, podemos estudiar la convergencia de la serie:

$$\begin{aligned}
\lim S_n &= \lim \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&= \lim \frac{2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2 + 1}{2^n} \\
&= \lim \frac{(2^{n+1} + 2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2 + 1) - (2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2 + 1)}{2^{n+1} - 2^n} \\
&= \lim \frac{2^{n+1}}{2^{n+1} - 2^n} = \lim \frac{2}{2 - 1} = 2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos escribir: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$ □

Proposición 2.4.2 *Si la sucesión b_n se obtiene a partir de la sucesión a_n añadiendo, eliminando o modificando un conjunto finito de términos, entonces las series asociadas tienen el mismo carácter.*

En particular, si $a_n = b_m$ para todo $n \geq N_1$ y para todo $m \geq N_2$, entonces las series asociadas a a_n y b_n tienen el mismo carácter. Un ejemplo inmediato donde se ve la importancia de esta propiedad es el siguiente: *las series* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} a_n$ *tienen el mismo carácter.*

Esta propiedad es de gran utilidad pues nos dice que, al igual que ocurría con las sucesiones, cuando estudiamos la convergencia de una serie, podemos prescindir de los primeros términos (un conjunto finito cualquiera de ellos). Por ejemplo, si la condición de un teorema es que los términos de la serie sean positivos, también podremos aplicar este resultado a una serie cuyos primeros términos no los sean, con tal de que, a partir de un término, "todos los demás" sean positivos.

Atendiendo a esta propiedad, en adelante, cuando simplemente estemos estudiando el carácter de una serie, no será necesario indicar cuál es el primer término de la misma escribiendo simplemente: $\sum a_n$. Sin embargo, a la hora de calcular la suma de una serie sí es necesario conocer el primer término.

TEOREMA 2.4.3 (SERIE ARMÓNICA) *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *se denomina* serie armónica *y es divergente a* $+\infty$.

Hemos enunciado este resultado como teorema por tratarse de una serie destacada muy importante en el estudio general de series; sin embargo, ya lo dedujimos en el ejemplo 2.2.10 de la lección anterior que la sucesión de sumas parciales de la serie armónica, $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, es divergente a $+\infty$.

TEOREMA 2.4.4 *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$, *entonces se verifica que*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b$, *y*
2. $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot a$, *para todo* $c \in \mathbb{R}$.

EJEMPLO 2.4.2 La serie $\sum \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n} \right)$ es divergente. Para demostrarlo, vamos a usar el teorema anterior y a razonar por *reducción al absurdo.*

Si la serie $\sum \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n} \right)$ fuera convergente, entonces, por el teorema anterior, también lo sería

$$\sum \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n} \right) - \frac{1}{2^n} = \sum \frac{1}{n},$$

lo cual está en contradicción con el teorema 2.4.3. □

El razonamiento realizado en el ejemplo anterior se puede generalizar fácilmente para demostrar el siguiente resultado

Corolario 2.4.5 *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *es divergente, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *es divergente.*

Teorema 2.4.6 (Condición Necesaria) *Si una serie* $\sum a_n$ *es convergente, entonces* $\lim a_n = 0$.

La demostración de esta propiedad se basa en la siguiente relación entre el término n-ésimo de la serie y la sucesión de sumas parciales:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

Si S_n es convergente, S_{n-1} es convergente y tiene el mismo límite y por lo tanto, $\lim a_n = 0$.

El resultado anterior se denomina *condición necesaria de convergencia* por que establece que es "necesario" que el término general converja a 0 para que la seríe pueda ser convergente. Sin embargo, esta condición no es suficiente; por ejemplo, la sucesión $a_n = 1/n$ converge a 0, pero la serie asociada es divergente. Por esta razón, la condición necesaria se utiliza como método de refutación en el estudio de la convergencia de una serie.

Corolario 2.4.7 *Si* $\lim a_n \neq 0$, *entonces* $\sum a_n$ *es divergente.*

Ejemplo 2.4.3 Aplicando la condición necesaria, deducimos la divergencia de la serie $\sum \frac{n}{n+1}$, pues $\lim \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$. □

Teorema 2.4.8 (Serie telescópica) *Dada una sucesión* b_n, *la serie*

$$\sum_{n=N}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$$

se denomina serie telescópica. *Esta serie converge si y solo si la sucesión* b_n *converge y en tal caso,* $\sum_{n=N}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_N - \lim b_n$.

Demostración: Este resultado es una consecuencia directa de la definición de suma de serie como límite de la sucesión de sumas parciales

$$\begin{aligned}\sum_{n=N}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) &= \lim \sum_{k=N}^{n}(b_n - b_{n+1}) \\ &= \lim \sum_{k=N}^{n} b_k - \sum_{k=N}^{n} b_{k+1} \\ &= \lim \sum_{k=N}^{n} b_k - \sum_{k=N+1}^{n+1} b_k \\ &= \lim b_N + \left(\sum_{k=N}^{n}(b_k - b_k)\right) - b_{n+1} \\ &= b_N - \lim b_{n+1} = b_N - \lim b_n\end{aligned}$$ ♠

Ejemplo 2.4.4 Aunque el resultado anterior pueda parecer trivial, la dificultad de su aplicación está en detectar si efectivamente una serie es telescópica, para ello, en la mayoría de los casos tendremos que transformar la expresión de la serie para obtener la forma adecuada. Por ejemplo, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{n+1}{n}$ no parece que sea telescópica tal y como está escrita, pero las propiedades de la función logaritmo permiten deducir que sí lo es.

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{n+1}{n} &= \sum_{n=2}^{\infty}(\log(n+1) - \log n) = \lim S_n = \\ &= \lim(\cancel{\log 3} - \log 2) + (\cancel{\log 4} - \cancel{\log 3}) + (\cancel{\log 5} - \cancel{\log 4}) + \\ &\qquad + \cdots + (\cancel{\log(n+1)} - \log n) = \\ &= -\log 2 + \lim \log(n+1) = +\infty\end{aligned}$$

Un error muy común es tratar las series como sumas finitas, operar de la siguiente manera

$$\sum_{n=2}^{\infty}(\log(n+1) - \log n) = (\cancel{\log 3} - \log 2) + (\cancel{\log 4} - \cancel{\log 3}) + (\cancel{\log 5} - \cancel{\log 4}) + \dots$$

Aparentemente, se simplifican "todos" los sumando excepto $-\log 2$ y podemos concluir errónemanete que esta es la suma de la serie. Por eso, nunca debemos trabajar directamente con la secuencia infinita de sumandos, sino que debemos trabajar con la suma parcial, teniendo en cuenta los últimos sumandos. □

Teorema 2.4.9 (Serie Geométrica) *Si $a \neq 0$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \dots$ se denomina serie geométrica de término inicial 'a' y razón 'r'.*

Esta serie verifica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n \quad \begin{cases} \textit{converge a } \dfrac{a}{1-r} & \textit{si } |r| < 1 \\ \textit{diverge} & \textit{si } |r| \geq 1 \end{cases}$$

La serie del ejemplo 2.4.1 es una serie geométrica de razón $1/2$; en él calculamos la suma usando el criterio de Stöltz, pero ahora vamos a utilizar otro método que puede utilizarse en otros tipos de series. Concretamente, vamos a simplificar la expresión de la sucesión de sumas parciales de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcccccccccccc} S_n & = & a & + & ar & + & ar^2 & + & \dots & + & ar^n & & \\ -rS_n & = & & - & ar & - & ar^2 & - & \dots & - & ar^n & - & ar^{n+1} \\ \hline (1-r)S_n & = & a & & & & & & & & & - & ar^{n+1} \end{array}$$

La igualdad que aparece debajo de la línea se obtiene sumando miembro a miembro las dos anteriores; a partir de ella, se obtiene fácilmente una expresión más simplificada para S_n:

$$S_n = \frac{a - ar^{n+1}}{1-r};$$

tomando límites, deducimos el resultado anterior.

COROLARIO 2.4.10 *La serie* $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ *es geométrica si y solo is* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r \in \mathbb{R}$ *para todo* n*. Además, esta serie converge si y solo si* $|r| < 1$ *y en tal caso* $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \frac{a_N}{1-r}$*.*

EJEMPLO 2.4.5 Estudiamos las siguientes series geométricas

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n+2}}$: Como $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{3^{n+2}}{3^{n+3}} = \dfrac{1}{3} = r$, entonces la serie es geométrica de razón $1/3$ y primer término $1/27$; por tanto, la serie es convergente y su suma es $1/18$.
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{7^n}$: Como $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2^{3n+3}7^n}{7^{n+1}2^{3n}} = \dfrac{8}{7} = r$, entonces la serie es geométrica de razón $8/7$ y en consecuencia divergente a $+\infty$.
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^{n-1}}$: Como $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{-1}{5} = r$, entonces la serie es geométrica de razón $-1/5$ y primer término 1; por tanto, la serie es convergente y su suma es $5/6$. □

Teorema 2.4.11 (Serie Aritmético-Geométrica) *Las series del tipo*

$$\sum_{n=N}^{\infty}(an+b)r^n, \quad a \neq 0,$$

se denominan series aritmético-geométrica y convergen si y solo si $|r| < 1$.

En el caso de que sean convergentes, las series aritmético-geométricas se suman aplicando un proceso similar al utilizado en las series geométricas. Concretamente, repitiendo dos veces el mismo proceso para llegar a una expresión de S_n más simplificada.

Ejemplo 2.4.6 La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{2^n}$ es una serie aritmético geométrica de razón $\frac{1}{2}$ y, por lo tanto, convergente. Su suma se calcula así:

$$\begin{array}{rclclclclclcl}
S_n & = & 3 & + & \frac{4}{2} & + & \frac{5}{2^2} & + & \dots & + & \frac{n+3}{2^n} & & & & \\
-\frac{1}{2}S_n & = & & - & \frac{3}{2} & - & \frac{4}{2^2} & - & \dots & - & \frac{n+2}{2^n} & - & \frac{n+3}{2^{n+1}} & & \\
\hline
\frac{1}{2}S_n & = & 3 & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2^2} & + & \dots & + & \frac{1}{2^n} & - & \frac{n+3}{2^{n+1}} & & \\
-\frac{1}{2}\frac{1}{2}S_n & = & & & -\frac{3}{2} & - & \frac{1}{2^2} & - & \dots & - & \frac{1}{2^n} & - & \frac{1}{2^{n+1}} & - & \frac{n+3}{2^{n+2}}
\end{array}$$

Sumando las dos últimas igualdades obtenemos finalmente:

$$\frac{1}{4}S_n = 2 - \frac{n+4}{2^{n+1}} - \frac{n+3}{2^{n+2}}$$

$$S_n = 4\left(2 - \frac{n+4}{2^{n+1}} - \frac{n+3}{2^{n+2}}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{2^n} = \lim 4\left(2 - \frac{n+4}{2^{n+1}} - \frac{n+3}{2^{n+2}}\right) = 8 \qquad \square$$

Definición 2.4.12 *Se dice que la serie* $\sum a_n$ *es* hipergeométrica *si* $a_n > 0$ *para todo* n *y el término general verifica*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n+\beta}{\alpha n+\gamma}$$

Teorema 2.4.13 (Serie hipergeométrica) *Una serie* $\sum a_n$ *hipergeométrica con* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\alpha n+\beta}{\alpha n+\gamma}$ *es convergente si y sólo si* $\gamma > \alpha + \beta$.

En el caso de que sean convergentes, las series hipergeométricas se suman aplicando el siguiente proceso: (1) Escribimos por filas la igualdad $a_{n+1}(\alpha n+\gamma) = a_n(\alpha n+\beta)$ para $n = 1$, $n = 2, \dots$, (2) sumamos todos los miembros derechos y todos los miembros izquierdos, y (3) operamos para obtener una expresión de S_n lo más simplificada posible para poder calcular su límite.

Ejemplo 2.4.7 Para sumar la serie hipergeométrica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ procedemos de la siguiente manera. Como $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+2}$, entones $(n+2)a_{n+1}=na_n$ y dando valores a n desde 1 hasta n obtenemos:

$$\begin{array}{rcl}
3a_2 & = & 1a_1 \\
4a_3 & = & 2a_2 \\
5a_4 & = & 3a_3 \\
\dots & = & \dots \\
(n+2)a_{n+1} & = & na_n \\
\hline
3a_2+4a_3+5a_4+\dots+(n+1)a_n+(n+2)a_{n+1} & = & a_1+2a_2+3a_3+\dots+na_n \\
\cancel{3}a_2+\cancel{4}a_3+\cancel{5}a_4+\dots+\cancel{(n+1)}a_n+(n+2)a_{n+1} & = & a_1+\cancel{2a_2}+\cancel{3a_3}+\dots+\cancel{na_n} \\
a_1+a_2+a_3+a_4+\dots+a_n+(n+2)a_{n+1} & = & 2a_1 \\
S_n+(n+2)a_{n+1} & = & 2a_1
\end{array}$$

y de la última expresión deducimos que

$$S_n=2a_1-(n+2)a_{n+1}=2\frac{1}{2}-\frac{n+2}{(n+1)(n+2)}$$

y, por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\text{lím}\left(1-\frac{n+2}{(n+1)(n+2)}\right)=1 \qquad \square$$

2.4.1. Criterios de convergencia

Estudiar la convergencia de una serie utilizando las sumas parciales no siempre será sencillo; encontrar una expresión para las sumas parciales que permita calcular su límite es, en general, un problema bastante difícil. Por esta razón, el estudio de las series se hará en dos etapas: en primer lugar, se estudiará solamente el carácter de la serie; en segundo lugar, si la serie es convergente, afrontaremos el cálculo de su suma o bien aproximaremos su valor.

En esta sección, vamos a estudiar algunos resultados que establecen condiciones que permiten deducir la convergencia de una serie. Estos resultados se conocen como *criterios de convergencia* y en su aplicación es muy importante comprobar todas las condiciones exigidas.

Los primeros resultados que vemos son aplicables solamente a series cuyos términos (a partir uno dado) son siempre positivos; estas series verifican la siguiente propiedad.

Proposición 2.4.14 *Si a_n es una sucesión de términos positivos, la sucesión de sumas parciales asociada a ella es creciente y en consecuencia, la serie $\sum a_n$ es o bien convergente o bien divergente a $+\infty$.*

Teorema 2.4.15 (Criterio de condensación) *Sea a_n una sucesión decreciente de términos positivos. Entonces las series $\sum_n a_n$ y $\sum_k 2^k a_{2^k}$ tienen el mismo carácter.*

Corolario 2.4.16 (Series p-armónicas) *Las series $\sum \frac{1}{n^p}$ para $p > 0$ se denominan p–*armónicas*; convergen si $p > 1$, y divergen si $0 < p \leq 1$.*

Demostración: Por el criterio de condensación, la serie $\sum \frac{1}{n^p}$ tiene el mismo carácter que la serie geométrica

$$\sum \frac{2^k}{2^{kp}} = \sum \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k,$$

convergente si y solo si $p > 1$. ♠

La importancia de las series p–armónicas está en que nos ayudarán a estudiar otras series si las utilizamos conjuntamente con otros criterios, como los de comparación o condensación.

Ejemplo 2.4.8 Para estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ utilizamos el criterio de condensación (la aparición de la función logaritmo nos indica que puede ser el método adecuado). Dado que las sucesiones n y $\log n$ son crecientes, la sucesión $n(\log n)^2$ es también creciente y $\frac{1}{n(\log n)^2}$ es decreciente; por el criterio de condensación, la serie propuesta tiene el mismo carácter que

$$\sum_k \frac{2^k}{2^k(\log 2^k)^2} = \frac{1}{(\log 2)^2} \sum_k \frac{1}{k^2}$$

que es convergente por ser la serie 2–armónica. □

Teorema 2.4.17 (Criterio de comparación) *Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series tales que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Si $\sum b_n$ converge entonces $\sum a_n$ también converge.*
2. *Si $\sum a_n$ diverge entonces $\sum b_n$ también diverge.*

Ejemplo 2.4.9 La serie $\sum \dfrac{1}{n+2^n}$ es convergente ya que

$$\frac{1}{n+2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

y la serie $\sum \dfrac{1}{2^n}$ es convergente (geométrica de razón 1/2). □

No siempre podremos probar de esta forma que dos series "parecidas" tengan el mismo criterio; por ejemplo, la serie $\sum \frac{1}{2^n-n}$ es "parecida" a la del ejemplo anterior e intuimos que también será convergente, sin embargo, no podemos utilizar el criterio de comparación. El siguiente resultado, permite hacer la comparación mediante límites.

Teorema 2.4.18 (Comp. por paso al límite) *Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos, tal que $b_n \neq 0$ para todo n. Si $\ell = \lim \dfrac{a_n}{b_n}$ entonces se verifica:*

1. *Si $\ell > 0$ ambas series tienen el mismo carácter.*
2. *Si $\ell = 0$ y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ también converge.*
3. *Si $\ell = \infty$ y $\sum a_n$ converge, entonces $\sum b_n$ también converge.*

Ejemplo 2.4.10 Veamos varios ejemplos:

1. La serie $\sum \dfrac{1}{2^n - n}$ es convergente ya que $\sum \dfrac{1}{2^n}$ es convergente y

$$\lim \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n-n}} = \lim \left(1 - \frac{n}{2^n}\right) = 1$$

2. La serie $\sum n \operatorname{sen} \dfrac{1}{n^2}$ es divergente pues $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge y

$$\lim \frac{n \operatorname{sen} \dfrac{1}{n^2}}{1/n} = \lim \frac{\operatorname{sen} \dfrac{1}{n^2}}{1/n^2} = 1$$

3. La serie $\sum \dfrac{1}{\log n}$ es divergente pues $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge y

$$\lim \frac{\frac{1}{\log n}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n}{\log n} = \lim \frac{n+1-n}{\log(n+1) - \log n} =$$

$$= \lim \frac{1}{\log \frac{n+1}{n}} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$ □

El criterio de comparación por paso al límite se utiliza frecuentemente para eliminar “expresiones despreciables” en el término general de una serie, antes de aplicarle un criterio, con el fin de que los cálculo sean más sencillos.

Ejemplo 2.4.11 En el denominador de la expresión $\dfrac{3n-1}{2^n+5n+\log n}$ el término $5n+\log n$ es “despreciable” frente a 2^n para valores “grandes” de n. Por lo tanto, consideramos la expresión $\dfrac{3n-1}{2^n}$ que comparamos con la original

$$\text{lím}\,\frac{\dfrac{3n-1}{2^n}}{\dfrac{3n-1}{2^n+5n+\log n}}=\text{lím}\,\frac{2^n+5n+\log n}{2^n}=1$$

Omitimos los detalles del cálculo del último límite, para el cual se usa el criterio de Stöltz. Aplicando el criterio de comparación por paso al límite se deduce las series $\sum\dfrac{3n-1}{2^n+5n+\log n}$ y $\sum\dfrac{3n-1}{2^n}$ tienen el mismo carácter; dado que $\sum\dfrac{3n-1}{2^n}$ es una serie aritmético-geométrica convergente, podemos afirmar que $\sum\dfrac{3n-1}{2^n+5n+\log n}$ es convergente. □

Corolario 2.4.19 *Sean a_n y b_n dos sucesiones positivas e infinitésimos equivalentes; entonces las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ tienen el mismo carácter.*

La siguiente propiedad se deduce fácilmente aplicando el criterio de comparación a las sucesiones a_n y $1/n$, y es útil para el cálculo de algunos límites.

Corolario 2.4.20 *Si $\sum a_n$ es una serie de términos positivos y convergente, entonces* $\text{lím}\, na_n=0$

Demostración: Es inmediata usando reducción al absurdo: si el límite fuera distinto de cero,

$$0\neq \text{lím}\, na_n=\text{lím}\,\frac{a_n}{1/n},$$

entonces la serie tendría el mismo carácter que $\sum\dfrac{1}{n}$, que es divergente. ♠

Los criterios estudiados hasta ahora establecen relaciones entre el carácter de dos series, es decir, reducen el estudio del carácter de una serie al estudio del carácter de otra serie. En primer lugar, debemos destacar que la relación se reduce solo al carácter, pero no al de la suma, según vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4.12 Según el criterio de condensación, las series

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{2^{2k}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$

tiene el mismo carácter. Veremos más adelante en el curso que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ y ya sabemos que $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}=2$. Es decir, aunque el carácter coincide, las sumas son diferentes. □

Los criterios que estudiamos en el resto de la sección establecen condiciones sobre el término general para deducir su carácter.

Teorema 2.4.21 (Criterio de la raíz) *Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y consideremos el límite $\ell = \text{lím}\sqrt[n]{a_n}$; entonces:*

1. *Si $\ell < 1$ la serie converge.*
2. *Si $\ell > 1$ la serie diverge.*

El caso $\text{lím}\sqrt[n]{a_n}=1$ queda fuera del teorema anterior, ya que a partir de él no podemos deducir nada: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ verifican que el límite de la condición vale 1 para ambas series y, sin embargo, la primera es divergente y la segunda es convergente.

Otra cárecteristica de los criterios que estudiamos en el resto de la sección es que también proveen información sobre los errores estimados al tomar una suma parcial como aproximación de la suma de la serie. Antes de ver el correspondiente resultado para el criterio de la raíz, vamos a observar la siguiente propiedad de la series de términos positivos: *la sumas parciales de estas series son aproximaciones "por defecto" de su suma.* Esta afirmación es consecuencia del hecho de que para estas series, la sucesión de sumas parciales es creciente:

$$S_{n+1}=S_n+a_n>S_n.$$

Proposición 2.4.22 *Sea $\sum a_n$ una serie convergente tal que $\sqrt[n]{a_n}\le r<1$ para todo $n\ge N$; si S_n es su sucesión de sumas parciales y S su suma, entonces:*

$$S-S_N\le\frac{r^{N+1}}{1-r}$$

Si el límite $\lim \sqrt[n]{a_n} = \ell$ es estrictamente menor que 1, podemos aplicar el resultado anterior porque tenemos asegurada la existencia del número r y para cada r la existencia del número N. Para acotar el error cometido al tomar una suma parcial en lugar de la suma exacta, necesitamos entonces determinar los números r y N adecuados para conseguir un error menor que el desado. Los siguientes casos particulares, aunque bastante significativos, nos facilitarán la realización de este tipo de tareas.

- Si $\sqrt[n]{a_n}$ es creciente, para cada N podemos tomar $r = \lim \sqrt[n]{a_n}$.
- Si $\sqrt[n]{a_n}$ es decreciente, para cada N podemos tomar $r = \sqrt[N]{a_N}$, siempre y cuando este número sea menor estrictamente que 1.

El criterio de la raíz y el criterio del cociente para el calculo de límites permiten deducir el siguiente criterio para la convergencia de series.

Corolario 2.4.23 (Criterio del cociente) *Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y consideremos el límite $\ell = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$; entonces:*

1. *Si $\ell < 1$ la serie converge.*
2. *Si $\ell > 1$ la serie diverge.*

El caso $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ queda fuera del teorema anterir, ya que a partir de él no podemos deducir nada: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ verifican que el límite de la condición vale 1 para ambas series y, sin embargo, la primera es divergente y la segunda es convergente.

Igual que el criterio de la raíz, el uso del criterio del cociente nos da información para estimar errores.

Proposición 2.4.24 *Sea $\sum a_n$ una serie convergente tal que $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \le r < 1$ para todo $n \ge N$; si S_n es su sucesión de sumas parciales y S su suma, entonces:*

$$S - S_N \le \frac{a_{N+1}}{1-r}$$

Teniendo en cuenta las mismas consideraciones que hicimos para el criterio de la raíz, los siguientes casos particulares nos ayudarán a aplicar este resultado en la estimación de sumas.

- Si $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ es creciente, para cada N podemos tomar $r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
- Si $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ es decreciente, para cada N podemos tomar $r = \frac{a_{N+1}}{a_N}$, siempre y cuando este número sea estrictamente menor que 1.

Ejemplo 2.4.13 Aplicamos los resultados anteriores a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ para demostrar que es convergente y determinar la suma parcial que estima su suma con un error menor que $\frac{1}{2}10^{-3}$:

$$\lim \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$$

Entonces, por el criterio del cociente, la serie es convergente. Además, dado que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1}$ es decreciente y menor que 1 para cada n, si S es la suma de la serie y S_n la sucesión de sumas parciales:

$$S - S_N < \frac{1/(N+1)!}{1 - \frac{1}{N+1}} = \frac{1}{N \cdot N!}$$

Si queremos que este error sea menor que $\frac{1}{2}10^{-3}$, basta considerar $N = 6$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \approx \sum_{n=0}^{6} \frac{1}{n!} = \frac{1957}{720} \approx 2.718$$

Más adelante, veremos que la suma de esta serie es el número e y el valor aproximado que nos da cualquier calculadora es 2.718281828. □

Ejemplo 2.4.14 Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ podemos utilizar los mismos resultados:

$$\lim \frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n2^n}} = \lim \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$$

Entonces, por el criterio del cociente, la serie es convergente. Si $x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{2(n+1)}$, entonces:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2(n+1)(n+1)}{2n(n+2)} = \frac{2n^2+4n+2}{2n^2+4n} > 1$$

y en consecuencia $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ es creciente. Por lo tanto, si S es la suma de la serie y S_n la sucesión de sumas parciales:

$$S - S_N < \frac{1}{(N+1)2^N(1-\frac{1}{2})} = \frac{1}{(N+1)2^{N-1}}$$

Si queremos que este error sea menor que $\frac{1}{2}10^{-3}$, basta considerar $N = 9$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} \approx \sum_{n=1}^{9} \frac{1}{n2^n} = \frac{447047}{645120} \approx 0.693$$

Más adelante, veremos que la suma de esta serie es $\log 2$ y la aproximación que nos da cualquier calculadora es 0.6931471805. □

Teorema 2.4.25 (Criterio de Raabe) *Sea* $\sum a_n$ *una serie de términos positivos y consideremos el límite* $\ell = \lim n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$*; entonces:*

1. *Si* $\ell > 1$ *la serie converge.*
2. *Si* $\ell < 1$ *la serie diverge.*

El caso $\ell = 1$ queda fuera del resultado anterior, ya que a partir de él no podemos deducir nada: para $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, el límite de la condición de Raabe vale 1 y es divergente; para la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^2}$ el límite de la condición es 1 y la serie es convergente.

Es recomendable utilizar el criterio de Raabe después del criterio del cociente en el caso en que este no decida nada. Debemos tener en cuenta que las *simplificaciones* realizadas al aplicar el criterio del cociente pueden ser útiles al aplicar el criterio de Raabe, pero NO las posibles sustituciones de infinitésimos.

Como en los anteriores, el uso del criterio de Raabe también nos da información para estimar errores.

Proposición 2.4.26 *Sea* $\sum a_n$ *una serie convergente tal que* $n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq r > 1$ *para todo* $n \geq N$*; si* S_n *es su sucesión de sumas parciales y* S *su suma, entonces:*

$$S - S_N \leq \frac{Na_{N+1}}{r-1}$$

Teniendo en cuenta las mismas consideraciones que hicimos para el criterio de la raíz, los siguientes casos particulares nos ayudarán a aplicar este resultado en la estimación de errores.

- Si la sucesión $n\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ es decreciente, para cada N podemos tomar
$$r = \lim n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$
- Si la sucesión $n\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ es creciente, para cada N podemos tomar
$$r = N\left(1-\frac{a_{N+1}}{a_N}\right)$$
siempre que este número sea estrictamente mayor que 1.

Ejemplo 2.4.15 Vamos a usar el criterio de Raabe para probar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ es convergente (aunque ya lo hemos hecho anteriormente) y determinar la suma parcial que estima su suma con un error menor que 10^{-3}.

$$\lim n\left(1-\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2}\right) = \lim \frac{2n^2+n}{(n+1)^2} = 2$$

Por el criterio de Raabe, deducimos que la serie es efectivamente convergente. Por otra parte, si $x_n = \left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \dfrac{2n^2+n}{(n+1)^2}$, tenemos que:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(2(n+1)^2+n+1)(n+1)^2}{(n+2)^2(2n^2+n)} = \frac{2n^4+9n^3+15n^2+11n+3}{2n^4+9n^3+12n^2+4n} > 1$$

Es decir, la sucesión $n\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ es creciente y, por lo tanto, si S es la suma de la serie y S_n su sucesión de sumas parciales:

$$\begin{aligned} S - S_N &\leq \frac{\frac{N}{(N+1)^2}}{\frac{2N^2+N}{(N+1)^2}-1} \\ &= \frac{N}{N^2-N-1} < \frac{N}{N^2-N-N} = \frac{1}{N-2} \end{aligned}$$

Si queremos que este error sea menor que $\frac{1}{2}10^{-3}$, basta considerar $N = 2002$. Más adelante, calcularemos la suma exacta de esta serie y demostraremos que $S = \pi^2/6$; si utilizamos un ordenador para calcular la suma parcial, obtendremos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \approx \sum_{n=1}^{2002}\frac{1}{n^2} \approx 1.644$$

mientras que el valor aproximado de $\pi^2/6$ que nos da cualquier calculadora es 1.644934066.
□

Los teoremas vistos hasta ahora son válidos solamente para series de términos positivos. En esta, vamos a ver dos resultados que permiten estudiar algunas series con términos de signo arbitrario.

DEFINICIÓN 2.4.27 *Decimos que una serie* $\sum a_n$ *es* absolutamente convergente *si la serie* $\sum |a_n|$ *es convergente.*

TEOREMA 2.4.28 *Toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Una serie convergente pero no absolutamente convergente se dice *condicionalmente convergente.*

DEFINICIÓN 2.4.29 *Una serie* $\sum a_n$ *se dice* alternada *si para todo* n *se verifica que* $a_n/a_{n+1} < 0$*; es decir, su término general es de la forma* $(-1)^n b_n$ *o* $(-1)^{n+1} b_n$*, en donde* $b_n > 0$ *para todo* n*.*

TEOREMA 2.4.30 (CRITERIO DE LEIBNIZ) *Sea* $\sum(-1)^n a_n$ *una serie tal que*

1. *la sucesión* a_n *es decreciente y* $a_n > 0$*,*
2. $\lim a_n = 0$*,*

entonces, la serie es convergente. (Obsérvese que, según hemos visto, la condición $\lim a_n = 0$ *es necesaria para cualquier serie.)*

PROPOSICIÓN 2.4.31 *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *una serie en las condiciones del criterio de Leibniz,* S_n *su sucesión de sumas parciales y* S *su suma; entonces:*

$$|S_N - S| < a_{N+1}$$

En la acotación del error tenemos que usar el valor absoluto porque en este caso el error puede ser por exceso o por defecto.

EJEMPLO 2.4.16 Vamos a usar el criterio de Leibniz para probar que la serie armónica alternada, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, es convergente y determinar la suma parcial que estima su suma con un error menor que $\frac{1}{2}10^{-3}$.

1. la sucesión $\frac{1}{n}$ es decreciente y de términos positivos,
2. $\lim \frac{1}{n} = 0$,

Por el criterio de Leibniz, deducimos que la serie es efectivamente convergente. Por otra parte, si S es la suma de la serie y S_n su sucesión de sumas parciales:

$$|S_N - S| < \frac{1}{n+1}$$

Si queremos que este error sea menor que $\frac{1}{2}10^{-3}$, basta considerar $N = 1999$. En el tema siguiente, calcularemos la suma exacta de esta serie y demostraremos que $S = -\log 2$; si utilizamos un ordenador para calcular la suma parcial, obtendremos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \approx \sum_{n=1}^{1999} \frac{(-1)^n}{n} \approx -0.693$$

mientras que el valor aproximado de $-\log 2$ que nos da cualquier calculadora es -0.6931471805. □

2.4.2. Esquemas prácticos

En esta sección vamos a presentar algunas estrategias para abordar el estudio de la convergencia de series numéricas. El siguiente esquema resume los criterios que hemos introducido en el orden más adecuado para su aplicación.

1. Comprobar si es una serie conocida: geométrica, armónica, cociente de polinomios, telescópica, …

2. Condición necesaria. Esta es la primera comprobación que debe hacerse si el límite es fácil de calcular.

3. Criterios del cociente–Raabe o criterio de la raíz. El criterio del cociente o el de la raíz son los primeros que conviene utilizar; elegir uno u otro depende de la forma del término general de la serie. Optaremos preferiblemente por el criterio del cociente cuando sea posible, ya que permite utilizar posteriormente el de Raabe.

4. Criterio de condensación. Es conveniente utilizarlo, cuando sea posible, en series donde interviene la función logaritmo.

5. Comparación. Si ninguno de los criterios anteriores decide el carácter de la serie, intentaremos buscar una serie conocida con la que poder compararla; solo la práctica y la resolución de bastantes problemas facilita esta etapa.

El cociente a_{n+1}/a_n. Como ya se habrá comprobado, el estudio del cociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ es de gran utilidad para la determinación del carácter de una serie. A continuación, recogemos toda la información que puede obtenerse de dicho cociente; dentro del esquema de la sección anterior, el estudio de este cociente se incluirá en el primer paso.

1. Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \in \mathbb{R}$ entonces la serie es una serie geométrica.

2. Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ la serie es hipergeométrica (ver ejercicios).

3. Si $a_n > 0$ y $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ para todo $n > N$, la sucesión a_n es creciente y por tanto su límite no puede ser 0: *la serie es divergente*.

4. Si $a_n > 0$ y $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ para todo $n > N$, la sucesión a_n es decreciente.

Sucesiones decrecientes. El criterio de condensación y el criterio de Leibniz incluyen, entre sus condiciones, el decrecimiento de una sucesión. Rapasamos a continuación los distintos métodos que hemos visto y utilizado para demostrar que una sucesión es decreciente:

1. Si $a_n - a_{n+1} > 0$, entonces a_n es decreciente.

2. Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, entonces a_n es decreciente.

3. Si $f\colon [N, +\infty) \to \mathbb{R}$ es una función decreciente tal que $f(n) = a_n$ para todo $n \geq N$, entonces a_n es una sucesión decreciente a partir de N (para determinar si una función es decreciente podemos utilizar su derivada).

4. Por último, podemos utilizar las propiedades algebraicas de la relación de orden para deducir algunas propiedades sobre monotonía de sucesiones y funciones como por ejemplo:

   a) Si f y g son funciones crecientes, entonces $f + g$ creciente.

   b) Si f y g son funciones crecientes y positivas, entonces $f \cdot g$ es creciente.

   c) f es creciente si y solo si $-f$ es decreciente.

   d) Si f es positiva, entonces f es creciente si y solo si $1/f$ es decreciente.

   e) Si f y g son funciones crecientes, entonces $f \circ g$ es creciente.

   f) Si f es una función creciente y d_n es una sucesión decreciente, entonces $f(\mathrm{d}_n)$ es una sucesión decreciente.

g) Si h es una función decreciente y d_n es una sucesión decreciente, entonces $f(\mathrm{d}_n)$ es una sucesión creciente.

2.4.3. Series de potencias

Algunas de las series que hemos estudiado hasta ahora contenían parámetros en su término general, incluso hemos podido sumar alguna de ellas dando su suma en función de ese parámetro:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

Como hemos podido comprobar, no siempre es asequible sumar una serie, pero aun así podemos estar interesados en estudiar las propiedades de la serie e incluso la relación de dependencia de la serie respecto de ese parámetro.

En esta sección y en la siguiente, vamos a estudiar un tipo de función cuya expresión se escribe mediante una serie cuyo término general depende de la variable de la función, las series de potencias.

DEFINICIÓN 2.4.32 *Una* serie de potencias *es una función definida por una expresión de la forma:*

$$f(x) = \sum_n a_n(x-a)^n$$

El número a se denomina centro *de la serie.*

Tal y como acordamos en la lección anterior, omitimos los límites de los sumatorios por simplicidad y porque el sumando inicial de la serie no influye en sus características. Sí tendremos que explicitarlo cuando necesitemos trabajar con el valor real de la suma.

EJEMPLO 2.4.17

1. $\sum_n \dfrac{(x-1)^n}{n}$ es una serie de potencias centrada en 1; en este caso, $a_n = \dfrac{1}{n}$.
2. $\sum_n \operatorname{sen}^n x$ no es una serie de potencias. □

TEOREMA 2.4.33 *Toda serie de potencias $\sum a_n(x-a)^n$ converge absolutamente para cada $x \in I$, en donde I es, o bien $\mathbb{R}$, o bien un intervalo tal que $(a-R, a+R) \subset I \subset [a-R, a+R]$. En el segundo caso, el número R se denomina* radio de convergencia *de la serie.*

El intervalo I se denomina *campo de convergencia* de la serie y es el dominio de la función determinada por la serie de potencias. Por las características de la expresión de una serie de potencias, bastará con aplicar el criterio del cociente o el de la raíz para hallar el radio de convergencia, sin embargo, necesitaremos trabajar algo más para estudiar la convergencia de la serie en los dos extremos del campo.

Ejemplo 2.4.18 Para hallar el campo de convergencia de $\sum \frac{(x-1)^n}{\log n}$, aplicamos el criterio del cociente a la sucesión de valores absolutos:

$$\lim \frac{|x-1|^{n+1}}{\log(n+1)} \cdot \frac{\log n}{|x-1|^n} = |x-1| \lim \frac{\log n}{\log(n+1)} = |x-1|$$

Por lo tanto, la serie converge si $|x-1| < 1$. Por el teorema anterior, solo tenemos que analizar la convergencia de la serie para $x = 0$ y $x = 2$ para determinar completamente el campo de convergencia. Para $x = 0$ la serie resultante es $\sum \frac{(-1)^n}{\log n}$ cuya convergencia podemos deducir con el criterio de Leibniz. Para $x = 2$ la serie resultante es $\sum \frac{1}{\log n}$, cuya divergencia podemos deducir con el criterio de condensación. Por lo tanto, el campo de convergencia de la serie es $[0, 2)$. □

El siguiente resultado establece la continuidad y derivabilidad de las funciones definidas por series de potencias y extiende la propiedades algebraicas de la derivación e integración a series.

Teorema 2.4.34 *Para la serie de potencias $S(x) = \sum a_n(x-a)^n$ se verifica que:*

1. *(Teorema de Abel) la función S es continua en su campo de convergencia.*
2. *S es una función derivable en el interior del campo de convergencia y su derivada se obtiene "derivando término a término la serie":*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_n a_n(x-a)^n\right) = \sum_n n a_n (x-a)^{n-1}$$

   Además, el radio de convergencia de la derivada coincide con el de S.

3. *Una primitiva de la función S es:*

$$\int \left(\sum_n a_n(x-a)^n\right) \mathrm{d}x = \sum_n \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$$

   Además, el radio de convergencia de la primitiva coincide con el de S.

En los dos último puntos del teorema anterior se afirma la coincidencia de los "radios" de convergencia, pero no de los "campos" de convergencia, es decir, la convergencia en los extremos del campo puede variar al derivar o integrar.

EJEMPLO 2.4.19 El campo de convergencia de la serie de potencias $\sum \dfrac{x^n}{n^2}$ es $[-1,1]$, sin embargo, la serie de las derivadas, $\sum \dfrac{x^{n-1}}{n}$, no converge en $x = 1$ y por lo tanto su campo de convergencia es $[-1, 1)$. □

Las propiedades de derivación e integración de series de potencias constituyen una herramienta fundamental para sumar series, tal y como vemos en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2.4.20 En la sección anterior hemos probado que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad \text{si } |x| < 1.$$

Aplicando el operador primitiva obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\log|1-x| + C = -\log(1-x) + C, \qquad \text{si } |x| < 1.$$

Evaluando ambas expresiones en $x = 0$, deducimos que $C = 0$. Además, para $x = -1$, la serie converge (criterio de Leibniz) y por el teorema de Abel (2.4.34(1)), la igualdad también se verifica en ese punto. Por lo tanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\log(1-x), \qquad \text{si } -1 \le x < 1.$$ □

2.4.4. Series de Taylor

Las funciones expresadas mediante series de potencias se comportan esencialmente como polinomios, por esta razón, nos planteamos en esta sección expresar cualquier función como serie de potencias. Vamos a ver que, en particular, todas las funciones elementales pueden representarse de esta forma.

Aunque en muchos casos, el método seguido en el ejemplo 2.4.20 permitirá expresar una función como series de potencias, en la mayoría de los casos necesitaremos construirla a partir de su polinomio de Taylor. Recordemos que el polinomio de Taylor de orden n de una función f en el punto x_0 es un polinomio de grado menor o igual que n tal que su valor en x_0 y el valor de las n primeras derivadas coinciden con los de f. Su expresión análitica es:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$$

Aunque tiene sentido determinar el polinomio de Taylor en cualquier punto, en la práctica solo es interesante en aquellos puntos para los cuales es posible hallar el valor de sus derivadas sucesivas de manera exacta y poder obtener así polinomios cuyos coeficientes sean números racionales. En la sección 2.4.5 veremos la lista completa de los desarrollos de Taylor de todas las funciones elementales en el punto más adecuado.

El primer resultado fundamental para los objetivos de este tema es el siguiente, que caracteriza los polinomios de Taylor de una función como su mejor aproximación polinómica.

Teorema 2.4.35 *Sea T_n el polinomio de Taylor de orden n de f en x_0. Entonces, T_n es el único polinomio tal que y:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Es decir, el polinomio T_n es la “mejor aproximación”, en un entorno de x_0, por polinomios de grado menor o igual que n. Por ejemplo, en las figuras de la página 44 podemos ver que los polinomios de Taylor de la función exponencial “se parecen” cada vez más a esta función según aumentamos el grado del polinomio, y que el intervalo en el que más se parecen es cada vez mayor. Lo mismo observamos en las páginas 133 y 136 para las funciones seno y arcotangente respectivamente.

Otra aplicación de este resultado es el método mostrado en el siguiente corolario para obtener parejas de infinitésimos equivalentes.

Corolario 2.4.36 *Sea f una función $(n+1)$-veces derivable en un entorno abierto de x_0. Entonces, $f(x) - T_n(x)$ y $\dfrac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ son infinitésimos equivalentes en x_0.*

Ejemplo 2.4.21 Para la función exponencial y para $n = 0$, obtenemos la equivalencia $\mathrm{e}^x - 1 \equiv x$, en $x = 0$, que aprendimos en el tema anterior. Para $n = 1$ obtenemos que

$$\mathrm{e}^x - 1 - x \equiv \frac{x^2}{2}, \text{ en } x = 0.$$

Aunque podemos demostrar fácilmente esta equivalencia usando el Teorema de L'Hôpital, el polinomio de Taylor es la herramienta para construirlos. □

La posibilidad de aproximar el valor de una expresión matemática, solo es útil si podemos controlar el error que se comete. El teorema siguiente nos da un método para hacerlo cuando usamos polinomios de Taylor.

TEOREMA 2.4.37 (DE LAGRANGE) *Sea f una función definida en un entorno abierto de x_0 y supongamos que f es $(n+1)$-veces derivable en este entorno. Sea T_n el polinomio de Taylor de orden n de f en x_0 y $E_n(x) = f(x) - T_n(x)$. Entonces, para cada $x \neq x_0$ existe un número c (que depende de x y de n) comprendido estrictamente entre x y x_0 y tal que:*

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

La fórmula del resto dada en este teorema se conoce como *fórmula de Lagrange*. Aunque no es la única posible, sí es la más utilizada por su simplicidad. La expresión E_n puede ser negativa, sin embargo, al trabajar con errores, no distinguimos entre errores por exceso y por defecto, y por eso entendemos que el error es su valor absoluto: $\varepsilon = |E_n|$.

EJEMPLO 2.4.22 Para calcular el número 'e' con un tres decimales correctos, debemos evaluar la función exponencial en el punto $x = 1$ con un error $\varepsilon < \frac{1}{2}10^{-3}$. Si utilizamos el polinomio de Taylor de orden n en 0 de la función exponencial que calculamos en el primer tema (ver sección 2.4.5), cometeremos el siguiente error:

$$\varepsilon = \left|\frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}1^{n+1}\right| = \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}, \quad c \in (0,1)$$

Dado que no conocemos el valor de c (y no podemos, ni pretenderemos calcularlo), no podemos conocer el error exacto. Por esta razón, lo que hacemos es "estimar" dicho error en función de n, sustituyendo el valor de c, o las subexpresiones en dónde aparece, por valores mayores. En este caso, $\mathrm{e}^c < \mathrm{e}^1 = \mathrm{e} < 3$ y por lo tanto:

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

Si queremos que el error sea menor que $\frac{1}{2}10^{-3}$, basta con encontrar el primer número natural n tal que $\dfrac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{2}10^{-3}$, es decir, tal que $(n+1)! > 6000$. Con $n = 7$ lo conseguimos y por lo tanto:

$$\mathrm{e} \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = \frac{685}{252} \approx 2.718$$

Solo podemos estar seguros de los tres primeros decimales, aunque podemos comprobar que los cuatro primeros decimales coinciden con los que nos da cualquier calculadora. □

No es difícil observar que los polinomios de Taylor no son más que la sucesión de sumas parciales de la serie asociada a la sucesión $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$; la correspondiente serie se denomina *serie de Taylor* de la función f.

DEFINICIÓN 2.4.38 *Dada una función f infinitamente derivable en un intervalo abierto I, denominamos* serie de Taylor de f en $x_0 \in I$ *a la serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad x \in I$$

Decimos que la serie representa a f en x *si converge a $f(x)$, es decir:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x)$$

Evidentemente, la serie de Taylor para x_0 representa a f en x_0 pero puede no hacerlo en otros puntos. La representación de la serie en otros puntos está caracterizada por la convergencia a 0 de la expresión del resto.

TEOREMA 2.4.39 *La serie de Taylor de f en x_0 representa a f en x si y solo si:*

$$\lim_{n\to\infty} E_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0$$

EJEMPLO 2.4.23 La serie de Taylor de la función exponencial la representa en todo su dominio, $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} E_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Para comprobar que este límite es 0, podemos trabajar más fácilmente con su valor absoluto. Si $x < 0$, entonces $\mathrm{e}^c < 1$ y por lo tanto

$$\frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}|x|^{n+1} < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Si $x > 0$, $\mathrm{e}^c < \mathrm{e}^x$ y por lo tanto

$$\frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}x^{n+1} < \mathrm{e}^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

En los dos límite calculados, hemos utilizado la relación que aprendimos en la lección anterior entre polinomios y función exponencial. Por otra parte, obsérvese la necesidad de "eliminar" mediante acotación el número c antes de calcular el límite, ya que este número depende tanto de x como de n y por lo tanto también está afectado por el operador límite. □

A partir de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$ podemos sumar todas las series del tipo $\sum \frac{P(n)}{(n+q)!}$, en donde P es un polinomio de grado p y $q \in \mathbb{Z}$. El criterio del cociente permite demostrar que todas ellas son convergentes y el método que presentamos en el ejemplo siguiente permite calcular su suma.

Ejemplo 2.4.24 Vamos a sumar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$. Para ello, usando identificación de coeficientes, vamos a expresar el polinomio del numerador de la siguiente forma

$$n^3 = A(n+1)n(n-1) + B(n+1)n + C(n+1) + D$$

Cada sumando, está formado por productos de expresiones consecutivas y todas empezando por $n+1$; como veremos, esto permitira simplificar cada sumando con el factorial del denominador para conseguir que en cada numerador quede una constante y en el denominador solo un factorial. Esta expresión se puede obtener para cualquier polinomio $P(n)$.

Eliminando los paréntesis y agrupando los términos obtenemos

$$\begin{aligned} n^3 &= A(n+1)n(n-1) + B(n+1)n + C(n+1) + D = \\ &= An^3 + Bn^2 + (B - A + C)n + (C + D), \end{aligned}$$

y por lo tanto, $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, $D = -1$ y de ahí:

$$\frac{n^3}{(n+1)!} = \frac{(n+1)n(n-1) + (n+1) - 1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

Observese que la última simplificación solo es válida para $n \geq 2$ pero la serie se suma desde $n = 1$; por esta razón, en el primer paso del siguiente desarrollo, "apartamos" el primer sumando de la serie:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!} &= \frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}\\
&= \frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)\\
&= \frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\\
&= \frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}\\
&= \frac{1}{2}+\mathrm{e}+(\mathrm{e}-1-1)-(\mathrm{e}-1-1-\frac{1}{2})=\mathrm{e}+1
\end{aligned}$$

En la cuarta igualdad hemos hecho un cambio de variable para que sea más fácil entender los siguientes pasos, pero estos pueden hacerse directamente; concretamente, as series que aparecen tras esa igualdad se corresponden con el número e, pero dado que no todas empiezan en $n = 0$ es necesario restar los sumandos que faltan. $\square$

2.4.5. Funciones elementales

En esta sección, vamos a ver los desarrollos de Taylor de todas las funciones elementales y las correspondientes expresiones del resto de Lagrange. Debemos tener en cuenta todas estas series para estudiar la convergencia o sumar series numéricas.

Función Exponencial.

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{e}^{c_n}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (c_n \text{ entre } 0 \text{ y } x)$$

En el ejemplo 1.4.10, hemos deducido que la serie de Taylor representa a la función exponencial en todo su dominio:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad\qquad x\in\mathbb{R}$$

Función Logaritmo Neperiano. Su dominio es el intervalo $(0,\infty)$ y hallamos su desarrollo en $x_0 = 1$:

$$\log x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n + \frac{(-1)^n}{c_n^{n+1}(n+1)}(x-1)^{n+1}$$

Estando c_n entre 1 y x. En el ejemplo 2.4.20, hicimos los cálculos necesarios para establecer la convergencia de esta serie; concretamente, obtuvimos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\log(1-x), \qquad x \in [-1, 1),$$

y por lo tanto,

$$\log x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(1-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n \qquad x \in (0, 2]$$

Alternativamente, esta serie se puede escribir como:

$$\log(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad x \in (-1, 1]$$

Función Seno.

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} (\operatorname{sen} c) \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

siendo c un número entre 0 y x. La correspondiente serie de Taylor representa a la función en todo su dominio:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

En la figura de la página 133, podemos ver las gráficas de la función seno y de algunos de sus polinomios de Taylor. Vemos que, igual que ocurre con la función exponencial, la convergencia de la serie es “muy rápida”, es decir, con pocos sumando conseguimos unas aproximaciones muy buenas en entornos bastante amplios de 0.

Función Coseno.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} (\operatorname{sen} c) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

siendo c un número entre 0 y x. Además, la serie de Taylor representa a la función coseno en todo su dominio:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

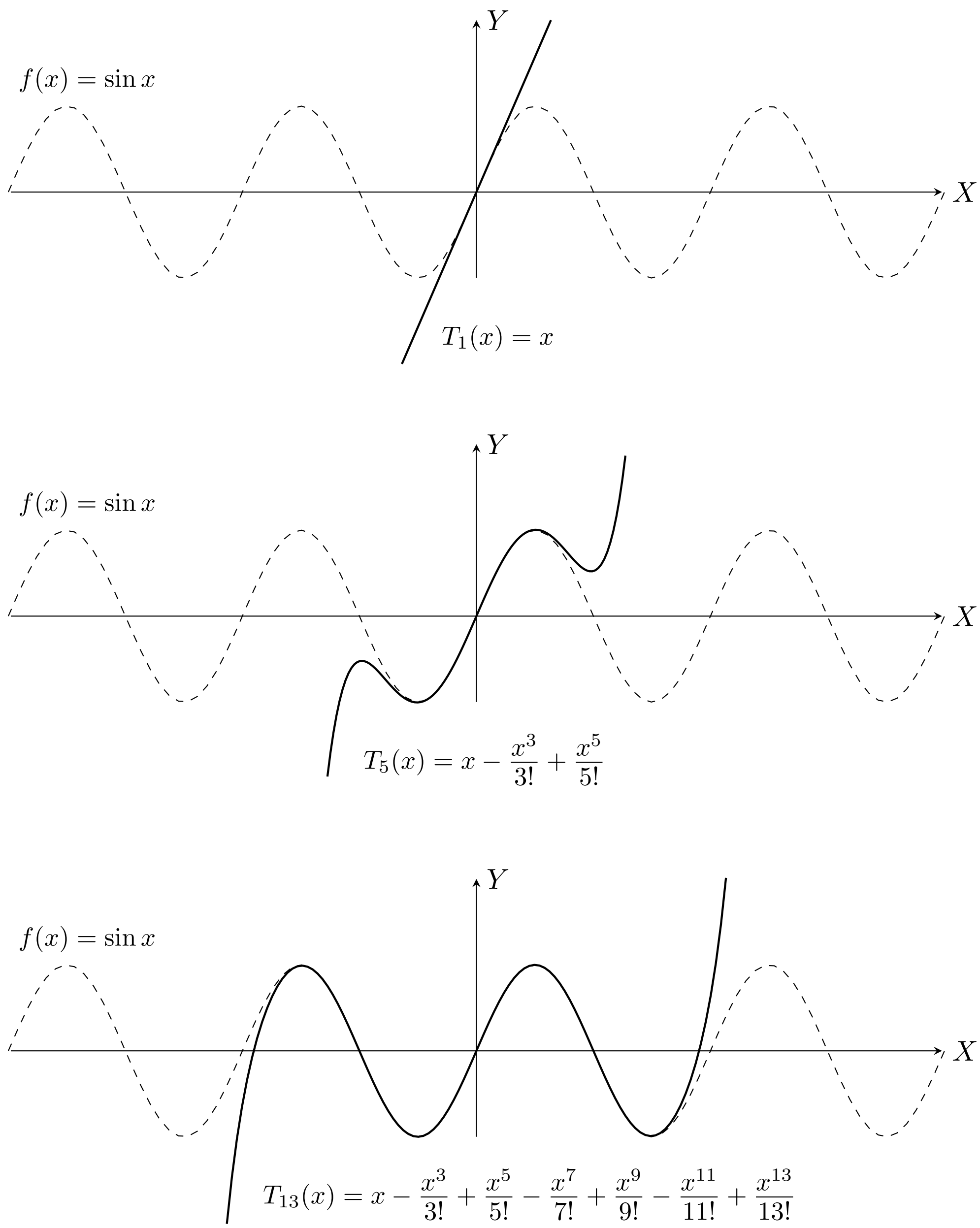


Figura 2.3: Función seno y algunos polinomios de Taylor.

Función Potencial. Para obtener el desarrollo de Taylor, escribimos la función potencial como:

$$p_\alpha(x) = (1+x)^\alpha \qquad\qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$$

Su dominio es el intervalo $[-1,\infty)$ si $\alpha > 0$ y $(-1,\infty)$ si $\alpha < 0$. La función potencial es derivable en $(-1,\infty)$ y, si $\alpha > 1$, también es derivable en -1. El desarrollo de Taylor es:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} (1+c)^{\alpha-n-1} x^{n+1}$$

Aunque no es tan simple como para el resto de las funciones elementales, podemos probar que el resto converge a 0 y se obtienen las siguientes igualdades:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad x \in [-1,1], \quad \alpha > 0$$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad x \in (-1,1], \quad -1 < \alpha < 0$$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad x \in (-1,1), \quad \alpha \le -1$$

Función Arco–Seno. Recordemos que su dominio es $[-1,1]$ y su codominio es $[^{-\pi}\!/_2, {}^{\pi}\!/_2]$. En este caso, en lugar de obtener el polinomio de Taylor, utilizamos las propiedades algebraicas de las series de potencias para obtener directamente la serie de Taylor. Concretamente, utilizamos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arc\,sen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+(-x^2))^{-1/2} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

Tras integrar y estudiar la convergencia en los extremos con el criterio de Raabe, obtenemos:

$$\operatorname{arc\,sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-1/2}{n} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}, \quad |x| \le 1$$

Función Arco–tangente. Recordemos que el dominio de esta función es $\mathbb{R}$ y su codominio es el intervalo $[^{-\pi}\!/_2, {}^{\pi}\!/_2]$. Nuevamente, obtenemos la serie de Taylor a partir de su derivada:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad |x| < 1$$

Integrando y deduciendo la convergencia en los extremos con el criterio de Leibniz, obtenemos:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad |x| \leq 1$$

2.4.5.1. Evaluación aproximada de Funciones

Como ya sabemos, la principal aplicación del desarrollo de Taylor es la evaluación aproximada de funciones mediante los desarrollos deducidos en la sección anterior. Debemos tener en cuenta que la evaluación aproximada no tiene ninguna utilidad si no se acompaña de una estimación del error cometido. Para esto, podemos utilizar el resto de Taylor o, cuando se posible, las fórmulas de estimación asociadas a los criterios de convergencia de Leibniz, raíz, cociente y Raabe; en estos casos, tras escribir el valor de la función en un punto como una serie numérica y aplicar el criterio adecuado.

Sabemos que algunos desarrollos de Taylor son válidos solamente en una parte del dominio, en estos casos, tendremos que utilizar algunas manipulaciones algebraicas para evaluar las funciones en el resto de los puntos:

Ejemplo 2.4.25 El desarrollo de Taylor de la función logaritmo permite evaluar $\log a$ si $a \in (0, 2]$. Para evaluar esta función fuera de ese intervalo, tenemos que utilizar previamente las propiedades del logaritmo; concretamente, en este caso podemos usar la igualdad:

$$\log a = -\log \frac{1}{a}$$

Por ejemplo, una serie convergente a $\log 3$ sería

$$\log 3 = -\log \frac{1}{3} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (\frac{1}{3} - 1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{(-2)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n 3^n} \qquad \Box$$

Ejemplo 2.4.26 Tampoco podemos usar directamente la serie de la función potencial para evaluarla fuera del intervalo $(-1, 1)$. En este caso, unas simples manipulaciones algebraicas nos ayudaran a transformar el número deseado para su evaluación posterior. Por ejemplo, si queremos aproximar $\sqrt[3]{10}$ podríamos multiplicar y dividir dentro de la raiz por 2^3:

$$\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{\frac{10}{8} 8} = 2\sqrt[3]{1 + \frac{1}{4}} = 2p_{1/3}(1/4) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} \frac{1}{4^n} \qquad \Box$$

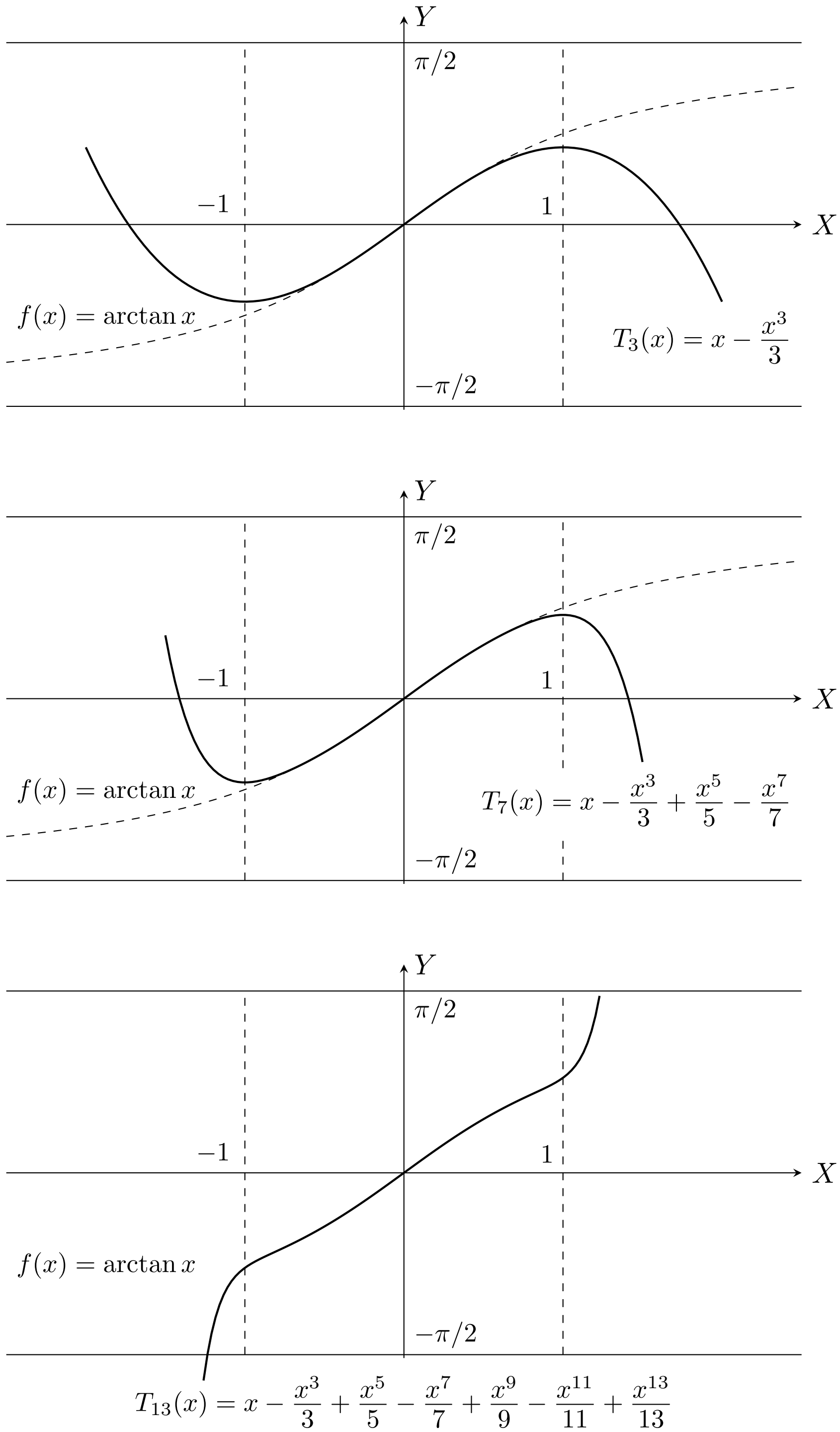


Figura 2.4: Función arcotangente y algunos polinomios de Taylor.

Ejemplo 2.4.27 En el listado de la sección anterior, no hemos construido una serie de Taylor para la función arcocoseno; la razón es que para su evaluación podemos utilizar la siguiente igualdad que se deduce da la relación entre el seno y el coseno de ángulos complementarios:

$$\operatorname{arc}\cos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\operatorname{sen} x$$

De esta forma, si queremos evaluar la función arcocoseno de forma aproximada, bastaría con usar una aproximación de π y una aproximación del arcoseno. $\square$

Ejemplo 2.4.28 Para evaluar la función arcotangente fuera del intervalo $[-1, 1]$, utilizamos una igualdad similar a la del ejemplo anterior:

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{x} \qquad \square$$

Relación de ejercicios (I)

1. Consideremos las siguientes sucesiones:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \qquad b_n = \frac{n}{n+1}, \qquad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 3a_{n-1} \quad \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$$

   a) Calcule los primeros términos de las sucesiones y deduzca "intuitivamente" las características de las sucesiones (monotonía, acotación y convergencia).

   b) Estudie formalmente las propiedades de monotonía, acotación y convergencia.

2. Calcule los siguientes límites

$$\lim \frac{n+3}{n^3+4}, \qquad \lim \frac{n+3n^3}{n^3+4}, \qquad \lim \frac{3-n^5}{n^3+4}$$

   Deduzca la regla que determina el límite del cociente de dos expresiones racionales.

3. Consideremos la sucesión $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = \sqrt{1+a_{n-1}} \end{cases}$

   a) Determine los 5 primeros términos de la sucesión.

   b) Demuestre por inducción que la sucesión es decreciente.

   c) Demuestre por inducción que $1 \le a_n \le 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   d) ¿Podemos afirmar que la sucesión es convergente? En tal caso, calcule su límite.

4. Calcule los siguientes límites utilizando las constantes 'e' y γ.

$$a)\ \lim \left(\frac{n+2}{n+4}\right)^{5-n}, \qquad b)\ \lim\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\right)$$

5. Utilice el teorema de compresión para calcular: $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$.

6. Utilice el criterio de Stöltz y el del cociente para calcular los siguientes límites:

$$a)\ \lim \frac{\log(1\cdot 2\cdot\dots\cdot n)}{n\log n}, \qquad b)\ \lim \frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\dots(3n+n)}$$

7. Estudie la existencia de los siguientes limites y calcúlelos, en su caso:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{x}{2+\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}}.$$

8. Calcule el límite $\lim(\sqrt[4]{n}-\sqrt[4]{n-1})$.

9. Consideremos la ecuación $x^3-2x+2=0$. Estudiando la función $f(x)=x^3-2x+2$, deduzca la ecuación solo tiene una solución real. Utilice el método de las bisecciones y el de Newton para aproximar esta solución real con un error menor que $\frac{1}{2}10^{-2}$.

10. Utilice el método de los trapecios para aproximar la siguiente integral con un error menor que $\frac{1}{2}10^{-3}$

$$\int_2^4 \frac{x^3}{x^2-2}\mathrm{d}x$$

11. Estudie la convergencia de las siguientes series analizando si son telescópicas.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(n+1)} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$$

12. Utilice las propiedades elementales para estudiar la convergencia de las siguientes series y obtenga la suma de las convergentes.

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}5\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{3n^2}{5-n} \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\frac{3^{2n}}{9^{2n-1}} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n}$$

13. Determine cuáles de las siguientes series son aritmético-geométricas y súmelas sin utilizar ninguna fórmula:

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{5^n} \qquad c)\ \sum_{n=2}^{\infty}(2n-1)\mathrm{e}^n$$

14. Determine cuáles de las siguientes series son hipergeométricas y súmelas sin utilizar ninguna fórmula.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}, \qquad b)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(a+1)\cdots(a+n)}{n!}, \qquad c)\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

15. Consideremos la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

   a) Si S_n es su sucesión de sumas parciales, determine los límites de las sucesiones: $P_n=S_{2n}$ e $I_n=S_{2n+1}$ usando la sucesión convergente a la constante de Euler.

b) Utilice el siguiente resultado para deducir la suma de la serie propuesta:

Teorema: Si $\lim a_{2n} = \lim a_{2n+1} = \ell$, *entonces la sucesión* a_n *también converge a* ℓ.

16. Estudie el carácter de las siguientes series:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}},\ a \geq 0$$

17. Las tablas de infinitésimos e infinitos equivalentes que hemos estudiado en la lección anterior nos ayudan a determinar series con el mismo carácter a través del criterio de comparación. Utilizar esta idea para estudiar el carácter de las siguientes series:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n^2}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2n^3-1}$$

18. Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n}$ es convergente y aproxime el valor de su suma con un error menor que 10^{-3}.

19. Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n}$ es convergente y aproxime su suma con un error menor que 10^{-3}.

20. Hallar los campos de convergencia de las series de potencias siguientes:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-5)^n \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n!}$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^2}(x-1)^n \qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

21. Utilice el teorema 2.4.35 para demostrar que $T(x) = x - \frac{x^3}{3}$ es el polinomio de Taylor de la función $\operatorname{arc\,tg} x$ de orden 3 en el punto $x = 0$.

22. Queremos aproximar el valor de $\sqrt{\mathrm{e}}$, ¿qué función considera más adecuada para este objetivo, la función exponencial o la función raíz cuadrada? Razone la respuesta y utilice la función elegida para aproximar dicho número con un error menor que 10^{-3} (dos decimales exactos).

23. Lea la parte de la sección 2.4.5 dedicada a las funciones potenciales y posteriormente conteste los siguientes apartados

    a) Evalúe y simplifique el número combinatorio $\binom{1/2}{n}$ para $n = 0, \dots, 4$.

    b) Simplifique la expresión $\binom{1/2}{n}$

c) Utilice la expresión obtenida en el apartado anterior para excribir el polinomio de Taylor de orden n en 0 de la función $f(x) = \sqrt{1+x}$.

d) Siguiendo las indicaciones de la sección 2.4.5.1, construya una serie cuya suma sea $\sqrt{5}$ y elija el método más adecuado para aproximar su valor con un error menor que 10^{-3}.

24. Considere la función $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x}$.

a) Utilice el polinomio de Taylor de la función exponencial, su expresión del resto de Lagrange y las propiedades algebraicas para obtener el polinomio de Taylor de f y una expresión de su resto.

b) ¿El resto obtenido en el apartado anterior es el resto de Lagrange de la función f? En cualquier caso, utilícelo para hallar $f(1/4)$ con un error menor que 10^{-4}.

25. Utilice el teorema 2.4.36 para determinar un infinitésimo equivalente $x^2 - 2 - 2\cos x$ en 0. Úselo para calcular el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2 - 2\cos x}{x^4 \mathrm{e}^x}.$$

Calcule igualmente el límite usando el teorema de L'Hôpital.

26. Determine la serie de Taylor de la función $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$ usando el siguiente proceso.

a) A partir de la serie de $\dfrac{1}{1-x}$, obtenga por derivación la de $\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

b) Exprese la función g como suma de fracciones simples.

c) Utilice las propiedades algebraicas y los apartados anteriores para construir la serie de Taylor de f.

27. Obtenga la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2^{n+1}}$ usando el siguiente proceso:

a) Sume la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ usando las propiedades de derivación y las propiedades algebraicas de las series de potencias que permitan reducirla a una serie más simple.

b) Evalúe la serie del apartado anterior en un valor de x adecuado para poder sumar la serie propuesta.

28. Siguiendo el método del ejemplo 2.4.24, sume la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-2}{n!}$.

Relación de ejercicios (II)

1. Responder las siguientes preguntas razonando las respuestas con «precisión»:

   a) Dadas dos sucesiones a_n y b_n consideramos los conjuntos de sus elementos: $A = \{a_n\}$, $B = \{b_n\}$. Si $A = B$, ¿podemos afirmar que $\lim a_n = \lim b_n$?

   b) Es cierto que ¿toda sucesión acotada es convergente?

   c) ¿Es correcto escribir la igualdad simbólica $\frac{\infty}{0} = \infty$?

   d) Si $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \operatorname{sen} n$, ¿podemos afirmar que el límite $\lim \sqrt[n]{a_n}$ no existe?

   e) Las sucesiones $a_n = \operatorname{sen} n$ y b_n ¿son infinitésimos equivalentes?

2. Determine el término general de la siguiente sucesión y calcule su límite

$$0, 0'9, 0'99, 0'999, 0'9999, \dots$$

3. Consideremos las siguientes sucesiones:

$$a_n = \frac{-3n+5}{n} \quad , \quad b_n = (-3)^n \quad , \quad c_n = \frac{n^2-3n}{n!} \quad , \quad \mathrm{d}_n = \frac{1}{\sqrt{n+4}}$$

   Para cada una de ellas, calcule los primeros términos, analice intuitivamente sus propiedades (monotonía, acotación y convergencia) y finalmente estúdielas formalmente.

4. Calcule y exprese de la forma más simplificada posible los primeros términos de las siguientes sucesiones

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}, \qquad b_n = \frac{(n+1)(n+2)\cdot(n+n}{2n(2n+1)(2n+2)\dots(2n+n)}$$

5. Consideramos la siguiente sucesión definida por recurrencia:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} - 3 \quad \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$$

   a) Calcule los diez primeros términos de la sucesión y analice intuitivamente sus características (monotonía, acotación y convergencia).

   b) Estudie formalmente las propiedades de monotonía, acotación y convergencia.

   c) Deduzca el término general de la sucesión.

6. Consideramos la siguiente sucesión definida por recurrencia:

$$\begin{cases} b_1 = 3 \\ b_n = b_{n-1} + n \quad \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$$

   a) Calcule los diez primeros términos de la sucesión y analice intuitivamente sus características (monotonía, acotación y convergencia).

   b) Estudie formalmente las propiedades de monotonía, acotación y convergencia.

   c) Deduzca el término general de la sucesión.

7. Justifique que las siguientes sucesiones son convergentes y calcule sus límites

$$\begin{cases} c_1 = \sqrt{2} \\ c_n = 2\sqrt{c_{n-1}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{d}_1 = a > 0 \\ \mathrm{d}_n = a + (\mathrm{d}_{n-1})^2 \end{cases}$$

8. Resolver los siguientes límites:

   a) $\lim \dfrac{\log n}{\log 5n}$ b) $\lim \dfrac{\log(n+3)}{\log n}$

9. Resuelva los siguientes límites:

   a) $\lim \left(n - \sqrt{(n+a)(n+b)}\right)$ b) $\lim n\,(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n-1]{a})$

10. Los siguientes límites se resuelven utilizando el criterio de Stöltz o el criterio del cociente:

   a) $\lim \sqrt[n]{n^2+n}$ b) $\lim \dfrac{1}{n^2}\left(2 + \dfrac{3^2}{2} + \cdots + \dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right)$

   c) $\lim \dfrac{(\log n)^2}{n}$ d) $\lim \dfrac{2+4+\cdots+2^n}{3+9+\cdots+3^n}$

11. Utilice el criterio de Stöltz y la equivalencia $(n+1)^\alpha - n^\alpha \equiv \alpha n^{\alpha-1}$ para calcular el límite $\lim a_n = \dfrac{n^{8/3}}{\mathrm{e}^n}$.
    Razone que, aplicando sucesivamente el criterio de Stöltz, se puede llegar a la misma conclusión para el límite $\lim a_n = \dfrac{n^\alpha}{\mathrm{e}^n}$, para cada α

12. Los siguientes límites se resuelven utilizando el criterio de Stöltz o el criterio del cociente:

   a) $\lim \dfrac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}, (p \in \mathbb{N})$

   b) $\lim \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}$

13. Sea a_n una sucesión tal que $\lim a_n = a$; utilice el criterio de Stöltz para calcular

$$\lim \frac{a_1 + \dfrac{a_2}{2} + \cdots + \dfrac{a_n}{n}}{\log n}$$

14. Calcule el límite $\lim \dfrac{n!}{n^n}$ utilizando el teorema de compresión.

15. Utilice el teorema de acotación para calcular los siguientes límites:

    a) $\lim \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+n)^2}$

16. Utilice el teorema de compresión para calcular el límite de las sucesiones:

$$a)\ \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n})} \qquad b)\ \frac{(-1)^n}{n}$$

17. Demuestre que si kn^p es el término de grado mayor en el polinomio $P(n)$, entonces $a_n = P(n)$ y $b_n = kn^p$ son infinitos equivalentes.

18. Demuestre que $a_n = \log(n+k)$, $b_n = \log(kn)$ y $c_n = \log n$ son infinitos equivalentes y utilícelo para calcular el límite

$$\lim \frac{3\log(n-7)}{2\log(5n)}$$

19. Demuestre que $a_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$ y $b_n = \alpha n^{\alpha-1}$ son infinitos equivalentes.

20. Calcule el límite $\lim \dfrac{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\sqrt[3]{\mathrm{e}}\dots\sqrt[n]{\mathrm{e}}}{n}$

21. Calcule el siguiente límite

$$\lim \frac{\log(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})}{\log(\log n)}$$

22. Supongamos que $\lim a_n = a$; halle los siguientes límites:

    a) $\lim \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2}$

    b) $\lim \dfrac{\mathrm{e}^{a_1} + \mathrm{e}^{a_2/2} + \cdots + \mathrm{e}^{a_n/n} - n}{\log(n+1)}$

23. Utilice la constante de Euler para calcular el siguiente límite

$$\lim \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

24. Utilice la caracterización secuencial y el teorema de L'Hôpital para calcular $\lim \dfrac{n^\alpha}{e^n}$.

25. Razonar con «exactitud» sobre la veracidad de las siguientes afirmaciones:

    a) Si a una serie le quitamos un conjunto finito de términos, la suma de la serie no varía.

    b) Si una serie es convergente, el límite de su término general es 0.

    c) Si el límite de una sucesión es 0, la serie asociada es convergente.

    d) Si $\sum a_n$ es una serie de términos positivos y convergente, entonces $\sum a_n^2$ también es convergente.

    e) Si $\sum a_n$ es una serie de términos positivos y convergente, entonces $\sum \sqrt{a_n}$ también es convergente.

    f) Consideremos la serie $\sum(-1)^n/n$; por el criterio de condensación, el carácter de esta serie coincide con el de la serie $\sum 2^k \dfrac{(-1)^{2^k}}{2^k} = \sum 1$ que es divergente. Por tanto, la serie $\sum(-1)^n/n$ es divergente.

26. Demuestre que la siguiente serie es *telescópica*, estudie su convergencia y súmela si es posible.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)}$$

27. Demuestre que las siguientes series son telescópicas, estudie su carácter y súmelas si es posible.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n(n+1)}{2^{n+1}n(n+1)}$$

28. Estudie el carácter y sume si es posible las siguientes series:

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{5^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{3^n} \qquad c)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n}$$

29. Estudie la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)}$ y súmela aplicando el siguiente procedimiento:

    a) Escriba el término general como suma de fracciones simples.

    b) Simplifique la expresión de la sucesión de sumas parciales utilizando la constante de Euler.

c) Calcule el límite de la expresión de la sucesión de sumas parciales obtenida en el apartado anterior.

30. Sume la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2+4+8+\cdots+2^n}{3^n}$

31. Sume las siguientes series aritmético-geométricas:

$$d)\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1-n}{5^n} \qquad\qquad e)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n-2}{2^n}$$

32. Sume las siguientes series aritmético-geométricas:

$$f)\ \sum_{n=5}^{\infty} (n+3)\frac{(-1)^n}{2^n} \qquad\qquad g)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{10^n}$$

33. Deduzca la fórmula general de la suma de la serie aritmético geométrica:

$$\sum_{n=N}^{\infty} (an+b)r^n \qquad \text{si} \quad |r|<1$$

34. Teniendo en cuenta que es una serie hipergeométrica, sume la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

35. Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,a^n}{(1+a)(1+2a)\cdots(1+na)}$ es hipergeométrica y súmela si es posible.

36. Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{b(b+1)\dots(b+n-1)}$ es hipergeométrica y súmela si es posible.

37. Deduzca una fórmula general para la suma de una serie hipergeométrica.

38. Consideremos la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} R(n)r^n$, en donde R es una función racional.

    a) Si $|r| \neq 1$, utilice el criterio del cociente para demostrar que la serie converge si y solo si $|r|<1$.

    b) Si $r=1$, en la relación anterior hemos analizado el carácter de la serie resultante. Para $r=-1$, demuestre que:

    1) Si $q-p>1$ la serie converge absolutamente.
    2) Si $q-p=1$ la serie converge condicionalmente.
    3) Si $q-p<1$ la serie diverge.

    en donde p es el grado del polinomio del numerador y q es el grado del polinomio del denominador

39. Deduzca el criterio de Pringsheim como corolario del criterio de comparación por paso al límite.
Criterio de Pringsheim. Sea a_n *una sucesión de términos positivos y supongamos que* $\lim n^c a_n \neq 0$. *Probar que: (1) si* $c > 1$ *entonces,* $\sum a_n$ *converge; (2) si* $c \leq 1$ *entonces,* $\sum a_n$ *no converge.*

40. *Criterio del logaritmo. Sea* $\sum a_n$ *una serie de términos positivos. Si*

$$k = \lim \frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n}$$

entonces se verifica que

- *Si* $k < 1$ *la serie diverge.*
- *Si* $k > 1$ *la serie converge.*

 a) Estudie el criterio del logaritmo para estudiar la convergencia de series p-armónicas (corolario 2.4.16).

 b) Si es posible, aplique el criterio del logaritmo para estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \qquad b)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{2^n} \qquad c)\ \sum_{n=3}^{\infty} n \qquad d)\ \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n}$$

41. Aplique infinitos equivalentes para encontrar series p-armónicas con el mismo carácter que las siguientes y deduzca su carácter:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 5n + 8}{n - 2} \qquad b)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n^2 + 5n - 3}{2 - 3n^5}$$

42. Sean f y g dos funciones crecientes y estrictamente positivas en su dominio, h una función decreciente, c_n una sucesión creciente y d_n una sucesión decreciente. Utilice las propiedades algebraicas de la relación de orden para demostrar que:

 a) $f + g$ es una función creciente.

 b) $f \cdot g$ es una función creciente.

 c) $1/f$ es una función decreciente.

 d) $-f$ es una función decreciente.

 e) $f \circ g$ es una función creciente y $f \circ h$ es una función decreciente.

 f) $f(c_n)$ es una sucesión creciente y $f(\mathrm{d}_n)$ es una sucesión decreciente.

 g) $h(c_n)$ es una sucesión decreciente y $h(\mathrm{d}_n)$ es una sucesión creciente.

43. Consideremos la sucesión $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$ para algún $x > 0$.

    a) Estudie la convergencia de la serie $\sum a_n$.

    b) ¿Podemos deducir le valor $\lim a_n$?

44. Estudie el carácter de las siguientes series:

i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$ ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ iii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$

iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n^3}$ v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$

vii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^r}$ viii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$ ix) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \log n}$

x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}$ xi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}$ xii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(3n+2)\cdot n^{4/3}}$

xiii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)\cdots(a+n)}{n!}$ xiv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$ xv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{n!}$

xvi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n + \frac{2n}{n-1}\right]^{-n}$ xvii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ xviii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot\cos^2\frac{\pi n}{3}}{2^n}$

xix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^1+\cdots+2^n}{4^n}$ xx) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos^2 n}{n^3}$ xxi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 n}{n^4}$

xxii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2n+\cdots+n^2}{n^5}$ xxiii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n!}\right)$ xxiv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$

xxv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}\ (a>0)$ xxvi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ xxvii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\frac{1}{n}$

xxviii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)\ldots(b+n-1)}$ xxix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4n^2}\right)$ xxx) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^c}{(3n)!}$

xxxi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(9-a^2)n^3+3n^2+1}{7n^4-1}$ xxxii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(an)!}$ xxxiii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^n}$

xxxiv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{n}$ xxxv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$ xxxvi) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^a}$

xxxvii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-2)^n}$ xxxviii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ xxxix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^a+1}-\sqrt{n^a})$

xl) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^a(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1})$ xli) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{7n+4}\right)^{4n-2}$ xlii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$

45. Halle los campos de convergencia de las series de potencias siguientes:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} x^n$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{1+2n}} x^n$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} (x+2)^n$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{3^n} (x+3)^n$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} (x+1)^n$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(1+n)} (x-1)^n$

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{5^n} (x-2)^n$

n) $\sum_{n=1}^{\infty} (\log n) x^n$

ñ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n} x^n$

o) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-\sqrt{n}}$

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \log \frac{2n+1}{n}$

q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!} x^n$

r) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} (x+1)^n$

s) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-1)^n$

t) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} x^n$

u) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\log n)^n}$

46. Utilice el teorema 2.4.35 para demostrar que $1 - \frac{x^2}{2}$ es el polinomio de Taylor de la función $\cos x$ en el punto $x = 0$.

47. Utilice el teorema 2.4.35 para demostrar que $-1 + x$ es el polinomio de Taylor de la función $\log x$ en el punto $x = 1$.

48. *a*) Calcule e con un error menor que 10^{-8}. ¿Cuántas cifras decimales de esta aproximación son exactas?

    b) Calcule $\sqrt{\mathrm{e}}$ con error menor que 10^{-5}.

    c) Calcule $\operatorname{sen} 1$ con un error menor que 10^{-4}.

    d) Calcule $\log 1'5$ con un error menor que 10^{-4}.

49. Lea la sección 2.4.5.1 y utilícela para construir una serie cuya suma sea $\log 5$. Aproxime la suma de dicha serie, es decir, el valor de $\log 5$, con un error menor que 10^{-3}.

50. Para $f(x) = x^2 \cos x$, hallar $f(7\pi/8)$ con un error menor que 10^{-4}.

51. Para $n = 1$ y $n = 2$, exprese la función $\sqrt{1+x}$ como suma de su polinomio de Taylor de orden n más el correspondiente resto. Deduzca, para $x > 0$, las siguientes desigualdades:

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$$

52. Para $x > 0$, pruebe que: $\left|(1+x)^{1/3} - (1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9})\right| \leq \frac{5x^3}{81}$

53. Para $x \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$, pruebe que:

$$\left|\log(1+x) - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n})\right| < \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

54. Utilizando series de Taylor para determinar los infinitésimos adecuados para calcular el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + \log(1-x^2)}{2\cos x + \mathrm{e}^{x^2} - 3}$$

55. Utilizando series de Taylor para determinar los infinitésimos adecuados para calcular el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{2(1-\cos x)\operatorname{sen} x - x^3\sqrt[4]{1-x^2}}{x^5 - \operatorname{sen}^5 x} \qquad (= \frac{57}{400})$$

56. Sume las siguientes series:

$$a)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}, \qquad c)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+3n-1}{n!}.$$

57. Represente mediante serie de potencias de x las siguientes funciones:

$$a)\ f(x) = \operatorname{senh} x \qquad b)\ f(x) = \log\frac{1+x}{1-x}$$

58. Sume las siguientes series de potencias

$$a)\ \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)x^n \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-n}.$$

TEMA 3

Cálculo diferencial

Objetivos: Los objetivos del tema son: (1) saber parametrizar curvas planas de uso general y reconocer una curva a partir de una parametrización; (2) reconocer y saber identificar las características de las curvas cónicas; (3) saber calcular y aplicar las propiedades del vector gradiente de un campo escalar; (4) plantear y resolver problemas de optimización de campos escalares.

Prerrequisitos: Conocimientos básicos de algebra lineal y geometría (ecuaciones de una recta, vectores, etc.). Trigonometría. Cálculo de límites y derivación. Representación gráfica de funciones de una variable (determinar dominio, puntos de corte con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión, etc.)

Contenido

- Lección 3.1: Curvas parametrizadas. Parametrización de curvas planas. Asíntotas. Curvas polares. Cónicas.
- Lección 3.2: Campos escalares. Campos escalares lineales. Continuidad. Derivadas direccionales. Plano tangente y derivadas parciales. Diferenciabilidad. Vector gradiente. Derivadas de orden superior.
- Lección 3.3: Optimización de campos escalares. Extremos locales. Criterio de la hessiana. Extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange. Extremos absolutos

LECCIÓN 3.1

Curvas planas

El objetivo último de las matemáticas es *modelizar* el mundo real. Es decir, representar y describir diversos aspectos del mundo real mediante conceptos matemáticos que ayuden a estudiarlo. En particular, en esta lección nos centramos en la representación de objetos y figuras que genéricamente denominamos *lugares geométricos*. Podemos entender fácilmente cuál es nuestro objetivo con el siguiente problema: *traza en un papel tres rectas que se corten formando un triángulo y luego dale indicaciones a un compañero para que haga exactamente el mismo dibujo*. Seguramente, las indicaciones dadas estarán basadas en objetos matemáticos: sistemas de referencias, distancias, ángulos,...

Para lograr resolver el problema anterior no se necesitan demasiados elementos, pero ¿cómo haríamos lo mismo si en lugar de rectas quisiéramos describir una *curva*? Este es el problema general que abordamos en esta lección. Aprenderemos a describir curvas, a dibujarlas a partir de una descripción y, en particular, conoceremos un conjunto de curvas ampliamente usadas en matemáticas y física y que se denominan *cónicas*.

Aunque toda la teoría que vamos a mostrar se puede aplicar fácilmente a curvas en el espacio o incluso en dimensiones mayores a 3, nos vamos a centrar solamente en curvas en el plano.

3.1.1. Curvas parametrizadas

Es fácil imaginar una curva como una recta a la que se aplica un determinada deformación. Es decir, una curva es una figura de una única dimensión pero que no sigue una dirección constante. Esta imagen intuitiva nos lleva a la representación más sencilla de una curva: la descripción de cada punto de la misma en función de *un parámetro*. Por ejemplo, si queremos describir la trayectoria que seguimos en un paseo, bastaría con dar nuestra posición en cada instante de tiempo; en este caso, el tiempo sería el parámetro que describe la curva trazada por nuestra trayectoria.

DEFINICIÓN 3.1.1 *Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ se dice que es una* curva parametrizada *si existe un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y dos funciones $x\colon I \to \mathbb{R}$, $y\colon I \to \mathbb{R}$ tales que*

$$C = \{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$$

Habitualmente, presentamos las curvas parametrizadas escribiendo:

$$\begin{cases} X = x(t) \\ Y = y(t) \\ t \in I \end{cases}$$

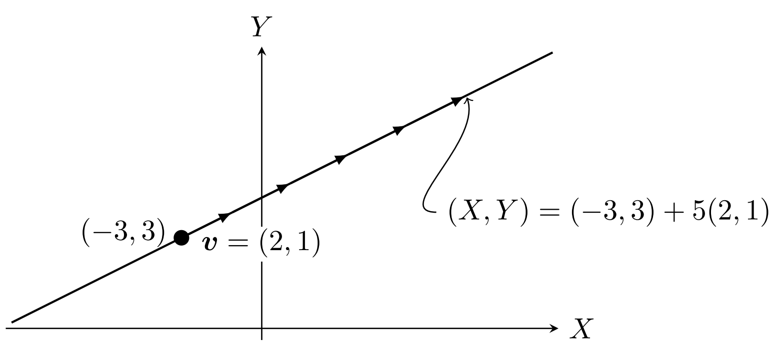
o de forma más compacta $(X, Y) = (x(t), y(t))$, $t \in I$. Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones paramétricas de la curva* y la variable t se denomina *parámetro*.

EJEMPLO 3.1.1 *Ecuaciones paramétricas de una recta.* La recta que pasa por un punto (a, b) en la dirección del vector $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ es:

$$\begin{cases} X = a + v_1 t \\ Y = b + v_2 t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

En este caso, el parámetro t representa la distancia al punto (a, b), siendo la unidad de medida el módulo del vector $\boldsymbol{v}$, es decir, $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

En la figura siguiente, representamos la recta que pasa por $(-3, 3)$ y toma la dirección $(2, 1)$, es decir, $(X, Y) = (-3, 3) + t(2, 1) = (-3 + 2t, 3 + t)$. En la figura, destacamos el punto correspondiente a $t = 5$.



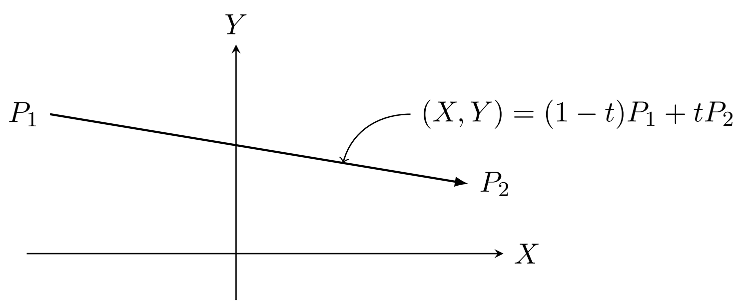
□

En este ejemplo hemos utilizado la notación $\|\boldsymbol{v}\|$ para representar el módulo del vector $\|\boldsymbol{v}\|$; esta función se denomina igualmente *norma* y otras notaciones que podemos encontrar en la bibliografía son $|\boldsymbol{v}|$ ó $\|\boldsymbol{v}\|_2$.

El uso de letras en matemáticas es imprescindible para representar variables, constantes, parámetros,... Ya hemos advertido que habitualmente usamos letras cursivas (mayúsculas o minúsculas) para representar variables que a su vez pueden corresponder a cualquier objeto matemático: números naturales, racionales, reales, complejos, puntos en un plano, vectores,... También hemos podido observar que solemos usar determinadas letras para objetos específicos: x para incógnitas de ecuaciones o para la abscisa de puntos; n, k para números naturales; z para números complejos; t para representar el tiempo,... Debe de quedar claro que estas identificaciones se hacen por tradición y para ayudar a la lectura de fórmulas y expresiones, pero no es obligatorio y en muchos casos no respetaremos estas asociaciones.

Por otra parte, en el ejemplo anterior, hemos usado letras en negrita para representar vectores. Siguiendo con la idea del párrafo anterior, es habitual usar algún elemento distintivo para estos objetos, como la letra negrita que usaremos en el curso o flechas sobre las letras que podemos encontrar en algunos textos. También debe quedar claro que estos elementos no son imprescindibles y solo se usan para facilitar la lectura.

Ejemplo 3.1.2 *Parametrización de un segmento.* En el ejemplo anterior, las ecuaciones se corresponden con una recta infinita. Sin embargo, es frecuente que solo estemos interesados en el segmento que une dos puntos P_1, P_2.



Para parametrizar este segmento, basta tomar el vector director $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1$ y aplicar las ecuaciones del ejemplo anterior: $(X, Y) = P_1 + t\overrightarrow{P_1P_2}$. Sustituyendo el vector por su definición obtenemos

$$(X, Y) = (1 - t)P_1 + tP_2, \quad t \in [0, 1] \tag{3.1}$$

En este caso, el parámetro t es la proporción de la distancia a P_1 respecto de la longitud del segmento, es decir, si $Q = (x(t), y(t))$ es el punto correspondiente al valor t del parámetro, entonces $t = \frac{|P_1Q|}{|P_1P_2|}$. Por ejemplo, el segmento que une los puntos $(-1, -1)$ con $(0, 2)$ es:

$$(X, Y) = (1 - t)(-1, -1) + t(0, 2) = (t - 1, 3t - 1), \quad t \in [0, 1]$$

Es interesante observar que esta parametrización no da únicamente información de los puntos que forman el segmento, también describe *cómo* lo recorremos. En concreto, en la ecuación (3.1), el valor $t = 0$ nos devuelve el punto P_1, mientras que el valor $t = 1$ nos devuelve P_2, es decir, recorremos el segmento desde el punto P_1 al P_2. La siguiente parametrización también corresponde al mismo segmento, pero recorriéndolo en sentido contrario:

$$(X, Y) = (1 - t)P_2 + tP_1, \quad t \in [0, 1] \qquad \square$$

EJEMPLO 3.1.3 Ya sabemos que todas las funciones reales de variable real pueden representarse mediante su gráfica. Esta gráfica es un ejemplo de curva parametrizada que se denomina *grafo*:

$$\mathrm{gr}(f) = \{(t, f(t)) \mid t \in \mathrm{Dom}(f)\}$$

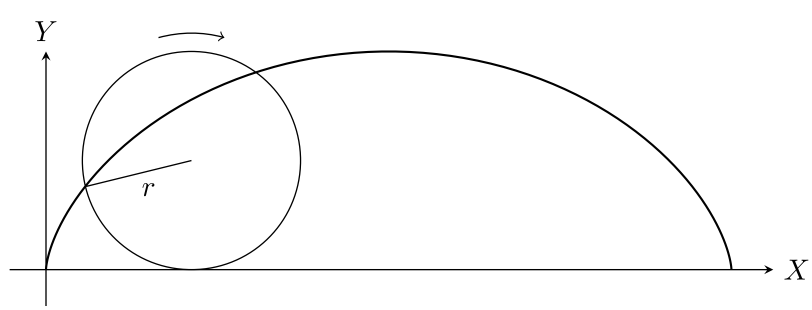
Es decir, las siguientes ecuaciones parametrizan el grafo:

$$\begin{cases} X = t \\ Y = f(t) \\ t \in \mathrm{Dom}(f) \end{cases}$$

En este caso, el parámetro coincide con la abscisa del punto. Se podría pensar que todas las curvas pueden ser representadas como grafos de una función, sin embargo, esto no es cierto. Por ejemplo, ninguna función tiene como gráfica a toda una circunferencia, aunque sí trozos de la misma. $\square$

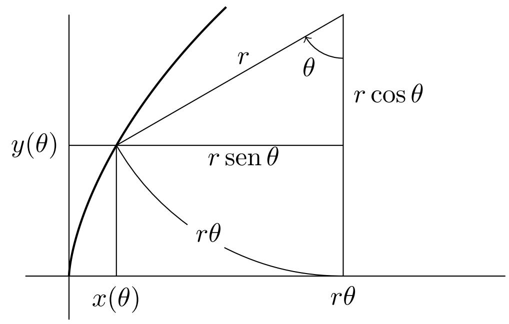
El problema de dar la parametrización de una curva descrita mediante propiedades geométricas suele ser bastante sencillo, ya que, en la mayoría de los casos, solo necesitamos aplicar elementos básicos de geometría.

EJEMPLO 3.1.4 En este ejemplo, parametrizamos la curva que se denomina *cicloide* y que se define como sigue: *curva que describe un punto fijo de una circunferencia que rueda sobre una recta.*



Si elegimos como parámetro el ángulo de giro de la circunferencia y tomamos un detalle de la figura anterior, se puede deducir las ecuaciones de la cicloide:

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta - \operatorname{sen}\theta) \\ y(\theta) = r(1 - \cos\theta) \end{cases}$$



$\square$

El concepto matemático que nos ayuda a manejar formalmente las ecuaciones paramétricas es el de *función vectorial de variable real.*

Definición 3.1.2 *Una* función vectorial de variable real *con dominio $D \subset \mathbb{R}$ es una aplicación $\boldsymbol{f}\colon D \to \mathbb{R}^n$. Esta función $\boldsymbol{f}$ viene determinada por n funciones reales de variable real, $f_i\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de modo que $\boldsymbol{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$.*

Habitualmente, trabajaremos con curvas con un aspecto suave y sin rupturas; para conseguir esto, necesitaremos que las parametrizaciones tengan ciertas características.

Definición 3.1.3 *Sea $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_n)\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$:*

1. *Decimos que $\boldsymbol{f}$ es continua en $a \in D$ si todas la funciones f_i son continuas en a. Decimos que $\boldsymbol{f}$ es continua en D si lo es en cada punto.*

2. *Decimos que $\boldsymbol{f}$ es derivable o diferenciable en $a \in D$, si todas la funciones f_i son derivables en a y llamamos derivada de $\boldsymbol{f}$ en a al vector: $\boldsymbol{f}'(a) = (f_1'(a), \dots, f_n'(a))$.*

Definición 3.1.4

1. *Una curva C se dice* continua *si admite una parametrización continua.*

2. *Una curva se dice* diferenciable *si admite una parametrización derivable.*

3. *Una curva se dice* regular *si admite una parametrización $\boldsymbol{f}$ tal que $\boldsymbol{f}'(t) \neq (0,0)$ para cada $t \in I$.*

El aspecto de una curva continua corresponde a una curva que se puede dibujar de “un solo trazo” o “sin levantar el lápiz del papel”. Por otra parte, sabemos que la gráfica de una función derivable tiene un aspecto *suave*, *sin picos*; sin embargo, para describir este tipo de curvas en general, no es suficiente con que la parametrización sea diferenciable, necesitaremos también que sea regular.

Ejemplo 3.1.5 La gráfica de la función $y = |x|$ es una curva diferenciable, ya que la parametrizacion $(x, y) = (t^3, |t|^3)$, $t \in \mathbb{R}$, es una parametrización diferenciable. Sin embargo, la curva no es regular. □

Debemos insistir en que el concepto de curva corresponde al subconjunto de puntos y *no a la función vectorial*. De hecho, una curva admite muchas parametrizaciones distintas. Esto supone que, por ejemplo, una curva diferenciable pueda tener parametrizaciones no diferenciables: $(\sqrt[3]{t}, \sqrt[3]{t^2})$ es una parametrización no diferenciable de la gráfica de $f(x) = x^2$, que sí es una curva diferenciable. De la misma forma, una curva regular puede tener parametrizaciones no regulares: (t^3, t^6) es una parametrización diferenciable pero no regular de la gráfica de $f(x) = x^2$, que sí es regular.

3.1.1.1. Representación de curvas

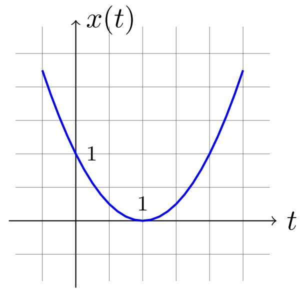
En general, no es fácil identificar una curva a partir de una parametrización, sin embargo, no resulta difícil deducir determinadas características que ayudan a esbozar su forma. A continuación mostramos algunas:

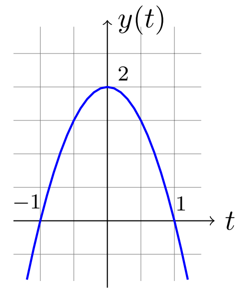
- Si $x(t)$ es creciente en un intervalo, la curva se recorre de izquierda a derecha; si es decreciente, se recorre de derecha a izquierda.
- Si $y(t)$ es creciente en un intervalo, la curva se recorre de abajo hacia arriba; si es decreciente, se recorre de arriba hacia abajo.
- Las ecuaciones $x(t) = 0$ e $y(t) = 0$ determinan los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

Ejemplo 3.1.6 Vamos a esbozar la curva con la siguiente parametrización:

$$\begin{cases} X = x(t) = t^2 - 2t + 1 \\ Y = y(t) = 2 - 2t^2 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

En primer lugar, vamos a representar gráficamente las funciones $x(t)$ e $y(t)$; para ello, son suficientes los conocimientos de cálculo en una variable y por ello no mostramos los detalles

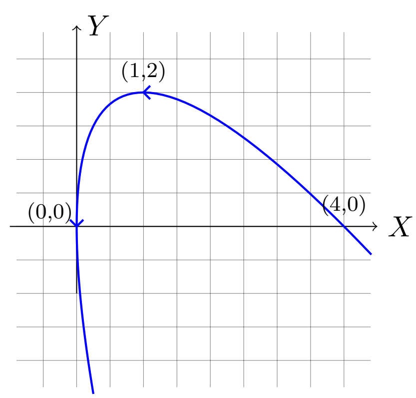




La función x pasa de decrecer a crecer en $t = 1$ y la función y pasa de crecer a decrecer en $t = 0$; los puntos correspondientes a estos valores del parámetro son:

$$(x(0), y(0)) = (1, 2), \qquad (x(1), y(1)) = (0, 0)$$

Por lo tanto: hasta $(1, 2)$ la curva se recorre de derecha a izquierda y de abajo a arriba; desde $(1, 2)$ hasta $(0, 0)$ la curva se recorre de derecha a izquierda y de arriba a abajo; desde el punto $(0, 0)$ se recorre de izquierda a derecha y de arriba a abajo. Teniendo en cuenta que la curva es regular, con la información anterior y situando los puntos de corte con los ejes, es fácil dibujar la curva:



□

Como hemos mencionado antes, si una curva es regular en un punto, entonces en ese punto la curva no tiene un pico. Geométricamente, esto se traduce en que es posible trazar una recta tangente a la curva en ese punto. Esta recta tangente se define a partir de la derivada de la parametrización.

DEFINICIÓN 3.1.5 *Sea $X = x(t)$, $Y = y(t)$, $t \in I$ una parametrización de la curva C. Si $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0,0)$, las siguientes ecuaciones determinan la* recta tangente *a C en el punto $(x(t_0), y(t_0))$:*

$$X = x(t_0) + \lambda x'(t_0)$$
$$Y = y(t_0) + \lambda y'(t_0)$$

En donde λ es el parámetro de la recta.

En la definición anterior, la recta tangente se define usando una parametrización; podemos eliminar el parámetro para obtener su ecuación cartesiana:

$$x'(t_0)(Y - y(t_0)) = y'(t_0)(X - x(t_0))$$

EJEMPLO 3.1.7 Si la curva es el grafo de una función real de variable real, es decir, $(X, Y) = (t, f(t))$, entonces, $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = f(x_0)$, $x'(t_0) = 1$ e $y'(t_0) = f'(t_0)$. Sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos la conocida expresión de la recta tangente a la gráfica de una función.

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(X - x_0)$$ □

EJEMPLO 3.1.8 En la curva del ejemplo 3.1.6,

$$\begin{cases} X = x(t) = t^2 - 2t + 1 \\ Y = y(t) = 2 - 2t^2 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

el vector tangente en $(x(t), y(t))$ es:

$$(x'(t), y'(t)) = (2t - 2, -4t)$$

Por lo tanto, el vector tangente en $t = 0$ es $(-2, 0)$ y la recta tangente en $(x(0), y(0)) = (1, 2)$ es paralela al eje OX; el vector tangente en $t = 1$ es $(0, -4)$ y la recta tangente en $(x(1), y(1)) = (0, 0)$ es paralela al eje OY. □

Otra interpretación del vector derivada proviene del campo de la física. Si la parametrización corresponde a la trayectoria de un movimiento en función del tiempo, la derivada se corresponde con el vector velocidad.

3.1.1.2. Asíntotas

Intuitivamente, una recta es asíntota de una curva si la distancia entre ambas va decreciendo a 0 al desplazarnos sobre la recta. En el ejercicio $3c$, se recuerda como determinar las asíntotas del grafo de una función, a continuación las estudiamos sobre una curva general.

El estudio de la existencia de una asíntota es diferente dependiendo de si la recta es vertical, horizontal u oblicua. El siguiente resultado muestra las condiciones que debemos comprobar para determinar la existencia de asíntotas.

Proposición 3.1.6 *Consideremos una curva* $(x(t), y(t))$, $t \in I$.

1. *Si para un valor del parametro* t_0, $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a$ *y* $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \infty$, *entonces la recta* $X = a$ *es una asíntota vertical de la curva.*
2. *Si para un valor del parametro* t_0, $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \infty$ *y* $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = a$, *entonces la recta* $Y = a$ *es una asíntota horizontal de la curva.*
3. *Si para un valor del parametro* t_0, $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$ *y* $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = m \in \mathbb{R}$, *entonces* $Y = mX + n$ *es una asíntota de la curva, en donde* $n = \lim\limits_{t\to t_0} (y(t) - mx(t))$.

Los tres apartados se verifican igualmente si consideremos t_0 *igual a* $\pm\infty$.

Obsérvese que las asíntotas se localizan en valores del parámetro que no pertenecen al dominio de, al menos, una de las dos coordenadas.

3.1.2. Curvas polares

Hemos visto en el tema anterior que una forma alternativa de representar los puntos de un plano es mediante *coordenadas polares*. En general, un sistema de coordenadas polares queda determinado por un punto O, llamado *polo*, y una semirecta con extremo en O, llamada *eje polar*. Dado un punto Q en el plano, consideramos la semirecta R con extremo en el polo y que pasa por Q (*recta radial* del punto); la posición de Q en coordenadas polares se fija por *distancia del punto al polo*, r, y el *ángulo* θ *entre el eje polar y la recta radial* medido en el sentido contrario a las agujas del reloj; el par $(r, \theta)_p$ es la descripción por *coordenadas polares* del punto Q.

El sistema cartesiano y el sistema polar se superponen identificando el polo con el origen de coordenadas y el eje polar con el semieje positivo de OX, tal y como se muestra en la figura 3.1.

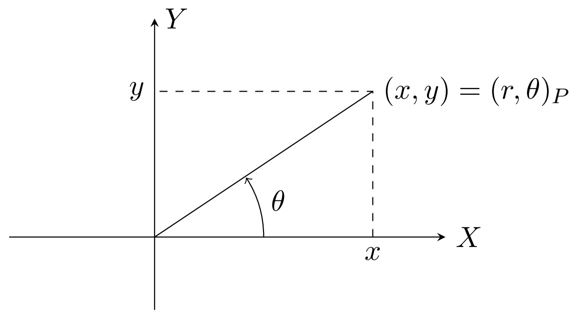


Figura 3.1: Sistema de representación polar.

DEFINICIÓN 3.1.7 *Dada una función* $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, llamamos* curva polar *asociada a* f *al conjunto de puntos* $(f(\theta), \theta)_p$ *del plano polar.*

Es decir, la curva polar asociada a f queda determinada por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} X = f(\theta)\cos\theta \\ Y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta \\ \theta \in D \end{cases}$$

Aunque la parametrización anterior permite estudiar las curvas polares como cualquier curva paramétrica, es conveniente utilizar las propiedades específicas de este tipo de curvas.

PROPOSICIÓN 3.1.8 *Si* $f'(\theta_0) = 0$*, entonces la curva polar correspondiente y la circunferencia de centro en el origen y radio* $f(\theta_0)$ *son tangentes en el punto* $(f(\theta_0), \theta_0)_P$*.*

PROPOSICIÓN 3.1.9 *Si* $f(\theta_0) = 0$ *y* $f'(\theta_0) \neq 0$*, entonces la recta radial con ángulo* θ_0 *es tangente a la curva polar correspondiente en el punto* $(f(\theta_0), \theta_0)_P$*.*

La demostración de este resultado es inmediata considerando la parametrización correspondiente a la curva polar:

$$x'(\theta) = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$
$$y'(\theta) = f'(\theta)\operatorname{sen}\theta + f(\theta)\cos\theta$$

Si $f(\theta_0) = 0$, entonces para ese ángulo se anula el segundo sumando de las dos derivadas anteriores y

$$x'(\theta_0) = f'(\theta_0)\cos\theta_0$$
$$y'(\theta_0) = f'(\theta_0)\operatorname{sen}\theta_0$$

Si ademas $f'(\theta_0) \neq 0$, entonces efectivamente el vector $(x'(\theta_0), y'(\theta_0))$ es efectivamente paralelo a $(\cos\theta_0, \operatorname{sen}\theta_0)$.

EJEMPLO 3.1.9 Vamos a dibujar la curva polar $r = 1 + 2\cos\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$. La parametrización de esta curva es:

$$\begin{cases} X = (1 + 2\cos\theta)\cos\theta \\ Y = (1 + 2\cos\theta)\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Pero en lugar de usarla para dibujar la curva, vamos a representar primero la función en el plano cartesiano y a trasladar la gráfica al plano polar usando las propiedades establecidas en los resultados anteriores, según se muestra en la página 163.

En primer lugar, dibujamos sobre los ejes de coordenadas un "mallado polar" sobre el que dibujaremos la curva. Esta malla es similar a la cuadrícula que dibujamos en el plano cartesiano y que nos sirve de referencia; pero en este caso, la malla está formada por rectas radiales correspondientes a ángulos significativos y circunferencias centradas en el origen con diferentes radios.

□

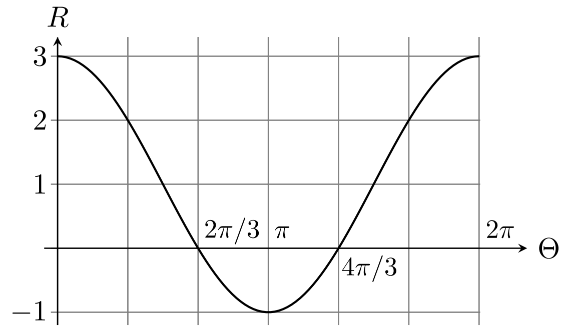
3.1.3. Cónicas

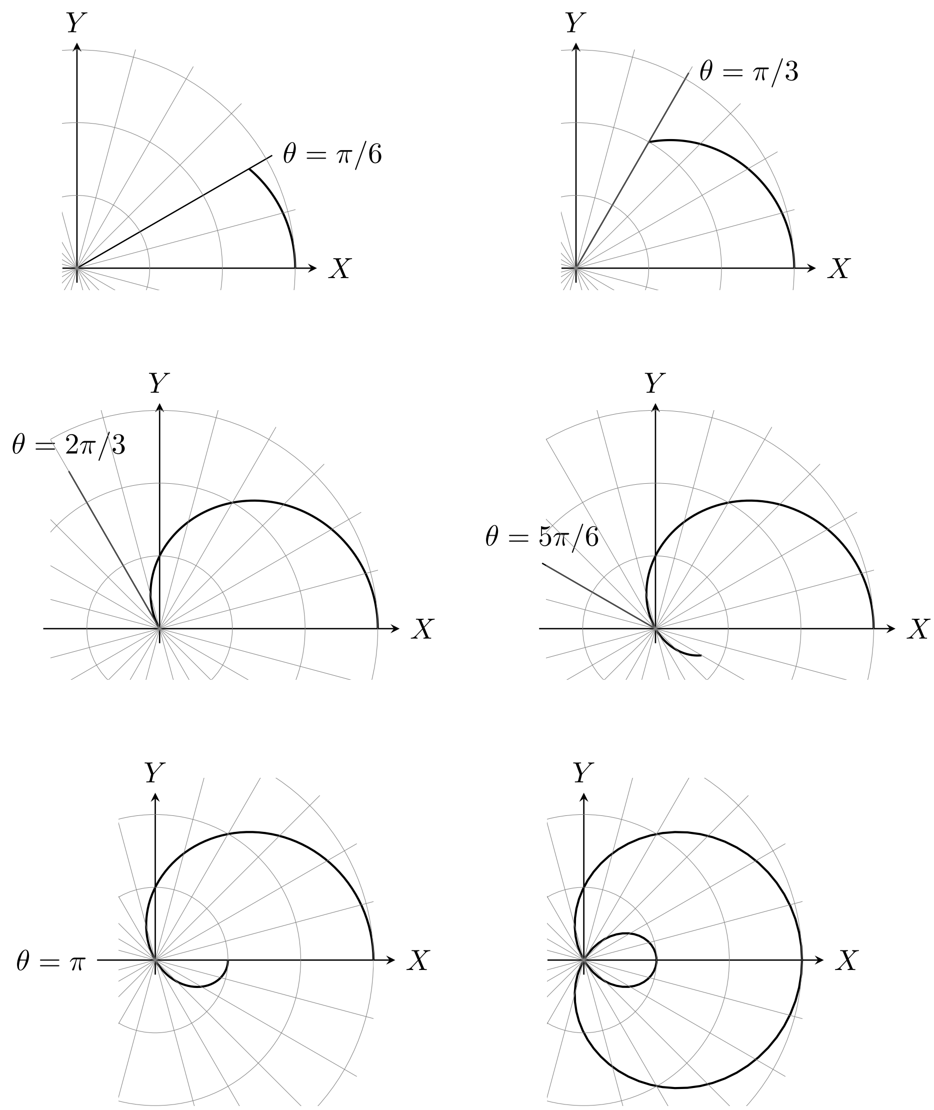
Una forma alternativa de describir *lugares geométricos* del plano es mediante *ecuaciones cartesianas*. Si $P(x, y)$ es cualquier expresión en la que aparecen involucradas las variables x e y, la igualdad $P(x, y) = 0$ se denomina ecuación cartesiana del siguiente conjunto de puntos:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x, y) = 0\}$$

Dependiendo de la expresión, este conjunto puede ser vacío, contener un único punto o un conjunto finito de puntos, describir una o varias rectas, una o varias curvas e incluso una región del plano. Para abreviar, diremos simplemente "consideremos la región $P(x, y) = 0$" en lugar de "consideremos la región $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x, y) = 0\}$".

EJEMPLO 3.1.10 Si $P(x, y)$ es un polinomio de grado uno en x e y, entonces $P(x, y) = 0$ es una recta. Por ejemplo, $x - 2y - 3 = 0$ describe una recta, de la cual sabemos que el vector $(1, -2)$ es un vector perpendicular a ella, es decir, $(2, 1)$ es un *vector director*; sustituyendo x por un valor cualquiera, obtenemos un punto de la recta: para $x = 0$, $-2y - 3 = 0$, es decir, $(0, -3/2)$ es un punto de la recta. A partir de


R
3
2
1
−1
2π/3
π
2π
4π/3
Θ


Y
X
θ = π/6
θ = π/3
θ = 2π/3
θ = 5π/6
θ = π

aquí, deducimos fácilmente una parametrización:

$$(X, Y) = \left(0, -\frac{3}{2}\right) + t(2, 1) = \left(2t, t - \frac{3}{2}\right) \qquad \square$$

En esta sección, nos vamos a centrar en las ecuaciones cartesianas definidas por un polinomio de grado dos en las variables x e y:

$$P(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{3.2}$$

Para que el polinomio en (3.2) tenga grado 2, necesariamente al menos uno de los coeficientes a, b o c tiene que ser distinto de cero; en tal caso, el lugar geométrico es una curva y se denomina *cónica*. También están incluidos algunos lugares geométricos que visualmente no son curvas propiamente dichas y que se denominan *cónicas degeneradas*; en el siguiente ejemplo mostramos ejemplos sencillos de este tipo de cónicas.

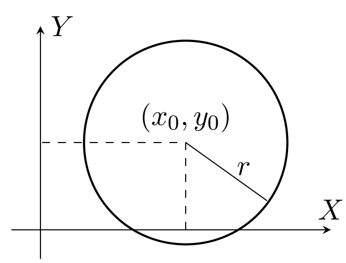
Ejemplo 3.1.11

1. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 + 1 = 0\} = \varnothing$
2. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 0\} = (0, 0)$
3. $\{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 0\}$ está formado por las rectas $x + y = 0$ y $x - y = 0$. $\square$

Aparte de los tres casos del ejemplo anterior, si el polinomio tiene grado dos, la ecuación (3.2) puede definir una de las cuatro curvas que presentamos en los apartados siguientes.

Circunferencia. El lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un punto fijo $C = (x_0, y_0)$ es constantemente $r > 0$, se denomina *circunferencia de centro C y radio r* y su ecuación cartesiana es:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



La circunferencia es un caso particular de elipse, que definimos en el ítem siguiente, aunque por su importancia, la destacamos como un tipo distinto.

Ejemplo 3.1.12 La ecuación $x^2+y^2=4$ determina una circunferencia centrada en el origen y de radio 2. Si con el mismo radio, queremos que esté centrada en $(-1,2)$, la ecuación será:

$$(x+1)^2+(y-2)^2=4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2+y^2+2x-4y+1=0 \qquad \Box$$

Observamos en este ejemplo que, al desarrollar los cuadrados, el polinomio no tiene término en xy y los coeficientes en x^2 e y^2 son iguales; de hecho, podemos caracterizar a las circunferencias como sigue: *si $b=0$ y $a=c$, entonces la ecuación 3.2 representa una circunferencia o una cónica degenerada*. Para deducir si es degenerada u obtener el centro y el radio de la circunferencia, basta con aplicar la técnica de completar cuadrados a los sumandos en x y a los sumandos en y.

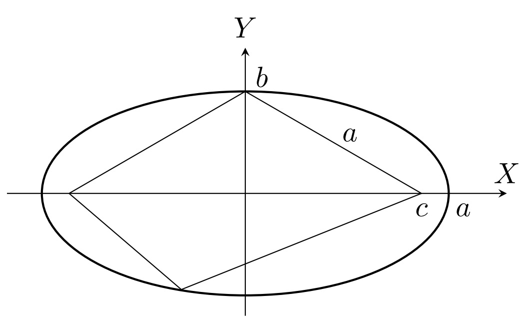
Ejemplo 3.1.13 La ecuación $9x^2+9y^2-36x+54y-116=0$ corresponde a una circunferencia:

$$0=9x^2+9y^2-36x+54y-116=9(x-2)^2+9(y+3)^2-1 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=\frac{1}{9}$$

Es decir, su centro es $(2,-3)$ y su radio es $1/3$. $\Box$

Elipse. El lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos F_1 y F_2 es constantemente $2a$ se denomina *elipse de focos F_1 y F_2 y suma de distancias $2a$*. Llamamos *centro* de la elipse al punto medio del segmento que une los dos focos, es decir, $\frac{1}{2}(F_1+F_2)$. La ecuación más sencilla se obtiene cuando los focos están en los puntos $(-c,0)$ y $(c,0)$, con $c>0$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



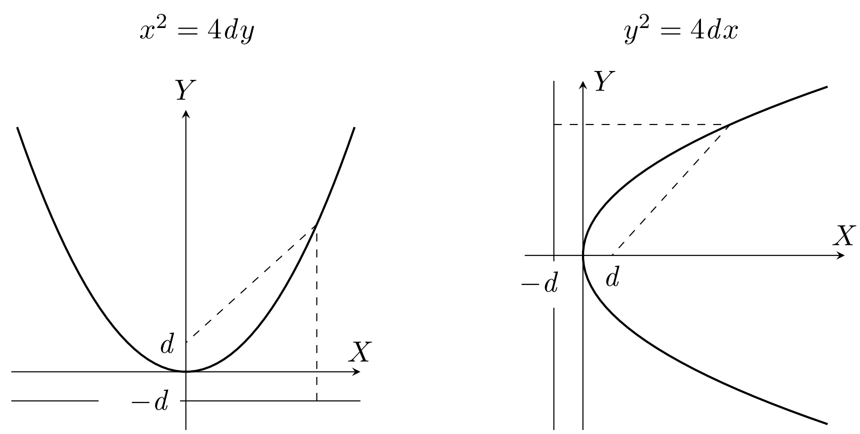
Obsérvese que el centro es el origen de coordenadas, que se verifica la igualdad fundamental $c^2+b^2=a^2$ y que necesariamente $a>b$. Si $b>a$, la ecuación también describe una elipse, pero en ese caso los focos están en $(0, c)$ y $(0, -c)$; finalmente, si $a = b$, la elipse es una circunferencia de radio a.

Si desplazamos la elipse para que tenga su centro en (x_0, y_0), la ecuación que obtenemos es

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Si desarrollamos los cuadrados, obtendremos un polinomio sin término en xy, aunque en este caso los coeficientes de x^2 e y^2 son distintos pero con el mismo signo.

Parábola. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta r y un punto F, se denomina *parábola con foco F y directriz r*. En la figura que aparece abajo, mostramos dos ejemplos de parábolas; si el foco es el punto $(0, d)$ y la directriz es $Y = -d$, obtenemos la parábola de la izquierda; si el foco es el punto $(d, 0)$ y la directriz es $X = -d$, obtenemos la parábola de la derecha:



Si desplazamos estas parábolas para que tengan su vértice en (x_0, y_0), las ecuaciones que obtenemos son:

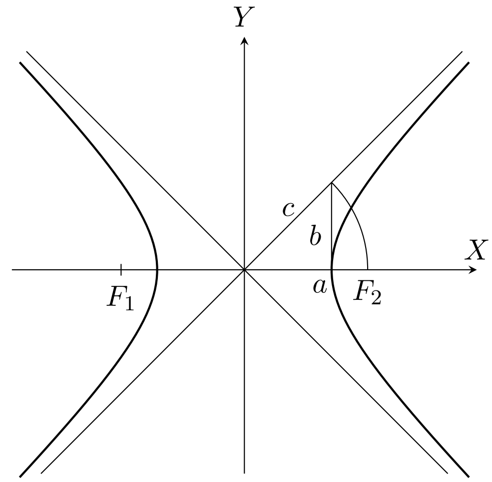
$$(x-x_0)^2 = 4d(y-y_0), \qquad (y-y_0)^2 = 4d(x-x_0)$$

Al desarrollar estas ecuaciones obtenemos polinomios en los que no hay término en xy y falta, o bien el término en x^2, o bien el término en y^2.

Hipérbola. El lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos F_1 y F_2 es constantemente $2a$ se denomina *hipérbola con focos F_1 y F_2 y diferencia de distancias $2a$*. Llamamos *centro* de la hipérbola al punto medio del segmento que une los dos focos, es decir, $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)$. Si los focos están en los puntos

$(-c, 0)$ y $(c, 0)$, con $c > 0$, la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$



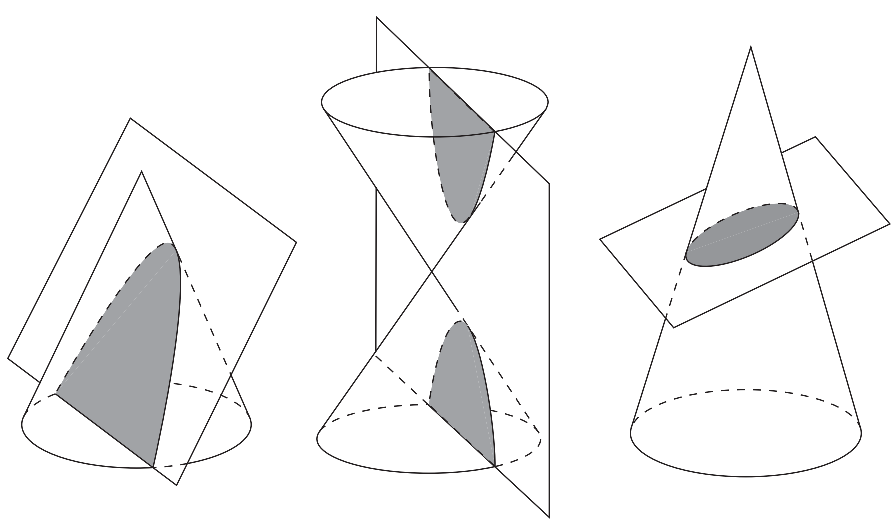
en donde $a^2 + b^2 = c^2$. Como se observa en la figura, las rectas $bx - ay = 0$ y $bx + ay = 0$ están muy próximas a la curva pero no la cortan; estas rectas son las asíntotas de la hipérbola.

Si desplazamos la hipérbola para que tenga su centro en (x_0, y_0), la ecuación que obtenemos es

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Si desarrollamos los cuadrados, obtendremos un polinomio sin término en xy y los coeficientes de x^2 e y^2 tienen distinto signo.

Otra forma de obtener estas curvas es mediante la siguiente descripción. Si consideramos un cono circular hueco y lo cortamos con un plano, la curva resultante en la sección es una *cónica* y dependiendo del ángulo de corte, se obtiene una u otra.



Parábola Hipérbola Elipse

Si el corte es perpendicular al eje de cono, obtenemos una circunferencia; si el corte es paralelo a la generatriz se obtiene una parábola; si el corte es paralelo al eje se obtiene una hipérbola; cualquier otro corte, produce una elipse.

Naturalmente, también es posible describir una cónica mediante ecuaciones paramétricas. A continuación vemos la parametrizaciones de las cónicas en sus posiciones típicas y en la sección siguiente aprenderemos como parametrizar una cónica arbitraria.

Circunferencia con centro (x_0, y_0) y radio r:

$$\begin{cases} X = x_0 + r\cos\theta \\ Y = y_0 + r\operatorname{sen}\theta \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Elipse centrada en (x_0, y_0) y semiejes a y b:

$$\begin{cases} X = x_0 + a\cos\theta \\ Y = y_0 + b\operatorname{sen}\theta \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Parábolas con vértices en (x_0, y_0) y ejes paralelos OY y OX respectivamente:

$$\begin{cases} X = x_0 + t \\ Y = y_0 + \dfrac{t^2}{4d} \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \begin{cases} X = x_0 + \dfrac{t^2}{4d} \\ Y = y_0 + t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Hipérbola centrada (x_0, y_0) y con asíntotas paralelas a las rectas $bx + ay = 0$ y $bx - ay = 0$:

$$\begin{cases} X = x_0 + a\cosh t \\ Y = y_0 + b\operatorname{senh} t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \begin{cases} X = x_0 - a\cosh t \\ Y = y_0 + b\operatorname{senh} t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

En este caso, necesitamos una parametrización distinta para cada rama de la hipérbola.

En los ejemplos mostrados en las definiciones anteriores, hemos mantenido las curvas en su *posición típica*, es decir, con sus ejes paralelos a los ejes de coordenadas. Hemos observado que en todos los casos, el polinomio resultante no contenía término en xy; si este término aparece, es decir, su coeficiente no es nulo, obtenemos los mismos tipos de curvas, pero con sus ejes girados respecto de los ejes de coordenadas. El objetivo de las secciones siguientes es reconocer cuál es la cónica definida por un polinomio arbitrario,

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + \mathrm{e}y + f = 0,$$

y determinar las características necesarias para poder dibujarla en el plano.

En primer lugar, vamos a agrupar y a poner nombre a los sumandos del polinomio:

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 &\rightarrow \text{parte cuadrática} \\ dx + ey &\rightarrow \text{parte lineal} \\ f &\rightarrow \text{término independiente} \end{aligned}$$

La parte cuadrática caracteriza el tipo de cónica y la orientación de sus ejes; el resto de los sumandos determinan la posición en el espacio.

3.1.3.1. Parábolas

TEOREMA 3.1.10 *Consideremos la curva*

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + \mathrm{e}y + f = 0, \quad a > 0. \tag{3.3}$$

Si $4ac = b^2$, *entonces* (3.3) *es una parábola o una cónica degenerada. En tal caso:*

1. *Existen números reales* A, B *y* C *tales que:*

$$\begin{aligned} &ax^2 + bxy + cy^2 + dx + \mathrm{e}y + f = \\ &\qquad = (\sqrt{a}x + \sqrt{c}y + A)^2 + B(\sqrt{c}x - \sqrt{a}y + C) \end{aligned} \tag{3.4}$$

2. *Si* $B = 0$, *es una cónica degenerada, concretamente la recta* $\sqrt{a}x+\sqrt{c}y+A = 0$.

3. *Si* $B \neq 0$, *la curva correspondiente es una parábola: la recta* $\sqrt{a}x+\sqrt{c}y+A = 0$ *es su eje y la recta* $\sqrt{c}x - \sqrt{a}y + C = 0$ *es la tangente a su vértice. El vértice queda determinado por la intersección de estas dos rectas.*

4. *Si* $B < 0$ *la apertura de parábola está en la dirección y sentido del vector* $(\sqrt{c}, -\sqrt{a})$ *y si* $B > 0$, *en el sentido opuesto.*

5. *Si* $B \neq 0$, *la parábola* (3.4) *se puede parametrizar de la siguiente forma:*

$$\begin{aligned} \sqrt{a}x(t) + \sqrt{c}y(t) + A &= t \\ \sqrt{c}x(t) - \sqrt{a}y(t) + C &= -\frac{t^2}{B} \end{aligned}$$

Los números reales cuya existencia se menciona en el teorema anterior, se calcularán desarrollando las expresiones e identificando los coeficientes de los polinomios. Por otra parte, obsérvese que siempre es fácil despejar $x(t)$ e $y(t)$ en la parametrización descrita en el teorema anterior, tratando las ecuaciones como un sistema de ecuaciones lineales.

Ejemplo 3.1.14 La curva

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 4y - 1 = 0$$

es una parábola (o una curva degenerada), ya que $4 \cdot 1 \cdot 1 = 2^2$. Por el teorema 3.1.10, existen números reales A, B y C tales que:

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 4y - 1 &= (x + y + A)^2 + B(x - y + C) = \\ &= x^2 + 2xy + y^2 + (2A + B)x + (2A - B)y + (A^2 + BC) \end{aligned}$$

Identificando coeficientes, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2A + B = 2 \\ 2A - B = -4 \\ A^2 + BC = -1 \end{cases}$$

Su única solución es $A = -1/2$, $B = 3$ y $C = -5/12$ y, por lo tanto, la ecuación de la parábola queda:

$$(x + y - \frac{1}{2})^2 + 3(x - y - \frac{5}{12}) = 0 \tag{3.5}$$

La recta $x + y - \frac{1}{2} = 0$ es el eje de la parábola y $x - y - \frac{5}{12} = 0$ es la recta tangente al vértice; su vértice es el punto $(11/24, 1/24)$ que se obtiene resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x + y - \frac{1}{2} &= 0 \\ x - y - \frac{5}{12} &= 0 \end{cases}$$

Mirando el segundo sumando de la ecuación (3.5), deducimos la dirección y el sentido de la apertura de la parábola:

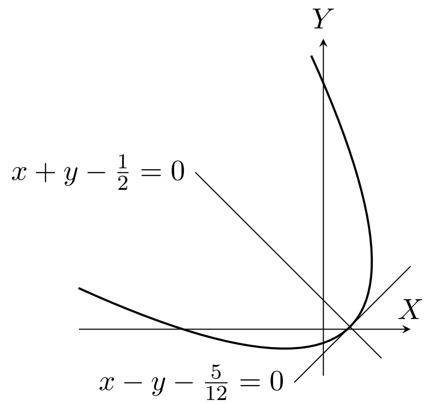
$$\begin{array}{ccccc} +3 & (& x & -y & -\frac{5}{12}) \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ \text{sentido opuesto a} & (& 1, & -1 &) \end{array} \tag{3.6}$$

Para obtener la parametrización de la parábola, planteamos las igualdades

$$\begin{aligned} x + y - \tfrac{1}{2} &= t \\ x - y - \tfrac{5}{12} &= -\tfrac{t^2}{3} \end{aligned}$$

y despejamos x e y en función de t:

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{1}{6}t^2 + \dfrac{1}{2}t + \dfrac{11}{24} \\ y(t) = \dfrac{1}{6}t^2 + \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{24} \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$



□

3.1.3.2. Elipses e hipérbolas

El estudio necesario para identificar una elipse es idéntico al necesario para identificar una hipérbola, y por eso las estudiamos conjuntamente. De hecho, recordemos que, en su posición típica, las dos curvas responden a la siguiente ecuación:

$$Ax^2 + By^2 = 1$$

Si A y B son estrictamente positivos, la ecuación corresponde a una elipse y si tienen signos opuestos, a una hipérbola.

El siguiente teorema nos dice como determinar los ejes y el centro de este tipo de cónicas.

TEOREMA 3.1.11 *Consideremos la curva*

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0. \tag{3.7}$$

Si $4ac \neq b^2$*, entonces* (3.7) *es una elipse, una hípérbola o una curva degenerada; en tal caso:*

1. *Las pendientes p, de sus ejes son las soluciones de la ecuación*

$$bp^2 + 2(a - c)p - b = 0$$

2. *Si* (v_1, v_2) *es un vector director de uno de sus ejes, entonces existen números reales* A*,* B*,* C*,* D *y* E *tales que*

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = \\ = A(v_1x + v_2y + B)^2 + C(v_2x - v_1y + D)^2 + E \end{aligned} \tag{3.8}$$

3. *Si* $E = 0$*, la ecuación se corresponde con una cónica degenerada (puede ser un punto o un par de rectas).*

4. *Si* $E \neq 0$*, la cónica no es degenerada; si además* $AC > 0$*, la cónica es una elipse y si* $AC < 0$*, la cónica es una hipérbola. En ambos casos, las rectas* $v_1x + v_2y + B = 0$ *y* $v_2x - v_1y + D = 0$ *son sus ejes y su intersección es su centro.*

Ejemplo 3.1.15 La curva

$$9x^2 + 4xy + 6y^2 - 14x + 8y + 10 = 0$$

es una elipse o una hipérbola, ya que $4 \cdot 9 \cdot 6 \neq 4^2$. La ecuación que determina las pendientes de los ejes es

$$4p^2 + 6p - 4 = 0,$$

y sus soluciones son $p = -2$ y $p = 1/2$. Por lo tanto, como vectores directores de sus ejes podemos tomar $(1, -2)$ y $(2, 1)$. Por el teorema 3.1.11, existen números reales A, B, C, D y E tales que

$$\begin{aligned} 9x^2 + 4xy + 6y^2 - 14x + 8y + 10 = A(2x + y + B)^2 + C(x - 2y + D)^2 + E = \\ (4A + C)x^2 + (4A - 4C)xy + (A + 4C)y^2 + \\ + (4AB + 2CD)x + (2AB - 4CD)y + AB^2 + CD^2 + E \end{aligned}$$

Con el sistema siguiente calculamos estas constantes:

$$\begin{cases} 4A + C = 9 \\ 4A - 4C = 4 \\ A + 4C = 6 \\ 4AB + 2CD = -14 \\ 2AB - 4CD = 8 \\ AB^2 + CD^2 + E = 10 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones obtenemos que $A = 2$ y $C = 1$. Sustituyendo los valores de A y C en la cuarta y quinta ecuación, obtenemos que $8B + 2D = -14$ y $4B - 4D = 8$ y por lo tanto, $B = -1$ y $D = -3$; finalmente, de la última ecuación deducimos que $E = -1$. Obsérvese que no hemos utilizado la tercera ecuación, pero que las soluciones son compatibles con ellas; si esto no ocurriera, nos indicaría que algo hemos hecho mal en los pasos anteriores. Por lo tanto, la curva es una elipse que se escribe como

$$2(2x + y - 1)^2 + (x - 2y - 3)^2 = 1$$

El centro es la intersección de sus ejes, $2x + y - 1 = 0$, $x - 2y - 3 = 0$, es decir, $(x_0, y_0) = (1, -1)$. □

También podemos determinar fácilmente una parametrización para estas cónicas como sigue. Si el polinomio (3.8) corresponde a una elipse, siendo $A > 0$, $C > 0$ y $E < 0$, entonces las siguientes ecuaciones permiten despejar x e y en función del parámetro t:

$$\sqrt{-A/E}(v_1x + v_2y + B) = \cos t$$
$$\sqrt{-C/E}(v_2x - v_1y + D) = \operatorname{sen} t$$

Si el polinomio (3.8) corresponde a una hipérbola, siendo $A > 0$, $C < 0$ y $E < 0$, entonces las siguientes ecuaciones permiten despejar x e y en función del parámetro t:

$$\sqrt{-A/E}(v_1x + v_2y + B) = \pm\cosh t$$
$$\sqrt{C/E}(v_2x - v_1y + D) = \operatorname{senh} t$$

Obsérvese que en este caso, obtenemos dos parametrizaciones, una para cada rama de hipérbola.

Ejemplo 3.1.16 Siguiendo con el ejemplo anterior en el que hemos obtenido la siguiente ecuación para una elipse:

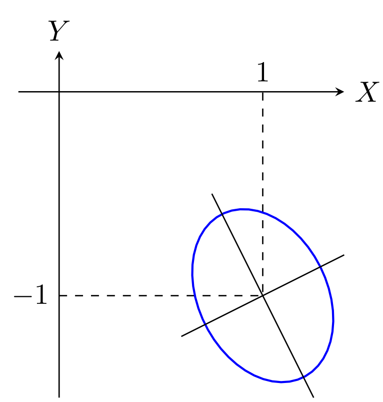
$$2(2x + y - 1)^2 + (x - 2y - 3)^2 = 1,$$

determinamos una parametrización a partir de

$$\sqrt{2}(2x + y - 1) = \cos t \qquad\qquad x - 2y - 3 = \operatorname{sen} t$$

Despejando x e y en función de t:

$$\begin{cases} X = \dfrac{\sqrt{2}}{5}\cos t + \dfrac{1}{5}\operatorname{sen} t + 1 \\ Y = \dfrac{\sqrt{2}}{10}\cos t - \dfrac{2}{5}\operatorname{sen} t - 1 \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$



Podemos obtener más detalles de la elipse fácilmente. Por ejemplo, el centro de la elipse es el punto de corte de los dos ejes, es decir, la solución del sistema

$$2x + y - 1 = 0, \qquad x - 2y - 3 = 0,$$

que es $(1, -1)$. Los vértices de la elipse serán los puntos de corte de los ejes con la elipse; también utilizaremos para ello la forma canónica que hemos obtenido. Por ejemplo, si hacemos $2x + y - 1 = 0$, obtenemos que $(x - 2y - 3)^2 = 1$, por lo que los dos puntos de corte son las soluciones de los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} 2x + y - 1 &= 0 \\ x - 2y - 3 &= 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y - 1 &= 0 \\ x - 2y - 3 &= -1 \end{cases}$$

Análogamente, los puntos de corte con el otro eje son las soluciones de los sistemas:

$$\begin{cases} \sqrt{2}(2x + y - 1) &= 1 \\ x - 2y - 3 &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{2}(2x + y - 1) &= -1 \\ x - 2y - 3 &= 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, los cuatro vértices son
$(6/5, -7/5)$, $(4/5, -3/5)$, $(1 + \sqrt{2}/5, -1 + \sqrt{2}/10)$ y $(1 - \sqrt{2}/5, -1 - \sqrt{2}/10)$.

También podemos obtener los vértices a partir de la parametrización con los valores $t = 0$, $t = \pi/2$, $t = \pi$ y $t = 3\pi/2$. □

En el caso en que la ecuación (3.8) corresponda a una hipérbola, también tendremos que determinar sus asíntotas. El siguiente resultado nos da el método para determinarlas.

Teorema 3.1.12 *Si* (3.7) *corresponde a una hipérbola, entonces:*

1. *Si $c \neq 0$, entonces las pendientes p, de sus asíntotas son las soluciones de la ecuación*
$$cp^2 + bp + a = 0.$$
2. *Si $c = 0$ y $a \neq 0$, entonces las pendiente de sus asíntotas son las soluciones de la ecuación*
$$ap^2 + bp = 0.$$

   Si $a = 0 = c$, entonces las asíntotas son paralelas a los ejes de coordenadas.

Ejemplo 3.1.17 Vamos a analizar el curva

$$2xy - x + 1 = 0.$$

Observamos en primer lugar que se trata de una elipse o una hipérbola y que las pendientes de sus ejes verifican

$$2p^2 - 2 = 0$$

Es decir, son $p = 1$ y $p = -1$, por lo que sus vectores directores son $(1, 1)$ y $(1, -1)$. Por lo tanto, la expresión de la curva puede transformarse en

$$2xy - x + 1 = A(x + y + B)^2 + C(x - y + D)^2 + E$$

Desarrollando e identificando coeficientes deducimos que realmente se trata de la siguiente hipérbola:

$$\frac{1}{2}(x - y + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}(x + y - \frac{1}{2})^2 = 1.$$

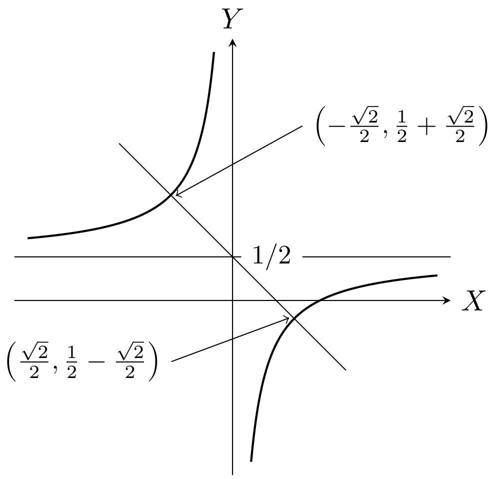
Dado que la ecuación inicial no tiene los términos x^2 e y^2, deducimos que las asíntotas son paralelas a los ejes coordenados. En el caso de la hipérbola, solo uno de los ejes de la hipérbola, no la corta. Tenemos por lo tanto que identificar el eje que corta a nuestra hipérbola y hallar estos puntos. Uno de los ejes es $x - y + \frac{1}{2} = 0$ y no corta a la hipérbola:

$$\begin{aligned} x &= y - \frac{1}{2} \\ 2(y - \frac{1}{2})y - (y - \frac{1}{2}) + 1 &= 0 \\ 2y^2 - 2y + \frac{3}{2} &= 0 \\ y &= \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{4} \notin \mathbb{R} \end{aligned}$$

El otro eje es $x + y - \dfrac{1}{2} = 0$, que sí corta a la hipérbola:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} - y \\ 2(\frac{1}{2} - y)y - (\frac{1}{2} - y) + 1 &= 0 \\ -2y^2 + 2y + \frac{1}{2} &= 0 \\ y_1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2},\ y_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ x_1 &= -\frac{1}{2}\sqrt{2},\ x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ya podemos dibujar las curvas:



Para obtener las parametrizaciones, hacemos $\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y+\frac{1}{2}) = \pm\cosh t$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y-\frac{1}{2}) = \operatorname{senh} t$ y deducimos las dos ramas de la hipérbola:

$$\begin{cases} X = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{senh} t + \cosh t) \\ Y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{senh} t - \cosh t) \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \begin{cases} X = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{senh} t - \cosh t) \\ Y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{senh} t + \cosh t) \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

□

LECCIÓN 3.2

Campos escalares

En la lección anterior hemos trabajado con polinomios de dos variables, es decir, un ejemplo de función definida en el espacio $\mathbb{R}^2$. En esta lección, vamos a trabajar con funciones generales con dos o más variables, es decir, vamos a trabajar con funciones definidas en espacios $\mathbb{R}^m$. Posiblemente, se haya trabajado en estos espacios utilizando su estructura de *espacio vectorial* pero ahora, estamos interesados en establecer las nociones de *continuidad* y *diferenciabilidad* de funciones definidas en ellos.

Para denotar los elementos de $\mathbb{R}^m$ se suele utilizar una variable con un flecha encima, $\vec{x}$, o bien variables en "negrita", $\boldsymbol{x}$; a lo largo del curso utilizaremos esta segunda notación, ya que los elementos de $\mathbb{R}^m$ pueden identificarse tanto con vectores como con puntos. Además, escribiremos las coordenadas de los vectores utilizando subíndices: $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$.

En general, cualquier función definida en un subconjunto de un espacio $\mathbb{R}^m$ se denomina *función de varias variables*. Si la imagen está contenida en $\mathbb{R}$ se denomina *campo escalar*,

$$f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}.$$

Si la imagen está contenida en $\mathbb{R}^k$ se denomina *campo vectorial*,

$$f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k.$$

En este tema, nos centramos en los campos escalares, y más adelante en el curso trabajaremos con campos vectoriales. En cualquiera de los dos casos, el conjunto D se denomina *dominio* del campo y se denota $\mathrm{Dom}(f)$. Algunos problemas exigirán trabajar en un dominio determinado y en tal caso tendrá que ser especificado; en caso contrario, entenderemos que el dominio es el mayor posible.

Ejemplo 3.2.1 La expresión $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$ define una campo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. El mayor dominio con el que podemos trabajar es el formado por los puntos tales que $x > y$, es decir:

$$\mathrm{Dom}(f) = \{(x,y) \mid x > y\}$$

Gráficamente, los puntos del dominio son los que están estrictamente por debajo de la bisectriz del primer y tercer cuadrante del plano $\mathbb{R}^2$. $\square$

Sabemos que la representación gráfica de las funciones reales de una variable es una herramienta muy útil para describir sus características, sin embargo, en campos escalares solo podremos utilizar esta herramienta en unos pocos casos. Por una parte, podemos definir el grafo de un campo escalar f como

$$\mathrm{gr}(f) = \{(x_1, \dots, x_m, f(x_1, \dots, x_m)) \in \mathbb{R}^{m+1}; (x_1, \dots, x_m) \in \mathrm{Dom}(f)\},$$

aunque solamente podremos visualizar este conjunto para $m = 2$, ya que en tal caso, este conjunto es una superficie de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 3.2.2 El campo escalar definido por $f(x, y) = x^2 + y^2$ tiene por dominio a todo el espacio $\mathbb{R}^2$. Su grafo es el conjunto:

$$\mathrm{gr}(f) = \{(x, y, x^2 + y^2) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

No es difícil imaginar cuál es la forma de esta superficie si observamos que, haciendo constantes la coordenada z de cada punto, $x^2+y^2 = c$, las curvas que obtenemos son circunferencias y si cortamos por cualquier plano que contenga al eje OZ, es decir, $y = mx$, las curvas que obtenemos son parábolas. Es decir, la superficie es la figura de revolución que se obtiene al girar una parábola sobre su eje. Esta superficie es la que nos encontramos, por ejemplo, en las antenas parabólicas. $\square$

Otra forma de representar los campos escalares es a través de las *superficies* y *curvas de nivel*: si $c \in \mathrm{Im}(f)$, llamamos *superficie de nivel* de f asociada a c, al conjunto

$$N(f, c) = \{\boldsymbol{x} \in D \mid f(\boldsymbol{x}) = c\};$$

si $m = 2$ estos conjuntos se denominan *curvas de nivel*.[1]

Ejemplo 3.2.3 En el campo $f(x, y) = x^2 + y^2$, las curvas de nivel serían:

$$x^2 + y^2 = c, \quad c > 0$$

Sabemos de la lección anterior que estas curvas son circunferencias centradas en el origen y radio $\sqrt{c}$.

El campo $g(x, y) = \mathrm{senh}(x^2+y^2)$ tiene las mismas curvas de nivel, circunferencias centradas en el origen:

$$\begin{aligned} \mathrm{senh}(x^2 + y^2) &= c \\ x^2 + y^2 &= \mathrm{argsenh}\, c \end{aligned}$$

Sin embargo, para cada valor c, su radio es $\sqrt{\mathrm{argsenh}\, c}$. $\square$

[1]Como hemos visto en la lección anterior, los conjuntos descritos como $f(x, y) = 0$ no tienen que ser necesariamente curvas; este conjunto puede ser vacío, contener uno o varios puntos, una o varias rectas o curvas e incluso estar formado por regiones.

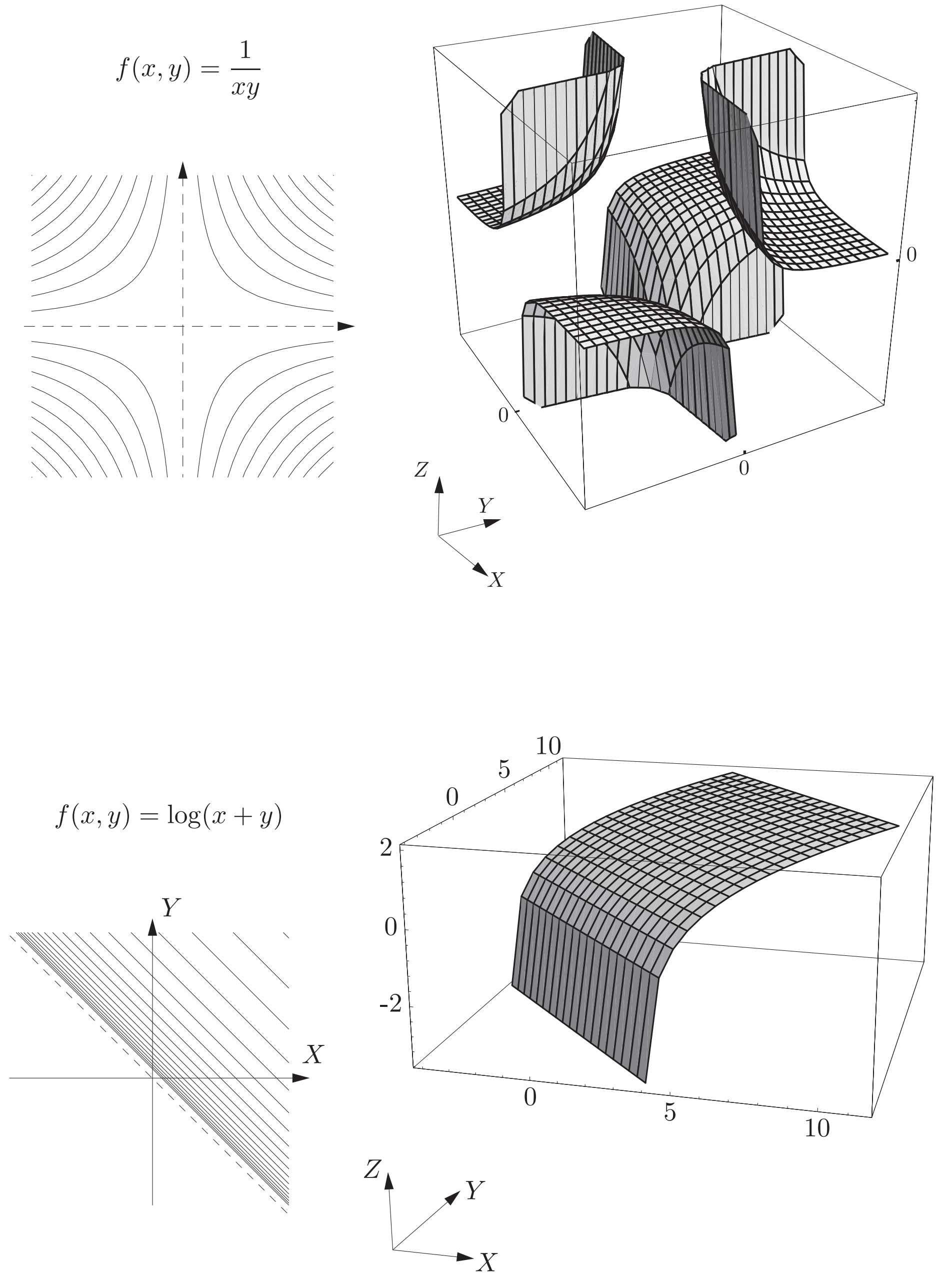


Figura 3.2: Representación de campos escalares

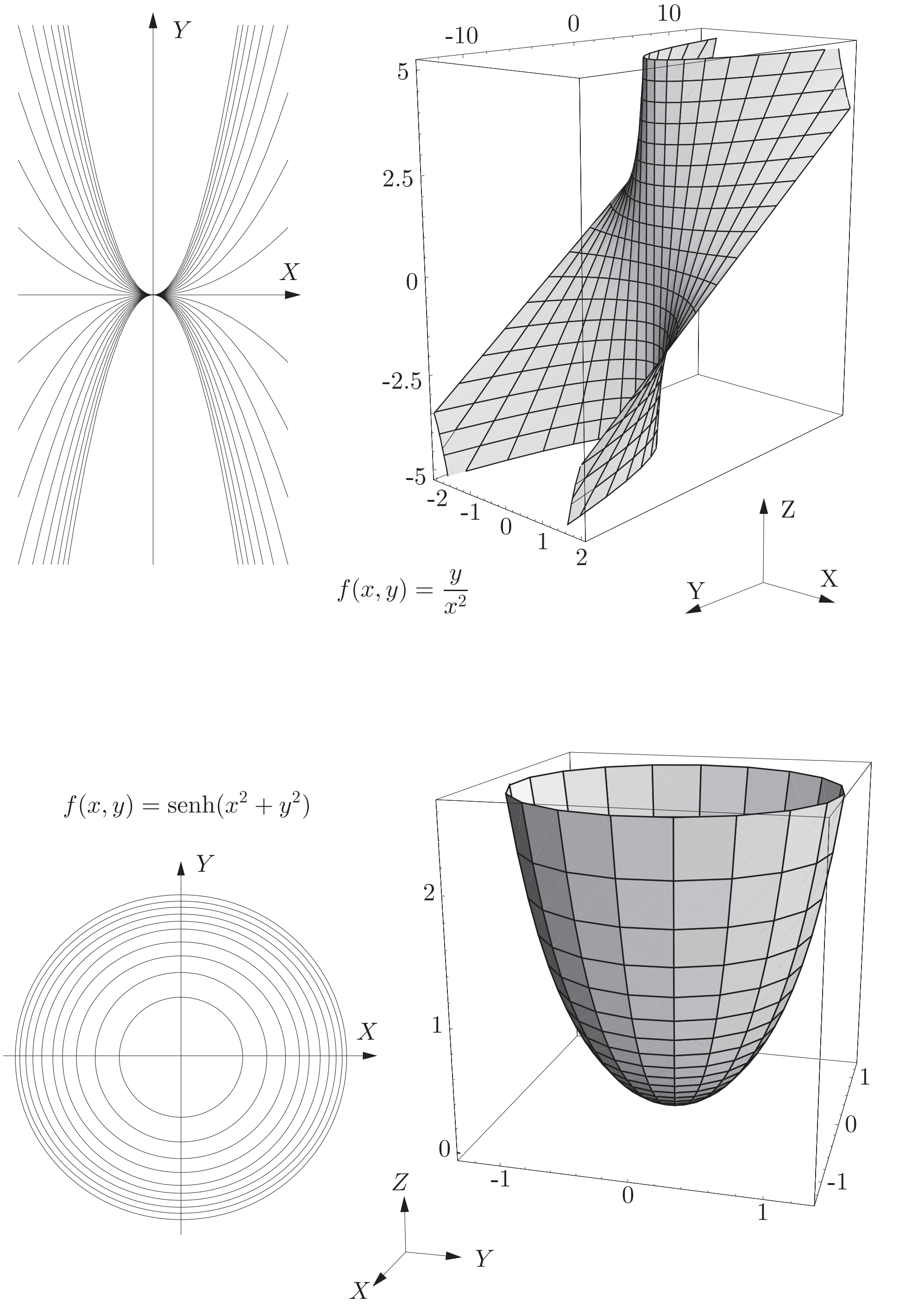


Figura 3.3: Representación de campos escalares

Para poder visualizar los campos usando sus curvas nivel se hace la representación de la siguiente forma: elegimos varios valores equidistantes, c_1, c_2,..., c_n, y dibujamos las curvas correspondientes a estos valores, $f(\boldsymbol{x}) = c_i$. Por ejemplo, aunque los dos campos del ejemplo 3.2.3 tienen las mismas curvas de nivel, su representación sería distinta, ya que para los mismos valores c_i, las circunferencias correspondientes a dichos valores, son distintas.

Podemos encontrar representaciones de campos mediante curvas de nivel en los mapas de temperaturas y de presiones; en estos casos, las curvas de nivel se denominan isotermas e isobaras respectivamente. En las figuras 3.2 y 3.3 vemos algunos ejemplos de campos escalares y sus representaciones haciendo uso del grafo y de curvas de nivel.

3.2.1. Campos escalares lineales

Dedicamos esta sección a un ejemplo de campo escalar: los *campos escalares lineales*. Estas aplicaciones serán la base para las definiciones y desarrollos asociados al concepto de diferenciabilidad.

Los *campos escalares lineales* en $\mathbb{R}^n$ responden a la expresión:

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$

en donde a_1,...,a_n son números reales. La expresión $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ se denomina igualmente *forma lineal* y es un polinomio de grado 1 sin término independiente.

Estos campos se pueden escribir de varias formas. Por ejemplo, en forma matricial se definen a partir de la matriz $A = (a_1 \cdots a_n) \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = (a_1 \cdots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\boldsymbol{x}$$

Aunque anteriormente hemos representado los vectores como $(x_1, \dots, x_n)$, cuando trabajamos matricialmente, los vectores deben tratarse como matrices columna:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$$

Para los objetivos de este tema y para los cálculos que realizaremos en él, es más adecuado, sin embargo, definir los campos escalares lineales usando el *producto escalar*;

en este caso, el campo escalar lineal se define con el vector $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}$$

No obstante, no debemos olvidar que las tres expresiones definen la misma función y que por lo tanto, solo son tres formas distintas de escribir lo mismo.

EJEMPLO 3.2.4 El campo $f(x, y, z) = 6x - y + 2z$ es un campo lineal y se puede escribir como:

$$f(x, y, z) = 6x - y + 2z = (6, -1, 2) \cdot (x, y, z) \qquad \square$$

Recordemos ahora las propiedades más importantes de los campos lineales. Si f es un campo escalar lineal, entonces:

TEOREMA 3.2.1 *Si f es un campo escalar lineal, entonces:*

1. $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ *para todo* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.
2. $f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})$ *para todo* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ *y para todo* $k \in \mathbb{R}$.
3. *Si para cada* i

$$a_i = f(\mathbf{e}_i) = f(0, \dots, \overset{i}{\check{1}}, \dots, 0)$$

y $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$, *entonces* $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}$.

Las dos primeras propiedades caracterizan a las aplicaciones lineales y son usadas para definir este tipo de aplicaciones en espacios vectoriales generales. La tercera propiedad se usa fundamentalmente para hacer desarrollos sobre aplicaciones lineales desconocidas o arbitrarias, ya que nos da una forma de expresar los coeficientes a partir de la propia aplicación.

Los campos lineales no deben confundirse con los *campos afines*, que se definen a partir de ellos como sigue.

DEFINICIÓN 3.2.2 *Un campo afín en* $\mathbb{R}^n$ *responde a la expresión*

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b,$$

que puede ser escrita haciendo uso del producto escalar como

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} + b.$$

En el caso particular de $\mathbb{R}^2$, haremos uso de los grafos de los campos lineales y afines. Concretamente, el grafo del campo $f(x, y) = a_1x + a_2y$ es el plano

$$a_1x + a_2y - z = 0,$$

que es normal (perpendicular) al vector $(a_1, a_2, -1)$ y pasa por el origen de coordenadas. De la misma forma, el grafo del campo afín $f(x, y) = a_1x + a_2y + b$ es el plano

$$a_1x + a_2y - (z - b) = 0,$$

que pasa por el punto $(0, 0, b)$ y es normal al vector $(a_1, a_2, -1)$.

A lo largo del tema, trabajaremos con planos en $\mathbb{R}^3$, por lo que es conveniente repasar las distintas formas de expresar analíticamente este tipo de conjuntos. En particular, para determinar un plano en $\mathbb{R}^3$ es suficiente con dar un punto del plano, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, y un vector normal, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$; la ecuación del plano dado por estos dos elementos es

$$v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0.$$

Esto es consecuencia de la definición del producto escalar, por la cual, el producto de dos vectores perpendiculares es 0. En este caso, si $P = (x, y, z)$ es cualquier punto del plano, entonces el vector $\overrightarrow{P_0P} = P - P_0$ es perpendicular al vector $\boldsymbol{v}$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{v} \cdot (P - P_0) = 0\\
&(v_1, v_2, v_3) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0\\
&v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.5 El plano perpendicular al vector $(-2, 1, -1)$ y que pasa por el origen de coordenadas es:

$$-2x + y - z = 0$$

Si queremos que el plano pase por el punto $(-1, 0, 1)$, la ecuación es:

$$\begin{aligned}
-2(x + 1) + y - (z - 1) &= 0\\
-2x + y - z - 1 &= 0
\end{aligned}$$

□

3.2.2. Continuidad

De manera intuitiva, el límite de una función de una variable en un punto a es *el valor que debería tomar la función en ese punto deducido a partir de lo que ocurre a su alrededor*; de esta forma, una función es continua en el punto si el valor en él coincide con el valor previsto según lo que ocurre a su alrededor.

Naturalmente, la noción de límite y de continuidad pueden ser introducidas para funciones de varias variables para lograr formalizar la misma idea intuitiva. Concretamente, en la definición siguiente utilizamos sucesiones para determinar lo que ocurre alrededor del punto, de forma que el valor previsible es el límite de la sucesión obtenida al evaluar la función sobre cada uno de los elementos.

Definición 3.2.3 *Sea* $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *y* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m$*. Si para toda sucesión de puntos* $\{\boldsymbol{v}_n\} \subset D$ *con* $\boldsymbol{v}_n \neq \boldsymbol{a}$ *y* $\lim \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{a}$ *se tiene que* $\lim f(\boldsymbol{v}_n) = \ell$*, entonces decimos que* ℓ *es el* límite de f cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a $\boldsymbol{a}$.

En esta definición, utilizamos límites de sucesiones de puntos de $\mathbb{R}^m$; dichos límites se calculan por componentes, y por lo tanto, no necesitamos una teoría específica para su estudio. Por ejemplo,

$$\lim \Big(\frac{1}{n}, \frac{n}{n-1}\Big) = (0,1)$$

Por otra parte, debemos tener en cuenta que, para que la definición tenga sentido en un punto $\boldsymbol{a}$, debe existir alguna sucesión contenida en el dominio y cuyo límite sea $\boldsymbol{a}$; a estos puntos, los denominamos *puntos de acumulación* de D y pueden ser puntos no pertenecientes al conjunto.

Finalmente, también observamos que, con esta definición, “reducimos” el estudio de la continuidad de una función al análisis de límites de sucesiones de números reales, lo que a su vez, permite aplicar a campos escalares la teoría de límites de sucesiones y de funciones de una variable.

Ejemplo 3.2.6 Consideramos el campo $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ y $\boldsymbol{a} = (1,2)$. Para construir una sucesión que se acerque a $(1,2)$ basta tomar dos sucesiones x_n e y_n tales que $\lim x_n = 1$ y $\lim y_n = 2$; entonces:

$$\lim f(x_n, y_n) = \lim \frac{x_n y_n^2}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{1 \cdot 2^2}{1^2 + 2^2} = \frac{4}{5}$$

Dado que este límite no depende de las sucesiones x_n e y_n, deducimos que

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \frac{4}{5} \qquad \square$$

No obstante, el problema más difícil relacionado con los límites de campos escalares es probar que un determinado límite no existe. El simple estudio de límites laterales que hacemos para funciones de una variable, se complica cuando tratamos con campos escalares. Este tipo de problemas queda fuera de los objetivos planteados para este curso, en el que solamente trabajaremos con funciones a las que se les puede aplicar el siguiente resultado, que se basa en las propiedades algebraicas de los límites.

Corolario 3.2.4 *Si un campo escalar está determinado por operaciones algebraicas entre funciones elementales (polinomios, exponenciales, trigonométricas,...) en un dominio D, entonces el campo es continuo en dicho dominio.*

Gráficamente, la propiedad de continuidad de un campo se traduce en la continuidad de su grafo, es decir, este no presentará ni agujeros ni rupturas.

3.2.3. Diferenciabilidad

La definición de derivabilidad de funciones reales de variable real se introduce con dos objetivos:

- En términos geométricos, para formalizar la noción de *suavidad* de una curva y proveer una definición analítica de recta tangente.
- Desde el punto de vista de la física, para introducir la noción de *tasa de cambio puntual* de una magnitud escalar; por ejemplo, la velocidad en el estudio del movimiento o la tasa de variación de la temperatura en un recinto sometido a una fuente de calor.

Si las magnitudes estudiadas dependen de varias variables (la temperatura en una sala dependerá de la posición en la que situemos el termómetro), también tiene sentido plantearnos las preguntas anteriores y, por lo tanto, necesitaremos extender los conceptos planteados a estas nuevas situaciones.

Usaremos ejemplos en $\mathbb{R}^2$ para motivar los conceptos pero generalizaremos las definiciones a cualquier campo.

Derivadas direccionales. Una primera aproximación para dar respuesta a las cuestiones anteriores sería la siguiente. En lugar de considerar que podemos movernos libremente en cualquier dirección desde un punto, imaginemos que desde ese punto $\boldsymbol{a}$, nos movemos sobre una recta en una dirección $\boldsymbol{v}$. Entonces, el valor del campo sobre esta recta puede expresarse usando una función de una variable,

$$g(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}).$$

La tasa de cambio puntual en el punto $\boldsymbol{a}$ y en la dirección $\boldsymbol{v}$ puede entonces determinarse utilizando la derivada de esta función en $t = 0$, ya que $g(0) = f(\boldsymbol{a})$, es decir, $g'(0)$; este número se denomina *derivada direccional* (ver figura 3.4).

Definición 3.2.5 *Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $\boldsymbol{a} \in D$. Sea $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ y consideremos la función real de una variable real $f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{v}}(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v})$. Llamamos*

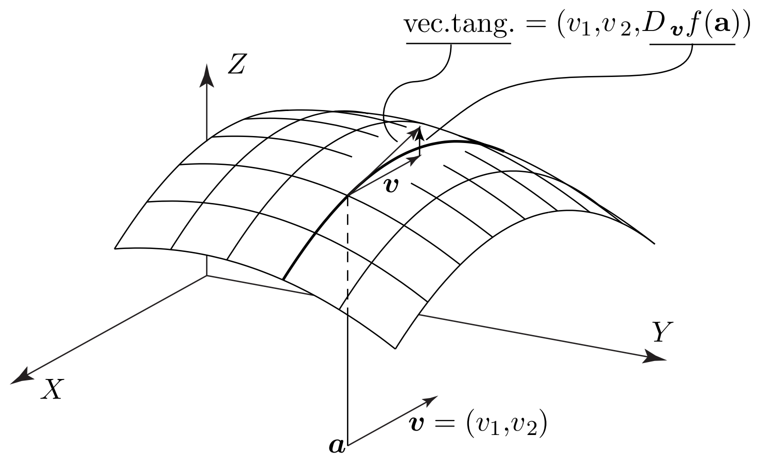


Figura 3.4: Representación de la derivada direccional.

derivada direccional de f en el punto $\boldsymbol{a}$ y en la dirección $\boldsymbol{v}$ *y la denotamos por* $\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a})$ *a*

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = f'_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{v}}(0).$$

Ejemplo 3.2.7 Para el campo $f(x, y) = 2x^2y - xy^2$ vamos a calcular su derivada direccional en el punto $\boldsymbol{a} = (2, -1)$ y en la dirección $\boldsymbol{v} = (1, 1)$:

$$\begin{aligned} f_{(2,-1),(1,1)}(t) &= 2(2+t)^2(-1+t) - (2+t)(-1+t)^2 \\ &= t^3 + 6t^2 + 3t - 10 \\ f'_{(2,-1),(1,1)}(t) &= 3t^2 + 12t + 3 \\ \mathrm{D}_{(1,1)} f(2, -1) &= f'_{(2,-1),(1,1)}(0) = 3 \end{aligned}$$

□

Si repetimos el cálculo del ejemplo anterior para el mismo campo y el mismo punto pero en la dirección $(2, 2)$, obtendremos que $\mathrm{D}_{(2,2)} f(2, -1) = 6$. Este resultado es obviamente distinto del que hemos obtenido en el ejemplo, sin embargo, las direcciones y sentidos definidos por los vectores $(1, 1)$ y $(2, 2)$ son los mismos. Esto supone que, en la práctica, no podemos comparar las derivadas direccionales de campos diferentes o en distintas direcciones, ya que sus valores dependen del módulo de los vectores. Por esta razón, para definir formalmente la *tasa de cambio puntual* utilizaremos vectores unitarios.

Definición 3.2.6 *Sea* $f \colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *un campo escalar,* $\boldsymbol{a} \in D$ *y* $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}$*. Llamamos* tasa de cambio puntual de f en el punto $\boldsymbol{a}$ y en la dirección $\boldsymbol{v}$ *a la derivada* $\mathrm{D}_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{a})$*, en donde* $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|}\boldsymbol{v}$.

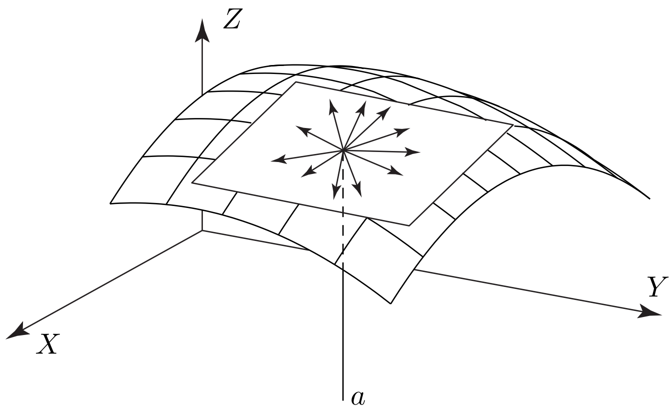


Figura 3.5: Construcción del plano tangente.

Plano tangente y derivadas parciales. Una vez resuelto el problema de definir la tasa de cambio puntual, vamos a abordar el problema de la definición del plano tangente. Tal y como hemos definido la derivada direccional, es fácil observar que el vector $(v_1, v_2, \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}))$ es tangente al grafo de f en $\boldsymbol{a}$ y que por lo tanto, debe estar contenido en el plano tangente que queremos determinar. Más aún, cualquier vector contenido en este plano se podrá determinar de esta forma (ver figuras 3.4 y 3.5).

Usando las propiedades de la sección 3.2.1, los vectores $(v_1, v_2, \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}))$ forman un plano si y solo si $\lambda(\boldsymbol{v}) = \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a})$ es un campo escalar lineal. En tal caso, existe un vector, que denotamos $\nabla f(a)$, tal que $\lambda(\boldsymbol{v}) = \nabla f(a) \cdot \boldsymbol{v}$, es decir

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(a) \cdot \boldsymbol{v}.$$

Este vector se denomina *vector gradiente de f en $\boldsymbol{a}$* y, por el apartado 3 del teorema 3.2.1, es igual a $\nabla f(a) = (\mathrm{D}_{\mathrm{e}_1} f(\boldsymbol{a}), \mathrm{D}_{\mathrm{e}_2} f(\boldsymbol{a}))$. Las componentes del vector gradiente se denominan *derivadas parciales de f en $\boldsymbol{a}$* y se denotan $\mathrm{D}_1 f(\boldsymbol{a}) = \mathrm{D}_{\mathrm{e}_1} f(\boldsymbol{a})$ y $\mathrm{D}_2 f(\boldsymbol{a}) = \mathrm{D}_{\mathrm{e}_2} f(\boldsymbol{a})$, es decir

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = (\mathrm{D}_1 f(\boldsymbol{a}), \mathrm{D}_2 f(\boldsymbol{a})).$$

Ejemplo 3.2.8 Para el campo $f(x, y) = 2x^2 y - xy^2$ del ejemplo 3.2.7 vamos a calcular su vector gradiente en el punto $\boldsymbol{a} = (2, -1)$:

$$\begin{aligned} f_{(2,-1),(v_1,v_2)}(t) &= 2(2 + tv_1)^2(-1 + tv_2) - (2 + tv_1)(-1 + tv_2)^2 \\ &= (-v_1 v_2^2 + 2v_1^2 v_2)t^3 + (-2v_1^2 - 2v_2^2 + 10v_1 v_2)t^2 + \\ &\qquad (-9v_1 + 12v_2)t - 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'_{(2,-1),(v_1,v_2)}(t) &= -3(-v_1v_2^2 + 2v - 1^2v_2)t^2 \\
&\qquad + 2t(-2v_2^2 + 10v_1v_2) + (-9v_1 + 12v_2) \\
\mathrm{D}_{(v_1,v_2)}f(2,-1) &= f'_{(2,-1),(v_1,v_2)}(0) = -9v_1 + 12v_2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lambda(v_1, v_2) = \mathrm{D}_{(v_1,v_2)}f(2,-1)$ es una campo lineal:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{(v_1,v_2)}f(2,-1) &= (-9, 12) \cdot (v_1, v_2) \\
\nabla f(2,-1) &= (-9, 12)
\end{aligned}$$

Según vimos en la sección anterior, el plano dado por la imagen de este campo es perpendicular al vector $(-9, 12, -1)$ y, en consecuencia, el plano tangente al grafo de f en $\boldsymbol{a} = (2, -1)$ es perpendicular a $(-9, 12, -1)$ y pasa por el punto $(2, -1, f(2, -1)) = (2, -1, -10)$, es decir:

$$-9(x-2) + 12(y+1) - (z+10) = 0 \qquad \square$$

Definición 3.2.7 *Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar, $\boldsymbol{a} \in D$ y supongamos que $\lambda(\boldsymbol{v}) = \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}f(\boldsymbol{a})$ es un campo lineal tal que*

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v}.$$

1. *El vector $\nabla f(\boldsymbol{a})$ se denomina* vector gradiente *de f en $\boldsymbol{a}$.*

2. *Si $\nabla f(\boldsymbol{a}) = (\mathrm{D}_1 f(a), \dots, \mathrm{D}_n f(a))$, las componentes $\mathrm{D}_i f(\boldsymbol{a})$ se denominan* derivadas parciales *de f en $\boldsymbol{a}$.*

3. *El conjunto de los vectores $(v_1, \dots, v_n, v_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tales que:*

$$\mathrm{D}_1 f(\boldsymbol{a})v_1 + \dots + \mathrm{D}_n f(\boldsymbol{a})v_n - v_{n+1} = 0$$

se denomina espacio vectorial tangente *al grafo de f en el punto $\boldsymbol{a}$.*

4. *El conjunto de los puntos $(x_1, \dots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tales que:*

$$\mathrm{D}_1 f(\boldsymbol{a})(x_1 - a_1) + \dots + \mathrm{D}_n f(\boldsymbol{a})(x_n - a_n) - (z - f(\boldsymbol{a})) = 0$$

se denomina espacio afín tangente *al grafo de f en el punto $\boldsymbol{a}$. Si $n = 2$ lo denominamos* plano tangente *y si $n = 1$ lo denominamos* recta tangente.

Notación de Leibniz. Hemos definido en el apartado anterior las derivadas parciales como las componentes del vector gradiente y las hemos denotado como $\mathrm{D}_i f(\boldsymbol{a})$. Esta notación extiende la notación $\mathrm{D}f(a)$ para la derivada de funciones reales, que denotamos más habitualmente por $f'(a)$. Estas notaciones son adecuadas para aplicarlas sobre el nombre que le demos a la función, sin embargo, en algunas ocasiones podremos trabajar sobre campos sin utilizar un nombre específico; en estos casos, debemos utilizar la *notación de Leibniz*. Por ejemplo, con esta notación, la derivada de la función dada por la expresión $x^2 - \operatorname{sen} x$ se escribe como:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 - \operatorname{sen} x) = 2x - \cos x$$

Si queremos indicar el valor de la función derivada en el punto $x = \pi$, escribiremos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 - \operatorname{sen} x)\bigg|_{x=\pi} = 2\pi - 1$$

Para campos escalares, también podemos utilizar la notación de Leibniz, aunque en este caso, se utiliza la letra '∂' en lugar de la letra 'd'. Por ejemplo, las derivadas parciales del campo $f(x, y) = 2x^2y - xy^2$ se escribirán

$$\mathrm{D}_1 f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y - xy^2), \qquad \mathrm{D}_1 f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y - xy^2).$$

Aunque ya sabemos calcular las derivadas parciales usando su definición, hemos podido comprobar que el método resulta bastante laborioso. Haciendo uso de la notación de Leibniz, vamos a deducir un método mucho más simple. Es decir, vamos a mostrar como calcular la derivada respecto de x de un campo $f(x, y)$, es decir, $\mathrm{D}_1 f$, en cualquier punto (a, b)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\bigg|_{(x,y)=(a,b)} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a + t, b)\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, b)\bigg|_{x=a} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a + t)\bigg|_{t=0} \qquad (3.9) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, b)\bigg|_{x=a} \qquad (3.10) \\
\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y) \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

En (3.9), hemos aplicado la regla de la cadena para funciones reales; para ello, hemos utilizado la función de una variable $g(x) = f(x, b)$. En (3.10), hemos simplificado teniendo en cuenta que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a+t) = 1$. Como conclusión, obtenemos la igualdad (3.11), que nos dice que: *hallar la parcial de un campo $f(x, y)$ respecto de la variable x es igual a hallar la derivada de la expresión $f(x, y)$ considerando a x como variable y a y como constante.*

Naturalmente, la regla anterior se puede utilizar sobre campos en cualquier número de variables y para cualquiera de ellas.

PROPOSICIÓN 3.2.8 *La parcial*

$$\mathrm{D}_i f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_n)$$

en el punto $(x_1, \dots, x_n)$ *se calcula derivando la expresión del campo en la cual se considera que* x_i *es la variable y el resto son constantes.*

EJEMPLO 3.2.9 Vamos a calcular las derivadas parciales del campo $f(x, y) = 2x^2y - xy^2$ según el método anterior y utilizarlas para determinar el vector gradiente en el punto $\boldsymbol{a} = (2, -1)$, así como la derivada direccional en $\boldsymbol{v} = (1, 1)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_1 f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y - xy^2) = 4xy - y^2 \\
\mathrm{D}_2 f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y - xy^2) = 2x^2 - 2xy \\
\nabla f(2, -1) &= (-9, 12) \\
\mathrm{D}_{(1,1)} f(2, -1) &= \nabla f(2, -1) \cdot (1, 1) = (-9, 12) \cdot (1, 1) = 3
\end{aligned}$$

□

Diferenciabilidad. Aunque ya hemos introducido las nociones de tasa de cambio puntual y de plano tangente, todavía no hemos definido la propiedad de diferenciabilidad de campos escalares. Puede parecer que la existencia de los vectores tangentes y que todos ellos formen un plano es suficiente para garantizar una noción adecuada de diferenciabilidad, sin embargo, esto no es así. De hecho, se pueden establecer ejemplos donde el plano tangente así calculado no responde a la idea intuitiva inicial para esa noción. Por lo tanto, en adelante, solo calcularemos y utilizaremos las tasas de cambio puntuales y los espacios tangentes para aquellos campos que verifiquen la condición de diferenciabilidad que definimos a continuación. Esta condición se puede expresar de manera sencilla como sigue: *El plano tangente calculado en los apartados anteriores, debe ser el plano que mejor aproxime al campo escalar en las cercanías del punto* $\boldsymbol{a}$. Está propiedad coincide con la que tenemos para funciones de una variable: la recta tangente es la que mejor aproxima la función con polinomios de grado 1.

DEFINICIÓN 3.2.9 *Sea* $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *un campo escalar y* $\boldsymbol{a} \in D$ *para el cual existe el vector gradiente* $\nabla f(\boldsymbol{a})$. *Decimos que* f *es* diferenciable *en* $\boldsymbol{a}$ *si*

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|}(f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h}) = 0$$

Por lo tanto, el estudio de la propiedad de diferenciabilidad se basa en el cálculo de límites en varias variables y, como ya hemos dicho, no vamos a abordar en este curso. En la mayoría de los casos, será suficiente con aplicar los resultados que recogemos a continuación y que aseguran la difenciabilidad de los campos expresados a partir de funciones elementales. A lo largo del curso, solo vamos a trabajar con este tipo de funciones, y por lo tanto, no será necesario estudiar la condición de diferenciabilidad a partir de la definición.

TEOREMA 3.2.10 *Si existen todas las derivadas parciales del campo escalar f y son continuas en un entorno del punto $\boldsymbol{a}$, entonces f es diferenciable en $\boldsymbol{a}$.*

La condición dada en este teorema es suficiente para garantizar la diferenciabilidad, pero no es una condición necesaria y, de hecho, se pueden establecer ejemplos bastantes simples de campos diferenciables cuyas derivadas parciales no son continuas. Sin embargo, es bastante frecuente que necesitemos esta condición adicional para obtener propiedades adecuadas para los campos. Decimos que un campo es de *clase* $\mathcal{C}^1$ si es diferenciable y su parciales son continuas.

COROLARIO 3.2.11 *Si un campo escalar está determinado por operaciones algebraicas entre funciones elementales*[2] *(polinomios, exponenciales, trigonométricas, ...) en un dominio D, entonces el campo es continuo y diferenciable en dicho dominio.*

3.2.3.1. Propiedades del vector gradiente

La siguiente proposición establece que la relación entre continuidad y derivabilidad de las funciones reales se mantiene en la generalización a campos.

PROPOSICIÓN 3.2.12 *Si f es un campo escalar diferenciable en $\boldsymbol{a}$, entonces f es continuo en $\boldsymbol{a}$.*

Aunque en el estudio de campos concretos, no necesitaremos normalmente la aplicación de las propiedades algebraicas que vemos a continuación, estas pueden ser útiles para simplificar cálculos en algunas situaciones y para realizar desarrollos teóricos simples.

PROPOSICIÓN 3.2.13 *Consideremos los campos f y g definidos en $\mathbb{R}^n$, la función de una variable ϕ y la función vectorial $\boldsymbol{\gamma}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.*

1. *Si f y g son diferenciables en $\boldsymbol{a}$, entonces $f+g$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y*

$$\nabla(f+g)(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) + \nabla g(\boldsymbol{a})$$

[2]Recordemos que, aunque las funciones potenciales son consideradas como elementales, algunos casos suponen una excepción a esta regla; concretamente, si $f(x) = x^\alpha$ y $0 < \alpha < 1$, f no es derivable en 0

2. *Si f y g son diferenciables en $\boldsymbol{a}$, entonces fg también es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y*

$$\nabla(fg)(\boldsymbol{a}) = g(\boldsymbol{a})\nabla f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a})\nabla g(\boldsymbol{a})$$

3. *Si f es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y $f(\boldsymbol{a}) \neq 0$, entonces $1/f$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y*

$$\nabla(1/f)(\boldsymbol{a}) = -\frac{1}{[f(\boldsymbol{a})]^2}\nabla f(\boldsymbol{a})$$

4. *Regla de la cadena: Si f es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y ϕ es derivable en $f(\boldsymbol{a})$, entonces $\phi \circ f$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y*

$$\nabla(\phi \circ f)(\boldsymbol{a}) = \phi'(f(\boldsymbol{a}))\nabla f(\boldsymbol{a})$$

5. *Regla de la cadena: Si $\boldsymbol{\gamma}$ es derivable en t_0 y f es diferenciable en $\boldsymbol{\gamma}(t_0)$, entonces $f \circ \boldsymbol{\gamma}$ es derivable en t_0 y*

$$(f \circ \boldsymbol{\gamma})'(t_0) = \nabla f(\boldsymbol{\gamma}(t_0)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t_0)$$

Deducimos a continuación una importante propiedad del vector gradiente. Si $\boldsymbol{u}$ es un vector unitario, según hemos definido anteriormente, la tasa de cambio puntual de un campo f en un punto $\boldsymbol{a}$ y en la dirección $\boldsymbol{u}$ es:

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{u}}f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{u} = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\| \cos\alpha,$$

en donde α es el ángulo formado por los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\nabla f(\boldsymbol{a})$. Por lo tanto, dado que el módulo del vector gradiente es constante, el valor de la tasa de cambio depende solamente del ángulo que el vector gradiente forma con la dirección considerada.

Teorema 3.2.14 *Sea α es ángulo formado por $\nabla f(\boldsymbol{a})$ y un vector unitario $\boldsymbol{u}$.*

1. *Si $\alpha = 0$ (los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\nabla f(\boldsymbol{a})$ tienen la misma dirección), el valor del coseno es máximo y por lo tanto, el valor de la tasa de cambio puntual es máximo e igual a $\mathrm{D}_{\boldsymbol{u}}f(a) = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\|$.*

2. *Si $\alpha = \pi/2$ (los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\nabla f(\boldsymbol{a})$ son perpendiculares) el valor del coseno es 0, es decir, la tasa de cambio puntual es nula en la dirección perpendicular al vector gradiente.*

En la figura 3.6 representamos dos curvas de nivel de un campo f. Si nos movemos desde el punto (a_1, a_2) y queremos sufrir el cambio más rápido en el valor del campo, tendremos que ir en la dirección que nos da mayor proximidad a la siguiente curva de nivel. El ítem 1 del teorema 3.2.14 indica que esta dirección es la dada por el vector gradiente de f en ese punto.

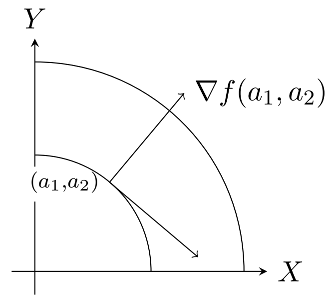


Figura 3.6: El gradiente da la dirección de derivada direccional máxima.

Pero si nos movemos sobre la curva de nivel, no sufrimos ninguna variación en el valor del campo, es decir, la derivada direccional es 0; el ítem 2 del teorema 3.2.14 dice que esta dirección es normal al vector gradiente. Esta propiedad es válida para cualquier campo, como probamos a continuación.

Sea $\boldsymbol{\gamma}\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ la parametrización de una curva contenida en una superficie de nivel de un campo f, es decir, $f(\boldsymbol{\gamma}(t)) = c$ para todo t, y supongamos que esta curva pasa por el punto $\boldsymbol{a}$, es decir, $\boldsymbol{\gamma}(t_0) = \boldsymbol{a}$. Una simple aplicación de la regla de la cadena justifica el siguiente desarrollo:

$$0 = (f \circ \boldsymbol{\gamma})'(t_0) = \nabla f(\boldsymbol{\gamma}(t_0)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t_0)$$

El vector derivada $\boldsymbol{\gamma}'(t_0)$ es tangente a la curva y por lo tanto a la superficie de nivel; en consecuencia, la igualdad anterior permite afirmar que estos vectores son perpendiculares al vector gradiente.

Teorema 3.2.15 *Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo diferenciable y consideremos una superficie de nivel $f(\boldsymbol{x}) = c$ y un punto $\boldsymbol{a}$ en dicha superficie. Entonces, $\nabla f(\boldsymbol{a})$ es un vector normal al plano tangente a la superficie de nivel en punto $\boldsymbol{a}$. Por lo tanto, el espacio vectorial tangente a la superficie es:*

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

y el espacio afín tangente es:

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = 0$$

Como casos particulares, vamos a mostrar las expresiones de las rectas y planos tangentes a curvas de nivel en $\mathbb{R}^2$ y superficies de nivel en $\mathbb{R}^3$:

1. La recta tangente a la curva dada por $f(x, y) = c$ en un punto (x_0, y_0) es:

$$\mathrm{D}_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + \mathrm{D}_2 f(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

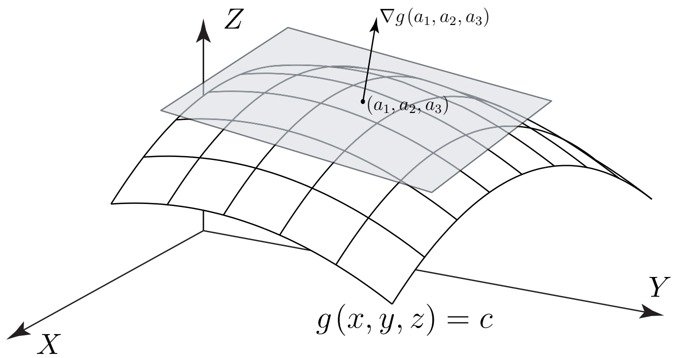


Figura 3.7: El gradiente es normal a la superficie de nivel.

2. Análogamente, el plano tangente a la superficie dada por $g(x, y, z) = c$ (ver figura 3.7) en un punto (x_0, y_0, z_0) es:

$$\mathrm{D}_1 g(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \mathrm{D}_2 g(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \mathrm{D}_3 g(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Ejemplo 3.2.10 En la lección anterior, hemos aprendido a calcular las rectas tangentes a curvas parametrizadas. En particular, podríamos obtener la recta tangente a una cónica utilizando las parametrizaciones que hemos introducido para las cónicas. Ahora, haciendo uso del vector gradiente, podemos calcular más fácilmente estas rectas. Por ejemplo, la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es una curva de nivel del campo

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

y por lo tanto, un vector normal a dicha superficie en un punto (x_0, y_0) es

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2} \right);$$

en consecuencia, la recta tangente es:

$$\begin{aligned}
\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)&=0\\
\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)&=0\\
\frac{x_0}{a^2}x-\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0}{b^2}y-\frac{y_0^2}{b^2}&=0\\
\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y&=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\\
\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y&=1
\end{aligned}$$ □

Ejemplo 3.2.11 Dado un campo escalar en $\mathbb{R}^2$, su grafo puede considerarse como la superficie de nivel de un campo en $\mathbb{R}^3$:

$$g(x,y,z)=f(x,y)-z.$$

Efectivamente, si $g(x,y,z)=0$, entonces $z=f(x,y)$. Por lo tanto, el plano tangente a $g(x,y,z)=0$ es normal al vector

$$\nabla g(x_0,y_0,z_0)=(\mathrm{D}_1f(x_0,y_0),\mathrm{D}_2f(x_0,y_0),-1),$$

que permite construir el plano tangente introducido en la definición 3.2.7:

$$\mathrm{D}_1f(x_0,y_0)(x-x_0)+\mathrm{D}_2f(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-f(x_0,y_0))=0$$ □

3.2.4. Derivadas de orden superior

Para un campo $f\colon D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ diferenciable hemos definido las derivadas parciales para cada punto del dominio y por lo tanto, estas definen un campo escalar para cada i con $1\le i\le n$:

$$\mathrm{D}_if\colon D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

Tiene entonces sentido estudiar la diferenciabilidad de estos campos y calcular sus derivadas parciales. Las derivadas parciales de los campos D_if se denominan *derivadas de segundo orden* de f y las notaciones posibles para ellas son

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j},\qquad\qquad \mathrm{D}_i(\mathrm{D}_jf)=\mathrm{D}_{ij}f.$$

Por el corolario 3.2.11, la continuidad de las derivadas parciales de segundo orden asegura la diferenciabilidad de las derivadas parciales de f; en tal caso, decimos que f es de *clase* $\mathcal{C}^2$. Una importante propiedad de estos campos queda establecida por el siguiente teorema, que asegura que el orden de derivación no influye en el resultado.

Teorema 3.2.16 (de Schwarz) *Sea f un campo escalar tal que sus derivadas parciales de segundo orden son continuas; entonces, para cada i, j:*

$$\mathrm{D}_{ij}f = \mathrm{D}_{ji}f$$

Para los campos de clase $\mathcal{C}^2$ y para cada punto de su dominio, definimos la siguiente matriz $n \times n$, que se denomina *matriz Hessiana* de f en $\boldsymbol{a}$:

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \mathrm{D}_{11}f(\boldsymbol{a}) & \mathrm{D}_{12}f(\boldsymbol{a}) & \cdots & \mathrm{D}_{1n}f(\boldsymbol{a}) \\ \mathrm{D}_{21}f(\boldsymbol{a}) & \mathrm{D}_{22}f(\boldsymbol{a}) & \cdots & \mathrm{D}_{2n}f(\boldsymbol{a}) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \mathrm{D}_{n1}f(\boldsymbol{a}) & \mathrm{D}_{n2}f(\boldsymbol{a}) & \cdots & \mathrm{D}_{nn}f(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

Obsérvese que, por el teorema de Schwarz, esta matriz es simétrica. A partir de ella, definimos el campo

$$\mathrm{d}^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}^t \nabla^2 f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u},$$

que se denomina *segunda diferencial de f en $\boldsymbol{a}$*. Como ya dijimos anteriormente, cuando trabajamos con expresiones matriciales, los vectores deben tratarse como matrices columna y por esta razón escribimos la matriz transpuesta $\boldsymbol{u}^t$ a la izquierda de la matriz hessiana.

Ejemplo 3.2.12 Vamos a calcular $\mathrm{d}^2 f_{\boldsymbol{a}}$ para $f(x,y) = 2x^2y - xy^2$ y $\boldsymbol{a} = (2,-1)$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2x^2y - xy^2 \\ \nabla f(x,y) &= (4xy - y^2, 2x^2 - 2xy) \\ \nabla^2 f(x,y) &= \begin{pmatrix} 4y & 4x-2y \\ 4x-2y & -2x \end{pmatrix} \\ \nabla^2 f(2,-1) &= \begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} \\ \mathrm{d}^2 f_{(2,-1)}(u_1,u_2) &= (u_1\ u_2)\begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ \mathrm{d}^2 f_{(2,-1)}(u_1,u_2) &= -4u_1^2 + 20u_1u_2 - 4u_2 \end{aligned}$$ □

Como vemos en este ejemplo, la expresión obtenida para $\mathrm{d}^2 f_{(2,-1)}$ es un polinomio de grado 2 sin términos de grado 1 y grado 0; estas expresiones se denominan *formas cuadráticas*.

Todo el desarrollo mostrado en esta sección puede continuarse para definir las derivadas parciales de órdenes superiores (orden tres, cuatro,...). Sin embargo, en este curso solo trabajaremos con las derivadas de segundo orden. Por ejemplo, con estas derivadas, podemos mejorar la aproximación dada por el vector gradiente en la definición de diferenciabilidad.

Teorema 3.2.17 (Fórmula de Taylor) *Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar dos veces diferenciable y con parciales de segundo orden continuas. Entonces:*

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^t \nabla^2 f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u} + \|\boldsymbol{u}\|^2 E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}),$$

en donde $\lim_{\|\boldsymbol{u}\|\to 0} E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}) = 0$.

Es decir, el campo $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{u})$, en un entorno lo suficientemente pequeño de $\boldsymbol{a}$, tiene un comportamiento parecido al polinomio de segundo orden

$$f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^t \nabla^2 f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}.$$

Este polinomio también lo podemos escribir como:

$$T(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^t \nabla^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}).$$

Ejemplo 3.2.13 Vamos a calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2+y)$ en el punto $(0,0)$:

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= (2x\cos(x^2+y), \cos(x^2+y)) \\
\nabla f(0,0) &= (0,1) \\
\nabla^2 f(x,y) &= \begin{pmatrix} 2\cos(x^2+y) - 4x^2\operatorname{sen}(x^2+y) & -2x\operatorname{sen}(x^2+y) \\ -2x\operatorname{sen}(x^2+y) & -\operatorname{sen}(x^2+y) \end{pmatrix} \\
\nabla^2 f(0,0) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
f(x,y) &\approx 0 + (0,1)\cdot(x,y) + \frac{1}{2}(x\ y)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y + x^2
\end{aligned}$$

□

Igual que para funciones de una variable, también es posible definir el polinomio de Taylor de cualquier orden y enunciar el correspondiente teorema, pero tal enunciado queda fuera de los objetivos de este curso.

Por otra parte, las propiedades algebraicas del polinomio de Taylor que estudiamos en el primer tema, también son aplicables a campos escalares, lo que permite calcular los polinomios de Taylor de funciones expresadas en términos de funciones elementales sin calcular explícitamente las derivadas parciales.

Proposición 3.2.18 *1. El n-ésimo polinomio de Taylor de $f+g$ es la suma de los n-ésimos polinomios de Taylor de f y g.*

2. *El n-ésimo polinomio de Taylor de $f\cdot g$ es el producto de los n-ésimos polinomios de Taylor de f y g* desechando los sumandos de grado mayor que n.

3. *El n-ésimo polinomio de Taylor de $f\circ g$ es la composición de los n-ésimos polinomios de Taylor de f y g* desechando los sumandos de grado mayor que n.

Ejemplo 3.2.14 Vamos a calcular el polinomio de Taylor de orden 2 del campo $f(x,y)=x^2\cos y$ en el punto $(2,0)$. Dado que x^2 es un polinomio, coincide con su polinomio de Taylor; por lo tanto, solo necesitamos centrarlo en 2:

$$x^2=((x-2)+2)^2=4+4(x-2)+(x-2)^2$$

El polinomio de Taylor de $\cos y$ de orden 2 en 0 es: $1-\frac{y^2}{2}$. Por lo tanto, el polinomio de Taylor de f es:

$$\begin{aligned}
T(x,y)=(4+4(x-2)+(x-2)^2)\left(1-\frac{y^2}{2}\right)-\{\text{Términos con gr}>2\}=\\
=4+4(x-2)+(x-2)^2-2y^2=\\
=4+4(x-2)+\frac{1}{2}(x-2\ \ y)\begin{pmatrix}2&0\\0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-2\\y\end{pmatrix}
\end{aligned}$$ □

LECCIÓN 3.3

Optimización de campos escalares

Una de las aplicaciones del concepto de diferenciabilidad es resolver problemas de *optimización*, es decir, encontrar los valores máximos y mínimos de una magnitud definida a partir de uno o varios parámetros. Estos problemas se resuelven fácilmente si la magnitud solo depende de un parámetro, utilizando las derivadas de orden superior de la función de una variable determinada por el problema. El objetivo de esta lección es generalizar esta técnica a campos escalares, es decir, optimizar magnitudes escalares que dependen de varios parámetros.

Empezamos introduciendo formalmente la noción de *entorno* en $\mathbb{R}^n$.

Definición 3.3.1 *Llamamos* bola abierta de radio ε y centro $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ *al conjunto*

$$B(\boldsymbol{a},\varepsilon) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon\}.$$

Decimos que un conjunto E es un entorno *del punto $\boldsymbol{a}$, si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\boldsymbol{a},\varepsilon) \subset E$.*

En particular, para $n = 2$, las bolas abiertas son círculos de radio ε y centro en $\boldsymbol{a}$:

$$\begin{aligned} B((a_1,a_2),\varepsilon) &= \{(x,y) \mid \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} < \varepsilon\} = \\ &= \{(x,y) \mid (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 < \varepsilon^2\}. \end{aligned}$$

Análogamente, para $n = 3$, las bolas abiertas son esferas de radio ε y centro en $\boldsymbol{a}$:

$$B((a_1,a_2,a_3),\varepsilon) = \{(x,y,z) \mid (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2 < \varepsilon^2\}.$$

Utilizaremos la noción de entorno para definir diversos conceptos, como conjunto acotado, conjunto cerrado y extremos local.

Definición 3.3.2 *Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se dice que está* acotado *si existen $r > 0$ y $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tales que $D \subset B(\boldsymbol{x}, r)$.*

A partir de la definición de entorno (ver definición 3.3.1), los conceptos de conjunto abierto y conjunto cerrado se establecen igual que en $\mathbb{R}$: un conjunto D se dice que es *abierto*, si es entorno de todos sus puntos; decimos que D es *cerrado*, si su complementario es abierto.

Sabemos que, para las funciones de una variable, una función continua y acotada en un dominio *cerrado* siempre alcanza un valor máximo y un valor mínimo en tal dominio. Esta propiedad también se verifica para campos escalares.

Teorema 3.3.3 *Sea f un campo escalar continuo y A un subconjunto cerrado y acotado del dominio de f. Entonces existen $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1 \in A$ tales que $f(\boldsymbol{x}_0) \leq f(x) \leq f(\boldsymbol{x}_1)$ para todo $\boldsymbol{x} \in A$.*

Es decir, $f(\boldsymbol{x}_0)$ es el valor mínimo que toma el campo en el conjunto A y $f(\boldsymbol{x}_1)$ es el valor máximo. En tal caso, decimos que $\boldsymbol{x}_0$ es el punto mínimo y $\boldsymbol{x}_1$ es el punto máximo.

3.3.1. Extremos locales

Igual que en el caso real, para determinar los máximos y mínimos de un campo debemos empezar por determinar los máximos y mínimos locales o relativos, es decir, los máximos y mínimos respecto de los puntos cercanos a él.

Definición 3.3.4

1. *$f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tiene un* máximo local (o relativo) *en $\boldsymbol{a} \in D$ si existe $r > 0$, tal que $f(\boldsymbol{a}) \geq f(\boldsymbol{x})$ para todo $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, r) \cap D$.*
2. *$f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tiene un* mínimo local (o relativo) *en $\boldsymbol{a} \in D$ si existe $r > 0$, tal que $f(\boldsymbol{a}) \leq f(\boldsymbol{x})$ para todo $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, r) \cap D$.*

Utilizaremos la denominación genérica de *extremo* para referirnos a un punto que sabemos que es máximo o mínimo. El siguiente teorema justifica la definición de puntos críticos, entre los cuales encontramos los extremos locales de un campo.

Teorema 3.3.5 *Si $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es un campo escalar diferenciable y $\boldsymbol{a} \in D$ es un extremo local de f, entonces $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0} = (0, \dots, 0)$; es decir, todas las derivadas parciales de f en $\boldsymbol{a}$ son nulas.*

Gráficamente, para funciones de una variable sabemos que la recta tangente al grafo de la función en un extremo son paralelas al eje OX. Si $n = 2$ también obtenemos una propiedad parecida, ya que si $\nabla f(a_1, a_2) = (0, 0)$, entonces el plano tangente al grafo en el punto (a_1, a_2) es perpendicular al vector $(0, 0, -1)$, es decir, es paralelo al plano XY.

Ejemplo 3.3.1

1. Para el campo $f(x, y) = x^2 + y^2$ se verifica que $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ y por lo tanto, su único punto crítico es $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Es fácil razonar que este punto es mínimo del campo:

$$x^2 + y^2 \geq 0 = f(0, 0)$$

2. Para el campo $f(x, y) = x^2 - y^2$ se verifica que $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$ y por lo tanto, su único punto crítico es $(x_0, y_0) = (0, 0)$. En este caso, el punto no es un extremo ya que $f(0, 0) = 0$ y $f(x, 0) = x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$ y $f(0, y) = -y^2 < 0$ para todo $y \neq 0$. $\square$

En el ejemplo anterior, observamos que el recíproco del teorema 3.3.5 no es cierto, es decir, que el gradiente sea nulo no asegura que ese punto sea un extremo. Los puntos en los cuales el vector gradiente es nulo se denominan *puntos críticos* y los puntos críticos que no son extremos locales se denominan *puntos silla*.

Del teorema 3.3.5 se deduce el primer paso para determinar los extremos locales de un campo escalar: *debemos localizar los puntos críticos y aquellos puntos en los que el campo no es diferenciable*,[3] ya que entre ellos estarán todos los extremos. El siguiente paso es clasificar estos puntos, es decir, determinar cuáles son máximos, cuáles mínimos y cuáles no son extremos. Esta clasificación debe hacerse comparando el valor de la función en el punto con los valores de la función en los puntos cercanos.

Criterio de la hessiana. La forma más sencilla de hacer la comparación del valor en el punto crítico con los valores en sus cercanías, es utilizando el polinomio de Taylor. Recordemos que el teorema de Taylor dice que, en un entorno suficientemente pequeño de $\boldsymbol{a}$,

$$f(\boldsymbol{x}) \approx f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^t \nabla^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a});$$

si, además, $\boldsymbol{a}$ es un punto crítico, entonces

$$f(\boldsymbol{x}) \approx f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^t \nabla^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}),$$

y en consecuencia, la comparación de $f(\boldsymbol{a})$ y $f(\boldsymbol{x})$ se reduce a analizar el signo de

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^t \nabla^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}).$$

Concretamente, tenemos el siguiente resultado, análogo al criterio de la derivada segunda para funciones de una variable.

TEOREMA 3.3.6 *Sea $\boldsymbol{a} \in D$ un punto crítico del campo $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ y consideremos la segunda diferencial de f en $\boldsymbol{a}$, $\mathrm{d}^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}^t \nabla^2 f(\boldsymbol{a}) \boldsymbol{u}$.*

[3] Debemos incluir los puntos en donde la función no es diferenciable porque a ellos no le podemos aplicar el teorema. Sin embargo, a lo largo del tema solo trabajaremos con funciones cuyos extremos se alcanzan en puntos en donde la función es diferenciable.

1. *Si* $\mathrm{d}^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}) > 0$ *para todo* $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ *(es decir,* $\mathrm{d}^2 f_{\boldsymbol{a}}$ *es* definida positiva*), entonces* $\boldsymbol{a}$ *es un mínimo local de* f*.*
2. *Si* $\mathrm{d}^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}) < 0$ *para todo* $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ *(es decir,* $\mathrm{d}^2 f_{\boldsymbol{a}}$ *es* definida negativa*), entonces* $\boldsymbol{a}$ *es un máximo local de* f*.*
3. *Si* $\mathrm{d}^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}_1) > 0$ *y* $\mathrm{d}^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}_2) < 0$ *para algún* $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \neq \mathbf{0}$ *(es decir,* $\mathrm{d}^2 f_{\boldsymbol{a}}$ *es* indefinida*), entonces* $\boldsymbol{a}$ *es un punto silla de* f*.*

En cualquier otro caso, no considerado en el teorema, ***no podemos deducir nada***; es decir, si la forma cuadrática es 0 en algunos vectores y positiva en el resto (semidefinida positiva), o bien si es 0 en algunos vectores y negativa en el resto (semidefinida negativa).

Para analizar el signo de la forma cuadrática, es suficiente con dar una expresión para la misma en terminos de sumas y diferencias de cuadrados, lo cual conseguiremos utilizando la técnica de compleción de cuadrados que hemos aprendido en los temas anteriores.

Ejemplo 3.3.2 Vamos a hallar y clasificar los puntos críticos del campo $f(x, y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$:

$$\nabla f(x, y) = (4x - y - 3, -x - 6y + 7)$$

El puntro crítico es la solución del sistema

$$\begin{aligned} 4x - y - 3 &= 0 \\ -x - 6y + 7 &= 0, \end{aligned}$$

es decir, $(x_0, y_0) = (1, 1)$. La matriz hessina del campo es:

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

Y la segunda diferencial es:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2 f_{(1,1)}(u_1, u_2) &= (u_1 \ u_2) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= 4u_1^2 - 2u_1u_2 - 6u_2^2 = (2u_1 - \frac{1}{2}u_2)^2 - \frac{1}{4}u_2^2 - 6u_2^2 \\ &= (2u_1 - \frac{1}{2}u_2)^2 - \frac{25}{4}u_2^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathrm{d}^2 f_{(1,1)}(u_1, 0) = 4u_1^2 > 0$ y $\mathrm{d}^2 f_{(1,1)}(u_1, u_2) = -\frac{25}{4}u_2^2 < 0$, si $2u_1 = \frac{1}{2}u_2$. En consecuencia, el punto $(1, 1)$ es un punto silla. □

Utilizando el método de compleción de cuadrados como en este ejemplo, siempre es posible expresar la forma cuadrática como:

$$\mathrm{d}^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}) = a_1\lambda_1(\boldsymbol{u})^2 + \cdots + a_n\lambda_n(\boldsymbol{u})^2,$$

en donde cada λ_i es una forma lineal. A partir de ahí, deducimos que:

1. Si los n coeficientes a_i son estrictamente positivos, la forma cuadrática es definida positiva y estará asociada a un mínimo.
2. Si los n coeficientes son estrictamente negativos, la forma cuadrática es definida negativa y estará asociada a un máximo.
3. Si algún coeficiente es positivo y otro es negativo, la forma cuadrática es indefinida y estará asociada a un punto silla.
4. En los demás casos (algún coeficiente es nulo y los demás son o todos positivos o todos negativos), la forma es semidefinida y ***no podemos deducir nada*** sobre el punto al que está asociada.

En algunos casos, sin embargo, puede ser más simple (o inevitable) hacer una comparación directa de la expresiones.

Ejemplo 3.3.3 Vamos a hallar y clasificar los puntos críticos del campo

$$f(x,y) = (3-x)(3-y)(x+y-3)$$

Hallemos las parciales para resolver el correspondiente sistema

$$\mathrm{D}_1 f(x,y) = (3-y)(-y-2x+6)$$
$$\mathrm{D}_2 f(x,y) = (3-x)(-2y-x+6)$$

Obsérvese la conveniencia de mantener la factorización de la expresión inicial para facilitar los cálculos posteriores. En este caso, al igualar a 0 la parcial respecto de x, obtenemos dos casos

$$y = 3 \quad \text{ó} \quad y = 6-2x,$$

que llevados a la parcial respecto de y, permiten obtener fácilmente todos los puntos críticos:

$$(3,3), \quad (3,0), \quad (0,3), \quad (2,2).$$

En los tres primeros puntos, el campo vale 0 y por lo tanto, su clasificación pasa por determinar el signo de f en las cercanías de estos puntos. Dado que la expresión

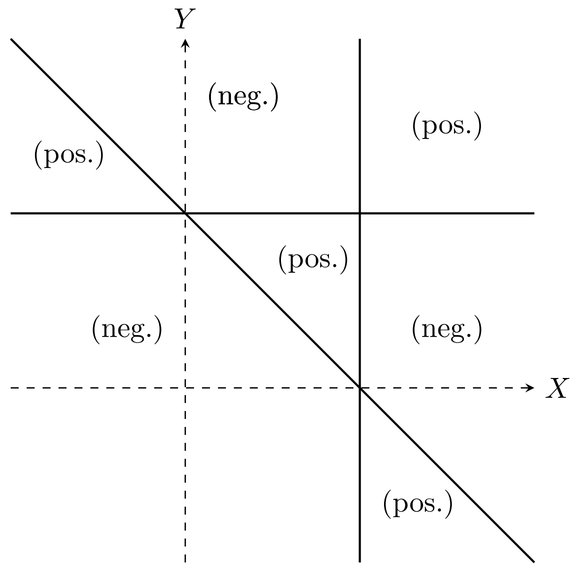


Figura 3.8: Ejemplo 3.3.3.

de f está factorizada, es sencillo determinar el signo del campo en las regiones determinadas por las rectas

$$x = 3, \quad y = 3, \quad \text{y} \quad x + y - 3 = 0.$$

Dado que, solo en estas recta, el campo se anula, en cada una de las regiones el campo toma un signo constante y es suficiente con evaluar el campo en un punto interior para determinar el signo. De esta forma, determinamos los signos que aparecen indicados en la figura 3.8; podemos deducir entonces que los puntos $(3, 3)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$ son puntos silla.

Para clasificar el punto $(2, 2)$ vamos a usar la matriz hessiana, pero la vamos a determinar transformando la expresión polinómica inicial tras sustituir $x = (x-2)+2$ e $y = (y-2) + 2$.

$$\begin{aligned}
&(3-x)(3-y)(x+y-3)\\
&\qquad = (3-(x-2)-2)(3-(y-2)-2)((x-2)+2+(y-2)+2-3)\\
&\qquad = 1-(x-2)^2-(x-2)(y-2)-(x-2)^2+(x-2)(y-2)^2+(x-2)^2(y-2)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathrm{d}^2 f_{(2,2)}(u_1, u_2) = -u_1^2 - u_1u_2 - u_2^2 = -(u_1 + \frac{1}{2}u_2)^2 - \frac{3}{4}u_2^2 < 0,$$

y podemos concluir que $(2, 2)$ es un máximo local. □

Otra herramienta que nos ayuda a la clasificación de los puntos críticos, son las funciones

$$f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{v}}(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v})$$

que introdujimos para definir las derivadas direccionales, ya que nos dan información de lo que ocurre alrededor del punto, aunque de forma separada en cada dirección. El siguiente resultado establece la relación de estas funciones y la clasificación de los puntos críticos.

Teorema 3.3.7 *Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $\boldsymbol{a} \in D$. Entonces:*

1. *$\boldsymbol{a}$ es mínimo local de f si y solo si existe un número real $\varepsilon > 0$ tal que 0 es mínimo* absoluto *de todas las funciones $f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}}$, con $\|\boldsymbol{u}\| = 1$, sobre el intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$.*

2. *$\boldsymbol{a}$ es máximo local de f si y solo si existe un número real $\varepsilon > 0$ tal que 0 es máximo* absoluto *de todas las funciones $f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}}$, con $\|\boldsymbol{u}\| = 1$, sobre el intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$.*

Este resultado es una generalización del criterio de la hessiana. Esto es consecuencia de la siguiente igualdad, consecuencia de la regla de la cadena:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{u}) = \mathrm{d}^2 f_{\boldsymbol{a}}(u);$$

si estos valores son todos estrictamente positivos (resp. negativos) entonces 0 es mínimo (resp. máximo) de todas las funciones $f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}}$; el criterio de la hessiana establece que en las condiciones del teorema de Taylor esto permite concluir que $\boldsymbol{a}$ es mínimo (resp. máximo) de f.

Una de las ventajas de este resultado está en que "reduce" el estudio de extremos locales de campos escalares al estudio de extremos de funciones de una variable. Sin embargo, la aplicación de este teorema, en la práctica, no será siempre sencilla, ya que, por un lado, las funciones $f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}}$ dependen de $n-1$ parámetros y además, necesitamos encontrar un valor de ε para que "todas" las funciones tengan a $f(\boldsymbol{a})$ como valor extremo absoluto en $(-\varepsilon, \varepsilon)$. El siguiente corolario recoge algunas consecuencias del teorema anterior cuya aplicación práctica es más simple de manejar.

Corolario 3.3.8 *Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $\boldsymbol{a} \in D$:*

1. *Si 0 no es extremo local $f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}_0}$, entonces $\boldsymbol{a}$ no es extremo local de f.*

2. *Si 0 es máximo local $f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}_1}$ y mínimo local $f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}_2}$, entonces $\boldsymbol{a}$ no es extremo local de f.*

EJEMPLO 3.3.4 Vamos a clasificar los puntos críticos de $f(x, y) = x^3 + y^3$.

$$D_1 f(x, y) = 3x^2 \qquad D_2 f(x, y) = 3y^2$$

Por tanto, el único punto crítico es $(0, 0)$.

$$D_{11} f(x, y) = 6x \qquad D_{21} f(x, y) = 0 \qquad D_{22} f(x, y) = 6y$$

Por tanto, la matriz hessiana de f en $(0, 0)$ es $\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y la forma cuadrática asociada es nula, por lo que no obtenemos información sobre la condición del punto crítico. Consideremos la función:

$$g(t) = f_{(0,0),(0,1)}(t) = f(0, t) = t^3$$

La tercera derivada de g en $t = 0$ es 6, y por lo tanto, g tiene un punto de inflexión en 0. Por el apartado 1 del corolario 3.3.8, concluimos que el punto $(0, 0)$ es un punto silla de f. □

3.3.2. Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange

En la sección anterior hemos afrontado el problema de hallar los extremos locales de un campo escalar, es decir, los extremos sobre *subconjuntos abiertos* dentro del dominio del campo. Sin embargo, en muchas ocasiones nos interesará estudiar los extremos sobre conjuntos cuyo interior es vacío; por ejemplo, estudiar los extremos de un campo sobre $\mathbb{R}^2$ restringiéndonos a una circunferencia. Esta es la situación que abordamos en esta sección; concretamente, nos planteamos el siguiente problema: encontrar los extremos del campo $f(x_1, \ldots, x_n)$ sobre un conjunto S definido a partir de k campos escalares $g_i(x_1, \ldots, x_n)$:

$$S = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0,\ 1 \leq i \leq k\}$$

Más brevemente, enunciamos el problema diciendo: *encontrar los extremos del campo escalar f con las condiciones o restricciones $g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$, para cada i tal que $0 \leq i \leq k$.*

En el ejemplo 3.3.4 hemos visto que el campo $f(x, y) = x^3 + y^3$ no tiene extremos locales, es decir, el campo no alcanza ni máximo ni mínimo sobre ningún conjunto abierto. Sin embargo, en la figura 3.9, podemos apreciar que si restringimos el campo a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, entonces sí aparecen varios extremos.

En el lado derecho de la misma figura 3.9, vemos la representación del mismo campo, pero mediante las curvas de nivel para $-3/2$, -1, $-1/2$, 0, $1/2$, 1 y $3/2$;

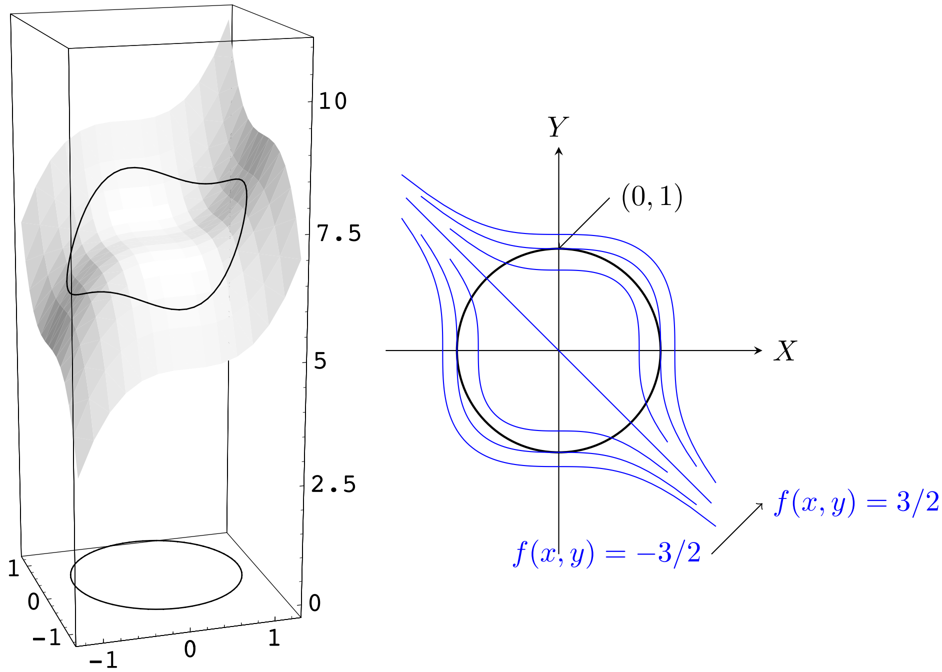


Figura 3.9: Representaciones de $f(x, y) = x^3 + y^3$ sobre $x^2 + y^2 = 1$.

también representamos la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ sobre la que queremos optimizar el campo. Si nos fijamos por ejemplo en el punto $(0, 1)$ de la circunferencia, observamos que la circunferencia y la curva de nivel que pasa por este punto son tangentes. Si analizamos los valores del campo según nos desplazamos sobre la circunferencia desde algún punto a la izquierda del punto $(0, 1)$ hasta algún punto a su derecha, observamos que hasta llegar al $(0, 1)$ cortamos curvas de nivel correspondientes a valores crecientes del campo, y a partir de $(0, 1)$ cortamos curvas de nivel correspondientes a valores decrecientes del campo. Por lo tanto, podemos afirmar que $(0, 1)$ es un máximo (local) de f sobre la circunferencia.

Este ejemplo, que más adelante completaremos analíticamente, motiva el siguiente resultado que afirma que los candidatos a extremos están entre los puntos tales que el conjunto de la restricción y la curva o superficie de nivel son tangentes.

Teorema 3.3.9 *Sean $f, g_1, \ldots, g_k \colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ campos escalares diferenciables y con derivadas parciales continuas. Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ cuyos puntos verifican las condiciones:*

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad \textit{para todo } i$$

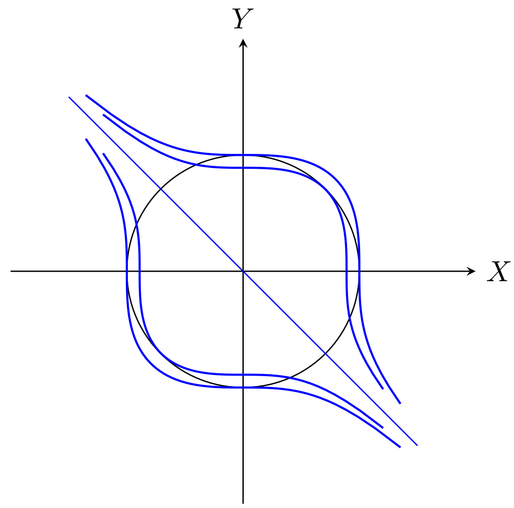


Figura 3.10: Puntos críticos del ejemplo 3.3.5.

Entonces se verifica que: si $\boldsymbol{x_0}$ *es un extremo local de* f *restringida a* S*, y* $\{\nabla g_i(\boldsymbol{x_0}) \mid 1 \leq i \leq k\}$ *es un sistema de vectores no nulos linealmente independientes,*[4] *entonces existen números reales* μ_i *tales que*

$$\nabla f(\boldsymbol{x_0}) = \mu_1 \nabla g_1(\boldsymbol{x_0}) + \cdots + \mu_k \nabla g_k(\boldsymbol{x_0})$$

A las constantes $\mu_1, \ldots, \mu_k$ *se las denomina* multiplicadores de Lagrange *asociados a* $\boldsymbol{x_0}$.

Este teorema nos da el primer paso a seguir para la determinación de los extremos condicionados:

- Los extremos locales del campo f con las restricciones $g_1 = 0, \ldots g_k = 0$, se encuentran entre los puntos $(x_1, \ldots, x_n)$ cuyas coordenadas son solución del

[4] La condición "$\{\nabla g_i(\boldsymbol{x_0}) \mid 1 \leq i \leq k\}$ es un sistema de vectores no nulos linealmente independientes", exigida en el teorema, se traduce en la práctica a observar que el problema está bien planteado, es decir, que no hay condiciones superfluas, y que estas están dadas *de la mejor forma posible*.

sistema:

$$\begin{aligned}
g_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\
&\dots \\
g_k(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\
\mathrm{D}_1 f(\boldsymbol{x}) &= \mu_1 \mathrm{D}_1 g_1(\boldsymbol{x}) + \dots + \mu_k \mathrm{D}_1 g_k(\boldsymbol{x}) \\
&\dots \\
\mathrm{D}_n f(\boldsymbol{x}) &= \mu_1 \mathrm{D}_n g_1(\boldsymbol{x}) + \dots + \mu_k \mathrm{D}_n g_k(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

Si $x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_k$ es una solución del sistema, $(x_1, \dots, x_n)$ se denomina *punto crítico* de f con las restricciones g_i, y $\mu_1, \dots, \mu_k$ son sus multiplicadores de Lagrange asociados.

Ejemplo 3.3.5 Vamos a encontrar los puntos críticos del problema de extremos condicionados de la figura 3.9:

$$f(x, y) = x^3 + y^3, \qquad g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

El sistema de ecuaciones que tenemos que resolver es:

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 + y^2 - 1 \\
3x^2 &= 2x\mu \\
3y^2 &= 2y\mu
\end{aligned}$$

De la segunda ecuación obtenemos que $x = 0$ o bien $3x = 2\mu$. En el primer caso obtenemos, con la primera ecuación las posibilidades $y = 1$ o $y = -1$. Con la condición $3x = 2\mu$, utilizando la tercera ecuación, obtenemos que $y = 0$ o bien $y = x$ y de ahí, utilizando la primera ecuación deducimos los valores para x. De esta forma, calculamos todos los puntos críticos y sus correspondientes multiplicadores:

$$\begin{aligned}
(0, 1) &\to \mu = 3/2 \\
(1, 0) &\to \mu = 3/2 \\
(0, -1) &\to \mu = -3/2 \\
(-1, 0) &\to \mu = -3/2 \\
(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) &\to \mu = 3\sqrt{2}/4 \\
(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) &\to \mu = -3\sqrt{2}/4
\end{aligned}$$

En la figura 3.10 aparecen representadas las cuatro curvas de nivel tangentes a la restricción. Obsérvese que el número de curvas de nivel tangentes coincide con el número de multiplicadores distintos. □

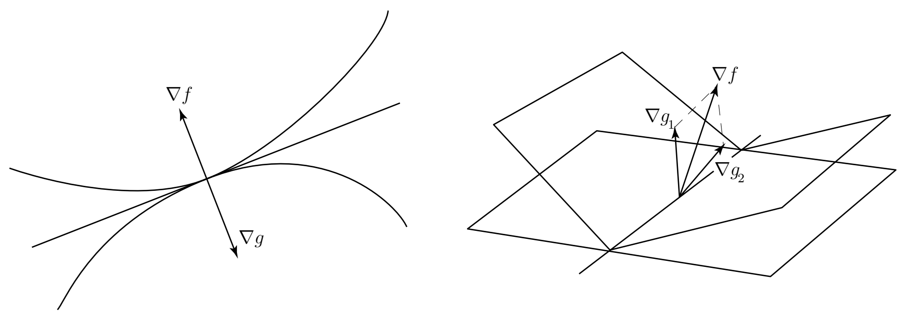


Figura 3.11: Relación entre gradientes en el método de los multiplicadores de Lagrange.

Los casos particulares más simples sobre los que aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange son los siguientes.

- Si $n = 2$ y $k = 1$, las curvas de nivel y la restricción son curvas. Estas son tangentes si sus rectas tangentes son iguales, es decir, si sus vectores normales son paralelos: $\nabla f = \mu \cdot \nabla g$. (Ver parte izquierda de la figura 3.11).
- Si $n = 3$ y $k = 1$, el campo a optimizar se representa por superficies de nivel y la restricción también describe una superficie. Como en el caso anterior, las superficies son tangentes si sus planos tangentes son iguales, es decir, los vectores normales son paralelos: $\nabla f = \mu \cdot \nabla g$.
- Si $n = 3$ y $k = 2$, el campo a optimizar se representa por superficies de nivel; la restricción viene dada por la intersección de dos superficies, es decir, una curva en $\mathbb{R}^3$. La curva es tangente a una superficie de nivel si la recta tangente a la primera esta contenido en el plano tangente a la superficie. Es decir, la recta normal a la superficie está contenida en el plano normal a la curva: $\nabla f = \lambda \cdot \nabla g_1 + \mu \cdot \nabla g_2$. (Ver parte derecha de la figura 3.11).

Igual que para los extremos no condicionados, después de calcular los puntos críticos, el problema será decidir cuáles son máximos, cuáles mínimos y cuáles no son extremos. Para ello, recurrimos igualmente a la segunda derivada, es decir, a la matriz hessiana tal y como recoge el siguiente resultado.

Teorema 3.3.10 *Sea* $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$ *un punto crítico de* f *con las restricciones* g_i, $1 \le i \le k$, *y* $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ *sus multiplicadores de Lagrange; consideremos el campo* $F\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definido por*

$$F(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - \alpha_1 g_1(\boldsymbol{x}) - \cdots - \alpha_k g_k(\boldsymbol{x});$$

sea T el espacio vectorial tangente a S en $\boldsymbol{a}$ (la dimensión del subespacio T es $n-k$).

1. *Si* $\mathrm{d}^2F_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}) > 0$ *para todo* $\boldsymbol{u} \in T$, $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$, *entonces* $\boldsymbol{a}$ *es punto mínimo.*
2. *Si* $\mathrm{d}^2F_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}) < 0$ *para todo* $\boldsymbol{u} \in T$, $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$, *entonces* $\boldsymbol{a}$ *es punto máximo.*
3. *Si* $\mathrm{d}^2F_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u_1}) > 0$ *para algún* $\boldsymbol{u_1} \in T$, $\boldsymbol{u}_1 \neq \mathbf{0}$, *y* $\mathrm{d}^2F_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u_2}) < 0$ *para algún* $\boldsymbol{u_2} \in T$, $\boldsymbol{u}_2 \neq \mathbf{0}$, *entonces* $\boldsymbol{a}$ *no es extremo.*
4. *En cualquier otro caso,* ***no podemos deducir nada****.*

Es decir, para determinar la naturaleza de un punto crítico $\boldsymbol{a}$ tenemos que estudiar el signo de la forma cuadrática $\mathrm{d}^2F_{\boldsymbol{a}}$ restringida al subespacio T.

Ejemplo 3.3.6 Continuando con el ejemplo 3.3.5, vamos a clasificar los puntos críticos $(0,1)$ y $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ (el resto de los puntos se clasifican de forma similar).

En primer lugar, recordemos que, por el teroema 3.2.15, el espacio vectorial tangente a la curva $g(x,y) = 0$ en un punto (x_0, y_0) es:

$$\begin{aligned} \nabla g(x_0, y_0) \cdot (u_1, u_2) &= 0 \\ (2x_0, 2y_0) \cdot (u_1, u_2) &= 0 \\ 2x_0u_1 + 2y_0u_2 &= 0 \\ x_0u_1 + y_0u_2 &= 0 \end{aligned}$$

Para $(x_0, y_0) = (0,1)$, los vectores tangentes verifican que $u_2 = 0$, es decir, son de la forma $(u_1, 0)$. Para $(x_0, y_0) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, los vectores tangentes verifican $\sqrt{2}/2(u_1 + u_2) = 0$, es decir, son de la forma $(u_1, -u_1)$.

Para estudiar el punto $(0,1)$, utilizamos el campo

$$\begin{aligned} F(x,y) &= x^3 + y^3 - \frac{3}{2}(x^2 + y^2 - 1) \\ \nabla F(x,y) &= (3x^2 - 3x, 3y^2 - 3y) \\ \nabla^2 F(x,y) &= \begin{pmatrix} 6x-3 & 0 \\ 0 & 6y-3 \end{pmatrix} \\ \nabla^2 F(0,1) &= \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para clasificar el punto $(0,1)$, estudiamos la forma cuadrática $\mathrm{d}^2F_{(1,0)}$ determinada por la hessiana anterior sobre los vectores tangentes a $x^2 + y^2 - 1$ en el punto $(0,1)$, que según hemos visto arriba son $(u_1, 0)$:

$$\mathrm{d}^2F_{(0,1)}(u_1, 0) = (u_1\ 0)\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} = -3u_1^2 < 0$$

En consecuencia, $(0, 1)$ es un máximo local.

Para estudiar el punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, utilizamos el campo

$$\begin{aligned}
G(x, y) &= x^3 + y^3 - \frac{3\sqrt{2}}{4}(x^2 + y^2 - 1) \\
\nabla G(x, y) &= \left(3x^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}x, 3y^2 - \frac{3\sqrt{2}}{y}\right) \\
\nabla^2 G(x, y) &= \begin{pmatrix} 6x - \frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 6y - \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\
\nabla^2 G(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) &= \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Para clasificar el punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, estudiamos la forma cuadrática $\mathrm{d}^2G_{(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)}$ sobre los vectores tangentes a x^2+y^2-1 en el punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, que según hemos visto arriba son $(u_1, -u_1)$:

$$\mathrm{d}^2G_{(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)}(u_1, -u_1) = (u_1\ \ -u_1)\begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ -u_1 \end{pmatrix} = \frac{3\sqrt{2}}{2}u_1^2 > 0$$

En consecuencia, $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ es un mínimo local. □

Ejemplo 3.3.7 Vamos a estudiar ahora los extremos del campo $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2$ sujeto a las restricciones $2x - y = 0$ e $y + z = 0$.

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) &= x^2 + 2y - z^2 & \Rightarrow \quad & \nabla f(x, y, z) = (2x, 2, -2z) \\
g_1(x, y, z) &= 2x - y & \Rightarrow \quad & \nabla g_1(x, y, z) = (2, -1, 0) \\
g_2(x, y, z) &= y + z & \Rightarrow \quad & \nabla g_2(x, y, z) = (0, 1, 1)
\end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones que determina los puntos críticos es:

$$\begin{aligned}
2x - y &= 0 \\
y + z &= 0 \\
2x &= 2\lambda \\
2 &= -\lambda + \mu \\
-2z &= \mu
\end{aligned}$$

El sistema es simple y es fácil deducir que el único punto crítico es:

$$\boldsymbol{a} = (2/3, 4/3, -4/3), \quad \lambda = 2/3, \quad \mu = 8/3$$

Para clasificarlo, observemos en primer lugar que los vectores tangentes a la curva dada por la intersección de $g_1(x, y, z) = 0$ y $g_2(x, y, z) = 0$ deben ser perpendiculares a los vectores gradientes de g_1 y g_2, y por lo tanto son paralelos a

$$\nabla g_1(x, y, z) \times \nabla g_2(x, y, z)$$

Para el punto crítico calculado, obtenemos:

$$\nabla g_1(2/3, 4/3, -4/3) \times \nabla g_2(2/3, 4/3, -4/3) = (2, -1, 0) \times (0, 1, 1) =$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 = (-1, -2, 2)$$

y por lo tanto, los vectores tangentes son de la forma $(-u, -2u, 2u)$.

Ya podemos construir el campo F y determinar el signo de la forma cuadrática asociada a su hessiana.

$$F(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2 - \frac{2}{3}(2x - y) - \frac{8}{3}(y + z)$$
$$\nabla F(x, y, z) = (2x - \frac{4}{3}, 0, -2z - \frac{8}{3})$$
$$\nabla^2 F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{d}^2 F_{\boldsymbol{a}}(-u, -2u, 2u) = (-u \ \ -2u \ \ 2u) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u \\ -2u \\ 2u \end{pmatrix} =$$
$$= 2u^2 - 8u^2 = -6u^2 < 0$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{a} = (2/3, 4/3, -4/3)$ es un máximo local. □

Realmente, el método de los multiplicadores de Lagrange solo es estrictamente necesario si no es posible reducir unas variables a otras a partir de las restricciones que determinan el enunciado. Incluso aunque tal reducción sea posible, el proceso resultante puede ser más complejo; por ejemplo, en la restricción $x^2 + y^2 = 1$ necesitaríamos cuatro igualdades para hacer esta reducción,

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad y = -\sqrt{1 - x^2}, \quad x = \sqrt{1 - y^2}, \quad x = -\sqrt{1 - y^2},$$

y analizar posteriormente todos los puntos obtenidos. Sin embargo, cuando esta reducción sea asequible y el resultado sea sencillo, será el método más adecuado.

EJEMPLO 3.3.8 Vamos a repetir el ejemplo 3.3.7 utilizando este método. Para calcular los extremos de $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2$ sujeto a las restricciones $2x - y = 0$ e $y + z = 0$, podemos reducir las variables y y z,

$$\begin{aligned} y &= 2x \\ z &= -y = -2x, \end{aligned}$$

de forma que el problema es equivalente a obtener los extremos de la función de una variable

$$g(x) = f(x, 2x, -2x) = x^2 + 4x - 4x^2 = -3x^2 + 4x.$$

Para esta función podemos aplicar las técnicas de optimización de funciones de una variable:

$$\begin{aligned} g(x) &= -3x^2 + 4x \\ g'(x) &= -6x + 4 \\ g'(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 2/3 \\ g''(x) &= -6 \\ g''(2/3) &= -6 < 0 \Rightarrow x = 2/3 \text{ es máximo.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el punto $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$ es un máximo local del campo g. □

En este ejemplo, hemos podido reducir las variable porque las hemos despejado sin "perder" ningún punto. Esta condición es imprescindible para poder aplicar el método. En muchos casos, la única forma de trabajar con todos los puntos usando este método será dividir la región en varios trozos, lo que supondrá tener que resolver más de un problema de optimización. Por ejemplo, para estudiar de esta forma el ejemplo 3.3.5 tendríamos que dividir la región en cuatro partes,

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{1 - x^2} \\ y &= -\sqrt{1 - x^2} \\ x &= \sqrt{1 - y^2} \\ x &= -\sqrt{1 - y^2}, \end{aligned}$$

y así poder "cubrir" todos los puntos de la circunferencia.

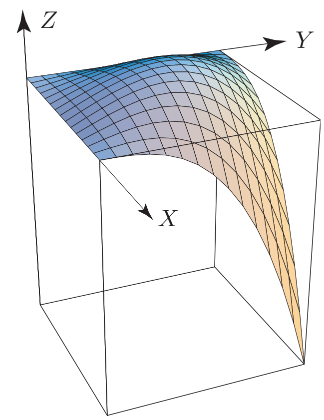


Figura 3.12: Representación del ejemplo 3.3.9.

3.3.3. Extremos absolutos

Para concluir la lección, vamos a analizar como tendríamos que resolver un problema en el que necesitemos obtener los extremos absolutos de un campo sobre un conjunto cerrado y acotado C.

En primer lugar, dividimos C en dos conjuntos, $C = U \cup F$, en donde U es el interior de C y F es el resto de sus puntos. Los candidatos a ser extremos absolutos de f sobre C son:

1. Los puntos críticos de f en U y los puntos de no diferenciabilidad.
2. Los puntos críticos de f sobre F que puedan ser obtenidos por el método de los multiplicadores de Lagrange o reduciendo variables.
3. Todos los puntos que no se hallan considerado en los ítemes anteriores.

Para determinar el máximo y el mínimo absoluto, basta con evaluar f sobre todos los puntos anteriores y determinar cuál es el valor máximo y cuál es el valor mínimo.

Ejemplo 3.3.9 Vamos a determinar los extremos absolutos del campo $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ en el cuadrado $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ (ver figura 3.12).

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_1 f(x,y,z) = y - 3x^2y - y^3 = 0, &\quad \mathrm{D}_2 f(x,y,z) = x - 3y^2x - x^3 = 0 \\ y(1 - 3x^2 - y^2) = 0, &\quad x(1 - 3y^2 - x^2) = 0 \end{aligned}$$

Dado que buscamos puntos críticos en el interior del cuadrado, entonces $x \neq 0$, $y \neq 0$. A partir de las ecuaciones $1 - 3x^2 - y^2 = 0$ y $1 - 3y^2 - x^2 = 0$, es fácil deducir que $x = 1/2$ e $y = 1/2$.

Ahora hallamos los puntos críticos en los bordes del cuadrado usando la reducción de variables:

- Si $x = 0$, $g_1(y) = f(0, y) = 0$, y debemos de considerar todos los puntos.
- Si $y = 0$, $g_2(x) = f(x, 0) = 0$, y debemos de considerar todos los puntos.
- Si $x = 1$, $g_3(y) = f(1, y) = -y^3$; el único punto crítico es $y = 0$ que queda en el extremo del intervalo.
- Si $y = 1$, $g_4(x) = f(x, 1) = -x^3$; el único punto crítico es $x = 0$ que queda en el extremo del intervalo.

Ahora solo tenemos que evaluar el campo en todos los puntos obtenidos y en los cuatro vértices del cuadrado para decidir cuál es el máximo y cuál el mínimo.

$$\begin{aligned} f(1/2, 1/2) &= 1/8 \\ f(x, 0) &= 0 \\ f(0, y) &= 0 \\ f(1, 1) &= -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(1/2, 1/2)$ es el máximo absoluto y $(1, 1)$ es el mínimo absoluto.

$\square$

Relación de ejercicios (I)

1. Determine los intervalos de creciemiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x) = x^3 + 2x^2$; represente gráficamente f.

2. Represente gráficamente las funciones $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$.

3. El objetivo de este ejercicio es representar gráficamente la función

$$f(x) = \frac{x^3}{(2x-1)(2x+1)}$$

   a) Determine el dominio de la función y los puntos de corte con el eje OX.

   b) Derive la función y determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos.

   c) Halle las posibles asíntotas teniendo en cuenta que:

   - Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ o $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ tiene una asíntota horizontal.
   - Si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ tiene una asíntota vertical.
   - Si $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$ y $n = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - mx) \in \mathbb{R}$, entonces $y = mx + n$ es una asíntota oblícua en $+\infty$.

4. Consideremos la recta $2x - 3y + 1 = 0$. Transforme su ecuación en ecuaciones paramétricas y en su forma *explícita*. Construya los tres tipos de ecuaciones (cartesiana, paramétricas y explícita) para la recta perpendicular a la recta anterior y que pasa por el punto $(1, -1)$.

5. Defina una parametrización del segmento que une los puntos $(-2, -1)$ y $(3, 0)$ usando el intervalo $[0, 1]$. Defina otra parametrización del mismo segmento en el intervalo $[-1, 1]$.

6. El objetivo de este ejercicio es dibujar la curva $X = \dfrac{3t}{1+t^3}$, $Y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$, $t \in [0, \infty)$:

   a) Represente gráficamente las funciones $x(t) = \dfrac{3t}{1+t^3}$ e $y(t) = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$ en el intervalo $t \in [0, \infty)$. (Necesitará evaluar los límites $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{3t}{1+t^3}$ y $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{3t^2}{1+t^3}$.)

   b) Calcule los vectores derivada en $t = 0$ y $t \to \infty$.

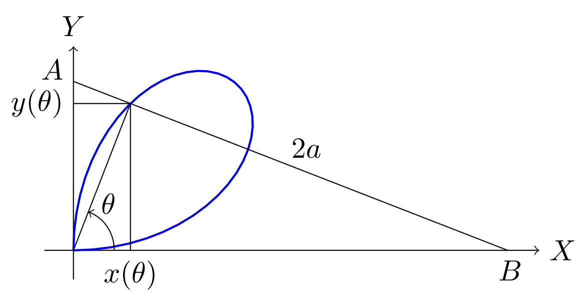
   c) Utilice la información obtenida en los apartados anteriores para dibujar la curva.

7. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $x = 2t$, $y = t^2 - 1$ en $t = 2$.

8. Localice todos los puntos de la curva $x = 1 - t$, $y = t^3 - 3t$, si los hay, en los que la tangente sea horizontal o vertical.

9. Dibuje la curva polar $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$, $\theta \in (0, 2\pi)$. Halle la ecuación de la recta tangente a esta curva para $\theta = \frac{\pi}{3}$.

10. Un segmento AB de longitud constante $2a$ se desliza con sus extremos por los ejes de coordenadas. Desde el origen de coordenadas se traza una perpendicular a AB que corta al segmento en el punto M. Describa como curva polar a los puntos M.



11. Lea la sección 3.1.1.2 y verifique que la recta $X = -1$ es una asíntota de la curva polar $r = 2 - \sec\theta$.

12. Consideramos el plano $3x - 2y + z = 0$:

    a) Descríbalo mediante ecuaciones paramétricas.

    b) Halle la ecuación del plano paralelo que pasa por el punto $(1, 0, -1)$.

    c) Determine la recta perpendicular al plano que pasa por el punto $(1, 0, -1)$.

13. Dados dos vectores $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$, definimos su *producto vectorial* como:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_2 & \mathrm{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Este vector verifica que $\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| \operatorname{sen}\alpha$, en donde α es el ángulo formado por los dos vectores; además, $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ es perpendicular a $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$.

a) Calcule $(-2,2,1)\times(-1,1,1)$ y $(-1,1,1)\times(-2,2,1)$.

b) Utilice el producto vectorial para determinar la ecuación del plano con vectores directores $(1,1,0)$ y $(2,0,-1)$ y que pasa por el punto $(1,1,1)$.

14. Halle la ecuación del plano que pasa por los puntos $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ y $(0,0,c)$ si a, b y c son distintos de 0.

15. Determine el dominio de los siguientes campos:

$$a)\ \ f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$$
$$b)\ \ f(x,y)=\log\frac{y}{x^2+y^2-1}$$

16. Describa las curvas de nivel de los siguientes campos escalares

$$a)\ \ f(x,y)=y+\cos 2x,\qquad b)\ \ f(x,y)=\mathrm{e}^{y-x^2},\qquad c)\ \ f(x,y)=\frac{2x^2+y^2}{x-2y}.$$

17. Utilice la definición para calcular $\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}f(\boldsymbol{a})$, en donde

$$f(x,y)=x^2\mathrm{e}^{xy},\quad \boldsymbol{a}=(3,0),\quad \boldsymbol{v}=(3,-2)$$

Utilice igualmente la definición para determinar el vector $\nabla f(\boldsymbol{a})$.

18. Halle el vector gradiente de los siguientes campos.

$$a)\ \ h(x,y)=\log(\operatorname{sen} xy)\qquad\qquad b)\ \ g(x,y,z)=x^2y^3z^4$$

19. Calcule la tasa de cambio puntual del campo $f(x,y)=x^3+3xy$ en el punto $(1,1)$ a lo largo de la recta $y=x$ y en la dirección de decrecimiento de x.

20. Encuentre las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal al grafo del campo $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x+y}$ en el punto $(2,2,1)$.

21. Encuentre las ecuaciones del plano tangente y la recta normal a la superficie $x\operatorname{sen} y+x^2\mathrm{e}^z=4$ en el punto $(2,\pi,0)$.

22. Pruebe que las superficies

$$x^2-2y^2+z^2=0\qquad \text{y}\qquad xyz=1$$

son ortogonales en todos los puntos de intersección. Es decir, las rectas normales a las curvas en estos puntos son ortogonales.

23. Dado que el polinomio $f(x,y)=2-x+2y-3xy+2y^2-x^2$ tiene grado 2, coincide con su polinomio de Taylor de orden 2. Halle, "sin derivar", el gradiente de f y la matriz hessiana en los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$.

24. Utilice la proposición 3.2.18 para determinar el polinomio de Taylor de $f(x,y) = xy - \exp(x+y)$ de orden 2 en el punto $(0,0)$.

25. Identifique los siguientes lugares geométricos:

a) $x^2 + y^2 - 6x + 6 = 0$	*b*) $x^2 + y^2 - 6x + 10 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 6x + 9 = 0$	*d*) $x^2 - 3x - 2y^2 + 1 = 0$
e) $x^2 + 2x + y^2 - 2 = 0$	*f*) $y^2 - 3x + y - 4 = 0$

26. Dibuje la cónica $7x^2 - 3xy + 3y^2 + 3x - 6y + 2 = 0$ y determine una parametrización para ella.

27. Determine una parametrización de la elipse con centro en el punto $(1,0)$, ejes paralelos a los ejes de coordenadas y semiejes $\sqrt{2}$ y 1.

28. Obtenga la ecuación de la parábola con vértice en el punto $(1,1)$, eje en la dirección $(1,2)$, apertura hacia arriba y que pasa por el punto $(2, \frac{3}{2})$.

29. Identifique el lugar geométrico $x^2 + 6xy + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$.

30. Identifique el lugar geométrico $x^2 + 6xy + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$ y descríbalo mediante una parametrización.

31. Demuestre que la recta tangente a la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0) es $\dfrac{x_0}{a^2}x + \dfrac{y_0}{b^2}y = 1$

32. Identifique y clasifique (si existen) los puntos críticos de los siguientes campos:

    a) $z = x^3 + y^3 - 3xy$ *b*) $z = x^2y^3(6 - x - y)$

33. Calcule el valor máximo de $f(x,y,z) = x^2 + 2y - z^2$ sujeto a las restricciones $2x - y = 0$ e $y + z = 0$.

34. Halle los valores extremos del campo escalar $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

35. Lea la sección 3.3.3 y halle el valor máximo y el valor mínimo de $f(x,y) = x^2 - y^2$ en la región $x^2 + y^2 \leq 1$.

36. Lea la sección 3.3.3 y halle los máximos y mínimos absolutos de $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1$ en la región triangular cerrada del primer cuadrante acotada por las rectas $x = 0$, $y = 4$, $y = x$.

37. Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar las dimensiones de un estanque rectangular abierto cuya superficie sea mínima y su volumen sea V.

38. Halle la ecuación del plano que pasa por el punto $(1, 2, 1)$ y determina con los ejes coordenados un tetraedro de volumen mínimo. Indicación: como ecuación del plano, utilice la ecuación determinada por los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

39. Halle los puntos (x, y) y las direcciones para las que la tasa de cambio puntual de $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ en (x, y) es máxima entre los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

40. Calcule la distancia entre las curvas $2y = x^2 + 7$ y $6x = y^2 + 3$. Resuelva el problema usando los métodos analíticos de optimización estudiados en el tema y posteriormente utilizando simplemente argumentos geométricos.

Relación de ejercicios (II)

1. Halle la ecuación de las rectas descritas a continuación:
   a) Pasando por $(-1, 4)$ con pendiente 5
   b) Pasando por $(4, -5)$ y $(-1, 1)$
   c) Pasando por $(-2, 1)$ y paralela a $2x + 3y = 7$
   d) Pasando por $(-3, -1)$ y perpendicular a $x + 4y = 8$
   e) Mediatriz del segmento que une los puntos $(-1, 5)$ y $(3, 11)$
   f) Tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en $(-3, 4)$
2. Consideremos la recta $Ax + By + C = 0$ y un punto (x_0, y_0) fuera de la recta. Demuestre que la distancia entre el punto y la recta viene dada por la ecuación:
$$\mathrm{d} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$
   Indicación: calcule dicha distancia a partir del producto escalar del vector (A, B), normal a la recta, y un vector $(x - x_0, y - y_0)$ que une un punto de la recta con el punto (x_0, y_0). Aplique la fórmula para calcular:
   a) la distancia del punto $(-4, 3)$ a la recta $x - y = 6$;
   b) la distancia entre las rectas $x + y = 1$ y $2x + 2y = 5$;
   c) la distancia entre las rectas $x - 2y = 15$ y $x - 2y = -3$.
3. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva en el valor indicado:
   a) $x = t^2 - t$, $y = t^3 - 3t$ en $t = 2$
   b) $x = 2 \operatorname{cotg} \theta$, $y = 2 \operatorname{sen}^2 \theta$, en $\theta = \dfrac{\pi}{4}$
4. Consideramos la curva: $\alpha(t) = \left(\dfrac{2t^2}{1 + t^2}, \dfrac{2t^3}{1 + t^2} \right)$, $t \in \mathbb{R}$.
   a) Halle: $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \alpha(t)$ y $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \alpha'(t)$.
   b) Dibuje la curva.
   c) ¿Es una parametrización regular? ¿Es una curva regular?
5. Dada una curva $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$, llamamos *curvatura* de α en el punto $\alpha(t)$ al número $k(t) = \dfrac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$. Halle la curvatura de la curva $\alpha(t) = (r \cos t, r \operatorname{sen} t)$ en cada punto.

6. El objetivo de este ejercicio es dibujar la curva:

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \qquad y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

   a) Dibuje la curva para $t \in (-\infty, -1)$. Deberá calcular lo límites de la parametrización y de su derivada en $-\infty$ y en -1^-.

   b) Dibuje la curva para $t \in (-1, +\infty)$. Deberá calcular lo límites de la parametrización y de su derivada en -1^+ y en $+\infty$.

   c) Demuestre que la recta $y = -x - 1$ es una asíntota

7. En las siguientes curvas, localice todos los puntos, si los hay, en los que la tangente sea horizontal o vertical.

   a) $x = \cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta, \quad y = \operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta$

   b) $x = 2\theta + \theta\operatorname{sen}\theta, \quad y = 2(1-\cos\theta)$

   c) $x = \sec\theta, \quad y = \tan\theta$

   d) $x = \dfrac{3t}{1+t^3}, \quad y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$

8. Localice los puntos de tangencia horizontal y vertical, si los hay, de las curvas polares siguientes

   a) $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$, *b*) $r = 2\operatorname{cosec}\theta + 3$, *c*) $r = a\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta$

9. Dibuje las siguientes curvas dadas en coordenadas polares.

   a) $r = a + \dfrac{1}{\theta}$

   b) $r = a\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}$

   c) $r = 1 + \cos\theta$ (Cardioide)

   d) $r = 2(1 - \operatorname{sen}\theta)$

   e) $r = 1 + \dfrac{1}{2}\cos\theta$ (Caracol de Pascal)

   f) $r = \sqrt{\cos 2\theta}$

   g) $r = 1 + 2\cos\theta$ (Caracol de Pascal)

   h) $r = \operatorname{sen} 3\theta$

   i) $r = a\operatorname{sen}\theta$

   j) $r^2 = a^2\operatorname{sen}2\theta$

   k) $r = 2a\cos\theta$ (Circunferencia)

   l) $r = \dfrac{a}{\cos\theta}$

   m) $r = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\theta}$

   n) $r = \dfrac{16}{5 - 3\cos\theta}$ (Elipse)

   ñ) $r = \dfrac{2}{1-\cos\theta}$ (Parábola)

   o) $r = \operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$

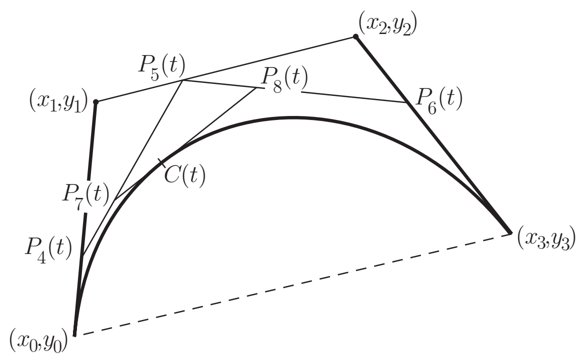
   p) $r = a\sqrt{\theta}$ (Espiral de Fermat)

   q) $r = \dfrac{a}{\sqrt{\theta}}$ (Bastón

   r) $r = a\theta^2$ (Espiral de Galileo)

10. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $r = \dfrac{6}{2\operatorname{sen}\theta - 3\cos\theta}$ en $\theta = \pi$

11. *Curvas de Bezier*. Pierre Bezier fue un ingeniero de Renault que durante los años 60 realizó un estudio con el objetivo de mejorar el diseño de componentes. Paralelamente, otro ingeniero de automóviles, perteneciente a la empresa Citroën, llamado Paul de Faget de Casteljau, estaba trabajando sobre el mismo campo. De este último no se llegó a publicar nada en principio, con lo cual Bezier fue el que se llevó los honores y el que da nombre a este tipo de curvas, que son la base de los paquetes de diseño vectorial.



Dados cuatro puntos en el plano, no alineados, $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ y $P_3 = (x_3, y_3)$, se define la curva de Bezier, γ, que une los puntos P_0 y P_3 como sigue. Para cada $t \in [0, 1]$: el punto $P_4(t)$ es el punto del segmento P_0P_1 de tal forma que $\dfrac{|P_0P_4(t)|}{|P_0P_1|} = t$; el punto $P_5(t)$ es el punto del segmento P_1P_2 de tal forma que $\dfrac{|P_1P_5(t)|}{|P_1P_2|} = t$; el punto $P_6(t)$ es el punto del segmento P_2P_3 de tal forma que $\dfrac{|P_2P_6(t)|}{|P_2P_3|} = t$; el punto $P_7(t)$ es el punto del segmento $P_4(t)P_5(t)$ de tal forma que $\dfrac{|P_4(t)P_7(t)|}{|P_4(t)P_5(t)|} = t$; el punto $P_8(t)$ es el punto del segmento $P_5(t)P_6(t)$ de tal forma que $\dfrac{|P_5(t)P_8(t)|}{|P_5(t)P_6(t)|} = t$; finalmente, el punto $\gamma(t)$ es el punto del segmento $P_7(t)P_8(t)$ de tal forma que $\dfrac{|P_7(t)\gamma(t)|}{|P_7(t)P_8(t)|} = t$.

a) Demuestre que:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Pruebe que el segmento P_0P_1 es tangente al punto $\gamma(0) = P_0$ y que el segmento P_2P_3 es tangente al punto $\gamma(1) = P_3$.

c) Determine la curva de Bezier para los puntos $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (1,2)$, $P_2 = (2,3)$, $P_3 = (3,0)$. Escribirla como $y = f(x)$ y dibujarla.

d) Tres de los puntos pueden estar alineados: determine la curva de Bezier para los puntos $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (1,0)$, $P_2 = (2,2)$, $P_3 = (3,0)$. Escríbala como $y = f(x)$ y dibújela.

12. Represente por ecuaciones paramétricas la parábola $y^2 + ax + b = 0$ usando como parámetro la pendiente de la recta que une el punto correspondiente con el vértice de la parábola.

13. Demuestre que las ecuaciones:

$$\begin{cases} X = a\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ Y = b\dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

son una parametrización de la elipse $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$. ¿Cómo se desplaza un punto por la curva cuando crece el parámetro t?

14. Clasifique las siguientes cónicas

a) $2x^2 + y^2 + 2xy - 12x - 4y + 3 = 0$

b) $x^2 + 3y^2 + 4xy + 4x - 2y - 4 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2xy + 2y + 1 = 0$

d) $2x^2 + y^2 - 1 = 2xy - 2x + 2y$

e) $4x^2 + y^2 + 4xy - y = 0$

15. Encuentre la ecuación de las circunferencias descritas a continuación:

a) Centro $(3, -4)$, radio $\sqrt{30}$

b) Con centro en el segundo cuadrante, tangente a los ejes de coordenadas y radio 4.

c) Con centro en $(2, -3)$ y pasando por el punto $(5, 4)$.

d) Que tiene el segmento que une $(-1, 2)$ y $(5, -6)$ como diámetro.

e) Que pasa por los puntos $(1, 0)$, $(3, 4)$ y $(5, 0)$.

16. Describa la circunferencia $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ como curva polar.

17. Determine la ecuación de las asíntotas de la curva $r = 2\cos 2\theta \sec\theta$

18. Clasifique la siguiente cónica en función de los parámetros a y b:

$$(1+a)x^2 + 2axy + ay^2 + 2bx + a - 3b^2 = 0$$

19. Halle el centro y radio de las siguientes circunferencias.

    a) $(x-2)^2+(y+3)^2=36$
    b) $x^2+y^2-4x+6y=3$
    c) $x^2+y^2+8x=9$

20. Determine el punto de la hipérbola $y=\dfrac{x+9}{x+5}$ cuya tangente en ese punto pasa por el origen de coordenadas.

21. Demuestre que la recta tangente a la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ en el punto (x_0,y_0) es $\dfrac{x_0}{a^2}x-\dfrac{y_0}{b^2}y=1$.

22. Dibuje las *parábolas* $y=x^2-4x-5$ e $y^2-3x+1=0$, determinando sus focos, sus vértices y directrices.

23. Dibuje las *elipses* $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ y $16x^2+25y^2-32x+50y+31=0$ y determine sus focos.

24. Dibuje las *hipérbolas* $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{6}=1$ y $16y^2-x^2+2x+64y+63=0$ y determine su focos, vértices y *asíntotas*.

25. Determine el dominio de los siguientes campos:

    a) $f(x,y)=x^4+y^4+4x^2y^2$
    b) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$
    c) $f(x,y)=\dfrac{1}{y}\cos x^2$
    d) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$
    e) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x}$
    f) $f(x,y)=\log(1-xy)$
    g) $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$
    h) $f(x,y)=\dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\operatorname{tg}(x^2-y^2)}$
    i) $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$
    j) $f(x,y)=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+y}{1-xy}$
    k) $f(x,y)=\operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
    l) $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
    m) $f(x,y)=\arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$
    n) $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$
    ñ) $f(x,y)=\dfrac{x^4+y^3}{x^2+y^2}$
    o) $f(x,y)=x^{(y^2)}$
    p) $f(x,y)=\operatorname{arc\,sen}\dfrac{2x-y}{x-y}$
    q) $f(x,y)=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$
    r) $f(x,y)=\dfrac{1-\cos\sqrt{xy}}{y}$
    s) $f(x,y)=\sqrt{\log(y-x+1)}$
    t) $f(x,y)=\operatorname{tg}\dfrac{x^2}{y}$
    u) $f(x,y)=\log((16-x^2-y^2)(x^2+y^2-4))$

26. Describa las curvas de nivel de los siguientes campos y dibuje algunas. Esboce sus gráficas:

a) $f(x, y) = 2x + y$	*b*) $f(x, y) = \cos(2x + y)$
c) $f(x, y) = y^2 - x$	*d*) $f(x, y) = \mathrm{e}^{y - x^2}$
e) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$	*f*) $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg} y - x$

27. Halle el vector gradiente de los siguientes campos:

    a) $f(x, y) = \mathrm{e}^x \cos y$, *b*) $f(x, y, z) = x^{y^z}$, *c*) $f(x, y) = \operatorname{tg}(x^2 + y^2)$

28. Halle la *derivada direccional* del campo $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$ en el punto $(1, 1, 1)$ en la dirección del vector $(2, 1, -1)$.

29. Calcule las tasas de cambio puntuales de los siguientes campos en las direcciones indicadas:

    a) $f(x, y) = x^2 + y \operatorname{senh}(xy)$ en $(2, 0)$ en la dirección de decrecimiento de x y a lo largo de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x + 7} - 3$.

    b) $f(x, y, z) = \dfrac{z}{x^2 + y^2}$ en $(-1, 1, 3)$ a lo largo de la curva: $x = -1 - 2t$, $y = 1 + t$, $z = 3 + 2t$ y en la dirección de decrecimiento de la y.

    c) $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 z}{y}$ en $(2, -1, 3)$ en la dirección de decrecimiento de la z y a lo largo de la recta normal al plano $x + 2y - 2z = -6$.

    d) $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg}(x^2 + y^2)$ en $(1, -2)$ en la dirección de decrecimiento de la y y a lo largo de la recta $y = 3x - 5$.

    e) $f(x, y) = x^2 \mathrm{e}^{xy}$ en $(3, 0)$ en la dirección de decrecimiento de la x y a lo largo de la recta normal a $3x - 2y = 9$.

    f) $f(x, y) = x\mathrm{e}^{x+y}$ en $(-3, 3)$ en la dirección de decrecimiento de la y y normal a la curva $y = x^2 + 3x + 3$

30. Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar con las parciales de segundo orden continuas. Llamamos *laplaciana* de f al campo escalar

    $$\Delta f = \mathrm{D}_{11} f + \mathrm{D}_{22} f + \mathrm{D}_{33} f$$

    El operador Δ se denomina *operador de Laplace* y decimos que el campo f es *armónico* si $\Delta f = 0$. Halle la laplaciana de los siguientes campos:

    a) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

    b) $g(x, y, z) = xy + yz + xz$

31. Encuentre el punto de la superficie $z = xy$ en donde la recta normal es paralela a la recta $x = 3 - 2t$, $y = 4 + 5t$, $z = 3 + 3t$.

32. Pruebe que las siguientes superficies son ortogonales en todos los puntos de intersección:

$$x + y^2 + 2z^3 = 4, \qquad 12x - (3\log y) + z^{-1} = 13$$

33. Encuentre la ecuación del plano o recta tangente a la superficie o curva en el punto indicado, así como la de la recta normal:

a) $x \operatorname{sen} y + x^2 e^z = 4$ en $(2, \pi, 0)$,
b) $x^3 y - \dfrac{x^2}{y} = 4$ en $(2, 1)$
c) $xz^2 + \dfrac{(2x - z)^2}{y^3} = 19$ en $(2, 1, 3)$,
d) $3xe^y + xy^3 = 2 + x$ en $(1, 0)$
e) $f(x, y) = \operatorname{sen} xy$ en $(1, \pi/2, 1)$,
f) $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x + y}$ en $(2, 2, 1)$
g) $f(x, y) = \log(x^2 + y)$ en $(1, 0, 0)$,
h) $f(x, y) = x^2 e^{xy}$ en $(3, 0, 9)$

34. Encuentre el punto de la superficie $z = x^2 + y^2$ en donde el plano tangente es paralelo al plano $6x - 4y + 2z = 5$.

35. Encuentre todos los puntos de la superficie $z = x^2 y$ en donde el plano tangente es ortogonal a la recta $x = 2 - 6t$, $y = 3 - 12t$, $z = 2 + 3t$.

36. Dado el polinomio $f(x, y) = 1 + x - 3xy - x^2 + 2x^2 y - x^3$, halle "sin derivar" el gradiente de f y la matriz hessiana en los puntos $(0, 0)$ y $(-1, 1)$.

37. Identifique y clasifique (si existen) los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) $z = x^2 + (y - 1)^2$
b) $z = x^3 - 3xy^2 + y^2$
c) $z = x^2 - (y - 1)^2$
d) $z = x^2 y^3 (6 - x - y)$
e) $z = 1 + x^2 - y^2$
f) $z = x^3 + y^3 - 3xy$
g) $z = (x - y + 1)^2$
h) $z = \operatorname{sen} x \cosh y$
i) $z = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$
j) $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$
$z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$
k) $z = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$

38. Aplique el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar las distancias máximas y mínimas de un punto de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ a la recta $x + y = 4$. Indicación: utilice la ecuación de la distancia entre un punto y una recta.

39. Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar las dimensiones de un paralepípedo rectangular cuyo volumen sea máximo y su superficie total sea S.

40. En los siguientes apartados, halle los máximos y mínimos absolutos de las funciones en los dominios dados:

    a) $T(x,y) = x^2+xy+y^2-6x$ en la placa rectangular $0 \leq x \leq 5$, $-3 \leq y \leq 3$.

    b) $f(x,y) = 48xy-32x^3-24y^2$ en la placa rectangular $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

41. Halle los valores máximo y mínimo del campo $f(x,y) = x^2 - y^2$ en la región $x^2 + y^2 \leq 1$ para $y \geq 0$.

42. Halle los valores máximo y mínimo del campo $f(x,y) = x^2y(4-x-y)$ en el triángulo limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

43. Halle los puntos de la superficie $z^2 - xy = 1$ más próximos al origen.

44. Halle el valor máximo de $w = xyz$ entre todos los puntos pertenecientes a la intersección de los planos $x + y + z = 40$ y $z = x + y$.

TEMA 4

Cálculo integral

Objetivos: Los objetivos son: (1) conocer y saber aplicar las técnicas básicas del cálculo de primitivas; (2) conocer y saber aplicar las técnicas básicas para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden; (3) saber identificar los modelos básicos para aplicar el método más adecuado de cálculo de primitiva o de resolución de ecuaciones diferenciales; (4) saber calcular integrales definidas en una variable y utilizarlas para abordar problemas geométricos; (5) saber calcular integrales definidas en dos variables mediante el teorema de Fubini y el teorema de cambio de variable; (6) utilizar integración para resolver problemas geométricos y físicos.

Prerrequisitos: Haber cubierto los objetivos de los temas anteriores.

Contenido:

- Lección 4.1: Cálculo de Primitivas. Integración por partes. Cambios de variable.
- Lección 4.2: Ecuaciones diferenciales. Ecuaciones de variables separables. Ecuaciones exactas. Ecuaciones lineales. Cambios de variables. Trayectorias ortogonales.
- Lección 4.3: Integración de funciones de una variable. Teorema fundamental del cálculo y regla de Barrow. Propiedades. Aplicaciones geométricas.
- Lección 4.4: Integración múltiple. Teorema de Fubini y consecuencias. Teorema de cambio de variable. Aplicaciones.

LECCIÓN 4.1

Cálculo de Primitivas

El cálculo de primitivas es la parte del cálculo integral que consiste en buscar una función cuya derivada coincida con una expresión dada. Por esta razón, se dice que el cálculo de primitivas es el proceso inverso a la derivación. Sin embargo, a diferencia del cálculo de derivadas, el cálculo de primitivas no se rige por unas reglas o fórmulas que permitan obtener el resultado de forma mecánica. Es más, en muchos casos no es posible calcular la primitiva de una expresión en términos de funciones elementales, por ejemplo, para las funciones $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ o $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ se sabe que existen primitivas pero no es posible expresarlas en términos de funciones elementales.

En esta lección, repasamos los tres métodos básicos de integración (identificación de integrales inmediatas, integración por partes y sustitución o cambio de variable) y proporcionaremos las estrategias necesarias para abordar el cálculo de la primitiva de algunos tipos de funciones (racionales, irracionales y trigonométricas).

El cálculo de primitivas es el proceso inverso a la derivación. Consiste en buscar una función cuya derivada sea la original. Por ejemplo, dada la función $f(x) = 3x^2$, el objetivo es encontrar una función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$; en este caso, podemos considerar la función $F(x) = x^3$, pues $F'(x) = 3x^2 = f(x)$.

DEFINICIÓN 4.1.1 *Una función F es una primitiva de f en el intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo x en I.*

Obsérvese que cualquier otra función construida a partir de la función $F(x)$ sumándole una constante también valdría, pues la derivada de cualquier función constante es 0. Así, $F_C(x) = x^3 + C$ es también una primitiva de $f(x) = 3x^2$ ya que $F'_C(x) = 3x^2 = f(x)$.

PROPOSICIÓN 4.1.2 *Si F es una primitiva de f en un intervalo I entonces la función G es primitiva de f si y sólo si G es de la forma:*

$$G(x) = F(x) + C \quad \textit{para todo } x \textit{ en } I$$

donde C es una constante.

De esta forma, llamamos *integral indefinida* a la familia de todas las primitivas de una función y escribimos

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

siendo F una primitiva de f. En esta expresión, $f(x)$ se llama *integrando*, $\mathrm{d}x$ indica la variable de integración y C se denomina *constante de integración.*

El teorema fundamental del cálculo relaciona la integral definida y el cálculo de primitivas, estableciendo la existencia de primitivas para cualquier función continua.

TEOREMA 4.1.3 (FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO) *Sea f una función continua en $[a,b]$ y consideremos la función*

$$F(x) = \int_a^t f(t)\mathrm{d}t.$$

La función F así definida es derivable en (a,b) y verifica que $F'(x) = f(x)$.

Sin embargo, tal y como comentabamos en la introducción, en esta lección nos planteamos determinar primitivas que se expresen en términos de funciones elementales.

La relación que existe entre los conceptos de derivada y primitiva permite deducir fácilmente las propiedades de linealidad del operador, tal y como establecemos en el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 4.1.4 *La integral indefinida verifica las siguientes propiedades:*

$$\begin{aligned} \int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x &= \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x \\ \int k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x &= k\cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \textit{para todo } k\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

donde k es una constante.

EJEMPLO 4.1.1 La integral indefinida de la función $15x^2 - 3\operatorname{sen} x$ es

$$\begin{aligned} \int (15x^2 - 3\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x &= \int \left(5(3x^2) + 3(-\operatorname{sen} x)\right)\,\mathrm{d}x = \\ &= 5\int 3x^2\,\mathrm{d}x + 3\int -\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = \\ &= 5x^3 + 3\cos x + C \end{aligned}$$

□

En el resto del tema se proporcionan algunos métodos y estrategias para el cálculo de primitivas. En primer lugar, se presentan los tres métodos básicos de cálculo de primitivas: integración inmediata, integración por partes y cambio de variable o sustitución. El objetivo en cada uno de ellos es conocer y saber aplicar el método en cada caso y así aprender a identificar qué método es más adecuado para calcular la primitiva de una función dada.

Fórmulas de derivación	Fórmulas de integración
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$	$\displaystyle\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x$	$\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = a^x \log a$	$\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\log a} + C$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log x) = \dfrac{1}{x}$	$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log\|x\| + C$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{sen} x) = \cos x$	$\displaystyle\int \cos\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$	$\displaystyle\int \operatorname{sen}\,\mathrm{d}x = -\cos x$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{arc\,tg} x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x$

Figura 4.1: Derivadas e integrales inmediatas.

Integrales inmediatas. Las fórmulas de derivación, leídas en sentido inverso, proporcionan el método básico para calcular primitivas; estas fórmulas se conocen como integrales inmediatas. Es más, el objetivo de los distintos métodos y fórmulas que veremos en el resto de la lección es transformar una función en una o varias funciones que se puedan integrar usando integrales inmediatas.

En la figura 4.1, aparece una tabla con las derivadas, y las correspondientes integrales inmediatas, que se usan más frecuentemente en el cálculo de primitivas; en el ejemplo 4.1.1, hemos usado la propiedad de linealidad y la primitiva de las funciones polinómicas y trigonométricas que aparecen en esta tabla.

4.1.1. Integración por partes

La fórmula de integración por partes es una consecuencia de la regla de derivación del producto de funciones:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u(x)v(x)) = v(x)u'(x) + u(x)v'(x)$$

$$u(x)v(x) = \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Escribimos a continuación el enunciado con las condiciones necesarias para su aplicación.

Teorema 4.1.5 *Dadas dos funciones, u y v, derivables y con derivadas continuas, se verifica:*

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\mathrm{d}x$$

Si u es una función, es frecuente utilizar la siguiente notación cuando trabajamos con integrales:

$$\mathrm{d}u = u'(x)\mathrm{d}x$$

Esta notación, permitirá escribir fácilmente pasos intermedios y abreviar algunas fórmulas. Por ejemplo, usando esta notación, podemos escribir la fórmula de integración por partes como sigue:

$$\int u\,\mathrm{d}v = u\,v - \int v\,\mathrm{d}u$$

Es recomendable usar integración por partes cuando el integrando está dado como producto de dos funciones de distinto "tipo". Por ejemplo, una expresión polinómica por una exponencial o por una trigonométrica.

Ejemplo 4.1.2 Para calcular la integral $\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ identificamos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} u = x \quad &\longrightarrow \quad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \quad &\longrightarrow \quad v = \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

y aplicamos el método de integración por partes:

$$\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

La integral que queda por resolver es inmediata:

$$\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C = (x-1)\mathrm{e}^x + C \qquad \square$$

En algunos casos, como en el ejemplo siguiente, será necesario aplicar el método reiteradamente.

Ejemplo 4.1.3 Para calcular la integral $\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ identificamos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} u = x^2 \quad &\longrightarrow \quad \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \quad &\longrightarrow \quad v = \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

y aplicamos el método de integración por partes:

$$\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - \int 2x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

La integral que hemos obtenido se resuelve también por partes, como hemos visto en el ejemplo anterior. Al final, agrupando las expresiones se obtiene:

$$\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - 2(x-1)\mathrm{e}^x = (x^2-2x+2)\mathrm{e}^x + C \qquad \square$$

En ocasiones, cuando se aplica reiteradamente este método volvemos a obtener la integral de partida. Este tipo de integrales se denominan cíclicas y la solución se obtiene "despejando" la integral de partida de la ecuación resultante.

Ejemplo 4.1.4 Para calcular la integral $\int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$ identificamos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} u = \mathrm{e}^x \quad &\longrightarrow \quad \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x \quad &\longrightarrow \quad v = -\cos x \end{aligned}$$

y aplicamos el método de integración por partes:

$$\int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x\cos x - \int -\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x\cos x + \int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$$

Para calcular la integral $\int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$ que aparece en la expresión obtenida, identificamos las funciones como sigue:

$$\begin{aligned} u = \mathrm{e}^x \quad &\longrightarrow \quad \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x \quad &\longrightarrow \quad v = \operatorname{sen} x, \end{aligned}$$

y volvemos a aplicar el método de integración por partes,

$$\int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\operatorname{sen} x - \int \mathrm{e}^x\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x,$$

para obtener la misma integral de partida. Si agrupamos las expresiones:

$$\int \mathrm{e}^x\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x\cos x + \mathrm{e}^x\operatorname{sen} x - \int \mathrm{e}^x\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x,$$

podemos despejar la expresión $\int \mathrm{e}^x\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$ y obtener el resultado final:

$$\int \mathrm{e}^x\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = \frac{-\,\mathrm{e}^x\cos x + \mathrm{e}^x\operatorname{sen} x}{2} + C \qquad \square$$

Como vemos en el siguiente ejemplo, otra de las aplicaciones de este método es integrar funciones simples no inmediatas.

Ejemplo 4.1.5 Para calcular la integral $\int \log x \, \mathrm{d}x$ identificamos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} u = \log x \quad &\longrightarrow \quad \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \quad &\longrightarrow \quad v = x \end{aligned}$$

y aplicamos el método de integración por partes:

$$\int \log x \, \mathrm{d}x = x \log x - \int \mathrm{d}x = x \log x - x + C \qquad \square$$

4.1.2. Cambio de variable o sustitución

A partir de la regla de la cadena se deduce la fórmula general del cambio de variable que permite aplicar el método de sustitución.

Teorema 4.1.6 *Dadas dos funciones f, g con f y g' continuas, se verifica que:*

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = F(g(x)),$$

en donde F es una primitiva de la función f.

La forma más simple de aplicar este resultado es con el siguiente proceso, denominado *sustitución directa*.

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x \overset{(1)}{=} \int f(t)\,\mathrm{d}t \overset{(2)}{=} F(t) \overset{(3)}{=} F(g(x))$$

Es decir, en primer lugar (1) hacemos la sustitución:

$$\begin{aligned} g(x) \quad &\to \quad t \\ g'(x)\mathrm{d}x \quad &\to \quad \mathrm{d}t \end{aligned}$$

A continuación, (2) hallamos la integral $\int f(t)\mathrm{d}t = F(t)$; y por último, (3) *deshaciendo* el cambio, $t \to g(x)$, se obtiene que la primitiva buscada es $F(g(x))$.

Para aplicar este método, necesitamos identificar una función $f(x)$, que se repita en el integrado y cuya derivada $f'(x)$, aparezca multiplicando al resto de la expresión.

Ejemplo 4.1.6 Para calcular $\int x \operatorname{sen} x^2 \, \mathrm{d}x$ hacemos la sustitución:

$$\begin{aligned} x^2 \quad &\to \quad t \\ 2x\,\mathrm{d}x \quad &\to \quad \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

que permite transformar la integral anterior en una integral inmediata que se resuelve aplicando la fórmula de integración de la función $\operatorname{sen}(x)$ de la siguiente manera:

$$\int x\operatorname{sen}(x^2)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cos(t)$$

Al final se deshace el cambio para obtener el resultado:

$$\int x\operatorname{sen}(x^2)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C \qquad \square$$

Ejemplo 4.1.7 Para calcular $\displaystyle\int \cos x \log(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x$ hacemos la sustitución

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &\to t \\ \cos x\,\mathrm{d}x &\to \mathrm{d}t \end{aligned}$$

que permite transformar la integral anterior en la integral que hemos resuelto en el ejemplo 4.1.5:

$$\int \cos x \log(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x = \int \log t\,\mathrm{d}t = t\log t - t + C = \operatorname{sen} x \log(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x + C$$

$\square$

Ejemplo 4.1.8 Para calcular la integral $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ podemos aplicar la sustitución

$$\begin{aligned} x^2 &\to t \\ 2x\,\mathrm{d}x &\to \mathrm{d}t \end{aligned}$$

que permite transformar la integral anterior en una integral inmediata que se resuelve aplicando la fórmula de integración de la función $\operatorname{arc\,tg}(x)$ de la siguiente manera:

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x^2 + C$$

$\square$

En la práctica, muchas de las integrales que se resuelven mediante una sustitución directa son resueltas "a ojo" usando las fórmulas de integración inmediata. Por ejemplo, en el ejemplo anterior, un simple arreglo de constantes,

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}\,\mathrm{d}x,$$

no hubiera permitido identificar la regla de derivación general de la función arco tangente

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arc\,tg} f(x) = \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}.$$

$\int f^n(x) f'(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
$\int \mathrm{e}^{f(x)} f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{f(x)} + C$ $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \log\lvert f(x)\rvert + C$
$\int \operatorname{sen}(f(x)) f'(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(f(x))$ $\int \cos(f(x)) f'(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen}(f(x))$ $\int \dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2}\mathrm{d}x = \operatorname{arc\,tg} f(x)$

Figura 4.2: Integrales inmediatas generales.

En la figura 4.2, aparece la lista de integrales inmediatas generalizadas de esta forma.

Otra forma de aplicar el teorema 4.1.6 es mediante el siguiente esquema que se denomina *sustitución inversa*.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(1)}{=} \int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t \overset{(2)}{=} F(t) \overset{(3)}{=} F(g^{-1}(x)) + C$$

Es decir, en primer lugar (1) se sustituye la variable inicial por una expresión dependiente de una nueva variable:

$$\begin{aligned} x &\to g(t) \\ \mathrm{d}x &\to g'(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

A continuación (2) hallamos la integral $\int f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t = F(t)$; y por último, (3) *deshaciendo* el cambio, $t \to g^{-1}(x)$, se obtiene que la primitiva buscada es $F(g^{-1}(x))$.

Ejemplo 4.1.9 Para calcular la integral irracional $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ vamos a realizar el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} x &\to \operatorname{sen} t \\ \mathrm{d}x &\to \cos t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

El objetivo del mismo es "eliminar" la raíz que aparece en el integrando.

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t,$$

Para resolver la última integral podemos utilizar la fórmulas que aprendimos en el primer tema, para transformar las potencias de funciones trigonométricas.

$$\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \qquad \square$$

Aplicaremos las sustituciones directas o inversas siguiendo las tablas que repasamos en las secciones siguientes asociadas a cada tipo de función.

4.1.3. Funciones racionales

En el primer tema, aprendimos a expresar cualquier función racional como suma de polinomios y funciones racionales simples,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x \qquad \text{y} \qquad \int \frac{x+a}{(x^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x.$$

Por lo tanto, para integrar cualquier función racional es suficiente con saber integrar polinomios (integración inmediata) y funciones racionales simples. En los siguientes ejemplos, vemos distintos casos para mostrar cómo se integran fácilmente todas ellas.

EJEMPLO 4.1.10

$$\int \frac{3}{2x-7}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2}{2x-7}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\log|2x-7| + C \qquad \square$$

EJEMPLO 4.1.11

$$\int \frac{2}{(x-3)^5}\,\mathrm{d}x = 2\int (x-3)^{-5}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{-4}(x-3)^{-4} = -\frac{1}{2(x-3)^4} + C \qquad \square$$

EJEMPLO 4.1.12 El denominador del integrando de $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$ es irreducible; esta integral se resuelve mediante un cambio directo que deducimos fácilmente tras completar cuadrados en el denominador:

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)$$

De esta forma, el cambio adecuado es:

$$t = \frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}t.$$

El desarrollo queda entonces como sigue:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+3}{x^2+x+1}\mathrm{d}x &= \int \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{2}\right)+3}{\frac{3}{4}(t^2+1)}\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{t\sqrt{3}+5}{t^2+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + \frac{5}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\log(t^2+1) + \frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg} t + C \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{4}{3}(x^2+x+1)\right) + \frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\log\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}
$$

En la última igualdad, hemos eliminado la constante $\frac{1}{2}\log\frac{4}{3}$, ya que en la expresión ya aparece una constante genérica C. □

Ejemplo 4.1.13 Las funciones racionales simples del tipo

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x,$$

es decir, cuyo denominador es potencia de un polinomio irreducible de grado 2 y el numerador es una constante, necesitan un poco más de trabajo. Concretamente, vamos a partir de la misma integral, pero reduciendo en una unidad el exponente; esta integral se abordará con integración por partes:

$$
\begin{aligned}
u = \frac{1}{x^2+1} &\longrightarrow \mathrm{d}u = \frac{-\,2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
\mathrm{d}v = \mathrm{d}x &\longrightarrow v = x
\end{aligned}
$$

De esta forma:

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

La integral del segundo miembro "se asemeja" a la integral propuesta, por lo que, a partir de ella, con unas manipulaciones algebraicas podemos obtenerla fácilmente:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x =
\end{aligned}
$$

Ahora, basta con "despejar" la integral buscada y completar el cálculo:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C
\end{aligned}
$$

En este ejemplo, sólo ha sido necesario aplicar el procedimiento una vez, pues la integral era de grado $n = 2$; en general, tendremos que aplicar el proceso sucesivas veces para reducir el exponente unidad a unidad. □

4.1.3.1. Funciones trigonométricas

Las sustituciones que mostramos en esta sección permiten integrar funciones *racioneles en seno y coseno*. Es decir, funciones que se obtienen a partir de una función racional $R(t)$, en la cual cada variable t se sustituye por $\operatorname{sen} x$ o por $\cos x$. La expresión resultante se representa habitualmente por $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$. Por ejemplo, las siguientes expresiones son racionales en sen y cos:

$$\frac{3\operatorname{sen}^2 x + \cos x - 5}{\operatorname{sen} x + 2}, \qquad \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos^2 x - 1}, \qquad \operatorname{tg} 2x;$$

mientras que estas otras no lo son:

$$\frac{x^3 + \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}, \qquad \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\mathrm{e}^{\cos x}}, \qquad \frac{\operatorname{sen} \cos x}{\cos^2 x}$$

Dependiendo de la paridad de la función $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ respecto del seno y el coseno, aplicaremos una de las siguientes sustituciones:

1. Si $R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, se usará la sustitución $\operatorname{sen} x = t$.
2. Si $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, se usará la sustitución $\cos x = t$.
3. Si $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, se usará la sustitución $\operatorname{tg} x = t$, de forma que
$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}, \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$
4. En cualquier otro caso, y como último recurso, se usará la sustitución $\operatorname{tg}(x/2) = t$, de forma que
$$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t, \quad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Todos estos cambios, reducen el problema a integrar una función racional.

Ejemplo 4.1.14 Naturalmente, la función R puede ser polinómica, que es un caso particular de racional. Por ejemplo, para calcular la integral $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x$, la tabla anterior recomienda el cambio

$$\cos x = t, \quad \operatorname{sen}^2 x = 1 - t^2, \quad -\operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t,$$

que conduce a una función polinomica:

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = \int -(1-t^2)t^2 \, \mathrm{d}t$$
$$= \int (t^4 - t^2) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C \qquad \square$$

Ejemplo 4.1.15 Para calcular la integral $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\operatorname{sen} x}$ utilizamos el cambio de variable $\operatorname{tg}(x/2) = t$, ya que no es posible aplicar ninguno de los otros tres, y obtenemos una integral racional:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\operatorname{sen} x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}} \, \mathrm{d}t = \int \frac{2}{(t-1)^2} \, \mathrm{d}t = -\frac{2}{t-1} + C$$
$$= \frac{2}{1-\operatorname{tg}(x/2)} + C \qquad \square$$

4.1.3.2. Funciones irracionales

Las funciones que abordamos en esta sección son funciones racionales en x y en una expresión irracional del tipo $\sqrt{x^2+bx+c}$. Es decir, funciones que se obtienen a partir de una función racional $R(x)$ en la cual, algunas apariciones de x se sustituyen por $\sqrt{x^2+bx+c}$. Estas expresiones se representan abreviadamente por

$$R(x, \sqrt{x^2+bx+c}),$$

Por ejemplo, las siguientes expresiones son de este tipo:

$$\frac{\sqrt{5x^2+3}}{x}, \qquad \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}, \qquad \frac{3x^2+5\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+7};$$

mientras que las expresiones

$$\frac{1+\log x}{x^2+\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{y} \qquad \frac{3x^2+5\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2-1}+7}$$

no los son: la primera no es racional (aparece $\log x$) y en la segunda, las subexpresiones con raíces no son iguales.

La forma más sencilla de afrontar este tipo de integrales es mediante un cambio de variable inverso utilizando funciones trigonométricas o hiperbólicas con el fin de hacer desaparecer la raíz cuadrada (véase el ejemplo 4.1.9). Antes de aplicar estos cambios, necesitaremos utilizar compleción de cuadrados dentro de la raíz y realizar un cambio directo para obtener alguno de los esquemas siguientes:

$$\begin{aligned} R(x, \sqrt{1-x^2}) &\implies x \to \operatorname{sen} t \\ R(x, \sqrt{x^2-1}) &\implies x \to \frac{1}{\operatorname{sen} t} \\ R(x, \sqrt{x^2+1}) &\implies x \to \operatorname{senh} t \end{aligned}$$

Estas sustituciones convierten el integrando en una función trigonométrica (o hiperbólica) de los tipos estudiados en la sección anterior.

Ejemplo 4.1.16 Para calcular la integral $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,\mathrm{d}x$ utilizamos el cambio de variable $x = \frac{1}{\operatorname{sen} t}$ y obtenemos un integral inmediata

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}}{\frac{1}{\operatorname{sen}^4 t}} \left(-\frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}\right) \mathrm{d}t = -\int \operatorname{sen} t \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\cos^3 t + C \\ = \frac{1}{3}\cos^3 \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\cos^2(\operatorname{arc\,sen} \alpha) = 1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen} \alpha) = 1 - \alpha^2,$$

podemos simplificar el resultado anterior para llegar a:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^3 + C \qquad \square$$

Ejemplo 4.1.17 Para calcular la integral $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,\mathrm{d}x$ se completan cuadrados en la expresión del radicando

$$x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 = 4\left(\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1\right)$$

y se aplica el siguiente cambio de variable directo

$$t = \frac{1}{2}(x-1), \quad x = 2t+1, \quad \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t,$$

que permite transformar la integral de partida de la siguiente manera

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{4t^2+4}} 2\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t$$

Ahora, aplicamos el cambio de variable $t = \operatorname{senh} y$ y concluímos el cálculo:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\sqrt{\operatorname{senh}^2 y + 1}} \cosh y \,\mathrm{d}y \\ = \int \mathrm{d}y = y + C = \operatorname{argsenh} \frac{x-1}{2} + C \qquad \square \end{aligned}$$

LECCIÓN 4.2

Ecuaciones diferenciales

Una *ecuación diferencial* es una ecuación donde la incógnita es una función y en la expresión aparecen derivadas de la función incógnita. Las ecuaciones diferenciales constituyen una herramienta fundamental en la resolución de muchos problemas físicos y geométricos. Por ejemplo, en la última sección, usaremos ecuaciones diferenciales para representar analíticamente familias de curvas y trabajar con ellas.

Si la incógnita es una función de una variable, decimos que la ecuación diferencial es *ordinaria* y, si la incógnita es un campo escalar decimos que la ecuación diferencial es *en derivadas parciales*. En esta lección solamente estudiaremos las del primer tipo.

DEFINICIÓN 4.2.1 *Una* ecuación diferencial ordinaria *(en adelante, EDO) es una ecuación donde la incógnita es una función y en la expresión aparecen derivadas de la función incógnita.*

EJEMPLO 4.2.1 La siguiente igualdad es una ecuación diferencial:

$$x^2y' - xy = 4y',$$

Dado que sobre la variable y aparece el operador derivada, esta debe ser considerada la *incógnita* de la ecuación y sus soluciones serán de la forma $y = \varphi(x)$, es decir, x es la *variable independiente*. La función

$$y = \varphi(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

es una solución de la ecuación, según comprobamos a continuación.

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \sqrt{x^2 - 4}\\
\varphi'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}\\
x^2\varphi'(x) - xy &= \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 4}} - x\sqrt{x^2 - 4} = \frac{4x}{\sqrt{x^2 - 4}}\\
x\varphi'(x) &= \frac{4x}{\sqrt{x^2 - 4}}\\
x^2\varphi'(x) - xy &= 4\varphi'(x)
\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 4.2.2 El cálculo de primitivas, que estudiamos en la lección anterior, constituye un método de resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias del tipo

$$y' = f(x),$$

pues el objetivo era encontrar una función $y = F(x)$ que verificase $y' = f(x)$. Por ejemplo, para encontrar una solución de la ecuación diferencial $y' = \operatorname{tg} x$ calculamos la siguiente integral

$$y = \int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = C - \log \cos x, \quad C \in \mathbb{R} \qquad \square$$

Un criterio de clasificación de las ecuaciones diferenciales es el orden de derivación más alto que interviene en la ecuación, y que llamamos *orden* de la ecuación. Así,

$$\begin{array}{ll} y''' + 4y = 2 & \text{es de orden 3,} \\ y'' = -32 & \text{es de orden 2,} \\ (y')^2 - 3y = \mathrm{e}^x & \text{es de orden 1,} \\ y - \operatorname{sen} y' = 0 & \text{es de orden 1.} \end{array}$$

En esta lección, estudiamos solamente las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, es decir, expresiones de la forma

$$F(x, y, y') = 0,$$

en donde F es un campo escalar de tres variables.

Si consideremos la EDO de primer orden $y' + 2y = 0$, es fácil comprobar que todas las funciones de la forma

$$\varphi_C(x) = C\mathrm{e}^{-2x}, C \in \mathbb{R},$$

son *soluciones* de dicha ecuación; esta expresión se denomina *solución general* de la ecuación. En algunas ocasiones, y debido a las manipulaciones que se realizan para resolver las ecuaciones, podrán existir otras soluciones que no entren en el esquema de las soluciones generales, estas soluciones se denominan *soluciones singulares*. Por ejemplo, la ecuación $y = xy' - (y')^2$ admite como solución general:

$$\varphi_C(x) = Cx - C^2, \quad C \in \mathbb{R},$$

pero la función $\varphi(x) = x^2/4$ también es una solución y no entra en el esquema de solución general anterior (ver figura 4.3).

Por los ejemplos que hemos visto hasta ahora, es evidente que, por lo general, una ecuación diferencial admite infinitas soluciones. Sin embargo, en los problemas reales, es habitual que se incluyan determinadas condiciones adicionales que restrinjan las posibles soluciones. Por ejemplo, un problema del tipo

$$y'' + 4y = 2 \qquad y(0) = 2 \quad , \quad y'(0) = 1,$$

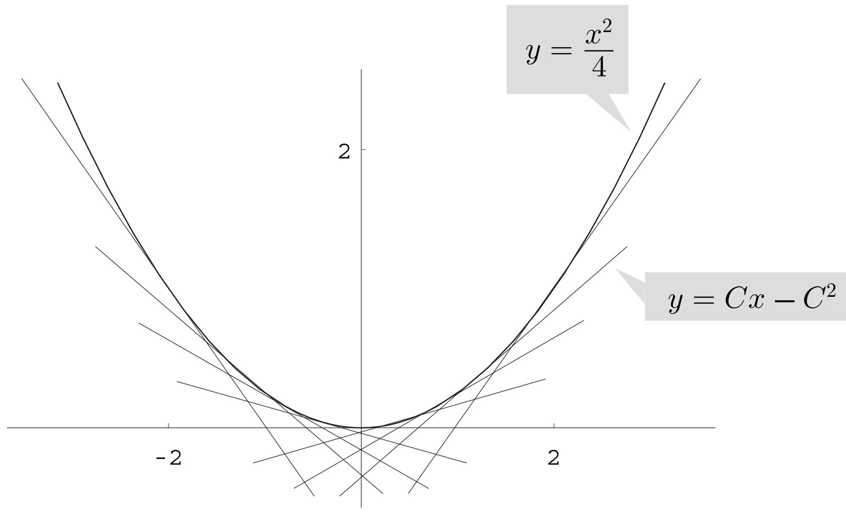


Figura 4.3: Soluciones de la ecuación $y = xy' - (y')^2$.

en el que fijamos el valor de la función y de su derivada en un punto, se denomina *problema de Cauchy* o *de condiciones iniciales*; La solución de un problema con condiciones iniciales se denominan *solución particular*.

Aunque siempre es posible plantearse la existencia de soluciones de una ecuación diferencial, sólo cabe la posibilidad de plantearse la unicidad de las mismas en los problemas de condiciones iniciales. Por ejemplo, la solución general de la EDO $y' + 2y = 0$ es $\varphi_C(x) = C\mathrm{e}^{-2x}$; si le imponemos la condición inicial $y(0) = 2$, entonces $\varphi_2(x) = 2\mathrm{e}^{-2x}$ es la *única* solución del problema.

Por lo tanto, en el estudio de ecuaciones diferenciales podemos distinguir dos problemas fundamentales:

- Dada una ecuación diferencial con condiciones iniciales, ¿podemos afirmar que dicho problema tiene solución? Si dicho problema tiene solución ¿es única?
- Dada una ecuación diferencial para la cual podemos afirmar que tiene solución ¿cómo hallamos dicha solución?

El primer punto entra dentro del estudio teórico de la EDO. Aunque en el resultado siguiente solo vamos a analizar estas cuestiones, se pueden formular otro tipo de preguntas más especificas: ¿cuál es el mayor dominio que se puede considerar para la solución? ¿existe alguna relación de dependencia entre las soluciones? ¿la dependencia de la solución general respecto de los parámetros es continua, es diferenciable?

TEOREMA 4.2.2 *Consideremos el problema:*

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

1. *Si f es continua en un conjunto de la forma $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$, entonces el problema tiene solución definida en algún intervalo $I \subset [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$.*
2. *Si f es diferenciable y su parcial respecto de y es continua en un entorno de (x_0, y_0), entonces el problema tiene solución única en algún entorno de x_0.*

Es decir, si somos capaces de despejar la derivada de la incognita y' en función de x e y, las propiedades de continuidad y derivabilidad se traducen en existencia y unicidad. Una ecuación transformada en la forma $y' = f(x, y)$ se dice que está *resuelta respecto de la derivada*. En esta lección, trabajaremos fundamentalmente con este tipo de ecuaciones.

EJEMPLO 4.2.3 Consideremos la ecuación

$$y' = y^2$$

La función nula es solución de esta ecuación (solución particular). Por otra parte, las funciones

$$\varphi_c(x) = \frac{-1}{x + c} \qquad x \in (-\infty, -c) \cup (-c, \infty)$$

también son soluciones (solución general). Es fácil comprobar que cualquier problema de condiciones iniciales tiene solución entre alguna de las anteriores; finalmente, dado que la función $f(x, y) = y^2$ es diferenciable y sus parciales son continuas, la ecuación anterior tiene la propiedad de unicidad y por lo tanto podemos concluir que las soluciones anteriores son las únicas soluciones de la ecuación. □

EJEMPLO 4.2.4 Consideremos la ecuación

$$y' = y^{2/3}$$

La función nula es solución de esta ecuación. Por otra parte, las funciones

$$\varphi_c(x) = \frac{1}{27}(x + c)^3 \qquad x \in \mathbb{R}$$

son también soluciones (ver figura 4.4). Por tanto, esta ecuación no tiene la propiedad de unicidad en $\mathbb{R}^2$ pero sí tiene la propiedad de unicidad en los conjuntos $\mathbb{R} \times (-\infty, 0)$ y $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ ya que la función $f(x, y) = y^{2/3}$ es diferenciable en estos conjuntos y las parciales son continuas. □

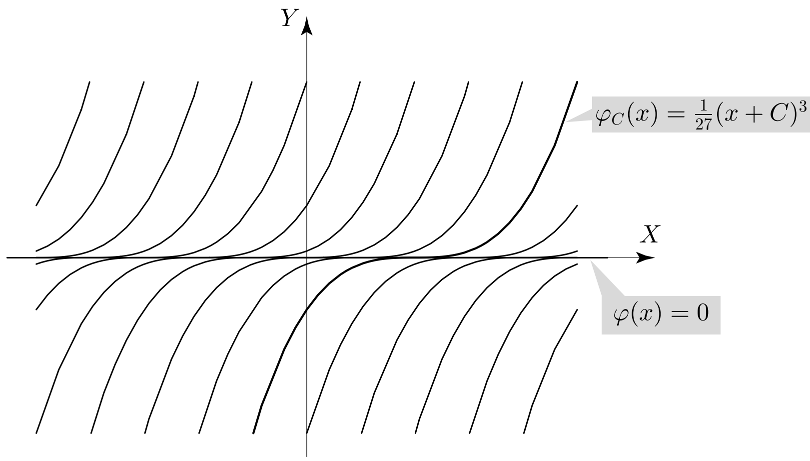


Figura 4.4: Soluciones de la ecuación $y' = y^{2/3}$

En la secciones siguientes vamos a abordar la resolución de algunos tipos de ecuaciones. En general, el problema de encontrar las soluciones es bastante complicado; como ocurre con el cálculo integral, sólo para algunos tipos de ecuaciones es posible obtener sus soluciones mediante métodos sencillos. Cuando no es posible determinar las soluciones analíticas se pueden aplicar técnicas de aproximación, pero estos métodos quedan fuera de los objetivos de este tema.

Los métodos se presentan como algoritmos de manipulación formal de las expresiones; algunos pasos de estos métodos pueden requerir condiciones adicionales sobre los dominios o sobre las funciones, así que *debemos asegurarnos de que tales condiciones se verifican, o bien de que tales manipulaciones pueden realizarse.*

Así mismo, algunas manipulaciones pueden alterar parcialmente los resultados finales: añadir soluciones, perder soluciones, restringir o ampliar el dominio,. . . : *debemos tener esto en cuenta en los problemas concretos, y hacer un estudio posterior en el que se aborden estas cuestiones.*

4.2.1. Ecuaciones de variables separables

Una ecuación de *variables separadas* es una ecuación de la forma

$$P(x) + Q(y)y' = 0$$

Si, mediante operaciones algebraicas elementales, es posible transformar una ecuación en otra con la forma anterior, decimos que es una ecuación de *variables separables.*

Estas ecuaciones se resuelven de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
P(x) + Q(\varphi(x))\varphi'(x) &= 0 && \text{(integración)}\\
\int (P(x) + Q(\varphi(x))\varphi'(x))\,\mathrm{d}x &= C && \text{(linealidad)}\\
\int P(x)\,\mathrm{d}x + \int Q(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x &= C && \text{(sustitución)}\\
\int P(x)\,\mathrm{d}x + \int Q(y)\,\mathrm{d}y &= C && \text{(primitiva)}
\end{aligned}$$

En el tercer paso hemos aplicado el método de sustitución utilizado el cambio de variable: $y = \varphi(x)$, $\mathrm{d}y = \varphi'(x)\mathrm{d}x$. Por lo tanto, si encontramos dos primitivas p y q de P y Q respectivamente, las soluciones de la ecuación inicial verificaran la expresión implícita:

$$p(x) + q(y) = C$$

Si es posible, resolveremos esta ecuación para obtener una expresión explícita $y = f(x)$ de la solución de la EDO.

Ejemplo 4.2.5 $(x^2 + 4)y' = xy$ es una ecuación de variables separables:

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{x^2+4} = \frac{y'}{y}\\
&\int \frac{x}{x^2+4}\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = 0\\
&\frac{1}{2}\log(x^2+4) - \log|y| = C_1\\
&|y| = \mathrm{e}^{-C_1}\sqrt{x^2+4}\\
&y = \pm\mathrm{e}^{-C_1}\sqrt{x^2+4}\\
&y = C_2\sqrt{x^2+4} \qquad , \quad C_2 \in \mathbb{R} - \{0\}
\end{aligned}$$

Al separar las variables en el primer paso de la resolución hemos efectuado una división por y, lo que excluye del proceso posterior las soluciones que se anulan en algún punto. Sin embargo, la función nula $y = 0$ es solución de la ecuación inicial y, por la propiedad de unicidad, la única que pasa por los puntos del eje de abcisas. Por tanto, las soluciones de la ecuación son:

$$\varphi_C(x) = C\sqrt{x^2+4}, \qquad C \in \mathbb{R}$$ □

Como hemos visto, el proceso de resolución de las ecuaciones separadas conduce a una expresión del tipo

$$p(x) + q(y) = C,$$

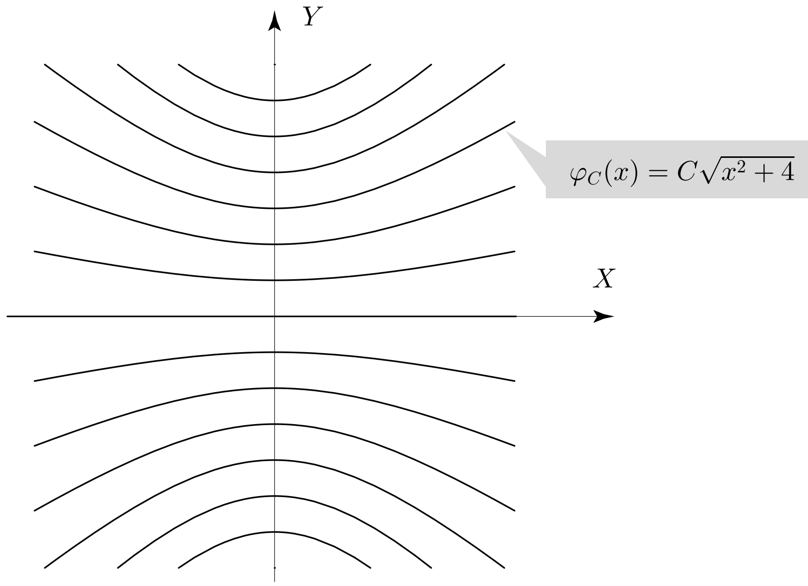


Figura 4.5: Soluciones de $(x^2+4)y' = xy$

es decir, una expresión que define de forma *implícita* las soluciones de la ecuación. Aunque en algunos casos seremos capaces de despejar completamente y y expresarla de forma *explícita*, en la mayoría de los casos este paso será más complejo y tendremos que conformarnos con la forma implícita.

4.2.2. Ecuaciones exactas

Una ecuación $P(x,y) + y'Q(x,y) = 0$ se dice *exacta* si existe una campo escalar U tal que $\nabla U(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, es decir,

$$\mathrm{D}_1 U(x,y) = P(x,y) \qquad \mathrm{D}_2 U(x,y) = Q(x,y)$$

En tal caso, el campo U se denomina *potencial* de (P,Q) y la expresión

$$U(x,y) = C$$

define implícitamente las soluciones de la ecuación:

$$\begin{aligned} U(x, f(x)) &= C \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(U(x, f(x))) &= 0 \\ \mathrm{D}_1 U(x, f(x)) + \mathrm{D}_2 U(x, f(x)) f'(x) &= 0 \\ P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) f'(x) &= 0 \\ P(x, y) + Q(x, y) y' &= 0 \end{aligned}$$

Pero, ¿cómo sabemos si una ecuación es exacta y como determinamos en tal caso su potencial? El lema de Poincaré responde a la primera pregunta y veremos en los ejemplos siguientes que el cálculo de primitivas es suficiente para determinar el potencial.

TEOREMA 4.2.3 (LEMA DE POINCARÉ) *Consideremos dos campos escalares,* P *y* Q*, en* $\mathbb{R}^2$ *y cuyo dominio es un conjunto en "forma de estrella".* $P(x, y) + y'Q(x, y) = 0$ *es una ecuación exacta si y solo si* $\mathrm{D}_2 P(x, y) = \mathrm{D}_1 Q(x, y)$.

En este enunciado se exige que el dominio común de P y Q, D, tenga *forma de estrella*, es decir, que *exista un punto* $(a, b) \in \mathrm{D}$ *de tal forma que los segmentos que unen este punto con cualquier otro del conjunto, está contenido en* D. En realidad, esta restricción no condiciona la aplicación del lema de Poincaré, solamente reduciría el conjunto en el cual podemos afirmar que existe solución. En la práctica, este análisis siempre lo haremos a posteriori, es decir, una vez resuelta una ecuación, debemos verificar siempre la validez de la misma y el dominio en el cual tal solución es válida.

EJEMPLO 4.2.6 La ecuación

$$(xy^2 + x) + (yx^2)y' = 0$$

es exacta ya que:

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy^2 + x) = 2xy = \frac{\partial}{\partial x}(yx^2)$$

Para hallar el potencial, razonamos de la siguiente forma. Si $U(x, y)$ es el potencial de la ecuación, entonces

$$\frac{\partial}{\partial y} U(x, y) = yx^2,$$

y por lo tanto,

$$U(x, y) = \int yx^2 \, \mathrm{d}x + C.$$

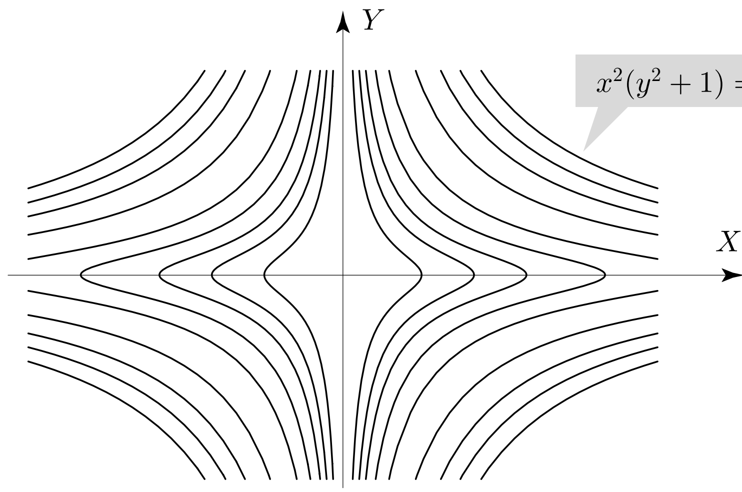


Figura 4.6: Soluciones de $(xy^2 + x) + (yx^2)y' = 0$

Ahora bien, dado que estamos trabajando en expresiones con dos variables y solo integramos respecto de y, debemos entender que la constante de integración puede incluir a la variable x; es decir, debemos considerar $C = \varphi(x)$.

$$U(x,y) = \int yx^2 \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}y^2x^2 + \varphi(x)$$

Para determinar una función $\varphi(x)$ (que no incluye a la variable y), utilizamos la otra parcial de U:

$$xy^2 + x = \frac{\partial}{\partial x}U(x,y) = xy^2 + \varphi'(x)$$

Por lo tanto, $\varphi'(x) = x$ y

$$\varphi(x) = \int x \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}$$

En consecuencia, podemos tomar $U(x,y) = \frac{1}{2}(y^2x^2 + x^2)$ e

$$y^2x^2 + x^2 = C$$

es la solucion general de la ecuación (ver figura 4.6). Podemos observar que $C \leq 0$ no define ninguna función y para $C > 0$ las funciones solución son:

$$f_C(x) = \sqrt{\frac{C}{x^2} - 1} \qquad g_C(x) = -\sqrt{\frac{C}{x^2} - 1}$$

También podemos observar que ninguna de las soluciones anteriores corta el eje de ordenadas; cualquier solución que pase por este eje debería ser una extensión de alguna solución f_C o g_C, lo cual es imposible, ya que estas funciones no pueden ser extendidas con continuidad al punto $x = 0$. $\square$

4.2.3. Ecuaciones lineales

Las ecuaciones de la forma

$$y' + p(x)y + q(x) = 0$$

se denominan *ecuaciones lineales de primer orden*. Si las funciones p y q son continuas, la ecuación tiene solución definida en la intersección de los dominios de las dos funciones y además, cada problema de Cauchy asociado a una ecuación lineal tiene solución única.

Si la función q es nula, decimos que la ecuación es *homogénea*; las ecuaciones lineales homogéneas son ecuaciones separables tal y como vemos a continuación:

$$\begin{aligned} p(x)y + y' = 0 \\ \frac{y'}{y} &= -p(x) \\ y &= C \exp\left(\int -p(x)\,\mathrm{d}x\right) = C\lambda(x), \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Teorema 4.2.4 (Principio de superposición) *Supongamos que y_p es una solución particular de la ecuación*

$$y' + p(x)y + q(x) = 0 \tag{4.1}$$

y que y_h es la solución general de la ecuación $y' + p(x)y = 0$, que se denomina ecuación homogénea asociada *a* (4.1). *Entonces, la solución general de* (4.1) *es*

$$y = y_p + Cy_h,\ C \in \mathbb{R}$$

Ya hemos visto que las ecuaciones homogéneas se resuelven como separables, así que solo necesitamos saber determinar una solución particular de la ecuación lineal no homogénea. El siguiente resultado, nos da la forma de hacerlo.

Teorema 4.2.5 (Conjetura de Lagrange) *Consideremos la ecuación lineal*

$$y' + p(x)y + q(x) = 0 \tag{4.2}$$

y sea y_h una solución de la ecuación homogenea asociada, $y' + p(x)y = 0$. Entonces, existe una solución de (4.2) *de la forma $y = c(x)y_h$, en donde $c(x)$ es una función derivable.*

En realidad, todas las soluciones de la ecuación homogénea responden a la forma dada en el enunciado anterior, pero es suficiente con determinar una solución para aplicar el principio de superposición. Estos resultados justifican el método que seguimos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.2.7 Vamos a resolver la ecuación

$$y' - y \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x = 0$$

1. En primer lugar, resolvemos la ecuación lineal homogénea asociada:

$$\begin{aligned} y_h' - y_h \operatorname{sen} x &= 0 \\ \frac{y_h'}{y_h} &= \operatorname{sen} x \\ \log|y_h| &= -\cos x + C_1 \\ y_h &= C\mathrm{e}^{-\cos x}, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. La conjetura de Lagrange establece que hay una solución de la ecuación inicial de la forma

$$y_p = c(x)\mathrm{e}^{-\cos x}$$

Imponiendo esta expresión anterior como solución, determinamos las funciones c y por lo tanto la solución general de la ecuación lineal.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(c(x)\mathrm{e}^{-\cos x}\right) - \left(c(x)\mathrm{e}^{-\cos x}\right) \operatorname{sen} x &= -\operatorname{sen} x \\ c'(x)\mathrm{e}^{-\cos x} + c(x) \operatorname{sen} x\mathrm{e}^{-\cos x} - c(x) \operatorname{sen} x\mathrm{e}^{-\cos x} &= -\operatorname{sen} x \\ c'(x)\mathrm{e}^{-\cos x} &= -\operatorname{sen} x \\ c'(x) &= -\operatorname{sen} x\mathrm{e}^{\cos x} \\ c(x) &= \mathrm{e}^{\cos x} \\ y_p &= \mathrm{e}^{\cos x}\mathrm{e}^{-\cos x} = 1 \end{aligned}$$

3. Por lo tanto, por el principio de sustitución, la solución de la ecuación de partida es

$$y = 1 + C\mathrm{e}^{-\cos x}.$$

□

Obsérvese que, en el desarrollo del ejemplo anterior, para determinar y_p hemos conseguido simplificar las expresiones hasta eliminar $c(x)$ y poder despejar $c'(x)$; si no somos capaces de lograr esto, significa que hemos cometido algún error.

4.2.4. Cambios de variables

Las ecuaciones estudiadas hasta ahora, son ecuaciones básicas. Para resolver otro tipo de ecuaciones, se utilizarán diversas técnicas que las transformen en uno de estos tipos básicos. En los ejemplos que veremos en el resto de la sección, haremos uso de *cambios de variables* para conseguir este objetivo.

Ecuaciones homogéneas. Un campo escalar $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice *homogéneo de grado p* si $f(tx, ty) = t^p f(x, y)$. La ecuación $P(x, y) + y'Q(x, y) = 0$ se dice homogénea si los campos P y Q son homogéneos del mismo grado. Las ecuaciones homogéneas se convierten en ecuaciones en variables separables haciendo el cambio de variable $y(x) = xz(x)$; es decir, en la ecuación resultante, la variable x sigue siendo independiente y z será la nueva incógnita.

EJEMPLO 4.2.8 Vamos a utilizar el cambio de variable $y(x) = xz(x)$ para resolver la ecuación diferencial $(x^2 - y^2) + 3xyy' = 0$, que efectivamente es homogénea:

$$\begin{array}{lcl} P(x,y) = x^2 - y^2 & \Longrightarrow & P(tx,ty) = t^2x^2 - t^2y^2 = t^2P(x,y) \\ Q(x,y) = 3xy & \Longrightarrow & Q(tx,ty) = 3txty = t^2Q(x,y) \end{array}$$

En primer lugar, derivamos la igualdad del cambio de variable para deducir la relación entre las derivadas de las dos variables:

$$y' = z + xz'$$

Ahora ya podemos sustituir completamente la variable y para obtener una nueva ecuación con incógnita z:

$$\begin{aligned} (x^2 - y^2) + 3xyy' &= 0 \\ (x^2 - (xz)^2) + 3x(xz)(z + xz') &= 0 \\ 1 + 2z^2 + 3xzz' &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación resultante es de variables separables que resolvemos como sigue.

$$\begin{aligned} 1 + 2z^2 &= -3xzz' \\ \frac{1}{x} &= \frac{-\,3z}{1+2z^2}z' \\ \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{3z}{1+2z^2}\mathrm{d}z &= C_1 \\ \log|x| + \frac{3}{4}\log(1+2z^2) &= C_1 \\ 4\log|x| + 3\log(1+2z^2) &= C_2 \\ \log x^4(1+2z^2)^3 &= C_2 \\ x^4(1+2z^2)^3 &= C_3 > 0 \end{aligned}$$

Finalmente, deshaciendo el cambio, se obtienen las soluciones de la ecuación inicial:

$$x^4\left(1 + 2\frac{y^2}{x^2}\right)^3 = C_3, x \neq 0\,, C_3 > 0$$

$$(x^2 + 2y^2)^3 = C_3x^2, x \neq 0,\ C_3 > 0 \qquad \square$$

Ecuaciones $y' = f(ax + by + c)$. Estas ecuaciones se resuelven fácilmente utilizando el cambio de variable $z = ax+by+c$, que conduce siempre a una ecuación en variables separables en x y z.

Ecuaciones $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$. Estas ecuaciones se resuelven de acuerdo al siguiente esquema:

- Si $c_1 = c_2 = 0$, la ecuación es homogénea (ver más arriba en esta sección).

- Si $a_1b_2 = b_1a_2$, el cambio de variable $z = a_1x + b_1y$ conduce a una ecuación en variables separables con incógnita z.

- Si $a_1b_2 \neq b_1a_2$, el sistema de ecuaciones (numéricas)

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

  tiene solución única, (α, β) y el cambio de variables $t = x - \alpha$, $z = y - \beta$, conduce a una ecuación homogénea donde t es la variable independiente y z es la incógnita.

Ejemplo 4.2.9 Para calcular la ecuación diferencial $y' = \dfrac{2x + y}{3x + y - 1}$ utilizamos el doble cambio de variable

$$\begin{aligned} t &= x - 1 \\ z &= y + 2 \end{aligned}$$

En la segunda igualdad se entiende que z es función de t, es decir, $z(t) = y(t+1)+2$. Por lo tanto, $z'(t) = y'(t + 1)$, es decir, $z' = y'$, y la ecuación se transforma en:

$$\begin{aligned} z' &= \frac{2(t + 1) + (z - 2)}{3(t + 1) + (z - 2) - 1} \\ z' &= \frac{2t + z}{3t + z} \end{aligned}$$

Esta ecuación se resuelve aplicando un nuevo cambio de variable: $z = tu$, $z' = u+tu'$.

$$\begin{aligned}
u + tu' &= \frac{2t + tu}{3t + tu} \\
u + tu' &= \frac{2 + u}{3 + u} \\
tu' &= \frac{2 + u}{3 + u} - u = -\frac{u^2 + u}{u + 3} \\
0 &= \frac{u + 3}{u^2 + u} u' + \frac{1}{t} \\
C_1 &= \log\left|\frac{u^3}{(u+1)^2}\right| + \log|t| \\
C_2 &= \frac{|tu^3|}{(u+1)^2}, \qquad C_2 > 0
\end{aligned}$$

Al deshacer el cambio de variable $z = tu$ obtenemos

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{|z^3|}{(z+t)^2}, \qquad C_2 > 0 \\
C_3 &= \frac{z^3}{(z+t)^2}, \qquad C_3 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Y al deshacer el doble cambio $t = x - 1$, $z = y + 2$ obtenemos

$$C = \frac{(y+2)^3}{(y - x + 3)^2}, \qquad C \in \mathbb{R}$$

□

Ecuaciones de Bernouilli. Las ecuaciones de la forma

$$y' + yp(x) = y^n q(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{y'}{y^n} + \frac{p(x)}{y^{n-1}} = q(x)$$

se denominan ecuaciones de Bernouilli. Para $n = 0$ esta ecuación es una ecuación lineal, para $n = 1$ esta ecuación es una ecuación en variables separables y, en otro caso, podemos dividir ambos miembros de la igualdad por y^n y aplicar el cambio de variable $z(x) = (y(x))^{1-n}$ que conduce a una ecuación lineal.

Ecuaciones de Riccati. Las ecuaciones de la forma

$$y' + p(x)y^2 + q(x)y = r(x)$$

se denominan ecuaciones de Riccati. No es posible dar un método de resolución general para este tipo de ecuaciones, sin embargo, sí es posible llegar a su solución general en el caso en que se conozca una *solución particular*, que deberá ser calculada “a ojo”. Si $\varphi(x)$ es una solución particular de la ecuación de Riccati, el cambio de variable $z = y - \varphi(x)$ conduce a una ecuación de Bernouilli que permite determinar el resto de soluciones.

4.2.5. Trayectorias ortogonales

Un problema geométrico y físico que se puede abordar fácilmente con ecuaciones diferenciales es la descripción de familias de curvas. Esta representación facilita, entre otras casos, el cálculo de sus *curvas ortogonales*.

Tal y como hemos estudiado anteriormente en el curso, la ecuación

$$U(x, y) = C$$

describe la familia de curvas que son curvas de nivel del campo f. Derivando ambos lados de la igualdad respecto de x (consideramos que la variable y es dependiente de x), eliminamos el parámetro C y obtenemos una ecuación diferencial que describe la misma familia de curvas:

$$\mathrm{D}_1 U(x, y) + y' \mathrm{D}_2 U(x, y) = 0$$

Supongamos ahora que queremos hallar la familia de curvas ortogonales a una familia dada, es decir, *la familia de curvas que se intersecan ortogonalmente en cada punto con familia dada.*

Teorema 4.2.6 *La familia de curvas ortogonales a las soluciones de $y' = f(x, y)$ es la familia de soluciones de la ecuación $y' = -\dfrac{1}{f(x, y)}$.*

Este resultado es una consecuencia inmediata del hecho de que y' es la pendiente de la curva en cada punto y de que, si m y m' son las pendientes de dos rectas ortogonales, entonces $mm' = -1$.

Ejemplo 4.2.10 Para hallar la familia de curvas ortogonal a $y = Cx$, despejamos en primer lugar el parámetro C para expresar esta familia como ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} y &= Cx \\ \frac{y}{x} &= C \\ \frac{xy' - y}{x^2} &= 0 \\ y - xy' &= 0 \end{aligned}$$

El teorema anterior se puede aplicar de forma más directa sustituyendo en la ecuación anterior y' por $-1/y'$ para obtener la ecuación de la familia ortogonal:

$$\begin{aligned} y + \frac{x}{y'} &= 0 \\ y &= -\frac{x}{y'} \\ yy' &= -x \\ \int y \, \mathrm{d}y &= -\int x \, \mathrm{d}x \\ \frac{y^2}{2} &= -\frac{x^2}{2} + C_1 \\ y^2 + x^2 &= C \end{aligned}$$

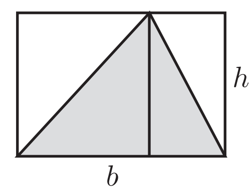
Es decir, la familia ortogonal son las circunferencias centradas en el origen. □

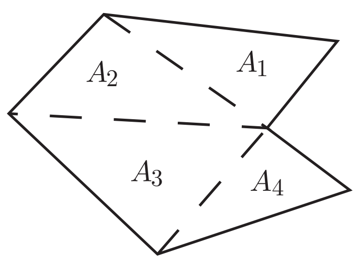
LECCIÓN 4.3

Integración de funciones de una variable

El contenido de esta lección está dedicado a la *integral de Riemannn* o *integral definida* de funciones de una variable. Tal y como hemos recordado en el tema 2, la aplicación de la integral al cálculo de áreas planas es el ejemplo más simple para entender este concepto, aunque como veremos más adelante, las aplicaciones de la integral definida son múltiples, tanto en las matemáticas como en las distintas áreas de ingeniería.

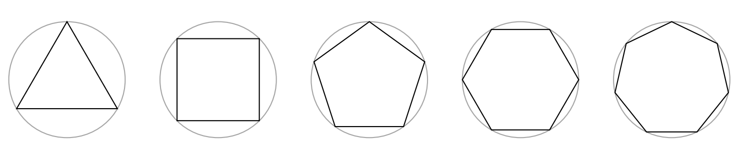
Seguramente el alumno recuerde toda una colección de fórmulas para calcular el área de polígonos. Todas esas fórmulas tienen como punto de partida la definición del área de un rectángulo: *el área de un rectángulo es el producto de sus dimensiones.* A partir de esta definición, podemos calcular el área de cualquier polígono. Por ejemplo, en la figura de la izquierda, podemos ver que el área de un triángulo de base b y altura h es $A = \frac{1}{2}bh$ (ya que el área de los dos triángulos sombreados, es igual al área de los dos triángulos sin sombrear). Además, el área de cualquier otra *región poligonal* se puede calcular dividiéndola en triángulos.



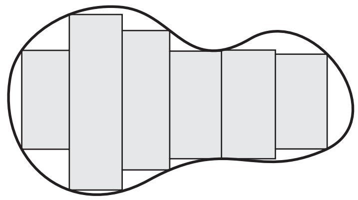


$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

Pero, ¿cómo calculamos el área encerrada por una curva? No podemos obtener de forma directa una expresión para esa área, por lo que, en estos casos, buscamos un procedimiento para aproximar su valor. Por ejemplo, en la antigüedad, utilizaban polígonos regulares inscritos en un círculo para aproximar el valor de su área; cuantos más lados tomemos, mejor será esta aproximación.



En una región arbitraria, también podemos utilizar este procedimiento, por ejemplo, inscribiendo franjas rectangulares podemos mejorar la aproximación si las tomamos cada vez más estrechas.



De hecho, este es el punto de partida para definir las *sumas de Riemmann* que introdujimos en el tema 2 y que son la base de la definición de la integral de Riemmann. Aunque su definición formal queda fuera de los objetivos de este curso, su enunciado puede simplificarse hasta el enunciado del teorema 2.3.2:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \text{lím}\,\mathcal{R}(P_n,\xi_n)$$

en donde P_n es una sucesión de particiones cuya norma converge a 0.

Aunque en este curso trabajaremos con funciones continuas o continuas a trozos, estasno son las únicas sobre las que podemos aplicar el operador integral. En general, podemos plantear el cálculo de integrales de cualquier función acotada, si para ella, el método de aproximación dado por las sumas de Riemmann converge; en tal caso, decimos que la función es *integrable*.

Aunque a continuación vamos a recordar cómo se calculan las integrales definidas usando primitivas, la definición basada en sumas de Riemann es importante por varias razones. En primer lugar, es la única forma de probar que una magnitud puede definirse o calcularse mediante integrales: cualquier magnitud que se puede aproximar por sumas de Riemann de una función continua, tiene a la integral como valor exacto. Por otra parte, las sumas de Riemann son el método básico para la aproximación numérica de las integrales, tal y como estudiamos en el tema 2.

4.3.1. Teorema fundamental del cálculo. Regla de Barrow

Ya hemos recordado en la primera lección de este tema el teorema fundamental de cálculo (teorema 4.1.3), que establece que la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

es una primitiva de f, si esta función es continua. A partir de este teorema se deduce fácilmente la Regla de Barrow, que es la herramienta para cálculo de integrales basada en primitivas. Concretamente, si G es otra primitiva de f, entonces F y G se diferencian en una constante:

$$G(x) - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = C \tag{4.3}$$

Para determinar el valor dela constante C basta con evaluar la expresión anterior en $x = a$:

$$C = G(a) - \int_a^a f(t)\mathrm{d}t = G(a)$$

Por lo tanto, de la igualdad (4.3) se deduce que:

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = G(x) - G(a)$$

El enunciado del teorema que recoge la regla de Barrow queda como sigue.

TEOREMA 4.3.1 (REGLA DE BARROW) *Si f es continua en $[a, b]$ y $f = G'$, entonces*

$$\int_a^b f = G(b) - G(a) \overset{\text{(Notación)}}{=} \Big[G(x)\Big]_a^b$$

EJEMPLO 4.3.1 Vamos a calcular de nuevo el área de la región del ejemplo 2.3.5 usando la regla de Barrow:

$$\int_0^2 (2x - x^2)\mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \qquad \square$$

EJEMPLO 4.3.2 El área de un círculo se puede calcular a partir de la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Si consideremos el intervalo $[0, r]$, la región entre el grafo de f y el eje OX es un cuarto de círculo y por lo tanto:

$$A = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\mathrm{d}x = \left[2r^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{r} + 2x\sqrt{r^2 - x^2}\right]_0^r = \pi r^2$$

No incluimos los detalles del cálculo de la primitiva puesto que ya ha sido resuelta en el tema anterior. $\square$

Debemos insistir en que el hecho de tener un resultado tan potente como la Regla de Barrow para calcular integrales definidas no debe llevarnos a la conclusión errónea de que podemos olvidar la definición de integral. De hecho, la regla de Barrow solo es útil para aquellas funciones que admiten una primitiva *expresable en términos de funciones elementales*, y ya sabemos que no todas las funciones continuas admiten este tipo de primitivas.

4.3.2. Propiedades

A continuación, enunciamos dos propiedades fundamentales de la integral definida.

Teorema 4.3.2 (Linealidad de la integral) *Si f y g son continuas en $[a,b]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces:*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Teorema 4.3.3 (Propiedad de aditividad) *Si f es continua en $[a,b]$ y $c \in [a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f = \left(\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\right) + \left(\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Tal y como hemos definido la integral, en el operador $\displaystyle\int_a^b$ es necesario que $a \leq b$. Para flexibilizar los cálculos, es conveniente admitir la situación inversa.

Definición 4.3.4 *Si f es continua en $[a,b]$, definimos la integral $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ como:*

$$\int_b^a f = -\int_a^b f$$

Esta definición se hace así para que la extensión del operador siga verificando la propiedad de

$$\int_a^b f + \int_b^a f = \int_a^a f = 0$$
$$\int_a^b f + \int_b^a f = \int_a^b f - \int_a^b f = 0$$

A continuación, vamos a dar los enunciados de los teoremas de cambio de variable e integración por partes, pero para integrales definidas. Si utilizamos estos métodos para calcular integrales definidas, es preferible usarlos tal y como los enunciamos a continuación ya que, como veremos en los ejemplos, su aplicación simplifica los cálculos necesarios.

Teorema 4.3.5 (Cambio de variable directo) *Sean g continua en $[a,b]$ y tal que g' existe y es continua, y sea f continua entre $g(a)$ y $g(b)$, entonces:*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\mathrm{d}u$$

Corolario 4.3.6 (Cambio de variable inverso) *Sea f una función continua en $[\alpha, \beta]$. Consideremos una función $g\colon I \to [\alpha, \beta]$ biyectiva, continua y con primera derivada continua. Entonces,*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\mathrm{d}x = \int_{g^{-1}(\alpha)}^{g^{-1}(\beta)} f(g(u))g'(u)\mathrm{d}u$$

Obsérvese que en este teorema hemos incluido la condición necesaria de que el cambio de variable esté dado por una función biyectiva.

Ejemplo 4.3.3 En el ejemplo 4.3.2 hemos calculado el área de un círculo de radio r utilizando una primitiva que se calculó en el tema anterior. Vamos a repetir el mismo cálculo pero realizando el cambio de n la integral definida.

$$\begin{aligned}
A =& 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\mathrm{d}x \\
& \left[\begin{array}{l} x = r\operatorname{sen}\theta \text{ (esta función es biyectiva en } [0, \pi/2]) \\ \mathrm{d}x = r\cos\theta\mathrm{d}\theta \\ x = 0 \to \theta = 0 \\ x = r \to \theta = \pi/2 \end{array}\right. \\
=& 4\int_0^{\pi/2} r^2\cos^2\theta\mathrm{d}\theta = 4r^2\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
=& 4r^2\left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 4r^2\frac{\pi}{4} = \pi r^2
\end{aligned}$$

Podemos observar que al evitar deshacer los cambios, las expresiones que manejamos son más simples. □

Teorema 4.3.7 (Integración por partes) *Sean f y g dos funciones tales que f' y g' son continuas, entonces:*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\mathrm{d}x$$

Ejemplo 4.3.4 Utilizamos el resultado anterior para calcular la siguiente integral definida

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x \log\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$$

Para ello, utilizamos el cambio de variable

$$t = \operatorname{sen} x, \quad \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$$

Los límite de integración se modifican de la siguiente forma: para $x = \pi/6$, el valor de t es $1/2$, mientras que para $x = \pi/2$ el valor de t es 1.

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x \log \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = \int_{1/2}^{1} \log t \, \mathrm{d}t$$

$$\left[\begin{array}{l} u = \log t \to \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{t} \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}t \to v = t \end{array}\right.$$

$$= \Big[t \log t\Big]_{1/2}^{1} - \int_{1/2}^{1} \mathrm{d}t = -\frac{\log(1/2)}{2} - \Big[t\Big]_{1/2}^{1} = \frac{\log 2}{2} - \frac{1}{2}$$

4.3.3. Aplicaciones geométricas

Aunque hemos utilizado el cálculo de áreas de regiones planas para motivar el concepto de integral, debemos tener en cuenta que una integral se identifica con un área solo si el integrando es una función positiva.

TEOREMA 4.3.8 *Si f es una función continua y positiva en el intervalo $[a, b]$, entonces la integral definida $\int_a^b f$ es el valor del área de la región comprendida entre el grafo de f y el eje OX en dicho intervalo.*

A continuación, repasamos otras aplicaciones de la integral para determinar otras magnitudes, como volúmenes, longitudes de curvas o áreas de superficies alabeadas. Otras aplicaciones posibles se encuentran en el campo de la física, para calcular el trabajo o los centros de masas.

Cálculo de volúmenes por secciones. Supongamos que tenemos el sólido acotado por dos planos perpendiculares al eje OX, $X = a$, $X = b$. Supongamos que para cada $x \in [a, b]$ conocemos el área, $A(x)$, de la sección del sólido por el plano $X = x$ y que la función A así definida es continua en $[a, b]$. Si tomamos una partición del intervalo, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, el volumen del sólido se puede aproximar por la suma de los volúmenes de los cilindros de base $A(x_i)$ y altura $(x_i - x_{i-1})$:

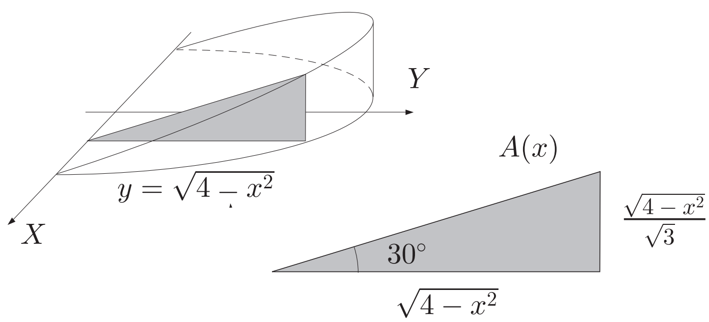
$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

Obviamente, estas expresiones son Sumas de Riemann asociadas a la función $A(x)$, y por lo tanto, podemos afirmar que el volumen exacto es:

$$V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x$$

En algunos casos, el enunciado del problema dará la posición del sólido respecto de los ejes coordenados, pero más frecuentemente, tendremos que elegir nosotros esta posición, de tal forma que sea fácil calcular las áreas $A(x)$.

Ejemplo 4.3.5 Se corta una cuña de un tronco (cilíndrico) de radio 2 dm dando dos cortes con una sierra mecánica que llegan hasta el centro del tronco. Si uno de los cortes se hace perpendicular y el otro formando un ángulo de 30° con el primero, ¿qué volumen tendrá la cuña?



Para hacer el cálculo utilizando el método de las secciones, situamos el sólido como se muestra en la figura. La base de la cuña, perpendicular al eje del tronco, es el interior del semicírculo $y = \sqrt{4 - x^2}$. Al hacer los cortes perpendiculares al eje OX, las secciones son triángulos rectángulos cuya base es $\sqrt{4 - x^2}$ y forma un ángulo de 30° con la hipotenusa. Por lo tanto, su altura es $\sqrt{3}(4 - x^2)$ y el área de la sección es $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(4 - x^2)$. El volumen que queríamos calcular es:

$$V = \int_{-2}^{2} A = \int_{-2}^{2} \frac{4 - x^2}{2\sqrt{3}} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{6} \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{2} = \frac{16}{9}\sqrt{3} \qquad \square$$

Como caso particular, podemos calcular el volumen de *sólidos de revolución* usando el método de los discos. Si consideremos una región plana determinada por el grafo de una función continua f entre a y b que gira alrededor del eje OX, el sólido generado verifica que las secciónes perpendiculares al eje OX, son circulos de radio $f(x)$. Por tanto, el volumen del sólido es:

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 \, \mathrm{d}x$$

Cálculo de volúmenes de revolución por capas. Otra forma de generar un sólido de revolución es girando la región determinada por una función continua en un intervalo $[a, b]$ con $a \geq 0$, alrededor del eje OY. Para aproximar el valor de este volumen, consideremos una partición $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, y los puntos intermedios $x_i^* = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$; el volumen del sólido se puede aproximar por la suma de los volúmenes de los cilindros cuya base es la corona circular de radios x_{i-1} y x_i y cuya altura es $f(x_i^*)$:

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(\pi x_i^2 - \pi x_{i-1}^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \pi f(x_i^*)(x_i + x_{i-i})(x_i - x_{i-i}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^*) x_i^* (x_i - x_{i-i}) \end{aligned}$$

Obviamente, estas expresiones son Sumas de Riemann asociadas a la función $2\pi x f(x)$, que es continua por serlo f; por lo tanto, podemos afirmar que el volumen exacto es:

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,\mathrm{d}x$$

El método de las secciones es adecuado para sólidos que no presentan *perforaciones*, en estos casos será más recomendable utilizar el método de las capas. Para calcular un volumen utilizando cualquiera de los dos métodos, tendremos que situar los ejes de coordenadas de tal forma que el cálculo de las secciones o de las capas sea lo más simple posible.

Longitud de una curva parametrizada. Si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ es una curva parametrizada diferenciable y con derivada continua en $[a, b]$, su longitud viene dada por la siguiente integral:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

La expresión del integrando se denomina *diferencial de longitud*

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

y expresa cómo varía la longitud de la curva respecto de la variación del parámetro.

En particular, la *longitud del grafo de una función* derivable f, en un intervalo $[a, b]$ es:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

Integral de un campo escalar sobre una línea . Si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ es una curva parametrizada diferenciable y con derivada continua en $[a, b]$ y $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un campo escalar continuo, definimos la *integral de f sobre γ* como:

$$\int_C f = \int_a^b f(\gamma(t))\mathrm{d}\ell = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

Esta integral tiene diversas aplicaciones tanto en geometría como en la física. Por ejemplo, es el área lateral de un cilindro cuya base es la curva C y la altura en cada punto está determinada por f. También representa la masa total de un alambre cuya forma está determinada por la curva C y cuya densidad puntual está determinada por f. En el punto siguiente, la usamos para calcular el área de una superficie de revolución.

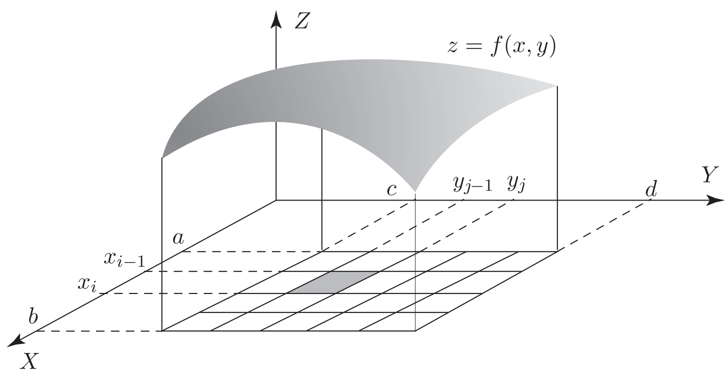
Área de una superficie de revolución. Si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ es una curva parametrizada diferenciable y con derivada continua en $[a, b]$, r es una recta y $f(t)$ es la distancia del punto $\gamma(t)$ a la recta r, entonces el área de la superficie generada al girar la curva alrededor de r es:

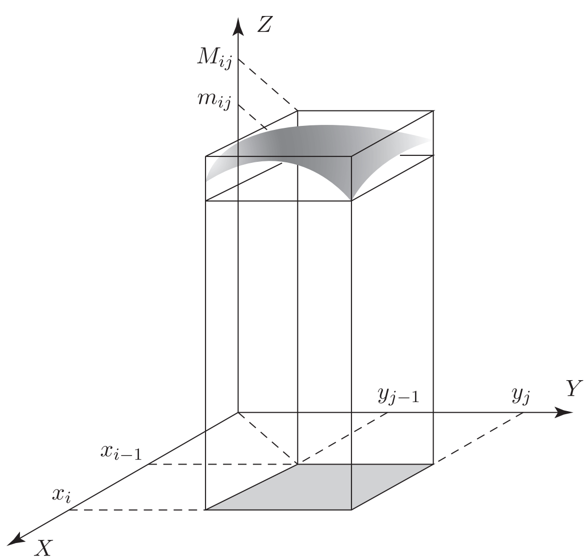
$$A = \int_C 2\pi f = \int_a^b 2\pi f(t)\mathrm{d}\ell = \int_a^b 2\pi f(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

LECCIÓN 4.4

Integración múltiple

Consideremos un campo escalar $f\colon R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y supongamos que f es positiva y acotada en el *rectángulo* $R = [a, b] \times [c, \mathrm{d}]$. De la misma forma que para las funciones de una variable utilizábamos rectángulos, ahora podemos intentar aproximar el volumen de la región que queda entre el grafo de f y el plano XY tomando prismas. La manera más simple de hacerlo es tomando particiones de los intervalos $[a, b]$ y $[c, \mathrm{d}]$ y considerando como base de los prismas los rectángulos que forman:





Las aproximaciones por defecto y por exceso se calculan de forma similar a como hemos hecho en una variable. Basta tomar los valores menor y mayor que toma la función en cada rectángulo. Una *aproximación por defecto* del volumen será la *suma* *inferior* de f

$$L_P = \sum_{i,j} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Una *aproximación por exceso* del volumen será la *suma superior* de f:

$$U_P = \sum_{i,j} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Para mejorar estas aproximaciones basta tomar particiones *más finas* de los intervalos. El campo será integrable cuando estas aproximaciones converjan a un mismo valor. Como ya hemos dicho, en este curso vamos a trabajar con funciones continuas, que en particular son integrables; para ellas, podemos definir las integrales como límites de sumas de Riemmann, igual que hemos hecho para funciones de una variable.

$$\mathcal{R}(f, P, \xi) = \sum_{ij} f(x_i^*, y_j^*)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim \mathcal{R}(f, P_n, \xi_n)$$

en donde P_n es una partición del rectángulo $R = [a,b] \times [c, \mathrm{d}]$ cuya norma converge a 0.

Ejemplo 4.4.1 Consideremos el campo $f(x,y) = 2x + y$ definido en la región $[0,1] \times [0,1]$; este campo es integrable por ser continuo. Para cada m consideremos la partición, P_m, determinada por la siguiente partición del intervalo $[0,1]$: $\{0, {}^1\!/_m, {}^2\!/_m, \dots, {}^m\!/_m = 1\}$; y consideremos la elección de puntos, ξ_m, dada por el vértice superior derecho de cada rectángulo. La correspondiente sucesión de sumas de Riemannn es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(f, P_m, \xi_m) &= \sum_{1\le i,j\le m} \Big(2\frac{i}{m} + \frac{j}{m}\Big)\frac{1}{m^2} = \frac{1}{m^3}\sum_{1\le i,j\le m}(2i+j) \\
&= \frac{2}{m^3}\Big(\sum_{1\le i,j\le m} i\Big) + \frac{1}{m^3}\Big(\sum_{1\le i,j\le m} j\Big) \\
&= \frac{2}{m^2}\Big(\sum_{i=1}^{m} i\Big) + \frac{1}{m^2}\Big(\sum_{j=1}^{m} j\Big) = \frac{3}{m^2}\sum_{i=1}^{m} i \\
&= \frac{3m(m+1)}{2m^2} = \frac{3(m+1)}{2m}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\displaystyle\iint_R (2x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{m\to+\infty} \frac{3(m+1)}{2m} = \frac{3}{2}$ □

Naturalmente, trabajar con dominios rectángulares es un es una restricción demasiado fuerte. En el siguiente resultado, introduce la herramienta para trabajar con campos en cualquier dominio, extendiendo este a un rectángulo.

Teorema 4.4.1 *Sea C un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$ y sea f un campo escalar continuo y acotado en C. Sea R un rectángulo tal que $C \subset R$ y consideremos el campo*

$$\bar{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}) & \text{si } \boldsymbol{x} \in C \\ 0 & \text{si } \boldsymbol{x} \in R \setminus C \end{cases}$$

Entonces, el campo $\bar{f}$ es integrable en R.

Dado que la extensión se hace definiendo el campo como 0 en la parte añadida al dominio, el valor de la integral de ambos campos deberá coincidir. Esto justifica la siguiente definición.

Definición 4.4.2 *Siguiendo las notaciones del teorema anterior, llamamos integral de f en C a:*

$$\iint_C f = \iint_R \bar{f}$$

Con el siguiente resultado establecemos que efectivamente la integral permite calcular el volumen de regiones de tres dimensiones.

Teorema 4.4.3 *Consideremos un campo escalar $f\colon C \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y supongamos que f es positivo y acotado en C. Entonces, la integral $\iint_C f$ es el valor del volumen del sólido comprendido entre el grafo de f en C y el plano XY.*

No vamos a abordar en este curso las integrales de campos de tres o más variables, aunque teóricamente su definición no supone ninguna dificultad. Como veremos a lo largo del tema, el calculo de las integrales múltiples se sustenta en el cálculo de primitivas y en el estudio y transformación de las regiones de integración y por lo tanto, el nivel de dificultad que aporta el aumento de las variables no está en el propio concepto de integral sino en la manipulación de regiones y objetos en el espacio. Por esta razón, en este curso trabajaremos solamente en regiones planas.

Teorema 4.4.4 *Sean f y g campos escalares integrables sobre $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^2$ y $c, k \in \mathbb{R}$.*

1. *Linealidad:* $\displaystyle\iint_{\mathrm{D}} (cf + kg) = c\left(\iint_{\mathrm{D}} f\right) + k\left(\iint_{\mathrm{D}} g\right)$
2. *Aditividad: Si* $\mathrm{D} = \mathrm{D}_1 \cup \mathrm{D}_2$ *y Área*$(\mathrm{D}_1 \cap \mathrm{D}_2) = 0$,

$$\iint_{\mathrm{D}} f = \left(\iint_{\mathrm{D}_1} f\right) + \left(\iint_{\mathrm{D}_2} f\right)$$

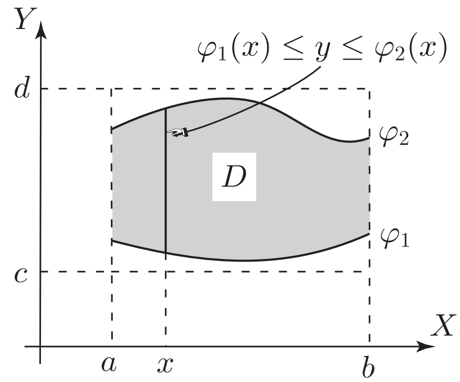


Figura 4.7: Región limitada por dos grafos.

4.4.1. Teorema de Fubini. Consecuencias

El teorema de Fubini, que enunciamos a continuación, demuestra que los conceptos de integral sobre cada dimensión son coherentes:

TEOREMA 4.4.5 (DE FUBINI) *Sea $f\colon R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar integrable en el rectángulo $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Entonces:*

$$\iint\limits_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

EJEMPLO 4.4.2 Calculemos la integral $\iint_R (2x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ con $R = [0,1] \times [0,1]$, que estudiamos en la sección anterior haciendo uso de sumas de Riemannn.

$$\begin{aligned}
\iint_R (2x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (2x+y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left[x^2 + yx \right]_{x=0}^1 \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 (1+y)\mathrm{d}y = \left[y + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^1 = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 4.4.3 Supongamos que $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^2$ está limitado por los grafos de las funciones $\varphi_1\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ y $\varphi_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tal y como se muestra en la figura 4.7, entonces, considerando la función $\bar{f}$ definida en el teorema 4.4.1:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathrm{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_a^b \left(\int_c^{\mathrm{d}} \bar{f}(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b \left(\int_c^{\varphi_1(x)} 0\cdot\mathrm{d}y + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_{\varphi_1(x)}^{\mathrm{d}} 0\cdot\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Por ejemplo, podemos calcular el volumen de la cuña descrita en el ejemplo 4.3.5 utilizando una integral doble y la fórmula anterior como sigue. El sólido es la región que queda entre el grafo del campo $f(x,y) = y\sqrt{3}$ y el plano OX en el dominio D definido por $-2 \le x \le 2$, $0 \le y \le \sqrt{4-x^2}$.

$$\begin{aligned}V = \iint_{\mathrm{D}} \sqrt{3}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-2}^{2}\left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{3}y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_{-2}^{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-2}^{2}(4-x^2)\mathrm{d}x\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{16}{3}\sqrt{3}\end{aligned}$$

□

4.4.2. Teorema de cambio de variable

El teorema de Fubini es la herramienta fundamental para el cálculo de integrales múltiples, sin embargo, hemos podido observar que su aplicación no es sencilla si la región de integración no es rectangular. Los cambios de variable nos van a permiter utilizar descripciones más simples de una región. Por ejemplo, mientras que un círculo de radio a centrado en $(0,0)$ en coordenadas cartesians se describe por $-\sqrt{a^2-x^2} \le y \le \sqrt{a^2-x^2}$, $-a \le x \le a$, en coordenadas porlares se describe simplemente por $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

Para hacer esta descripción alternativa, hemos usado la aplicación

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

que convierte las *coordenadas polares* en *coordenadas cartesianas*, según se muestra en la figura 4.8. Esta aplicación tiene su origen e imagen en $\mathbb{R}^2$, es decir, es un *campo vectorial*. Para poder enunciar el teorema de cambio de variable necesitamos introducir algunos conceptos previos.

DEFINICIÓN 4.4.6 *Un campo vectorial es una aplicación cuyo dominio está contenido en un espacio $\mathbb{R}^n$ y su imagen lo está en otro espacio $\mathbb{R}^m$; es decir, responde*

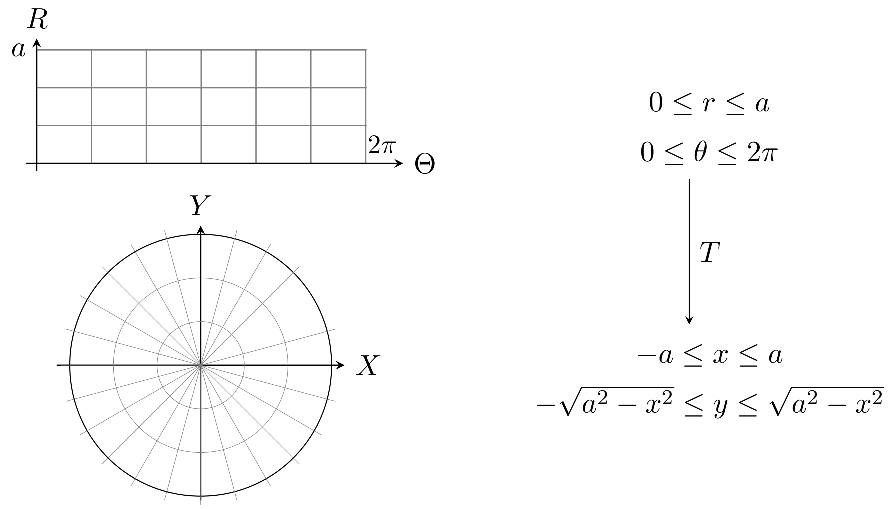


Figura 4.8: Cambio de variable a coordenadas polares.

al esquema $\boldsymbol{f}\colon \mathrm{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*. Un campo vectorial está determinado por* m *campos escalares:* $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_m)$*.*

En el teorema de cambio de variable, utilizaremos campos vectoriales continuos y diferenciables, es decir, sus componentes son campos escalares continuos y diferenciables. La *diferencial* de estos campos se puede estudiar formalmente siguiendo un esquema similar al utilizado para los campos escalares, llegando a la conclusión de que la matriz de esta aplicación lineal se puede expresar a partir de los gradientes de sus componentes según establece la siguiente definición. Los detalles de estas comprobaciones quedan fuera de los objetivos del curso y de las necesidades de este tema.

Definición 4.4.7 *Si* $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ *es diferenciable en* $\boldsymbol{a} \in \mathrm{Dom}(f)$*, llamamos* matriz jacobiana *de* $\boldsymbol{f}$ *en* $\boldsymbol{a}$ *a la matriz:*

$$J\boldsymbol{f}(a) = \begin{pmatrix} \mathrm{D}_1 f_1(\boldsymbol{a}) & \mathrm{D}_2 f_1(\boldsymbol{a}) & \ldots & \mathrm{D}_n f_1(\boldsymbol{a}) \\ \mathrm{D}_1 f_2(\boldsymbol{a}) & \mathrm{D}_2 f_2(\boldsymbol{a}) & \ldots & \mathrm{D}_n f_2(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{D}_1 f_m(\boldsymbol{a}) & \mathrm{D}_2 f_m(\boldsymbol{a}) & \ldots & \mathrm{D}_n f_m(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\boldsymbol{a}) \\ \nabla f_2(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

De esta forma, tenemos los elementos necesarios para enunciar el teorema de cambio de variable.

Teorema 4.4.8 *Sea* $F\colon T(\mathrm{D}) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *un campo escalar continuo, siendo* D *cerrado y acotado. Sea* $T : \mathrm{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *un campo vectorial biyectivo, salvo en* *un subconjunto de área nula, diferenciable y con las derivadas parciales continuas. Entonces:*

$$\iint_{T(\mathrm{D})} F = \iint_{\mathrm{D}} (F \circ T)|\det(JT)|$$

Mientras que para las integrales de una variable, este teorema se utiliza fundamentalmente para el cálculo de primitivas para simplificar la función a integrar, en la integración múltiple lo utilizaremos fundamentalmente para describir de forma más sencilla la región de integración.

Ejemplo 4.4.4 Hemos mostrado más arriba el cambio a coordenadas polares:

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$$

Veamos como se transforma una integral al aplicar este cambio de variables. En primer lugar, calculamos el jacobiano de T:

$$JT(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el valor absoluto del determinante es: $|\det(JT(r,\theta))| = |r|$; y la fórmula de cambio de variable queda:

$$\iint_{T(\mathrm{D})} F(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathrm{D}} F(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)|r|\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

En la integral de la izquierda, $T(\mathrm{D})$ representa a la región de integración descrita en coordenadas cartesians, mientras que D, en la integral de la derecha, representa a la misma región pero descrita en coordenadas polares. □

Los campos vectoriales son la herramienta fundamental para expresar los cambios de variables cuando trabajamos con varias simultáneamente y son un modelo fundamental en muchas áreas de la física. En muchas ocasiones, necesitaremos aplicar varios campos de forma sucesiva y por eso es necesario saber trabajar con este tipo de combinaciones y conocer sus propiedades. En particular, necesitaremos conocer todas las propiedades algebraicas de la diferenciabilidad de campos vectoriales, que por otra parte son inmediatas a partir de las correspondientes propiedades de los campos escalares. Enunciamos solamente la *regla de la cadena*, en un resultado que generaliza todos los resultados similares que hemos visto anteriormente.

4.4.3. Aplicaciones

Tal y como ocurre con las funciones de variable real, las aplicaciones de la integral doble no se reducen al cálculo de volúmenes. Son múltiples las magnitudes físicas, matemáticas y de otras áreas que pueden ser modeladas y calculadas con este tipo de integrales. A modo de ejemplo, mostramos dos aplicaciones geométricas.

Áreas de regiones planas. La integral doble nos da una forma sencilla de representar el área de una región plana arbitraria:

$$\text{Área}(\mathrm{D}) = \iint\limits_{\mathrm{D}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

El uso de las técnicas presentadas en las secciones anteriores nos permitirá abordar el cálculo del área de regiones cuyas representaciones como integrales de una variable sería más compleja.

Áreas de grafos. En la lección anterior hemos podido calcular el área de superficies que se puedan describir como figuras de revolución. Para tratar con superficies más generales, debemos hacer uso de las integrales dobles. Por ejemplo, el área de la superficie del grafo de un campo escalar diferenciable y con parciales continuas en un dominio D es

$$\iint\limits_{\mathrm{D}} \sqrt{1 + (\mathrm{D}_1 f(x,y))^2 + (\mathrm{D}_2 f(x,y))^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

La expresión del integrando se conoce como *diferencial de superficie* y juega un papel similar al de la diferencial de longitud.

Integrales de línea. Una de las aplicaciones fundamentales la integral en la física es el cálculo del trabajo que realiza un campo (vectorial) de fuerzas al desplazarse por una curva. Esta magnitud se modeliza con lo que se conoce como *integral de línea*, que definimos a continuación.

DEFINICIÓN 4.4.9 *Sea $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial y $\gamma(t)$, $t \in [a,b]$, una curva en $\mathbb{R}^2$. Llamamos* integral de línea de $\boldsymbol{F}$ sobre la curva C *o* circulación de $\boldsymbol{F}$ a través de C *a:*

$$\int_C \boldsymbol{F} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (F_1(x(t),y(t))x'(t) + F_2(x(t),y(t))y'(t))\,\mathrm{d}t$$

Si la curva C es cerrada, es decir $\gamma(a) = \gamma(b)$, esta integral se denota: $\oint_C \boldsymbol{F}$.

De forma más abreviada, la integral de línea se suele expresar igualmente como sigue:

$$\int_C \boldsymbol{F} = \int_C F_1(x,y)\mathrm{d}x + F_2(x,y)\mathrm{d}y$$

Las integrales de línea y las integrales dobles están relacionadas por el teorema de Green, que enunciamos a continuación.

Teorema 4.4.10 (de Green) *Sea C es una curva regular a trozos, cerrada y simple de $\mathbb{R}^2$ recorrida en el sentido contrario a las agujas del reloj y sea* D *la región interior de esta curva. Entonces:*

$$\int_C \boldsymbol{F} = \iint_{\mathrm{D}} (\mathrm{D}_1 F_2 - \mathrm{D}_2 F_1)$$

Este resultado tiene múltiples aplicaciones, de las cuales destacamos la siguiente.

Corolario 4.4.11 *Si C es una curva regular, cerrada y simple, entonces el área de la región encerrada por C es*

$$A = \left| \frac{1}{2} \int_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x \right|.$$

El signo del integrando depende del sentido en el que se recorre la curva. El valor absoluto elimina este signo, de forma que no es necesario preocuparse del sentido de recorrido en la parametrización elegida.

Relación de ejercicios (I)

1. Utilice el cambio de variable $t = \mathrm{e}^x$ y las fórmulas de derivación vistas en el tema para calcular la integral

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{1 - \mathrm{e}^{2x}} \, \mathrm{d}x$$

2. Un método sencillo para calcular las integrales $\int \operatorname{sen}^n x \, \mathrm{d}x$ consiste en utilizar los números complejos. Para ello, expresamos el integrando en términos de senos y cosenos de múltiplos de x y obtenemos una integral inmediata.

   Utilice este método para calcular $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \, \mathrm{d}x$

3. En algunas integrales irracionales que se resuelven aplicando la sustitución $t = \operatorname{sen} x$, ocurre que al deshacer el cambio nos encontramos en la solución con expresiones del tipo $\cos(\operatorname{arc\,sen} x)$. En estos casos, resulta conveniente escribir la expresión en forma irracional. Para ello, sólo necesitamos aplicar propiedades de las funciones trigonométricas. Por ejemplo, para obtener otra expresión de $\cos(\operatorname{arc\,sen} x)$ aplicamos el teorema fundamental de la trigonometría ($\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$) y obtenemos

$$\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen} x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

   Aplique este procedimiento para obtener otra forma de escribir la expresión $\operatorname{sen}(2 \operatorname{arc\,cos} x)$ sin utilizar funciones trigonométricas.

4. Utilice integración por partes para calcular $\displaystyle\int \log^2 x \, \mathrm{d}x$.

5. Una misma integral se puede calcular aplicando distintos métodos de integración y todos ellos deben proporcionar la misma primitiva, salvo constante. Calcule la integral $\operatorname{sen}^2 x \, \mathrm{d}x$ aplicando los siguientes métodos:

   a) Aplicando los cambios sugeridos para las integrales trigonométricas.

   b) Integración por partes y fórmulas trigonométricas.

6. Las expresiones $\frac{1}{x}$ y $\frac{2}{2x}$ son iguales. Sin embargo, si calculamos la integral (inmediata) de cada una de ellas, obtenemos los siguientes resultados:

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \log x + C \qquad \text{y} \qquad \int \frac{2}{2x} \, \mathrm{d}x = \log(2x) + C$$

   ¿Son esos dos resultados realmente distintos?

7. Para calcular la primitiva de una expresión con parámetros se procede como si los parámetros fuesen números. Si en una integral hay varias variables entonces todas ellas, salvo la indicada, se consideran parámetros. Calcule las siguientes integrales prestando especial atención al indicador de la variable ($\mathrm{d}x$ o $\mathrm{d}y$).

$$\begin{array}{llllll}
(1) & \displaystyle\int \lambda x \,\mathrm{d}x & (2) & \displaystyle\int x \,\mathrm{d}y & (3) & \displaystyle\int 2xy^2 \,\mathrm{d}x \\
(4) & \displaystyle\int 2xy^2 \,\mathrm{d}y & (5) & \displaystyle\int \frac{x}{y^2+x^4} \,\mathrm{d}x & (6) & \displaystyle\int \frac{x}{y^2+x^4} \,\mathrm{d}y
\end{array}$$

8. Calcule las siguientes integrales:

$$\begin{array}{llll}
(1) & \displaystyle\int (4x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}x - \pi) \,\mathrm{d}x & (2) & \displaystyle\int \sqrt[3]{x^2} \,\mathrm{d}x \\
(3) & \displaystyle\int \cos x \operatorname{sen}^3 x \,\mathrm{d}x & (4) & \displaystyle\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x \\
(5) & \displaystyle\int x \operatorname{sen}(x^2) \,\mathrm{d}x & (6) & \displaystyle\int \frac{x}{1+x^4} \,\mathrm{d}x \\
(7) & \displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^4} \,\mathrm{d}x & (8) & \displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}} \,\mathrm{d}x \\
(9) & \displaystyle\int x^2 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x & (10) & \displaystyle\int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x \\
(11) & \displaystyle\int \log x \,\mathrm{d}x & (12) & \displaystyle\int x^5 \operatorname{sen} x^3 \,\mathrm{d}x \\
(13) & \displaystyle\int \cos x \ \log \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x & (14) & \displaystyle\int \mathrm{e}^x \ \operatorname{tg} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\
(15) & \displaystyle\int \frac{3}{2x-7} \,\mathrm{d}x & (16) & \displaystyle\int \frac{2}{(x-3)^5} \,\mathrm{d}x \\
(17) & \displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+x+1} \,\mathrm{d}x & (18) & \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^3} \,\mathrm{d}x \\
(19) & \displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x & (20) & \displaystyle\int \frac{1}{1-\operatorname{sen} x} \,\mathrm{d}x \\
(21) & \displaystyle\int \sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x & (22) & \displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} \,\mathrm{d}x \\
(23) & \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}} \,\mathrm{d}x & (24) & \displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x
\end{array}$$

9. Distinga si las siguientes expresiones son ecuaciones diferenciales y determine el tipo (ordinarias o en derivadas parciales) y el orden.

$$\begin{array}{llll}
(a) & x^2 + 3y^2 = 5xy & (b) & x^2 + 3y'' - 5(y')^3 = 0 \\
(c) & 1 + y + y'' + y''' = 0 & (\mathrm{d}) & xy - y' \operatorname{sen} x \\
(\mathrm{e}) & x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \operatorname{sen} x = \mathrm{e}^x & (f) & 5\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3xyz
\end{array}$$

10. Consideremos la ecuación $y' + 2y = 0$. Se pide:

   a) Estudiar la existencia y unicidad de soluciones.

b) Comprobar que la función $y = Ce^{-2x}$ es una solución general.

c) Determinar la solución particular que pasa por el punto $(0, 3)$.

11. Compruebe que las funciones de la forma $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ son soluciones de la ecuación $y'' - y = 0$ y halle soluciones para:

    a) el problema de condiciones iniciales: $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

    b) el problema de condiciones de *frontera*: $y(0) = 0, y(1) = 1$.

    c) el problema de condiciones *generales*: $y(0) = 0, y''(0) = 0$.

    d) el problema de condiciones *generales*: $y(0) = 0, y''(0) = 1$.

12. Compruebe que la ecuación $xyy' - \log x = 0$ es de variables separables y resuélvala.

13. Consideremos la ecuación diferencial $y' = y^2 - 4$. Se pide

    a) Estudiar la existencia y unicidad de soluciones

    b) Resolver la ecuación y obtener la solución general.

    c) Calcular la solución particular que pasa por $(0, 0)$.

    d) Calcular las soluciones singulares que pasan por $(0, 2)$ y $(0, -2)$.

14. Compruebe que la ecuación $(2x - 3y) + (2y - 3x)y' = 0$ es exacta y resuélvala.

15. Consideremos la ecuación

    $$(y^2 - x) + 2yy' = 0$$

    Determine una función $\lambda(x)$ que multiplicada a la ecuación anterior la convierta en una ecuación exacta. Resuelva la ecuación resultante. ¿Qué relación hay entre las soluciones halladas y las de la ecuación propuesta?

16. Resuelva la ecuación diferencial lineal $y' + \frac{y}{x} = 3x + 4$.

17. Estudie la seccion 4.2.4, compruebe que $y' = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$ es una ecuación homogénea y resuélvala.

18. Estudie la seccion 4.2.4, identifique la ecuación $y' = \operatorname{tg}^2(x + y)$ y resuélvala.

19. Estudie la seccion 4.2.4 para saber identificar y resolver las siguientes ecuaciones:

    a) $y' = \dfrac{x + y}{2x}$ *b*) $y' = \dfrac{1 - x - y}{x + y}$ *c*) $y' = \dfrac{x + 2y + 1}{2x + y + 3}$

20. Estudie la seccion 4.2.4, compruebe que la ecuación $y' + \frac{y}{x} = x\sqrt{y}$ es de Bernouilli y resuélvala.

21. Estudie la seccion 4.2.4, compruebe que $y' = 2x^2 + \dfrac{1}{x}y - 2y^2$ es una ecuación de Ricatti y que $\varphi(x) = x$ es una solución; resuelva la ecuacion.

22. Estudie la sección 4.2.5 y halle la familia de curvas ortogonal a

$$x^2 + y^2 = C.$$

23. Entre los modelos estudiados en el tema, determine el tipo de ecuación diferencial e indique la forma de resolverla:

(a) $y' = \operatorname{sen}(x+y)$	(b) $\mathrm{e}^x yy' = \mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{-2x-y}$
(c) $y' + 2y = \operatorname{sen} x$	(d) $2y^2\mathrm{e}^{xy^2} + 2xyy'\mathrm{e}^{xy^2} = 0$
(e) $(2+x)y' = 3y$	(f) $y' + 3xy = xy^3$
(g) $y' = \dfrac{3x+2y}{x}$	(h) $2\cos(2x-y) - y'\cos(2x-y) = 0$
(i) $y' = -2 - y + y^2$	(j) $y' = 2x^2 + \dfrac{1}{x}y - 2y^2$
(k) $y' - y = x^3\sqrt[3]{y}$	(l) $y' = \dfrac{x-y-3}{x+y-1}$
(m) $y' = 1 + \mathrm{e}^{y-x+5}$	(n) $(x-1)y' + y = x^2 - 1$
(o) $y' = \dfrac{x^2+y^2}{2xy}$	(p) $y' + 2xy = 2x$

24. Calcule la siguiente integral utilizando los resultados 4.3.5, 4.3.6 ó 4.3.7, si es necesario aplicar cambios de variable o integración por partes.

$$\int_0^{\pi^2/4} \operatorname{sen}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x,$$

25. Calcular el área de las regiones acotados delimitadas por las gráficas de las funciones $f(x) = x^4 - 9x^2 + 10$ y $g(x) = x^2 + 1$.

26. Determine la función $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $x \in [0,4]$, en donde:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 8 - 2x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Compruebe que se verifica la conclusión dada por el teorema fundamental del cálculo (teorema 4.1.3).

27. Consideremos la región comprendida entre la curva $y = x^2$ y la recta $y = x+2$. Dibuje la región y utilice los modelos de la sección 4.3.3 para calcular los siguientes volúmenes.

a) Volumen de revolución que se genera al girar la región alrededor del eje $X = 2$.

b) Volumen de revolución que se genera al girar la región alrededor del eje $Y = -1$.

28. Halle la distancia recorrida por un móvil entre los instantes $t = 0$ y $t = 4$ si su posición viene determinada por las ecuaciones:

$$x(t) = \frac{t^2}{2}, \qquad y(t) = \frac{1}{3}(2t+1)^{3/2}$$

29. Halle la integral doble de los campos indicados:

a) $f(x,y) = (x+2y)^2$ sobre $R = [-1,2] \times [0,2]$.

b) $f(x,y) = xy^3 \mathrm{e}^{x^2y^2}$ sobre $R = [1,3] \times [1,2]$.

30. Dibuje la región sobre la que se integra, intercambie el orden de integración y evalúe la integral

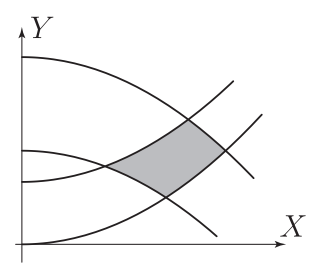
$$\int_0^1 \int_x^1 xy \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

31. Utilice el cambio de variable a coordenadas polares para hallar el área encerrada por la cardioide de ecuación $\rho = a(1+\cos\theta)$.

32. Exprese la curva $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$, $x \ge 0$, utilizando coordenadas polares y dibújela. Exprese la integral $\iint\limits_{\mathrm{D}} f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ utilizando coordenadas polares.

33. Consideramos la región, $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^2$ delimitada por las parábolas

$$y = x^2 + 4 \quad , \quad y = x^2,$$
$$y = 6 - x^2 \quad , \quad y = 12 - x^2$$



a) Defina una biyección $T\colon [6,12] \times [0,4] \to \mathrm{D}$.

b) Utilice el cambio T para calcular la integral $\iint_{\mathrm{D}} xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

34. Consideremos la región R limitada por la curva $x(t) = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y(t) = a(1-\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, y el eje OX. Mediante un parámetro $s \in [0,1]$ parametrice cada segmento que une los puntos $(x(t),0)$ y $(x(t),y(t))$. Con las variables t y s defina un cambio de variable que transforme la región de integración en un rectángulo. Calcule $\iint\limits_{R} y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.

35. A partir del cambio de variable a coordenadas polares describa un cambio de variable adecuado para calcular el área encerrada por la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

36. A partir del cambio de variable a coordenadas polares describa un cambio de variable adecuado para calcular el área encerrada por la curva

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 + 6x + 10y - 11 = 0$$

37. Calcule la superficie del paraboloide $z = x^2 + y^2$ sobre el círculo $\mathrm{D} = \{(x, y)^2 \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

38. Calcule la integral de línea $\int_C xy^4 \, \mathrm{d}x + x^2y^3 \, \mathrm{d}y$, en donde C es una curva que une los puntos $O = (0, 0)$ y $A = (1, 1)$ y verifica $y^3 = x^2$.

39. Utilice el *teorema de Green* (página 278) para calcular la integral

$$\oint_C y^3 \mathrm{d}x + (x^3 + 3xy^2) \mathrm{d}y$$

en donde C es la curva que va del punto $(1, 1)$ al punto $(0, 0)$ siguiendo la recta $Y = X$ y vuelve al punto $(1, 1)$ siguiendo la curva $Y = X^3$.

Relación de ejercicios (II)

1. Para calcular algunas integrales del tipo $\int f(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$ se puede utilizar el cambio de variable $t = \mathrm{e}^x$. Aplique este cambio a las siguientes integrales y determine el tipo de integral resultante:

$$(a) \quad \int \frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x \qquad (b) \quad \int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^x+1)}\,\mathrm{d}x$$

2. Calcular la integral $\frac{\log x}{x}\mathrm{d}x$ aplicando los siguientes métodos:

   a) Integración inmediata o cambio de variable directo.

   b) Integración por partes.

3. Calcule las siguientes integrales utilizando los métodos de integración inmediata o por cambio de variable directo:

$$\begin{array}{llll}
(1) & \int \mathrm{d}x & (2) & \int 27\,\mathrm{d}x \\
(3) & \int 4x^5\,\mathrm{d}x & (4) & \int (4x^2-3x+1)\,\mathrm{d}x \\
(5) & \int (2x^2-5)^3\,\mathrm{d}x & (6) & \int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \\
(7) & \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x & (8) & \int \frac{3x^5}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\
(9) & \int (3x+4)^{2007}\,\mathrm{d}x & (10) & \int \frac{\mathrm{d}x}{(3x+4)^4} \\
(11) & \int x(3x^2-5)^7\,\mathrm{d}x & (12) & \int \sqrt[5]{5x+6}\,\mathrm{d}x \\
(13) & \int \frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x & (14) & \int \frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}}{4+x^2}\,\mathrm{d}x \\
(15) & \int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x & (16) & \int a^{2x}\,\mathrm{d}x \\
(17) & \int (\mathrm{e}^{2x}+2)^5\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x & (18) & \int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}} \\
(19) & \int \frac{8x^2}{x^3-2}\,\mathrm{d}x & (20) & \int \frac{3x^2-4x}{x^3-2x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
(21) & \int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{tg} x} & (22) & \int x^2\cos(x^3-7)\,\mathrm{d}x \\
(23) & \int \cos 3x\,\mathrm{e}^{\operatorname{sen} 3x}\,\mathrm{d}x & (24) & \int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\
(25) & \int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}\,\mathrm{d}x & (26) & \int \frac{\operatorname{senh}\log x}{x}\,\mathrm{d}x
\end{array}$$

4. Calcule las siguientes integrales utilizando el método de integración por partes:

$$\begin{array}{llll}
(1) & \displaystyle\int x \operatorname{sen} 5x \, \mathrm{d}x & (2) & \displaystyle\int x^2 \log(x) \, \mathrm{d}x \\
(3) & \displaystyle\int x \operatorname{arc\,tg} x \, \mathrm{d}x & (4) & \displaystyle\int x^3 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \\
(5) & \displaystyle\int x^2 \, \log x \, \mathrm{d}x & (6) & \displaystyle\int x^3 \cos x^2 \\
(7) & \displaystyle\int x^3 \sqrt{4 - x^2} \, \mathrm{d}x & (8) & \displaystyle\int \frac{x^3 \, \mathrm{d}x}{\sqrt[3]{9 - x^2}} \\
(9) & \displaystyle\int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x & (10) & \displaystyle\int \cos(\log x) \, \mathrm{d}x \\
(11) & \displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} x \, \mathrm{d}x & (12) & \displaystyle\int \operatorname{arc\,sen}(x) \, \mathrm{d}x
\end{array}$$

5. Calcule las siguientes integrales aplicando un cambio de variable directo:

$$(1) \quad \int \frac{\log \log x}{x} \, \mathrm{d}x \qquad (2) \quad \int x \cos^2 x^2 \, \mathrm{d}x$$

6. Calcule las siguientes integrales del tipo $\displaystyle\int f(\mathrm{e}^x) \, \mathrm{d}x$:

$$\begin{array}{llllll}
(1) & \displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x + 1}} & (2) & \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x}} & (3) & \displaystyle\int (\mathrm{e}^{2x} + 2)^5 \mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x \\
(4) & \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \mathrm{e}^{2x}}} \, \mathrm{d}x & (5) & \displaystyle\int \frac{-\,2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} - 1} \, \mathrm{d}x & (6) & \displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x - 3\mathrm{e}^{2x}}{1 + \mathrm{e}^x} \, \mathrm{d}x
\end{array}$$

7. Para calcular algunas integrales del tipo $\displaystyle\int f(\sqrt{x}) \, \mathrm{d}x$ puede resultar útil aplicar el cambio de variable $t = \sqrt{x}$. Utilice este cambio para calcular las siguientes integrales:

$$(1) \quad \int \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x \qquad (2) \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sqrt{x} - 1}} \qquad (3) \quad \int (1 - x^2)\sqrt{x} \, \mathrm{d}x$$

8. Calcule las siguientes integrales racionales:

$$\begin{array}{llll}
(1) & \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 1} & (2) & \displaystyle\int \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 2x - 8} \, \mathrm{d}x \\
(3) & \displaystyle\int \frac{2x^3 + x^2 + 4}{x^2 + 4} \, \mathrm{d}x & (4) & \displaystyle\int \frac{3x + 5}{x^3 - x^2 - x + 1} \, \mathrm{d}x \\
(5) & \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2 - 2x + 1} & (6) & \displaystyle\int \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - x^2 + x - 1} \, \mathrm{d}x \\
(7) & \displaystyle\int \frac{2x^2 + 2x - 2}{x^3 + 2x} \, \mathrm{d}x & (8) & \displaystyle\int \frac{3x^3 + 3x^2 - 5x + 7}{x^4 - 1} \, \mathrm{d}x \\
(9) & \displaystyle\int \frac{x + 3}{x^2 - 5x + 7} \, \mathrm{d}x & (10) & \displaystyle\int \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{(x^2 - x + 1)^2} \, \mathrm{d}x \\
(11) & \displaystyle\int \frac{x + 4}{(x^2 - x + 1)^2} \, \mathrm{d}x & (12) & \displaystyle\int \frac{3x^5 + 10x^4 + 32x^3 + 43x^2 + 44x + 36}{(x^2 + 4x + 4)(x^4 + 8x^2 + 16)} \, \mathrm{d}x
\end{array}$$

9. Utilice los números complejos para calcular las siguientes integrales trigonométricas:

$$(1)\quad \int \operatorname{sen}^4 x \,\mathrm{d}x \qquad (2)\quad \int \cos^5 x \,\mathrm{d}x \qquad (3)\quad \int \cos^6 x \,\mathrm{d}x$$

10. Calcule las siguientes integrales trigonométricas.

$$\begin{array}{llllll}
(1) & \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x & (2) & \displaystyle\int \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x \,\mathrm{d}x & (3) & \displaystyle\int \frac{\cos x \,\mathrm{d}x}{\operatorname{sen}^3 x + 2\cos^2 x \operatorname{sen} x} \\
(4) & \displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x \,\mathrm{d}x & (5) & \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} & (6) & \displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)\cos x \,\mathrm{d}x \\
(7) & \displaystyle\int \sec x \,\mathrm{d}x & (8) & \displaystyle\int \sec x \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x & (9) & \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x - \operatorname{sen} x}
\end{array}$$

11. Escriba las siguientes expresiones sin utilizar funciones trigonométricas:

$$\begin{array}{llll}
(1) & \operatorname{sen}(\operatorname{arc}\cos x) & (2) & \operatorname{sen}^2(2 \operatorname{arc}\cos x) \\
(3) & \cos(2 \operatorname{arc}\operatorname{sen} x) & (4) & \operatorname{senh}(\operatorname{argcosh} x)
\end{array}$$

12. Resuelva las siguientes integrales irracionales.

$$\begin{array}{llll}
(1) & \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{28-12x-x^2}} & (2) & \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2-4x+4}} \\
(3) & \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+4x-4}} & (4) & \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}
\end{array}$$

13. Calcule las siguientes integrales

$$\begin{array}{llll}
(1) & \displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x^2}\,\mathrm{d}x & (2) & \displaystyle\int \operatorname{tg}^4 x \,\mathrm{d}x \\
(3) & \displaystyle\int \frac{\operatorname{arc}\operatorname{tg} x}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x & (4) & \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{x+2}} \\
(5) & \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x \,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} & (6) & \displaystyle\int \operatorname{arc}\operatorname{tg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x \\
(7) & \displaystyle\int \log\left(x\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x & (8) & \displaystyle\int \frac{x}{a^2+x^4}\,\mathrm{d}x \\
(9) & \displaystyle\int 3x^2y + 3xy^2 - xy \,\mathrm{d}x & (10) & \displaystyle\int 3x^2y + 3xy^2 - xy \,\mathrm{d}y \\
(11) & \displaystyle\int x \operatorname{sen}(x^2y)\,\mathrm{d}x & (12) & \displaystyle\int x \operatorname{sen}(x^2y)\,\mathrm{d}y \\
(13) & \displaystyle\int x \operatorname{sen}(xy)\,\mathrm{d}x & (14) & \displaystyle\int x \operatorname{sen}(xy)\,\mathrm{d}y \\
(15) & \displaystyle\int \frac{\log x^2}{x}\,\mathrm{d}x & &
\end{array}$$

14. Compruebe que las funciones de la forma $y = c_1 x + c_2 x \log x$ son soluciones de la ecuación $x^2 y'' - xy' + y = 0$ y proporcione una solución para el problema de condiciones iniciales: $y(1) = 3, y'(1) = -1$.

15. Compruebe que la función $y = C_1 \operatorname{sen} 3x + C_2 \cos 3x$ es una solución general de la ecuación $y'' + 9y = 0$ y proporcione la solución particular que pasa por el punto $x = \pi/6$, $y = 2$, $y' = 1$.

16. Compruebe que la función $y = C_1 + C_2 \log x$ es una solución general de la ecuación $xy'' + y' = 0$ y proporcione la solución particular que pasa por el punto $x = 2$, $y = 0$, $y' = 1/2$.

17. Compruebe que las funciones de la forma $y = c_1x^2 + c_2x^4 + 3$ son soluciones de la ecuación $x^2y'' - 5xy' + 8y = 24$. Encontrar si es posible una solución para los siguiente problemas asociados a esta ecuación

(a) $y(0) = 2, y'(0) = 1$	(b) $y(-1) = 0, y(1) = 4$
(c) $y(1) = 1, y'(1) = 2$	(d) $y(0) = 1, y(1) = 2$
(e) $y(0) = 3, y(1) = 2$	(f) $y(1) = 3, y(2) = 15$

18. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

$y' = \dfrac{x}{y}$	$y' = \dfrac{x^2+2}{3y^2}$
$(2+x)y' = 3y$	$xy' = y$
$yy' = \operatorname{sen} x$	$y'\sqrt{1-4x^2} = y$
$y'\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} = 0$	$\dfrac{y'y}{\log x} = \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$
$y' = \exp(3x+2y)$	$e^x yy' = e^{-y} + e^{-2x-y}$

19. Entre los siguientes apartados, encuentre las ecuaciones diferenciales exactas que haya y resuélvalas:

$2y^2e^{xy^2} + 2xyy'e^{xy^2} = 0$	$(4x^3 - 6xy^2) + (4y^3 - 6xy)y' = 0$
$\frac{1}{x^2+y^2}(xy' - y) = 0$	$(y + (x + \operatorname{tg} xy)y')e^y \cos xy = 0$
$(x + yy')\exp(-x^2 - y^2) = 0$	$2\cos(2x - y) - y'\cos(2x - y) = 0$
$\frac{1}{(x-y)^2}(y^2 - x^2y') = 0$	$(3y^2 + 10xy^2) + (6xy - 2 + 10x^2y)y' = 0$
$ye^x + e^xy' = 0$	

20. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden:

$y' + 2\frac{y}{x} = 3x + 1$	$y' = e^x - y$
$y' + 2y = \operatorname{sen} x$	$y' - y = \cos x$
$y' + 2xy = 2x$	$(3y + \operatorname{sen} 2x) - y' = 0$
$(x-1)y' + y = x^2 - 1$	$y' + 5y = e^{5x}$

21. Compruebe que las siguientes ecuaciones diferenciales son homogéneas y resuélvalas:

$$y' = \frac{2x+y}{y} \qquad y' = \frac{x-y}{x+y}$$
$$y' = \frac{x^2+y^2}{2xy} \qquad y' = \frac{3x+2y}{x}$$

22. Resuelva las siguientes ecuaciones utilizando un cambio de variable:

$$y' = (x+y+1)^2 \qquad y' = \operatorname{tg}^2(x+y)$$
$$y' = 2+\sqrt{y-2x+3} \qquad y' = \operatorname{sen}(x+y)$$
$$y' = 1+\mathrm{e}^{y-x+5} \qquad y' = \frac{x-y-3}{x+y-1}$$
$$y' = \frac{x+y-6}{x-y}$$

23. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de Bernouilli:

$$y'+3xy = xy^3 \qquad y'+2xy = xy^2 \qquad y'+\tfrac{y}{x} = xy^2$$
$$y'-y = x^3\sqrt[3]{y} \qquad yy'-2y^2 = \mathrm{e}^x$$

24. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de Riccati utilizando la solución particular dada:

$$y' = -2-y+y^2,\ \varphi(x) = 2 \qquad y' = \mathrm{e}^{2x}+(1+2\mathrm{e}^x)y+y^2,\ \varphi(x) = -\mathrm{e}^x$$
$$y' = 1-x-y+xy^2,\ \varphi(x) = 1 \qquad y' = \sec^2 x - y\operatorname{tg} x + y^2,\ \varphi(x) = \operatorname{tg} x$$
$$y' = 2x^2+\frac{1}{x}y-2y^2,\ \varphi(x) = x \qquad y' = -\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}y+y^2,\ \varphi(x) = \frac{2}{x}$$
$$y'+y^2+\frac{y}{x} = \frac{1}{x^2},\ \varphi(x) = -1/x$$

25. Determine el tipo de curvas que corresponden a cada familia y halle sus trayectorias ortogonales:

(a) $x^2 = Cy$ $\qquad$ (b) $2x^2-y^2 = C$

(c) $y^2 = 2Cx$ $\qquad$ (d) $x^2+y^2 = 2ax$

26. Calcule las trayectorias ortogonales a cada una de las siguientes familias de funciones:

(a) $y^2 = Cx^3$ $\qquad$ (b) $y = C\mathrm{e}^x$ $\qquad$ (c) $y = C\operatorname{sen} x$

27. Calcule las siguientes integrales definidas

$$a)\ \int_0^1 x^3\mathrm{e}^x\mathrm{d}x \qquad b)\ \int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos^2 x^2\mathrm{d}x$$
$$c)\ \int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \qquad d)\ \int_2^5 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$$
$$e)\ \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen} x} \qquad f)\ \int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2x+5}}$$

28. Use las propiedades de la integral definida y el teorema fundamental del cálculo para hallar las siguientes derivadas:

$$a)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_1^t x^2\mathrm{d}x\right) \qquad b)\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\int_2^t \sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x\right)$$

$$c)\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\int_{-t}^t \sqrt{3+4x^2}\mathrm{d}x\right) \qquad d)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_1^{3t} \frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x\right)$$

$$e)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{t^2}^{t^3} \frac{1}{4+3x^2}\mathrm{d}x\right)$$

29. Usar las propiedades de la integral definida y el teorema fundamental para Halle las siguientes derivadas:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \mathrm{e}^t\mathrm{d}t, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^{x^3} t^5\mathrm{d}t, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{x^2} \operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t$$

30. Calcule el área del recinto determinado por la curva $y = x^3 - 16x$ y el eje de abscisas.

31. Halle el área determinada por las curvas $y = x^4 - 2x^2$ e $y = 2x^2$.

32. Calcule el área comprendida entre las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ en el intervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$.

33. Halle el área entre la curva $y = \sqrt{1-x}$ y los ejes de coordenadas.

34. Calcule el área limitada por la curva $x = 1 - y^2$ y el eje OY.

35. Calcule el área comprendida entre las curvas de ecuaciones $y = 2 - x^2$ e $y + x = 0$.

36. Calcule el área determinada por las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$.

37. Halle el área de la región limitada por la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x > 0 \\ x+1 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

el eje OX y la ordenada $x = 5$.

38. Halle el área de la región limitada superiormente or $xy = 1$, $x > 0$, inferiormente por $y(x^2+1) = x$, y a la izquierda por $x = 1$.

39. Utilice el método de secciones para calcular el volumen de una pirámide cuadrangular cuya altura es h y el lado de la base vale ℓ.

40. Consideremos la región comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x$. Se pide:

    a) Calcular el volumen de revolución que se genera al girar la región alrededor del eje OX.

    b) Calcular el volumen de revolución que se genera al girar la región alrededor del eje OY.

41. Un cable eléctrico soportado por dos postes distantes 200 metros adopta la forma de una catenaria (coseno hiperbólico) de ecuación $y = 150 \cosh \dfrac{x}{150}$. Calcule la longitud del cable entre esos dos postes.

42. Deduzca una fórmula para hallar la longitud de una curva polar $r = f(\theta)$ en un intervalo $\theta \in [\alpha, \beta]$.

43. Halle la longitud de la circunferencia de ecuación polar $r = 2a \operatorname{sen} \theta$

44. Halle el área de la superficie determinada al girar alrededor del eje OX la curva de ecuación $x(t) = t$, $y(t) = t^2/2$ entre las constantes $t = 0$ y $t = 4$.

45. Calcule al área de la superficie engendrada al girar el arco de curva $y = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$ alrededor del eje OY.

46. Consideremos el área del primer cuadrante limitada por la curva $y = \sqrt{x}$, la recta $x + 4y - 12 = 0$ y el eje de abscisas. Se pide

    a) Calcular el área de la región.

    b) Calcular el volumen de revolución obtenido al hacer girar la región alrededor del eje OX.

    c) Calcular el volumen de revolución obtenido al hacer girar la región alrededor del eje OY.

47. Calcule el volumen de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OY la región comprendida entre curva $y^2 = x$ y la recta $x = 1$.

48. Consideremos la región A encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2$ y $g(x) = \frac{1}{2}x$. Se pide:

    a) Halle el volumen de revolución obtenido al hacer girar la región A alrededor del eje OX.

    b) Halle el volumen de revolución obtenido al hacer girar la región A alrededor del eje OY.

49. Consideremos la región A encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2$ y $g(x) = \frac{1}{2}x$. Se pide. Plantee las integrales definidas que permiten calcular los volúmenes de revolución que se indican:

    a) Volumen de revolución obtenido al hacer girar la región A alrededor del eje $x = -1$

    b) Volumen de revolución obtenido al hacer girar la región A alrededor del eje $x = 3$

    c) Volumen de revolución obtenido al hacer girar la región A alrededor del eje $y = 2$

    d) Volumen de revolución obtenido al hacer girar la región A alrededor del eje $y = -1$

50. Calcule el volumen del sólido de revolución que se engendra al girar alrededor del eje OX la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 2 & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

    definida entre 1 y 5.

51. Calcule el volumen de un cono de altura h y radio r:

    a) Utilizando el método de discos.

    b) Utilizando el método de capas.

52. Calcule el volumen de un tronco de cono de altura h y radios de las bases r y R:

53. Calcule el volumen de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OX la región comprendida entre curva $y^2 = x$ y la recta $x = 1$.

54. Calcule el volumen de revolución que se genera al hacer girar el círculo de ecuación $x^2 + y^2 + r^2$ alrededor de la recta $x = x_0$ en los siguientes casos:

    a) $x_0 = 0$

    b) $x_0 = k \geq 1$

55. Halle la distancia recorrida por un móvil entre $t = 0$ y $t = 2$, sabiendo que su posición en cada instante está dada por:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t + t \operatorname{sen} t \\ y(t) = \operatorname{sen} t - t \cos t \end{cases}$$

56. Las coordenadas de un punto móvil vienen dadas en el instante t por las ecuaciones $x = t^2$, $y = t^3$. Encuentre la longitud del espacio recorrido entre $t = 0$ y $t = 2$.

57. Halle la longitud del arco de curva $y = x^{3/2}$ entre los puntos $(0, 0)$ y $(4, 8)$.

58. Halle la longitud del arco de curva $9x^2 = 4y^3$ limitada por $(0, 0)$ y $(2\sqrt{3}, 3)$.

59. Calcule la longitud del arco de curva $y = 2x\sqrt{x} - 1$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

60. Halle la longitud de un sector de circunferencia de radio r y amplitud θ.

61. Calcule la longitud de la *hipocicloide* cuyas ecuaciones polares son $x = 2\cos^3\theta$, $y = 2\,\text{sen}^3\,\theta$.

62. La circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ gira alrededor de la recta $y = -2$. Halle el área de la superficie engendrada.

63. Calcule al área de la superficie engendrada al girar alrededor del eje OX el arco de curva $y = x^3$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

64. Encuentre el área lateral de un cilindro de radio r y altura h.

65. Calcule el área de la superficie de una esfera de radio r.

66. Halle la superficie determinada al girar alrededor del eje OX la curva de ecuación $x(t) = t$, $y(t) = t^2/2$ entre las constantes $t = 0$ y $t = 4$.

67. Calcule al área de la superficie engendrada al girar el arco de curva $y = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$ alrededor del eje OX.

68. Calcule el área lateral de un cono de altura h y radio de la base r.

69. Calcule la superficie de la esfera de radio R.

70. Calcule la integral del campo escalar $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre la curva $x(t) = a(t - \text{sen}\,t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$ e interpretar geométricamente el resultado.

71. Halle la integral doble de los campos indicados:

    a) $f(x, y) = y^3\cos^2 x$ sobre $R = [-\pi/2, \pi] \times [1, 2]$.

    b) $f(x, y) = xy + x/(y + 1)$ sobre $R = [1, 4] \times [1, 2]$.

72. Esboce la región sobre la que se integra, intercambie el orden de integración y evalúe las siguientes integrales:

$$(a) \quad \int_0^1 \int_{1-y}^1 (x + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad (b) \quad \int_1^4 \int_1^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

73. Halle la integral doble de los campos indicados:

    a) $f(x,y) = x^2 + 2xy - y\sqrt{x}$ sobre $R = [0,1] \times [-2,2]$.

    b) $f(x,y) = y^5 \operatorname{sen} x e^{y^3 \cos x}$ sobre $R = [0,1] \times [-1,0]$.

74. Aplique el teorema de Fubini a la integral $\displaystyle\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ para los siguientes conjuntos:

    a) El interior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

    b) Interior de la curva $x^2 + y^2 - ax - 2ay + a^2 = 0$.

    c) Para $y \geq 0$, la región comprendida entre $x^2 + y^2 = 16$ y $x^2 + y^2 = 9$.

75. Demuestre que el área de la región plana limitada por la curva cerrada y simple definida en coordenadas polares por $r = f(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$, es:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 \mathrm{d}\theta$$

    Utilice la fórmula para calcular el área de la circunferencia de ecuación polar $\rho = 2a\cos\theta$.

76. Plantee la integral definida que permite calcular el área encerrada por la circunferencia centrada en el origen y de radio r, exterior a la cardioide de ecuación polar $\rho = r(1 - \cos\theta)$.

77. Halle el área de la región encerrada por la curva $\rho = 4 + \cos\theta$.

78. Pasando a coordenadas polares, calcular la integral:

$$\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

79. Consideramos la región R delimitada por las rectas $y = x + 1$, $y = x - 3$, $y = (-1/3)x + (7/9)$, $y = (-1/3)x + 5$. Determine un cambio de variable que convierta esta región en un rectángulo y utilícelo para calcular la integral $\displaystyle\iint_R (y - x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

80. Utilizando integrales dobles y un cambio de variable, demostrar que el área interior a la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ es πab.

81. Halle la superficie del grafo del campo $f(x,y) = xy$ en el círculo de centro $(0,0)$ y radio 1.

82. Calcule mediante la definición la integral de línea, $\oint_C x^2y^2\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$ en donde C es la circunferencia centrada en el origen y de radio r.

83. Demuestre el corolario 4.4.11 y aplíquelo para calcular el área de la región encerrada por triángulo limitado por las rectas

$$X = 0, \qquad 2X - 3Y = 0, \qquad X + 3Y = 9.$$

84. Utilice el teorema de Green para calcular la integral de línea $\int_C 2xy\mathrm{d}x + (x^2 + 2x)\mathrm{d}y$, en donde C es la curva formada por la circunferencia $X^2 + Y^2 = 1$ recorrida en el sentido de las agujas del reloj y la elipse $(X/3)^2 + (Y/2)^2 = 1$ recorrida en el sentido contrario a las agujas del reloj. Para ello, conecte las dos partes de la curva mediante un segmento.

85. Calcule el área de la región interior al lazo del folium de Descartes, es decir, la región limitada por la curva:

$$x(t) = \frac{3t}{t^3+1}, \qquad y(t) = \frac{3t^2}{t^3+1}$$