Estructuras Algebraicas para la Computación

Mariam Cobalea

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Tema 2: Retículos y Álgebras de Boole

- Retículos ordenados y retículos algebraicos.
- Tipos de retículos y propiedades.
  - Distributivos
  - Acotados
  - Complementados
- Álgebras de Boole. Expresiones y funciones booleanas.

Álgebras de Boole

Definición

*Sea $\mathcal{A}$ un conjunto no vacío que contiene dos elementos especiales $0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}}$, $0_{\mathcal{A}} \neq 1_{\mathcal{A}}$. En $\mathcal{A}$ se consideran dos operaciones binarias $+$ y $\cdot$ y una operación unaria $-$. Se dice que $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$ es un **álgebra de Boole** si para todo $a, b, c \in \mathcal{A}$ se verifican:*

Identidad :	$a + 0_{\mathcal{A}} = a$	$a \cdot 1_{\mathcal{A}} = a$
Conmutativa :	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Distributiva :	$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
Complemento :	$a + \bar{a} = 1_{\mathcal{A}}$	$a \cdot \bar{a} = 0_{\mathcal{A}}$

Álgebras de Boole

Ejemplos Son álgebras de Boole:

- $(\mathbb{B}, +, \cdot, -, 0, 1)$
- $(D_{30}, mcm, mcd, -, 1, 30)$
- $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \cup, \cap, -, \varnothing, \{a, b, c\})$

Álgebras de Boole

Propiedades

Teorema

Sea $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$ *un álgebra de Boole. Para todo* $a, b, c \in \mathcal{A}$ *se verifican las siguientes propiedades:*

Idempotencia :	$a + a = a$	$a \cdot a = a$
Dominancia :	$a + 1_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}$	$a \cdot 0_{\mathcal{A}} = 0_{\mathcal{A}}$
Absorción :	$a + (a \cdot b) = a$	$a \cdot (a + b) = a$
Asociativa :	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
DeMorgan :	$\overline{(a + b)} = \bar{a} \cdot \bar{b}$	$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$
Involución :	$\bar{\bar{a}} = a$	

Álgebras de Boole

Propiedades

Teorema

Sea $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$ *un álgebra de Boole. La relación* $\preceq$ *definida*

$$a \preceq b \iff a + b = b$$

es un orden parcial.

Ejercicio Demuestra que para todo $a \in \mathcal{A}$, se verifica $0_{\mathcal{A}} \preceq a \preceq 1_{\mathcal{A}}$.

Definición

*Un **átomo** en un álgebra de Boole es un elemento* $a \in \mathcal{A}$ *tal que para todo* $b \in \mathcal{A}$, *si* $b \preceq a$, *entonces* $b = 0$ *ó bien* $b = a$.

Ejemplo En el álgebra de Boole $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \cup, \cap, -, \varnothing, \{a, b, c\})$ los átomos son $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$.

En el álgebra de Boole $(D_{30}, mcm, mcd, -, 1, 30)$ los átomos son $2, 3$ y 5.

Álgebras de Boole

Propiedades

Ejercicio Sea $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$ un álgebra de Boole. Demuestra:

- Si a es un átomo, entonces para todo $b \in \mathcal{A}$, se verifica

$$a \cdot b = 0 \text{ ó bien } a \cdot b = a$$

- Si a_1 y a_2 son átomos, entonces $a_1 \cdot a_2 = 0$.

Definición

*Un **superátomo** en un álgebra de Boole es un elemento* $a \in \mathcal{A}$ *tal que para todo* $b \in \mathcal{A}$, *si* $a \preceq b$, *entonces* $b = 1$ *ó bien* $b = a$.

Ejemplo En el álgebra de Boole $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \cup, \cap, -, \varnothing, \{a, b, c\})$ los superátomos son $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$.

En el álgebra de Boole $(D_{30}, mcm, mcd, -, 1, 30)$ los superátomos son $6, 10$ y 15.

Álgebras de Boole

Teorema

Todo retículo de Boole es un álgebra de Boole y recíprocamente.

☛ Las álgebras de Boole cumplen **todas** las propiedades establecidas para los retículos distributivos y complementados.

Ejercicio En un álgebra de Boole $\mathcal{A}$ se define la operación $\oplus$ (xor) de la siguiente manera: $a \oplus b = a\bar{b} + \bar{a}b$.

1. Determina $a \oplus a$, $a \oplus 0$, $a \oplus 1$ y $a \oplus \bar{a}$.
2. Demuestra o refuta cada una de las siguientes afirmaciones

i) $a \oplus b = 0 \Rightarrow a = b$	*ii)* $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$
iii) $a \oplus b = \bar{a} \oplus \bar{b}$	*iv)* $a \oplus bc = (a \oplus b)(a \oplus c)$
v) $a(b \oplus c) = ab \oplus ac$	*vi)* $\overline{a \oplus b} = \bar{a} \oplus b = a \oplus \bar{b}$
vii) $a \oplus b = a \oplus c \Rightarrow b = c$	

Álgebra de Boole producto

Teorema

Si $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son dos álgebras de Boole, entonces $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ también es un álgebra de Boole.

Demostración: Ejercicio

El teorema anterior se puede generalizar:

Teorema

Si $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ son álgebras de Boole, entonces $\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$ es un álgebra de Boole.

Álgebra de Boole producto

Ejemplo Sea $(\mathbb{B}, +, \cdot, -, 0, 1)$ el álgebra de Boole trivial.
Por el teorema anterior,

$$\mathbb{B}^n = \{(b_1, b_2, \dots b_n) \big| b_j \in \mathbb{B} \quad \text{para} \quad j : 1, 2, \dots, n\}$$

es también un álgebra de Boole.

- ✓ Dados $a = (a_1, a_2, \dots a_n) \in \mathbb{B}^n$ y $b = (b_1, b_2, \dots b_n) \in \mathbb{B}^n$, las operaciones $+$ y $\cdot$ están definidas

$$a + b = (a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, \dots b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots a_n + b_n)$$

$$a \cdot b = (a_1, a_2, \dots a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots b_n) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots a_n \cdot b_n)$$

- ✓ El complemento de cada elemento es $\overline{a} = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n})$.
- ✓ Además,

$$0_{\mathbb{B}^n} = (0, 0, \dots 0) \quad \text{y} \quad 1_{\mathbb{B}^n} = (1, 1, \dots, 1)$$

- ✓ Los átomos son: $(1, 0, ..., 0)$, $(0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $(0, ..., 0, 1)$

Isomorfismos de Álgebras de Boole

Definición

Sean $(\mathcal{A}, \oplus, \otimes, \ominus, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$ y $(\mathcal{B}, \boxplus, \boxtimes, \boxminus, 0_{\mathcal{B}}, 1_{\mathcal{B}})$ álgebras de Boole. Un **isomorfismo** *de álgebras de Boole es una función $\phi \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ que es biyectiva y para todo $a, b \in \mathcal{A}$ verifica:*

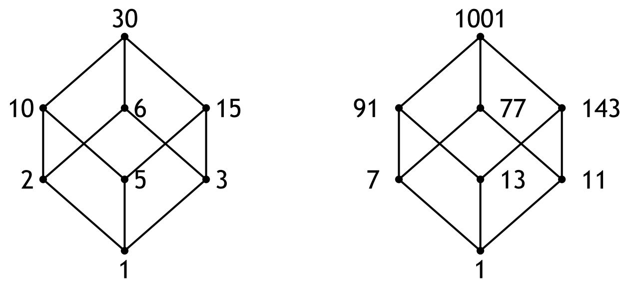
1. $\phi(a \oplus b) = \phi(a) \boxplus \phi(b)$
2. $\phi(a \otimes b) = \phi(a) \boxtimes \phi(b)$
3. $\phi(\overline{a}) = \overline{\phi(a)}$

Isomorfismos de Álgebras de Boole

Ejemplo La función $\phi \colon \mathcal{D}_{30} \to \mathcal{D}_{1001}$ definida

$$\begin{array}{lclclclclclclcl} \phi(1) & = & 1 & \phi(2) & = & 7 & \phi(3) & = & 11 & \phi(5) & = & 13 \\ \phi(6) & = & 77 & \phi(10) & = & 91 & \phi(15) & = & 143 & \phi(30) & = & 1001 \end{array}$$

es un isomorfismo de álgebras de Boole.

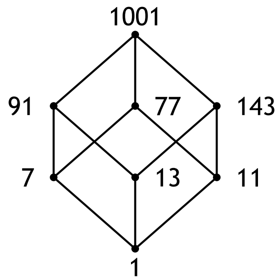


Teorema de representación

Lema

Sea $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$ un álgebra de Boole finita. Si b es cualquier elemento distinto de cero en $\mathcal{A}$, y $a_1, a_2, \dots, a_k$ son todos los átomos de $\mathcal{A}$ tales que $a_i \preceq b$, entonces $b = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ de forma única.

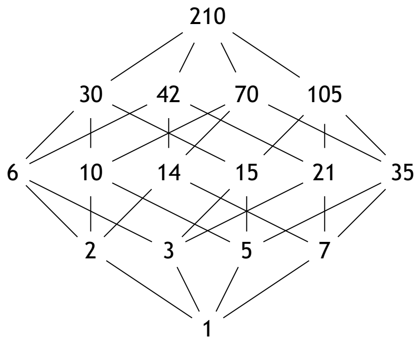
Ejemplo



$$1001 = 91 \sqcup 143 = (7 \sqcup 13) \sqcup (13 \sqcup 11) = 7 \sqcup 13 \sqcup 11$$

Teorema de representación

Ejemplo



$$30 = 6 \sqcup 10 = (2 \sqcup 3) \sqcup (2 \sqcup 5) = 2 \sqcup 3 \sqcup 5;$$

$$70 = 14 \sqcup 35 = (2 \sqcup 7) \sqcup (5 \sqcup 7) = 2 \sqcup 5 \sqcup 7;$$

$$105 = 15 \sqcup 35 = (3 \sqcup 5) \sqcup (5 \sqcup 7) = 3 \sqcup 5 \sqcup 7$$

Teorema de representación

- De este lema se deduce que hay una biyección entre los elementos de un álgebra de Boole y los subconjuntos de sus átomos.
- De hecho, esta biyección es un isomorfismo de $(\mathcal{A}, \preceq)$ en $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$, donde S es el conjunto de átomos.

Teorema

Sea $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$ un álgebra de Boole finita y sea S su conjunto de átomos. Entonces $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$ es isomorfa al álgebra de Boole $(\mathcal{P}(S), \cup, \cap, -, \varnothing, S)$.

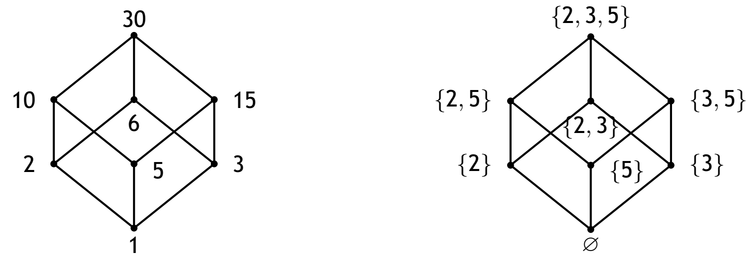
Corolario

Si $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$ es un álgebra de Boole finita con n átomos, entonces $\mathcal{A}$ tiene 2^n elementos.

Teorema de representación

Ejemplo

$(D_{30}, mcm, mcd, -, 1, 30)$ es isomorfo a $(\mathcal{P}(\{2,3,5\}), \cup, \cap, -, \varnothing, \{2,3,5\})$



$$\phi : \mathcal{D}_{30} \longrightarrow \mathcal{P}(\{2,3,5\})$$

$$\begin{array}{rcl rcl}
\phi(1) & = & \varnothing & \phi(2) & = & \{2\} \\
\phi(3) & = & \{3\} & \phi(5) & = & \{5\} \\
\phi(6) & = & \{2,3\} & \phi(10) & = & \{2,5\} \\
\phi(15) & = & \{3,5\} & \phi(30) & = & \{2,3,5\}
\end{array}$$

Isomorfismos de Álgebras de Boole

Teorema

Sea $(\mathcal{A}, \oplus, \otimes, \ominus, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$ *un álgebra de Boole finita con conjunto de átomos* $\{a_1, \ldots, a_n\}$. *Si* $(\mathcal{B}, \boxplus, \boxtimes, \boxminus, 0_{\mathcal{B}}, 1_{\mathcal{B}})$ *es un álgebra de Boole finita con conjunto de átomos* $\{b_1, \ldots, b_n\}$, *entonces existe una función* $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *tal que* $\phi(a_j) = b_j$, $1 \le j \le n$ *que es un isomorfismo de álgebras de Boole.*

Ejemplo $\phi\colon \mathcal{D}_{30} \to \mathbb{B}^3$

$$\begin{array}{llllllll} \phi(1) = 000, & \phi(2) = 100, & \phi(3) = 010, & \phi(5) = 001, \\ \phi(6) = 110, & \phi(10) = 101, & \phi(15) = 011, & \phi(30) = 111 \end{array}$$

Isomorfismos de Álgebras de Boole

Ejercicio Sean las álgebras de Boole $\mathcal{A}_1 = D_{2310}$ y $\mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(\{a, b, c, d, e\})$. Se define la función $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ del siguiente modo:

$$f(2) = \{a\} \quad f(3) = \{b\} \quad f(5) = \{c\} \quad f(7) = \{d\} \quad f(11) = \{e\}$$

1. Expresa, si es posible, los elementos $110, 210$ y 330 en función de **átomos** y **superátomos.**
2. Determina cuáles deben ser las imágenes de $f(35)$, $f(110)$, $f(210)$ y $f(330)$ para que f sea isomorfismo de álgebras de Boole.
3. Estudia si se puede definir otra función $g : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ que también sea **isomorfismo de álgebras de Boole.**
4. En caso afirmativo, determina $g(110)$, $g(210)$ y $g(330)$.
5. ¿Cuántos isomorfismos diferentes se pueden definir entre $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$?

El álgebra de Boole $\mathcal{F}_n$

Definición

*Se llama **función booleana** de* n ***variables** a una función*

$$f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$$

El conjunto de todas las funciones booleanas de n *variables se denota* $\mathcal{F}_n$.

Ejemplo La función $f\colon \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ definida

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

El álgebra de Boole $\mathcal{F}_n$

- ✓ Una función booleana de 3 variables es una función f tal que $f(x, y, z)$ es 0 ó 1 para cada una de las 2^3 elecciones de x, y, z.
- ✓ Podemos pensar en poner 3 interruptores en una de las dos posiciones.
- ✓ Entonces f se comporta como una caja negra que produce una salida 0 ó 1 dependiendo de cómo estén puestos los interruptores y de la estructura interna de la caja.
- ✓ Como hay 8 formas de poner los interruptores y cada posición lleva a alguna de las dos salidas, dependiendo de la función, hay $2^{2^3} = 256$ funciones booleanas de 3 variables.
- ✓ Esto es, $|\mathcal{F}_3| = 2^{2^3} = 256$.
- ✓ En general, $\left|\mathcal{F}_n\right| = 2^{2^n}$.

El álgebra de Boole $\mathcal{F}_n$

Definición

Sean f y g dos funciones booleanas de n variables, $f, g \in \mathcal{F}_n$
*La **suma booleana** $f+g$ y el **producto booleano** $f \cdot g$ se definen*

$$(f+g)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$(f \cdot g)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

para cualesquiera $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n$.

*El **complemento** de la función booleana f es la función booleana $\bar{f}$ definida* $\bar{f}(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(x_1, \ldots, x_n)}$

Teorema

$\mathcal{F}_n$ *es un álgebra de Boole con las operaciones booleanas definidas.*

El álgebra de Boole $\mathcal{F}_n$

Ejemplo Las operaciones booleanas de $\mathcal{F}_2$ se ilustran en la siguiente tabla

x	y	f	g	$f+g$	$f \cdot g$	$\bar{f}$
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0	1

El álgebra de Boole $\mathcal{F}_n$

$$\mathcal{F}_2 = \{f_j : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B},\ j : 0, \ldots, 15\}$$

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Los átomos del álgebra de Boole $\mathcal{F}_2$ son: f_1, f_2, f_4 y f_8.

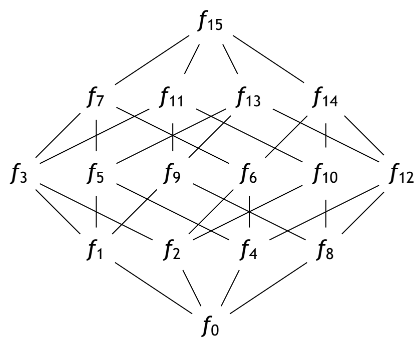
Cada elemento de $\mathcal{F}_2$ se puede expresar como suma de átomos, por ejemplo $f_7 = f_1 + f_2 + f_4$, $f_{10} = f_2 + f_8$, $f_{14} = f_2 + f_4 + f_8$

Nos interesa escribir cada elemento del álgebra de Boole $\mathcal{F}_n$, en este caso $\mathcal{F}_2$, como suma de átomos.

El álgebra de Boole $\mathcal{F}_2$

$$\mathcal{F}_2 = \{f_j : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B},\ j : 0, \ldots, 15\}$$

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1



Expresiones booleanas

Definición

*Una **expresión booleana** sobre el álgebra de Boole* $(\mathcal{A}, \oplus, \otimes, \ominus, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$ *se define recursivamente de la siguiente manera:*

[B] *Cualquier elemento de* $\mathcal{A}$ *y cualquier símbolo de variable* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *son expresiones booleanas.*

[R] *Si* E_1 *y* E_2 *son expresiones booleanas, entonces* $E_1 \oplus E_2$, $(E_1 \otimes E_2)$ *y* $\overline{E_1}$ *son también expresiones booleanas.*

Ejemplo

$E(x) = (\overline{5 \vee x}) \vee \overline{6}$ es una expresión booleana en $(D_{30}, \vee, \wedge, -, 1, 30)$.

Expresiones booleanas

Ejemplos

- $E(x) = \overline{(x \wedge 3)} \wedge (77 \vee 3)$ es una expresión booleana en $(D_{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}, \vee, \wedge, -, 1, 462)$.
- $E(x, y, z) = \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + x \cdot \overline{y} \cdot z + x \cdot y \cdot \overline{z}$ es una expresión booleana en $\mathbb{B}$.

✓ Las expresiones booleanas representan cálculos con elementos no específicos de un cierto álgebra de Boole $\mathcal{A}$.

✓ Se pueden manipular usando las propiedades de las operaciones $\oplus, \otimes, \ominus$ definidas en el álgebra de Boole correspondiente.

Expresiones booleanas

✓ Para una asignación de valores a las variables, podemos evaluar la expresión $E(x_1, x_2, ..., x_n)$ mediante la sustitución de las variables en la expresión por sus valores y obtendremos como resultado un elemento de $\mathcal{A}$.

Ejemplos

- Reemplazando x por 2 en la expresión booleana $E(x) = (\overline{5 \vee x}) \vee \overline{6}$ definida en $(D_{30}, \vee, \wedge, -, 1, 30)$, obtenemos

$$E(2) = (\overline{5 \vee 2}) \vee \overline{6} = (\overline{10}) \vee 5 = 3 \vee 5 = 15$$

- Reemplazando x por 0, y por 1 y z por 1 en la expresión booleana $E(x, y, z) = \overline{x} \cdot z + \overline{x} \cdot y + \overline{z}$ definida en $\mathbb{B}$, obtenemos

$$E(0, 1, 1) = \overline{0} \cdot 1 + \overline{0} \cdot 1 + \overline{1} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 = 1 + 1 + 0 = 1$$

Expresiones booleanas

Definición

*Se dice que dos expresiones booleanas son **equivalentes** si toman los mismos valores para las mismas asignaciones a las variables.*

Ejemplo

Las expresiones booleanas $E_1(x) = \overline{x} \vee 5$ y $E_2(x) = (\overline{5 \vee x}) \vee \overline{6}$ definidas en $(D_{30}, \vee, \wedge, -, 1, 30)$ son equivalentes, ya que

	1	2	3	5	6	10	15	30
$E_1(x)$	30	15	10	30	5	15	10	5
$E_2(x)$	30	15	10	30	5	15	10	5

Expresiones booleanas

✓ Dos expresiones booleanas $E_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ y $E_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ serán ***equivalentes*** si es posible transformar una en la otra con manipulaciones booleanas.

✓ En este caso, escribimos
$$E_1(x_1, x_2, ..., x_n) = E_2(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Ejercicios Demuestra que:

1. En el álgebra de Boole $(D_{30}, \vee, \wedge, -, 1, 30)$
$$\overline{x} \vee 5 = \overline{(5 \vee x)} \vee \overline{6}$$
2. En el álgebra de Boole $(D_{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}, \vee, \wedge)$
$$\overline{(x \wedge 3)} \wedge (77 \vee 3) = (231 \wedge \overline{x}) \vee 77$$

Expresiones booleanas/Funciones booleanas

¿Cómo debemos especificar una función de $\mathcal{A}^n$ en $\mathcal{A}$ a partir de una expresión booleana $E(x_1, x_2, ..., x_n)$ sobre $(\mathcal{A}, \oplus, \otimes, -, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$?

✓ Cada asignación de valores a las variables $x_1, x_2, ..., x_n$ será una n -tupla ordenada en el dominio $\mathcal{A}^n$ y

✓ el correspondiente valor de $E(x_1, x_2, ..., x_n)$ será la imagen en el codominio $\mathcal{A}$.

Ejemplo La expresión booleana $E(x) = \overline{(5 \vee x)} \vee \overline{6}$ sobre el álgebra de Boole $(D_{30}, \vee, \wedge, -, 1, 30)$ define la función $f : D_{30} \to D_{30}$ dada por

	1	2	3	5	6	10	15	30
f	30	15	10	30	5	15	10	5

Expresiones booleanas/Funciones booleanas

Ejemplo La expresión booleana
$$(\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3) + (x_1 \cdot \overline{x}_2) + (x_1 \cdot x_3)$$
sobre el álgebra de Boole $(\mathbb{B}, +, \cdot, -, 0, 1)$ define la función $f : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ dada por

	f
(0, 0, 0)	1
(0, 0, 1)	0
(0, 1, 0)	0
(0, 1, 1)	0
(1, 0, 0)	1
(1, 0, 1)	1
(1, 1, 0)	0
(1, 1, 1)	1

Expresiones booleanas/Funciones booleanas

Función	:=	Expresión	Nombre	Expresión Lógica
$f_0(x, y)$	=	0	Constante 0	Contradicción
$f_1(x, y)$	=	$x \downarrow y$	Operación de Pierce, NOR, ni	$\neg(x \vee y)$
$f_2(x, y)$	=	$\overline{x} \cdot y$	Negación Condicional	$\neg(x \longrightarrow y)$
$f_3(x, y)$	=	$\overline{x}$	Complemento 1ª componente	$\neg x$
$f_4(x, y)$	=	$x \cdot \overline{y}$	Inhibidor	$\neg(x \longrightarrow y)$
$f_5(x, y)$	=	$\overline{y}$	Complemento 2ª componente	$\neg y$
$f_6(x, y)$	=	$x \oplus y$	Diferencia simétrica, XOR	$(x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$
$f_7(x, y)$	=	$x \uparrow y$	Operación de Sheffer, NAND	$\neg(x \wedge y)$
$f_8(x, y)$	=	$x \cdot y$	Producto, And	$x \wedge y$
$f_9(x, y)$	=	$x \cdot y + \overline{x} \cdot \overline{y}$	Equivalencia lógica	$x \longleftrightarrow y$
$f_{10}(x, y)$	=	y	Proyección 2ª componente	
$f_{11}(x, y)$	=	$\overline{x} + y$	Condicional	$x \longrightarrow y$
$f_{12}(x, y)$	=	x	Proyección 1ª componente	
$f_{13}(x, y)$	=	$x + \overline{y}$	Condicional recíproca	$y \longrightarrow x$
$f_{14}(x, y)$	=	$x + y$	Suma, OR	$x \vee y$
$f_{15}(x, y)$	=	1	Constante 1	Tautología

Expresiones booleanas/Funciones booleanas

Para todo álgebra de Boole $(\mathcal{A}, \oplus, \otimes, -, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$, nos planteamos si es posible que cualquier función de $\mathcal{A}^n$ en $\mathcal{A}$ se pueda especificar mediante una expresión booleana sobre $\mathcal{A}$.

La respuesta es NO.

Definición

*Una función de $\mathcal{A}^n$ en $\mathcal{A}$ se llama **función booleana** si se puede especificar mediante una expresión booleana $E(x_1, x_2, ..., x_n)$.*

- ➢ Para el caso del álgebra de Boole $\mathbb{B}$, se demuestra que cualquier función de $\mathbb{B}^n$ en $\mathbb{B}$ se puede especificar mediante una expresión booleana $E(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Expresiones booleanas/Funciones booleanas

Dada una función $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$, se considera $S(f) = \{b \in \mathbb{B}^n | f(b) = 1\}$.

Teorema

Sea f, f_1 y f_2 funciones de $\mathbb{B}^n$ en $\mathbb{B}$.

- *Si $S(f) = S(f_1) \cup S(f_2)$, entonces $f(b) = f_1(b) + f_2(b)$ para todo $b \in \mathbb{B}$.*
- *Si $S(f) = S(f_1) \cap S(f_2)$, entonces $f(b) = f_1(b) \cdot f_2(b)$ para todo $b \in \mathbb{B}$.*

Expresiones booleanas / Funciones booleanas

Definición

*Las expresiones booleanas que constan de una única variable o su complemento se llaman **literales**.*

Definición

*Decimos que una expresión booleana de n variables es un **minitérmino** si es de la forma* $y_1 \cdot y_2 \cdot ... \cdot y_n$

donde usamos y_j para denotar x_j o bien $\overline{x}_j$.

*Se dice que una expresión booleana sobre $(\mathbb{B}, +, \cdot, -, 0, 1)$ está en su **forma normal disyuntiva** si es una suma de minitérminos.*

Ejemplo $(\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3) + (\overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3) + (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)$ es una expresión booleana en forma normal disyuntiva, con tres minitérminos:

$$(\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3), \quad (\overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3) \quad \text{y} \quad (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3).$$

Expresiones booleanas/Funciones booleanas

Ejemplos

- La expresión $x \cdot \overline{y} \cdot z$ es un término mínimo en las tres variables x, y, z. La función correspondiente en $\mathcal{F}_3$ toma el valor 1 solamente en $(1, 0, 1)$.
- La expresión $x \cdot \overline{z}$ es un término mínimo en dos variables x, z. Pero no es un término mínimo en las tres variables x, y, z. La función correspondiente en $\mathcal{F}_3$ toma el valor 1 en $(1, 0, 0)$ y en $(1, 1, 0)$.
- La expresión $x \cdot \overline{y} \cdot z \cdot \overline{x}$ no es un término mínimo ya que involucra a la variable x en más de un literal.

Expresiones booleanas/Funciones booleanas

Ejemplos

- En la siguiente tabla se da una lista de los 8 elementos de $\mathbb{B}^3$ y los términos mínimos correspondientes que toman el valor 1 en los elementos indicados.

(a, b, c)	Términos mínimos con valor 1 en (a, b, c)
$(0,0,0)$	$\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$
$(0,0,1)$	$\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z$
$(0,1,0)$	$\overline{x} \cdot y \cdot \overline{z}$
$(0,1,1)$	$\overline{x} \cdot y \cdot z$
$(1,0,0)$	$x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$
$(1,0,1)$	$x \cdot \overline{y} \cdot z$
$(1,1,0)$	$x \cdot y \cdot \overline{z}$
$(1,1,1)$	$x \cdot y \cdot z$

Expresiones booleanas/Funciones booleanas

Dada una función de $\mathbb{B}^n$ en $\mathbb{B}$, podemos obtener una expresión booleana en forma normal disyuntiva correspondiente a esta función de la siguiente manera:

1. Hacemos corresponder un minitérmino a cada elemento de $\mathbb{B}^n$ para los cuales el valor de la función es 1.
2. Para cada una de estos elementos obtenemos un minitérmino

$$y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n$$

en el cual y_j es x_j si la componente j de la n -tupla es 1 y es $\overline{x}_j$ si la componente j de la n -tupla es 0.

Expresiones booleanas/Funciones booleanas

Ejemplo A la función $f \colon \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ dada por la tabla

	f
$(0,0,0)$	1
$(0,0,1)$	0
$(0,1,0)$	1
$(0,1,1)$	0
$(1,0,0)$	0
$(1,0,1)$	0
$(1,1,0)$	0
$(1,1,1)$	1

le corresponde la expresión booleana

$$(\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3) + (\overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3) + (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)$$

Expresiones booleanas/Funciones booleanas

Definición

*Decimos que una expresión booleana es un n variables es un **maxitérmino** si es de la forma*

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n$$

donde usamos y_j para denotar x_j o bien $\overline{x}_j$.
*Se dice que una expresión booleana sobre $(\mathbb{B}, +, \cdot, -, 0, 1)$ está en su **forma normal conjuntiva** si es un producto de maxitérminos.*

Ejemplo

$$(x_1 + x_2 + \overline{x}_3) \cdot (x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_1 + x_2 + x_3) \cdot (\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3)$$

es una expresión en forma normal conjuntiva que consta de cinco maxitérminos.

Expresiones booleanas/Funciones booleanas

Dada una función de $\mathbb{B}^n$ en $\mathbb{B}$, podemos obtener una expresión booleana en forma normal conjuntiva correspondiente a esta función de la siguiente manera:

- Hacemos corresponder un maxitérmino a cada uno de los elementos de $\mathbb{B}^n$ para los cuales el valor de la función es 0.
- Para cada una de estos elementos obtenemos un maxitérmino

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

en el cual y_j es x_j si la componente j de la n -tupla es 0 y es $\overline{x}_j$ si la componente j de la n -tupla es 1.

Expresiones booleanas/Funciones booleanas

Ejemplo A la función $f\colon \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ dada por la tabla

	f
$(0,0,0)$	1
$(0,0,1)$	0
$(0,1,0)$	1
$(0,1,1)$	0
$(1,0,0)$	0
$(1,0,1)$	0
$(1,1,0)$	0
$(1,1,1)$	1

le corresponde la expresión booleana

$$(x_1 + x_2 + \overline{x}_3) \cdot (x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_1 + x_2 + x_3) \cdot (\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3)$$

Optimización

Sea $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(\mathbb{B}^n, \mathbb{B})$ y sea $f \in \mathcal{F}_n$ una función booleana cualquiera. Una **representación minimal** de f es una expresión booleana E que representa a f y satisface las siguientes condiciones:

- E es suma de productos
- Si F es otra suma de productos que representa a la función f, entonces el número de términos productos de F es mayor o igual que el número de términos productos que hay en E.
- Si F es cualquier otra suma de productos que representa a la función f y si el número de productos de F es igual al número de términos producto de E, entonces el número total de literales que se encuentran en F es mayor o igual que el número total de literales que se encuentran en E.

Optimización

Definición

Una expresión $E(x_1, \dots, x_n)$ ***implica*** *una expresión* $F(x_1, \dots, x_n)$ *si para todo* $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{B}^n$,

$$E(a_1, \dots, a_n) = 1 \implies F(a_1, \dots, a_n) = 1$$

También se dice que $E(x_1, \dots, x_n)$ *es un* ***implicante*** *de* $F(x_1, \dots, x_n)$.

Se dice que $E(x_1, \dots, x_n)$ *es un* ***implicante primo*** *de* $F(x_1, \dots, x_n)$ *si* E *es una expresión producto que es implicante de* F, *pero si eliminamos algún elemento del producto, deja de serlo.*

Optimización

Ejemplo Sean las expresiones $E = x \cdot y$ y $F = x \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$

x	y	z	$E = x \cdot y$	$F = x \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

- $E = x \cdot y$ implica $F = x \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$, ya que siempre que E toma el valor 1, también lo toma F.
- Pero $E_1 = x$ no implica F, pues hay una asignación de las variables que hace que $E_1 = x$ tome el valor 1 mientras que F toma el valor 0.
- Por la misma razón, $E_2 = y$ no implica a F.
- Por lo tanto, $E = x \cdot y$ es un implicante primo de F.

Optimización

Ejercicio Justifica que

- $E = x \cdot \overline{y} \cdot z + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z$ implica $F = x \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot \overline{y} \cdot z + \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z$
- $\overline{y} \cdot z$ es un implicante primo de E y de F.
- $E = x \cdot \overline{y} \cdot z + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z$ implica

$$H = x \cdot y \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot z + \overline{x} \cdot y \cdot z + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$$

Optimización

Teorema

Toda expresión booleana es equivalente a la suma de todos sus implicantes primos.

Teorema

Si una expresión booleana E está en la forma suma de productos mínimal, entonces cada sumando es un implicante primo de E.

Ejemplo

$$\begin{aligned} E &= x \cdot \overline{y} + x \cdot y \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot \overline{z} \\ &= x \cdot \overline{y} + x \cdot \overline{z} + y \cdot \overline{z} \\ &= x \cdot \overline{y} + y \cdot \overline{z} \end{aligned}$$

Para encontrar expresiones óptimas se usan el método de los **mapas de Karnaugh** y el **procedimiento de Quine-McCluskey**.