E.T.S. de INGENIERÍA INFORMÁTICA

Curso 2010/2011

Matemática Discreta

Relación de Ejercicios 3

Técnicas de recuento

1. La producción de una pieza consta de cuatro etapas. Hay seis líneas de montaje disponibles para la primera etapa, cuatro para la segunda, cinco para la tercera y tres para la última. Determina el número de maneras diferentes en que se puede fabricar la pieza en este proceso.

2. ¿Cuántas permutaciones de las letras $ABCDEF$ contienen las letras DEF juntas en cualquier orden?

3. Sea $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y sea $\Sigma^k = \{w \in \Sigma^* \mid \text{long}(w) = k\}$. Determina el número de elementos que tiene cada uno de los siguientes conjuntos:

   (a) $\{w \in \Sigma^4 \mid$ el número 7 aparece exactamente una vez en $w\}$
   (b) $\{w \in \Sigma^4 \mid$ el número 7 aparece a lo sumo una vez en $w\}$
   (c) $\{w \in \Sigma^4 \mid$ el número 7 aparece al menos una vez en $w\}$

4. ¿Cuántos números de teléfono tienen al menos un dígito repetido?

5. (a) ¿Cuántos divisores positivos tiene el número $2933884800 = 2^8 3^5 5^3 7^3 11$?
   (b) ¿Cuántos son múltiplos de 99?
   (c) ¿Y de 39?

6. Un comité de seis personas A, B, C, D, E, F debe escoger un presidente, un secretario y un tesorero. ¿De cuántas formas se puede hacer la elección? ¿De cuántas si el presidente debe ser A ó B?

   ¿De cuántas si E debe ocupar uno de los cargos? ¿De cuántas si A y F deben ocupar un cargo?

7. Un examen consta de 10 preguntas. Halla de cuántas maneras se puede responder al examen si

   (a) hay que contestar al menos 6 preguntas.
   (b) hay que contestar al menos 6, de las cuales dos son obligatorias entre las cinco primeras y al menos dos deben ser de las cinco últimas.

8. ¿Cuántas cadenas de ocho bits hay? ¿Cuántas de ellas comienzan por 101? ¿Cuántas de ellas comienzan por 101 o tienen el cuarto bit igual a 1?

9. Se ha recibido un paquete de 100 discos compactos con cinco discos defectuosos. ¿De cuántas maneras se puede elegir una muestra de cuatro discos que contenga más discos defectuosos que no defectuosos?

10. Un autobús de 32 plazas (16 a la derecha y 16 a la izquierda) transporta a 28 alumnos de la E.T.S. Ingeniería Informática en su viaje de fin de carrera. ¿De cúantas formas pueden sentarse si tres de ellos sólo pueden ir a la derecha y cinco de ellos sólo a la izquierda?

11. Halla el número de soluciones enteras no negativas que tiene la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27$. ¿Cuántas de ellas verifican $x_1 \geq 0,\ x_2 > 4,\ x_3 \geq 1,\ x_4 > 0$?

12. Halla cuántos números naturales entre mil y cien mil tienen la propiedad de que la suma de sus dígitos es 9 y son todos distintos de cero.

13. Se dispone de una gran cantidad de bolas rojas, azules y verdes. ¿De cuántas formas se pueden seleccionar nueve bolas si se debe tener al menos una de cada color?

14. Una clase de 43 estudiantes vota para elegir la fecha de un examen. Cada uno vota por uno de los cinco posibles días. Determina cuántos resultados se pueden obtener en la votación en los siguientes casos:
    (a) Cada día obtiene al menos un voto.
    (b) Al menos un día recibe más de ocho votos.
15. Siete amigos llegan a un hotel y sólo hay disponibles dos habitaciones dobles y una triple. ¿De cuántas maneras pueden repartirse?
16. De un total de 20 personas se deben elegir tres comisiones de 4, 5 y 6 personas respectívamente.
    (a) ¿De cuántas maneras es posible formar las comisiones?
    (b) Idem si cada persona solo puede pertenecer a una comisión.
17. En el plano XY se consideran caminos que avanzan un paso cada vez (a la derecha o hacia arriba).
    (a) ¿Cuántos caminos distintos hay desde $(0, 0)$ a $(7, 7)$?
    (b) Idem desde $(2, 7)$ a $(9, 14)$.
    (c) Formula (si es posible) una proposición general que incorpore estos dos resultados.
18. Se quieren formar cadenas de longitud 10 con los números $0, 1, 2, 3$. Se pide:
    (a) ¿Cuántas cadenas distintas se pueden formar?
    (b) ¿Cuántas cadenas tienen peso 3 (es decir, la suma de sus cifras es 3)?
19. Se consideran los siguientes números: -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar cuatro números de modo que su producto sea positivo?
20. Se tienen 4 letras a, 4 letras b, 4 letras c y 4 letras d. ¿Cuántas cadenas de longitud 10 se pueden formar si cada letra debe aparecer, al menos, dos veces?
21. Halla cuántos enteros no superiores a 100 son primos.
22. Determina el número de enteros positivos menores que 600 que son coprimos con 600.
23. ¿Cuántos números de cuatro cifras tienen al menos un dígito que sea 0, al menos un dígito que sea 1 y al menos un dígito que sea 2?
24. Usa el Principio de Inclusión-Exclusión para calcular el número de formas en que se pueden ordenar los dígitos $0, 1, 2, \ldots 9$ de modo que el primer dígito sea mayor que 1, el último sea menor que 8 y el tercero sea distinto de 5.
25. Se ha producido un robo y la policía interroga a dos testigos sobre la matrícula del vehículo utilizado para la huida (cuatro dígitos y dos letras de un alfabeto de 26).

    El primer testigo asegura que la segunda letra de la matrícula era una O o una Q y que el último dígito era un 3 o un 8.

    El segundo testigo asegura que la primera letra era una C o una G y que el primer dígito era definitivamente un 7.
    (a) ¿Cuántas placas diferentes tendrá que verificar la policía?
    (b) Si en investigaciones posteriores la policía obtiene además que la matrícula no termina en 53 ni empieza en 78, ¿cuántas comprobaciones se tendrán que hacer en este caso?
26. Calcula el número de soluciones de enteros no negativos tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 29$$

    ¿Cuántas de ellas satisfacen $x_1 > 0 \quad x_2 > 1 \quad x_3 > 2 \quad x_4 \geq 0$?

27. ¿Cuántas permutaciones de las letras de PROGRAMACIÓN no tienen dos letras consecutivas iguales?

28. (a) ¿En cuántas ordenaciones de la palabra PERIÓDICO aparecen la E y la D juntas?
    (b) ¿En cuántas están todas las vocales juntas?
    (c) ¿En cuántas no hay dos letras consecutivas iguales?

29. ¿De cuántas formas se pueden disponer los números $1, 2, \ldots, 10$ para que ninguno ocupe su posición natural?

30. Demuestra que si escogemos cinco números cualesquiera entre el 1 y el 8, dos de ellos suman 9.

31. Demuestra que si se eligen diez puntos cualesquiera en el interior de un triángulo equilátero de lado 1, al menos dos de ellos se encuentran a una distancia no superior a $\frac{1}{3}$.

32. Una red de ordenadores está formada por seis equipos. Cada ordenador puede estar conectado a varios equipos o estar desconectado. Demuestra que hay al menos dos ordenadores en la red que tienen el mismo número de conexiones.

33. Cuatro estudiantes que van a compartir piso tienen que realizar siete tareas antes que empiece el curso.

    ¿De cuántas maneras se pueden repartir las tareas si cada uno debe realizar al menos una?

34. Un investigador tiene 5 ayudantes y participa en un proyecto que exige la síntesis de 9 compuestos.

    ¿De cuántas maneras puede el investigador asignar estas síntesis a los 5 ayudantes para que cada uno trabaje al menos en una?

35. Una empresa contrata a once nuevos empleados para sus cuatro oficinas. ¿De cuántas maneras es posible destinarlos? ¿Y si cada oficina debe recibir al menos un nuevo empleado?

36. Un alumno de primer curso se va a examinar de cuatro asignaturas: MD, CC, FP y FF. Dispone de los siete días de una semana durante los cuales repasará todas las asignaturas dedicando cada día al estudio de una única asignatura (sin descansar ningún día).

    (a) ¿De cuántas maneras distintas puede organizar su estudio, si se consideran los días indistinguibles?
    (b) ¿Y si consideramos que los días son distintos?

37. Se consideran siete pelotas de distintos colores y cuatro recipientes numerados I, II, III, IV.

    (a) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir las pelotas sin dejar ningún recipiente vacío?
    (b) Si una de las pelotas es blanca, ¿de cuántas formas podemos hacer la distribución para que no quede ningún recipiente vacío y la pelota blanca esté en el recipiente III?
    (c) Si se elimina la numeración de los recipientes de modo que no sea posible diferenciarlos, ¿de cuántas formas se pueden distribuir, con la posibilidad de recipiente(s) vacío(s)?

38. Los Reyes Magos traen n juguetes diferentes a n niños. En el camino deciden dejar sin juguete exactamente a un niño y repartir todos los juguetes entre los restantes niños. ¿De cuántas formas pueden hacerlo?

39. ¿De cuántas formas se pueden repartir $4n$ elementos de manera que cada parte tenga $2n$ elementos?

    ¿De cuántas si cada parte debe tener n elementos?

40. Completa la tabla siguiente indicando el número de maneras de distribuir nueve objetos en cinco recipientes:

Objetos	Recipientes	Posibilidad recipientes vacíos	Número de distribuciones
Indistinguibles	Distinguibles	Si	
Distinguibles	Distinguibles	No	
Distinguibles	Indistinguibles	No	