E.T.S. de INGENIERÍA INFORMÁTICA

Curso 2010/2011

Estructuras Algebraicas para la Computación

Relación de Ejercicios 3

1. En el conjunto $A = \mathbb{Q} - \{1\}$ se define la operación $*$

$$\begin{array}{rccl} *: & A \times A & \longrightarrow & A \\ & (x, y) & \longmapsto & x * y \;\; = x + y - xy \end{array}$$

   Estudia qué estructura algebraica tiene $(A, *)$.

2. En el conjunto $G = \mathbb{R} - \{-1\}$ se define la operación $*$

$$\begin{array}{rccl} *: & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (x, y) & \longmapsto & x * y \;\; = x + y + xy \end{array}$$

   a) Demuestra que $(G, *)$ es grupo abeliano.

   b) Encuentra el valor de $x \in G$ tal que $2 * x * 3 = 35$

3. Sea el conjunto

$$S = \left\{ \frac{1 + 2m}{1 + 2n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

   Determina qué estructura algebraica tiene $(S, \cdot)$.

4. Estudia qué estructura algebraica tiene el conjunto $A = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ con la suma y el producto.

5. Estudia qué propiedades verifican la suma y el producto usual de matrices definidas en el conjunto

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

6. Se considera el conjunto matrices $\mathcal{M}(\mathbb{Z}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; z \in \mathbb{Z} \right\}$.

   a) Estudia qué estructura tiene $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ con la operación producto de matrices.

   b) Idem con la suma.

7. Sea S_3 el conjunto de las permutaciones de 3 elementos.

   a) Demuestra que $(S_3, \circ)$ es un grupo de orden 6 no conmutativo.

   b) Halla un subgrupo de S_3 que sea conmutativo.

8. Sea $(S_5, \circ)$ el grupo de las permutaciones de 5 elementos y sean $\sigma, \rho \in S_5$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

   Halla $(\sigma \circ \rho)^{-1}$.

9. Sea el conjunto de funciones $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ definidas de $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ en sí mismo

$$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = \frac{1}{x} \qquad f_3(x) = 1 - x$$

$$f_4(x) = \frac{1}{1-x} \quad f_5(x) = \frac{x-1}{x} \quad f_6(x) = \frac{x}{x-1}$$

   a) Demuestra que $(F, \circ)$ es un grupo.
   b) Estudia si es abeliano y deduce si es cíclico.
   c) Demuestra que $H = \{f_1, f_3\}$ es un subgrupo de F.
   d) Determina las clases laterales derechas e izquierdas de H. ¿Es un subgrupo normal?

10. En el conjunto $G = \{e, a, b, c, d, f\}$ se considera una operación binaria $*$ dada por

$*$	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a		e	f	c	d
b	b	e	a			
c	c				a	
d	d	f				
f	f	c		a		

Completa la tabla anterior para que $(G, *)$ sea un grupo. ¿Es abeliano?

11. Demuestra o refuta:

   a) El subconjunto de los enteros impares es un subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$.
   b) $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$.
   c) $(\{[0]_{12}, [3]_{12}, [6]_{12}, [9]_{12}\}, +_{12})$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$.
   d) El conjunto de matrices

$$\mathcal{M} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

   es un subgrupo del grupo de matrices $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

12. Dada la matriz

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se define la función $f \colon \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2^5$ como $f(w) = wG$

   a) Demuestra que la imagen de f es un subgrupo de $(\mathbb{Z}_2^5, \oplus)$.
   b) Halla las clases laterales de los elementos 10111 y 10101.
   c) Determina cuántas clases laterales distintas hay. (Sin hallarlas)

13. Para cada una de las siguientes matrices generadoras, determina cuantos errores detecta y cuantos errores corrige el correspondiente código:

$$(i)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad (ii)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14. Escribe la tabla de decodificación para el código dado por la matriz generadora

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Usa esta tabla para corregir el mensaje

1100011 1011000 0101110 0110001 1010110.

15. Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{Z}_2^5$ un código de grupo de cuatro elementos. Sabiendo que 10101 y 11010 son elementos de $\mathcal{C}$, determina:

   a) los restantes elementos de $\mathcal{C}$.

   b) una matriz $\mathcal{G}$ generadora del código y una matriz $\mathcal{H}$ de verificación de paridad asociada.

16. Sea $\mathcal{C}$ un código con matriz de verificación de paridad

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} a & 0 & c & 1 \\ 1 & b & 0 & d \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Calcula los valores a, b, c, d para que $\mathcal{H}$ reconozca las palabras 101011 y 110110 como pertenecientes al código.

   b) Encuentra las restantes palabras del código y determina hasta cuántos errores se pueden corregir.

17. Sea la función de codificación $\mathcal{C}_{\mathcal{G}} : \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2^6$ dada por la matriz generadora

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Escribe la tabla de decodificación para $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$ y determina hasta cuántos errores se pueden corregir.

   b) Decodifica y traduce el mensaje

011011 110000 010110 100000 110110 110111 011111

usando la equivalencia

000	001	010	011	100	101	110	111
–	*T*	*E*	*D*	*A*	*R*	*N*	*H*

18. Se sabe que la matriz generadora de un cierto código es

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y se recibe el mensaje

000111 011100 000000 101101 001010 010011

a) Determina qué palabras pertenecen o no al código calculando su síndrome.

b) Decodifica y traduce el mensaje recibido usando la equivalencia
111 A 110 N 101 T 100 S 011 E 010 R 001 O 000 C

19. Se considera el conjunto $\mathcal{F} = \{f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ en el que se definen la suma y el producto usuales

$$\left.\begin{array}{rrcl} \forall x \in D, & (f+g)(x) & = & f(x)+g(x) \\ & (f \cdot g)(x) & = & f(x) \cdot g(x) \end{array}\right\}$$

Estudia si $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ es anillo unitario.

20. En el conjunto

$$\mathcal{A}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3) = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{Z}_3 \right\}$$

se consideran la suma y el producto de matrices usuales.

Estudia si $(\mathcal{A}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3), +, \cdot)$ es un anillo.

21. En el anillo unitario $(\mathbb{Z}_{15}, +_{15}, \cdot_{15})$ se considera el subconjunto

$$S = \{[0]_{15}, [3]_{15}, [6]_{15}, [9]_{15}, [12]_{15}\}$$

a) Estudia si es un anillo unitario.

b) En caso afirmativo, señala el elemento unidad.

22. Halla los valores de a en el anillo $\mathbb{Z}_8$ que hacen que la ecuación $ax = a$ tenga solución única.

23. Estudia para qué valores de $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, la ecuación $2x = 6$ tiene solución única en $\mathbb{Z}_m$.

24. a) En el anillo $(\mathbb{Z}_{36}, +_{36}, \times_{36})$ determina los elementos que son divisores de cero.

b) En el grupo multiplicativo U_{36} encuentra los inversos de cada uno de los elementos.

25. Demuestra o da un contraejemplo:

a) Todo grupo abeliano es cíclico.

b) Sea $(G, *)$ un grupo. Si G tiene siete elementos, entonces es abeliano.

c) Un grupo $(G, \cdot)$ es conmutativo si y solo si para todo $x, y \in G$ $(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$.

d) $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}_8, +_8)$.

e) $(\mathbb{Z}_{11}^*, \times_{11})$ es un grupo cíclico.

f) El anillo de las matrices cuadradas reales no es un dominio de integridad.

g) Si p es primo, entonces $(\mathbb{Z}_p, +_p, \times_p)$ es un cuerpo.