Las siguientes secciones sustituyen las correspondientes de la guía docente. El objetivo es simplificar el proceso de estudio de una cónica general.

3.1.3.1 Parábolas

Si $a > 0$ y $4ac = b^2$, entonces la expresión

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + \mathrm{e}y + f$$

se puede reescribir como

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + \mathrm{e}y + f = (\sqrt{a}x \pm \sqrt{c}y)^2 + dx + ey + f;$$

por lo tanto, en caso de no ser degenerada, la cónica determinada por este polinomio será una parábola con eje perpendicular al vector $(\sqrt{a}, \pm\sqrt{c})$. El siguiente teorema establece cómo obtener su forma normalizada, a partir de la cual obtendremos sus características más importantes.

Teorema 3.1.10 *Consideremos la curva*

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + \mathrm{e}y + f = 0, \tag{1}$$

siendo $a > 0$ *y* $b^2 - 4ac = 0$.

1. *Si existen constantes* A*,* B *y* C *tales que* $B \neq 0$ *y*

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + \mathrm{e}y + f &= \\ &= \Big(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}y + A\Big)^2 + B\Big(\frac{b}{2\sqrt{a}}x - \sqrt{a}y + C\Big), \end{aligned} \tag{2}$$

   entonces (1) *es una parábola.*

2. *En caso contrario,* (1) *es una cónica degenerada.*

Una vez obtenida la expresión a la derecha de la igualdad (2), y que denominaremos expresión *normalizada*, es fácil determinar el resto de las características de la parábola.

- La recta $\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}y + A = 0$ es su eje y la recta $\frac{b}{2\sqrt{a}}x - \sqrt{a}y + C = 0$ es la tangente a su vértice.
- El vértice queda determinado por la intersección de las rectas anteriores.

- Si $B < 0$ la apertura de parábola está en la dirección y sentido del vector $(\frac{b}{2\sqrt{a}}, -\sqrt{a})$ y si $B > 0$, en el sentido opuesto.
- La parábola (2) se puede parametrizar despejando $(x(t), y(t))$ a partir de las siguientes igualdades:

$$\sqrt{a}x(t) + \frac{b}{2\sqrt{a}}y(t) + A = t$$
$$\frac{b}{2\sqrt{a}}x(t) - \sqrt{a}y(t) + C = \frac{-\,t^2}{B}$$

Ejemplo 3.1.14. La curva

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 4y - 1 = 0$$

es una parábola (o una curva degenerada), ya que $4 \cdot 1 \cdot 1 = 2^2$. Por el teorema anterior, existen números reales A, B y C tales que:

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 4y - 1 &= (x + y + A)^2 + B(x - y + C) = \\ &= x^2 + 2xy + y^2 + (2A + B)x + (2A - B)y + (A^2 + BC) \end{aligned}$$

Identificando coeficientes, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2A + B = 2 \\ 2A - B = -4 \\ A^2 + BC = -1 \end{cases}$$

Su única solución es $A = -1/2$, $B = 3$ y $C = -5/12$ y, por lo tanto, la ecuación de la parábola queda:

$$(x + y - \frac{1}{2})^2 + 3(x - y - \frac{5}{12}) = 0 \tag{3}$$

La recta $x + y - \frac{1}{2} = 0$ es el eje de la parábola y $x - y - \frac{5}{12} = 0$ es la recta tangente al vértice; su vértice es el punto $(11/24, 1/24)$ que se obtiene resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x + y - \frac{1}{2} & = 0 \\ x - y - \frac{5}{12} & = 0 \end{cases}$$

Mirando el segundo sumando de la ecuación (3), deducimos la dirección y el sentido de la apertura de la parábola:

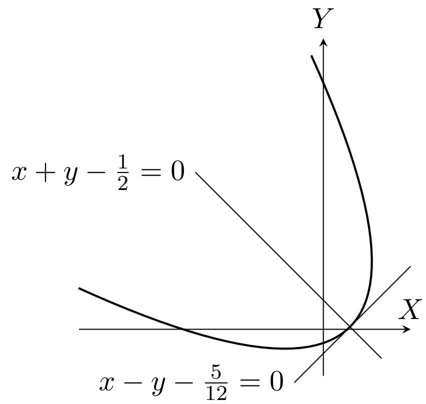
$$\begin{array}{cccccc} +3 & (& x & -y & -\frac{5}{12}) & \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \\ \text{sentido opuesto a} & (& 1, & -1 &) & \end{array} \tag{4}$$

Para obtener la parametrización de la parábola, planteamos las igualdades

$$\begin{aligned} x + y - \tfrac{1}{2} &= t \\ x - y - \tfrac{5}{12} &= -\tfrac{t^2}{3} \end{aligned}$$

y despejamos x e y en función de t:

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{1}{6}t^2 + \dfrac{1}{2}t + \dfrac{11}{24} \\ y(t) = \dfrac{1}{6}t^2 + \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{24} \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$



□

3.1.3.2 Elipses e hipérbolas

Teorema 3.1.11 *Consideremos la curva*

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \tag{5}$$

y supongamos que $b^2 - 4ac \neq 0$.

1. *Entonces existen constantes* A, B, C, D, E *y* M *tales que*

$$\begin{aligned} &ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = \\ &\qquad = A(x + My + B)^2 + C(Mx - y + D)^2 + E. \end{aligned} \tag{6}$$

2. *Si* $AC < 0$ *y* $E \neq 0$, *entonces la curva es una hipérbola; si* $AC > 0$ *y* $AE < 0$, *la curva es una elipse; en cualquier otro caso, es una cónica degenerada.*

Una vez obtenida la expresión a la derecha de la igualdad (6), y que denominaremos expresión *normalizada*, es fácil determinar el resto de las características.

- Las rectas $x + My + B = 0$ y $Mx - y + D = 0$ son los ejes de la cónica y el punto de corte entre ellas es el centro de la cónica.

- Si (6) es una hipérbola, podemos obtener las parametrizaciones de las dos ramas utilizando las funciones hiperbólicas y la propiedad $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$. De esta forma, si $A/E < 0$, la parametrización de cada rama de la hipérbola se obtendría despejando $(x(t), y(t))$ en los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\frac{-A}{E}}(x(t)+My(t)+B)&=\cosh t\\ \sqrt{\frac{C}{E}}(Mx(t)-y(t)+D)&=\operatorname{senh} t\end{aligned}\;\right|\;\begin{aligned}\sqrt{\frac{-A}{E}}(x(t)+My(t)+B)&=-\cosh t\\ \sqrt{\frac{C}{E}}(Mx(t)-y(t)+D)&=\operatorname{senh} t\end{aligned}$$

  En el caso $A/E > 0$, los sistemas se obtendrían de forma análoga intercambiando las funciones hiperbólicas.

- Si (6) es una elipse, podemos obtener un parametrización despejando $(x(t), y(t))$ a partir de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\sqrt{-A/E}(x(t)+My(t)+B) &= \cos t\\ \sqrt{-C/E}(Mx(t)-y(t)+D) &= \operatorname{sen} t\end{aligned}$$

Los parámetros A, B, C, D, E y M se determinan mediante la identificación de los coeficientes de las polinomios de la identidad

$$\begin{aligned}ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f &= A(x+My+B)^2+C(Mx-y+D)^2+E=\\ &= (CM^2+A)x^2+2M(A-C)xy+(AM^2+C)y^2+\\ &\quad +(2C\mathrm{D}M+2AB)x+(2ABM-2C\mathrm{D})y+(E+C\mathrm{D}^2+AB^2)\end{aligned}$$

Es recomendable empezar por el cálculo de M, que se determina a partir de los términos en x^2, en xy y en y^2 como sigue:

$$\begin{aligned} x^2 \rightarrow &\qquad a = A + M^2C\\ xy \rightarrow &\qquad b = 2M(A-C)\\ y^2 \rightarrow &\qquad c = C + M^2A\\ x \rightarrow &\qquad d = 2C\mathrm{D}M + 2AB\\ y \rightarrow &\qquad e = 2ABM - 2C\mathrm{D}\\ \text{ind.} \rightarrow &\qquad f = E + C\mathrm{D}^2 + AB^2\end{aligned}\tag{7}$$

El sistema está formado por seis ecuaciones y tiene seis incógnitas; sin embargo, es conveniente trabajar con él empezando por el sistema formado por las tres primeras ecuaciones y que nos permitirán calcular los valores de A, C y M; a continuación, sustituiremos sus valores en las tres ecuaciones restantes y resolveremos un segundo sistema para hallar las otras tres incógnitas.

Para resolver la primera parte, seguiremos los siguientes pasos. En primer lugar, restamos la tercera ecuación a la primera para obtener:

$$a - c = (A - C) - M^2(A - C) = (A - C)(1 - M^2). \tag{8}$$

Por otra parte, podemos suponer que $b \neq 0$, ya que en caso contrario la cónica estaría en su posición típica y la hubiéramos estudiado con los métodos vistos anteriormente en el tema. Por lo tanto, a partir de la segunda ecuación podremos escribir $A - C = \dfrac{b}{2M}$ y sustituir en (8) para obtener una ecuación en M:

$$a - c = \frac{b}{2M}(1 - M^2).$$

Esta ecuación es de segundo grado y, por lo tanto, podrá conducir a dos soluciones; sin embargo, podemos utilizar solo una de ellas, ya que ambas conducen a la misma forma normalizada para las cónicas.

Ejemplo 3.1.15. La curva

$$9x^2 + 4xy + 6y^2 - 14x + 8y + 10 = 0$$

es una elipse o una hipérbola, ya que $4 \cdot 9 \cdot 6 \neq 4^2$. Por lo tanto, existen números reales A, B, C, D, E y M tales que

$$\begin{aligned} 9x^2 + 4xy + 6y^2 - 14x + 8y + 10 &= A(x + My + B)^2 + C(Mx - y + D)^2 + E = \\ &= (CM^2 + A)x^2 + 2M(A - C)xy + (AM^2 + C)y^2 + \\ &\quad + (2CDM + 2AB)x + (2ABM - 2CD)y + (E + CD^2 + AB^2) \end{aligned}$$

Siguiendo las indicaciones dadas anteriormente, nos fijamos en primer lugar en los coeficientes de los términos de segundo grado:

$$\begin{aligned} x^2 &\to \qquad 9 = A + M^2C \\ xy &\to \qquad 4 = 2M(A - C) \\ y^2 &\to \qquad 6 = C + M^2A \end{aligned}$$

De la segunda ecuación deducimos que $A - C = \dfrac{2}{M}$; restando la tercera a la primera, obtenemos que $3 = (A - C) - M^2(A - C)$ y, por lo tanto,

$$\begin{gathered} 3 = \frac{2}{M} - M^2\frac{2}{M} = \frac{2}{M} - 2M \\ 3M = 2 - 2M^2 \\ 2M^2 + 3M - 2 = 0 \\ M = -2, \quad M = \frac{1}{2} \end{gathered}$$

Como hemos dicho anteriormente, podemos seguir solo con una de estas dos soluciones para M (aunque el alumno debería analizar la otra posibilidad para observar que se llega a la misma forma normalizada). Haciendo $M = -2$ en las dos primeras ecuaciones (correspondientes a x^2 y xy) obtenemos que

$$\begin{aligned} 9 &= A + 4C \\ 4 &= -4A + 4C \end{aligned}$$

de donde se deduce fácilmente (basta restar la ecuaciones) que $A = 1$ y $C = 2$. Obsérvese que los coeficientes de la parte cuadrática son suficientes para determinar las direcciones de los ejes y deducir que la cónica es una elipse.

A continuación, tomamos el sistema formado por el resto de los coeficientes:

$$\begin{aligned} 2CDM + 2AB = -14 \qquad &\Longrightarrow \qquad -8\mathrm{D} + 2B = -14 \\ 2ABM - 2CD = 8 \qquad &\Longrightarrow \qquad -4B - 4D = 8 \\ E + CD^2 + AB^2 = 10 \qquad &\Longrightarrow \qquad E + 2D^2 + B^2 = 10 \end{aligned}$$

Las dos primeras ecuaciones forman un sistema lineal en B y D que se resuelve fácilmente para llegar a $B = -3$ y D $= 1$; finalmente, la última ecuación conduce a $E = -1$.

Por lo tanto, una forma normalizada de la elipse es:

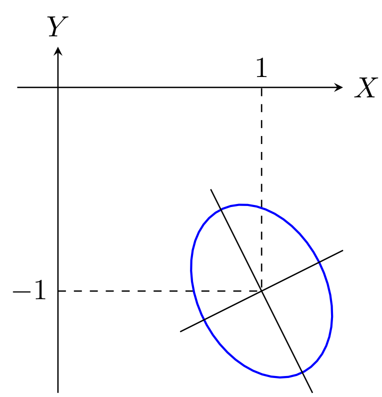
$$(x - 2y - 3)^2 + 2(-2x - y + 1)^2 - 1 = 0$$

El centro es la intersección de sus ejes, $-2x - y + 1 = 0$, $x - 2y - 3 = 0$, es decir, $(x_0, y_0) = (1, -1)$. Una parametrización se obtiene a partir de la igualdades

$$x - 2y - 3 = \cos t, \qquad \sqrt{2}(-2x - y + 1) = \operatorname{sen} t$$

Despejando x e y en función de t:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{-\sqrt{2}}{5}\operatorname{sen} t + \dfrac{1}{5}\cos t + 1 \\ y(t) = \dfrac{-\sqrt{2}}{10}\operatorname{sen} t - \dfrac{2}{5}\cos t - 1 \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$



También podemos calcular los vértices de la elipse como los puntos de corte de los ejes con la curva y para ello utilizamos igualmente la forma normalizada. Por ejemplo, si hacemos $2x+y-1=0$, obtenemos que $(x-2y-3)^2=1$, por lo que los dos puntos de corte son las soluciones de los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x+y-1 & =0 \\ x-2y-3 & =1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} 2x+y-1 & =0 \\ x-2y-3 & =-1 \end{array}\right.$$

Análogamente, los puntos de corte con el otro eje son las soluciones de los sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rl} \sqrt{2}(2x+y-1) & =1 \\ x-2y-3 & =0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rl} \sqrt{2}(2x+y-1) & =-1 \\ x-2y-3 & =0 \end{array}\right.$$

Por lo tanto, los cuatro vértices son
$(6/5,-7/5)$, $(4/5,-3/5)$, $(1+\sqrt{2}/5,-1+\sqrt{2}/10)$ y $(1-\sqrt{2}/5,-1-\sqrt{2}/10)$.

También podemos obtener los vértices a partir de la parametrización con los valores $t=0$, $t=\pi/2$, $t=\pi$ y $t=3\pi/2$. □

Ejemplo 3.1.16. Vamos a analizar la curva

$$2xy-x+1=0.$$

Se trata de una elipse o una hipérbola y su forma normalizada será de la forma:

$$2xy-x+1=A(x+My+B)^2+C(Mx-y+D)^2+E$$

Desarrollando e identificando coeficientes tal y como hemos hecho en el ejemplo anterior, deducimos que realmente se trata de la siguiente hipérbola:

$$\frac{1}{2}(x-y+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}(x+y-\frac{1}{2})^2-1=0.$$

Para obtener las parametrizaciones, hacemos

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y+\frac{1}{2})=\pm\cosh t \quad \text{y} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y-\frac{1}{2})=\operatorname{senh} t$$

y deducimos las ecuaciones paramétricas de las dos ramas de la hipérbola:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{senh} t+\cosh t) \\ y_1(t)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{senh} t-\cosh t) \\ t\in\mathbb{R} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x_2(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{senh} t-\cosh t) \\ y_2(t)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{senh} t+\cosh t) \\ t\in\mathbb{R} \end{array}\right.$$

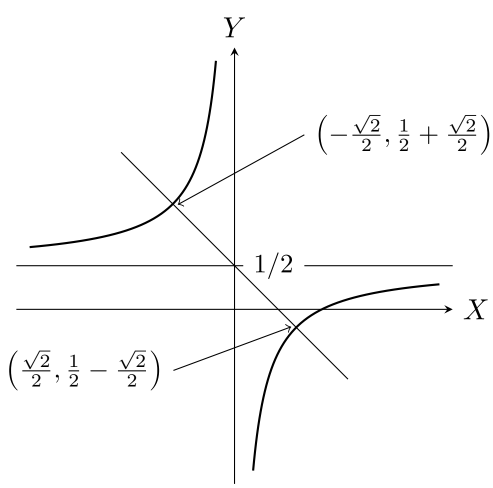
Ambas ramas tienen a las rectas $x = 0$ y $y = 1/2$ como asíntotas; basta hacer el estudio para una de de las ramas ya que ambas tienen las mismas asíntotas; por ejemplo, los siguientes límites demuestran que $y = 1/2$ es asíntota horizontal:

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{senh} t + \cosh t) = +\infty$$
$$\lim_{t\to\infty} y_1(t) = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{senh} t - \cosh t)\right) = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{-2\mathrm{e}^{-t}}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Finalmente, hallamos los vértices de la hipérbola buscando los puntos de corte de los ejes con la curva. El eje
$$x - y + \frac{1}{2} = 0$$
no corta a la hipérbola, ya que en ese caso, de la forma normalizada deducimos que
$$-\frac{1}{2}(x + y - \frac{1}{2})^2 = 1,$$
que no puede tener solución porque los miembros tienen signos distintos.

El otro eje, $x+y-\frac{1}{2} = 0$, sí corta a la hipérbola; utilizando la forma normalizada obtenemos los sistemas lineales
$$x + y - \frac{1}{2} = 0$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x - y + \frac{1}{2}) = \pm 1$$
cuyas soluciones son $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2})$, $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2})$. También podemos determinar estos vértices a partir de las parametrizaciones evaluando en $t = 0$.

Ya podemos dibujar las curvas:



□

Ejercicio: Demuestre que si

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \tag{9}$$

es no degenerada y

- $b^2 - 4ac > 0$, entonces (9) es una hipérbola
- $b^2 - 4ac < 0$, entonces (9) es una elipse

Solución: Si multiplicamos la primera y la tercera igualdad de (7), obtenemos que

$$ac = M^2C^2 + M^2A^2 + AC + M^4AC$$

y elevando al cuadrado la segunda igualdad de (7), obtenemos que

$$b^2 = 4M^2(A^2 - 2AC + C^2)$$

Así, se tiene que

$$b^2 - 4ac = \cancel{4M^2A^2} - 8M^2AC + \cancel{4M^2C^2} - \cancel{4M^2A^2} - \cancel{4M^2C^2} - 4AC - 4M^4AC =$$

$$= -4AC(M^4 + 1 + 2M^2) = -4AC(M^2 + 1)^2$$

y, en consecuencia,

- si $b^2 - 4ac > 0$, entonces $AC < 0$. Por tanto, en virtud del teorema 3.1.11, podemos afirmar que (9) es una hipérbola.
- si $b^2 - 4ac < 0$, entonces $AC > 0$. Por tanto, $AE < 0$ (puesto que si $AE \geq 0$ se tendría que (9) es degenerada, en contra de nuestra hipótesis) y, de nuevo en virtud del teorema 3.1.11, podemos afirmar que (9) es una elipse.