Matemática Discreta

Mariam Cobalea

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Funciones

- Definiciones.
- Tipos de funciones: inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.
- Propiedades.

Funciones

La idea de **función** consiste en asociar a unos elementos, que denominaremos **originales**, otros que llamaremos **imágenes** por medio de un determinado proceso, que debe cumplir:

- Toda entrada ha de tener una salida.
- A dos entradas iguales han de corresponder dos salidas iguales.

Es decir, **cada entrada ha de tener exactamente una salida**.

Al conjunto de las posibles entradas lo denominaremos **conjunto original** y al que contiene todas las posibles salidas lo llamaremos **conjunto imagen**.

Funciones

Definición

*Sean A y B conjuntos. Una **función** f de A en B es una relación binaria de A en B que verifica:*

para cada $a \in A$ existe un único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

- Si f es una función de A en B, se denota $f : A \to B$.
- Si $(a, b) \in f$, escribimos $f(a) = b$, ya que solo hay un elemento que esté relacionado con a mediante f.

Funciones

Ejemplo Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{5, 6, 7\}$, se define la relación $\mathcal{R}_f \subseteq A \times B$

$$\mathcal{R}_f = \{(1, 5), (2, 5), (3, 6), (a, b)\}$$

Estudia si es posible encontrar elementos $a \in A$ y $b \in B$ tales que:

1. $\mathcal{R}_f$ no sea una función.

Funciones

La terminología asociada a funciones es consistente con la de relaciones.

Si $f : A \to B$ es una función, entonces

- el ***dominio*** de f es todo el conjunto A.
- B se llama ***codominio*** de f.
- en la expresión $f(a) = b$, al elemento a se le llama ***argumento*** de la función y al elemento b se le llama el ***valor*** de la función para el argumento a.
- también decimos que el elemento b es la ***imagen*** del elemento a mediante la función f.
- el rango de la función, que en este contexto se denomina preferiblemente **imagen**, puede ser un subconjunto propio de B: $\mathrm{Im}(f) \subseteq B$.

Funciones

Para definir una función $f\colon A \to B$ hay que especificar

- el dominio,
- el codominio y
- el valor de $f(a)$ para cada posible argumento a.

- Si $A \subseteq B$, llamamos **función inclusión** a la función $i\colon A \to B$, definida por $i(a) = a$.

- En particular, si $A = B$, la función anterior se denomina **identidad de A** y se denota 1_A; es decir, $1_A(a) = a$.

Funciones

- Las funciones más comunes en las matemáticas elementales son aquellas en las que A y B son conjuntos de números, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \ldots$.
- En este caso, la manera más sencilla de especificar una función es mediante una fórmula.

Ejemplos

- La función de $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, definida $f_1(x) = x^2$.
- La función $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida $f_2(x) = 2^x$.
- La función $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida $f_3(x) = senx$.
- La función $f_4 : (0, 1) \to \mathbb{R}$, definida $f_4(x) = \frac{(1/2-x)}{x(1-x)}$

Algunas funciones requieren una definición 'a trozos'.

Ejemplos

- La función $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Esta función asigna a cada entero x su *valor absoluto*, que habitualmente se escribe $|x|$.

Funciones

Ejemplos

- La función $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ es par} \\ \\ -\frac{x+1}{2} & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

- La función $g\colon [0,1] \to (0,1)$ dada por

$$\begin{aligned} g(0) &= \tfrac{1}{2} \\ g\left(\tfrac{1}{n}\right) &= \tfrac{1}{n+2}, \qquad n \in \mathbb{N} \\ g(x) &= x, \qquad\quad x \in [0,1] - \{0, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots, \tfrac{1}{n}, \ldots\} \end{aligned}$$

Funciones

Si el dominio de la función tiene n elementos, la función se puede definir explícitamente dando los valores para todos los posibles argumentos.

Ejemplo $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}, \quad B = \{b_1, b_2, b_3\}$

$$\begin{array}{rcccc} f & : & A & \to & B \\ & & a_1 & \mapsto & b_3 \\ & & a_2 & \mapsto & b_1 \\ & & a_3 & \mapsto & b_3 \\ & & a_4 & \mapsto & b_2 \\ & & a_5 & \mapsto & b_1 \end{array}$$

A	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
B	b_3	b_1	b_3	b_2	b_1

Funciones

Ejemplo $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}, \qquad B = \{b_1, b_2, b_3\}$

$$\begin{array}{rcccc} f & : & A & \to & B \\ & & a_1 & \mapsto & b_3 \\ & & a_2 & \mapsto & b_1 \\ & & a_3 & \mapsto & b_3 \\ & & a_4 & \mapsto & b_2 \\ & & a_5 & \mapsto & b_1 \end{array}$$

A	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
B	b_3	b_1	b_3	b_2	b_1

En estos casos, considerando el conjunto A como lista ordenada, podemos identificar cada función $f : A \to B$ con la secuencia de sus imágenes. Así, la función anterior queda determinada por

$$(b_3, b_1, b_3, b_2, b_1)$$

Funciones

- Un caso particular del ejemplo anterior, bastante importante en matemáticas, son las **permutaciones**, es decir, aplicaciones del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ en si mismo.
- En estas funciones, en lugar de la tablas que hemos usado anteriormente, utilizamos una representación matricial.
- Por ejemplo, mostramos a continuación las seis permutaciones, $\sigma\colon \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$, distintas:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema

Dadas las funciones $f\colon A \to B$ *y* $g\colon B \to C$, *la composición*

$$g \circ f\colon A \to C$$

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

también es una función.

Demostración: Ejercicio

Ejemplo Dados los conjuntos $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ y $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$, se consideran las funciones $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$, definidas

$$\begin{array}{rcl} f(a_1) & = & b_3 \\ f(a_2) & = & b_1 \\ f(a_3) & = & b_2 \\ f(a_4) & = & b_3 \\ f(a_5) & = & b_2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g(b_1) & = & c_2 \\ g(b_2) & = & c_3 \\ g(b_3) & = & c_2 \\ g(b_4) & = & c_1 \end{array}$$

La composición $g \circ f$ está definida

$$\begin{array}{rcl} (g \circ f)(a_1) & = & g(f(a_1)) = g(b_3) = c_2 \\ (g \circ f)(a_2) & = & g(f(a_2)) = g(b_1) = c_2 \\ (g \circ f)(a_3) & = & g(f(a_3)) = g(b_2) = c_3 \\ (g \circ f)(a_4) & = & g(f(a_4)) = g(b_3) = c_2 \\ (g \circ f)(a_5) & = & g(f(a_5)) = g(b_2) = c_3 \end{array}$$

Ejemplo En los conjuntos $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ y $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$, se definen las funciones

f

A	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
B	b_3	b_1	b_2	b_3	b_2

g

B	b_1	b_2	b_3	b_4
C	c_2	c_3	c_2	c_1

La composición $g \circ f$ será:

$g \circ f$

A	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
C	c_2	c_2	c_3	c_2	c_3

☛ La composición de funciones **no** es conmutativa.

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Ejemplo

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma_4$$

$$\sigma_2 \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_3$$

La composición de funciones verifica la propiedad asociativa.

Teorema

Sean las funciones $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ *y* $h\colon C \to D$*. Entonces*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Demostración: Ejercicio

Definición (Imagen y Preimagen)

Sea la función $f: A \to B$ *y sean* $A_1 \subseteq A$ *y* $B_1 \subseteq B$. *Se llama* **imagen directa** *del subconjunto* A_1 *al conjunto de imágenes de los elementos de* A_1. *Se denota* $f(A_1)$.

$$f(A_1) = \{b \in B \mid \exists a \in A_1,\ f(a) = b\}$$

Para $A_1 = A$ *tenemos*

$$f(A) = \{b \in B \mid \exists a \in A,\ f(a) = b\} = rang(f)$$

Se llama **preimagen** *del subconjunto* B_1 *al conjunto de elementos de* A *cuya imagen es un elemento de* B_1. *Se denota* $f^{-1}(B_1)$.

$$f^{-1}(B_1) = \{a \in A \mid f(a) \in B_1\}$$

Ejemplo Para $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ definimos la función:

$$\begin{aligned} f: \quad & A \to B \\ & f(a_1) = b_2 \\ & f(a_2) = b_1 \\ & f(a_3) = b_3 \\ & f(a_4) = b_2 \\ & f(a_5) = b_3 \\ & f(a_6) = b_4 \end{aligned}$$

Si consideramos $A_1 = \{a_2, a_3, a_4\}$, tenemos que

$$f(A_1) = f\big(\{a_2, a_3, a_4\}\big) = \{b_1, b_3, b_2\}$$

$$f^{-1}(f(A_1)) = f^{-1}(\{b_1, b_3, b_2\}) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} \supseteq A_1$$

Ejemplo $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & A \to B \\ & f(a_1) = b_2 \\ & f(a_2) = b_1 \\ & f(a_3) = b_3 \\ & f(a_4) = b_2 \\ & f(a_5) = b_3 \\ & f(a_6) = b_4 \end{aligned}$$

Para el subconjunto $B_1 = \{b_3, b_4, b_5\}$,

Ejemplo $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$

$$
\begin{aligned}
f: \quad A &\to B \\
f(a_1) &= b_2 \\
f(a_2) &= b_1 \\
f(a_3) &= b_3 \\
f(a_4) &= b_2 \\
f(a_5) &= b_3 \\
f(a_6) &= b_4
\end{aligned}
$$

Para el subconjunto $B_1 = \{b_3, b_4, b_5\}$, tenemos

$$f^{-1}(B_1) = \{a_3, a_5, a_6\}$$

$$f(f^{-1}(B_1)) = \{b_3, b_4\} \subseteq B_1$$

Definición

Sea $f\colon A \to B$ una función. Se dice que

- *f es **inyectiva** si elementos distintos tienen imágenes distintas:*

$$\text{para todo } a_1, a_2 \in A, \quad \text{si } a_1 \neq a_2, \ \text{entonces } f(a_1) \neq f(a_2)$$

Equivalentemente, f es inyectiva si

$$\text{para todo } a_1, a_2 \in A, \quad \text{si } f(a_1) = f(a_2), \ \text{entonces } a_1 = a_2$$

Ejemplos

- Las inclusiones $i\colon A \to B$ son funciones inyectivas.
- La función $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida $f(x) = 2x$, es inyectiva.
- La función $g\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$, definida $g(x) = \operatorname{sen} x$, no es inyectiva.

Ejercicio Sea el conjunto $X = \{x, y, z, t\}$ y $f \subseteq X \times X$ la relación binaria dada por la matriz

$$\mathcal{M}_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - & 1 \\ - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Completa la matriz $\mathcal{M}_f$ sabiendo que f es una función inyectiva.

Definición

Sea $f\colon A \to B$ una función. Se dice que

- *f es **sobreyectiva** si todo elemento del codominio tiene preimagen:*

$$\textit{para todo}\ \ b \in B,\ \exists\ a \in A, \textit{tal que}\ f(a) = b$$

Ejemplos

1. La función $g\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$, definida $g(x) = \operatorname{sen} x$, es sobreyectiva, pero no es inyectiva.

Definición

Sea $f : A \to B$ una función. Se dice que

- *f es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.*

Ejemplos

1. Las identidades 1_A son funciones biyectivas.
2. La permutación $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ es biyectiva.

Ejemplos

3. La función $g\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$, definida $g(x) = \operatorname{sen} x$, no es biyectiva ya que es sobreyectiva, pero no es inyectiva.
4. La función $h\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, definida $h(x) = \operatorname{sen} x$, es biyectiva.

Ejercicio

1. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{5, 6, 7\}$, se define la relación $\mathcal{R}_f \subseteq A \times B$

$$\mathcal{R}_f = \{(1, 5), (2, 5), (3, 6), (a, b)\}$$

   Estudia si es posible hallar elementos $a \in A$ y $b \in B$ tales que:
   1. $\mathcal{R}_f$ sea una función inyectiva.
   2. $\mathcal{R}_f$ sea una función sobreyectiva.
2. En el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales se define una relación binaria $\mathcal{R}$ de la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} \mathcal{R} \frac{c}{d} \iff c = 2a + b \quad \text{y} \quad d = b$$

   Prueba que es una función y estudia de qué tipo es.

Ejercicio Sean los conjuntos $S = \{1, 2\}$ y $T = \{a, b, c, d\}$.

1. Determina el número de funciones de S en T que se pueden definir.
    - ¿Cuántas de estas funciones son sobrectivas?
    - ¿Cuántas de estas funciones no son inyectivas?
2. Determina el número de funciones de T en S que se pueden definir.
    - ¿Cuántas de estas funciones son inyectivas?
    - ¿Cuántas no son sobreyectivas?
    - ¿Cuántas de estas funciones son sobreyectivas?

Ejercicio Sea el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros y las funciones

$$\begin{array}{rcrcl} f & : & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & & (a,b) & \mapsto & a-b \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{rcrcl} g & : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \\ & & a & \mapsto & (a,-a) \end{array}$$

1. Determina $g \circ f$ y $f \circ g$.
2. Estudia las propiedades de f, g, $g \circ f$ y $f \circ g$.

Teorema

1. *Si* f *y* g *son inyectivas, entonces* $g \circ f$ *también es inyectiva.*
2. *Si* f *y* g *son sobreyectivas, entonces* $g \circ f$ *también es sobreyectiva.*

Demostración: Ejercicio

Corolario

Si f *y* g *son biyectivas, entonces* $g \circ f$ *es biyectiva.*

- El recíproco de los resultados anteriores **no** se verifica.
  - ☛ Si $g \circ f$ es inyectiva, puede que g no lo sea.
  - ☛ Si $g \circ f$ es sobreyectiva, puede que f no lo sea.
- Para comprobarlo, basta dar un contraejemplo.
- Sin embargo, podemos demostrar los resultados siguientes:

Teorema

1. *Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.*
2. *Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva*

Corolario

Si $g \circ f$ es biyectiva, entonces f es inyectiva y g es sobreyectiva.

Definición

*Dada la función $f\colon A \to B$, se dice que $g\colon B \to A$ es una función **inversa** de f si, para cada $a \in A$ y $b \in B$*

$$(g \circ f)(a) = a, \quad (f \circ g)(b) = b$$

En otras palabras,

$$g \circ f = 1_A \qquad \text{y} \qquad f \circ g = 1_B$$

Las ecuaciones de la definición pueden enunciarse

$$f(a) = b \iff g(b) = a$$

lo cual se corresponde con la noción intuitiva de inversa.

Por ejemplo, dada la función $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = x + 7$, podemos hallar una función inversa g si tenemos en cuenta que

$$x + 7 = y \iff y - 7 = x$$

de forma que $g(y) = y - 7$ verifica

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 7) = (x + 7) - 7 = x = 1_{\mathbb{Z}}(x)$$

No toda función tiene una inversa, pero ***si la tiene es única***.

En efecto, dada $f\colon A \to B$, si podemos encontrar funciones g y g' que satisfacen ambas las condiciones para ser una inversa de f, entonces

$$g' \circ f = 1_A \qquad \text{y} \qquad f \circ g = 1_B$$

Así tenemos

$$g = (g' \circ f) \circ g = g' \circ (f \circ g) = g'$$

Por esta razón, hablaremos de la inversa de f (si existe) y utilizaremos la notación f^{-1} para la única función inversa de f.

Además, la inversa de f^{-1} es f (¿Por qué?)

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

Teorema

Una función $f : A \to B$ tiene inversa si, y sólo si, es biyectiva.

Demostración ($\mathcal{I}$): $(\Longleftarrow)$

- Supongamos que $f : A \to B$ es una biyección.
- Para cada $b \in B$ existe exactamente un $a \in A$ tal que $f(a) = b$.
- La regla $g(b) = a$ define una función de B en A que es la inversa de f.

Teorema

Una función $f : A \to B$ tiene inversa si, y sólo si, es biyectiva.

Demostración (II): ($\Longrightarrow$)

- Recíprocamente, supongamos que f tiene inversa f^{-1}.
- Dado un $b \in B$, sabemos que $f(f^{-1}(b)) = b$.
- Así que, tomando $a = f^{-1}(b)$, obtenemos $f(a) = b$.
- Por lo tanto, f es sobreyectiva.
- Para demostrar que f es inyectiva, supongamos que $f(a) = f(a')$.
- Aplicando f^{-1} a ambos lados de esta ecuación resulta $a = a'$, tal como queríamos demostrar.

Ejercicio Si $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to A$ son funciones biyectivas, entonces la inversa de $g \circ f$ es $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Teorema

La inversa de una función biyectiva es también una función biyectiva

Demostración: ***Ejercicio***

Sugerencia: Usa el teorema anterior.

Ejercicio

Sea la función $f : A \to B$. En el conjunto A se define la relación $\cong$

$$a_1 \cong a_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(a_1) = f(a_2)$$

Demuestra que $\cong$ es una relación de equivalencia y describe la partición que determina.