Estructuras Algebraicas para la Computación

Mariam Cobalea

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Relaciones de orden

Definición (Relación de orden parcial)

Sea $\mathcal{R}$ *una relación binaria definida sobre un conjunto no vacío* A.

- *Se dice que* $\mathcal{R}$ *es una* **relación de orden parcial** *si es* **reflexiva**, **antisimétrica** *y* **transitiva**.
- *El par* $(A, \mathcal{R})$ *se llama* ***conjunto parcialmente ordenado.***

Ejemplo

- $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

☛ Las relaciones de orden permiten **comparar** los elementos de un conjunto.

Relaciones de orden

Ejemplo En el conjunto $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ se considera la relación $\mid$ de divisibilidad:

$$2 \mid 2,\ 2 \mid 4,\ 2 \mid 10,\ 2 \mid 12,\ 2 \mid 20,\ 4 \mid 4,\ 4 \mid 12, 4 \mid 20,$$

$$5 \mid 5,\ 5 \mid 10,\ 5 \mid 20,\ 10 \mid 10,\ 10 \mid 20,\ 12 \mid 12,\ 20 \mid 20$$

$$\mathcal{R}_{\mid} = \{(2,2), (2,4), (2,10), (2,12), (2,20), (4,4), (4,12), (4,20), (5,5), (5,10), (5,20), (10,10), (10,20), (12,12), (20,20)\}$$

Relaciones de orden

Notación: Para denotar las relaciones de orden usaremos los símbolos

$$\preceq \qquad \ll \qquad \sqsubseteq$$

Vocabulario : Cuando $a \preceq b$, se dice que:

- el elemento a ***es anterior*** al elemento b,
- el elemento b ***es posterior*** al elemento a,

- el elemento a ***precede*** al elemento b,
- el elemento b ***sucede*** al elemento a.

Relaciones de orden

Representación de relaciones de orden parcial: Diagramas de Hasse

Una relación de orden parcial $\preceq$ sobre un conjunto A se puede representar usando un grafo simplificado teniendo en cuenta las propiedades de la relación: reflexiva, antisimétrica y transitiva.

- ✓ Por ser reflexiva, tenemos asegurados los arcos (a, a).
- ✓ Por ser antisimétrica, no habrá arcos de ida y vuelta, es decir, si aparece (a, b), no aparecerá (b, a).
- ✓ Por ser transitiva, si aparecen los arcos (a, b) y (b, c), también contamos con el arco (a, c).
- ✓ Por todo ello, podemos **simplificar** la gráfica prescindiendo de los arcos que están asegurados.

Relaciones de orden

Representación: Diagramas de Hasse

Para determinar qué arcos son imprescindibles definimos los siguientes conceptos.

Definición

Sean a y b elementos de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$.

- *Se dice que son elementos **comparables** si $a \preceq b$ ó bien $b \preceq a$.*
- *Se dice que el elemento b es **sucesor inmediato** del elemento a si se verifican las siguientes condiciones:*
  - $a \preceq b$
  - *No existe $c \in A$, tal que $a \preceq c \preceq b$.*

Relaciones de orden

Representación: Diagramas de Hasse

Ejemplo

Se considera el conjunto $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$, parcialmente ordenado por la relación de divisibilidad.

$$\mathcal{R}_| = \{(2,2), (2,4), (2,10), (2,12), (2,20), (4,4), (4,12), (4,20), (5,5), (5,10), (5,20), (10,10), (10,20), (12,12), (20,20)\}$$

- Comprobamos que 20 es sucesor inmediato 4, ya que $4 \mid 20$ y no existe ningún elemento $c \in A$ tal que $4 \mid c$ y $c \mid 20$.
- ¿Se puede decir que 20 es sucesor inmediato de 5 ?

Relaciones de orden

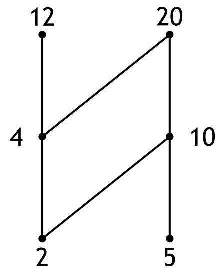
Representación: Diagramas de Hasse

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos describir un grafo de la relación más simple: el ***diagrama de Hasse***.

- Empezamos representando cada elemento del conjunto A con un punto del plano, colocándolos de abajo hacia arriba (el punto a por debajo del b, si $a \preceq b$).
- Dibujamos una línea ascendente desde cada elemento hasta cada uno de sus sucesores inmediatos.
- Se suprimen las orientaciones, pues todas las líneas son ascendentes.

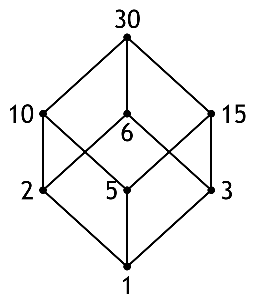
Relaciones de orden
Representación: Diagramas de Hasse

Ejemplo El conjunto $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ con la relación de orden parcial divisibilidad se representa mediante el diagrama de Hasse:



Relaciones de orden
Representación: Diagramas de Hasse

Ejemplo El conjunto $\mathcal{D}_{30}$ de los divisores de 30 con la relación de orden parcial divisibilidad se representa



Relaciones de orden
Representación: Diagramas de Hasse

Ejercicio En el conjunto $T = \{a, b, c, d, e, f\}$ se define la relación

$$\mathcal{R} = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(b,b),(b,d),(b,e),(b,f),$$

$$(c,c),(c,d),(c,e),(c,f),(d,d),(d,f),(e,e),(e,f),(f,f)\}$$

1. Demuestra que $(T, \mathcal{R})$ es un conjunto parcialmente ordenado.
2. Dibuja su diagrama de Hasse.

Solución

1. Para demostrar que $(T, \mathcal{R})$ es un conjunto **parcialmente ordenado** hay que justificar que $\mathcal{R}$ es una relación de **orden parcial: reflexiva, antisimétrica** y **transitiva.** Para ello, usamos la matriz asociada.

Relaciones de orden
Representación: Diagramas de Hasse

Ejercicio En el conjunto $T = \{a, b, c, d, e, f\}$ se define la relación

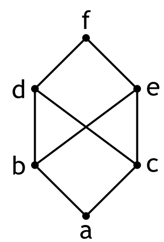
$$\mathcal{R} = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(b,b),(b,d),(b,e),(b,f),$$

$$(c,c),(c,d),(c,e),(c,f),(d,d),(d,f),(e,e),(e,f),(f,f)\}$$

2. Dibuja su diagrama de Hasse.

Solución

2. Su diagrama de Hasse es



Relaciones de orden
Orden producto

Definición (Orden Producto)

Sean $(A, \preceq_1)$ *y* $(B, \preceq_2)$ *dos conjuntos parcialmente ordenados.*
En el conjunto $A \times B$ *se define la relación* $\preceq$:

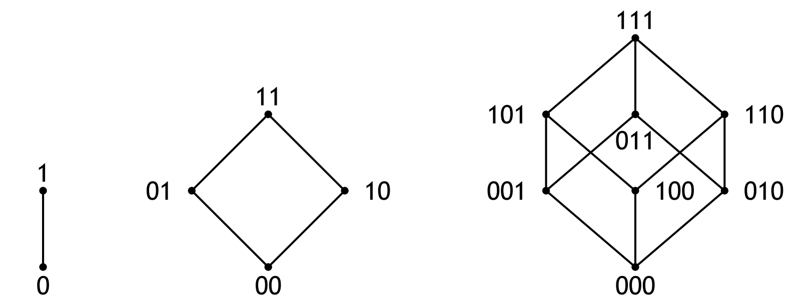
$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \iff a_1 \preceq_1 a_2 \quad \wedge \quad b_1 \preceq_2 b_2$$

Teorema

$(A \times B, \preceq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado.*

Relaciones de orden
Orden producto

Ejemplo



$(\mathbb{B}, \leq)$ $\quad$ $(\mathbb{B}^2, \preceq)$ $\quad$ $(\mathbb{B}^3, \preceq)$

Relaciones de orden
Orden producto

Ejercicio

En el conjunto $A = (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}$ se define la siguiente relación binaria:

$$(x_1, y_1)\, \mathcal{R}\, (x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2 \text{ y además } \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

1. Demuestra que $\mathcal{R}$ es una relación de orden y estudia si es un orden total.
2. Representa el conjunto de elementos comparables con $(1, 1)$.
3. Representa el conjunto de elementos comparables con $(2, 4)$.

Relaciones de orden

Definición (Orden Lexicográfico)

Sean $(A, \preceq_1)$ *y* $(B, \preceq_2)$ *dos conjuntos parcialmente ordenados. En el conjunto* $A \times B$ *se define la relación* $\preccurlyeq$ *(llamada **orden lexicográfico**)*

$$(a_1, b_1) \preccurlyeq (a_2, b_2) \iff a_1 \preceq_1 a_2 \quad \vee \quad (a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 \preceq_2 b_2)$$

Teorema

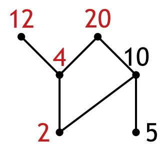
$(A \times B, \preccurlyeq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado.*

Relaciones de orden
Elementos destacables en una ordenación

Definición
*Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$. Se dice que $x \in B$ es **maximal** de B, si no existe ningún $b \in B$ posterior.*

- El ***maximal*** es posterior a todo elemento comparable con él.

Ejemplo $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ con la relación $|$ de divisibilidad.



$B_1 = \{2, 4, 12, 20\}$

12 es maximal de B_1

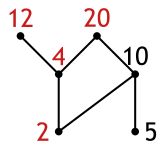
20 es maximal de B_1

Relaciones de orden
Elementos destacables en una ordenación

Definición
*Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$. Se dice que $x \in B$ es **minimal** de B, si no existe ningún $b \in B$ anterior.*

- El ***minimal*** es anterior a todo elemento comparable con él.

Ejemplo $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ con la relación $|$ de divisibilidad.



$B_1 = \{2, 4, 12, 20\}$

2 es minimal de B_1

Relaciones de orden
Elementos destacables en una ordenación

Lema
Sea $(A, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Si A es finito y no vacío, entonces tiene un elemento minimal.

Demostración:

- Por ser A no vacío, existe un elemento $x_1 \in A$.
- Si x_1 es minimal, entonces el lema queda demostrado.
- En caso contrario, existe un $x_2 \neq x_1$ tal que $x_2 \preceq x_1$.
- Si x_2 es minimal, queda demostrado el lema.
- En caso contrario, existe $x_3 \neq x_2$ tal que $x_3 \preceq x_2$.
- Como el conjunto A es finito, el proceso debe terminar.
  Así obtenemos el elemento minimal.

Relaciones de orden
Elementos destacables en una ordenación

Aplicando el lema anterior repetidamente podemos encontrar una relación de orden total $\ll$ **compatible** con $\preceq$; es decir, una relación de orden total $\ll$ que contenga a la relación de orden parcial $\preceq$ dada:

$$\text{para todo } a, b \in A \text{ si } a \preceq b, \quad \text{entonces } a \ll b$$

El proceso de construcción de un orden total como $\ll$ se llama

clasificación u ***ordenación topológica***.

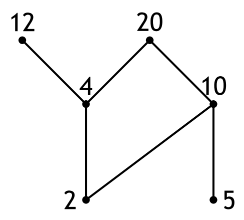
Relaciones de orden
Elementos destacables en una ordenación

Algoritmo de ordenación topológica

- Sea $\preceq$ una relación de orden parcial definida en un conjunto finito no vacío A.
- Nos planteamos encontrar una relación de orden total $\ll$ compatible con $\preceq$. Esto es, para todo $a, b \in A$ si $a \preceq b$, entonces $a \ll b$.
- Se empieza eligiendo un elemento minimal $a_1 \in A$.
- Si $A - \{a_1\}$ no es vacío, se elige un elemento minimal $a_2 \in A - \{a_1\}$.
- Se repite este proceso hasta elegir todos los elementos de A.
- La secuencia $a_1 \ll a_2 \ll \ldots \ll a_n$ nos proporciona un orden total.

Relaciones de orden
Elementos destacables en una ordenación

Ejemplo



- ***Solución 1:*** $5 \ll 2 \ll 10 \ll 4 \ll 20 \ll 12$
- ***Solución 2:*** $2 \ll 4 \ll 12 \ll 5 \ll 10 \ll 20$

Relaciones de orden
Elementos destacables en una ordenación

Ejercicio: Los prerrequisitos en las asignaturas de una carrera universitaria constituyen un orden parcial. Se dice que $a \preceq b$ si es necesario acabar con éxito la asignatura a para poder terminar con éxito la asignatura b.
Considera los prerrequisitos para las asignaturas de Matemáticas (Mat)

Asignaturas	Prerrequisitos
Mat 101	Ninguno
Mat 201	Mat 101
Mat 250	Mat 101
Mat 251	Mat 250
Mat 340	Mat 201
Mat 341	Mat 340
Mat 450	Mat 201, Mat 250
Mat 500	Mat 450, Mat 251

1. Dibuja el diagrama de Hasse correspondiente.

Relaciones de orden
Elementos destacables en una ordenación

Ejercicio:

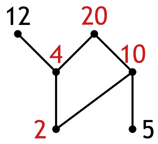
2. Si un estudiante quiere cursar las 8 asignaturas, pero sólo una por semestre, ¿qué asignaturas debe cursar en su primer semestre? ¿Y en el último?
3. Suponiendo que quiere cursar Mat 250 en su primer año (primer o segundo semestre) y Mat 340 en su último curso (séptimo u octavo semestre), halla todas las formas en que puede cursar las ocho asignaturas.

Relaciones de orden
Elementos destacables en una ordenación

Definición

Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$.
*Se dice que $x \in B$ es **máximo** de B, si x es posterior a todo $b \in B$.*

Ejemplo $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ con la relación $|$ de divisibilidad.



$B_2 = \{2, 4, 10, 20\}$

20 es máximo de B_2, ya que

$20 \in B_2$ y $2|20$, $4|20$, $10|20$ y $20|20$

Teorema

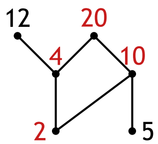
Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$.
El máximo de B (si existe) es único.

Relaciones de orden
Elementos destacables en una ordenación

Definición

Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$.
*Se dice que $x \in B$ es **mínimo** de B, si x es anterior a todo $b \in B$.*

Ejemplo $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ con la relación $|$ de divisibilidad.



$B_2 = \{2, 4, 10, 20\}$

2 es mínimo de B_2, ya que

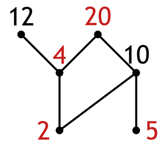
$2 \in B_2$ y $2|2$, $2|4$, $2|10$ y $2|20$

Teorema

Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$.
El mínimo de B (si existe) es único.

Relaciones de orden
Elementos destacables en una ordenación

Ejemplo $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ con la relación $|$ de divisibilidad.

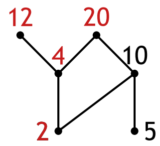


$B_3 = \{2, 4, 5, 20\}$

20 es máximo de B_3, ya que

$20 \in B_3$ y $2|20$, $4|20$, $5|20$ y $20|20$

¿Tiene mínimo B_3?



$B_4 = \{2, 4, 12, 20\}$

2 es mínimo de B_4, ya que

$2 \in B_4$ y $2|2$, $2|4$, $2|12$ y $2|20$

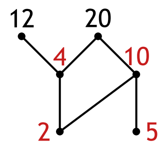
¿Tiene máximo B_4?

Relaciones de orden
Elementos destacables en una ordenación

Definición

Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$.
*Se dice que $x \in B$ es **máximo** de B, si x es posterior a todo $b \in B$.*
*Se dice que $x \in B$ es **mínimo** de B, si x es anterior a todo $b \in B$.*

Ejemplo $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ con la relación $|$ de divisibilidad.



$B_5 = \{2, 4, 5, 10\}$

¿Tiene máximo B_5?

¿Tiene mínimo B_5?

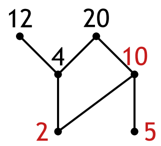
Teorema

Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$.
El máximo de B (si existe) es único. El mínimo de B (si existe) es único.

Definición

Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$.
Se dice que $c \in A$ es ***cota superior*** *de B, si c es posterior a todo $b \in B$.*

Ejemplo $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ con la relación $|$ de divisibilidad.



$B_6 = \{2, 5, 10\}$

10 es cota superior de B_6,

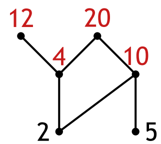
20 es cota superior de B_6,

$C_S(B_6) = \{10, 20\}$

Definición

Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$.
Se dice que $c \in A$ es ***cota inferior*** *de B, si c es anterior a todo $b \in B$.*

Ejemplo $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ con la relación $|$ de divisibilidad.



$B_7 = \{4, 10, 12, 20\}$

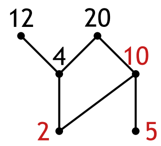
2 es cota inferior de B_7,

$C_i(B_7) = \{2\}$

Definición

Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$.
Se dice que $m \in A$ es la ***mínima cota superior*** *de B, si m es el mínimo del conjunto $C_s(B)$ de las cotas superiores de B.*

Ejemplo $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ con la relación $|$ de divisibilidad.



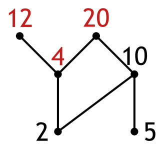
$B_6 = \{2, 5, 10\}$ $\quad C_S(B_6) = \{10, 20\}$

$\text{mín}\,(C_S(B_6)) = 10$

Definición

Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$.
Se dice que $M \in A$ es la ***máxima cota inferior*** *de B, si M es el máximo del conjunto $C_i(B)$ de las cotas inferiores de B.*

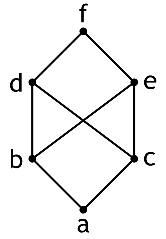
Ejemplo $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ con la relación $|$ de divisibilidad.



$B_8 = \{4, 12, 20\}$ $\quad C_i(B_6) = \{2, 4\}$

$\text{máx}\,(C_i(B_8)) = 4$

Ejercicio: Sea el conjunto parcialmente ordenado $T = \{a, b, c, d, e, f\}$



Determina los elementos destacables de los subconjuntos $B_1 = \{a, b, c\}$, $B_2 = \{c, d\}$ y $B_3 = \{d, e\}$

Ejercicios:

1. Sea D_{60} el conjunto de los divisores de 60 y sean los subconjuntos $B_1 = \{1, 2, 3, 5\}$, $B_2 = \{3, 4\}$ y $B_3 = \{4, 15\}$.
   - Dibuja el diagrama de Hasse de $\left(D_{60}, |\,\right)$
   - Halla los elementos destacables de los subconjuntos B_1, B_2 y B_3.

Ejercicios:

2. Sea D_{72} el conjunto de los divisores de 72 y sean los subconjuntos $B_1 = \{3, 6, 12, 18\}$, $B_2 = \{4, 6, 12, 18\}$ y $B_3 = \{6, 9, 12, 18, 36\}$.
   - Dibuja el diagrama de Hasse de $\left(D_{72}, |\,\right)$.
   - Halla los elementos destacables de los subconjuntos B_1, B_2 y B_3.

Ejercicios:

3. Sea D_{2310} el conjunto de los divisores de 2310 y sean los subconjuntos $B_1 = \{2, 6, 10, 14, 22\}$, $B_2 = \{6, 14, 15, 42\}$ y $B_3 = \{6, 15, 21, 35\}$.
   - Halla los elementos destacables de los subconjuntos B_1, B_2 y B_3.