E.T.S. de INGENIERÍA INFORMÁTICA

Curso 2010/2011

Estructuras Algebraicas para la Computación

Relación de Ejercicios 7

1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideran los siguientes endomorfismos:

   - $\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + 3x_2 + x_3, x_2 + x_3)$
   - $\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = (-x_2 - x_3, -2x_1 + x_2 - x_3, -2x_1 + 2x_2 + 2x_3)$
   - $\varphi_3(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + x_3)$
   - $\varphi_4(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 3x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 3x_3)$

   a) Halla los valores y vectores propios de cada uno.

   b) Estudia si son diagonalizables.

2. Estudia para qué valores del parámetro a son diagonalizables los siguientes endomorfismos $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f_1(x, y, z) = (x, ax + y, x + y + 2z) \qquad f_2(x, y, z) = (x - 2y - (2 + a)z, y + az, z)$$

3. De un endomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se sabe que $(1, 1)$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 2$ y que $\varphi(0, 1) = (1, 2)$.

   a) Encuentra la matriz del endomorfismo respecto de la base canónica.

   b) Halla, si es posible, una base respecto a la cual la matriz de φ sea una matriz diagonal.

4. Halla los valores y vectores propios de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Estudia la diagonabilidad de cada una de las siguientes matrices según los valores de los parámetros

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha \neq 0$$

6. Estudia para qué valores $t \in \mathbb{R}$ la matriz A es diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} t+3 & t^2 - 10 \\ 1 & t+1 \end{pmatrix}$$

7. Dada la matrtiz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Estudia si es diagonalizable y, en caso afirmativo, expresa A en función de sus valores y vectores propios.

   b) Usa el apartado anterior para calcular A^{200}

   c) Sin efectuar nuevos cálculos, ¿podrías decir si existe la inversa de A?

8. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Estudia si es diagonalizable y, en caso afirmativo, expresa A en función de sus valores y vectores propios.

   b) Usa el apartado anterior para calcular A^{2011} y determina (si es posible) A^{-2011}.

   c) Comprueba el teorema de Cayley-Hamilton.

9. Para las matrices siguientes

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Encuentra la ecuación característica $p(\lambda) = 0$ y comprueba el teorema de Cayley-Hamilton.

   b) Usa el apartado anterior para calcular la inversa (si existe) o bien justificar que no existe.

10. Demuestra:

   a) Si λ es un valor propio de una matriz A inversible, entonces $\lambda \neq 0$ y $1/\lambda$ es un valor propio de A^{-1}.

   b) Si λ es un valor propio de una matriz A, entonces λ^2 es un valor propio de A^2. En general, λ^n es un valor propio de A^n.

11. Halla los valores propios de A^9, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(Sugerencia: Utiliza el ejercicio anterior)