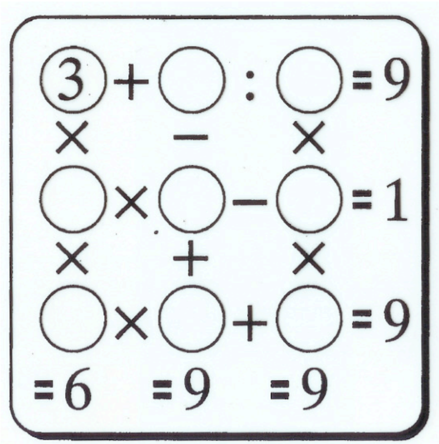
Tema 5: Lógica computacional

Agustín Valverde

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Tablero matemático:



Sudoku:

	6		1		4		5	
		8	3		5	6		
2								1
8			4		7			6
		6				3		
7			9		1			4
5								2
		7	2		6	9		
	4		5		8		7	

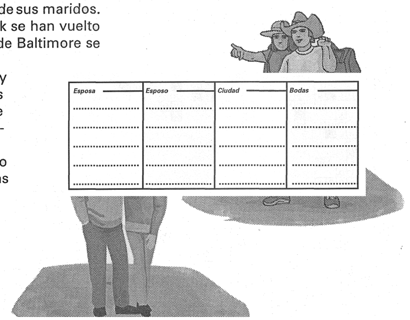
Pasatiempo lógico:

La torre de Pisa

Varios turistas americanos celebran su aniversario de bodas realizando un viaje por Pisa. ¿Cómo se compone cada matrimonio, de qué lugar de EE.UU. proceden y qué tipo de boda festeja?

1. Quienes cumplen sus bodas de cristal y de oro están tomando fotos; los de Baltimore, Phoenix y San Diego no han traído sus cámaras.
2. Bill y Fred tienen el cabello canoso; los maridos de Kelly, Lee y Nat lo lucen oscuro.
3. Nat y la que festeja las bodas de oro se encuentran a la izquierda de sus maridos.
4. Las esposas de Bill y Dick se han vuelto obesas; Nat, Peggy y la de Baltimore se mantienen delgadas.
5. El matrimonio de Chuck y Lee, los que celebran sus bodas de plata y los de Phoenix se alojan en hoteles 5 estrellas.
6. Meg y la de San Diego llevan cartera; una de ellas cumple las bodas de diamante.
7. A los de Filadelfia les saldrá mal la foto: Peggy la está tomando a contraluz.

VARIABLES
ESPOSA: Kelly, Lee, Meg, Nat, Peggy.
ESPOSO: Bill, Chuck, Dick, Fred, Greg.
CIUDAD: Baltimore, Filadelfia, Miami, Phoenix, San Diego.
BODAS: cristal, diamante, oro, papel, plata.



¿Qué es la Lógica?

Queremos construir **sistemas formales** que nos sirvan de herramienta para contestar a la siguiente cuestion: ¿Es correcto el siguiente razonamiento?

Si hay petróleo en Poligonia, entonces o los expertos tienen razón o el gobierno está mintiendo. No hay petroleo en Poligonia, o si no los expertos se equivocan. Así pues, el gobierno no está mintiendo.

¿Qué es la Lógica?

Queremos construir **sistemas formales** que nos sirvan de herramienta para contestar a la siguiente cuestion: ¿Es correcto el siguiente razonamiento?

Si hay petróleo en Poligonia, entonces o los expertos tienen razón o el gobierno está mintiendo. No hay petroleo en Poligonia, o si no los expertos se equivocan. Así pues, el gobierno no está mintiendo.

¿Qué es la Lógica?

- La Lógica es el estudio de todo lo concerniente a la **validez** de la construcciones del lenguaje natural llamadas razonamientos o **inferencias**,

  Si . . . y . . . y . . . y . . . , entonces . . .

- La Lógica se interesa por la **forma** y no por el contenido de los razonamientos.
- La Lógica es la ciencia que tiene como objetivo el análisis de los métodos de razonamiento.

Campos de aplicación

Sistema de razonamiento La Lógica se usa para describir, implementar y mecanizar tareas donde interviene la capacidad deductiva del hombre.

Aspecto fundacional La Lógica se usa como modelo de computación.

Campos de aplicación

- Análisis, síntesis y verificación de Programas
- Teoría de la especificación
- Programación Lógica
- Inteligencia Artificial
- Control de Procesos
- Robótica

Tipos de Lógicas

Lógica Clásica

- Considera únicamente construcciones declarativas, sobre las que podemos pronunciarnos acerca de su **verdad** o **falsedad**.
- No tiene en cuenta aspectos de contexto (tiempo, posibilidad, creencia,. . .)
- Su estudio se realiza en dos niveles de análisis estructural: **Lógica Clásica Proposicional** (Se contemplan únicamente construcciones declarativas simples y compuestas); **Lógica Clásica de Predicados** (Se distingue **qué** se declara o **de qué o quién** se declara).

Tipos de Lógicas

El resto de las lógicas se conocen como **Lógicas No-Clásicas**

- **Lógica Temporal**: considera contextos temporales.
- **Lógica Modal**: considera contextos de necesidad o posibilidad.
- **Lógica Doxástica**: considera contextos de creencia.
- **Lógica Intuicionista**: no contempla como ley ''A o no A'' (ley del tercero excluido).
- **Lógicas multivaluadas**: se consideran tres o más valores de verdad.
- **Lógica difusa**: La distinción entre verdad y falsedad se establece de foma ''difusa''.

¿Cómo se define una Lógica?

Una **lógica** o **sistema lógico** queda determinado con los siguientes elementos.

1. Un **Lenguaje Formal**, que usamos para representar los razonamientos en lenguaje natural como esquemas formales.
2. Una **Semántica** o **Teoría de Modelos**, que dota de significado a las expresiones o fórmulas del lenguaje formal y establece los conceptos básicos asociados a una lógica: **validez** y **satisfacibilidad**.
3. Una **Teoría de la Demostración** que establece las nociones de validez y satisfacibilidad a partir de transformaciones descritas en el lenguaje y basadas en reglas puramente formales.

¿Cómo se define una Lógica?

- Aunque es deseable disponer tanto de una teoría de modelos como de una teoría de demostración, es posible trabajar con sistemas lógicos dados con solamente una de las dos.

- Desde el punto de vista computacional, es conveniente que en el sistema lógico sea posible automatizar las deducciones, es decir, que la propiedad de validez pueda determinarse mediante algoritmos definidos a partir de la teoría de modelos o de una teoría de demostración.

Lenguajes formales

Definición

Sea Σ un conjunto

- *Llamamos **Lenguaje Universal** sobre Σ al conjunto $\Sigma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n$.*
- *Un **Lenguaje** sobre Σ es cualquier subconjunto de Σ^*.*
- *En este contexto, el conjunto Σ se denomina **alfabeto**.*

- Hablamos de lenguaje **formal** si sus elementos se definen sin atender al posible significado de los elementos del alfabeto.
- De esta manera, un lenguaje formal L viene determinado por:
  1. **Alfabeto:** Conjunto de símbolos admitidos en el lenguaje.
  2. **Gramática:** Conjunto de reglas sintácticas que determinan qué cadenas se consideran fórmulas (bien formadas) del lenguaje.

Lenguajes formales

Ejemplos:

- Lenguaje 'mg':
  Alfabeto $= \{m, g, -\}$; Gramática: las fórmulas son aquellas cadenas que contienen exactamente un símbolo m, exactamente un símbolo g y la m aparece a la izquierda de g.

- El conjunto de los números naturales escritos en base 10 es un lenguaje formal sobre el alfabeto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

- El conjunto formado por los números múltiplos de tres NO es un lenguaje formal, ya que está definido usando el significado de los números.

El lenguaje de la Lógica Clásica Proposicional: Cl

El lenguaje Cl, de la Lógica Clásica Proposicional está determinado por:

Alfabeto: Está formado por **variables** o **símbolos proposicionales**, $Q = \{p, q, r, \dots, p_1, q_1, r_1, \dots, p_n, q_n, r_n, \dots\}$, **Conectivos** u **Operadores lógicos** $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ y **Delimitadores**, ''('', '')''.

Gramática:
1. Los elementos de Q son fórmulas (bien formadas), se denominan **fórmulas atómicas**.
2. Si A es un fórmula, $\neg A$ es una fórmula.
3. Si A y B son fórmulas, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ son fórmulas.
4. Solo las cadenas obtenidas aplicando las reglas anteriores son fórmulas.

El lenguaje de la Lógica Clásica Proposicional: *Cl*

- Un conjunto definido siguiendo el método anterior, se dice que es un **conjunto inductivo**. Esta forma de definir el conjunto, determina cómo demostrar propiedades o definir funciones en el lenguaje:
- Para demostrar una propiedad usaremos **inducción estructural**: Si se verifican las dos condiciones siguientes, entonces en Cl se verifica la propiedad P :
  - (i) Los elementos de Q verifican la propiedad P.
  - (ii) Las reglas de formación preservan la propiedad P.
- Los paréntesis evitan ambigüedades y, por lo tanto, cada fórmula se construye de manera única. Por esta razón, las funciones sobre Cl se pueden definir por **recursividad**:
  - (i) Se define sobre las fórmulas atómicas (elementos de Q.)
  - (ii) Se establece el comportamiento de la función con las reglas de formación.

El lenguaje de la Lógica Clásica Proposicional: *Cl*

Definición

La función ***grado****,* $\mathrm{Gr}\colon Cl \to \mathbb{N}$, *devuelve el número de conectivos lógicos que aparecen en una fórmula:*

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}(A) &= 0 \quad \textit{para todo } A \in Q \\ \mathrm{Gr}(\neg B) &= 1 + \mathrm{Gr}(B) \\ \mathrm{Gr}(B * C) &= 1 + \mathrm{Gr}(B) + \mathrm{Gr}(C), \qquad \textit{si } * \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\} \end{aligned}$$

- ***Ejemplo:***

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}(p \to (r \vee \neg q)) &= 1 + \mathrm{Gr}(p) + \mathrm{Gr}(r \vee \neg q) \\ &= 1 + \mathrm{Gr}(p) + 1 + \mathrm{Gr}(r) + \mathrm{Gr}(\neg q) \\ &= 1 + \mathrm{Gr}(p) + 1 + \mathrm{Gr}(r) + 1 + \mathrm{Gr}(q) = 3 \end{aligned}$$

Definición

Consideramos la función $\mathrm{Subf}\colon Cl \to \wp(Cl)$ *definida por:*

$$\begin{aligned} \mathrm{Subf}(A) &= \{A\} \quad \textit{para todo } A \in Q \\ \mathrm{Subf}(\neg B) &= \{\neg B\} \cup \mathrm{Subf}(B) \\ \mathrm{Subf}(B * C) &= \{B * C\} \cup \mathrm{Subf}(B) \cup \mathrm{Subf}(C), \qquad \textit{si } * \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\} \end{aligned}$$

Si $F \in \mathrm{Subf}(A)$, *decimos que* F *es* ***subfórmula*** *de* A *y escribimos* $F \sqsubseteq A$.
Si $F \in \mathrm{Subf}(A)$ *y* $F \neq A$, *decimos que* F *es subfórmula* ***propia*** *de* A *y escribimos* $F \sqsubset A$.

- ***Ejemplo:***

$$\begin{aligned} \mathrm{Subf}(p \to (r \vee \neg q)) &= \{p \to (r \vee \neg q)\} \cup \mathrm{Subf}(p) \cup \mathrm{Subf}(r \vee \neg q) \\ &= \{p \to (r \vee \neg q)\} \cup \{p\} \cup \{r \vee \neg q\} \cup \mathrm{Subf}(r) \cup \mathrm{Subf}(\neg q) \\ &= \{p \to (r \vee \neg q), p, r \vee \neg q, r, \neg q, q\} \end{aligned}$$

Árboles sintácticos

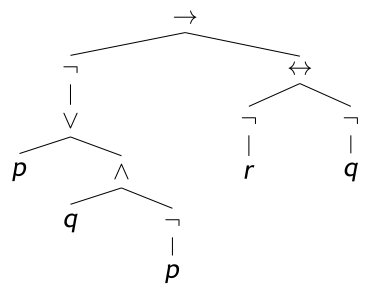
Definición

El ***árbol sintáctico*** *de las fórmulas de* Cl *se define como:*

- *Si* $A \in Q$, $T(A)$ *es el árbol hoja etiquetado con* A.
- *Si* $* \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$ *y* $A = B * C$, $T(A) = \begin{array}{c} * \\ \diagup \quad \diagdown \\ T(B) \qquad T(C) \end{array}$
- *Si* $A = \neg B$, $T(A) = \begin{array}{c} \neg \\ | \\ T(B) \end{array}$

Árboles sintácticos

Ejemplo: El árbol $T(A)$ para $A = \neg(p \vee (q \wedge \neg p)) \to (\neg r \leftrightarrow \neg q)$ es



Semántica o Teoría de Modelos

Definición

*Una **semántica** o **Teoría de modelos** sobre un lenguaje L es una terna $(S, D, \mathcal{I})$ en donde S es un conjunto, cuyos elementos se denominan **valores semánticos**, D es un subconjunto propio de S, cuyos elementos se denominan **valores destacados** e $\mathcal{I}$ es un conjunto de funciones de L en D, cuyos elementos se denominan **interpretaciones**.*

Semántica o Teoría de Modelos

Ejemplo: definimos la teoría de modelos $MG = (S, D, \mathcal{I})$ sobre el lenguaje mg como:

- Valores semánticos: $S = \mathbb{N}^3$
- Valores destacados: $D = \{(m, n, k) \in \mathbb{N}^3 \mid m + n = k\}$
- Interpretaciones: $\mathcal{I} = \{\mathtt{I}\}$, en donde, si α, β y γ son cadenas de 'guiones' de longitud arbitraria:

$$\mathtt{I}(\alpha m \beta g \gamma) = (\mathrm{long}(\alpha), \mathrm{long}(\beta), \mathrm{long}(\gamma))$$

(la función long devuelve la longitud de una cadena.)

Por ejemplo, $\mathtt{I}(--m--g-) = (2, 2, 1)$

Semántica o Teoría de Modelos

Definición

Sea $\mathcal{L} = (S, D, \mathcal{I})$ una teoría de modelos para un lenguaje L,

- *Decimos que $I \in \mathcal{I}$ es un **modelo** de una fórmula A si $I(A) \in D$*
- *Decimos que una fórmula A es **válida** en $\mathcal{L}$ si para toda $I \in \mathcal{I}$, $I(A) \in D$, es decir, si todas las interpretaciones son modelo de A.*

Ejemplos:

- La fórmula $--m-g--$ no es válida en MG, ya que $\mathtt{I}(--m-g--) = (2, 1, 2) \notin D$
- La fórmula $-m--g---$ sí es válida en MG, ya que $\mathtt{I}(-m--g---) = (1, 2, 3) \in D$

Teorías de demostración

- Son ''mecanismos deductivos'', es decir, mecanismos que permiten obtener fórmulas válidas mediante transformaciones sintácticas (descritas de manera puramente formal) a partir de otras fórmulas válidas.
- Ejemplos de teorías de demostración son los **Sistemas axiomáticos**, la **Deducción Natural** y los **Sistemas de Gentzen** (que se usan también para formalizar la inferencia de tipos en lenguajes de programación).
- Por ejemplo, un sistema axiomático se define estableciendo un conjunto de **Axiomas**, fórmulas o esquemas de fórmulas válidas por definición, y un conjunto finito de **Reglas de inferencia**, reglas sintácticas de transformación de fórmulas válidas en fórmulas válidas.

Teorías de demostración

Ejemplo: Sistema axiomático para mg:

- Axiomas: $\alpha m g \alpha$, para cada cadena de guiones α.
- Regla de inferencia: de $\alpha m \beta g \gamma$ se deriva $\alpha m \beta - g \gamma -$ para cualesquiera cadenas de guiones α, β y γ.

Veamos que la fórmula $-m-g--$ es válida en este sistema axiomático:

$$\begin{array}{lll} 1. & -mg- & \mathrm{Ax} \\ 2. & -m-g-- & \mathrm{RI}:1 \end{array}$$

Es fácil observar que, todas las fórmulas válidas en el sistema axiomático lo son en la teoría de modelos MG; en ese caso decimos que el sistema axiomático es **correcto**.

También es fácil observar que todas las fórmulas válidas en MG pueden ser derivadas en el sistema axiomático; en ese caso decimos que es sistema axiomático es **completo**.

Lógica Clásica Proposicional

Definición

Definimos la Lógica Clásica Proposicional como la teoría de modelos $\mathcal{C}\ell = (\{0,1\}, 1, \mathcal{I})$, *en donde el conjunto de interpretaciones* $\mathcal{I}$ *está formado por todas las funciones* $I\colon Cl \to \{0,1\}$ *que verifican:*

- $I(\neg A) = 1$ *si y solo si* $I(A) = 0$
- $I(A \wedge B) = 1$ *si y solo si* $I(A) = I(B) = 1$
- $I(A \vee B) = 0$ *si y solo si* $I(A) = I(B) = 0$
- $I(A \to B) = 0$ *si y solo si* $\{I(A) = 1$ *e* $I(B) = 0\}$
- $I(A \leftrightarrow B) = 1$ *si y solo si* $I(A) = I(B)$

Lógica Clásica Proposicional

- Teniendo en cuenta la definición recursiva de las interpretaciones, cada una de ellas queda determinada por una función $I\colon Q \to \{0,1\}$.
- Aunque Q contiene todos las posibles variables proposicionales, en cada problema o aplicación, solo necesitaremos definir las interpretaciones sobre las variables proposicionales que intervengan en él.
- Si en una fórmula (o un conjunto de fórmulas) intervienen n variables proposicionales, el número de posibles interpretaciones es 2^n.

Lógica Clásica Proposicional

Ejemplo: Si consideramos 2 variables proposicionales, tendremos cuatro posibles interpretaciones. En las siguiente tabla mostramos las correspondientes evaluaciones de varias fórmulas

	p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
$\mathtt{I}_1$	1	1	0	1	1	1	1
$\mathtt{I}_2$	1	0	0	0	1	0	0
$\mathtt{I}_3$	0	1	1	0	1	1	0
$\mathtt{I}_4$	0	0	1	0	0	1	1

	p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg p \wedge q$	$(\neg p \vee q) \to (\neg p \wedge q)$
$\mathtt{I}_1$	1	1	0	1	0	0
$\mathtt{I}_2$	1	0	0	0	0	1
$\mathtt{I}_3$	0	1	1	1	1	1
$\mathtt{I}_4$	0	0	1	1	0	0

Lógica Clásica Proposicional

Definición

- *Una interpretación* $I \in \mathcal{I}$ *es un* ***modelo*** *de un fórmula* A *si* $I(A) = 1$*; decimos también que la interpretación* I ***satisface*** *la fórmula* A*. Denotaremos por* $\mathrm{Mod}(A)$ *al conjunto de los modelos de* A*.*
- *Decimos que una fórmula* A *es* ***satisfacible*** *o* ***consistente*** *si admite algún modelo, es decir, si* $\mathrm{Mod}(A) \neq \varnothing$*.*
- *Decimos que una fórmula* A *es* ***insatisfacible*** *o* ***inconsistente*** *si no admite ningún modelo, es decir, si* $\mathrm{Mod}(A) = \varnothing$*.*
- *Decimos que una fórmula* A *es* ***válida*** *o que es una* ***tautología*** *si cada interpretación es modelo de* A*, es decir, si* $\mathrm{Mod}(A) = \mathcal{I}$*.*

Lógica Clásica Proposicional

Ejemplo:

	p	q	$A = (\neg p \vee q) \to (\neg p \wedge q)$
$\mathtt{I}_1$	1	1	0
$\mathtt{I}_2$	1	0	1
$\mathtt{I}_3$	0	1	1
$\mathtt{I}_4$	0	0	0

$\mathtt{I}_2(A) = 1$,
$\mathtt{I}_2$ es modelo de A,
A es satisfacible.

$\mathtt{I}_4(A) = 0$,
$\mathtt{I}_4$ es contramodelo de A,
A no es válida.

$\mathrm{Mod}(A) = \{\mathtt{I}_2, \mathtt{I}_3\}$, ya que $\mathtt{I}_2(A) = 1 = \mathtt{I}_3(A)$

Lógica Clásica Proposicional

Ejemplo:

	p	q	$A = (p \wedge (p \to q)) \to q$
$\mathtt{I}_1$	1	1	1
$\mathtt{I}_2$	1	0	1
$\mathtt{I}_3$	0	1	1
$\mathtt{I}_4$	0	0	1

$\mathrm{Mod}(A) = \{\mathtt{I}_1, \mathtt{I}_2, \mathtt{I}_3, \mathtt{I}_4\} = \mathcal{I}$

Por lo tanto, A es una tautología.

Lógica Clásica Proposicional

Teorema

Sean A y B fórmulas, entonces:

- $\mathrm{Mod}(\neg A) = \overline{\mathrm{Mod}(A)}$
- $\mathrm{Mod}(A \wedge B) = \mathrm{Mod}(A) \cap \mathrm{Mod}(B)$
- $\mathrm{Mod}(A \vee B) = \mathrm{Mod}(A) \cup \mathrm{Mod}(B)$
- $\mathrm{Mod}(A \to B) = \overline{\mathrm{Mod}(A)} \cup \mathrm{Mod}(B)$

Demostración: Ejercicio

Lógica Clásica Proposicional

Definición

- *$\mathcal{I} \in \mathscr{I}$ es un **modelo** de un conjunto de fórmulas $\Omega \subset Cl$, si $\mathcal{I}(A) = 1$ para todo $A \in \Omega$. Denotaremos por $\mathrm{Mod}(\Omega)$ al conjunto de los modelos de Ω.*
- *Decimos que un conjunto de fórmulas Ω es **satisfacible** o **consistente** si admite algún modelo, es decir, si $\mathrm{Mod}(\Omega) \neq \varnothing$.*
- *Decimos que un conjunto de fórmulas Ω es **insatisfacible** o **inconsistente** si no admite ningún modelo, es decir, si $\mathrm{Mod}(\Omega) = \varnothing$.*

Teorema

$\Omega = \{A_1, \dots, A_n\}$ *es satisfacible si y solo si* $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ *es satisfacible.*

Inferencia semántica

Definición

- *Una fórmula A **es consecuencia**, **se infiere** o **se deriva semánticamente** de un conjunto de fórmulas Ω, si todo modelo de Ω es modelo de A, es decir, si $\mathrm{Mod}(\Omega) \subseteq \mathrm{Mod}(A)$.*

  En tal caso escribimos: $\Omega \models A$.

  Si $\Omega = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, lo denotamos igualmente $A_1, A_2, \dots, A_n \models A$.

Teorema

$A_1, A_2, \dots, A_n \models A$ *si y solo si* $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \to A$ *es una tautología.*

- Si $\Omega = \varnothing$, entonces $\Omega \models A$ si y solo si A es una tautología; en tal caso, escribimos igualmente $\models A$.

Inferencia semántica

Ejemplo: Para $\Omega = \{\neg q \to p, \neg q \vee r\}$, y $A = \neg p \to r$, vamos a demostrar que $\Omega \models A$, es decir $\neg q \to p, \neg q \vee r \models \neg p \to r$

	p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \to p$	$\neg q \vee r$	$\neg p \to r$
I_1	1	1	1	0	0	1	1	1
I_2	1	0	1	0	1	1	1	1
I_3	0	1	1	1	0	1	1	1
I_4	0	0	1	1	1	0	1	1
I_5	1	1	0	0	0	1	1	1
I_6	1	0	0	0	1	1	1	1
I_7	0	1	0	1	0	1	0	0
I_8	0	0	0	1	1	0	1	0

$$\mathrm{Mod}(\Omega) = \{\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \mathrm{I}_5, \mathrm{I}_6\} \subset \{\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \mathrm{I}_4, \mathrm{I}_5, \mathrm{I}_6\} = \mathrm{Mod}(A)$$

Equivalencia lógica

Definición

Se dice que dos fórmulas A *y* B *son* ***(lógicamente) equivalentes***, *y lo denotamos* $A \equiv B$, *si* $\mathrm{Mod}(A) = \mathrm{Mod}(B)$.

Teorema

$A \equiv B$ *si y solo si* $A \leftrightarrow B$ *es una tautología.*

Equivalencia lógica

Ejemplo: $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Mod}(\neg(A \wedge B)) &= \overline{\mathrm{Mod}(A \wedge B)} \\
&= \overline{\mathrm{Mod}(A) \cap \mathrm{Mod}(B)} \\
&= \overline{\mathrm{Mod}(A)} \cup \overline{\mathrm{Mod}(B)} \\
&= \mathrm{Mod}(\neg A) \cup \mathrm{Mod}(\neg B) \\
&= \mathrm{Mod}(\neg A \vee \neg B)
\end{aligned}
$$

Equivalencia lógica

Ejemplo: Veamos que $\neg p \vee q \equiv p \to q$

	p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \to q$
I_1	1	1	0	1	1
I_2	1	0	0	0	0
I_3	0	1	1	1	1
I_4	0	0	1	1	1

$$\mathrm{Mod}(\neg p \vee q) = \{\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_3, \mathrm{I}_4\} = \mathrm{Mod}(p \to q)$$

Equivalencia lógica

Ejercicio: Demuestra las siguientes equivalencias básicas:

Leyes de De Morgan:	$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
	$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
Leyes conmutativas:	$A \wedge B \equiv B \wedge A$
	$A \vee B \equiv B \vee A$
Leyes asociativas:	$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
	$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
Ley Distributiva de $\wedge$ respecto $\vee$:	$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
Ley Distributiva de $\vee$ respecto $\wedge$	$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Leyes de Absorción:	$A \wedge (A \vee B) \equiv A$
	$A \vee (A \wedge B) \equiv A$
Leyes de Idempotencia:	$A \equiv A \wedge A$
	$A \equiv A \vee A$
Ley de Transposición:	$A \to B \equiv \neg B \to \neg A$
Ley de doble negación:	$\neg\neg A \equiv A$
Interdefinición de $\to$ y $\vee$:	$A \to B \equiv \neg A \vee B$
	$A \vee B \equiv \neg A \to B$
Interdefinición de $\to$ y $\wedge$:	$\neg(A \to B) \equiv A \wedge \neg B$
	$A \wedge B \equiv \neg(A \to \neg B)$
Conmutatividad de $\leftrightarrow$:	$A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A$
Asociatividad de $\leftrightarrow$:	$A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) \equiv (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$

Equivalencia lógica

Ejemplo:

- Según hemos demostrado antes: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- ¿Podemos entonces afimar que $r \to \neg(p \wedge q) \equiv r \to (\neg p \vee \neg q)$?
- La respuesta es sí. Si sustituimos una subfórmula por otra fórmula equivalente a ella, el resultado es una fórmula equivalente a la fórmula inicial.
- Para formalizar este resultado, necesitamos definir previamente la operación de sustitución.

Principio de sustitución y Teorema de equivalencia

Definición

Si A, B y C son fórmulas tales que $B \sqsubseteq A$, la fórmula $A[B/C]$ se obtiene al sustituir en A cada aparición de la subfórmula B por la fórmula C.

Teorema (Principio de sustitución)

Si A y C son fórmulas, p es una variable proposicional en A, y A es válida, entonces $A[p/C]$ también es válida.

Teorema (de equivalencia)

Si $B \sqsubseteq A$ y $B \equiv C$, entonces $A \equiv A[B/C]$.

Principio de sustitución y Teorema de equivalencia

Ejemplo:

- El principio de sustitución permite trabajar con 'esquemas' de fórmulas como si fueran fórmulas más simples.
- Por ejemplo, para demostrar la validez de las fórmulas $(\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$, para cada A y B, es suficiente demostrar la validez de $(\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$

Principio de refutación

Teorema

Si Ω es un conjunto de fórmulas y A es una fórmula, entonces:

$$\Omega \models A \quad \textit{si y solo si} \quad \Omega \cup \{\neg A\} \quad \textit{es insatisfacible.}$$

- **Demostración:**

$$\begin{aligned}
\Omega \models A \quad &\iff \quad \mathrm{Mod}(\Omega) \subseteq \mathrm{Mod}(A) \\
&\iff \quad \mathrm{Mod}(\Omega) \cap \overline{\mathrm{Mod}(A)} = \varnothing \\
&\iff \quad \mathrm{Mod}(\Omega) \cap \mathrm{Mod}(\neg A) = \varnothing \\
&\iff \quad \mathrm{Mod}(\Omega \cup \{\neg A\}) = \varnothing \\
&\iff \quad \Omega \cup \{\neg A\} \quad \text{es insatisfacible}
\end{aligned}$$

Observaciones sobre expresividad

- Una vez establecida la semántica, podemos volver a la definición del lenguaje e introducir simplificaciones justificadas por la semántica.
- Por ejemplo, las leyes asociativas permiten considerar como fórmulas a las expresiones

$$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n, \qquad A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$$

- También podemos reducir el número de conectivos, definiendo unos a partir de otros. Por ejemplo, sería suficiente trabajar solo con la negación y la implicación y definir el resto a partir de ellos

$$\begin{aligned}
A \vee B &=_{def} \neg A \to B \\
A \wedge B &=_{def} \neg(A \to \neg B) \\
A \leftrightarrow B &=_{def} \neg((A \to B) \to \neg(B \to A))
\end{aligned}$$

Observaciones sobre expresividad

- La reducción de conectivos puede ser útil en determinadas áreas, como en el diseño de circuitos digitales, pero para la lógica computacional es preferible aumentar el conjunto de conectivos, aumentando la **expresividad** del lenguaje.
- Por ejemplo, otros conectivos que podemos encontrarnos en distintas aplicaciones son: el operador **NOR**, el operador **NAND**, la **disyunción exclusiva** y el operador **SI**:

p	q	$p \uparrow q$	$p \mid q$	$p \oplus q$	$p \leftarrow q$
1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1

Automatización de las demostraciones

- Una lógica se dice **decidible** si es posible diseñar un algoritmo que determine si cualquier inferencia es válida o no lo es.
- La Lógica Clásica Proposicional es decidible. Por ejemplo, la evaluación de las interpretaciones constituyen un algoritmo demostración (si el conjunto de variables es finito).
- No todas las lógicas son decidibles, lo que no implica que no sean útiles computacionalmente. Por ejemplo, la lógica Clásica de Predicados es **semidecidible**, es decir, solo disponemos de procedimientos cuya finalización sólo está garantizada si la fórmula de entrada es válida.
- En el resto del tema, vamos a aprender un algoritmo de demostración más eficiente que la evaluación de interpretaciones: las **tablas semánticas**.

Refutación y deducción automática

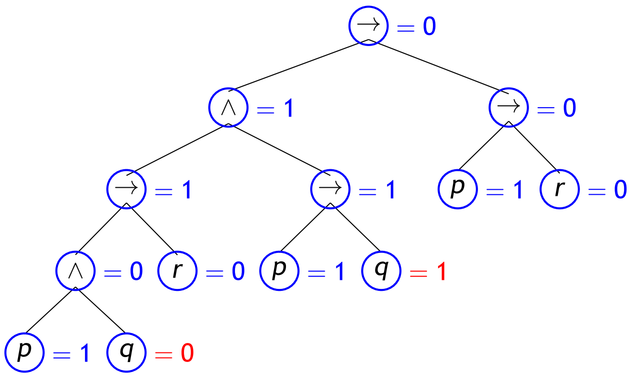
- La mayoría de los algoritmos de deducción automática, y en particular las tablas semánticas, hacen uso del principio de refutación:

$$A_1, \dots, A_n \models A \quad \text{si y solo si} \quad A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg A \quad \text{es insatisfacible}$$

- Es decir, el principio de refutación convierte el problema de generar y evaluar modelos en un problema de búsqueda: ¿es posible encontrar una interpretación tal que $\mathtt{I}(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg A) = 1$?

  Equivalentemente: ¿Es posible encontrar una interpretación tal que $\mathtt{I}(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) = 1$ e $\mathtt{I}(A) = 0$?

Ejemplo: $A = ((p \wedge q) \to r) \wedge (p \to q)) \to (p \to r)$



- La construcción del contramodelo conduce a una contradicción y por lo tanto, no existe ningún contramodelo: A es válida

Ejemplo: $A = ((p \wedge q) \to r) \wedge (p \to q)) \to (p \to r)$

$\mathtt{I}((((p \wedge q) \to r) \wedge (p \to q)) \to (p \to r)) = 0$ ✔(1)
$\mathtt{I}(((p \wedge q) \to r) \wedge (p \to q)) = 1$ ✔(2)
$\mathtt{I}(p \to r) = 0$ ✔(3)
$\mathtt{I}((p \wedge q) \to r) = 1$ ✔(4)
$\mathtt{I}(p \to q) = 1$ ✔(5)
$\mathtt{I}(p) = 1$
$\mathtt{I}(r) = 0$

$\mathtt{I}(p \wedge q) = 0$ ✔(6) — $\mathtt{I}(r) = 1$ (Absurdo)

$\mathtt{I}(p) = 0$ (Absurdo) — $\mathtt{I}(q) = 1$

$\mathtt{I}(p) = 0$ (Absurdo) — $\mathtt{I}(q) = 0$ (Absurdo)

- Por lo tanto, no es posible construir un contramodelo y concluimos que la fórmula es válida.

El método de las Tablas Semánticas

Para convertir el proceso mostrado en el ejemplo anterior en un algoritmo, vamos a introducir las siguientes simplificaciones:

- Dado que $\mathtt{I}(A) = 0$ si y solo si $\mathtt{I}(\neg A) = 1$, en el árbol, vamos a utilizar fórmulas que se evalúen siempre como 1, introduciendo negaciones si es necesario.
- Dado que todas las fórmulas se evaluarán como 1, escribiremos simplemente la fórmula y omitiremos $\mathtt{I}(.)$
- De esta forma, construiremos un contramodelo de la fórmula inicial si construimos un modelo de todas las fórmulas que aparecen en una rama.

Ejemplo: $A = ((p \wedge q) \to r) \wedge (p \to q)) \to (p \to r)$

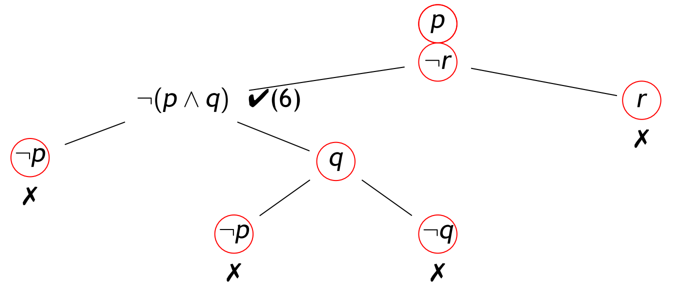
$\neg((((p \wedge q) \to r) \wedge (p \to q)) \to (p \to r))$ ✔(1)

$((p \wedge q) \to r) \wedge (p \to q)$ ✔(2)

$\neg(p \to r)$ ✔(3)

$(p \wedge q) \to r$ ✔(4)

$p \to q$ ✔(5)



- Por lo tanto, no es posible construir un contramodelo y concluimos que la fórmula es válida.

El método de las Tablas Semánticas

Clasificación de fórmulas:

- **Literales:** Un literal es una fórmula atómica y la negación de una fórmula atómica.
- **Fórmulas** α o de comportamiento conjuntivo: $\alpha \equiv \alpha_1 \wedge \alpha_2$
- **Fórmulas** β o de comportamiento disyuntivo: $\beta \equiv \beta_1 \vee \beta_2$.

$\alpha \equiv \alpha_1 \wedge \alpha_2$

α	α_1	α_2
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \to A_2)$	A_1	$\neg A_2$
$\neg\neg A$	A	A

$\beta \equiv \beta_1 \vee \beta_2$

β	β_1	β_2
$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$B_1 \to B_2$	$\neg B_1$	B_2

Definición de tabla semántica

Definición

Consideremos las fórmulas $B_1, \dots, B_m$

- *El árbol con una única rama*

$$\begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{array}$$

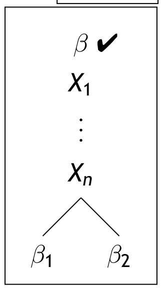
  es una ***tabla semántica****, denominada* ***inicial****, para* $\{B_1, \dots, B_m\}$
- *Si* T *es una* ***tabla semántica*** *y* T' *se obtiene a partir de* T *aplicando una regla extensión, entonces* T' *es una* ***tabla semántica***.

Definición de tabla semántica: reglas de extensión

Extension α: Si una fórmula de tipo α aparece en la tabla, entonces cada rama 'que contiene' a α es extendida con dos nodos etiquetados con α_1 y α_2 ; si $\alpha_1 = \alpha_2$, solo se extiende con un nodo:

$$\begin{array}{c} \alpha\ ✔ \\ X_1 \\ \vdots \\ X_n \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array}$$

Extensión β: Si una fórmula de tipo β aparece en la tabla, entonces cada rama 'que contiene' a β es extendida con dos nodos, uno como descendiente izquierdo etiquetado con β_1 y otro descendiente derecho etiquetado con β_2 ; si $\beta_1 = \beta_2$, solo se extiende con un nodo:



El método de las Tablas Semánticas

Definición

- *Una rama en una tabla semántica se dice* ***(atómicamente) cerrada*** *si en ella aparece un literal y su opuesto. (Estas ramas se marcan con el símbolo ✘ por debajo de su hoja).*
- *Una rama en una tabla semántica se dice* ***abierta*** *si no es cerrada.*
- *Una rama se dice* ***completa*** *si todas sus fórmulas han sido expandidas (para determinar fácilmente esta propiedad, marcaremos con el símbolo ✔ las fórmulas expandidas)*
- *Una tabla se dice* ***terminada*** *si todas sus ramas son cerradas o completas.*

El método de las Tablas Semánticas

- Durante el algoritmo, solo es necesario expandir una vez cada fórmula, ya que posteriores expansiones solo incluirían fórmulas ya existentes en las ramas.
- No es necesario seguir expandiendo una rama cerrada, ya que el conjunto de sus fórmulas es insatisfacible y esta propiedad no cambiaría con posteriores expansiones.
- La fórmulas y subfórmulas deben escribirse tal y como aparecen, sin aplicar ninguna equivalencia.

Teoremas de Corrección y Completitud

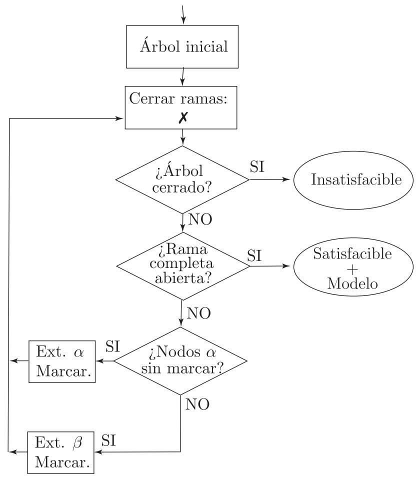
Teorema

1. *Un conjunto de fórmulas* $\{B_1, \dots, B_m\}$ *es insatisfacible si y solo si es posible construir una tabla cerrada para* $\{B_1, \dots, B_m\}$.
2. *Si* Γ *es el conjunto de literales de una rama abierta y completa de una tabla para* $\{B_1, \dots, B_m\}$, *entonces cualquier modelo de* Γ *es un modelo de* $\{B_1, \dots, B_m\}$.

Corolario

1. *La inferencia* $A_1, \dots, A_n \models A$ *es válida si y solo si existe una tabla cerrada para* $\{A_1, \dots, A_n, \neg A\}$.
2. *Si* Γ *es el conjunto de literales que aparecen en una rama abierta y completa de un tabla para* $\{A_1, \dots, A_n, \neg A\}$, *entonces cualquier modelo de* Γ *es un contramodelo de* $A_1, \dots, A_n \models A$.

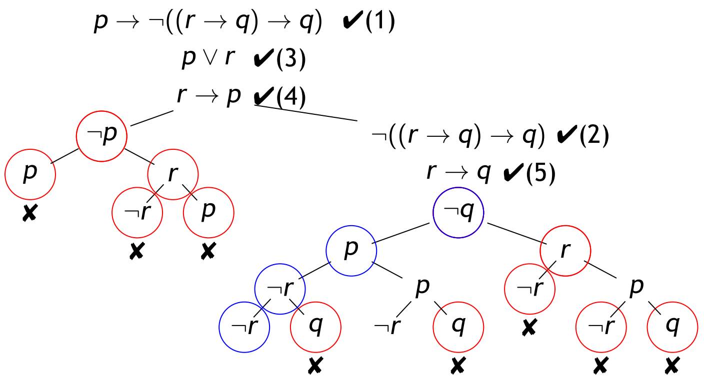
El método de las Tablas Semánticas



- ✎ El algoritmo para tan pronto se encuentre una rama abierta y completa.
- ✎ Las extensiones β se hacen cuando no haya fórmulas α sin marcar.
- ✎ El orden de elección de las fórmulas a expandir no influye en la corrección.

Ejemplo: Vamos a estudiar si el conjunto

$\Omega = \{p \to \neg((r \to q) \to q), q \to (p \vee r), r \to p, q \vee r\}$ es satisfacible



La tabla es completa, pero tiene ramas abiertas, por lo que el conjunto inicial es satisfacible.

La primera rama abierta contiene a los literales $\Gamma = \{\neg q, p, \neg r\}$, por lo que un modelo del conjunto inicial es $\mathtt{I}(p) = 1$, $\mathtt{I}(q) = \mathtt{I}(r) = 0$.