Inteligencia Artificial

Apuntes de Clase - 19 de Agosto 2025

Javier Rojas Rojas
Escuela de Ingeniería en Computación
Tecnológico de Costa Rica
Cartago, Costa Rica
javrojas@estudiantec.cr

***Abstract*—This paper summarizes the topics covered in class on August 19, 2025. The session focused on two main areas: a review of linear algebra concepts, with emphasis on vectors, and an introduction to supervised learning. In the first part, vectors were examined in terms of their definitions, norms, distances, and operations, highlighting their importance as mathematical tools for representing and comparing data. In the second part, supervised learning was introduced through the notions of features, labels, regression, and classification. The connection between these two areas illustrates how algebraic concepts serve as the foundation for machine learning techniques.**

I. Introducción

Estos apuntes están basados en la clase del 19 de Agosto de 2025 [1]. El álgebra lineal es la base matemática de muchas técnicas de inteligencia artificial. En particular, los vectores permiten representar datos, medir similitudes y realizar operaciones fundamentales en espacios multidimensionales. Estos conceptos resultan esenciales para entender el aprendizaje supervisado, paradigma en el que los datos se expresan mediante vectores de características y etiquetas asociadas. Dicho enfoque permite construir modelos de regresión, orientados a predecir valores continuos, y de clasificación, enfocados en asignar categorías. Este documento resume lo visto en clase, donde se tocaron ambos temas, destacando la conexión entre la teoría algebraica y su aplicación en el aprendizaje automático.

II. Repaso de Álgebra Lineal

A. *¿Qué es un vector?*

Un vector es una estructura de datos que permite organizar información de forma secuencial y que también puede interpretarse geométricamente.

*1) **Características**:*

- Tiene un *punto de origen* (normalmente $(0,0)$) y un *punto final*.
- Posee una *dirección* específica.
- Tiene una *magnitud* (distancia entre el punto de origen y punto final).

*2) **Vector como desplazamiento**:* Un vector puede interpretarse como un desplazamiento entre dos puntos en un espacio n-dimensional. Si se considera un punto de origen $\mathbf{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y un punto final $\mathbf{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, el vector que representa el desplazamiento de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ se calcula como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ \ldots,\ b_n - a_n)$$

De esta manera, cada componente del vector se obtiene restando las coordenadas correspondientes del punto de origen a las del punto final.

B. *Norma de un vector*

La *norma* de un vector representa su magnitud, es decir, qué tan grande es o *cuánto mide* desde el punto de inicio hasta el punto final. Se denota como $\|\mathbf{x}\|$.

Existen diferentes formas de medir la norma de un vector:

*1) **Norma L1: Distancia Manhattan**:* La *distancia Manhattan* entre dos puntos se calcula sumando las distancias absolutas de cada componente, desplazándose únicamente a lo largo de los ejes del espacio desde el punto de inicio hasta el punto final. Esta métrica se utiliza especialmente cuando no se permiten desplazamientos negativos.

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

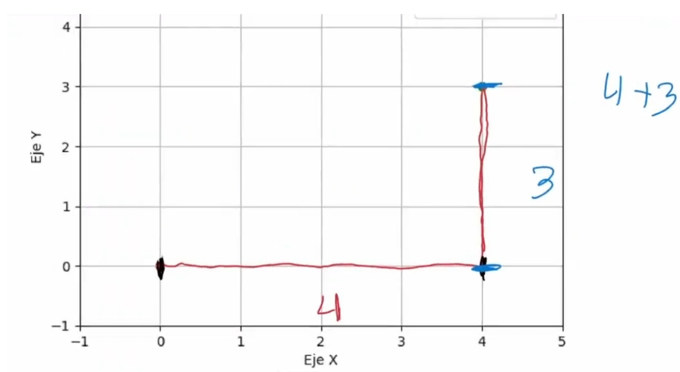

Fig. 1. Ejemplo de distancia Manhattan

*2) **Norma L2: Distancia Euclidiana**:* La *distancia euclidiana* representa la distancia directa entre dos puntos y se calcula usando el *teorema de Pitágoras*. Para un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, su norma es:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

C. *Propiedades de la norma*

- **Positividad:** $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ y $\|\mathbf{x}\| = 0$ si y solo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- **Homogeneidad:** $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$ para cualquier escalar α.
- **Desigualdad triangular:** $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

D. *Vector unitario*

- Es aquel vector que tiene una *longitud o magnitud de 1*.
- Se puede obtener el *vector unitario* de un vector $\mathbf{u}$ dividiendo el vector $\mathbf{u}$ entre su norma.

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$$

Al multiplicar este vector por un escalar, se puede hacer crecer o decrecer, o si se tiene un escalar específico, se podría llegar al vector original.

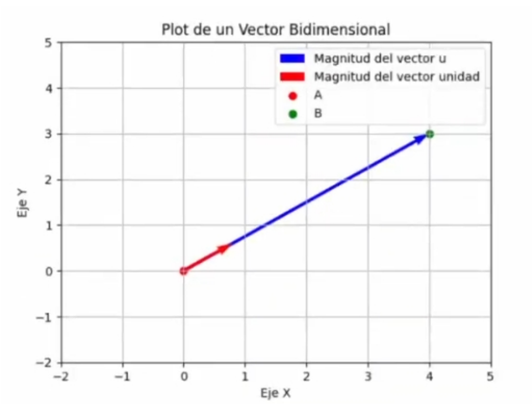

Fig. 2. Ejemplo de un vector y su vector unitario

E. *Producto punto*

Es el *producto interno* entre dos vectores, siempre genera un *escalar*.

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Es especialmente útil en inteligencia artificial, ya que se puede usar como indicador de importancia de *features*, utilizando un *vector de pesos*, y al realizar la operación nos daría un indicador de la importancia del *feature*.

Observe que el producto punto es realmente un caso especial de una multiplicación de matrices, note que siempre es el caso de $x^T y = y^T x$.

Sea $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $y = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$. Calculamos el producto punto:

$$x^T y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 + 10 + 18 = \boxed{32}$$

Fig. 3. Ejemplo Producto punto

F. *Identidad del coseno*

La identidad del coseno para el producto punto entre dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en función de sus magnitudes y el ángulo θ es:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos(\theta)$$

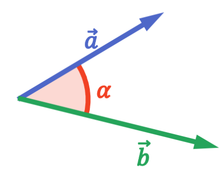

Fig. 4. Ángulo entre dos vectores a y b [2]

¿Por qué es esto importante? Esta es una de las métricas más importantes para determinar la similitud entre vectores, ya que entre menor sea el ángulo, los vectores serán más similares.

En NLP (*Natural Language Processing*), esto puede ser usado para identificar qué tan similares son dos frases, transformando las frases en vectores y midiendo ese *ángulo*.

1) Ejemplo de cálculo de ángulo entre dos vectores:

Se consideran los vectores $\mathbf{u} = (1, 2)$ y $\mathbf{v} = (3, 4)$.

Paso 1: Calcular el producto punto

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 3 + 8 = 11$$

Paso 2: Calcular las normas

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \qquad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Paso 3: Aplicar la identidad del coseno

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} = \frac{11}{\sqrt{5} \cdot 5} = \frac{11}{5\sqrt{5}} \approx 0.9839$$

Paso 4: Calcular el ángulo

$$\theta = \arccos(0.9839) \approx 10.3°$$

G. *Vector co-direccional*

Son dos vectores que siguen la *misma dirección*, pero con *magnitudes distintas*:

$$\mathbf{u} = K \cdot \mathbf{v}$$

Estos al ser iguales en dirección, su *ángulo es de* $0°$.

1) Ejemplo: Vector y su vector unitario: Se considera $\mathbf{v} = (4, 3)$ y su vector unitario $\mathbf{u} = (0.80, 0.60)$.

$$\mathbf{v} = (4, 3), \quad \mathbf{u} = (0.80, 0.60)$$

Paso 1: Calcular el producto punto

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.80 \cdot 4 + 0.60 \cdot 3 = 3.2 + 1.8 = 5.0$$

Paso 2: Calcular las normas

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{0.80^2 + 0.60^2} = \sqrt{0.64 + 0.36} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Paso 3: Usar la identidad del coseno

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} = \frac{5}{1 \cdot 5} = 1 \Rightarrow \theta = \cos^{-1}(1) = 0°$$

Conclusión: Se demuestra que el ángulo entre dos vectores co-direccionales es *cero*.

H. *¿Qué ocurre si calcula el producto punto consigo mismo?*

Se sabe que un vector es *co-direccional consigo mismo*, por lo tanto su ángulo es de $0°$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{u}\| \cdot \cos(0°)$$
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$$

Se puede expresar la *distancia L2* en términos de *producto punto*:

$$\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \|\mathbf{u}\|$$

Si se tiene solamente el vector $\mathbf{u}$, se puede calcular su *magnitud*, o hacer la *operación inversa*.

I. *¿Qué sucede con vectores que tienen ángulo de* $90°$*?*

Cuando dos vectores forman un ángulo de $90°$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos(90°) = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot 0 = 0$$

El producto punto en este caso sería *cero*. Se dice que estos vectores son *perpendiculares*.

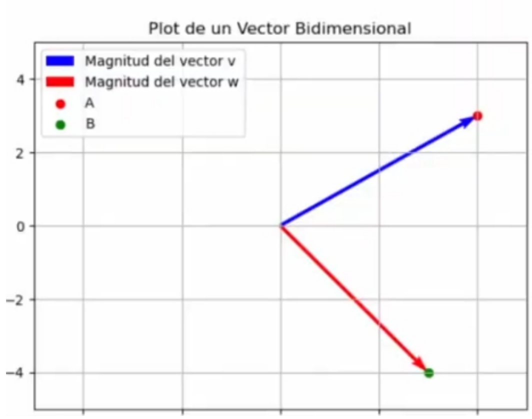

Fig. 5. Ejemplo vectores con ángulo de 90°

J. *Ortogonalidad*

Dos vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son *ortogonales* si y sólo si:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$$

y se denota como $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

K. *Ortonormalidad*

Si además de ser ortogonales, $\|\mathbf{x}\| = 1$ y $\|\mathbf{y}\| = 1$, es decir, ambos vectores son *unitarios*, entonces se dice que $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son *ortonormales*.

III. SUPERVISED LEARNING

Se tiene un dataset, donde se tiene un conjunto de ejemplos que se toma de algún fenómeno, y unas etiquetas que nos ayudarán a realizar nuestro proceso de aprendizaje.

A. *Feature*

- Es una propiedad o atributo **medible** de una entidad.
- Normalmente se representa numéricamente para ser procesada
- Ejemplos:
  - Altura de una casa
  - Peso de un individuo
  - Intensidad de un pixel en una imagen

B. *Vector de características*

Se denota un vector de características como

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_D}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{D}}$$

Donde cada x_i es un *feature*. Este vector agrupa todas las propiedades de un ejemplo en una sola estructura.

Número de habitaciones	Metros cuadrados	Cantidad de jardines
2	250	1

TABLE I
EJEMPLO DE VECTOR DE CARACTERÍSTICAS

C. *Label*

- Valor objetivo que se quiere predecir
- Puede ser
  - *Continuo:* $y \in \mathbb{R}$ (Regresión)
  - *Discreto:* $y \in \{1, \ldots, K\}$ (Clasificación, donde en el conjunto finito se representaría la categoría)

D. *Dataset*

Conjunto de datos que se utilizarán que tiene la forma

$$\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N}$$

Número de habitaciones	Metros cuadrados	Cantidad de jardines	Precio
2	250	1	250000
3	350	5	650000

TABLE II
EJEMPLO DE DATASET

Donde las primeras columnas son *features* y "Precio" sería el *label*.

E. *Subcategorías principales*

1) ***Regresión***:

- Consiste en ajustar una curva o línea que pase lo más cerca posible de un conjunto de puntos de datos.
- Se emplea para analizar tendencias, por ejemplo:
  - ¿Existe una relación directa entre las iniciativas de marketing (anuncios en línea) y las ventas reales de un producto?
  - ¿Cómo afecta el tiempo al valor de una criptomoneda? ¿Aumentará exponencialmente su valor con el paso del tiempo?

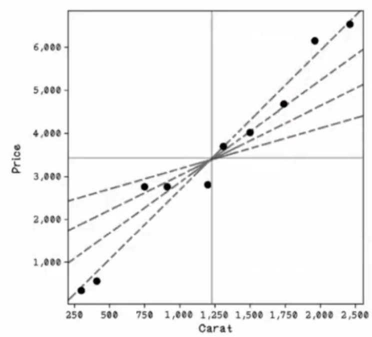

Fig. 6. Ejemplo de regresiones

2) ***Clasificación***:

- Tiene como objetivo predecir la categoría o clase a la que pertenece un ejemplo, según sus característica.
- Ejemplo práctico:
  - ¿Se puede determinar si un vehículo es un automóvil o un camión basándonos en su número de ruedas, peso y velocidad máxima?

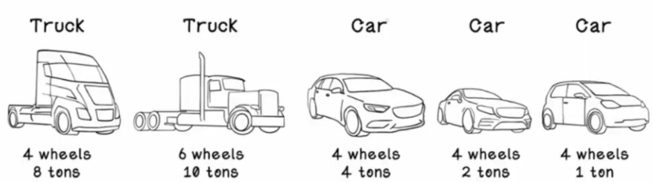

Fig. 7. Ejemplo de clasificación

IV. Ejercicios comprobatorios de Supervised Learning

1) Basado en datos sobre ratas, se tiene una característica de esperanza de vida y una de obesidad. Se está intentando encontrar una correlación entre las dos características. **¿Es este un problema de regresión o clasificación?** *Respuesta: Regresión, ya que se está prediciendo valores continuos de esperanza de vida.*
2) Basado en datos sobre animales, se dispone del peso de cada ejemplar y de si tiene alas o no. Se está tratando de determinar cuáles animales son pájaros. **¿Es este un problema de regresión o clasificación?** *Respuesta: Clasificación, ya que se está determinando si pertenece a la categoría "pájaro" o no.*
3) Basado en datos sobre dispositivos informáticos, se cuenta con el tamaño de pantalla, el peso y el sistema operativo de varios dispositivos. Se quiere determinar cuáles dispositivos son tablets, laptops o teléfonos. **¿Es este un problema de regresión o clasificación?** *Respuesta: Clasificación, ya que se está asignando dispositivos a categorías discretas.*
4) Basado en datos meteorológicos, se tiene la cantidad de precipitación y un valor de humedad. Se quiere determinar la humedad en diferentes épocas del año. **¿Es este un problema de regresión o clasificación?** *Respuesta: Regresión, ya que se está prediciendo valores continuos de humedad.*

References

[1] S. A. P. Portuguez, "Apuntes de la clase de inteligencia artificial," Cartago, Costa Rica, agosto 2025, clase del 19 de agosto de 2025.
[2] F. Explicadas. (2025) Ángulo entre dos vectores. [Online]. Available: https://www.formulasexplicadas.com/angulo-entre-dos-vectores/