Conjuntos

1.- Una noción más básica que la del número es la de conjunto, pero es necesario discutirla y aclararla porque es la base de toda la Matemática. Trate de explicar que es un conjunto

2.- ara indicar un conjunto se escriben sus elementos entre {}, así el conjunto A de los números enteros entre -3 y 4 ambos incluidos es:

A = {

}

El conjunto P de los planetas del sistema solar es: P = {

}

El orden no interesa {a,b} = { }

3- Según lo anterior el conjunto queda definido cuando se indican todos sus elementos. ¿Puede siempre definirse así? _____ Indique dos conjuntos que no pueden definirse de esta manera.

Indique otra manera de definir conjuntos:

4.- Los componentes de un conjunto se llaman *elementos* y se dicen que *pertenecen* al conjunto. La relación "pertenece a" se indica ∈. Así si: A= {a, z, ⊙, *, △ , ❒} entonces ❒ _____ A. La idea de pertenecer , como la de conjunto es una idea intuitiva básica. "No pertenece" se indica ∉ o ∈'. _____ ∉ A

5.- La manera usual de definir un conjunto es dar una regla tal que para todo objeto pueda decirse si pertenece o no al conjunto. Ejemplo:

6.- La forma anterior de definir se expresa así formalmente: Sea P(x) una función proposicional con sentido (puede ser sólo V ó F) para todo objeto x. Queda definido entonces el conjunto A de todas las x que hacen verdadera P(x). Así si P(x) es $x > 10$ esto define al conjunto de los números mayores que 10.

Se indica así: $A = \{x \mid x > 10\}$ donde: = significa "es" { significa "el conjunto de todos los " | significa "tales que".

Veremos que esta manera simple de definir conjuntos lleva a ciertas paradojas.

8.- Definir con una expresión formal los siguientes conjuntos:

a. Números enteros entre -6 y + 50 (incluidos ambos)

b. Números enteros divisibles por 3

c. Números fraccionarios entre 2/3 y 1

d. Puntos del plano cartesiano que están a distancia 5 del origen

e. Alumnos de la ULA que aprobaron más de 10 materias:

f. Proposiciones que considera la lógica formal (son verdaderas o falsas):

9.- Se dice que B es un subconjunto de A si todo elemento de B lo es de A. Se indica $\mathbf{B \subset A}$. Es decir,

9a) $\mathbf{B \subset A \leftrightarrow (x \in B \rightarrow x \in A)}$.

¿Es cierto que $A \subset A$? ______ ¿Es cierto que $B \subset A \leftrightarrow x \notin A \rightarrow x \notin B$? ______ Haga las tablas de verdad de la implicación anterior y de esta.

Suponga que B no contiene ningún elemento (conjunto vacío). ¿Es cierto que $B \subset A$? ______. Decir que sí es decir que el conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto. La suposición de que hay un conjunto vacío permite dar generalidad a muchas definiciones y resultados.

10.- Dos conjuntos se dicen *iguales* si tienen los mismos elementos.

10a) Si $A \subset B$ y $B \subset A$ resulta: A ______ B

¿Porqué?

En lo que sigue se introducen reglas que permiten formar nuevos conjuntos a partir de conjuntos dados.

11.- Se pueden considerar como *axiomas* que afirman la existencia de los nuevos conjuntos. Si A y B son conjuntos se puede formar un nuevo conjunto Z que los contiene como elementos Z = { _____ , _____ }
¿Se puede decir que los elementos de A también son elementos de Z? _____

12.- *Unión*. Sean A y B dos conjuntos. Se llama unión de A y B y se indica $A \cup B$ al conjunto que tiene los elementos que están en A o en B o en ambos y sólo dichos elementos.

Así si $A = \{a, b, m, n, p\}$ $B = \{a, b, s, t, p\}$ entonces $A \cup B$ = {

}

14. *Intersección*. Dados A y B. Se llama intersección al conjunto que tiene sólo los elementos que pertenecen a A y B. Se indica $A \cap B$. Para los conjuntos A y B del caso anterior se tiene: $A \cap B$ = {

}

15. Ambas definiciones pueden ponerse formalmente así:

15a) $A \cup B = \{x \mid x \in$ ________________________________ }
15b) $A \cap B = \{x \mid x \in$ ________________________________ }

16. El conjunto Universal E. En general cuando se define un conjunto se tiene presente un universo o conjunto mayor para el cual la proposición P(x) que define el conjunto es *significativa* (sea V o F). Tal conjunto que comprende al definido se llama conjunto universal.
Así si definimos $A = \{x \mid x \text{ entero y } x > 100\}$ el conjunto universal es el de los enteros.

17. Complementación. Dado un conjunto A, los elementos del conjunto universal E que no pertenecen a A forman otro conjunto que llamaremos A', complemento de A. Así para el ejemplo anterior:

17a) A' = { x | ________________________________ }

Formalmente se define:

17b) Si $Y = \{ x \mid P(x) \}$ entonces Y'= {x | _____ }

o bien si E es el universal de Y, $Y' = \{x \mid x \notin Y \wedge x \in E \}$

18. Si ϕ es el vacío y E el universal se tiene:

$A \cup A'$ = _____
$A \cap A'$ = _____
$A \cup \phi$ = _____
$A \cap \phi$ = _____
$A \cap E$ = _____
$A \cup E$ = _____
ϕ' = _____
E' = _____

19. *Diferencia entre dos conjuntos*. Dados los conjuntos A y B se denomina diferencia A – B al conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B.

19a) $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Se tiene: E – A = _____ y $A - \phi$ = _____

20. Para demostrar las siguientes igualdades usar las definiciones 9a y 10a, entre otras que necesite.

$(A')' = A$

$(A \cup B)' = A' \cap B'$ (De Morgan)

$(A \cap B)' = A' \cup B'$ (De Morgan)

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ asociativa

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ asociativa

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ distributiva

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ distributiva

Demostrar que $A \subset B \leftrightarrow B' \subset A'$

21. Diagramas de Venn. Una manera de visualizar las propiedades de los conjuntos es representar cada conjunto mediante una figura cerrada. Los elementos son los puntos (indicados o no) dentro de la figura.

22. *Pares Ordenados*. La idea de par ordenado (a,b) puede considerarse también una idea intuitiva primitiva. a se llama primer elemento. b se llama segundo elemento. Como se ve la idea implica los conceptos de primero y segundo. En la teoría axiomática, de la que hablaremos más adelante se puede introducir el par ordenado como definición sin acudir a las ideas de "primero" y "segundo". Véase la diferencia entre (a,b) y {a, b} ¿Cuál es?

23. *Producto Cartesiano*. Dados dos conjuntos A y B se puede formar el conjunto de los pares (a, b) tales que a es un elemento de A y b uno de B. Tal conjunto de pares se llama producto cartesiano de A y B y se indica A x B. $C = A \times B = \{x \mid x = (a, b) \text{ siendo } a \in A \text{ y } b \in B\}$

¿Cómo se representa gráficamente?

24. Sean A = {3, a, 5, x} B = {a, b}, A x B = {

}

25. ¿Es en general A x B = B x A ? _____

26. Demostrar las relaciones siguientes $(A \cup B) \times Z = (A \times Z) \cup (B \times Z)$

$(A \cap B) \times Z = (A \times Z) \cap (B \times Z)$

27. Relaciones. La **relación** entre dos objetos es una idea intuitiva básica. Se puede expresar indicando los dos objetos y entre ellos el nombre que describe la relación. Así:
a. 4 es _______________________________ que 5.
b. 3 _______________________________ 3.
c. La luna _______________________________ la Tierra.
d. Juan _______________________________ Pedro.

En general se indica a $\Re$ b y se dice que *a tiene la relación R con b*.

28. *Relación entre elementos de dos conjuntos*. En general, si a $\Re$ b a pertenece a un conjunto A y b a un conjunto B (puede ser eventualmente A = B), Identifique en los ejemplos anteriores los conjuntos A y B e indique casos en los que se cumple la relación y casos en que no se cumple.

a. A = ______________________ B = _____________________

b.

c.

d.

29. *Definición de la relación usando el concepto de producto cartesiano*.

30. ***Dominio y recorrido de una relación***. Sea a $\Re$ b con a $\in$ A y b $\in$ B. Se llama *dominio* de la relación al subconjunto de las a $\in$ A para los cuales vale la relación. Se llama *recorrido* o *rango* de la relación al conjunto de los b para los cuales la relación es válida. Sea A = {2, 4, 6} B={2, 3, 4, 9} Sea la relación a > b con a $\in$ A y b $\in$ B a. Hallar el dominio y el recorrido de R

dominio de R = { _____________________ }
recorrido de R = { ___________________ }

b. Representar la relación como producto cartesiano y ver que subconjunto del producto representa la relación.

31. ***Relación de equivalencia.*** Una relación R definida entre los elementos de A se denomina *relación de equivalencia* si tiene las propiedades siguientes (x, y, z pertenecen a A)
a. es *reflexiva*, es decir Para todo x, x R x.
b. es *simétrica*, es decir, Para todo x y todo y, x R y → y R x
c. es *transitiva*, es decir, Para ______________, x R y ^ y R z → x R z
Averigüe que es una relación anti-simétrica y una relación asimétrica.

Dar ejemplos de relaciones:

a. de equivalencia

b. reflexiva y transitiva; no simétrica

c. simétrica ; no reflexiva ni transitiva.

d. transitiva; no reflexiva ni simétrica.

e. reflexiva y simétrica; no transitiva.

32. *División en clases de equivalencia*. Si entre todos los elementos de un conjunto A está definida una relación de equivalencia; podemos juntar todos los elementos a uno dado (es decir que tienen la relación R de equivalencia con él) en un subconjunto de A. Tal subconjunto es una *clase de equivalencia* de A. Supongamos que seguimos este proceso de reunión para todos los $x \in A$.

- ¿Puede quedar algún elemento que no pertenezca a ninguna clase de equivalencia? _____

- ¿Puede un elemento pertenecer a dos clases de equivalencia diferentes? ____

Se tiene pues la partición en clases de equivalencia es un subdivisión completa de A en conjuntos disjuntos. Dar ejemplos de relaciones de equivalencia y de las subdivisiones en clases que originan.

33. *Funciones*. Una *función* del conjunto X en el Y es una *relación* tal que para *cada* elemento x ∈ X le corresponde *un único* y ∈ Y. Se indica f(x) → Y ó X → Y ó y= f(x) Indicar en los gráficos las relaciones entre elementos mediante flechas. Relación que no es Función

Dar ejemplos de Funciones numéricas y no numéricas

34. *Tipos de Funciones*. Son usuales las siguientes denominaciones de casos especiales de funciones (X se refiere al dominio y Y al rango o recorrido):

a. *Función Inyectiva*: a diferentes elementos de X le corresponden diferentes elementos de Y.

b. *Función sobreyectiva*: todo elemento de Y es correspondiente de alguno de X.

c. *Función biyectiva*: es inyectiva y sobreyectiva

Distinguir en las siguientes *relaciones* cuáles son funciones y que tipo son o no son

- x es subordinado de y
- y es satélite de x
- y → x2 (x, y reales)
- n → n + 1 n entero
- (a, b) → (a + b) / 2
- lanzamientos de un dado → número que salió
- proposición lógica → su valor de verdad

- persona → nombre propio

Fin del documento de Conjuntos. Licencia pendiente.