

Combinatoria

Original de Carlos Domingo. Editado por Carmen Rodríguez y Jacinto Dávila. Universidad de Los Andes, Venezuela.

1. Considere un objeto elemento \triangle que puede tomarse en 3 formas: \triangle \triangleright ∇ y un elemento \square que puede tomarse en cuatro formas: \square , \square , \square , \square .

¿En cuántas formas diferentes puede tomarse *uno cualquiera* de estos elementos es decir un elemento del conjunto: $\{\triangle, \square\}$? _____

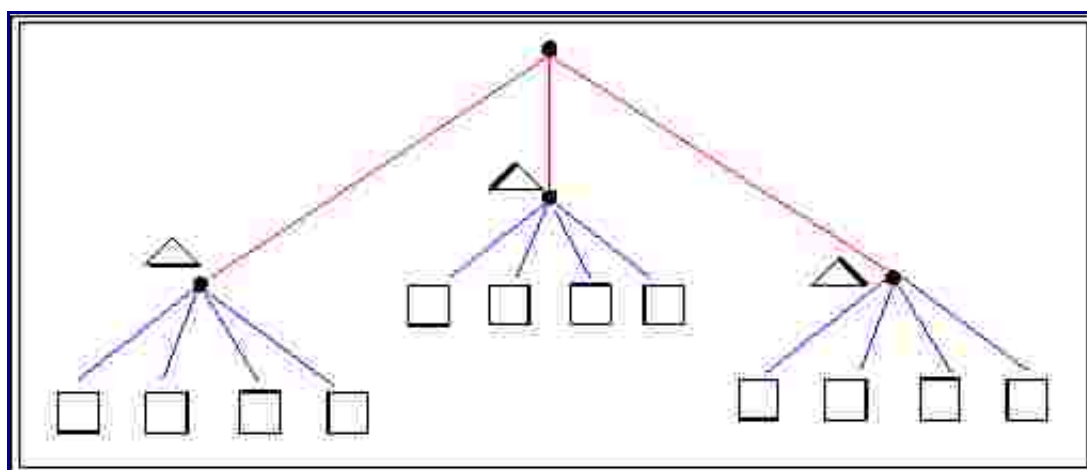
2. Esta solución es un caso particular de la **regla de la suma**:

“Si un objeto A puede tomarse en m formas y el objeto B en n formas entonces uno entre A ó B puede tomarse **de** _____ formas”.

3. Considere el mismo ejemplo 1 pero ahora hay que tomar 2 objetos, el \triangle y el \square .

¿En cuántas formas puedo tomarlos? (no interesa el orden, es decir $\triangle \square$ es igual a $\square \triangle$).

Sugerencia: observar el "árbol":



El número de formas es: _____

4. Esta solución es un caso particular de la **regla del producto**:

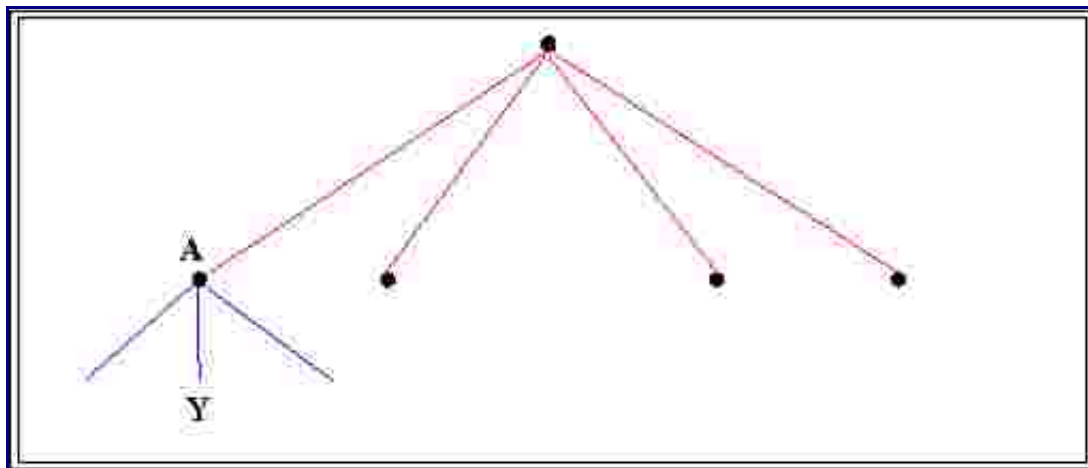
“Si un elemento A puede tomarse de m formas y el B de n formas entonces el par A y B puede tomarse **en** _____ formas”.

5. Sean los conjuntos $C1=\{A, B, C, D\}$ $C2=\{X, Y, Z\}$

¿Cuántas y cuáles son las duplas o pares que pueden construirse teniendo cada dupla un primer elemento de C1 y un segundo elemento de C2?

Considerar que el primer elemento puede tomarse en _____ formas y el segundo en _____ formas.

Construir el árbol:



Duplas: AX, _____

Cantidad: _____

7. Sean r conjuntos con n_1, n_2, \dots, n_r objetos respectivamente. El número de conjuntos diferentes con r elementos cada uno, conteniendo un elemento de cada conjunto será:

$M = n_1 * \dots * n_r$ _____

Demostrarlo por inducción:

8. Si tenemos k conjuntos iguales de n elementos cada uno el número de k -tuplas distintas que pueden formarse extrayendo un elemento de cada uno es: _____

9. Demostrar, usando esta fórmula que hay 1000 números de tres cifras o menos.

10. a) Calcular, basándose en la fórmula dada en 8, ¿cuántos subconjuntos diferentes pueden formarse en un conjunto C de n elementos?.

Nota: Los subconjuntos podrían formarse considerando el $C = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ y luego los subconjuntos $\{a_1\} \dots \{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \dots, \{a_{n-1}, a_n\}, \dots \{a_1, \dots, a_n\}$

b) Demostrar la misma fórmula por inducción.

11. ¿Cuántos números binarios de n cifras hay? (Número binario es el que se escribe con sólo dos cifras 0 y 1 así: 0, 1, ..10, ...11,100,101,110, etc)

12. ¿Cómo resolvería el problema 10 con el resultado del problema 11?

13. ¿Cuántas funciones diferentes $f: A \rightarrow B$ pueden formarse si el dominio A tiene k valores y el rango B n valores? _____

Sigamos la respuesta que propone J. Rodríguez en el “Arte de Contar”: Digamos primero que f es una función de A en B y representemoslo así $f \in B^A$. Esta es una exageración notacional, porque A y B son conjuntos, pero veremos que conviene para los resultados que siguen. Digamos ahora que $A = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ y $B = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$. “Una de las” f es puede representar como sigue:

$$f = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_k \\ c_{f(t_1)} & c_{f(t_2)} & \dots & c_{f(t_k)} \end{pmatrix}$$

pareando la k -tupla de elementos de A con una selección particular (que determina la f) de elementos de B . Decimos ahora que:

f es una k -permutación o permutación(n, k) de los n elementos de B .

Proposición para probar: $|B^A| = |B|^{|A|} = n^k$

Demostración: Sea $B^k = \underbrace{B \times B \times B \times \dots \times B}_{k \text{ veces}}$ (noten que esta no es ninguna de las anteriores, sino una nueva construcción, de nuevo exagerada, para referirnos al producto cartesiano múltiple del conjunto B consigo mismo), tal que:

$$B^k = \{(c_{f_1}, c_{f_2}, c_{f_3}, \dots, c_{f_k}) / (c_{f_i} \in B \wedge 1 \leq i \leq k)\}$$

La función auxiliar $\varphi: B^A \rightarrow B^k$ definida así:

$$\varphi(f) = (f(t_1), \dots, f(t_k))$$

es biyectiva y, por tanto, en virtud del principio de igualdad, conseguir $|B^A|$ es igual que conseguir a $|B^k|$

Para encontrar todas esas k -tuplas (o k -uplas) $(c_{f(t_1)}, c_{f(t_2)}, \dots, c_{f(t_k)})$ formadas por elementos de B , basta con observar que existen n posibilidades de colocar un elemento de A en la primera componente, n en la segunda y así sucesivamente. De manera que se tiene:

$$|B^k| = \underbrace{n * n * n * \dots * n}_{k \text{ veces}} = n^k$$

En conclusión (con la aplicación repetida del principio de igualdad):

Existen n^k

13.1.- Funciones de A en B.

13.2.- permutaciones-k con repetición de los n elementos de B.

13.3.- k-tuplas formadas con elementos de B.

13.4.- Maneras de arreglar k objetos en n cajas.

13.5.- Palabras de longitud k formadas a partir de un alfabeto con los n símbolos en B.

14. Se llama permutación-m sin repetición o variación de n objetos distintos a cualquier selección ordenada de m objetos elegidos entre aquellos n.

Se puede indicar $P(n,m)$ o V_m^n

Por ejemplo si tenemos los 5 elementos {A, B, C, D, E} y tomamos las permutaciones-3 resultan:

ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA
ABD	ADB				
ABE					
BCD					
BCE					
CDE					

(completar la lista en el orden sugerido)

En general el primer elemento puede elegirse en n formas diferentes (en el ejemplo son:_____). El segundo puede elegirse en _____ formas. Así que con $m=2$ podemos obtener _____ formas diferentes y quedan aún _____ elementos. El tercero puede elegirse pues de _____ formas. Así que podemos formar _____ grupos de 3 elementos.

Si elegimos m términos tendríamos:

$V_m^n = P(n,m) =$ _____

b) Por convención se define $P(n,0) = 1$ fórmula que no tiene ningún significado combinatorio.

c) Demostrar por inducción la fórmula $P(n,m)$ (inducción sobre m).

d)- Hacer un árbol para demostrar la fórmula anterior. Concretarse al ejemplo: {A,B,C,D,E} $n= 5$
 $m=3$

e) Las permutaciones-n de n elementos se llaman simplemente permutaciones $P(n,n)= P(n)=$

f) La fórmula de $P(n,m)$ puede escribirse : $P(n,m) = n!/(n-m)!$

Demostración:

15. Para muchos problemas de combinatoria es útil obtener **fórmulas de recurrencia** que permiten calcular números combinatorios en función de números análogos de orden inferior.

Consideramos como ejemplo nuevamente el cálculo de las $P(n,m)$ (permutaciones de n elementos tomados de a m cada vez).

Tomemos un elemento particular (digamos la letra A en el conjunto $S = \{A,E,I,O,U\}$).

Consideremos formadas las $P(n,m)$ permutaciones. Cada permutación contiene o no cada elemento. Las que **no lo contienen** son en total:

$P(\text{_____})$

En las que lo contienen tal elemento puede estar en las posiciones 1, 2, ... , m mientras los demás forman una permutación de _____ elementos tomados de a _____. Así que las que lo contienen son en total _____ . $P(\text{_____})$

Resulta entonces:

$P(n,m) = \text{_____}$

Esta es una fórmula de recurrencia que expresa $P(n,m)$ en función de la misma función P para valores menores de los argumentos.

Con esta fórmula pueden calcularse “por recurrencia” los valores de $P(n,m)$ a partir de valores iniciales. Se pone $P(n,0)=1$, y $P(n,m)=0$ si $n < m$.

Completar el cálculo según el cuadro siguiente (Vea, según la fórmula de recurrencia, como se calcula el valor de cada cuadro en función de las superior

		m							
		0	1	2	3	4	5	6	7
n	1	1	1	0	0	0	0	0	0
	2	1	2	2					
	3	1							
	4	1							
	5	1							
	6	1							
	7	1							

16- En particular las permutaciones de n elementos tomados de a n es $P(n, n)$

$P(n,n) = \text{_____} + n \cdot \text{_____}$

o sea $P(n) = n \cdot \text{_____}$

Esta fórmula de recurrencia define el “factorial” de n . Así que, como ya se vio,

$$P(n) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Por ejemplo:

¿De cuántas maneras distintas podemos ordenar 10 libros en el estante de una biblioteca?

$$P(\underline{\hspace{2cm}}) = \underline{\hspace{2cm}}$$

17- Se presenta a veces el problema de calcular permutaciones de n elementos tomados de a n , pero algunos objetos son indistinguibles. Por ejemplo, en el caso de los 10 libros puede haber 3 copias de un cierto libro, 2 de otro, 4 de otro y 1 de otro. Hay sólo cuatro clases de libros diferentes y por lo tanto muchas de las permutaciones que antes consideramos diferentes son ahora idénticas.

Consideremos en general n elementos de los cuales hay m_1 iguales entre sí, m_2 iguales entre sí, ... m_r iguales entre sí,

$$(\text{claro está que es: } m_1 + m_2 + \dots + m_r = \underline{\hspace{2cm}})$$

Para ver cuántas permutaciones distinguibles hay, consideremos que P sea este número.

Si los m_1 elementos iguales entre sí se transforman en diferentes cada una de las P originaría $\underline{\hspace{2cm}}$ permutaciones y el número total de permutaciones (supuestos los m_1 elementos distintos) sería $P \cdot \underline{\hspace{2cm}}$.

Si ahora los m_2 iguales se volvieran diferentes cada una de las últimas permutaciones originaría $\underline{\hspace{2cm}}$ y tendríamos en total $P \cdot m_1! \cdot \underline{\hspace{2cm}}$ permutaciones.

Por último si todas llegaran a ser diferentes el número total de permutaciones sería:

$$P \cdot m_1! \cdot m_2! \cdot \dots$$

Pero este número total es el número de permutaciones de $\underline{\hspace{2cm}}$ objetos diferentes tomados todos los n . Vale pues $\underline{\hspace{2cm}}$

Así que resulta:

$$P = P(n, m_1, m_2, \dots, m_r) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Por ejemplo si en los 10 libros del ejemplo 16 hay 4 iguales, 3 iguales, 2 iguales y uno único el número de permutaciones distinguibles entre ellos es

$$P = \underline{\hspace{2cm}}$$

18. **Combinaciones:** Se llama combinación de tamaño m de n elementos diferentes a cualquier conjunto de m elementos que se tomen de los n originales.

Dos de los conjuntos se consideran diferentes si difieren en qué elementos tienen. Si difieren sólo en el orden se los considera iguales.

El número de combinaciones de m elementos tomados de n se indica $C(n, m)$

Ejemplo:

Construir todas las combinaciones de tres vocales: $N = \{A, E, I, O, U\}$

AEI AEO $\underline{\hspace{1cm}}$

AIO $\underline{\hspace{1cm}}$

EIO $\underline{\hspace{1cm}}$

En total hay $C(5,3)=$ _____ combinaciones.

¿Cuál es la diferencia con las permutaciones- m de n objetos?

19. La fórmula de las combinaciones se obtiene fácilmente por un razonamiento análogo al de 16.

Si en las combinaciones de tamaño m permutamos todos los objetos cada una origina _____ permutaciones. Así que:

$$P(n,m) = C(n,m) \cdot \underline{\hspace{2cm}}$$

De donde

$$C(n,m) = P(n,m)/P(m,m) = \underline{\hspace{2cm}}$$

20. Los números $C(n,m)$ o bien C_m^n o bien $\binom{n}{m}$ ¹ se llaman números combinatorios y tienen una gran importancia en Estadística. Se escriben:

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(m-1))}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Se define $C(n,0)=1$ aunque esto no tiene un significado combinatorio.

Demostrar la notable propiedad de simetría:

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

21- Se puede obtener una fórmula de recurrencia para las $C(n,m)$. El razonamiento es análogo al visto en 15.

22- Con la fórmula de recurrencia se obtiene la siguiente tabla de los $C(n,m)$ (teniendo en cuenta que $C(1,0)=1$ y $C(n,n)=1$)

		m								
		0	1	2	3	4	5	6	7	8
n	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
	2	1	2	1						
	3	1								
	4	1								
	5	1								
	6	1								
	7	1								
	8	1								

Esta construcción se llama Rectángulo de Tartaglia o Triángulo de Pascal. En realidad era conocido antes de esos por el poeta y algebrista iraní Omar Khayam (año 1100 dc).

¹ Por si acaso, esta es una representación independiente del editor $\left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right)$

23- Además de las reglas de suma y producto y las fórmulas de recurrencia hay otro poderoso artefacto para resolver problemas de combinatoria. Son las **funciones generatrices**.

Se llaman así ciertas funciones que se expresan como una suma de términos polinómicos cuyos coeficientes son los valores del problema combinatorio que interesa.

Tales funciones generatrices facilitan la obtención de relaciones importantes entre tales números combinatorios.

24- El ejemplo más común de función generatriz es la potencia n-ésima de un binomio.

Sea el producto de n binomios $(a+b)^n = (a+b)(a+b) \dots (a+b)$

Para calcularlo, según la ley distributiva, debemos multiplicar cada término de uno de los binomios por todos los términos de los otros. Un término cualquiera así obtenido sería por ejemplo:

$$a b a a b b a b a a a \dots ba$$

donde hemos tomado el a del primer binomio, el b del segundo, el a del tercero, el a del cuarto etc, habiendo _____ factores en total.

Todos los términos que así se obtienen serán diferentes pero muchos sólo difieren en el orden de los factores, así que por su valor deben considerarse _____.

Tomemos un término con r factores **b**. Tendrá _____ factores a. Así que su forma será : a_____ . b_____

¿Cuántos de estos factores habrá?

Vemos que hay exactamente tantos como las diferentes maneras en que podemos tomar r factores b de los _____ binomios diferentes. Es decir, su número será $\binom{n}{r}$. Por lo tanto si en el desarrollo de $(a+b)^n$ se agrupan los términos $a^{n-r} b^r$ y se suman, se obtiene _____

Por eso la potencia puede expresarse:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Consideremos el caso a=1 b=x:

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r = \binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{1} x^1 + \dots + \binom{n}{n} x^n$$

Esta función $(1+x)^n$, se llama función generadora de los números combinatorios $\binom{n}{m}$

25- Demostrar que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} = 2^n$

26- Demostrar que $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^r \binom{n}{r} + \dots = 0$

27- Partiendo de la identidad $(1+x)^{h+m} = (1+x)^h (1+x)^m$ demostrar que

$$\binom{m+h}{r} = \sum_{k=0}^{k=r} \binom{m}{k} \binom{h}{r-k} \text{ y escribirla para } m+h=7, r=3.$$

Esta es la llamada convolución Chu-Vandermonde. En “Concrete Mathematics” de Graham et al se le da una interpretación combinatoria (que no sustituye la demostración que se pide): “Del lado izquierdo de la ecuación se cuenta el número de maneras de escoger r personas entre m mujeres y n hombres, digamos. Entonces, del lado derecho, cada término de la suma es el número de maneras de escoger k de las mujeres y $n-k$ de los hombres. Al sumar sobre todos los k se cuenta cada posibilidad exactamente una vez”.

Fin del documento sobre combinatoria. Licencia pendiente.

Teoría del Conteo

Introducción a las funciones generatrices

Tomado de Mohammad Dadashzadeh *the essentials of discrete structures*, Research and Education Association, EEUU, 1991. Traducción Libre de Jacinto Dávila.

El procedimiento general para contar permutaciones o combinaciones está basado en el concepto de función generatriz: una función polinómica cuyos coeficientes son los valores que buscamos al contar. Para combinaciones, la observación básica es que el valor :

$$\binom{n}{r}$$

representa los coeficientes de la expansión binomial:

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r = \binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{1} x^1 + \dots + \binom{n}{n} x^n$$

La interpretación del lado izquierdo de esta fórmula dice que estamos manipulando n objetos (x es el exponente), cada uno de los cuales puede ser seleccionado una vez (el 1 en el término x ; $x = x^1$) o ninguna vez (el 0 en el término 1; $1 = x^0$).

La interpretación del lado derecho de la fórmula dice que el coeficiente que acompañe al término x^r es el número de formas en que puedo escoger r objetos a partir de n (es decir, n tomados de r en r).

Ejemplo: ¿De cuántas maneras podemos seleccionar 8 bolitas de color a partir de un montón con 2 rojas, 3 azules, 4 amarillas y 5 negras (es decir 14 en total), sujetas a la restricción de que el número de negras sea impar?

Para las rojas² $(1+x+x^2)$

Para las azules³ $(1+x+x^2+x^3)$

Para las amarillas⁴ $(1+x+x^2+x^3+x^4)$

Para las negras⁵ $(x+x^3+x^5)$

La respuesta está en el coeficiente de x^8 en la expansión del producto de esos polinomios. Esta es la salida producida por Maxima⁶:

$$x^{14} + 3x^{13} + 7x^{12} + 12x^{11} + 18x^{10} + 23x^9 + 26x^8 + 26x^7 + 23x^6 + 11x^5 + 12x^4 + 7x^3 + 3x^2 + x$$

es decir, podemos seleccionarlas de 26 maneras.

$$2(1+x+x^2)$$

$$3(1+x+x^2+x^3)$$

$$4(1+x+x^2+x^3+x^4)$$

$$5(x+x^3+x^5)$$

⁶ <http://wxmaxima.sourceforge.net/>
<http://maxima.sourceforge.net/>