

Estructuras Algebraicas

Copyright 2007 Carlos Domingo. Universidad de Los Andes, Venezuela.

1- Hemos visto las ideas básicas relacionadas con el concepto de conjunto. Un conjunto abstracto particularmente útil es el de los números. En gran parte su utilidad reside en que con ellos podemos “calcular”. Es decir definir “operaciones” (+, x, / ó -) que producen números. Por ejemplo la suma de dos números naturales (1, 2, 3, 4, ...) es un número natural.

Si consideramos esta operación como una función de dos variables y N es el conjunto de los números naturales

¿Cuál es el dominio de la función?

¿Cuál es el rango o recorrido?

¿Son los mismos si consideramos la multiplicación?

¿Qué pasa si consideramos las operaciones inversas de las anteriores? (resta y división):

2- Los números y la suma no son los únicos conjuntos y operaciones que tienen la propiedad de que a un par de elementos del conjunto le corresponde 1 elemento del mismo conjunto.

Considere estos ejemplos y diga cuáles tienen la propiedad

a) $T = \{\text{desplazamientos rectilíneos de un punto en un plano}\}$ Operación de dos traslaciones t_1, t_2 : realizar t_1 y luego t_2

b) operación definida por la tabla (+), conjunto: $\{a, b, c\}$ (si es $b _ b = c$)

(+)

(+)	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

c) operación definida por la tabla (*), conjunto: {a,b,c}

(*)

(*)	a	b	c
a	a	b	c
b	d	e	c
c	s	b	p

d) $H=\{a,b,c\}$ (.) dada por:

(.)

(.)	a	b	c
a	a	b	c
b	c	a	b
c	c	b	a

e) $C=\{\text{hilas de letras}\}$, operación: poner una hilera a continuación de la otra.

f) $P=\{\text{proposiciones lógicas}\}$, operación: \wedge (el "y" lógico).

g) dar otros ejemplos

3- Cuando ocurre que la operación entre dos elementos del conjunto nos vuelve a dar un elemento del conjunto se dice que el conjunto es **cerrado** respecto de la operación.

¿Qué importancia puede tener esta propiedad de cierre?

4- Esta multiplicidad de ejemplos de conjuntos C en las que puede definirse una función $f(C \times C) \rightarrow C$ ha llevado a estudiar este tipo de funciones (operaciones) en más detalle. En principio los conjuntos y funciones pueden definirse arbitrariamente como se ve en los ejemplos anteriores. Pero para que la operación tenga algún interés debe tener ciertas propiedades que se correspondan a relaciones importantes que se hallen en la realidad, es decir las operaciones deben ser “modelos matemáticos” de operaciones significativas con objetos reales. Veamos los tipos más usuales de estas funciones o estructuras.

5- Grupo – Es un conjunto *cerrado* respecto de una operación **asociativa** con **cero** e **inverso**. Es decir:

- a) si $a \in G \wedge b \in G \rightarrow a (+) b \in G$
- b) $(a (+) b) (+) c = a (+) (b (+) c)$
- c) Existe un $e \in G$ tal que para todo $a \in G$ es $a (+) e = e (+) a = a$
- d) Dado $a \in G$ existe un $a' \in G$ tal que $a (+) a' = e$

Ver en los ejemplos 2 a) b) c) d) e) f) cuales forman grupo. Indicar el elemento neutro. Si no forman decir porqué.

6- Decir cuales conjuntos forman un grupo con las operaciones indicadas. Indicar cuál es el elemento neutro.

- a) Números naturales. Operación $+$

- b) Números enteros. Operación $+$

- c) Números enteros. Operación \times

- d) Números fraccionarios. Operación \times

e) Rotaciones de una figura en el plano. Operación a (+) b: hacer primero rotación de ángulo a y luego la de ángulo b.

f) Números con 1 decimal. Operación: multiplicación seguida de redondeo a un decimal. (considere 0.2x0.8x10.5)

g) Rotaciones de una figura en el espacio de 3 dimensiones

h) Matrices de 2x2. Operación: producto de matrices:

a

b

c

d

por

e

f

g

h

igual

ae + bg

—

—

—

AXB

¿Qué pasa si consideramos sólo las matrices no singulares? (con inversa).

h) Los conjuntos con la operación intersección (\cap) (y con la operación Unión?).

i) Los polinomios de grado $\leq n$ con la operación “suma de polinomios”.

j) Las proposiciones lógicas con la operación \wedge .

7- Un grupo se llama conmutativo o abeliano si, además de las operaciones indicadas en 5, la operación (+) es **conmutativa**. Es decir: $a (+) b = b (+) a$

Decir cuáles de los grupos vistos en 2 y 6 son abelianos.

8- Entre muchos entes matemáticos de un conjunto existen **dos** operaciones que pueden relacionarse entre ellas. Indique las que conozca en los ejemplos 2 y 6. (formen o no un grupo)

9- Anillo – Es un grupo cerrado respecto de 2 operaciones (+) y (\times) que es un grupo abeliano respecto de (+) y tal que la (\times) es asociativa y distributiva respecto de (+). Es decir, si a, b, c pertenecen a A

a) $a (+) b \in A$; $(a (+) b) (+) c = a (+) (b (+) c)$;

existe $e \mid a (+) e = e (+) a = a$; existe $a' \mid a (+) a' = e$; $a (+) b = b (+) a$;

b) $a (*) b \in A$; $(a (*) b) (*) c = a (*) (b (*) c)$;

c) $(a (+) b) (*) c = (a (*) c) (+) (b (*) c)$; $a (*) (b (+) c) = (a (*) b) (+) (a (*) c)$;

El anillo se llama **con unidad** si existe un elemento u tal que: $a(x)u = u(x)a = a$ para todo $a \in A$

El anillo es conmutativo si $a(x)b = b(x)a$.

Discutir en los ejemplos de 2 y 6 cuáles forman anillo, ver si hay unidad y cuáles anillos son conmutativos.

10- Demostrar que si el anillo es conmutativo la distributividad a derecha se deduce de la distributividad a izquierda.

11- Dominio de integridad, D , Es un anillo de conmutación con unidad en el cual si a, b, c pertenecen a D entonces $c(x)a = c(x)b \rightarrow a = b$ (multiplicación). Esta propiedad equivale a decir: que $r(x)s = 0 \rightarrow r = 0$ para todo s (demostrar)

12 – Decir qué ejemplos de 2 y 6 son dominios de integridad.

13- Cuerpo

Es un dominio de integridad tal que todo elemento menos el neutro tiene un inverso multiplicativo.

Es decir para todo $a \in k$ y a diferente de e existe a' tal que $aa' = u$

¿Cuáles de los ejemplos en 12 son Cuerpos?

18- Algebra de Boole Es un conjunto con dos operaciones idempotentes, conmutativas, asociativas respectivamente distributivas, entre cuyos términos tienen una relación de inclusión reflexiva, antisemétrica y transitiva ($=$) consistente con las operaciones, con dos cotas universales y una operación de complementación involutiva que sigue la ley dual (De Morgan)

Es decir:

19.- ¿Qué es un conjunto parcialmente ordenado? ¿Verdad que esta pregunta debería estar al principio?

Fin del documento de Estructuras Algebraicas. Licencia pendiente.