Clase Física 1 07

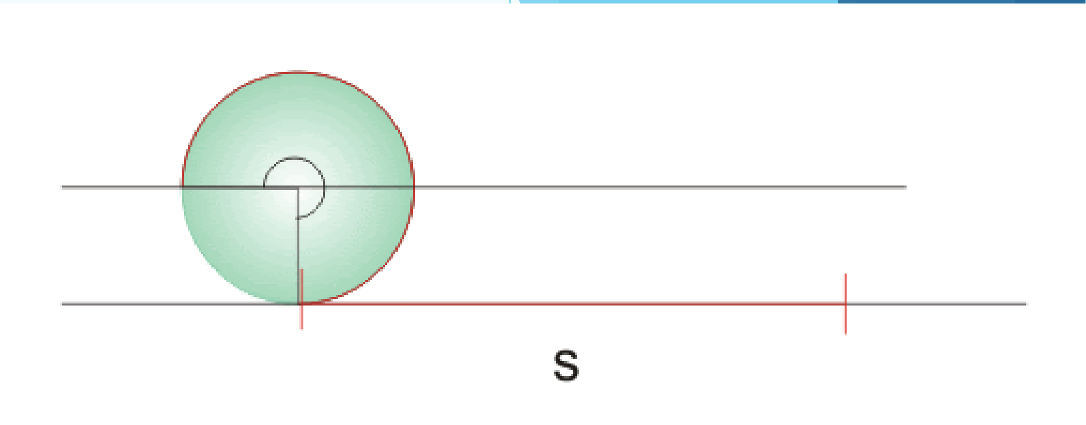
Ejemplos Trabajo y Potencia

Teoría Momento Angular

Ejemplos Conservación de Momento Angular

Trabajo y potencia del movimiento rotacional

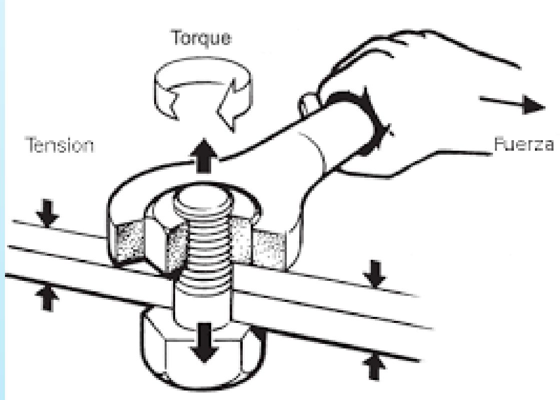
El trabajo que realiza una fuerza en el movimiento de rotación esta relacionada con el desplazamiento de arco que este permita realizar, sea en cualquier tipo de movimiento.



$$S = R\theta$$
$$ds = Rd\theta$$

Forma diferencial del trabajo $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$

pero para estos casos tomaremos que la fuerza es tangente en el proceso o actual lo mas cercano a este movimiento.



$$\tau = RFsen\beta$$

el torque es la relación angular de la fuerza por lo cual partiendo de las expresiones anteriores tendremos que

$$dW = \tau d\theta \quad \textit{este es el trabajo que se realiza en el movimiento de rotación.}$$

$$\boldsymbol{W = \tau\,\Delta\theta} \quad [\boldsymbol{J}]$$

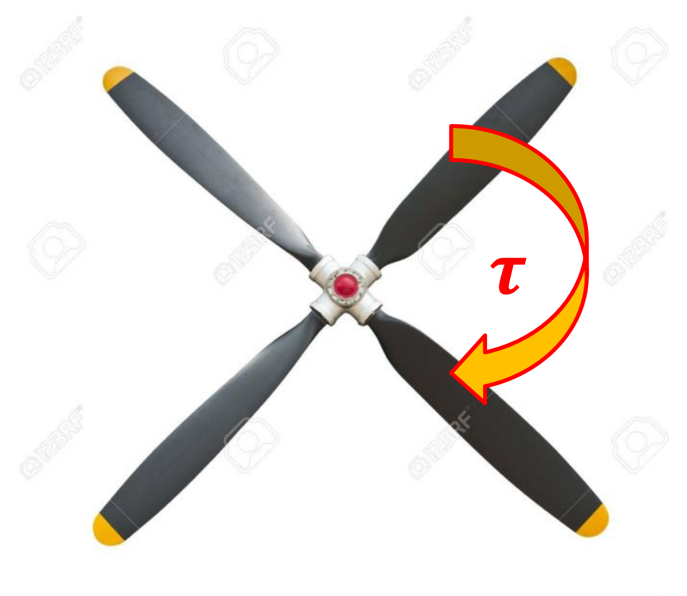
aunque también puede darse en términos de los cambios de energía cinética rotacional.

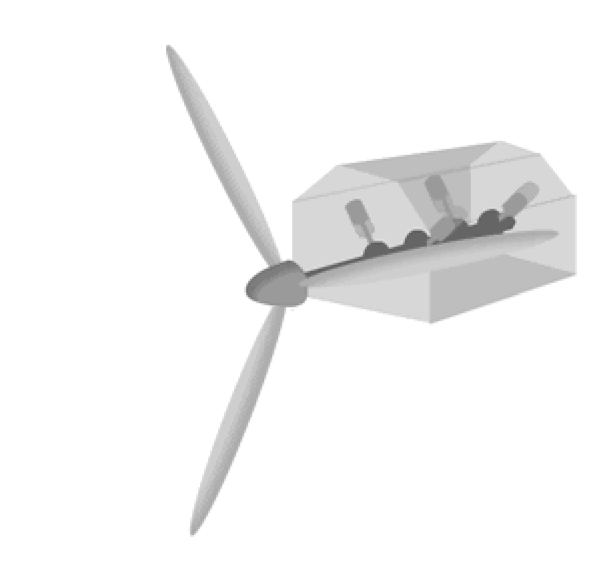
$$W = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_o \omega_o^2$$

La potencia es simplemente la relación del trabajo en el tiempo para este realizarse.

$$P_{inst} = \frac{dW}{dt} = \tau\omega \quad P_{media} = \frac{\Delta W}{\Delta t}\left[\frac{\boldsymbol{J}}{\boldsymbol{s}} \text{ ó } \boldsymbol{watts}\right]$$

10.28. El motor proporciona 175 hp a la hélice de un avión a 2400 rev/min. a) ¿Cuánta torca proporciona el motor del avión? b) ¿Cuánto trabajo realiza el motor en 3 revoluciones de la hélice?





Para el calculo de las cantidades de trabajo se debe de tener todo en el sistema de unidades internacional.

1 hp (caballo de fuerza) = 746 Watts

$P_{motor} = 175\ hp \approx 130{,}550\ Watts$

$\omega_{motor} = 2400 \frac{rev}{min} \approx 80\pi\ rad/s$

a) Para la torca del motor partimos de la formula de potencia instantánea

$$P_{motor} = \tau \omega_{motor}$$

$$\tau = \frac{P_{motor}}{\omega_{motor}} = \frac{130{,}550}{80\pi} = 519.44\ N * m$$

b) para el trabajo necesitamos el desplazamiento angular que sufre el objeto durante el tiempo que nos interesa analizar. $\Delta\theta = 3\ rev \approx 6\pi rad$

$$W_{motor} = \tau \Delta\theta = 519.44(6\pi) = 9{,}791.25\ J \approx 9.79\ KJ$$

10.27. Un carrusel (tiovivo) con 2.40 m de radio tiene momento de inercia de 2,100 kg*m2 alrededor de un eje vertical que pasa por su centro y gira con fricción despreciable. a) Un niño aplica una fuerza de 18.0 N tangencialmente al borde durante 15.0 s. Si el carrusel estaba inicialmente en reposo, ¿qué rapidez angular tiene al final de los 15.0 s? b) ¿Cuánto trabajo efectuó el niño sobre el carrusel? c) ¿Qué potencia media le suministró el niño? d) cual es la potencia instantánea en el tiempo de 15 s?

Para este caso partimos de las consideraciones de dinámica circular y cinemática.

$$\sum \tau = I_o \alpha \ \ positivo\ en\ sentido\ antihorario$$

$$F_{niño} R sen 90° = I_o \alpha$$

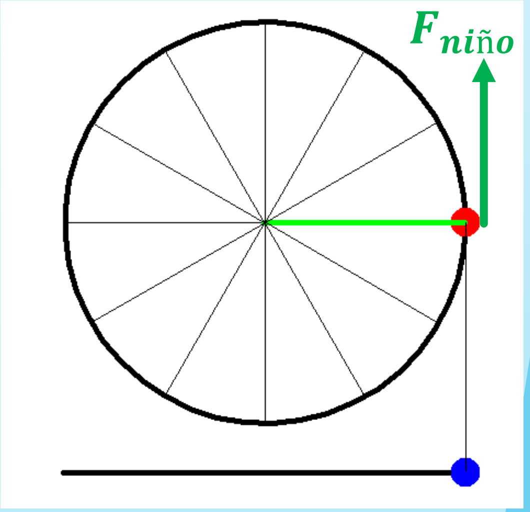
$$\alpha = \frac{F_{niño}\, R}{I_o} = \frac{18(2.4)}{2,100} = 0.021\ {}^{rad}/_{s^2}$$

a) $\omega_f = \omega_0 + \alpha t = 0 + 0.021(15) = 0.31\ rad/s$

b) se necesita el desplazamiento del objeto durante el contacto con el niño

$$\Delta\theta = \frac{(\omega_f + \omega_o)}{2} t = \frac{(0.31 + 0)15}{2} = 2.36\ rad$$

$$W_{niño} = \tau_{niño} \Delta\theta = F_{niño} R sen\ 90°\ \Delta\theta = 18(2.4)(2.36) = 101.95\ J$$



Desplazamiento del carrusel

c) la potencia media depende del trabajo realizado por el niño

$$P_{media} = \frac{W_{niño}}{t} = \frac{101.95}{15} = 6.80\ Watts$$

d) la potencia instantánea depende de la velocidad angular en ese instante

$$P_{ins} = \tau_{niño} \omega_f = F_{niño} R sen\ 90° \omega_f = 18(2.4)(0.31) = 13.39\ Watts$$

Momento Angular $\vec{L}$

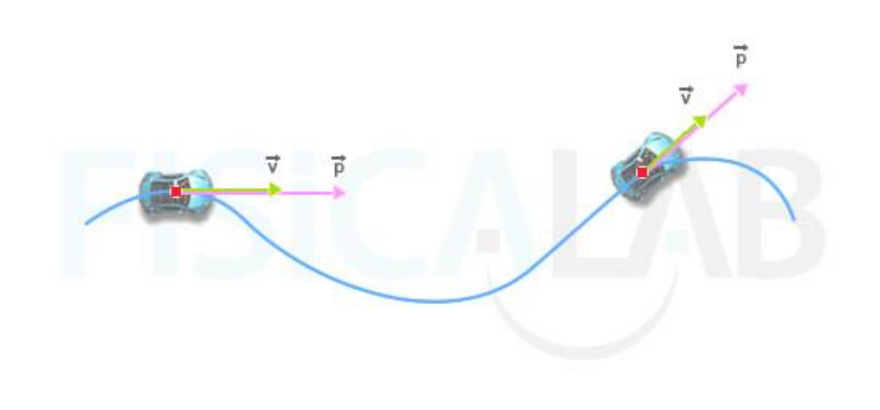
Definición: El momento angular o momento cinético es una magnitud física, equivalente rotacional del momento lineal y representa la cantidad de movimiento de rotación de un objeto. Es una cantidad vectorial que caracteriza las propiedades de inercia de un cuerpo, que gira en relación con cierto punto.

En el Sistema Internacional de Unidades el momento angular se mide en kg·m²/s. Esta magnitud desempeña respecto a las rotaciones un papel análogo al momento lineal en las traslaciones.

Consideraciones del momento lineal para la consideración angular.

$$\vec{p} = m\vec{v} \ \ [kg * {}^{m}/_{s}]$$

Es una consideración vectorial de la velocidad del movil por lo tanto se considera un vector y se trabaja como tal.



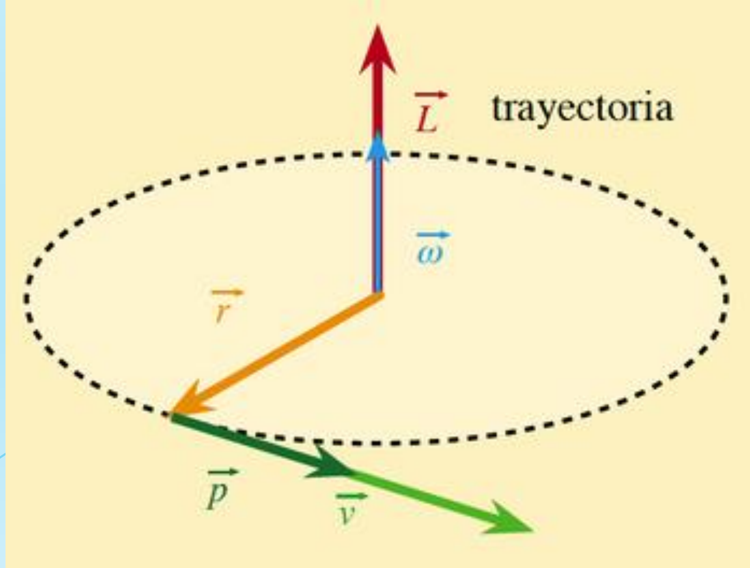
Por contraparte el momento angular depende del punto que se elija para calcularse tiene mayor relación con la rotación

Es una operación entre dos vectores por lo tanto tiene varias formas de calculo.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \ \ [kg * {}^{m^2}/_{s}]$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \ \ [kg * {}^{m^2}/_{s}]$$

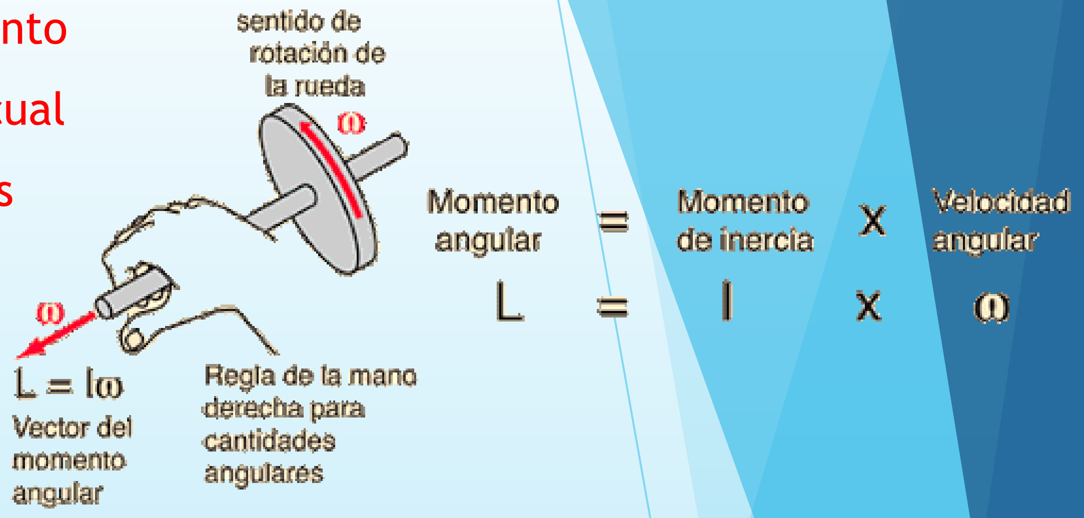
$$|\vec{L}| = |\vec{r}||\vec{p}| \ sen\theta$$



Nota: Para un sistema aislado se conservara la energía total, el momento lineal y el momento angular.

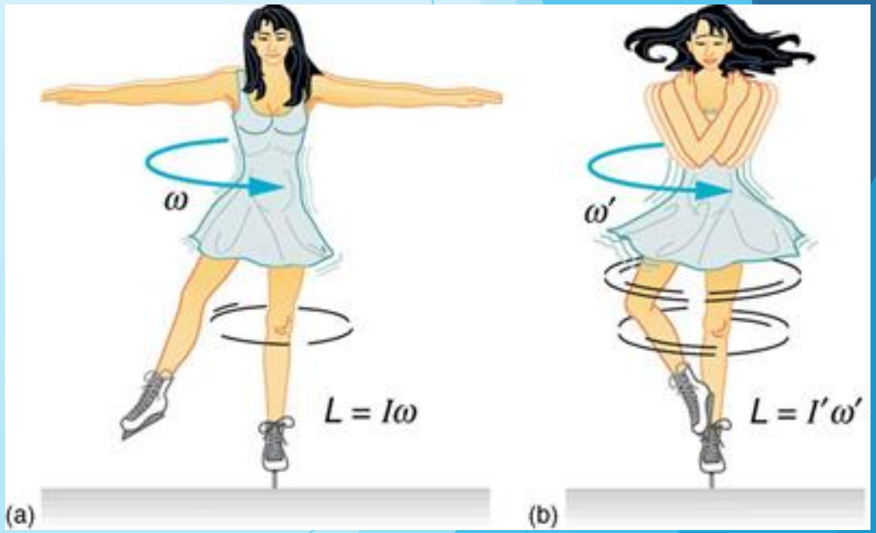
Se puede obtener otra expresión del momento angular partiendo de las consideraciones angulares del objeto.

Nota: por lo tanto no importa cual sea su forma de calculo del momento angular este es un vector perpendicular a la rotación o al punto del cual se esta analizando, por lo que considerarlo su forma de vector es mas fácil empleando la regla de la mano derecha para el.

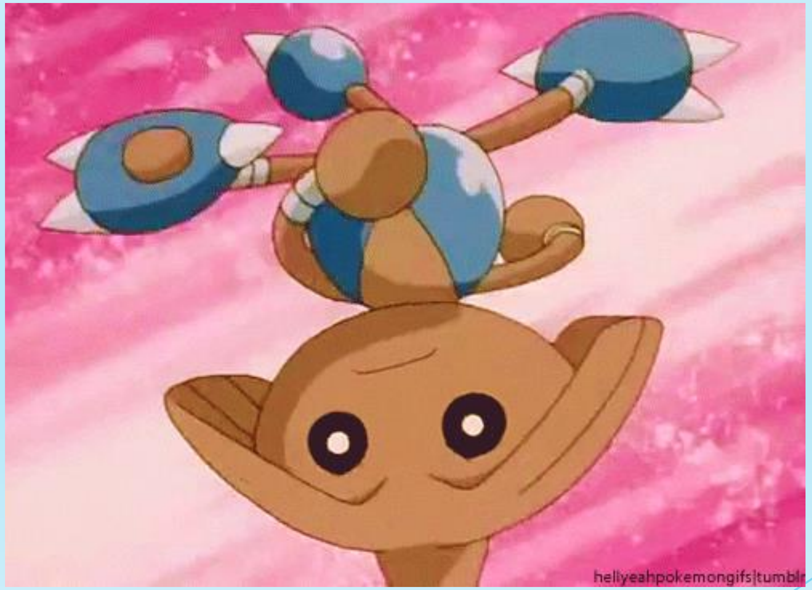


Puede darse el caso de $\vec{L} = 0\ cuando\ son\ palalelos\ el\ r\ y\ la\ v$
$\vec{L} = maximo\ \ cuando\ son\ perpendiculares\ el\ r\ y\ la\ v\ \ \vec{L} = mrv$

$$\vec{L} = \vec{I} \times \vec{\omega}\ \left[kg * {}^{m^2}/_{s}\right]$$



En esta sección podremos analizar sistemas que con las herramientas anteriores no era posible analizar.



Conservación del momento angular

Definición: es una condición del movimiento rotacional en el que los torques externos sobre el objeto no están realizando efectos para crear cambios de velocidad o mejor dicho de momento angular.

$$\sum \tau = \frac{dL}{dt}$$

ya que en la aplicación los torques en un sistema pueden cambiar los efectos

del movimiento en rotación del objeto por lo cual es posible un cambio del momento angular.

Nota: esto solo se puede dar cuando todo esta siendo evaluado en el mismo punto

de referencia o eje de rotación.

Momento angular total: es la suma de los momentos individuales que sufre el objeto o

el sistema en particular.

$$\vec{L}_{total} = \vec{L}_a + \vec{L}_b + \vec{L}_c + \cdots \dots \dots$$

Conservación del Momento Angular

$$\cancel{\sum} \tau = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

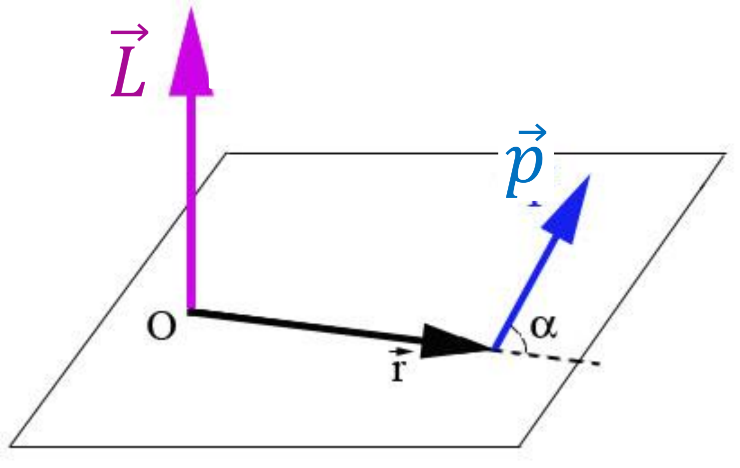
$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = 0$$

$$\Delta L = 0$$

$$\boldsymbol{L_f = L_o}$$

Ejemplo: Una partícula de masa de 0.5Kg de masa se encuentra en la posición r= (-4,5,-3)m y se le aplica una velocidad v= (-7,0,10)m/s determine el momento angular que produce la partícula en ese instante.

Resolución: se determinara el momento lineal y angular que sufre la partícula por medio del calculo de determinantes de la matriz y posteriormente con ese vector se calcula el ángulo entre los vectores.



$$|\vec{r}| = \sqrt[2]{(-4)^2+5^2+(-3)^2} = 7.071m$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = 0.5(-7,0,10) = (-3.5, 0, 5)kg * m/s$$

$$|\vec{p}| = \sqrt[2]{(-3.5)^2+0^2+(5)^2} = 6.10\ kg * m/s$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -4 & 5 & -3 \\ -3.5 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \big(5(5)-(0)(-3)\big)\hat{\imath} - \big((-4)(5)-(-3.5)(-3)\big)\hat{\jmath} + \big(-4(0)-(-3.5)(5)\big)\hat{k}$$

$$\boldsymbol{\vec{L} = \left(+25\hat{\imath} + 30.5\hat{\jmath} + 17.5\hat{k}\right)kg * m^2/s}$$

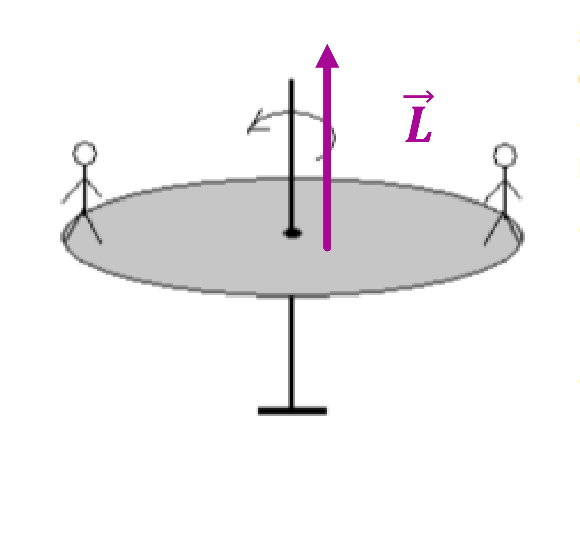
Para el calculo del ángulo se emplea el resultado del producto cruz

$$|\vec{L}| = \sqrt[2]{25^2+30.5^2+17.5^2} = 43.14\ kg * m^2/s$$

Se emplea la formula de la magnitud del momento angular $|\vec{L}| = |\vec{r}||\vec{p}|\ \sin\alpha$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{|\vec{L}|}{|\vec{r}||\vec{p}|}\right) = \sin^{-1}\frac{43.14}{(7.071)(6.10)} = 90°$$

10.34. Una mujer con masa de 50 kg está parada en el borde de un disco grande, con masa de 110 kg y radio de 4.0 m, que gira a 0.50 rev/s alrededor de un eje que pasa por su centro. a) Calcule la magnitud del momento angular total del sistema mujer-disco. (Suponga que la mujer puede tratarse como punto.) b) si existe un incremento de la velocidad de 4π rad/s cual será el impulso angular que tiene el sistema mujer-disco.



Resolución: se plantea la inercia del sistema mujer-disco y se trabaja la expresión del momento angular en su forma de consideraciones angulares.

$$I_{sis} = I_{mujer} + I_{disco}$$

$$I_{sis} = M_m R^2 + \frac{1}{2} M_d R^2$$

$$I_{sis} = (50)(4)^2 + \frac{1}{2}(110)(4)^2 = 1680\ kg * m^2$$

a)momento angular del sistema mujer-disco $\omega_o = 0.5\frac{rev}{s} \approx \pi\ rad/s$

$$L_o = I_{sis}\omega_o$$

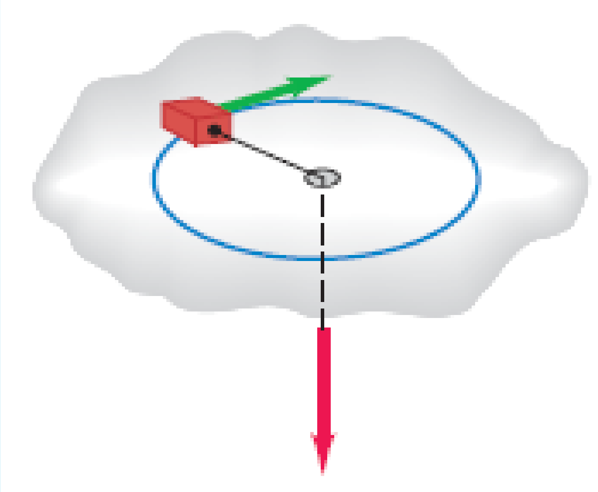
$$L_o = 1680(\pi) = 1680\pi\ kg * m^2/s$$

b) el impulso angular del sistema si existe un cambio de velocidad de 4π rad/s

impulso es el cambio de momento angular

$$\Delta L = I_{sis}\omega_f - I_{sis}\omega_o = 1680(4\pi) - 1680(\pi) = 15.83\ x10^3\ kg * m^2/s$$

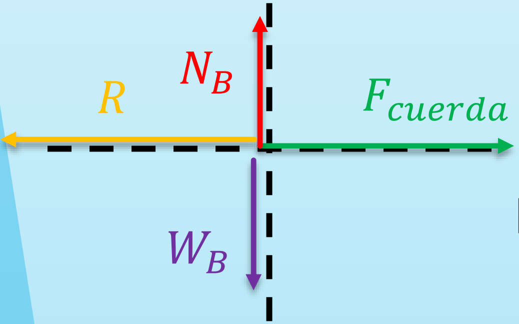
10.40. Un bloque pequeño de 0.0250 kg en una superficie horizontal sin fricción está atado a un cordón sin masa que pasa por un agujero en la superficie (figura 10.48). El bloque inicialmente está girando a una distancia de 0.300 m del agujero, con rapidez angular de 1.75 rad/s. Ahora se tira del cordón desde abajo, acortando el radio del círculo que describe el bloque a 0.150 m. El bloque puede tratarse como partícula. a) ¿Se conserva el momento angular del bloque? ¿Por qué? b) ¿Qué valor tiene ahora la rapidez angular? c) Calcule el cambio de energía cinética del bloque. d) ¿Cuánto trabajo se efectuó al tirar del cordón?



Resolución: se plantea por que los efectos de las fuerzas en el sistema no producen torques por lo que se puede decir que el sistema se conserva el momento angular.

a)demostrar el por que se conserva el momento angular

Se partirá del diagrama de fuerza del bloque demostrando que la fuera no realiza torque.



Basando el análisis de torque se puede estimar que la normal y el peso realizan torques pero estos se cancelan entre si, mientras que la fuerza no es capaz de realizar torque alguno. por lo que podemos estimar que el sistema es conservativo del momento angular.

b) cual es el valor de la velocidad angular al final del proceso de la reducción de la cuerda por parte de la fuerza.

$$\Delta L = 0$$

$$L_f = L_o$$

$$I_f \omega_f = I_o \omega_o$$

$$\cancel{m} r_f^2 \omega_f = \cancel{m} r_o^2 \omega_o$$

$$\omega_f = \frac{r_o^2 \omega_o}{r_f^2} = \frac{(0.3)^2 (1.75)}{0.15^2} = 7.0\, rad/s$$

c) aunque exista conservación del momento no se sabe si ocurre así con la energía rotacional del sistema.

$$\Delta K_{rot} = K_f - K_o$$

$$\Delta K_{rot} = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_o \omega_o^2$$

$$\Delta K_{rot} = \frac{1}{2} m r_f^2 \omega_f^2 - \frac{1}{2} m r_o^2 \omega_o^2$$

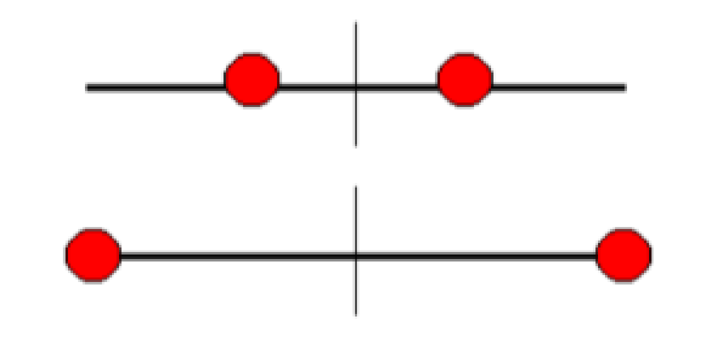
$$\Delta K_{rot} = \frac{1}{2}(0.025)(0.15)^2(7)^2 - \frac{1}{2}(0.025)(0.3)^2(1.75)^2$$

$$\Delta K_{rot} = 0.0103\, J$$

d) el trabajo realizado por el cordón es el cambio de la velocidad angular del sistema

$$W_{cordon} = \Delta K_{rot} = 0.0103\, J$$

Ejercicio 1. Dos esferas iguales de masa 6kg y 20cm de radio están montadas como se indica en la figura y pueden deslizar a lo largo de una varilla delgada de 3kg de masa y 2m de longitud. El conjunto gira libremente con una velocidad angular de 120rpm respecto a un eje vertical que pasa por el centro del sistema. Inicialmente los centros de las esferas se encuentran fijos a 0.5m del eje de giro. Se sueltan las esferas y estas se deslizan por la varilla hasta que estas salen por los extremos. Calcular: a)La velocidad angular de la rotación cuando los centros de las esferas se encuentran en los extremos de la varilla. b)Encontrar el cambio de la energía cinética del sistema de esferas varilla.



Resolución es un caso de conservación del momento angular pero en la condición que en este caso las inercias de los objetos se tienen que calcular por medio del teorema de eje paralelo en el centro de la varilla.

$$M_{esf} = 6kg \;\; R = 0.2m \;\; M_{Var} = 3kg \; L = 2m \;\; \omega_o = 120rpm \approx 4\,\pi\, rad/s$$

$$I_o = I_{varilla} + 2I_{esferas} = \frac{1}{12}M_{var}L^2 + 2\left(\frac{2}{5}M_{esf}R^2 + M_{esf}d_o^2\right) = \frac{1}{12}(3)(2)^2 + 2\left(\frac{2}{5}(6)(0.2)^2 + (6)(0.5)^2\right) = 4.192\; kg * m^2$$

$$I_f = I_{varilla} + 2I_{esferas} = \frac{1}{12}M_{var}L^2 + 2\left(\frac{2}{5}M_{esf}R^2 + M_{esf}d_f^2\right) = \frac{1}{12}(3)(2)^2 + 2\left(\frac{2}{5}(6)(0.2)^2 + (6)(1)^2\right) = 13.192\; kg * m^2$$

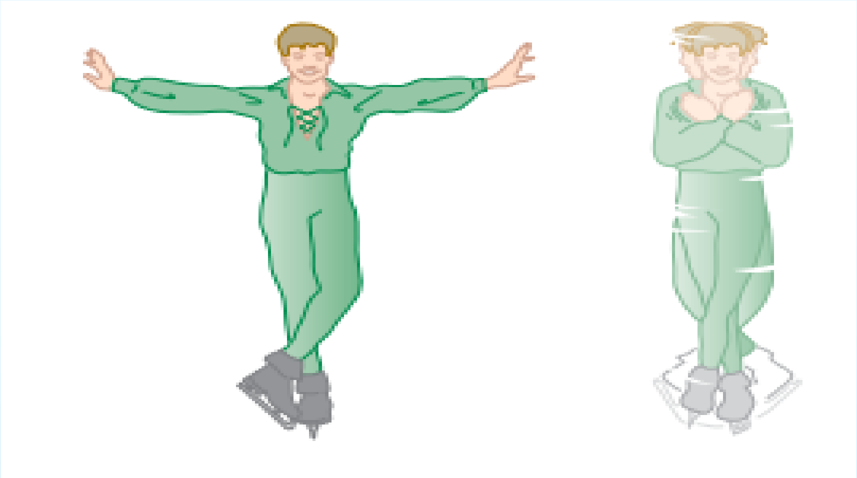
$$\Delta L = 0 \quad \rightarrow \quad L_f = L_o \quad \rightarrow \quad I_f\omega_f = I_o\omega_o$$

$$\omega_f = \frac{I_o\omega_o}{I_f} = \frac{4.192(4\pi)}{13.192} = 1.27\pi\; rad/s$$

$$\Delta K = K_f - K_o = \frac{1}{2}I_f\omega_f^2 - \frac{1}{2}I_o\omega_o^2 = \frac{1}{2}(13.192)(1.27\pi)^2 - \frac{1}{2}(4.192)(4\pi)^2 = -225.98\, J$$

10.41. Patinador que gira. Los brazos estirados de un patinador que prepara un giro pueden considerarse como una varilla delgada que pivotea sobre un eje que pasa por su centro (figura 10.49). Cuando los brazos se juntan al cuerpo para ejecutar el giro, se pueden considerar como un cilindro hueco de pared delgada. Los brazos y las manos tienen una masa combinada de 8.0 kg; estirados, abarcan 1.8 m; y encogidos, forman un cilindro con 25 cm de radio. El momento de inercia del resto del cuerpo alrededor del eje de rotación es constante e igual a 0.40 kg *m². Si la rapidez angular original del patinador es de 0.40 rev/s, ¿cuál es la rapidez angular final?

Resolución es un sistema de conservación del momento en el que los brazos en el calculo del momento de inercia cambiaran de considerarse una varilla con su momento en el centro a un cilindro de pared delgada.



$$I_{cuerpo} = 0.40kg * m^2 \;\; R = 0.25m \;\;\; M_B = 8kg \; L = 1.8m$$

$$\omega_o = 0.40\, rev/s \;\; \approx 0.8\,\pi\, rad/s$$

$$I_o = \; I_{Cuerpo} + I_{brazos} = I_{cuerpo} + \frac{1}{12}M_B L^2 = 0.4 + \frac{1}{12}(8)(1.8)^2 = 2.56\; kg * m^2$$

$$I_f = \; I_{Cuerpo} + I_{brazos} = I_{cuerpo} + M_B R^2 = \;\; 0.4 + 8(0.25)^2 = 0.9\; kg * m^2$$

$$\Delta L = 0 \qquad \rightarrow \qquad L_f = \; L_o \qquad \rightarrow \qquad I_f\omega_f = \; I_o\omega_o$$

$$\omega_f = \frac{I_o\omega_o}{I_f} = \frac{2.56(0.8\pi)}{0.9} = 7.14\; rad/s$$