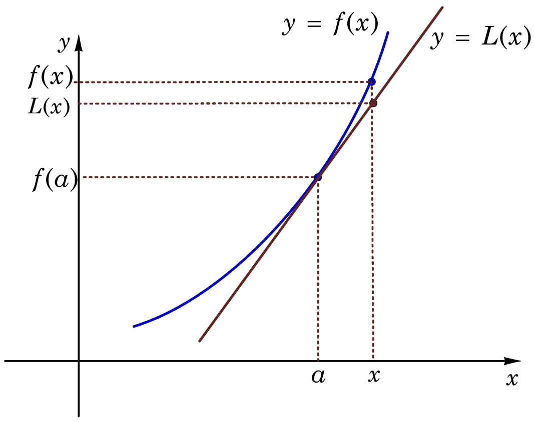
2.8 Linealización y diferenciales

OBJETIVOS

- Encontrar la linealización para una función en un punto dado de la función.
- Calcular el diferencial de una función.
- Resolver problemas en donde se aproxima una diferencia de valores de y utilizando diferenciales.

Linealización

En secciones anteriores se ha utilizado la derivada para encontrar la ecuación de la recta tangente a una función. Esta sección se utiliza la ecuación de la recta tangente en el punto $x = a$ para aproximar los valores de la función en valores de x que están muy cerca de $x = a$. En este contexto la recta tangente en el punto es representada como $L(x)$ y se le llama linealización de la función. La siguiente figura muestra una función y su linealización en el punto $(a, f(a))$.



Para obtener la pendiente de la recta tangente se calcula la primera derivada y se evalúa en $x = a$

$$m = f'(a)$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $(a, f(a))$ es

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$
$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Definición

Si la función $y = f(x)$ es diferenciable en $x = a$, entonces la linealización de la función f en $x = a$, está dada por

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Para un número x cercano al número a, la linealización se puede utilizar para aproximar el valor de $f(x)$, es decir que

$$f(x) \approx L(x)$$

Ejemplo 1: linealización de una raíz cúbica

a. Encuentre una linealización de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $a = 8$ Utilice una linealización

b. Dibuje la gráfica de la función *f* la de su linealización $f(x)$.

c. Utilice el modelo lineal para aproximar el valor de $\sqrt[3]{9}$

Solución

a. Para resolver este problema, hay que comenzar por obtener una linealización de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$, tomando un valor de $a = 8$

El modelo lineal es

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Calculando la derivada de la función

$$f'(x) = D_x\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Evaluando la función y la derivada en $a = 8$

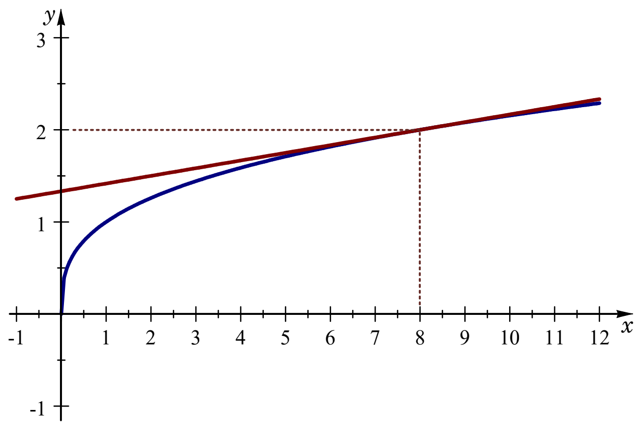
$$f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$f'(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12}$$

Entonces el modelo lineal es

$$\begin{aligned} L(x) &= f(a) + f'(a)(x - a) \\ &= 2 + \frac{1}{12}(x - 8) \\ &= \frac{1}{12}x + 2 - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{12}x + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

b. La gráfica de la función y el modelo lineal se muestran en la siguiente figura



c. Para aproximar $\sqrt[3]{9}$ hay que evaluar la función lineal en $x = 9$

$$L(9) = \frac{1}{12}(9) + \frac{4}{3} = 2.083$$

El valor exacto obtenido con una calculadora es $\sqrt[3]{9} = 2.080$

Ejemplo 2: Linealización de función trigonométrica

Utilice una linealización para calcular en forma aproximada el valor de $\cos(44^\circ)$

Solución

Para resolver este problema, hay que comenzar por obtener una linealización de la función $f(x) = \cos x$, tomando un valor de a tal que se conozcan los valores exactos de las funciones trigonométricas y que se encuentre cerca de 44º. Es claro que este valor es 45º, que expresado en radianes es $a = \frac{\pi}{4}$.

El modelo lineal es

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Calculando la derivada de la función

$$f'(x) = D_x(\cos x) = -\operatorname{sen} x$$

Evaluando la función y la derivada en $a = \frac{\pi}{4}$

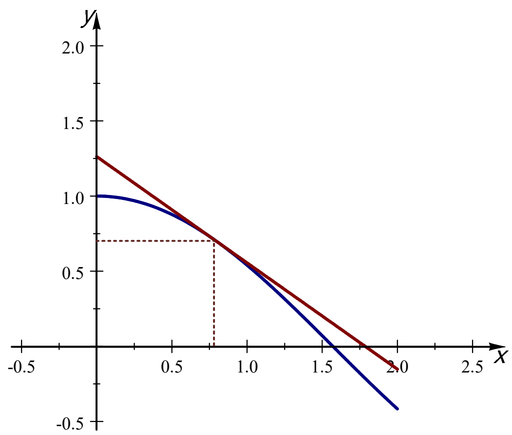
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Entonces el modelo lineal es

$$\begin{aligned} L(x) &= f(a) + f'(a)(x - a) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right) \end{aligned}$$

La gráfica de la función y el modelo lineal se muestran en la siguiente figura



Para aproximar $\cos(44^\circ)$ hay que convertir el ángulo a radianes

$$44^\circ = 44 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{45}$$

Evaluando en el modelo lineal

$$\cos x \approx -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right)$$

$$\cos\left(\frac{11\pi}{45}\right) \approx -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{11\pi}{45}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right)$$

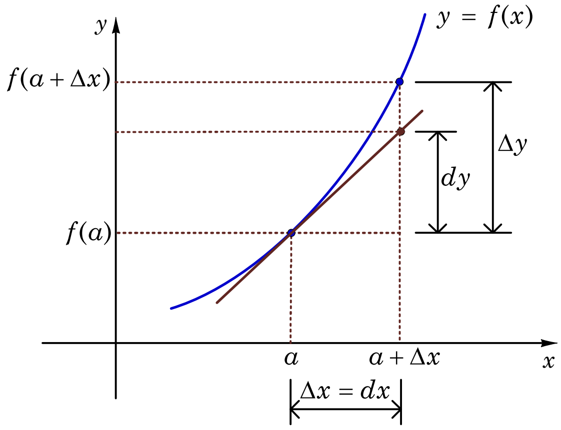
$$\approx 0.7194$$

Es decir que

$$\cos(44°) \approx 0.7194$$

Diferenciales

El concepto de linealización tratado en la primera parte de esta sección, anteriormente era enfocado desde el punto de vista de las diferencias, como se muestra en la figura siguiente



En términos de diferencias se define la diferencia entre dos valores de x en una función como

$$x_1 - a = \Delta x = dx$$

La diferencia entre dos valores de y se puede expresar como

$$\Delta y = f(x_1) - f(a)$$
$$= f(a + \Delta x) - f(a)$$

De tal forma que la pendiente de la recta secante entre dos puntos de la función se puede expresar como

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Para valores pequeños de Δx, la pendiente de la recta tangente es aproximadamente igual a la pendiente de la recta secante, es decir

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(a) \quad \text{o bien,} \quad \Delta y \approx f'(a)\Delta x$$

Ahora se define el diferencial dx como

$$dx = \Delta x$$

Y el diferencial dy se define como

$$dy = f'(a)dx$$

Como se observa en la figura, cuando $dx = \Delta x$, es pequeño, el diferencial dy es aproximadamente igual a Δy. Lo que se expresa como

$$\Delta y \approx dy$$
$$\Delta y \approx f'(x)dx$$

Ejemplo 3: Diferenciales

Dada la función

$$f(x) = 10 + 2x - 3x^2$$

a. Encuentre una expresión para la diferencia en y Δy y para el diferencial dy.

b. Calcule Δy y dy para $x = 2$ y $\Delta x = dx = 0.03$

Solución

a. Para obtener una expresión de Δy que es la diferencia exacta entre dos valores de y en la función

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x)\\ &= \left[10 + 2(x + \Delta x) - 3(x + \Delta x)^2\right] - \left[10 + 2x - 3x^2\right]\end{aligned}$$

La expresión para el diferencial es

$$\begin{aligned}dy &= f'(x)dx\\ &= (2 - 6x)dx\end{aligned}$$

b. Calculando Δy y dy para $x = 2$ y $\Delta x = dx = 0.03$

$$\begin{aligned}\Delta y &= \left[10 + 2(x + \Delta x) - 3(x + \Delta x)^2\right] - \left[10 + 2x - 3x^2\right]\\ &= \left[10 + 2(2 + 0.03) - 3(2 + 0.03)^2\right] - \left[10 + 2(2) - 3(2)^2\right]\\ &= [1.6973] - [2]\\ &= -0.3027\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dy &= (2 - 6x)dx\\ &= (2 - 6(2))(0.03)\\ &= -0.3\end{aligned}$$

Al comparar los valores de Δy y dy se observa que son aproximadamente iguales.

Ejemplo 4: Aproximación de una raíz por diferenciales

Utilice diferenciales para aproximar el valor de $\sqrt[3]{26}$

Solución

Observe que este problema también se puede resolver utilizando una linealización de la función. En este caso será resuelto usando diferenciales.

Lo primero que debemos hacer es establecer la función, luego el valor de $x = a$ y la diferencia $\Delta x = dx$.

La función es

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

El valor de a será el aquel cuya raíz cúbica sea exacta y esté lo más próximo a 26.85. este valor es

$$x = 27 \quad \text{ya que} \quad f(27) = \sqrt[3]{27} = 3$$

Finalmente

$$\Delta x = dx = 26 - 27 = -1$$

Calculando el diferencial

$$\begin{aligned} dy &= f'(x)dx \\ &= D_x\left(\sqrt[3]{x}\right)dx = \frac{1}{3}x^{-2/3}dx \\ dy &= \frac{1}{3x^{2/3}}dx \end{aligned}$$

Evaluando en $x = 27$ y $dx = -1$

$$\begin{aligned} dy &= \frac{1}{3x^{2/3}}dx \\ dy &= \frac{1}{3(27)^{2/3}}(-0.15) = -\frac{0.15}{27} \\ dy &= 0.00556 \end{aligned}$$

El resultado anterior es una aproximación de Δy , es decir que

$$\Delta y \approx dy = -0.037$$

Finalmente se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ f(x + \Delta x) &= f(x) + \Delta y \approx f(x) + dy \\ f(27 - 1) &\approx f(27) + (-0.037) \\ f(26) &\approx 3 - 0.037 \\ \sqrt[3]{26} &\approx 2.963 \end{aligned}$$

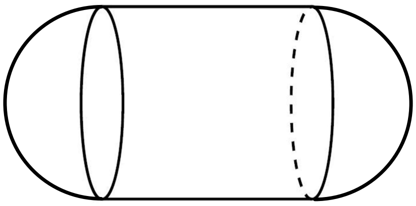
Comparado con el valor exacto que es 2.96249, se puede ver que la aproximación es bastante buena.

Ejemplo 5: Aproximación de un volumen por diferenciales

Un tanque tiene la forma de un cilindro circular recto con una semi esfera en cada uno de sus extremos. Si la parte cilíndrica tiene 8 metros de largo y tiene diámetro de 2 metros. Utilice diferenciales para estimar la cantidad de pintura que se necesita para pintar la parte exterior con un espesor de 1 milímetro.

Solución

La figura muestra el depósito descrito en el problema



La cantidad de pintura necesaria se puede considerar como un diferencial del volumen del depósito con una variación del radio $\Delta r = dr = 0.001$ metros

Si h es la longitud de la parte cilíndrica y r es el radio del cilindro y de las dos semiesferas, el volumen del depósito es

$$V = \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3$$

Observe que al pintar el depósito solo cambia el radio y no la altura de la parte cilíndrica, es decir que $\Delta h = 0$ y h se toma como una constante y no como una variable a la hora de calcular el diferencial de volumen

$$\begin{aligned} dV &= d\left(\pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3\right) \\ &= \pi h(2r)dr + (4\pi r^2)dr \\ &= 2\pi r(h + 2r)dr \end{aligned}$$

Evaluando para $r = 1$ m, $h = 8$ m y $dr = 0.001$ m

$$\begin{aligned} dV &= 2\pi(1)(8 + 2(1))(0.001) \\ &= \frac{20\pi}{1000} \\ &= \frac{\pi}{50} \end{aligned}$$

La cantidad que se necesita de pintura es $\frac{\pi}{50} \approx 0.0628$ metros cúbicos, que son aproximadamente 16.7 galones.

Ejemplo 6: Diferenciales para aproximar el error en el área

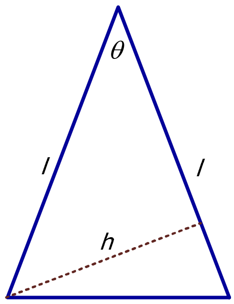
El ángulo comprendido entre los lados iguales de un triángulo isósceles tiene una medida de 60 grados, con un error en su medición de ± 2 grados. Si los lados iguales tienen una longitud de 50 centímetros.

a. Utilice diferenciales para estimar el error cometido en la medición del área del triángulo.

b. Estime el error relativo en la medición del área.

Solución

a. Como el error es en la medida del ángulo θ, se debe expresar el área del triángulo como una función de θ y de la medida constante l



$$A = \frac{1}{2}lh$$

Como h es el cateto opuesto y l es la hipotenusa de un triángulo rectángulo

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{l}$$

$$h = l\operatorname{sen}\theta = 50\operatorname{sen}\theta$$

El área del triángulo como función de θ es

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}lh \\ &= \frac{1}{2}(50)(50\operatorname{sen}\theta) \\ &= 125\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Aproximando el error en la medida del área usando diferenciales

$$\begin{aligned} dA &= d(125\operatorname{sen}\theta) \\ &= (125\cos\theta)d\theta \end{aligned}$$

Para evaluar esta expresión el ángulo y el diferencial del ángulo deben estar en radianes

$$60^\circ = \frac{\pi}{3}, \qquad 2^\circ = \frac{\pi}{90}$$

Es decir que

$$\begin{aligned} dA &= d(125\operatorname{sen}\theta) \\ &= 125\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{90}\right) \\ &= 2.18 \end{aligned}$$

El error en la medida del área es aproximadamente de 2.18 centímetros cuadrados.

b. El error relativo se define como

$$\text{Error relativo} = \frac{\text{error}}{\text{Valor verdadero}}$$

En este ejemplo, el valor verdadero del área es

$$\begin{aligned} A &= 125\operatorname{sen}\theta \\ &= 125\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 108.28 \end{aligned}$$

El error relativo es aproximadamente

$$\begin{aligned} \frac{2.18}{108.28} &= 0.0201 \\ &= 2\% \end{aligned}$$

Ejercicios sobre linealización y diferenciales

1. Obtenga una aproximación lineal de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto donde $x = \frac{1}{9}$ y utilícela para estimar el valor de $\sqrt{\frac{1}{10}}$.

2. Obtenga una aproximación lineal de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en el punto donde $x = \frac{1}{8}$ y utilícela para estimar el valor de $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$.

3. Obtenga una aproximación lineal de la función $f(x) = \tan x$ en $a = \frac{\pi}{4}$: utilice la aproximación lineal para estimar el valor de $\tan 46^{\circ}$

4. Obtenga una aproximación lineal de la función $f(x) = \cos 2x$ en $a = \frac{\pi}{4}$: utilice la aproximación lineal para estimar el valor de $\cos 43^{\circ}$

5. Obtenga una aproximación lineal de la función $f(x) = \ln x$ en $a = 1$: utilice la aproximación lineal para estimar el valor de $\ln(1.05)$

6. Encuentre el valor aproximado de $5^{3/2}$ utilizando una aproximación lineal.

7. Utilice una aproximación lineal para aproximar $\sqrt{54}$.

8. Utilice diferenciales o una aproximación lineal para aproximar el valor de $\sqrt{25.4}$.

9. Encuentre una aproximación lineal de la función $f(x) = \sqrt{1-x}$ en $x = 0$. Utilice la aproximación lineal para estimar $\sqrt{0.95}$.

10. Encuentre una aproximación lineal para la función $f(x) = \sqrt[3]{1-4x}$ en $a = 0$ y utilice dicha aproximación para calcular $\sqrt[3]{-5}$.

11. Utilice diferenciales o bien una aproximación lineal para estimar el valor de $\sqrt[6]{65}$

12. Se ha medido el lado de un cubo en 12 pulgadas con un error de 0.03 pulgadas.

a. Calcule el error exacto cometido al calcular el volumen del cubo.

b. Utilice diferenciales para aproximar el error cometido al calcular el volumen.

c. Aproxime el porcentaje del error en el cálculo del volumen.

d. Estimar el máximo error porcentual admisible en la medida del lado para que el error cometido al calcular el volumen no supere el 2.5%

12. Un contratista acuerda pintar los dos lados de 1000 señales circulares, cada una de 3 m de radio. Al recibir las señales, se descubrió que éstas tienen 1 centímetro más de radio. Use diferenciales para determinar el incremento porcentual aproximado de pintura que se necesitará.

13. La circunferencia de una esfera ($c = 2\pi r$) se midió como 84 cm, con un error posible en la medida de la circunferencia de 0.5 cm. Use diferenciales para estimar el error máximo en el área superficial y el error relativo.

14. Una ventana tiene la forma de un cuadrado coronada por un semicírculo. Si el lado del cuadrado mide 60 centímetros, con un error posible en la medición de 0.1 centímetros.

a. Calcule el error exacto cometido al calcular el área de la ventana.

b. Utilice diferenciales para estimar el error al calcular el área de la ventana.

15. Se mide la arista de un cubo como 30 centímetros, con un error posible en la medición de 0.1 cm. Utilice diferenciales para estimar el error total y el error relativo al calcular

a. El volumen del cubo.

b. El área superficial del cubo.

16. Un cono tiene un radio r igual a su altura h. Utilice diferenciales para estimar cuanto aumenta su volumen cuando su radio y su altura aumenta en 0.001 unidades.

17. Para calcular el área de un triángulo se miden dos lados y el ángulo entre ellos, las medidas de los lados son 10 y 4 m, mientras que por imprecisiones del instrumento de medida, el ángulo mide 45° con un error de 1°. Use diferenciales para aproximar el error porcentual cometido en el cálculo del área.

18. Un tubo de metal mide 3 metros de longitud. Utilice diferenciales para estimar el volumen del material utilizado en la fabricación del tubo si el radio interior mide 10 centímetros y el grosor del metal es de 2 milímetros.

19. Un tanque de almacenamiento de gasolina en forma de cilindro circular recto mide 5 metros de altura. El radio mide 8 metros con un error en la medición de 0.25 metros.

a. Utilice diferenciales para estimar el error en el cálculo del volumen.

b. Calcule el error porcentual en el cálculo del volumen.

20. Una ventana tiene la forma de un cuadrado con un triángulo equilátero sobrepuesto, de tal forma que uno de los lados del cuadrado coincide con un lado del triángulo equilátero. El lado del cuadrado tiene una longitud de 2 metros, con un error en su medición de 0.5 cm. Utilice diferenciales para estimar el error porcentual en la medida del área total de la ventana.

21. El techo de un teatro tiene forma de una semiesfera de 30 metros de radio. Por problemas de filtraciones el techo será revestido por una capa impermeabilizante de 3 milímetros de espesor.

a. Calcule el volumen exacto del material utilizado.

b. Utilice diferenciales para estimar para estimar la cantidad de material.

22. una copa en forma de cono circular recto invertido tiene 10 centímetros de altura y 8 centímetros de ancho en la parte superior. La copa se llena con agua hasta una profundidad de 9 centímetros. Un cubo de hielo de 3 centímetros de lado se suelta dentro de la copa con agua. Utilice diferenciales para establecer el agua en la copa se derrama.

23. Los 6 lados de una caja cúbica de metal miden 0.25 pulgadas de grueso y el volumen del interior de la caja es de 60 pulgadas cúbicas.

a. Calcule el valor exacto del volumen del material utilizado en su construcción

b. Utilice diferenciales para estimar la cantidad de material usado en su construcción.