2.7 Tasas relacionadas

OBJETIVOS

- Resolver problemas en los cuales el modelo que hay que plantear es una ecuación expresada en términos de derivadas implícitas cuya variable independiente es el tiempo.

Problemas de tasas relacionadas

En esta sección el estudiante se enfrenta a problemas en donde la incógnita es una derivada que depende del tiempo. Para resolver el problema debe construir una ecuación de dos o más variables que dependen del tiempo, de tal forma que al derivar la ecuación usando derivación implícita obtenga la derivada que está buscando.

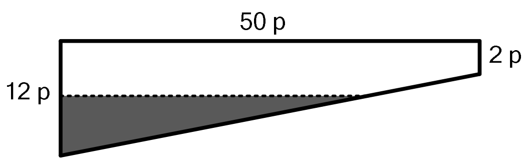
Acontinuación se sugiere un procedimiento para resolver este tipo de problemas

Sugerencias para resolver un problema de tasas relacionadas

1. Lea detenidamente el problema. Si es posible haga un dibujo donde se muestre la información proporcionada.
2. Identifique las magnitudes constantes y las variables, represente cada variable con una letra. De las variables del problema identifique de cuales de ellas se conoce su derivada con respecto al tiempo y de cuales no se tiene su derivada.
3. Escriba una ecuación que relacione las variables y las constantes del problema.
4. Si es posible utilice relaciones geométricas, o funciones trigonométricas para expresar la ecuación en términos de las variables cuya derivada es dada y de la variable cuya derivada es la incógnita.
5. Utilice derivación implícita para calcular la derivada con respecto al tiempo. Despeje la derivada buscada.
6. Para obtener una respuesta, usualmente hay que evaluar la derivada obtenida en el inciso anterior, para ello utilice las derivadas conocidas y las constantes del problema. Em algunos problemas será necesario utilizar la ecuación del inciso 3 para despejar alguno de los datos requeridos para evaluar la derivada.
7. Al escribir la respuesta escriba el valor numérico y las dimensionales que identifican a la derivada que se ha calculado.

Ejemplo 1: Razón de cambio del volumen en una piscina

Una piscina tiene 50 pies de largo y 20 pies de ancho. Su profundidad varía de manera uniforme desde 2 pies en su parte menos profunda, hasta 12 pies en la parte profunda, como se muestra en la figura. Si la piscina es vaciada utilizando una bomba de agua a razón de 50 pies cúbicos por minuto. ¿A qué razón está disminuyendo la profundidad en la parte más honda, cuando la altura del agua ahí es de 6 pies?



Solución

Observe que en este problema la derivada conocida es la razón de cambio del volumen de agua en la piscina con respecto al tiempo. Mientras que la derivada que se busca es la razón a la cual cambia la altura del agua.

Si V es el volumen de agua, entonces

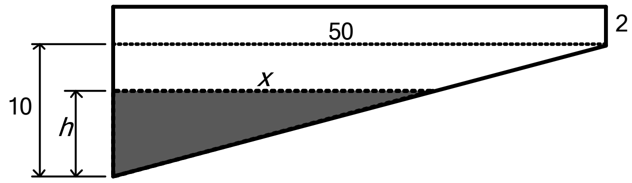
$$\frac{dV}{dt} = 50\,\frac{\text{pies}^3}{\text{min}}$$

Si h es la altura del agua en la parte profunda, debemos encontrar $\dfrac{dh}{dt}$, cuando $h = 6$

El volumen del agua está dado por

$$\begin{aligned} V &= \text{Área del tríangulo} \times \text{ancho de la piscina} \\ &= (\text{A}) \times (20) \end{aligned}$$

Como se muestra en la figura siguiente, se utilizarán triángulos semejantes para expresar el volumen en términos de h.



$$\frac{x}{50} = \frac{h}{10}$$

$$x = \frac{50h}{10} = 5h$$

Ahora se puede expresar el volumen de agua en la piscina en términos de la variable h

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}xh \cdot 20 = 10xh \\ &= 10(5h)h = 50h^2 \end{aligned}$$

Observe que en este momento ya se tiene una ecuación que relaciona las variables h y V. h es la variable cuya derivada se busca y V es la variable cuya derivada se conoce.

Derivando ambos lados de la ecuación con respecto al tiempo

$$D_t(V) = D_t\left(50h^2\right)$$

Como la variable independiente es el tiempo, se usa derivación implícita para calcular la derivada

$$D_tV = (100h)D_th$$

$$D_th = \frac{D_tV}{100h}$$

Ahora que ya se a calculado la razón de cambio de h, solamente hace falta evaluar la derivada cuando $h = 6$

$$D_th\big|_{h=6} = \frac{50}{100 \cdot 6} = \frac{1}{12}\frac{\text{pies}}{\text{min}}$$

Ejemplo 2: La escalera que resbala por la pared

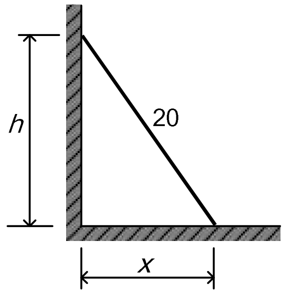
La parte superior de una escalera de 20 pies de largo resbala sobre una pared vertical a razón de 0.5 pies por segundo. El otro extremo de la escalera resbala sobre una superficie horizontal alejándose de la pared.

a. Calcule la razón a la cual se mueve la parte inferior de la escalera sobre el piso horizontal, cuando la parte superior se encuentra a una altura de 8 pies sobre el suelo.

b. Calcule la razón a la cual cambia el ángulo formado entre la escalera y el piso, cuando la parte superior se encuentra a una altura de 8 pies sobre el suelo

Solución

a. La siguiente figura muestra la escalera apoyada sobre la pared vertical, h representa la altura del extremo superior de la escalera y x representa la distancia entre la pared y la parte inferior de la escalera



La parte superior de la escalera resbala a 0.5 pies por segundo, entonces

$$D_t h = -0.5$$

El signo negativo se debe a que h está disminuyendo al aumentar el tiempo

Se quiere calcular $D_t x$ cuando h es igual a 8 pies.

Utilizando el teorema de Pitágoras

$$x^2 + h^2 = 20^2$$

Derivando ambos lados de la ecuación y despejando $D_t x$

$$D_t\left(x^2 + h^2\right) = D_t\left(20^2\right)$$

$$2x \cdot D_t x + 2h \cdot D_t h = 0$$

$$D_t x = -\frac{2h \cdot D_t h}{2x}$$

$$D_t x = -\frac{h \cdot D_t h}{x}$$

Como la derivada depende de x y de h hay que calcular el valor de x cuando $h = 8$

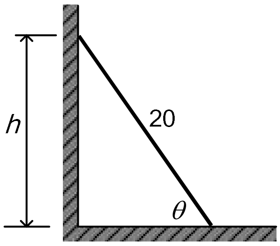
$$x^2 + h^2 = 20^2$$

$$x = \sqrt{20^2 - h^2} = \sqrt{400 - 8^2} = \sqrt{336} = 4\sqrt{21}$$

Calculando $D_t x$ cuando $h = 8$

$$D_t x\big|_{h=8} = -\frac{(8)\cdot(-0.5)}{4\sqrt{21}} \approx 0.218\,\frac{\text{pies}}{\text{seg}}$$

b. En este caso debemos relacionar el ángulo formado entre la escalera y el piso con la altura h como se muestra en la figura siguiente



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{20}$$

Derivando respecto al tiempo

$$D_t(\operatorname{sen}\theta) = D_t\left(\frac{h}{20}\right)$$

$$\cos\theta \cdot D_t\theta = \frac{1}{20}D_t h$$

$$D_t\theta = \frac{1}{20\cos\theta}D_t h$$

Para evaluar la derivada cuando $h = 8$ note que $\cos\theta = \frac{x}{20} = \frac{4\sqrt{21}}{20} = \frac{\sqrt{21}}{5}$

Ahora se puede evaluar la razón a la cual cambia el ángulo

$$D_t\theta\big|_{h=8} = \frac{1}{20\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}}\cdot(-0.5) = \frac{-1}{8\sqrt{21}} \approx -0.027\frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

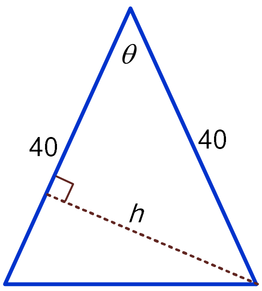
El signo negativo indica que el ángulo está disminuyendo cuando la escalera resbala sobre la pared.

Ejemplo 3: Ángulos en un triángulo

El ángulo en el vértice opuesto a la base de un triángulo isósceles, cuyos lados iguales miden 40 pulgadas aumenta a razón de $\frac{\pi}{10}$ radianes por minuto. ¿Con que rapidez aumenta el área del triángulo, cuando la medida del ángulo en el vértice es igual a $\frac{\pi}{6}$ radianes?

Solución

En la figura siguiente se muestra el triángulo isósceles del problema, en donde se ha trazado la altura perpendicular a uno de los lados iguales



Hay que construir una ecuación que relacione el área del triángulo, cuya razón de cambio de busca, con la medida del ángulo en el vértice, cuya razón de cambio se conoce

$$A = \frac{1}{2}(40)h = 20h$$

Ahora hay que expresar h en términos del ángulo

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{40}$$

$$h = 40\operatorname{sen}\theta$$

El área del triángulo en términos de h es

$$\begin{aligned} A &= 20h \\ &= 20(40\operatorname{sen}\theta) \\ A &= 800\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Derivando respecto al tiempo

$$D_tA = D_t(800\operatorname{sen}\theta)$$

$$D_tA = 800\cos\theta \cdot D_t\theta$$

Evaluando para $\theta = \frac{\pi}{6}$ y $D_t\theta = \frac{\pi}{10}$

$$D_tA = D_t(800\operatorname{sen}\theta)$$

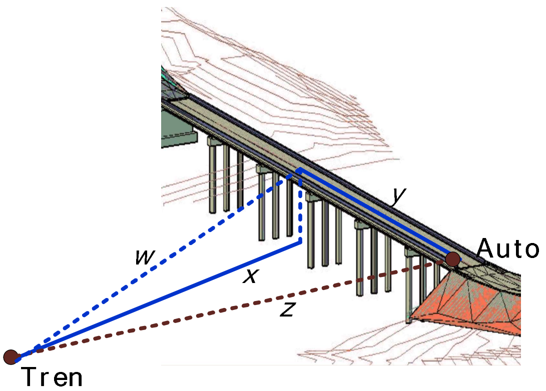
$$D_tA = 800\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right) = 800\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{10} = 40\pi\sqrt{3}\ \frac{\text{pul}^2}{\text{seg}}$$

Ejemplo 4: El tren que pasa por debajo del puente

Una autopista, con dirección este-oeste pasa sobre las vías de un tren por medio de un puente que está a 30 metros sobre la vía del tren, que va en una dirección norte-sur. Un automóvil pasa sobre el puente viajando hacia el este a 72 kilómetros por hora justo en el momento en el cual un tren avanza sobre la vía en dirección sur a una velocidad de 108 kilómetros por hora. ¿Con qué rapidez se separan 20 segundos después?

Solución

La figura muestra el auto y el tren, cierto tiempo después de que ambos han pasado por el punto de cruce de las vías; en donde x es la distancia recorrida por el tren, y es la distancia recorrida por el auto y z es la distancia que separa el tren del auto en el tiempo t.



Por el teorema de Pitágoras se tiene que

$$z^2 = y^2 + w^2$$

Por otro lado

$$w^2 = x^2 + 30^2$$

Sustituyendo

$$z^2 = y^2 + x^2 + 30^2$$

Derivando respecto al tiempo

$$D_t(z^2) = D_t(y^2 + x^2 + 30^2)$$

$$2zD_t z = 2yD_t y + 2xD_t x + 0$$

$$D_t z = \frac{yD_t y + xD_t x}{z}$$

Para evaluar esta derivada cuando han transcurrido 20 segundos, hay que calcular z y y z para un tiempo de 20 segundos.

$$v_T = 108\frac{\text{km}}{\text{h}} = 30\frac{\text{m}}{\text{seg}} \qquad v_A = 72\frac{\text{km}}{\text{h}} = 20\frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

$$x = v_T \cdot t = (30)(20) = 600 \text{ m}$$

$$y = v_A \cdot t = (20)(20) = 400 \text{ m}$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 + 30^2} = \sqrt{600^2 + 400^2 + 30^2} \approx 721.73 \text{ m}$$

Ahora ya se puede calcular la razón a la cual se separan el auto y el tren cuando han transcurrido 20 segundos de su paso por la intersección

$$D_t z = \frac{yD_t y + xD_t x}{z} = \frac{400 \cdot 72 + 600 \cdot 108}{721.73} = 129.69\frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

$$D_t A = D_t(800 \operatorname{sen}\theta)$$

$$D_t A = 800\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right) = 800 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{10} = 40\pi\sqrt{3}\,\frac{\text{pul}^2}{\text{seg}}$$

Ejemplo 5: Alejándose de una luz en el suelo

Una niña que mide 5 pies de altura camina a razón de 4 pies por segundo, alejándose de un reflector en el piso. Su hermanito que mide 3 pies de altura va detrás de ella a una distancia de 4 pies. A medida que los niños se alejan del reflector su sombra se proyecta en una pared vertical que se encuentra a 50 pies de distancia del reflector.

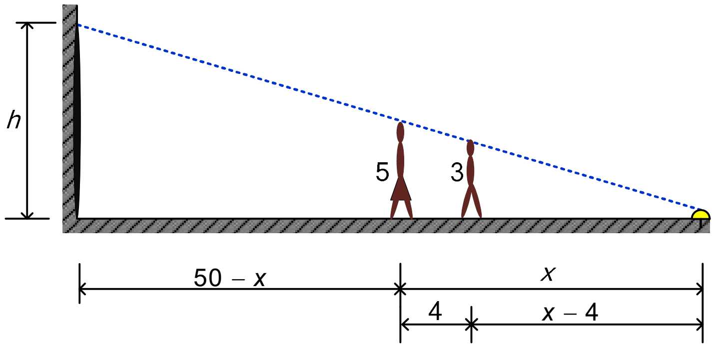
a. A que distancia se encuentra la niña del reflector cuando la sombra en la pared es exactamente la misma para ella y su hermanito.

b. ¿A que razón cambia la longitud de la sombra cuando la niña está a 25 pies del reflector?

c. ¿A que razón cambia la longitud de la sombra cuando la niña está a 8 pies del reflector?

Solución

a. La siguiente figura muestra el momento en el cual la luz que produce el reflector en el suelo pasa justamente por encima de la cabaza de los dos niños



Utilizando semejanza de triángulos para determinar el valor de x

$$\frac{x}{5} = \frac{x-4}{3}$$

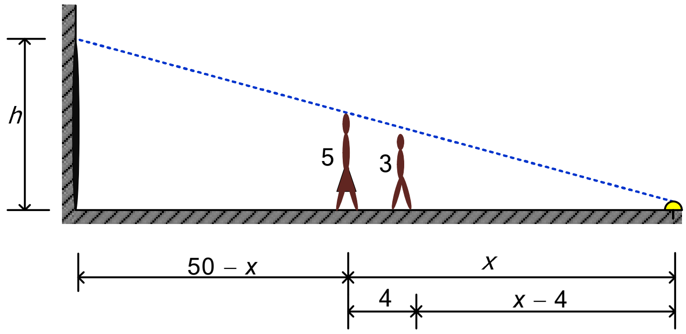
$$3x = 5x - 20$$

$$2x = 20$$

$$x = 10$$

Cuando la niña está a diez pies del reflector la sombra en la pared es la misma para ambos niños.

b. Cuando la niña está a 25 pies del reflector, la sombra es producida solo por la niña como se muestra en la figura siguiente,



Utilizando semejanza de triángulos para establecer la relación entre la longitud de la sombra h y la distancia x

$$\frac{h}{50} = \frac{5}{x}$$

$$xh = 250$$

Derivando la ecuación con respecto al tiempo y despejando la razón de cambio buscada

$$D_t(xh) = D_t(250)$$

$$xD_th + hD_tx = 0$$

$$D_th = \frac{-hD_tx}{x}$$

Calculando h cuando $x = 25$

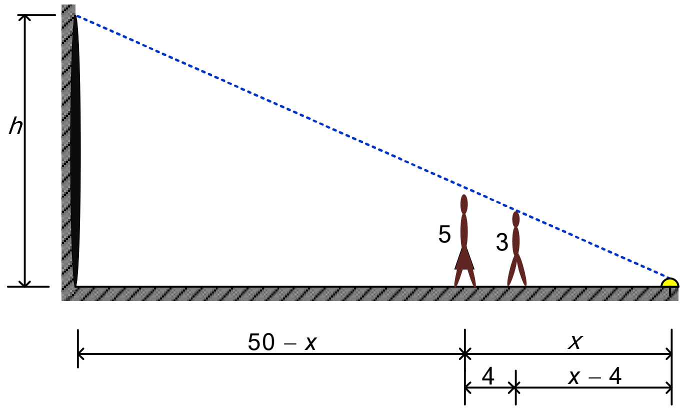
$$h = \frac{250}{x} = \frac{250}{25} = 10$$

Calculando la razón a la cual cambia la longitud de la sombra

$$D_th = \frac{-hD_tx}{x} = \frac{-(10)(4)}{25} = -\frac{40}{25} = -\frac{8}{5}\frac{\text{pies}}{\text{seg}}$$

Entonces la longitud de la sombra está disminuyendo a razón de 1.6 pies por segundo

c. Cuando la niña está a 8 pies del reflector, la sombra en la pared es producida únicamente por su hermanito, como se muestra en la figura siguiente



Utilizando semejanza de triángulos para establecer la relación entre la longitud de la sombra h y la distancia x para esta situación

$$\frac{h}{50} = \frac{3}{x-4}$$
$$(x-4)h = 150$$

Derivando la ecuación con respecto al tiempo y despejando la razón de cambio buscada

$$D_t\left[(x-4)h\right] = D_t(150)$$
$$(x-4)D_t h + h(D_t x) = 0$$
$$D_t h = \frac{-hD_t x}{x-4}$$

Calculando h cuando $x = 8$

$$h = \frac{150}{x-4} = \frac{150}{8-4} = \frac{150}{4} = 37.5$$

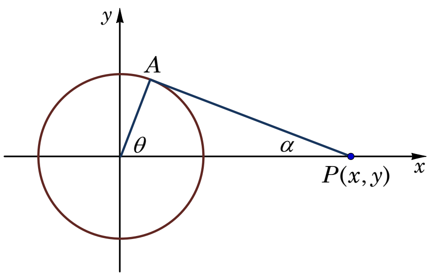
Calculando la razón a la cual cambia la longitud de la sombra

$$D_t h = \frac{-hD_t x}{x-4} = \frac{-(37.5)(4)}{8-4} = -\frac{(37.5)(4)}{4} = -37.5\,\frac{\text{pies}}{\text{seg}}$$

Entonces la longitud de la sombra está disminuyendo a razón de 37.5 pies por segundo

Ejemplo 6: Alejándose de una luz en el suelo

En la figura, se muestra la gráfica de una rueda giratoria, de radio 50 cm y una biela AP de longitud 1.4 metros. Un pasador en el punto P se desliza hacia atrás y hacia adelante a lo largo del eje x, conforme la rueda gira en sentido contrario a las manecillas del reloj con una rapidez de 360 revoluciones por minuto. A partir de ello encuentre



a. La velocidad angular de la biela, $\frac{d\alpha}{dt}$, cuando $\theta = \frac{\pi}{3}$.

b. La velocidad del pasador $\frac{dx}{dt}$, cuando $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Solución

a. La velocidad del ángulo θ es $D_t\theta = 360$ rev/min = $(360)(2\pi)$ rad/min

Utilizando la ley de senos se tiene

$$\frac{AP}{\sin\theta} = \frac{AO}{\sin\alpha}$$

$$1.4\sin\alpha = 0.5\sin\theta$$

Derivando ambos lados respecto al tiempo

$$D_t(1.4\sin\alpha) = D_t(0.5\sin\theta)$$

$$1.4\cos\alpha D_t\alpha = 0.5\cos\theta D_t\theta$$

$$D_t\alpha = \frac{0.5\cos\theta D_t\theta}{1.4\cos\alpha}$$

Cuando $\theta = \frac{\pi}{3}$ se tiene que

$$1.4\sin\alpha = 0.5\sin\theta$$

$$1.4\sin\alpha = 0.5\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\alpha = \frac{0.5\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1.4} = 0.30929$$

$$\alpha = \sin^{-1}(0.30929) = 0.31445$$

Entonces

$$D_t\alpha = \frac{0.5\cos\theta D_t\theta}{1.4\cos\alpha} = \frac{0.5\cos(\pi/3)(720\pi)}{1.4\cos(0.31445)} = 424.75 \text{ rad/min}$$

b. La velocidad del pasador está dada por D_xt, para relacionar x con los ángulos podemos usar nuevamente ley de senos o bien ley de cosenos. Usando ley de cosenos

$$AP^2 = (AO)^2 + (x)^2 - 2(AO)(x)\cos\theta$$

$$(1.4)^2 = (0.5)^2 + x^2 - 2(0.5)(x)\cos\theta$$

Derivando ambos lados con respecto al tiempo

$$D_t\left((1.4)^2\right) = D_t\left((0.5)^2 + x^2 - 2(0.5)(x)\cos\theta\right)$$

$$0 = 2xD_tx - [x(-\sin\theta D_t\theta + \cos\theta D_tx]$$

$$0 = 2xD_tx + x\sin\theta D_t\theta - \cos\theta D_tx$$

$$-2xD_tx + \cos\theta D_tx = x\sin\theta D_t\theta$$

$$D_tx(\cos\theta - 2x) = x\sin\theta D_t\theta$$

$$D_tx = \frac{x\sin\theta D_t\theta}{\cos\theta - 2x}$$

Ejercicios sobre tasas relacionadas

1. Un depósito de agua en forma de cono invertido, es vaciado a razón de 6 metros cúbicos por minuto. La altura del cono es de 24 metros y el radio es de 12 metros. Calcule la rapidez con la que desciende el nivel del líquido cuando el agua tiene 10 metros de profundidad.

2. La arena que cae de una tubería forma un promontorio cónico cuya altura es siempre $\frac{4}{3}$ del radio de la base. ¿A qué razón está creciendo el volumen de la arena cuando el radio de la base es de 3 pies y crece a razón de 0.25 pies por minuto?

3. Agua dulce fluye a razón de 8 metros cúbicos por minuto de un depósito semiesférico con radio de 12 metros, cuyo corte está en la figura, donde el volumen de agua en el tanque está dado por $V = \frac{\pi}{3}y^2(3R - y)$, cuando el agua tiene una profundidad de y unidades.

a. ¿Con qué rapidez cambia el nivel del agua cuando esta tiene 5 metros de profundidad?

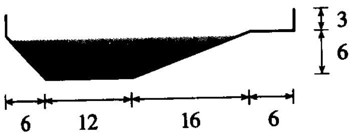
b. ¿Cuál es el radio r de la superficie del agua cuando ésta tiene 5 metros de profundidad?

c. ¿Cuál es la razón de cambio del radio r cuando el agua tiene 5 metros de profundidad?

4. Se está vaciando arena, formándose un promontorio cónico a razón de 20 metros cúbicos por minuto. La altura del promontorio es siempre igual al radio de su base. Cuando se tienen 3 metros de altura, ¿Con qué rapidez aumenta la altura del promontorio de arena?

5. Un tanque de almacenamiento de agua tiene la forma frontal de un trapecio isósceles, con las siguientes características: 4 metros en su base, 2 metros en la base superior y una altura de 3 metros. El largo del tanque es de 8 metros. Se está vertiendo agua al tanque de tal forma que cuando la altura del agua es de 0.5 metros, la razón a la cual cambia la altura es de 0.1 metros por segundo. ¿Cuál es la razón a la cual fluye el agua al depósito?

6. Una piscina tiene 20 pies de ancho, 40 pies de largo y 9 pies de profundidad en la parte más profunda. Si la piscina se llena a razón de 0.7 pies cúbicos por minuto. ¿con qué rapidez sube el nivel del agua cuando la profundidad del agua es de 4 pies.



7. El volumen de una célula esférica en crecimiento es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde el radio r se mide en micrómetros ($1\mu m = 10^{-6}$ m). Demuestre que la razón de cambio del volumen de una esfera con respecto a su radio es igual a su área superficial, explique por qué esto es cierto dibujando una esfera cuyo radio se incrementa en una cantidad Δr.

8. Se está inflando un globo esférico, de tal forma que el volumen aumenta a razón de 5 pies cúbicos por segundo. Encuentre la razón de cambio del área superficial cuando el radio tiene una medida de 3 pies.

9. Un tanque esférico de 10 pies de radio contiene agua y está siendo vaciado de tal forma que en cierto instante la profundidad del agua en el centro es de 5 pies y está disminuyendo a razón de 0.25 pies por segundo. ¿Con que rapidez disminuye el área de la superficie del agua en ese instante?

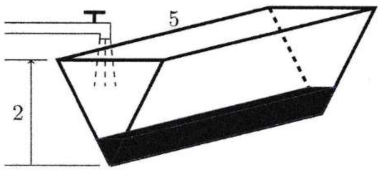
10. Un tanque mide 2 m de largo y tiene su sección transversal vertical de forma de un triángulo isósceles invertido, cuya base superior es de 4 m y altura 4 metros. Cuando se encuentra completamente lleno de agua se abre un grifo que se ubica en la parte inferior para vaciarlo.

Sabiendo que cuando la altura del nivel del agua es 3 metros, a través del grifo salen 0.1 m^3/min, determine la rapidez en m/min con que disminuye la altura del agua.

11. Un tanque en forma de cono circular invertido con radio 3m y altura de 5m esta inicialmente vacío y comienza a llenarse a razón de 0.6m^3/min. Calcule la razón de cambio de la altura h cuando esta es de 2m.

12. Un tanque en forma de cono circular recto truncado de radio inferior de 2m, radio superior 4m y altura 12 m, se llena a razón de 2 metros cúbicos por minuto. Encuentre la razón a la cual varia la altura del líquido cuando $h = 7$ m.

13. La figura muestra la forma y dimensiones en metros, que tiene un depósito de agua, cuyos extremos son triángulos equiláteros. Determine a qué razón debe ingresar agua hacia el tanque para que la altura suba a razón de 0.1 metros por hora, cuando el nivel del agua está a 1 metro de profundidad.



14. Un tanque tiene la sección transversal que se muestra en la figura, base inferior de 10 m, base superior de 8 m, altura de 12 m, y una longitud de 15 m. Si ingresa agua al tanque a razón de $0.20\frac{m^3}{min}$. ¿Como varia la altura del agua cuando la profundad de la misma es de 3 m?

15. Un canal tiene 10 pies de largo y sus extremos presentan la forma de triángulos isósceles, de 3 pies transversales en la parte superior y una altura de 1 pie. Si el canal se llena con agua a un flujo de 12 pies/min. ¿Con que velocidad cambia el nivel del agua cuando hay seis pulgadas de profundidad?

16. Un cono con radio 2 centímetros y altura 6 centímetros baja con la punta hacia abajo, a razón de 1 cm/s, en el interior de un cilindro de 4 centímetros de radio que está parcialmente lleno con agua. ¿Con qué rapidez sube el nivel del agua en el cilindro en el instante en que el cono está sumergido por completo?

17. Dos aviones vuelan horizontalmente a la misma altura en trayectorias perpendiculares y se dirigen hacia el mismo punto. Uno de ellos está a 150 millas de dicho punto y vuela a una velocidad de 450 millas por hora. El otro se encuentra en ese mismo instante a 200 millas del punto de encuentro y se desplaza a 600 millas por hora. ¿A qué razón se reduce la distancia entre los dos aviones en ese instante?

18. Dos automóviles parten del mismo punto. Uno va hacia el sur a 60 Km/h y el otro hacia el oeste a 25 Km/h. Con que velocidad aumenta la distancia entre ellos después de dos horas.

19. Un campo de beisbol tiene forma cuadrada, de 90 pies en cada lado. Un jugador se encuentra corriendo de segunda a tercera base a una velocidad de 28 pies por segundo. ¿A que razón está cambiando la distancia entre el jugador y el punto de recepción (home), en el instante en el que el jugador se encuentra a 30 pies de la tercera base?

20. Una lancha es remolcada hacia un muelle con una cuerda fija a su proa que pasa por una polea en el muelle. Esa polea está 1 metro más alta que la proa del bote. Si se corre la cuerda a una velocidad de 1 m/s, ¿Con que velocidad se acerca la lancha al muelle cuando está a 8 metros de distancia de él?

21. Una persona comienza a caminar hacia el norte a 4 pies/s desde un punto P. Cinco minutos después una señora empieza a dirigirse hacia el sur a 5 pies/s partiendo de un punto a 500 pies hacia el este de P. ¿Con que velocidad se separan los dos a los 15 minutos de que la señora inicio su caminata?

22. Un avión A vuela hacia el oeste, hacia un aeropuerto y a una altura de 2 millas. Otro avión B vuela hacia el sur, hacia el mismo aeropuerto, pero a una altura de 3 millas. Cuando ambos aviones se encuentran a 2 millas (distancia desde el suelo) del aeropuerto, la velocidad del avión A es de 500 millas por hora y la distancia entre los dos aviones disminuye a razón de 600 millas por hora. ¿Cuál es entonces la velocidad del avión B?

23. Al mediodía, el barco A se encuentra al oeste del barco B a una distancia de 100 kilómetros. A navega al sur a 35 km/h y B al norte a 25 km/h ¿Con qué rapidez cambia su distancia entre A y B a las 4 de la tarde?

24. Dos góndolas A y B que se mueven sobre el piso, están unidas por una cuerda de 40 pies de longitud que pasa por una polea P. El punto Q está sobre el piso, a 12 pies directamente debajo de P y entre las góndolas. Se remolca A, apartándola de Q, a una velocidad de 2 pies/s. ¿Con qué velocidad se mueve la góndola B hacia Q en el momento en que A está a 5 pies de Q?

25. Dos personas parten del mismo punto. Una camina hacia el este a 3 mi/h y la otra hacia el noreste, a 2 mi/h. ¿Con que velocidad cambia la distancia entre ellas después de 15 minutos?

26. Un globo se eleva a velocidad constante de 5 p/s. Un niño pedalea su bicicleta por un camino recto a 15 p/s. Al pasar debajo del globo le separa del mismo una distancia de 45 p. Tres segundos después, ¿Qué tan rápido aumenta la distancia entre ambos?

27. Un faro se localiza en una pequeña isla a 3 km del punto más cercano P que se encuentra en una playa recta; la lámpara del faro da cuatro revoluciones por minuto. ¿Qué tan rápido se mueve el haz de luz a lo largo de la playa, cuando éste se encuentra a 1.5 km del punto P?

28. Se está grabando un video de una carrera desde un lugar a 40 metros de la pista, que es recta. Se sigue con la cámara a un auto que viaja a 80.6 metros por segundo. ¿Con qué rapidez cambia el ángulo formado entre la cámara, el auto y la pista, justo cuando el auto pasa frente a la cámara?

29. Un péndulo de 12 centímetros de longitud oscila de modo que θ es la medida en radianes del ángulo formado por el péndulo y una recta vertical. Si $h(\theta)$ es la altura vertical del extremo del péndulo por arriba de su posición más baja. Determine la razón instantánea de cambio de $h(\theta)$ con respecto a θ, cuando $\theta = \frac{\pi}{3}$.

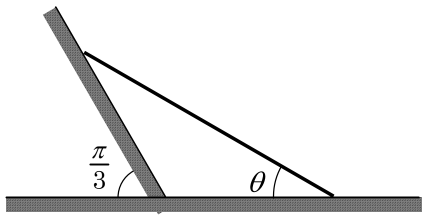
30. Los lados de un triángulo tienen longitudes de 12 metros y 15 metros. El ángulo entre ellos se incrementa a razón de 2 grados por minuto. ¿Qué tan rápido se incrementa la longitud del tercer lado cuando el ángulo entre los lados de longitud fija es de 60 grados?

31. La medida de uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo decrece a una tasa de $\frac{\pi}{36}$ rad/seg. Si la longitud de la hipotenusa es constante y de 40 centímetros, determine qué tan rápido varía el área del triángulo cuando la medida del ángulo agudo es de $\frac{\pi}{36}$ rad.

32. Dos lados de un triángulo miden 4 m y 5 m, el ángulo entre ellos aumenta a razón de 0.06 rad/seg. Calcular la velocidad a la cual el área del triángulo se incrementa cuando el ángulo entre los lados indicados es de $\frac{\pi}{3}$

33. Una escalera de 16 pies de longitud, tiene su extremo superior sobre una pared y su extremo inferior sobre el suelo. El extremo inferior de la escalera resbala, alejándose de la pared a razón de 2 pies por segundo. ¿A qué velocidad decae el área del triángulo rectángulo formado por la escalera, la pared y el suelo, cuando el ángulo que se forma entre la escalera y el suelo tiene un valor de $\pi/6$ radianes.

34. Una escalera de 3 metros de largo está apoyada sobre una pared inclinada como se muestra en la figura. La escalera comienza resbalar de manera que su parte inferior se aleja de la pared a una razón constante de 0.15 m/s. ¿Con qué rapidez cambia el ángulo θ entre la escalera y el suelo cuándo $\theta = \frac{\pi}{4}$?



35. Una escalera de 20 metros de longitud se encuentra recostada sobre un muro que tiene una inclinación de 60°. El extremo inferior de la escalera empieza a deslizar a una razón de 20 centímetros por minuto, determine:

a. Las variables del problema.

b. Las posibles relaciones entre las variables, según la geometría del problema.

c. El ritmo al cual desciende la parte superior de la escalera por el muro, cuando la distancia de la parte inferior de la escalera al muro es de 2 metros.

36. Dos lados de un triángulo miden 4 m y 5 m, y el ángulo entre ellos aumenta con una rapidez de 0.06 rad/s. Calcule la rapidez con que el área del triángulo se incrementa cuando el ángulo entre los lados, de longitud fija, es de $\frac{\pi}{3}$.

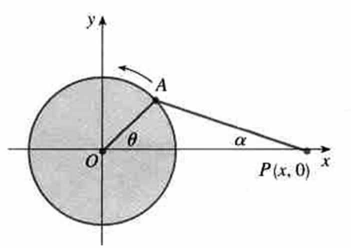
37. Dos lados de un triángulo tiene longitudes de 12 m y 15 m. el ángulo que forman aumenta con una velocidad de 2 grados por minuto. Con que rapidez crece el tercer lado cuando el ángulo entre los de longitud fija es de 60 grados.

38. Un avión vuela a velocidad constante de 300 Km/h y pasa a un kilómetro de altura sobre un radar terrestre la nave va en ascenso en un ángulo de 30 grados.

a. ¿Con que rapidez aumenta la altura de la nave cuando está una distancia de 3 kilómetros del radar?

b. ¿Con que rapidez aumenta la distancia entre el radar y la nave cuando está a 3 km de distancia del radar?

39. En la figura se muestra una rueda giratoria, con radio 40 cm y una biela AB de longitud 1.2 m. El punto P se desliza hacia atrás y hacia adelante, a lo largo del eje x, con forme la rueda gira en sentido contrario a las manecillas del reloj con una rapidez constante de 360 revoluciones por minuto.



a. Encuentre la razón de cambio $\dfrac{d\alpha}{d\theta}$, cuando $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

b. Exprese la distancia $x = \overline{OP}$ en términos de θ.

c. Halle una expresión para $\dfrac{dx}{d\theta}$ y evalúela para $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

40. Una lámpara en el piso ilumina una pared a 12 m de distancia. Si un hombre de 2 m de estatura camina desde la luminaria hacia el edificio a una rapidez de 1.6 m/s. ¿Qué tan rápido disminuye la longitud de su sombra sobre el muro cuando el hombre está a 4 m del edificio?

41. Carlos mide 6 pies de altura y se aleja de la luz de un poste de alumbrado público que está a 30 pies de altura a razón de 3 pies por segundo.

a. ¿Con que rapidez aumenta la longitud de la sombra cuando Carlos está a 20 pies del poste?

b. ¿Con que rapidez se mueve el extremo de su sombra cuando Carlos está a 20 pies del poste?

c. Para seguir el extremo de su sombra, ¿a que razón angular debe girar la cabeza cuando su sombra mide 6 pies de largo?

42. La manecilla que marca las horas en un reloj mide 4 pulgadas, mientras que la que marca los minutos mide 5 pulgadas. ¿Con que rapidez cambia la distancia entre los extremos de las manecillas cuando son las 4 en punto?

43. el volumen de una bola de nieve disminuye a una razón que es proporcional al área de su superficie.

a. Muestre que el radio se reduce a una razón constante.

b. Si se derrite a $\dfrac{8}{27}$ de su volumen original en una hora ¿Cuánto tiempo tardará en derretirse completamente?

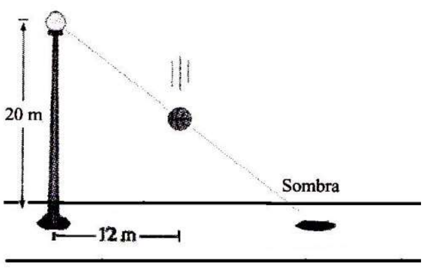
44. Una niña que mide 5 pies de altura camina hacia un poste que tiene un foco de luz a 20 pies de altura, la niña camina a razón de 4 pies por segundo. Su hermanito, de 3 pies de alto, va detrás de ella a una distancia de 4 pies.

a. Determine la rapidez a la que se mueve la punta de la sombra cuando ésta es producida por la cabeza de la niña.

b. Determine la rapidez a la que se mueve la punta de la sombra cuando ésta es producida por su hermanito.

c. A que distancia está la niña del poste cuando la sombra es producida por ambos niños.

45. Se deja caer una pelota desde una altura de 20 m y a una distancia de 12 m de una farola. La sombra de la pelota se mueve a lo largo del suelo. ¿A qué ritmo se está moviendo la sombra 1 segundo después de soltar la pelota? (velocidad de caída $v = gt$, distancia vertical recorrida $s = \dfrac{1}{2}g\,t^2$). Tome $g = 10$ m/seg^2.



46. Un corredor entrena en una pista circular de 100 m de radio, a una velocidad constante de 7 m/s. Mientras que su compañero entrena en la misma pista a una velocidad constante de 5 m/s. Si ambos corredores entrenan en el mismo sentido, ¿con que rapidez cambia la distancia entre ambos cuando se encuentran a 200 metros