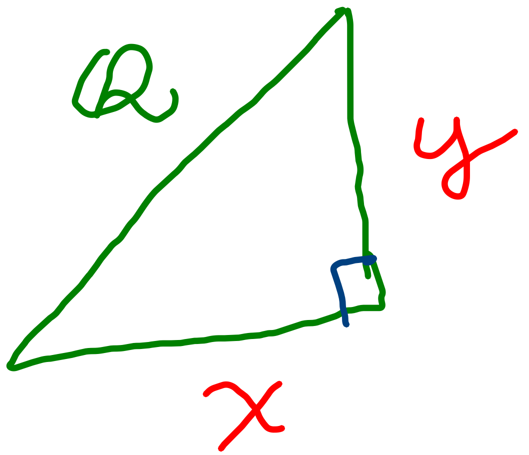
Optimización

Pasos para la resolución de problemas de optimización

1. **Comprenda el problema** El primer paso consiste en leer detenidamente el problema hasta que se entienda claramente. Pregúntese: ¿qué es lo desconocido? ¿Cuáles son las cantidades conocidas? ¿Cuáles son las condiciones dadas?
2. **Dibuje un diagrama** En la mayoría de los problemas resulta útil dibujar un diagrama e identificar en este las cantidades dadas y las cantidades requeridas.
3. **Introduzca la notación** Asigne un símbolo a la cantidad que va a ser maximizada o minimizada (se le llamará Q por ahora). También seleccione símbolos ($a, b, c, \ldots, x, y$) para otras cantidades desconocidas y etiquete el diagrama con estos símbolos. Puede ser provechoso utilizar iniciales como símbolos sugerentes, por ejemplo, A para el área, h para la altura, t para el tiempo.
4. Exprese Q en términos de algunos de los otros símbolos del paso 3.
5. Si Q se ha expresado como una función de más de una variable en el paso 4, utilice la información dada para encontrar relaciones (en forma de ecuaciones) entre estas variables. Utilice estas ecuaciones para eliminar todas, excepto una de las variables en la expresión para Q. Así Q se expresará en función de *una* variable x, es decir, $Q = f(x)$. Escriba el dominio de esta función.
6. Utilice los métodos de las secciones 4.1 y 4.3 para encontrar los valores máximo o mínimo *absolutos* de f. En particular, si el dominio de f es un intervalo cerrado, entonces se puede utilizar el método del intervalo cerrado de la sección 4.1.



$$Q = \sqrt{x^2 + y^2}$$

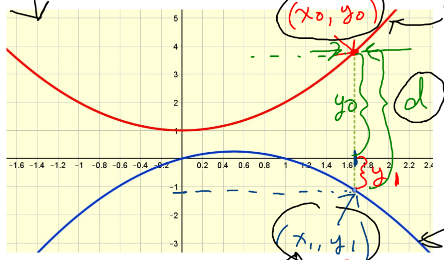
$$Q(x) = f(x)$$
$$Q(y) = f(y)$$

Prueba de la primera derivada para valores extremos absolutos Suponga que c es un número crítico de una función continua f definida sobre un intervalo.

(a) Si $f'(x) > 0$ para toda $x < c$ y $f'(x) < 0$ para toda $x >$ c, entonces $f(c)$ es el valor máximo absoluto de f.

(b) Si $f'(x) < 0$ para toda $x <$ c y $f'(x) > 0$ para toda $x > c$, entonces $f(c)$ es el valor mínimo absoluto de f.

¿Cuál es la distancia vertical mínima entre las parábolas $y = x^2 + 1$ y $y = x - x^2$?



$$d^2 = (\cancel{x_1 - x_0})^2 + (y_1 - y_0)^2$$

$(x_0 = x_1)$

$$\sqrt{d^2} = \sqrt{(y_1 - y_0)^2}$$

$$d = |y_1 - y_0|$$

$y_1 - y_0 \geq 0$ (A)

$y_1 - y_0 < 0$ (B)

$y_0 > y_1$

$$d = -(y_1 - y_0)$$

$$d = y_0 - y_1$$

$$d = (x^2 + 1) - (x - x^2)$$

$$d = x^2 + 1 - x + x^2$$

$$d = 2x^2 - x + 1 \quad (d = f(x))$$

Dom $(-\infty, +\infty)$

- NÚMEROS CRÍTICOS

$$d' = 4x - 1 = 0, \quad x = 0.25$$

$-\infty$ — c (0.25) — $+\infty$

$x < c$

$f'(x) < 0$

$(f'(0.20))$

$x > c$

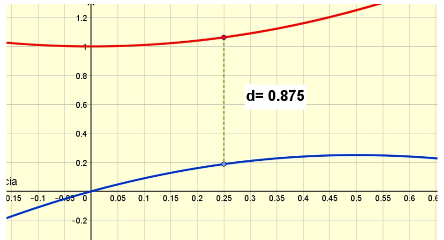
$f'(x) > 0$

$(f'(0.30))$

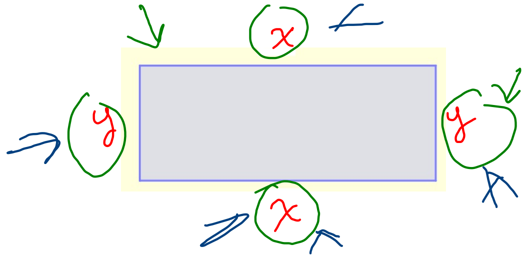
EN $x = 0.25$ d ES MÍNIMA

$$d = f(0.25) = \frac{7}{8} = 0.875$$

MÍNIMO ABSOLUTO



Encuentre las dimensiones de un rectángulo con un perímetro de 100 metros, cuya área sea tan grande como sea posible.



$2x + 2y = 100$

PERÍMETRO $= 100$

$x + y = 50$

$y = 50 - x$

$y = \frac{100 - 2x}{2}$

$x > 0$

$y > 0$

$50 - x > 0$

$x < 50$

$A = xy$

$A = x(50 - x)$

$A = 50x - x^2$; $A = f(x)$,

DOM. $(0, 50)$

$A' = 50 - 2x = 0$, $x = 25$

$A'(x) > 0 \leftarrow c \rightarrow A'(x) < 0$

PARA TODA $x < 25$ — 25 — PARA TODA $x > 25$

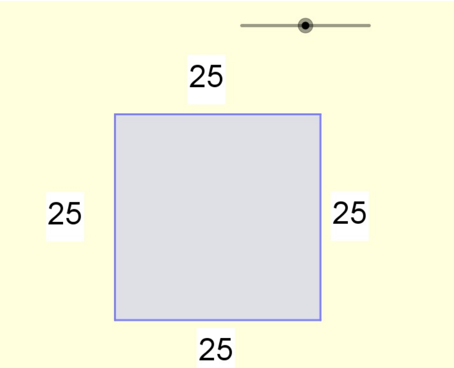
EN $x = 25$, A ES MÁXIMA

$A(25) = 625$.

R// LAS DIMENSIONES

$x = 25$, $y = 25$

CUADRADO.



PERÍMETRO=100