Clase Física 1 03

Energía Cinética movimiento circular

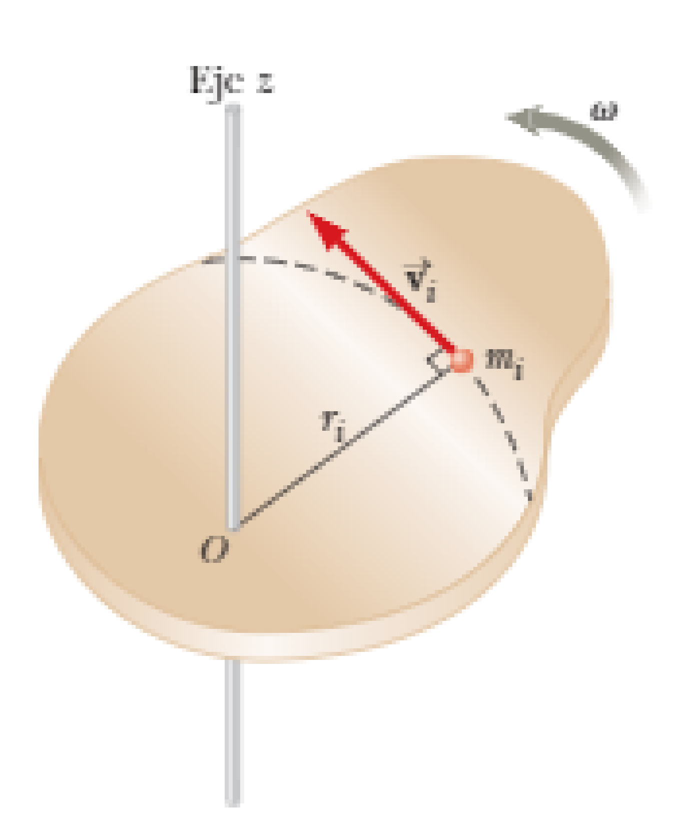
Calculo del momento de Inercia y centro de masa

Teorema de Ejes Paralelos

Ejemplos

Energía Cinética Rotacional

La energía rotacional es la energía cinética de un cuerpo rígido, que gira en torno a un eje fijo . Esta energía depende del momento de inercia y de la velocidad angular del cuerpo. Mientras más alejada esté la masa del cuerpo respecto al eje de rotación, se necesitará más energía para que el cuerpo adquiera una velocidad angular.



En FB el proceso de la energía cinética de traslación se daba de la formula siguiente:

$$K_{Tras} = \frac{1}{2}mv^2 \quad [J]$$

Pero en el caso del cuerpo rígido se considera que cada punto experimenta esta variación

Por lo que se comienza a realizar la suma de todos los elementos de energía cinética

Hasta su total.

$$K_{rot} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \ \ldots\ldots\ldots.$$

$$K_{rot} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_iv_i^2$$

En este caso cada elemento de velocidad es de origen lineal o tangencial a la rotación por lo cual se realizara el cambio a una relación angular.

Para Trabajar la expresión del movimiento debemos de realizar un cambio con su relación angular ya que se tiene diferentes valores de “v” para cada punto del sistema del cuerpo rígido.

$$v_i = r_i\omega \quad relacion\ angular\ ya\ que\ es\ la\ misma\ para\ cada\ punto\ del\ cuerpo\ rigido$$

Sustituyendo en la expresión de la Energía cinética Rotacional

$$K_{rot} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\right]\omega^2$$

De esto se puede deducir una nueva propiedad del cuerpo rígido relacionado a la masa y sus posiciones con respecto a un eje de rotación.

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \quad esta\ expresión\ para\ la\ inercia\ del\ cuerpo\ rigido$$

INERCIA (I): es una medida de la resistencia de un objeto a cambios en su movimiento rotacional.

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \int r^2 dm \quad [kg * m^2]$$

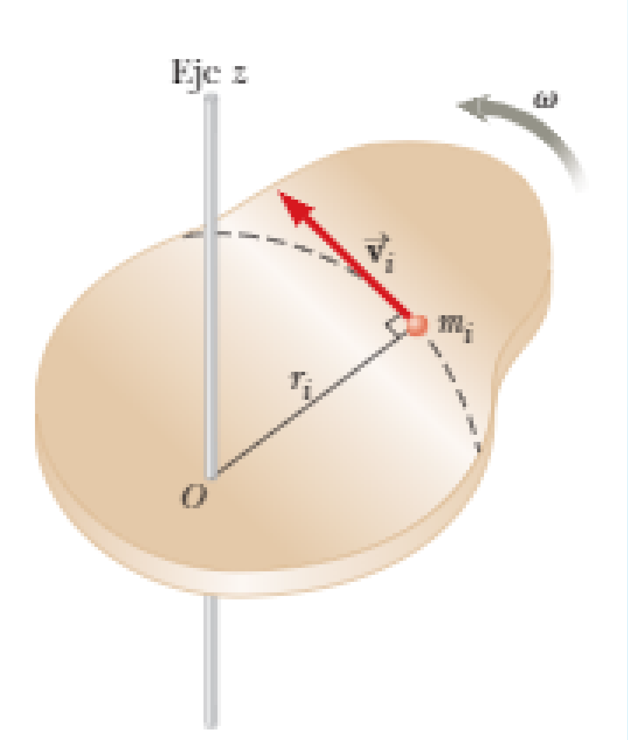
La expresión correcta para la energía cinética rotacional seria:

$$\boldsymbol{K_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2 \ [J]}$$

Calculo de Momento de Inercia

El momento de inercia (símbolo I) es una medida de la inercia rotacional de un cuerpo. Cuando un cuerpo gira en torno a uno de los ejes principales de inercia, la inercia rotacional puede ser representada como una magnitud vectorial llamada momento de inercia. Sin embargo, en el caso más general posible la inercia rotacional debe representarse por medio de un conjunto de momentos de inercia y componentes que forman el llamado tensor de inercia.

El momento de inercia refleja la distribución de masa de un cuerpo o de un sistema de partículas en rotación, respecto a un eje de giro. El momento de inercia solo depende de la geometría del cuerpo y de la posición del eje de giro; pero no depende de las fuerzas que intervienen en el movimiento.



$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \int r^2 dm \quad [kg * m^2]$$

De esta interpretación debemos de considerar la forma y en como se distribuye la masa

En el cuerpo rígido teniendo tres tipos básicos: distribución lineal(λ) en su longitud, distribución Superficial(σ) en su área superficial y distribución volumétrica(ρ) en su volumen

Por lo anterior surgen las formas de distribución **dm** para cada cuerpo rígido con el cual se trabaja

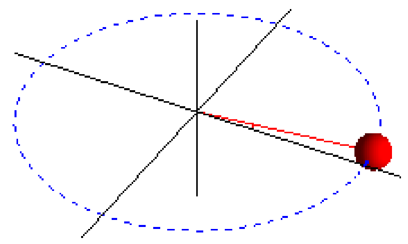
Su calculo de momento de inercia: $dm = \lambda dL \quad dm = \sigma dA \quad dm = \rho dV$

Calculo de Momentos de Inercia de Cuerpos Rígidos Definidos

Momento Partícula Puntual

En este caso la masa puntual no tiene forma y solo depende del punto de la rotación

$$I = \int r^2 dm = \boldsymbol{mr^2}\ [kg\ * m^2]$$



Momento de inercia de la barra o varilla

Cálculo del momento de inercia de una varilla

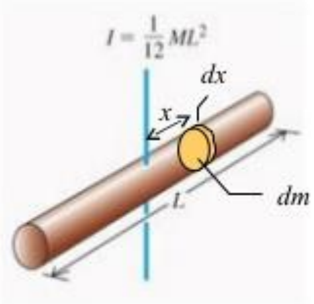
$$dm = \lambda dx$$

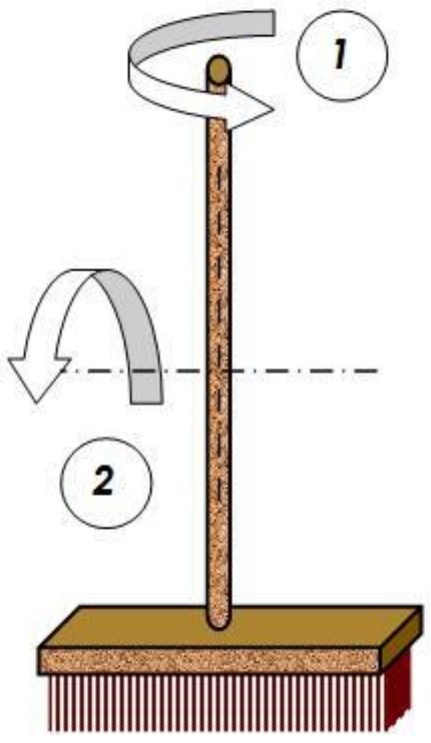
$$I = \int r^2 dm$$

$$I = \int_{-L/2}^{+L/2} \lambda x^2 dx$$

$$I = \lambda \frac{x^3}{3}\Big|_{-L/2}^{+L/2} = \lambda \frac{L^3}{12}$$

$$I = M\frac{L^2}{12}$$





Nota: los momentos de inercia
Depende del eje de rotación
Por lo cual es necesario
Especificar siempre de donde
Parte o como va a rotar
el objeto

Ejemplo de la escoba para la
Importancia del eje de rotación

Centro de Masa y Ejes de rotación

El centro de masa(CM) es una posición definida en relación a un objeto o a un sistema de objetos. Es el promedio de la posición de todas las partes del sistema, ponderadas de acuerdo a sus masas.

Para objetos rígidos sencillos con densidad uniforme, el centro de masa se ubica en el centroide. Por ejemplo, el centro de masa de un disco uniforme estaría en su centro. Algunas veces el centro de masa no está en ningún lado sobre el objeto. El centro de masa de un anillo, por ejemplo, está ubicado en su centro, en donde no hay material.

En estos casos podremos establecer que en el centro de masa

También se localiza otro elemento importante que es el

Centro de Gravedad(Cg) que es el punto donde actúan los efectos

De la gravedad sobre la masa en cuestión y para los procesos el eje

De rotación se colocara en este punto del cuerpo rígido.

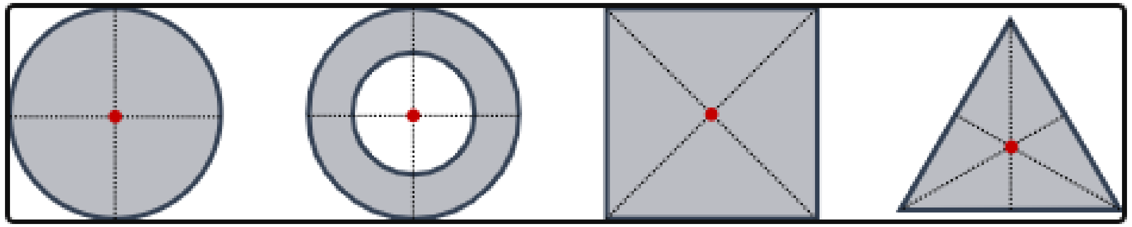


Figura 1: centro de masa para algunas formas geométricas (puntos rojos).

Calculo de centro de masa(CM):

En general, el centro de masa se puede encontrar con la suma vectorial ponderada de los vectores de posición, la cual apunta al centro de masa de cada objeto en un sistema. Una técnica rápida que nos permite evitar usar aritmética vectorial es encontrar, de manera separada, el centro de masa de los componentes a lo largo de cada eje. Es decir:

para las posiciones de los objetos a lo largo del eje x:

$$\mathrm{CDM}_x = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}$$

Y del mismo modo para el eje y:

$$\mathrm{CDM}_y = \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}$$

Teorema de Eje Paralelo

Las Inercias Calculadas corresponden a las Inercias de centro de masa I_{cm} ya que ellas están en el eje de giro pero se puede tomar en cuenta cualquier eje externo a este al que llamaremos eje paralelo o externo.

$$I_p = I_{cm} + Md^2 \quad [kg * m^2]$$

Donde : "M" es la masa del cuerpo rígido y "d" es la distancia al nuevo eje "p" medido desde el eje del centro de masa.

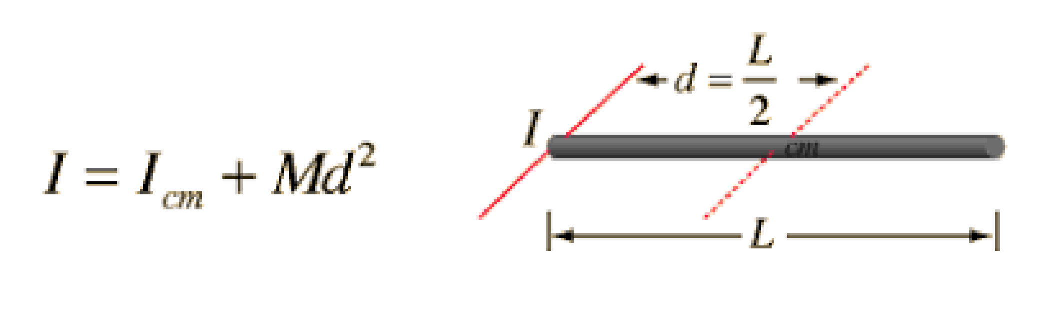
Ejemplo: Analizamos el caso de la varilla para su extremo cualquiera que sea:

Figura 1. Inercia del centro de masa que pasa perpendicular

A la figura.

Figura 2. Momento de inercia "p" en un eje rotado

Aplicando el método de eje paralelo tenemos:



$$I_p = \frac{1}{12}ML^2 + M(L/2)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \mathbf{\frac{1}{3}M\,L^2}$$

Momentos de Inercia Conocidos de cuerpos rígidos

Estableciendo el centro de masa de los cuerpos rígidos o también llamados centroides, se establece los momentos de inercia.

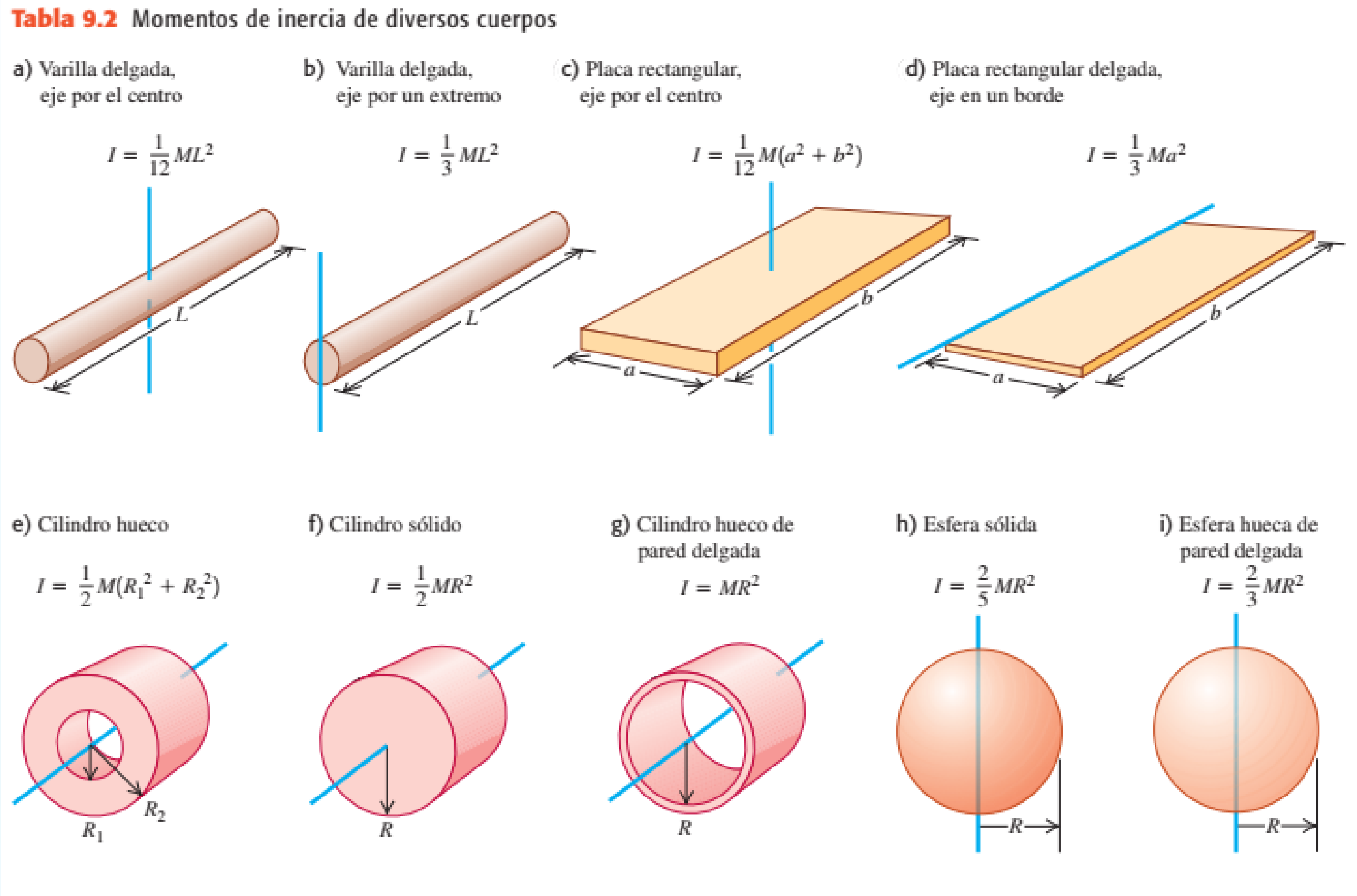
Nota:

El cilindro solido se puede asociar a otras figuras como disco y polea

El cilindro hueco de pared delgada se asocia a el anillo

Para los casos de la varilla y placa desde uno de sus extremos se emplea un método llamado eje paralelo para su calculo

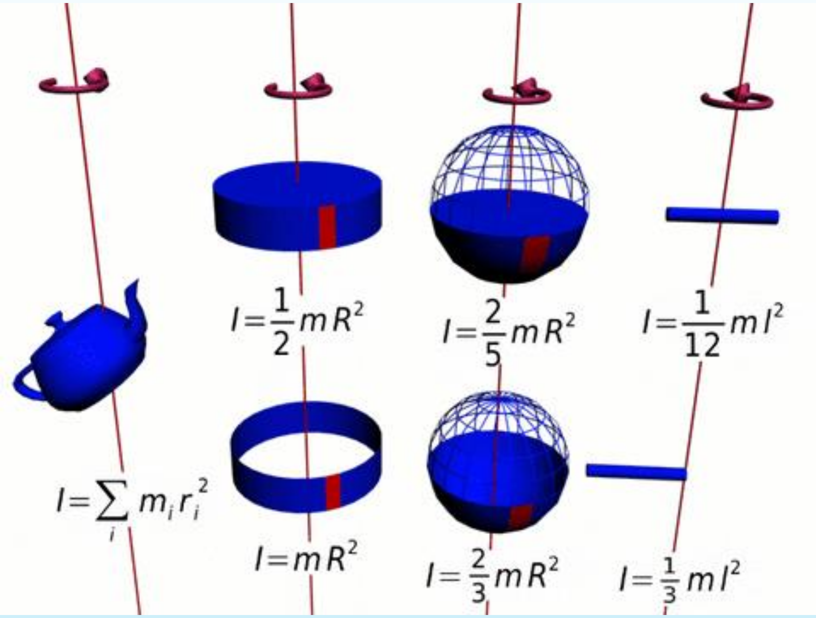
Aclaración para estos momentos y otros de inercia es una implicación de la figura que se observa desde el eje de rotación sea o no centroidal



Momentos de Inercia de Cuerpos Rígidos complejos

En el caso que el cuerpo rígido no sea como las figuras anteriores deberá de establecerse para su resolución dos métodos.

Método 1: aplicación de la integral para el calculo del momento de inercia con respeto al eje deseado



$$I = \int r^2 dm$$

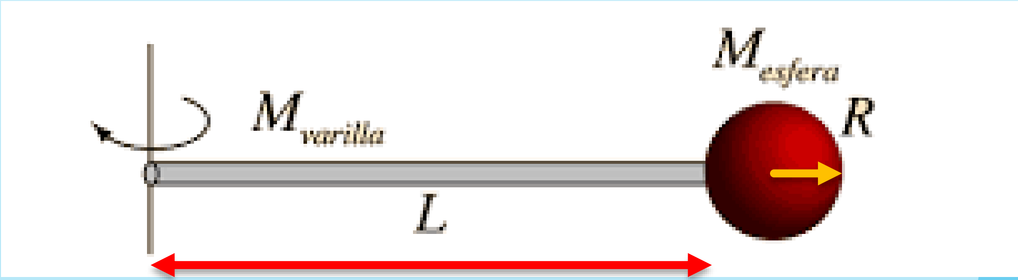
Método 2: realizando la sumatoria de los momentos de inercia de las figuras conocidas aplicando teorema de ejes paralelos si fuera el caso

$$I_{sistema} = I_{Cuerpo\ 1} + I_{cuerpo\ 2} + I_{Cuerpo\ 3} + \ldots\ldots.$$

Ejemplo: Calcular el momento de inercia del sistema desde el eje que se muestra en la figura(la esfera es solida).

Para este caso debemos de establecer cuales son los cuerpos rígidos conocidos

Y cuales serán sus inercias en el eje que se quiere calcular



$$I_{sis} = I_{varilla} + I_{esfera}$$

$$I_{sis} = I_{cm\ varilla} + M_{Varilla}d_{varilla}^2 + I_{cm\ esfera} + M_{esfera}d_{esfera}^2$$

$$I_{sis} = \frac{1}{12} M_{varilla}L^2 + M_{varilla}(L/2)^2 + \frac{2}{5}M_{esfera}R^2 + M_{esfera}(L+R)^2$$

$$\boldsymbol{I_{sis} = \frac{1}{3}M_{varilla}L^2 + M_{esfera}(\frac{2}{5}R^2 + (L+R)^2)}$$