Ej. La temperatura en cualquier punto de una placa rectangular situada en el plano xy es $T(x,y)$ donde $T(x,y) = 3x^2 + 2xy$. La distancia se mide en metros.
a) Calcule la máxima tasa de variación de la temperatura en el punto $P(3,-6)$ de la placa. b) Determine la dirección para la cual ocurre esta tasa de variación máximo en $P(3,-6)$.

a) $\|\nabla T(x,y)\| = ?$

b) $\nabla T(x,y) = T_x(3,-6)\, i + T_y(3,-6)\, j$

$= (6x + 2y)\, i + (2x)\, j$

$\nabla T(3,-6) = (6 * 3 + 2 * -6)\, i + 2(3)\, j$

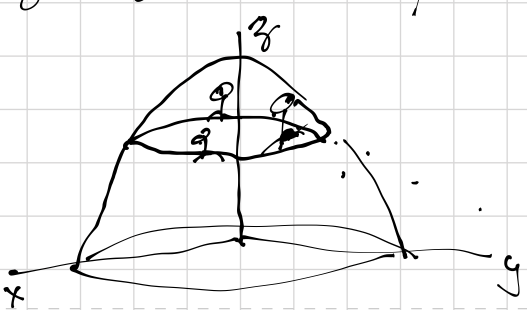
$\nabla T(3,6) = (18 - 12)\, i + 6\, j$

$\nabla T(3;6) = 6i + 6j$

a) $\|\nabla T(3,-6)\| = \sqrt{(6)^2 + (6)^2} = \sqrt{72}$

Ej. Una ecuación de la superficie de una montaña es $z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$ donde la distancia se mide en metros, el eje x apunta hacia el este y el eje y apunta hacia el norte. Un alpinista se encuentra en el punto $P(-10, 5, 850)$. a) ¿Cuál es la dirección de máxima inclinación? b) Si la alpinista se desplaza en la dirección este, ella asciende o desciende y a qué tasa, c) si la alpinista se desplaza en la dirección suroeste, asciende o desciende y a qué tasa. d) En qué dirección se debe mover la alpinista, para mantenerse a la misma altura.

$z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$



$\nabla z = z_x(x,y)\, i + z_y(x,y)\, j$

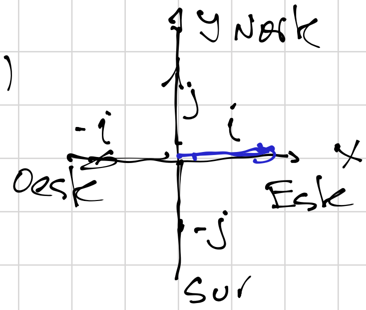
$\nabla z = -6x\, i - 4y\, j$

$\nabla z(-10,5) = -6(-10)\, i - 4(5)\, j$

$\nabla z(-10,5) = 60i - 20j \rightarrow$ maxima inclinacion

$-\nabla z = -60i + 20j \rightarrow$ minima inclinacion.

b)

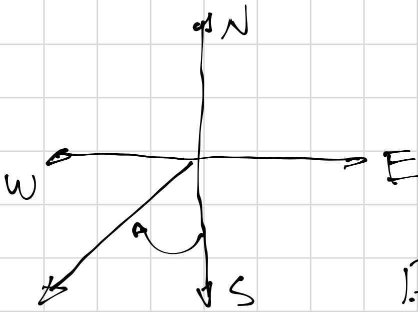


$V = i \rightarrow U = \dfrac{V}{\|V\|} = \dfrac{i}{1} = i$

$D_u z(-10,5) = \nabla z \cdot U$

$D_u z(-10,5) = (60i - 20j)\cdot(i) = 60$ la alpinista asciende.

c)



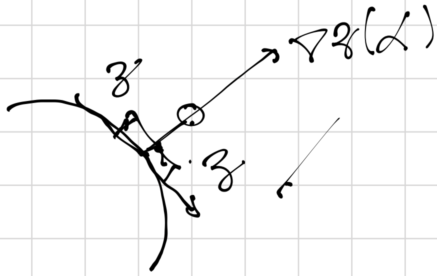
$V = -i - j$

$U = \dfrac{V}{\|V\|} = \dfrac{-i-j}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}} = \dfrac{-i-j}{\sqrt{2}}$

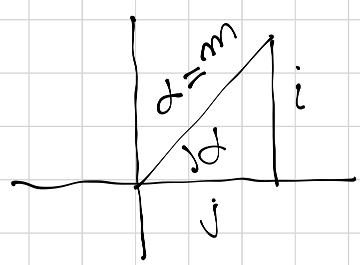
$D_u z(-10,5) = (60i - 20j)\cdot\left(-\dfrac{i}{\sqrt{2}} - \dfrac{j}{\sqrt{2}}\right)$

$D_u z(-10,5) = \dfrac{-60}{\sqrt{2}} + \dfrac{20}{\sqrt{2}} = \dfrac{-40}{\sqrt{2}}$ la alpinista desciende.

d)



$\alpha = tg^{-1}\dfrac{j}{i}$



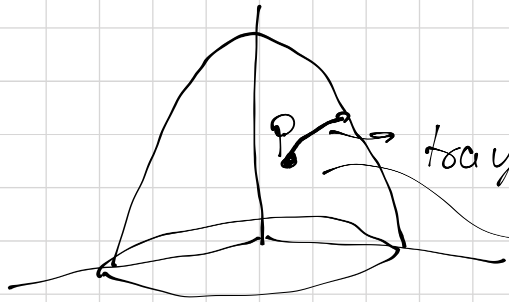
$\alpha = tg^{-1}\dfrac{-20}{60}$

$tg\alpha = j$

$\alpha = tg^{-1} -\dfrac{1}{3} = -0.322$

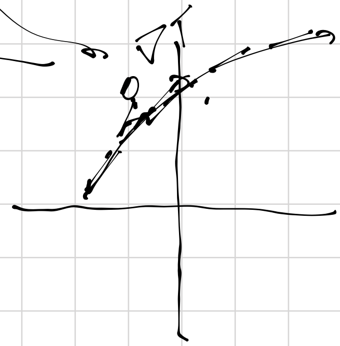
$z = \alpha \pm \dfrac{\pi}{2} = -0.322 \pm \dfrac{\pi}{2}$ $\rightarrow z_1 = 1.249$, $\rightarrow z_2 = -1.893$

Ej. La temperatura en grados Celcius sobre la superficie de una placa es $T(x,y) = 400 - 2x^2 - y^2$. Encuentre su trayectoria conforme se va moviendo en la direccion de maximo incremento, en el punto $P(10,10)$



$T(x,y) = 400 - 2x^2 - y^2$

trayectoria maximo incremento de la temperatura



Curva

$r(t) = x(t)\, i + y(t)\, j$

$r'(t) = \nabla T(x,y)$

Dirección maximo incremento.

$$\nabla T = T_x\, i + T_y\, j = -4x\, i - 2y\, j$$

$$r'(t) = x'(t)\, i + y'(t)\, j = \frac{dx}{dt}\, i + \frac{dy}{dt}\, j$$

$$\frac{dx}{dt}\, i + \frac{dy}{dt}\, j = -4x\, i - 2y\, j$$

$$\frac{dx}{dt} = -4x \qquad \frac{dy}{dt} = -2y$$

$$-\frac{dx}{4x} = dt \qquad -\frac{dy}{2} =$$

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y}$$

$$e^{\ln y} = \frac{1}{2}\ln x + c = e^{\ln x^{1/2} + c}$$

$$y = e^{\ln x^{1/2}} \cdot e^{c} = c\, x^{1/2}$$

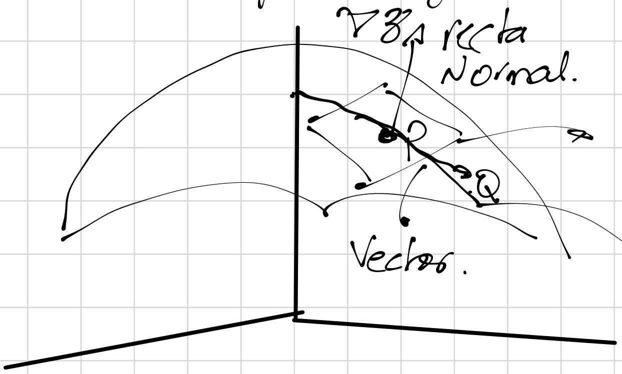
$P(10,10)$ $\qquad 10 = c\,(10)^{1/2} \rightarrow c = \frac{10}{10^{1/2}}$

$$\boxed{y = \frac{10}{10^{1/2}}\, x^{1/2}} \qquad x = t$$

$$y = \frac{10}{10^{1/2}}\, t^{1/2}$$

$$r(t) = t\, i + \frac{10}{10^{1/2}}\, t^{1/2}$$

plano tangente y recta Normal.



→ $z = f(x, y)$

→ plano tangente.

curva

$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$

$$z = f(x,y) \rightarrow F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$$

$$F(x,y,z) = 0 \rightarrow F(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

donde F es diferenciable, $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ existen.

Por medio de la regla de la cadena se puede Calcular

$$F'(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

$$F'(t) = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{x'(t)} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{y'(t)} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{z'(t)} = 0$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial x} i + \frac{\partial F}{\partial y} j + \frac{\partial F}{\partial z} k\right)}_{\text{gradiente}} \cdot \left(x'(t) i + y'(t) j + z'(t) k\right) = 0$$

vector.

$$\rightarrow \underbrace{\nabla F(x,y,z) \cdot r'(t)}\ = 0$$

$P(x_0, y_0, z_0)$ y $Q(x, y, z)$

$$\vec{PQ} = \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle$$

$$\nabla F(x,y,z) \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$$

$$(F_x i + F_y j + F_z k) \cdot ((x - x_0) i + (y - y_0) j + (z - z_0) k) = 0$$

$$F_x (x - x_0) + F_y (y - y_0) + F_z (z - z_0) = 0$$

Ecuación del plano tangente.

Ecuación de la recta normal

$$\Downarrow$$

$$\frac{x-x_0}{F_x} = \frac{y-y_0}{F_y} = \frac{z-z_0}{F_z}$$

$F(x,y,z)=0 \rightarrow F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)+F_z(z-z_0)=0$

$z=f(x,y) \rightarrow f_x(x-x_0)+f_y(y-y_0)-(z-z_0)=0$

Ej. Determine una ecuación para el plano tangente a la superficie.

$$z=e^x(\operatorname{sen} y+1) \qquad P(0,\tfrac{\pi}{2},2)$$

$f_x(x-x_0)+f_y(y-y_0)-(z-z_0)=0$

$f_x=e^x(\operatorname{sen} y+1) \qquad f_y=e^x(\cos y)$

$f_x(0,\frac{\pi}{2})=e^0(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}+1)=(1+1)=2$

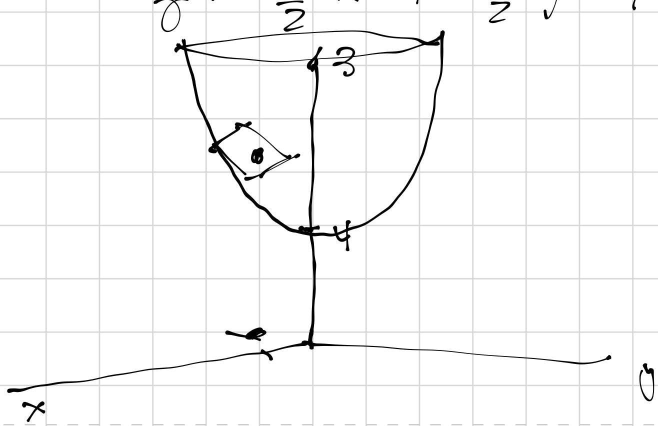
$f_y(0,\frac{\pi}{2})=e^0(\cos\frac{\pi}{2})=0$

$2(x-0)+0(x-\frac{\pi}{2})-(z-2)=0$

$2x-z+2=0 \rightarrow \boxed{2x-z=-2}$

Ej. Encuentre una ecuación del plano tangente y de la recta normal del paraboloide

$$z=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+4 \quad \text{en} \quad P(1,-1,5)$$



$$F(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 4 - z$$

$$F_x = x \qquad F_z = -1$$

$$F_y = y$$

$$F_x(1,-1,5) = 1 \qquad F_y(1,-1,5) = -1$$

$$F_x(x - x_0) + F_y(\underset{+1}{y - y_0}) + F_z(z - z_0) = 0$$

$$1(x-1) - 1(y-(-1)) + (-1)(z-5) = 0$$

$-2+5$

$$x - 1 - y - 1 - z + 5 = 0$$

$$\boxed{x - y - z = -3} \rightarrow \text{plano tangente}$$

$$\frac{(x-x_0)}{F_x} = \frac{(y-y_0)}{F_y} = \frac{z-z_0}{F_z}$$

$$\frac{(x-1)}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{-1} \rightarrow$$