Cinemática en una o más dimensiones

Desplazamiento

Velocidad

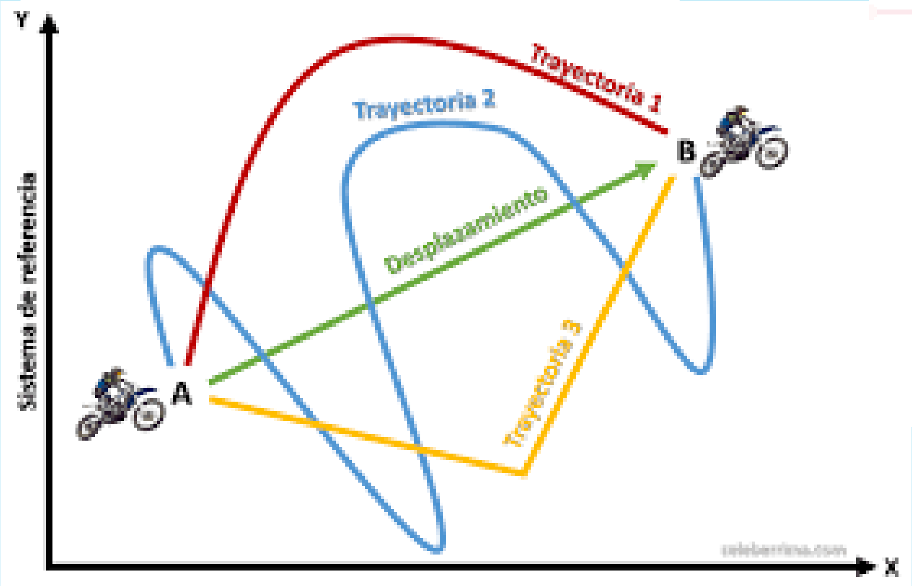
Rapidez

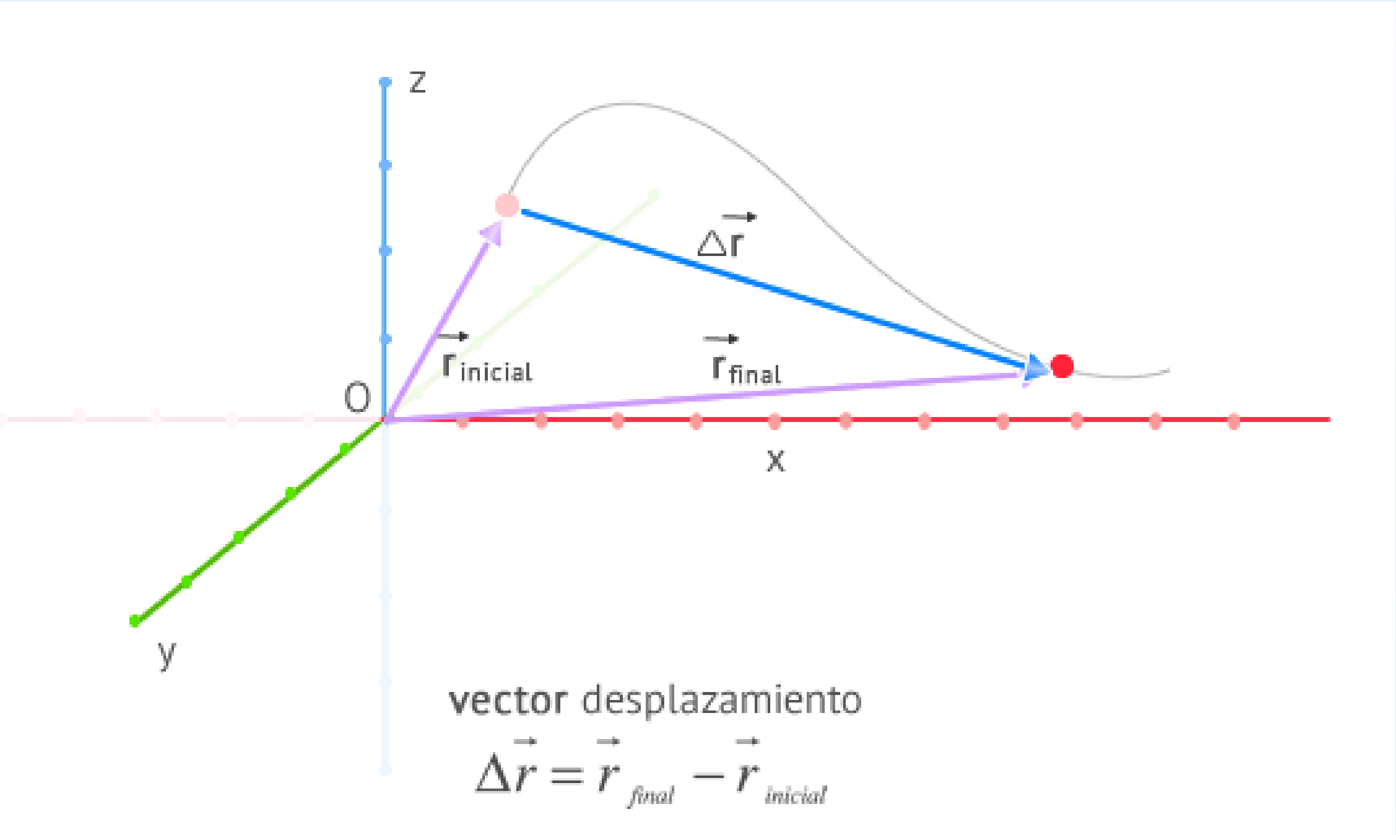
Aceleración

Consideraciones de variables en su forma vectorial.

Posición, Desplazamiento y Recorrido

El desplazamiento es el vector que define la posición de un punto o partícula en relación a un origen A con respecto a una posición B. El vector se extiende desde el punto de referencia hasta la posición final. Cuando se habla del desplazamiento en el espacio solo importa la posición inicial y la posición final, ya que la trayectoria que se describe no es de importancia.





El desplazamiento es una característica totalmente vectorial por lo tanto la podemos expresar de las siguientes maneras:

Posición de un objeto es simplemente la ubicación de ella en un espacio vectorial de una, dos o tres dimensiones.

$$\vec{r}_o = (x_o, y_o, z_o)[m, cm, pies \ \ldots.]$$
$$\vec{r}_f = (x_f, y_f, z_f)[m, cm, pies \ \ldots.]$$

El vector de desplazamiento es el resultado de la resta de los puntos finales y iniciales, pero en forma rectangular o componentes

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_f - \vec{r}_o \qquad : \overrightarrow{\Delta x} = \vec{x}_f - \vec{x}_o \ , \overrightarrow{\Delta y} = \vec{y}_f - \vec{y}_o \ , \overrightarrow{\Delta z} = \vec{z}_f - \vec{z}_o$$

El recorrido o distancia es el resultado de la suma se los valores de los trayectos sin la consideración del vector, por lo cual es considerado simplemente un escalar y los resultados que se estimen de el serán de carácter escalar.

$$Recorrido = recorrido\ 1 + recorrido\ 2 + recorrido\ 3 + \cdots \ldots.$$

La ultima forma que podemos expresar un vector es en forma de una función matemática en términos del tiempo que es de carácter escalar en todos estos procesos.

$$\vec{r}(t) = \vec{x}(t)\hat{\imath} + \vec{y}(t)\hat{\jmath} + \vec{z}\,(t)\hat{k}$$

Velocidad y rapidez

La velocidad es la magnitud física de carácter vectorial que relaciona el cambio de posición (o desplazamiento) con el tiempo. Se representa con: v ,o $\vec{v}$(en la escritura manuscrita). En análisis dimensional sus dimensiones son: [L]/[t]. Su unidad en el Sistema Internacional de Unidades es el metro por segundo (símbolo, m/s).

Velocidad media $\vec{v}_{media}[{}^{m}/_{s}]$

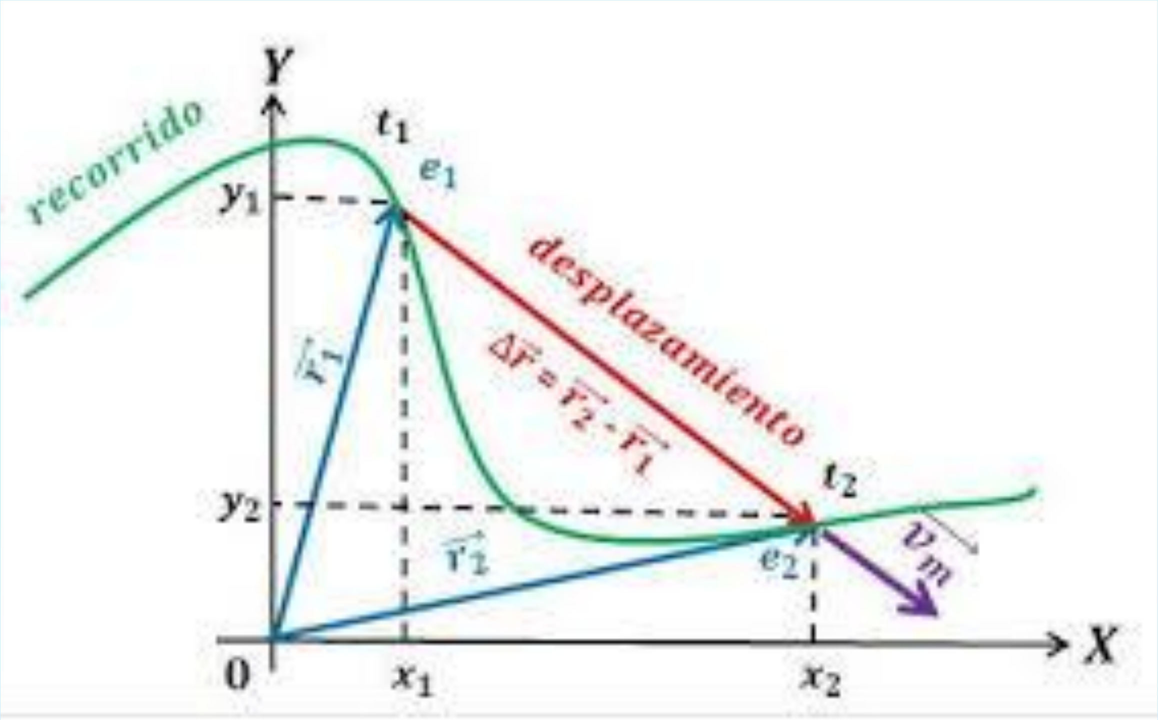
Es el cambio de la posición dentro un intervalo de tiempo definido.(discreto)

$$\vec{v}_{media} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_o}{t_f - t_o}$$

$$\vec{v}_{mediax}\frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_o}{t_f - t_o}\ \hat{\imath} \quad , \vec{v}_{mediay}\frac{\overrightarrow{\Delta y}}{\Delta t} = \frac{\vec{y}_f - \vec{y}_o}{t_f - t_o}\ \hat{\jmath}\ ,$$

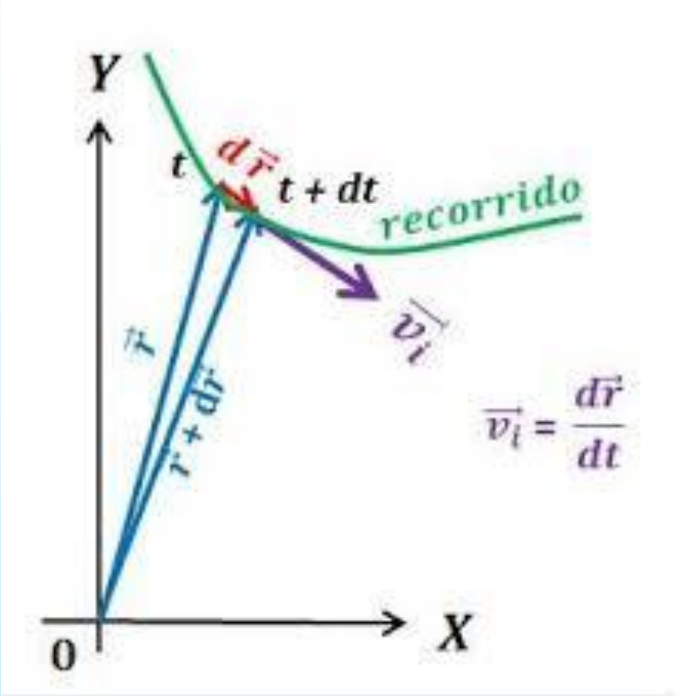
$$\vec{v}_{mediaz}\frac{\overrightarrow{\Delta z}}{\Delta t} = \frac{\vec{z}_f - \vec{z}_o}{t_f - t_o}\ \hat{k}$$

$$\vec{v}_{media} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$$



Velocidad Instantánea $\vec{v}_{ins}[{}^{m}/{}_{s}]$

Es el cambio de posición en un instante de tiempo (diferencial).



$$\vec{v}_{ins} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v}_{insx} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}\hat{\imath} \quad , \vec{v}_{insy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta y}}{\Delta t} = \frac{d\vec{y}}{dt}\hat{\jmath} \quad , \vec{v}_{insz} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta z}}{\Delta t} = \frac{d\vec{z}}{dt}\hat{k}$$

$$\vec{v}_{ins} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$$

Rapidez $\mathrm{v}[{}^{m}/{}_{s}]$

Es una razón de cambio como la velocidad pero se puede interpretar de dos formas

1. Es la magnitud del vector de velocidad(forma polar) $|\vec{v}| = v$
2. Forma escalar a partir del recorrido

$$v = \frac{recorrido}{tiempo} \qquad v_{media} = \frac{recorrido}{\Delta t}$$

Aceleración

La aceleración es la magnitud física de carácter vectorial que relaciona el cambio de velocidad con el tiempo. Se representa con: a ,o $\vec{a}$(en la escritura manuscrita). En análisis dimensional sus dimensiones son: [L]/[t^2]. Su unidad en el Sistema Internacional de Unidades es el metro por segundo al cuadrado (símbolo, m/s^2).

Aceleración media $\vec{a}_{media}[{}^{m}/_{s^2}]$

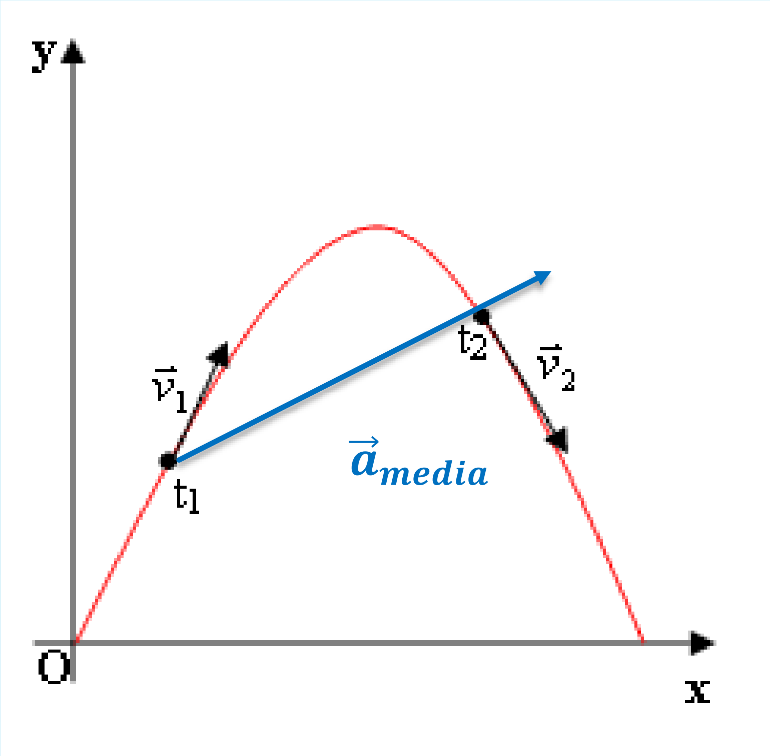
Es el cambio de la velocidad dentro un intervalo de tiempo definido.(discreto)

$$\vec{a}_{media} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_o}{t_f - t_o}$$

$$\vec{a}_{mediax}\frac{\overrightarrow{\Delta v_x}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_o}{t_f - t_o}\ \hat{\imath} \quad , \vec{a}_{mediay}\frac{\overrightarrow{\Delta v_y}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_o}{t_f - t_o}\ \hat{\jmath}\ ,$$

$$\vec{a}_{mediaz}\frac{\overrightarrow{\Delta v_z}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_o}{t_f - t_o}\ \hat{k}$$

$$\vec{a}_{media} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$



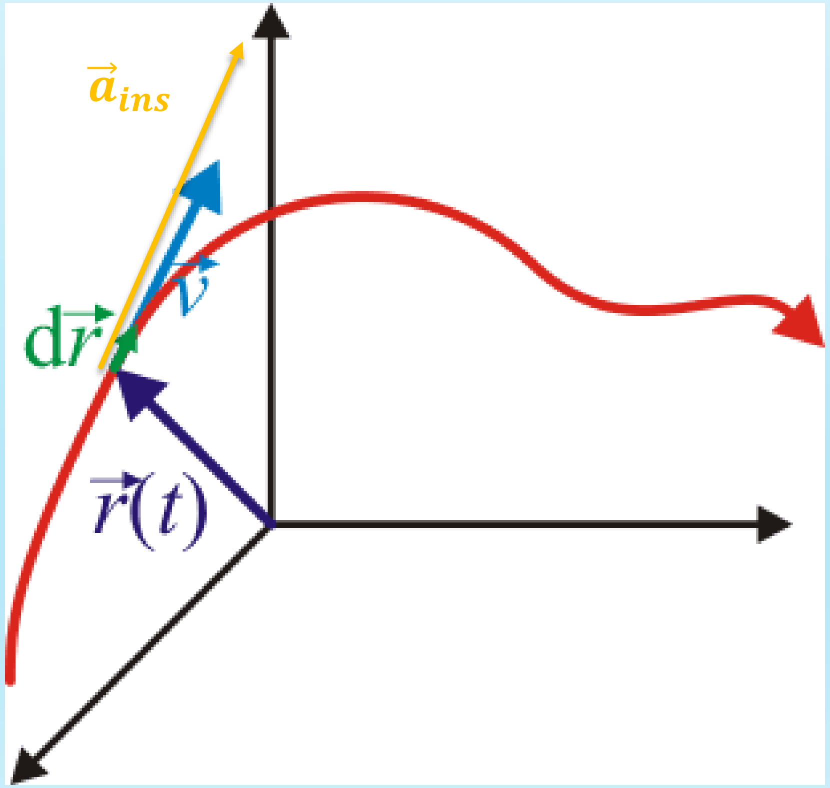
Aceleración Instantánea $\vec{a}_{ins}\left[{}^{m}/_{s^2}\right]$

Es el cambio de velocidad en un instante de tiempo (diferencial).

$$\vec{a}_{ins} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{a}_{insx} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v_x}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{v_x}}{dt}\hat{\imath} \quad , \vec{a}_{insy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v_y}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{v_y}}{dt}\hat{\jmath} \quad , \vec{a}_{insz} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v_z}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{v_z}}{dt}\hat{k}$$

$$\vec{a}_{ins} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$



cinemática Funciones

Ejemplos funciones cinemática

Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado(MRUV)

Ejemplos MRUV

Ing. Eddy Solares

USAC

Calculo de derivada

La derivada de una función, en principio, puede ser calculada de la definición, mediante el cociente de diferencias, y después calcular su límite. En la práctica, únicamente las derivadas de unas pocas funciones son conocidas, las derivadas de otras funciones son fáciles de calcular utilizando reglas para obtener derivadas de funciones más complicadas de otras más simples.

Derivada de una potencia

Sea la función en términos de una variable $f(t) = t^n$ la potencia siempre deberá de se un valor real.

Su deriva seria de forma general igual $\frac{df(t)}{dt} = n\, t^{n-1}$

Ejemplo: sea $f(x) = 2x^5$

Su derivada seria $\frac{df(x)}{dx} = 2(5)x^{5-1} = 10x^4$

Consideraciones para las derivadas:

sea $f(x) = x^1$ Su derivada seria $\frac{df(x)}{dx} = 1x^{1-1} = 1x^0 = 1$

sea $f(x) = a$ donde a es una constante Su derivada seria $\frac{df(x)}{dx} = a = 0$

Ejemplo : **2.9.** Un automóvil está parado ante un semáforo. Después viaja en línea recta y su distancia con respecto al semáforo está dada por $x(t) = bt^2 - ct^3$, donde $b = 2.40\ m/s^2$ y $c = 0.120\ m/s^3$. *a*) Calcule la velocidad media del auto entre el intervalo $t = 0$ a $t = 10.0$ s. *b*) Calcule la velocidad instantánea del auto en $t = 0$; $t = 5.0$ s; $t = 10.0$ s. c)aceleración media en el intervalo de 5.0s a 10.0s d) aceleración instantánea en t= .0s, 5.0s y 10.0s *e*) ¿Cuánto tiempo después de arrancar el auto vuelve a estar parado? f) En que instantes de tiempo el móvil se encuentra sin cambios de velocidad?

a) Para calcular valores a partir de una función es necesario sustituir los valores y posteriormente realizar operaciones.

$$\vec{x}(t) = 2.4t^2 - 0.12t^3\ en\ m$$

$$x(t=0) = 2.4(0)^2 - 0.12(0)^3 = 0m \qquad x(t=10) = 2.4(10)^2 - 0.12(10)^3 = +120m$$

$$\vec{v}_{mediax} = \frac{x(t_f) - x(t_o)}{t_f - t_o} = \frac{+120 - 0}{10 - 0} = \mathbf{+12\ {}^{m}/_{s}\ \hat{\imath}}$$

b) Calcular la velocidad en diferentes instantes es estimar la función de $\vec{v}(t)$

$$\vec{v}_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 2.4(2)t^{2-1} - 0.12(3)t^{3-1} = 4.8t - 0.36t^2$$

$$\vec{v}_x(t=0) = 4.8(0) - 0.36(0)^2 = \mathbf{0\ m/s}$$

$$\vec{v}_x(t=5) = 4.8(5) - 0.36(5)^2 = \mathbf{+15\frac{m}{s}\hat{\imath}}$$

$$\vec{v}_x(t=10) = 4.8(10) - 0.36(10)^2 = \mathbf{+12\frac{m}{s}\hat{\imath}}$$

c) La aceleración media depende de los valores instantáneos de velocidad.

$$\vec{a}_{mediax} = \frac{\vec{v}_x(t_f) - \vec{v}_x(t_o)}{t_f - t_o} = \frac{+12 - (+15)}{10 - 5} = \mathbf{-0.6}\, {}^{\boldsymbol{m}}\!/_{\boldsymbol{s^2}}\, \hat{\boldsymbol{\imath}}$$

d) aceleración instantánea en t= .0s, 5.0s y 10.0s.

$$\vec{a}_x(t) = \frac{d\vec{v}_x(t)}{dt} = 4.8t^{1-1} - 0.36(2)t^{2-1} = 4.8 - 0.72t$$

$$\vec{a}_x(t=0) = 4.8 - 0.72(0) = \mathbf{4.8}\, {}^{\boldsymbol{m}}\!/_{\boldsymbol{s^2}}\, \hat{\boldsymbol{\imath}} \qquad \vec{a}_x(t=5) = 4.8 - 0.72(5) = \mathbf{1.2}\, {}^{\boldsymbol{m}}\!/_{\boldsymbol{s^2}}\, \hat{\boldsymbol{\imath}}$$

$$\vec{a}_x(t=10) = 4.8 - 0.72(10) = \mathbf{-2.4}\, {}^{\boldsymbol{m}}\!/_{\boldsymbol{s^2}}\, \hat{\boldsymbol{\imath}}$$

e) ¿Cuánto tiempo después de arrancar el auto vuelve a estar parado?

En este caso tomamos referencia a que busca el móvil estar en reposo instantáneo esto es velocidad cero.

$$\vec{v}_x(t) = 4.8t - 0.36t^2 \qquad 0 = 4.8t - 0.36t^2$$

$$\mathbf{4.8\cancel{t} = 0.36t^{\cancel{2}}}$$

se resuelve el sistema tomando en consideración que si se puede simplificar la expresión se tiene una raíz que en este caso es t=0s

$$\mathbf{4.8 = 0.36}\boldsymbol{t} \qquad \boldsymbol{t} = \frac{\mathbf{4.8}}{\mathbf{0.36}} = \mathbf{13.33}\boldsymbol{s}$$

f) En que instantes de tiempo el móvil se encuentra sin cambios de velocidad?

En este caso se basara para el calculo la idea de que no se busca que exista cambio de velocidad esto se da en tener por un instante una velocidad constante.

Por lo tanto se planea ahora para la función de aceleración igualada a cero.

$$\vec{a}_x(t) = 4.8 - 0.72t \qquad 0 = 4.8 - 0.72t$$

$$0.72t = 4.8 \qquad t = \frac{4.8}{0.72} = \mathbf{6.667s}$$

3.3. Un diseñador de páginas Web crea una animación en la que un punto en una pantalla de computadora tiene una posición $\vec{r}(t) = (4 + 2.5t^2)\hat{\imath} + 5t\hat{\jmath}\ en\ cm$ *a*) Determine la velocidad media del punto entre *t* = 0 y *t* = 2.0 s. *b*) Calcule la magnitud y dirección de la velocidad instantánea en *t* = 0, en *t* = 1.0 s y en *t* = 2.0 s. C) calcular el valor de la aceleración instantánea en el t=0.0s , 1.0s y 2.0s

a) Determine la magnitud y dirección de la velocidad media del punto entre *t* = 0 y *t* = 2.0 s.

$$\vec{r}(t = 0) = (4 + 2.5(0)^2)\hat{\imath} + 5(0)\hat{\jmath} = 4\hat{\imath}\ cm$$
$$\vec{r}(t = 2) = (4 + 2.5(2)^2)\hat{\imath} + 5(2)\hat{\jmath} = (14\hat{\imath} + 10\hat{\jmath})cm$$

$$\vec{v}_{mediax} = \frac{x(t_f)-x(t_o)}{t_f-t_o} = \frac{+14-4}{2-0} = \mathbf{+5\ {}^{cm}/_{s}\,\hat{\imath}} \qquad \vec{v}_{mediay} = \frac{y(t_f)-y(t_o)}{t_f-t_o} = \frac{+10-0}{2-0} = \mathbf{+5\ {}^{cm}/_{s}\,\hat{\jmath}}$$

$$\boldsymbol{\vec{v}_{media} = (5\hat{\imath} + 5\hat{\jmath})cm/s}$$

b) Determinar magnitud y dirección de la velocidad instantánea

Función de velocidad en este caso se deriva por separado para cada componente.

$$\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{\jmath}$$
$$\vec{v}(t) = (5t\hat{\imath} + 5\hat{\jmath})en\ cm/s$$

- Para t=0s $\vec{v}(t=0) = (5(0)\hat{\imath} + 5\hat{\jmath})\frac{cm}{s} = \quad 5\hat{\jmath}\frac{cm}{s}$
- $|\vec{v}(t=0)| = 5\frac{cm}{s}$ $\qquad \theta = 90° \ \ con\ respecto\ a\ x+$
- Para t=1.0s $\vec{v}(t=1) = (5(1)\hat{\imath} + 5\hat{\jmath})\frac{cm}{s} = (5\hat{\imath} + \ 5\hat{\jmath})\frac{cm}{s}$
- $|\vec{v}(t=1)| = \sqrt[2]{5^2+5^2} = \frac{7.071cm}{s}$ $\qquad \theta = \tan^{-1}\frac{opuesto}{adyacente} = \tan^{-1}(\frac{5}{5}) = 45° \ \ con\ respecto\ a\ x+$
-
- Para t=2.0s $\vec{v}(t=2) = (5(2)\hat{\imath} + 5\hat{\jmath})\frac{cm}{s} = (10\hat{\imath} + \ 5\hat{\jmath})\frac{cm}{s}$
- $|\vec{v}(t=2)| = \sqrt[2]{10^2+5^2} = \frac{11.18\ cm}{s}$ $\qquad \theta = \tan^{-1}\frac{opuesto}{adyacente} = \tan^{-1}(\frac{5}{10}) = 26.56° \ \ con\ respecto\ a\ x+$

c) calcular el valor de la aceleración instantánea en el t=0.0s , 1.0s y 2.0s

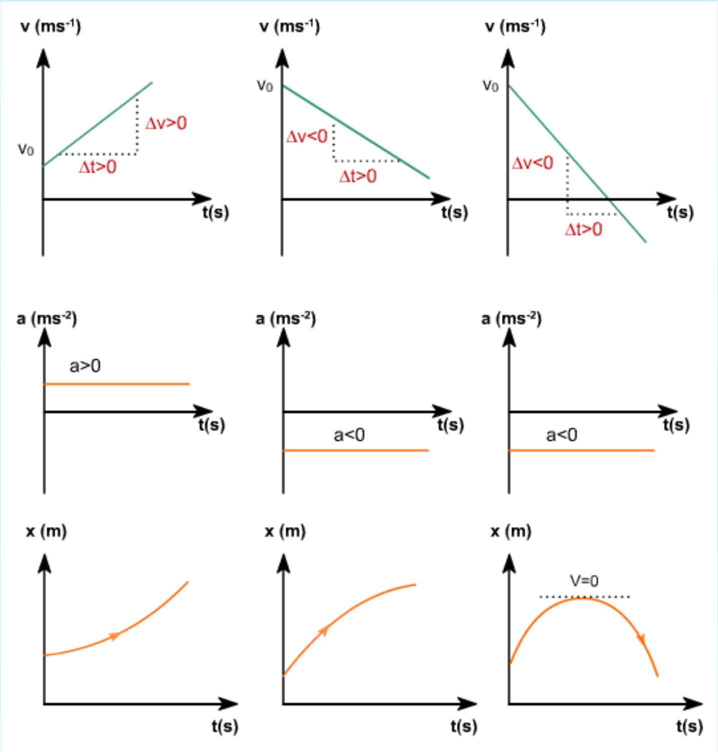
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}_x(t)}{dt}\hat{\imath} + \frac{d\vec{v}_y(t)}{dt}\hat{\jmath}$$
$$\boldsymbol{\vec{a}(t) = (5\hat{\imath})en\ cm/s^2}$$

Al no estar en función de una variable podemos considerar la función constante por lo tanto todos los valores serian iguales.

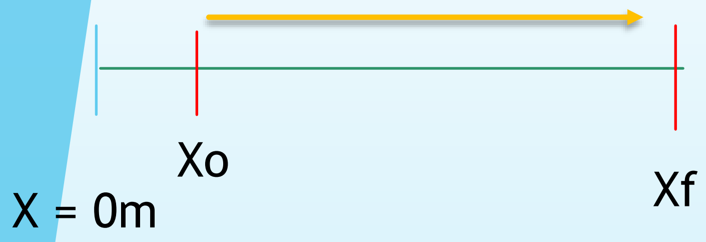
Movimiento Rectilíneo uniformemente Variado(MRUV)

- Movimiento de cinemática que considera como condición que la aceleración del móvil es constante para el movimiento. $\vec{a}_{media} = \vec{a}_{ins} = constante\ diferente\ de\ cero.$

- $\vec{a} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_o}{\Delta t}$ *por lo tanto se tomara* $\Delta t \rightarrow t$ *para las expresiones pero siempre son tiempos de intervalo*
- $\vec{a}t = \vec{v}_f - \vec{v}_o$
- $\vec{v}_f = \vec{v}_o + \vec{a}t$
- $\vec{r}_f = \vec{r}_o + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$
- $v_f^2 = v_o^2 + 2\vec{a}\Delta\vec{r}$
- **Velocidad promedio** $\overline{v} = \frac{\vec{v}_f + \vec{v}_o}{2}$
- $\Delta\vec{r} = \frac{(\vec{v}_f + \vec{v}_o)t}{2}$



Un antílope con aceleración constante cubre la distancia de 70.0 m entre dos puntos en 7.00 s. Su rapidez al pasar por el segundo punto es 15.0 m/s. *a*) ¿Qué rapidez tenía en el primero? *b*) ¿Qué aceleración tiene?



a) $\Delta\vec{r} = \frac{(\vec{v}_f+\vec{v}_o)t}{2}$ **se despeja para la velocidad inicial**

$$\frac{2\Delta\vec{r}}{t} = \vec{v}_f + \vec{v}_o \qquad \vec{v}_o = \frac{2\Delta\vec{r}}{t} - \vec{v}_f \qquad \vec{v}_o = \frac{2(70)}{7} - 15 = 5\frac{m}{s}\,\hat{\imath}$$

b) Para la aceleración emplearemos los datos anteriores

$$\vec{v}_f = \vec{v}_o + \vec{a}t$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_o}{t} = \frac{15-5}{7} = 1.4285 \approx 1.43m/s^2\hat{\imath}$$