# 1.1 El concepto de límite

## INTRODUCCIÓN

En la matemática actual, el estudio del cálculo se inicia con el concepto de límite; el cual permite posteriormente definir la derivada y la integral.

Los límites se utilizan principalmente para analizar el comportamiento de una función en determinadas condiciones de su variable independiente. Por ejemplo, si queremos saber que está sucediendo con $f(x)$ cuando el valor de $x$ se aproxima al número $a$, debemos calcular el límite

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

En ocasiones debemos utilizar límites para resolver problemas prácticos. Por ejemplo, suponga que la función $N(t) = \dfrac{200}{4 + 21e^{-0.1t}}$ se utiliza para estimar el número de piezas que un nuevo empleado puede confeccionar por día, a los $t$ días de trabajo. Al supervisor de la fábrica le interesa saber cuántas piezas puede llegar a confeccionar un empleado con mucho tiempo de servicio. Para ello debe calcular el límite

$$\lim_{t \to \infty} \frac{200}{4 + 21e^{-0.1t}}$$

En esta unidad se calculan límites de funciones utilizando su representación gráfica o utilizando una tabla de valores. Estos enfoques son muy importantes pues permiten conceptualizar el concepto de límite y a la vez calcular el valor del mismo de forma sencilla.

## OBJETIVOS

Al finalizar el estudio y desarrollar las actividades de ésta unidad el estudiante estará en capacidad de

- Estimar el valor de un límite usando una tabla de valores.
- Estimar el valor de un límite utilizando la gráfica de la función.
- Reconocer las diferentes formas que pueden tener los límites.

## El concepto de límite

La expresión

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Se lee "**El límite cuando *x* tiende a *a* de la función** $f(x)$ **es *L*"**, y significa que los valores de $f(x)$ se encuentran muy cerca del número $L$ cuando los valores de $x$ se encuentran muy cerca del número $x = a$ .

En otras palabras, esto quiere decir que mientras más cerca se encuentre $x$ del número $a$ ya sea por la izquierda o por la derecha de $a$, las imágenes $f(x)$ están muy cerca del número $y = L$ . La figura 1 ilustra el concepto de límite

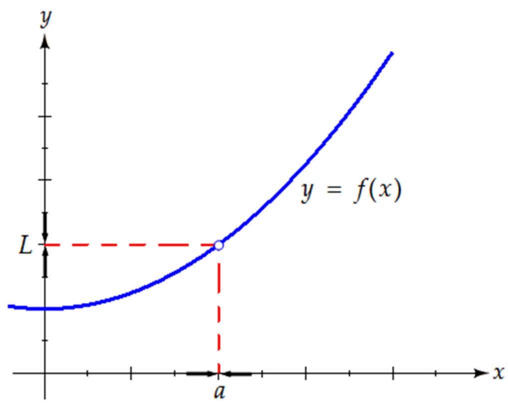



**Figura 1**

Observe que la expresión $x$ tiende al número $a$ no significa que $x = a$, es más $f(a)$ puede estar definida o puede no estarlo. En la figura 1 el pequeño círculo vacio significa que $f(a)$ no está definida.

Por ejemplo en la figura 2, se muestra la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

donde puede observarse que $f(2)$ no está definida ya que la división entre cero no es posible; sin embargo cuando $x$ se aproxima al número 2, $f(x)$ se aproxima al número 12, es decir que $\lim_{x \to 2} f(x) = 12$.

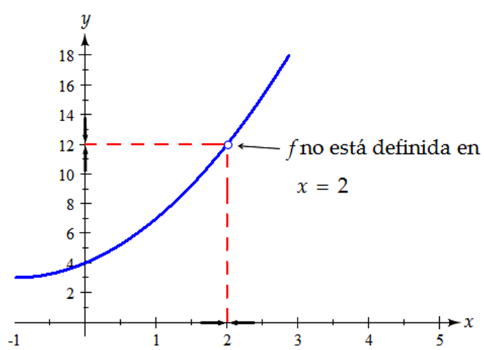



**Figura 2**

## Limites laterales

En algunos casos no es posible utilizar directamente la definición presentada anteriormente, esto se debe a que algunas funciones tienen un comportamiento cuando $x$ se aproxima al número $a$ por la derecha y otro cuando $x$ se aproxima a $a$ por la izquierda. Para calcular un límite en éstas funciones se usan los conceptos de límite por la derecha y límite por la izquierda.

### Límite por la derecha

La expresión

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Se lee "**El límite cuando $x$ tiende a $a$ por la derecha de la función $f(x)$ es $L$**", y significa que los valores de $f(x)$ se encuentran muy cerca del número $L$ cuando los valores de $x$ se encuentran muy cerca del número $x = a$ por la derecha de $a$. La figura 3 ilustra gráficamente el concepto de límite por la derecha. Note que acercase por la derecha es hacerlo con valores de $x$ mayores que $a$.

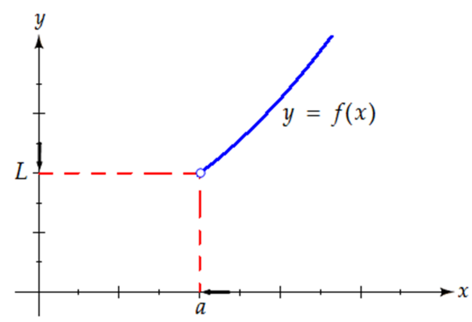



**Figura 3**

Observe que $f(a)$ puede estar definida o bien no estarlo. En la figura 3 el pequeño círculo vacio indica que $f(a)$ no está definida. Por otro lado al calcular el límite por la derecha no interesa lo que sucede con la función cuando $x$ se aproxima al número $a$ por la izquierda.

## Límite por la izquierda

La expresión

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Se lee "**El límite cuando $x$ tiende a $a$ por la izquierda de la función $f(x)$ es $L$**", y significa que los valores de $f(x)$ se aproximan al número $L$ cuando los valores de $x$ se aproximan al número $x = a$ por la izquierda de $a$. La figura 4 ilustra gráficamente el concepto de límite por la izquierda. Note que acercarse por la izquierda es hacerlo con valores de $x$ menores que $a$.

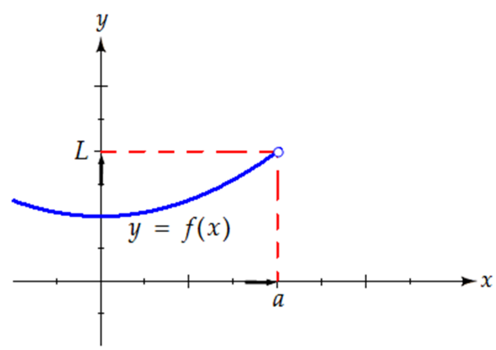



**Figura 4**

## Relación entre la definición de límite y los límites laterales

$$\text{Si} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L \ \text{ y } \ \lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad \text{entonces} \quad \lim_{x \to a} f(x) = L$$

Esta propiedad expresa que si los límites por la izquierda y por la derecha tienen el mismo valor cuando $x$ se aproxima a $a$ entonces el límite cuando $x$ tiende a $a$ también existe y es igual a $L$.

La figura 5 muestra la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad x \le 2 \\ 8 - x^2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

en donde se observa que cuando $x$ se aproxima a 2 por la derecha $f(x)$ se aproxima a 4, es decir que $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$. Por el otro lado, cuando $x$ se aproxima a 2 por la izquierda $f(x)$ se está aproximando a 4, es decir que $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$. Como el límite por la izquierda y el límite por la derecha son ambos iguales a 4 se concluye que $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$.

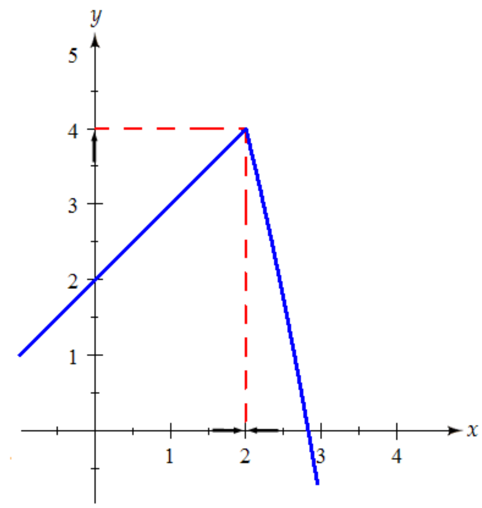



**Figura 5**

Esta propiedad de los límites también se puede usar para concluir que si el límite cuando $x$ tiende a $a$ por la izquierda no es igual que el límite cuando $x$ tiende a $a$ por la derecha entonces el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $a$ no existe, es decir que

$$\text{Si} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{entonces} \quad \lim_{x \to a} f(x) \ \text{no existe.}$$

La figura 6 muestra la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 3 & \text{si} \quad x < 2 \\ x - 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

donde puede observarse que $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5$, mientras que $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$. Como el límite por la izquierda no es igual que el límite por la derecha se concluye que $\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe.

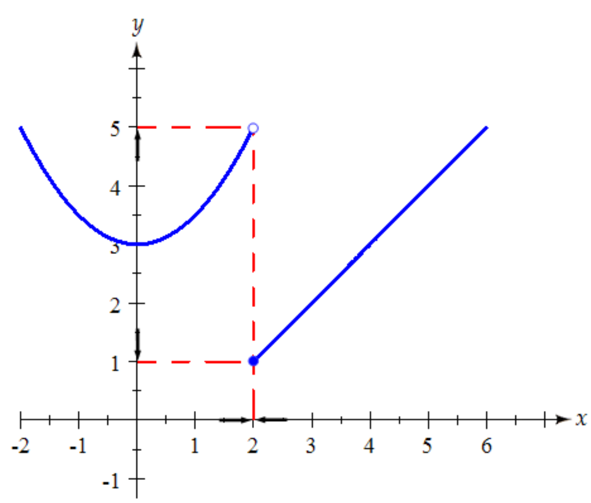



**Figura 6**

## Límites infinitos

La expresión

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Se lee "**El límite cuando *x* tiende a *a* en la función** $f(x)$ **es infinito**", y significa que los valores de $f(x)$ están creciendo sin límite cuando los valores de $x$ se aproximan al número $x = a$ por la derecha o por la izquierda. Decir que el límite es infinito no significa que el límite existe, más bien es una forma de explicar que el límite no existe porque los valores de $f(x)$ son infinitamente grandes. La figura 7 muestra la gráfica de una función con límite infinito en $x = a$.

La recta $x = a$ recibe el nombre de **asíntota vertical** de la gráfica de la función $f(x)$,

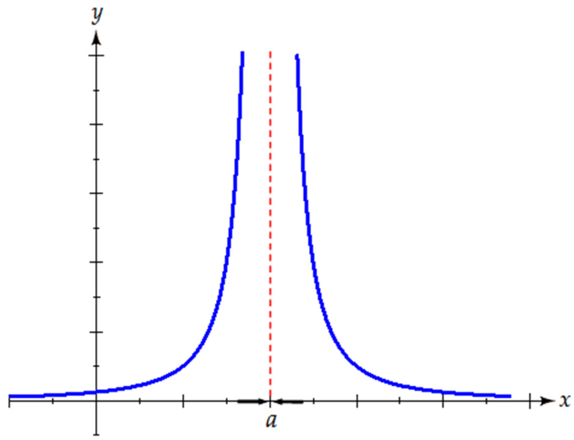



**Figura 7**

En forma equivalente, la expresión $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, significa que $f(x)$ toma valores negativos muy grandes cuando $x$ se encuentra cerca de $x = a$. Otros límites infinitos son

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

Debe estar claro que ninguno de estos límites existe, pero por medio de ellos podemos saber el comportamiento de la función cuando $x$ tiende al número $a$. Por otro lado, cuando se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ no existe}$$

significa que el límite por la izquierda no es igual que el límite por la derecha.

## Límites al infinito

La expresión

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Se lee "**El límite cuando *x* tiende al infinito de la función** $f(x)$ **es *L***", y significa que los valores de $f(x)$ se aproximan al número $L$ cuando los valores de $x$ crecen sin límite. La figura 8 muestra geométricamente el concepto de límite al infinito

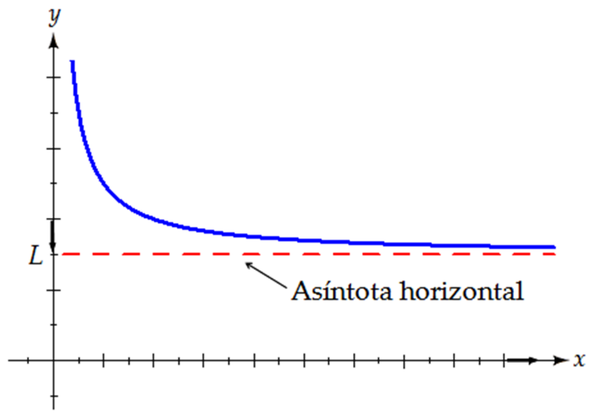



**Figura 8**

La recta horizontal $y = L$, recibe el nombre de asíntota horizontal.

En forma equivalente la expresión

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ están muy cerca del número $L$ cuando $x$ toma valores negativos muy grandes.

## Sugerencias para el estudiante

Para calcular en forma aproximada el límite

$$\lim_{x \to c} f(x)$$

Puede utilizar el método gráfico o bien una tabla de valores

**Método gráfico:**

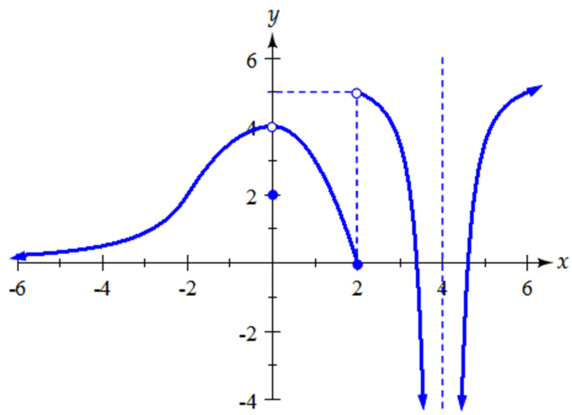
Puede usarlo cuando se conoce la gráfica de la función o bien cuando se dispone de una computadora y de un programa para dibujar la gráfica.

**Tabla de valores:**

Si no dispone de una gráfica o bien la representación gráfica no es apropiada para estimar el límite, puede utilizar una calculadora para construir una tabla de valores y utilizar la misma para estimar el valor del límite.

## **Ejemplo 1:** Cálculo de límites en una gráfica

La figura siguiente muestra la gráfica de una función *f*. En este ejemplo se utiliza la gráfica para calcular lo que se indica en cada inciso:




**a.** $f(0)$

**b.** $\lim_{x \to 0} f(x)$

**c.** $\lim_{x \to 2^-} f(x)$

**d.** $\lim_{x \to 2^+} f(x)$

**e.** $\lim_{x \to 2} f(x)$

**f.** $f(2)$

**g.** $\lim_{x \to 4^-} f(x)$

**h.** $\lim_{x \to 4^+} f(x)$

**i.** $\lim_{x \to 4} f(x)$

**j.** $f(4)$

**k.** $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

**l.** $\lim_{x \to \infty} f(x)$

## Solución

**a.** Para calcular $f(0)$ observe si en la gráfica hay alguna imagen asignada a $x = 0$, vea que hay un punto sólido en $y = 2$, lo que significa que la imagen asignada es $f(0) = 2$ .

**b.** Para calcular $\lim_{x \to 0} f(x)$ observe que cuando $x$ se aproxima a 0 tanto por la derecha como por la izquierda los valores de $f(x)$ se aproximan a 4. Note que $x$ se aproxima a 0, pero no es igual a 0. Por lo que se concluye que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 4$$

**c.** Para calcular $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ debe observar el comportamiento de la gráfica cuando $x$ se aproxima a 2 por el lado izquierdo, donde puede verse que la función está descendiendo hacia el valor $y = 0$, de donde se tiene que

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0$$

**d.** Para calcular $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ observe que a medida que $x$ se aproxima a 2 por la derecha, los valores de $f(x)$ están aumentando y acercándose al valor $y = 5$. Observe también que la gráfica tiene un vacío en ese punto lo que significa que $f(2) \neq 5$, pero eso no cambia el hecho que $f(x)$ se aproxima a 5 cuando $x$ se aproxima a 2 por la derecha, por lo que

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 5$$

**e.** Para calcular $\lim_{x \to 2} f(x)$ utilizamos los resultados de los incisos anteriores, como $\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$ se concluye que

$$\lim_{x \to 2} f(x) \quad \text{no existe}$$

**f.** Para calcular $f(2)$ debe buscar un punto sólido en la gráfica (si este existe) en $x = 2$. Puede verse que la imagen asignada es $y = 0$, por lo que

$$f(2) = 0$$

**g.** Para calcular $\lim_{x \to 4^-} f(x)$ observe que a medida que $x$ se aproxima a 4 por la izquierda, los valores de $f(x)$ son negativos cada vez más grandes. Es decir que la función está tendiendo al infinito negativo, de donde se concluye que

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$$

**h.** Cuando $x$ se aproxima a 4 por la derecha, se observa que los valores de $f(x)$ tienden al infinito negativo por lo que se concluye que

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$$

**i.** Para calcular $\lim_{x \to 4} f(x)$ nos apoyamos en los límites laterales calculados en los incisos anteriores, como $\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$, se concluye que

$$\lim_{x \to 4} f(x) = -\infty$$

Ninguno de los 3 límites calculados en los incisos anteriores existe, decir que el límite es $-\infty$, es una forma de expresar matemáticamente como se está comportando la función. Para que un límite exista debe ser un número real.

**j.** $f(4)$ no está definida ya que al observar la gráfica no hay un punto asignado a $x = 4$.

**k.** Para calcular $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ se debe observar el comportamiento de la función cuando $x$ toma valores negativos muy grandes. Como puede verse en la gráfica, cuando $x$ tiende a $-\infty$, los valores de $f(x)$ se están acercando a 0. Por lo que se obtiene

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

**l.** Al observar la gráfica notamos que cuando $x$ toma valores muy grandes, los valores de $f(x)$ están aumentando sin límite, la flecha apuntando hacia arriba nos confirma la observación, por lo que se concluye que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

## **Ejemplo 2:** Cálculo de límites usando tablas de valores

En este ejemplo se utiliza una tabla de valores apropiada para calcular cada uno de los límites que siguen

**a.** $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ **b.** $\lim_{x \to -3^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 9}$ **c.** $\lim_{x \to \infty} \frac{x - 3x^2}{2x^2 + 5}$

## Solución

**a.** Para calcular el límite $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ utilizando una tabla de valores, se debe elegir números que se aproximen a $x = 2$ tanto por la izquierda como por la derecha. Para este caso se usarán los números por la izquierda: $1.5, 1.9, 1.99, 1.999$ y los números por la derecha: $2.5, 2.1, 2.01, 2.001$. Los números elegidos son arbitrarios y la única condición que deben cumplir es la de acercarse a 2 tanto por la derecha como por la izquierda.

Ahora se evalúa la función $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ en cada uno de los valores, por ejemplo, al evaluar para $x = 1.99$ se obtiene

$$f(1.99) = \frac{(1.99)^3 - 8}{(1.99) - 2} = 11.94$$

La tabla siguiente muestra los resultados obtenidos al evaluar la función en todos los valores

| $x$ | 1.5 | 1.9 | 1.99 | 1.999 | 2.001 | 2.01 | 2.1 | 2.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 9.25 | 11.41 | 11.94 | 11.994 | 12.006 | 12.06 | 12.61 | 15.25 |

La tabla nos muestra que los valores de $f(x)$ se están aproximando a 12 cuando x se aproxima a 2, tanto por la izquierda como por la derecha. Razón por la cual se concluye que

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = 12$$

**b.** Para calcular $\lim_{x \to -3^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 9}$ usando una tabla de valores se debe construir una tabla evaluando valores por la derecha de $x = -3$, por ejemplo, un valor a la derecha de -3 es -2.9. Al evaluarlo en la función se obtiene

$$f(-2.9) = \frac{(-2.9)^2 + 1}{(-2.9)^2 - 9} = -15.949$$

Una tabla de valores apropiada para calcular este límite es la siguiente

| $x$ | -2 | -2.5 | -2.9 | -2.99 | -2.999 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -1 | -2.63 | -15.949 | -165.94 | -1665.9 |

En la tabla se observa que al aproximarse x a -3 por la derecha los valores de $f(x)$ son números negativos cada vez más grandes, por lo que se concluye que

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 9} = -\infty$$

**c.** Para calcular $\lim_{x \to \infty} \frac{x - 3x^2}{2x^2 + 5}$ se debe construir una tabla de valores en donde x tenga valores cada vez más grandes, ya que tiende al infinito positivo, por ejemplo, si evaluamos en $x = 100$ se tiene

$$f(100) = \frac{(100) - 3(100)^2}{2(100)^2 + 5} = -1.495$$

La tabla siguiente muestra el comportamiento de la función cuando *x* tiende al infinito

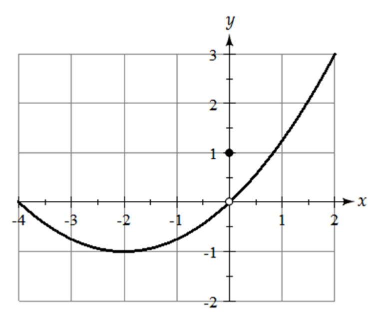
| $x$ | 10 | 100 | 1,000 | 10,000 | 100,000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -1.414 | -1.495 | -1.4995 | -1.4999 | -1.5000 |

De la tabla anterior se observa claramente que cuando x tiende al infinito, $f(x)$ tiende al valor -1.5, es decir que

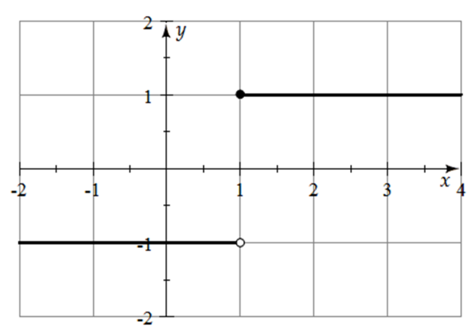
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x - 3x^2}{2x^2 + 5} = -1.5$$

## Ejercicios de la sección 1.1

**1.** La figura muestra la gráfica de una función *f*. ¿Cuál es el valor de $\lim_{x \to 0} f(x)$ ?

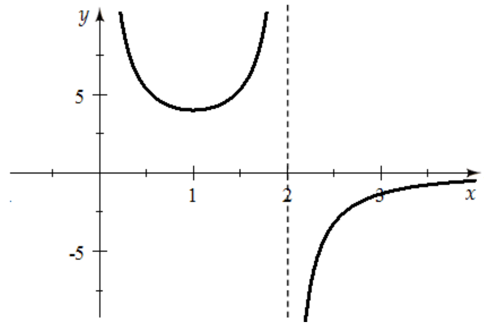


**2.** La figura muestra la gráfica de una función *f*. ¿Cuál es el valor de $\lim_{x \to 1} f(x)$ ?



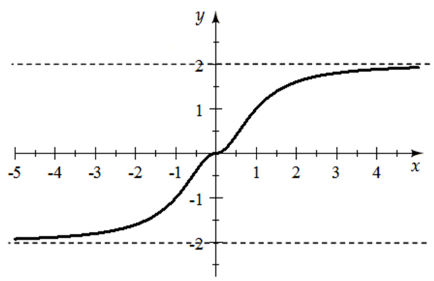
**3.** En la figura de la pregunta anterior, ¿Cuál es el valor de $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

**4.** La figura muestra la gráfica de una función *f*, utilícela para calcular el límite siguiente: $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

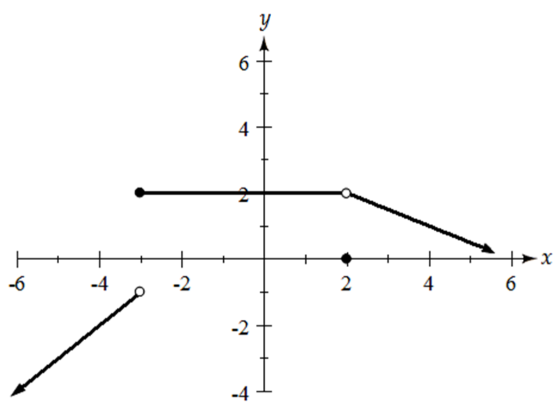



**5.** En la figura de la pregunta anterior, ¿cuál es el valor del límite $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

**6.** La figura siguiente muestra la gráfica de una función *f*. ¿Cuál es el valor de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$




**7.** La figura muestra la gráfica de una función *f*. Calcule lo que se indica




**a.** $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$

**b.** $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$

**c.** $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$

**d.** $f(-3)$

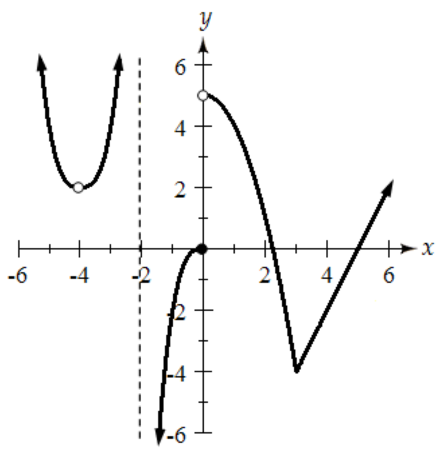
**e.** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

**f.** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

**g.** $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

**h.** $f(2)$

**8.** La figura muestra la gráfica de una función *f*. Calcule lo que se indica.




**a.** $\lim_{x \to -4} f(x)$

**b.** $f(-4)$

**c.** $\lim_{x \to -2^-} f(x)$

**d.** $\lim_{x \to -2^+} f(x)$

**e.** $\lim_{x \to -2} f(x)$

**f.** $f(-2)$

**g.** $\lim_{x \to 0^-} f(x)$

**h.** $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

**i.** $\lim_{x \to 0} f(x)$

**j.** $f(0)$

**k.** $\lim_{x \to 3} f(x)$

**l.** $\lim_{x \to \infty} f(x)$

**9.** Utilizar una calculadora para completar la tabla de valores y utilizarla para estimar el límite indicado. Si dispone de una computadora utilice un programa para dibujar la gráfica de la función, con el fin de confirmar su resultado

**a.** $\lim_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2 - x - 2}$

| $x$ | 1.9 | 1.99 | 1.999 | 2.001 | 2.01 | 2.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |

**b.** $\lim_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{6-x} - 3}{x+3}$

| $x$ | -3.1 | -3.01 | -3.001 | -2.999 | -2.99 | -2.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |

**c.** $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

| $x$ | -0.1 | -0.01 | -0.001 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |

**10.** En los ejercicios siguientes se da una función $f$ y un valor de $c$. Utilizar una calculadora para completar la tabla mostrada y utilizarla para calcular $\lim_{x \to c^-} f(x)$ , $\lim_{x \to c^+} f(x)$ y $\lim_{x \to c} f(x)$ . Si dispone de una computadora utilice un programa para dibujar la gráfica de la función, con el fin de confirmar su resultado.

**a.** $f(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{si} \quad x \le 2 \\ 2x + 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$ , $c = 2$

| $x$ | 1.9 | 1.99 | 1.999 | 2.001 | 2.01 | 2.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |

**b.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$ , $c = 3$

| $x$ | 2.9 | 2.99 | 2.999 | 3.001 | 3.01 | 3.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |

**c.** $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x^2}$ , $c = 0$

| $x$ | -0.1 | -0.01 | -0.001 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |

**11.** En los ejercicios siguientes utilizar una calculadora para completar la tabla. Usar la tabla para estimar el límite cuando $x$ tiende a infinito o a menos infinito según corresponda. Si dispone de una computadora utilice un programa para dibujar la gráfica de la función, con el fin de confirmar su resultado.

**a.** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - 2x^2}{x^2 - x - 2}$

| $x$ | 10 | 100 | 1,000 | 10,000 | 100,000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | |

**b.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x - 2}{x^2 + x}$

| $x$ | -10 | -100 | -1,000 | -10,000 | -100,000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | |

**c.** $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{200}{4 + 21e^{-0.1t}}$

| $x$ | 10 | 100 | 1,000 | 10,000 | -100,000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ | | | | | |

**12.** Utilizar una tabla de valores para calcular

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{|x - 2|}{x - 2}$$

**13.** Utilizar una tabla de valores para calcular

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2 - x - x^3}{4x^3 + 27}$$