Ej. La cantidad N(t) de personas de una comunidad bajo la influencia de un determinado anuncio está gobernada por la ecuación logística. Inicialmente se tienen 500 personas que han observado el anuncio y al día siguiente se tienen 1000 personas que han observado el anuncio. Determine una relación o una ecuación. Si se predice que habrá un límite de 50,000 personas de la comunidad que verán el anuncio.

$N(0) = 50 \qquad N(1) = 1000 \qquad M = 50000$

N = personas que han visto el anuncio

M − N = " " no " " " "

y

$50000 - N$

$$\frac{dN}{dt} = k\,N(50000 - N)$$

$$\int \frac{dN}{N(50000-N)} = \int k\,dt$$

$$\frac{1}{N(50000-N)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{50000-N}$$

$N = 0 \qquad N = 50000$

$$A = \frac{1}{50000-N} = \frac{1}{50000-0} = \frac{1}{50000}$$

$$B = \frac{1}{N} = \frac{1}{50{,}000}$$

$$\frac{1}{50000}\int \frac{dN}{N} + \frac{1}{50000}\int \frac{dN}{50000-N} = \int k\,dt$$

$$\frac{1}{50000}\ln N - \frac{1}{50000}\ln 50000 - N = kt + C$$

$$\ln N - \ln(50000 - N) = 50000kt + 50000C$$

$$\cancel{e^{\ln}} \frac{N}{50000 - N} = e^{50000kt + C}$$

$$\frac{N}{50000 - N} = e^{50000kt} \cancel{e^{C}}$$

$$\frac{N}{50000 - N} = Ce^{50000kt}$$

$$N(0) = 500$$

$$\frac{500}{50000 - 500} = Ce^{\cancel{50000k(0)}} \quad \rightarrow C = \frac{50\cancel{0}}{4950\cancel{0}} = \frac{5}{495}$$

$$C = \frac{1}{99}$$

$$\frac{N}{50000 - N} = \frac{1}{99} e^{kt}$$

$$N(1) = 1000$$

$$\frac{1000}{50000 - 1000} = \frac{1}{99} e^{50000k(1)}$$

$$\frac{(1000)(99)}{49000} = e^{50000k}$$

$$\ln \frac{99}{49} = \cancel{\ln e}^{50000k} \quad \rightarrow \quad k = \frac{\ln 99/49}{50000} = 0.00001406$$

$$\frac{N}{50000 - N} = \frac{1}{99} e^{(50000)(0.00001406)t}$$

$$\frac{N}{50000 - N} = \frac{1}{99} e^{0.7033t}$$

$$99N = 50000e^{0.7033t} - Ne^{0.7033t}$$

$$N(99 - e^{0.7033t}) = 50000e^{0.7033t}$$

$$N = \frac{50000\,e^{0.7033t}}{99 - e^{0.7033t}}$$

Ecuaciones de orden superior

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x)$$

Sujeta a: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, ... $y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$

→ Ecuaciones homogeneas → $f(x) = 0$

→ Ecuaciones no homogeneas → $f(x) \neq 0$

Existencia de una solución única

Sean $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, ... $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $g(x)$ $\boxed{\text{continuas}}$ sobre un intervalo I y sea $a_n(x) = 0$ para toda x en este intervalo, si $x = x_0$ es cualquier punto en este intervalo, entonces una solución $y(x)$ del problema de valores iniciales, existe sobre el intervalo y es única.

Principio de superposición

Sean $y_1, y_2, \ldots y_n$ soluciones de la ecuación diferencial de n-esimo orden sobre un intervalo I. Entonces la combinación lineal

$$\rightarrow y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots c_k y_k(x)$$

donde las c_i, $i = 1, 2, 3 \ldots k$ son constantes arbitraria también es una solución sobre el intervalo.

Dependencia / independencia lineal

Se dice que un conjunto de funciones $f_1(x)$ $f_2(x)$, ... $f_n(x)$ es linealmente dependiente sobre un intervalo I si existen constantes $c_1, c_2, \ldots c_n$ no todas cero, tales que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0$$

para todo x en el intervalo. Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente, se dice que es linealmente independiente.

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$$

$$c_2 f_2(x) = -c_1 f_1(x)$$

$$f_2(x) = \left(\frac{-c_1}{c_2}\right) f_1(x)$$

→ $f_2(x)$ es un multiplo constante de $f_1(x)$

⇓

linealmente dependiente.

Wronskiano

Suponga que cada una de las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$ ... $f_n(x)$ tienen al menos $n-1$ derivadas. El determinante

$$W(f_1, f_2, \ldots f_{n-1}) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ f_1^{n-1} & f_2^{n-1} & \cdots & f_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Determinante → cofactores $(-1)^{i+j}$

Criterio

Sean $y_1, y_2, \ldots y_n$ n soluciones de la ecuación diferencial lineal homogenea de n-esimo orden sobre el intervalo I, el conjunto de soluciones es linealmente independiente en I, si y solo si

$$W(y_1, y_2 \ldots y_n) \neq 0 \quad \text{para todo } x \text{ en } I.$$

Ej. Determine si el conjunto de funciones es linealmente independiente.

$f_1(x) = x$ $\qquad$ $f_2(x) = x^2$ $\qquad$ $f_3(x) = 4x - 3x^2$

$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 & 4x-3x^2 \\ 1 & 2x & 4-6x \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$x[2x(-6) - 2(4-6x)] - x^2[-6 - 0(4x-3x^2)] + (4x-3x^2)((1)(2) - 2x(0))$$

$$x[-12x - 8 + 12x] + 6x^2 + 8x - 6x^2$$

$$W = -8x + 6x^2 + 8x - 6x^2$$

$\boxed{W = 0}$ $\rightarrow$ las funciones son linealmente dependientes.

Ecuaciones homogeneas

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

$$\Downarrow$$

2do orden

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

$a_2(x) = a$ $\qquad$ $a_1(x) = b$ $\qquad$ $a_0(x) = c$

$$\rightarrow a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a\frac{dy}{dx} + by = 0$$

$$a\frac{dy}{dx} = -by \rightarrow \frac{dy}{y} = \left(-\frac{b}{a}\right) dx$$

m

$$\int \frac{dy}{y} = \int m\,dx$$

$$\cancel{e}^{\ln y} = e^{mx+C} \rightarrow y = e^{mx}\cancel{e}^{C}$$

C

$$y = Ce^{mx} \rightarrow C = 1$$

$$\boxed{y = e^{mx}}$$

$$y' = me^{mx}$$

$$y'' = m^2 e^{mx}$$

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$$

$$e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$am^2 + bm + c = 0 \rightarrow$$

Caso 1: raices no repetidas
Caso 2: raices repetidas
Caso 3: raices reales y comple,

m_1 y m_2

Caso 1 raices no repetidas

m_1 y m_2

$$y(x) = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}$$

Caso 2: raice repetidas

$$m_1 = m_2$$

$$y(x) = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_1 x}$$

Caso 3 raices reales y complejas

$$m = \alpha \pm \beta i$$

$$y(x) = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha - \beta i)x}$$

Formula de Euler.

$$e^{\beta i} = \cos\beta + i \operatorname{sen}\beta$$

$$e^{-\beta i} = \cos\beta - i \operatorname{sen}\beta$$

$$\vdots$$

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \operatorname{sen}\beta x)$$

Ej. Encontrar la solución.

$$y'' - 10y' + 25y = 0$$

$$m^2 - 10m + 25 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} m & -5 \\ m & -5 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} -5m \\ -5m \\ \hline -10m \end{matrix}$$

$$(m-5)(m-5) = 0$$

$$\rightarrow m = 5 \quad , \quad m = 5$$

$$y(x) = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x}$$

Ej. Encontrar la solución.

$$12y'' - 5y' - 2y = 0$$

$$12m^2 - 5m - 2 = 0$$

$$\begin{array}{l|l} 4m + 1 & -8m \\ 3m - 2 & 3m \\ & \overline{-5m} \end{array}$$

$$(4m+1)(3m-2) = 0$$

$4m+1 = 0 \rightarrow m = -\frac{1}{4}$

$3m-2 = 0 \rightarrow m = \frac{2}{3}$

$$y(x) = C_1 e^{-1/4\,x} + C_2 e^{2/3\,x}$$

Ej. Resolver

$$2y'' + 2y' + y = 0$$

$$2m^2 + 2m + 1 = 0$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(2)(1)}}{2(2)} = -\frac{2}{4} \pm \frac{2}{4} i$$

$$m = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i$$

$\alpha = -\frac{1}{2}$ $\quad \beta = \frac{1}{2}$

$$y(x) = e^{-1/2x}\left(C_1 \cos \tfrac{1}{2}x + C_2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}x\right)$$

Ej. Resolver

$$y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$$

$$m^3 - 5m^2 + 3m + 9 = 0$$

$m_1 = -1$ $\quad m_2 = 3$ $\quad m_3 = 3$

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + C_3 x e^{3x}$$

Ej. Resolver

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

$$m^4 - 2m^2 + 1 = 0$$

$$\begin{matrix} m^2 & -1 \\ m^2 & -1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} -m^2 \\ -m^2 \\ \hline -2m^2 \end{matrix}$$

$$(m^2-1)(m^2-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \rightarrow m = 1,\ m = -1 \\ m^2 - 1 = 0 \rightarrow m = 1,\ m = -1 \end{cases}$$

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x} + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}$$

Ej Resolver.

$$y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0$$

$$y(0) = 1 \qquad y'(0) = 1 \qquad y''(0) = 1$$

$$m^3 + 2m^2 - 5m - 6 = 0$$

$$m_1 = -1 \qquad m_2 = 2 \qquad m_3 = -3$$

$$\rightarrow y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-3x}$$

$$1 = C_1 e^{-0} + C_2 e^{2(0)} + C_3 e^{-3(0)}$$

$$\boxed{1 = C_1 + C_2 + C_3}$$

$$y'(0) = 1$$

$$y' = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x} - 3C_3 e^{-3x}$$

$$1 = -C_1 \cancel{e^{-0}} + 2C_2 \cancel{e^{2(0)}} - 3C_3 \cancel{e^{-3(0)}}$$

$$\boxed{1 = -C_1 + 2C_2 - 3C_3}$$

$y''(0) = 1$

$$y'' = C_1 e^{-x} + 4C_2 e^{2x} + 9C_3 e^{-3x}$$

$$1 = C_1 \cancel{e^{-0}} + 4C_2 \cancel{e^{2(0)}} + 9C_3 \cancel{e^{-3(0)}}$$

$$\boxed{1 = C_1 + 4C_2 + 9C_3}$$

$C_1 = \frac{2}{3}$ $\quad C_2 = \frac{8}{15}$ $\quad C_3 = -\frac{1}{5}$

$$y(x) = \frac{2}{3} e^{-x} + \frac{8}{15} e^{2x} - \frac{1}{5} e^{-3x}$$

187, 209