Clase Física 1 08

Equilibrio de Cuerpos Rígidos

Elasticidad de Cuerpos Rígidos

Equilibrio de Cuerpos Rígidos

Definición: El **equilibrio mecánico** es un estado estacionario en el que se cumple alguna de estas dos condiciones:

1. Un sistema está en equilibrio mecánico cuando la suma de fuerzas y momentos sobre cada partícula del sistema es cero.

2. Un sistema está en equilibrio mecánico si su posición en el espacio de configuración es un punto en el que el gradiente de energía potencial es cero (0).

Condiciones para el equilibrio de un cuerpo rígido:

$$\sum \vec{F} = 0$$

Equilibrio de translación basado en un sistema inercial $\vec{\boldsymbol{a}} = \mathbf{0}$

$$\sum \vec{\tau}_o = 0$$

Equilibrio rotacional visto desde el eje de referencia del cuerpo rígido

en un punto determinado $\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{0}$

$$\sum \vec{F}_x = 0 \qquad \sum \vec{F}_y = 0$$

$$\sum \vec{F}_z = 0 \qquad \textit{se utilizara en mecanica 1}$$

Nota: en estos problemas solo se emplearan las sumatorias de fuerzas en X y Y mas la sumatoria de torques.

Centro de Masa(CM) y Centro de Gravedad(Cg)

El centro de masa(CM) es una posición definida en relación a un objeto o a un sistema de objetos. Es el promedio de la posición de todas las partes del sistema, ponderadas de acuerdo a sus masas.

Para objetos rígidos sencillos con densidad uniforme, el centro de masa se ubica en el centroide. Por ejemplo, el centro de masa de un disco uniforme estaría en su centro. Algunas veces el centro de masa no está en ningún lado sobre el objeto. El centro de masa de un anillo, por ejemplo, está ubicado en su centro, en donde no hay material.

En estos casos podremos establecer que en el centro de masa

También se localiza otro elemento importante que es el

Centro de Gravedad(Cg) que es el punto donde actúan los efectos

De la gravedad sobre la masa en cuestión y para los procesos el eje

De rotación se colocara en este punto del cuerpo rígido.

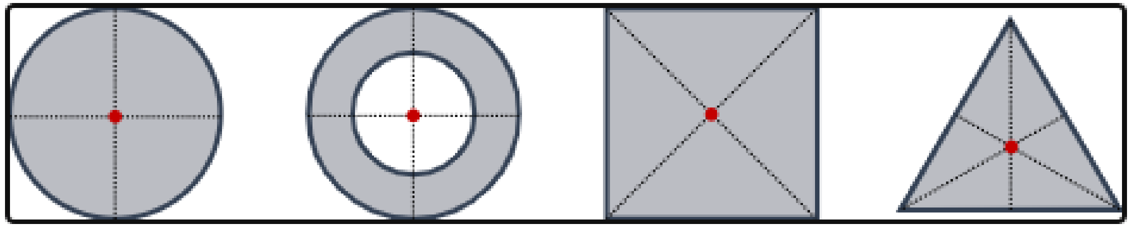


Figura 1: centro de masa para algunas formas geométricas (puntos rojos).

Calculo de centro de masa(CM):

En general, el centro de masa se puede encontrar con la suma vectorial ponderada de los vectores de posición, la cual apunta al centro de masa de cada objeto en un sistema. Una técnica rápida que nos permite evitar usar aritmética vectorial es encontrar, de manera separada, el centro de masa de los componentes a lo largo de cada eje. Es decir:

para las posiciones de los objetos a lo largo del eje x:

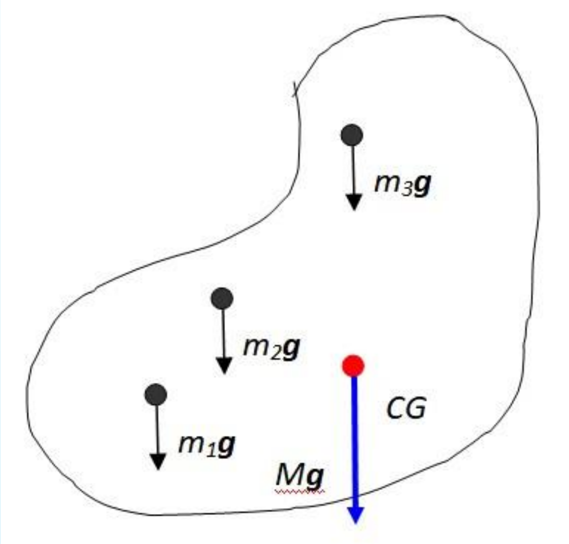
$$\mathrm{CDM}_x = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}$$

Y del mismo modo para el eje y:

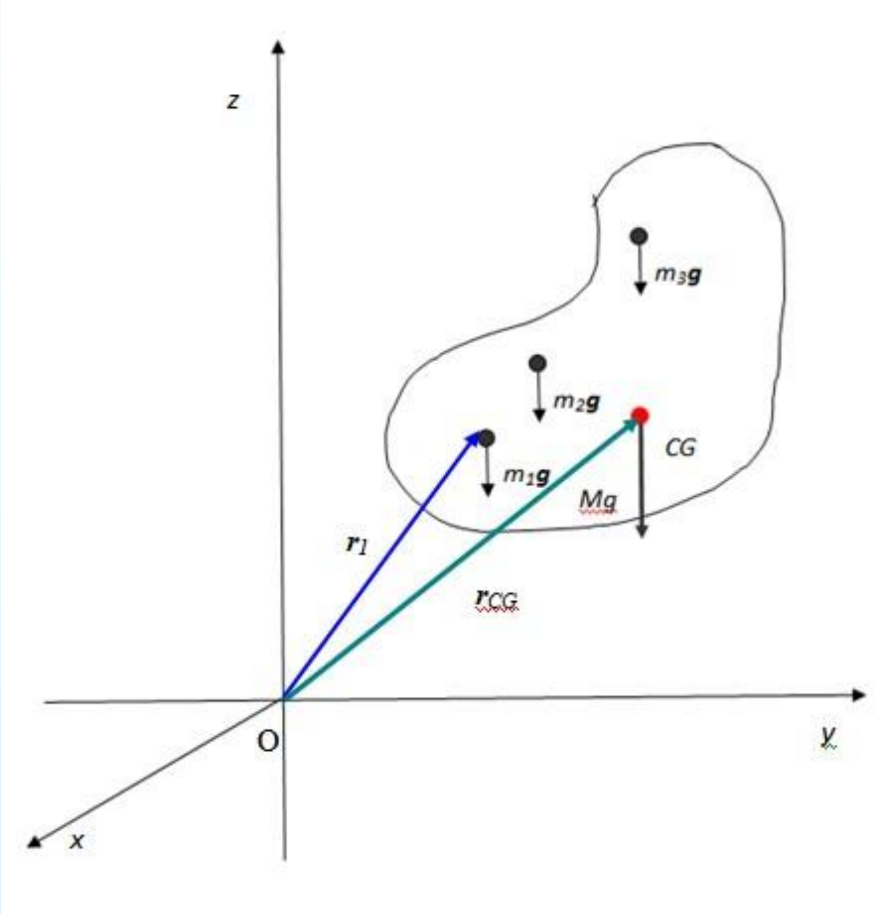
$$\mathrm{CDM}_y = \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}$$

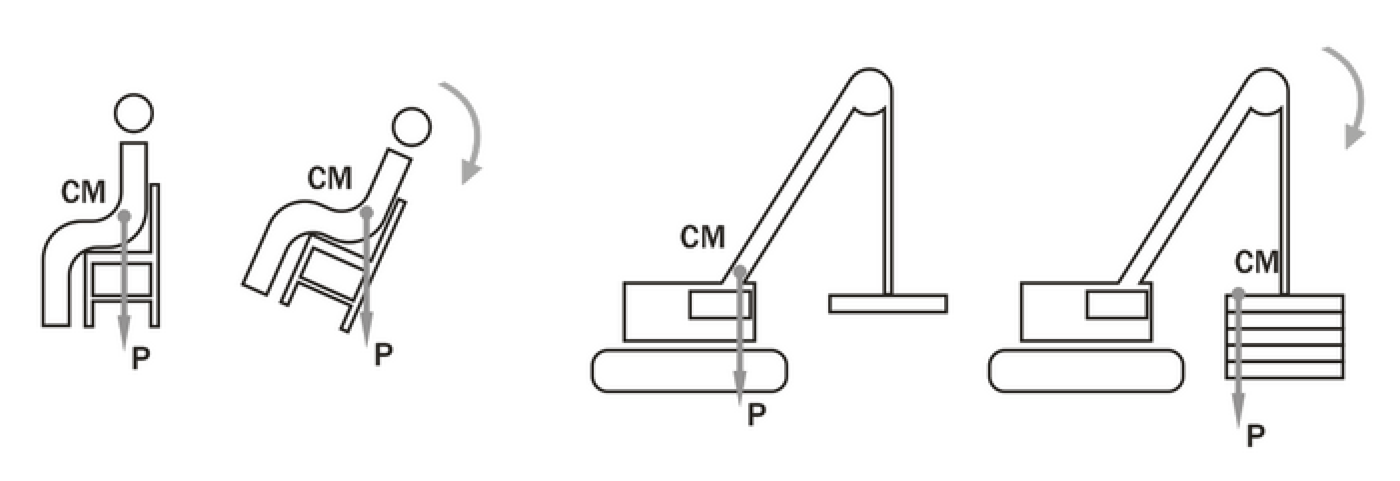
Consideraciones de los efectos de los centros de masa y gravedad en el estudio del cuerpo rígido:

Dado que el centro de gravedad esta situado en el centro de masa mientras que la distribución de la masa del cuerpo sea uniforme y la gravedad se comporte constante, de lo contrario estarán separados y se tendrán que establecer donde están ubicados



Consideraciones del vector de Centro de Gravedad

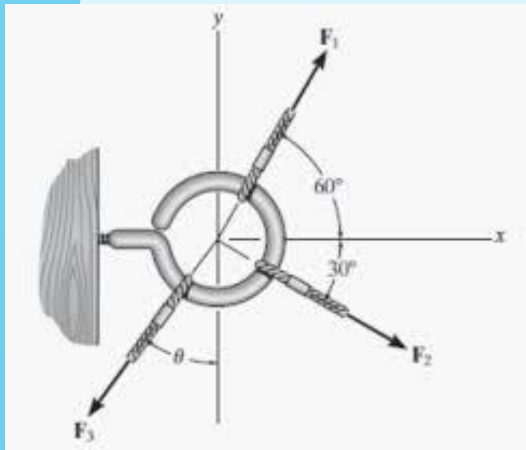


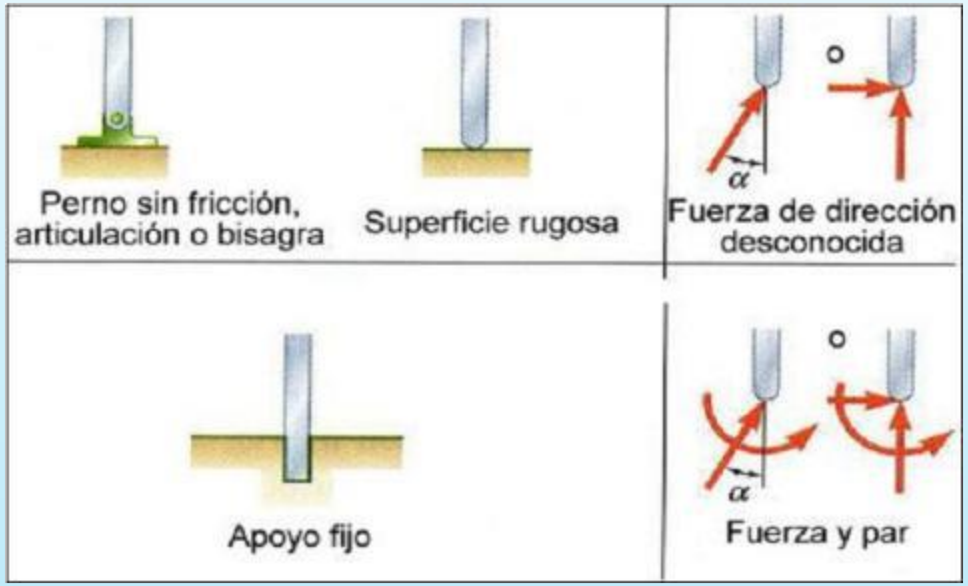


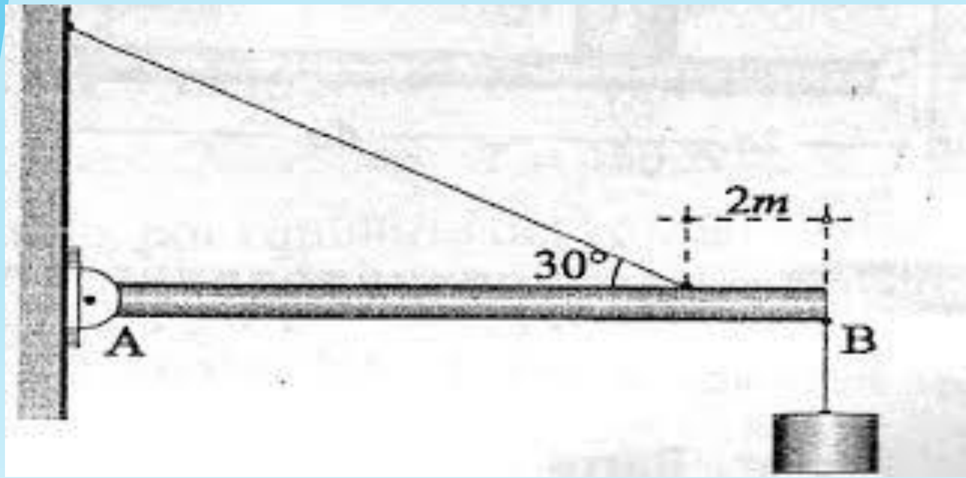
El centro de masa y gravedad pueden cambiar si cambia la configuración de la masa o la forma del cuerpo

Reacciones y apoyos de los Cuerpos Rígidos:

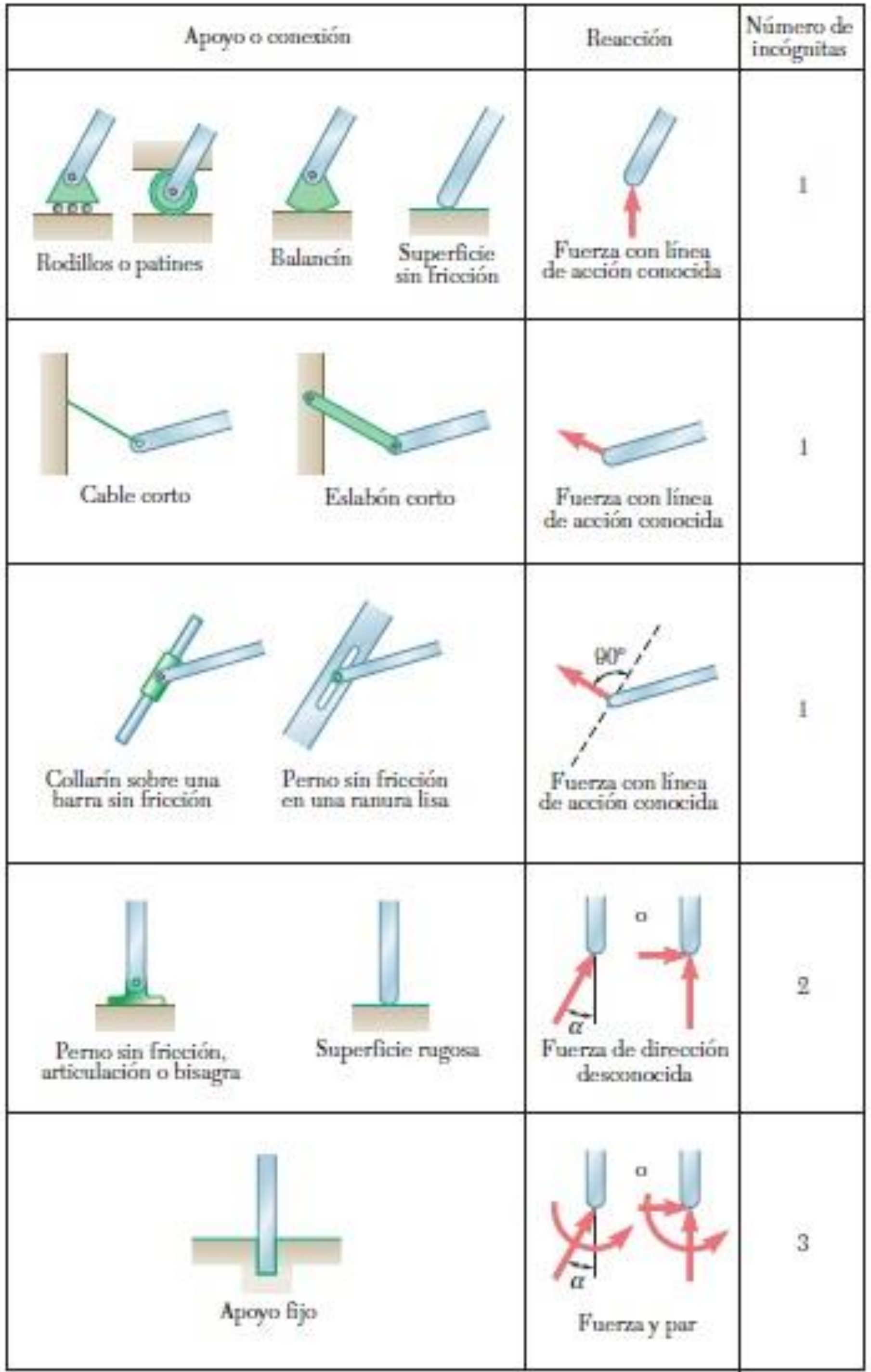
Son piezas que se colocan o unen a los cuerpos para permitirles crear la posición deseada, cada pieza o apoyo tendrá diferentes comportamientos de las fuerzas o posibles momentos de torsión que podrán crear.





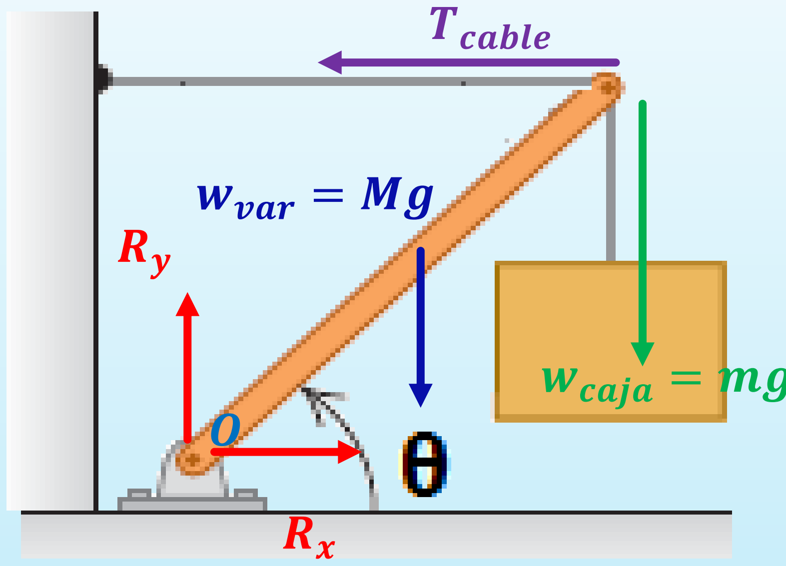


Ejemplos de reacciones de apoyos en el cuerpo rígido



Apoyo o conexión	Reacción	Número de incógnitas
Rodillos o patines; Balancín; Superficie sin fricción	Fuerza con línea de acción conocida	1
Cable corto; Eslabón corto	Fuerza con línea de acción conocida	1
Collarín sobre una barra sin fricción; Perno sin fricción en una ranura lisa	90° Fuerza con línea de acción conocida	1
Perno sin fricción, articulación o bisagra; Superficie rugosa	o α Fuerza de dirección desconocida	2
Apoyo fijo	o α Fuerza y par	3

La figura muestra una varilla delgada uniforme de M=10.0 Kg y L=2.00 m de longitud que pivota en su extremo inferior mediante una bisagra sin fricción; de su extremo superior está suspendido verticalmente mediante una cuerda ligera un bloque de masa m=20.0 Kg, la viga se mantiene en equilibrio formando un ángulo de θ=30.0^0 con la horizontal gracias a un segundo cable ligero horizontal que la sujeta de su extremo superior.



a) La magnitud de la tensión en el cable horizontal, en N es de:

b)La magnitud de la fuerza de reacción que la bisagra hace sobre la varilla, en N es de:

Resolución: En estos casos se realizara un diagrama de fuerzas sobre el cuerpo rígido con el que se realizara sumatorias de fuerzas horizontal y vertical, pero si en este caso no se puede resolver se tendrá que usar sumatoria de torques en el punto que se elimine la mayor cantidad de variables.

Nota: el valor del peso de la varilla se localiza a L/2 debido a que esta es uniforme.

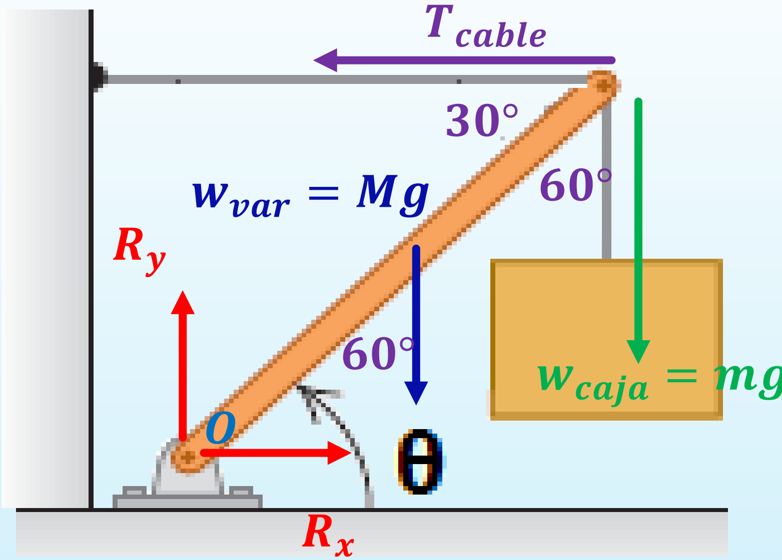
$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad R_x - T_{cable} = 0 \qquad R_x = T_{cable}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad R_y - w_{var} - w_{caja} = 0 \qquad R_y = w_{var} + w_{caja}$$

En este punto no se puede resolver el sistema por lo que se procede a realizar sumatoria de torques en el punto O ya que es el punto que se elimina la mayor cantidad de variables.

Partiendo del diagrama anterior(M=10kg, m= 20kg y L=2m)

$$\sum \tau_o = 0 \ \textit{positivo en sentido horario}$$



Tomar en consideración que el sentido no tiene tanta importancia en este caso

$$w_{var}\cancel{\left(\frac{L}{2}\right)} sen60° + w_{caja}\cancel{(L)}sen60° - T_{cable}\cancel{(L)}sen30° = 0$$

$$T_{cable}sen30° = \frac{w_{var}}{2} sen60° + w_{caja}sen60°$$

$$T_{cable} = \frac{\frac{w_{var}}{2} sen60° + w_{caja}sen60°}{sen\ 30°} = \frac{0.5(10)(9.8)sen60° + 20(9.8)sen60°}{sen\ 30°} = 424.35\ N$$

Para la magnitud de la reacción es necesario calcular sus componentes

$$R_x = T_{cable} = 424.35\ N$$

$$R_y = w_{var} + w_{caja} = Mg + mg = 10(9.8) + 20(9.8) = 294\ N$$

$$R = \sqrt[2]{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt[2]{424.35^2 + 294^2} = 516.25\ N$$

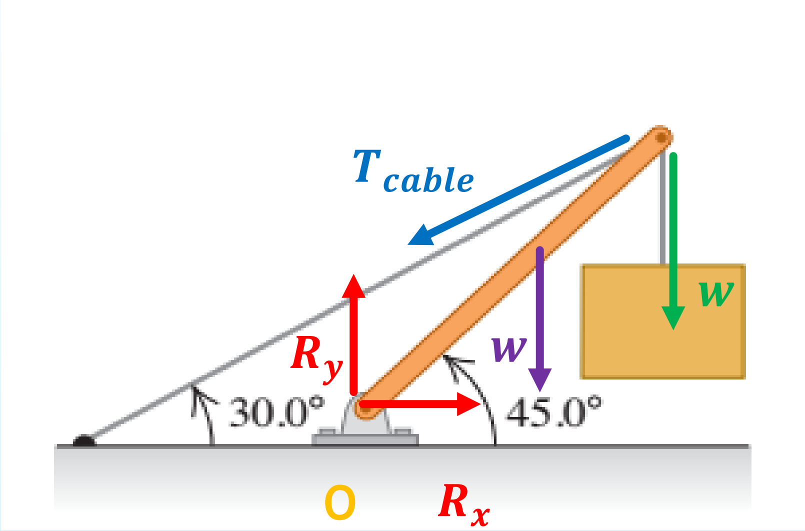
$$\beta = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x} = \tan^{-1}\frac{294}{424.35} = 34.72°$$

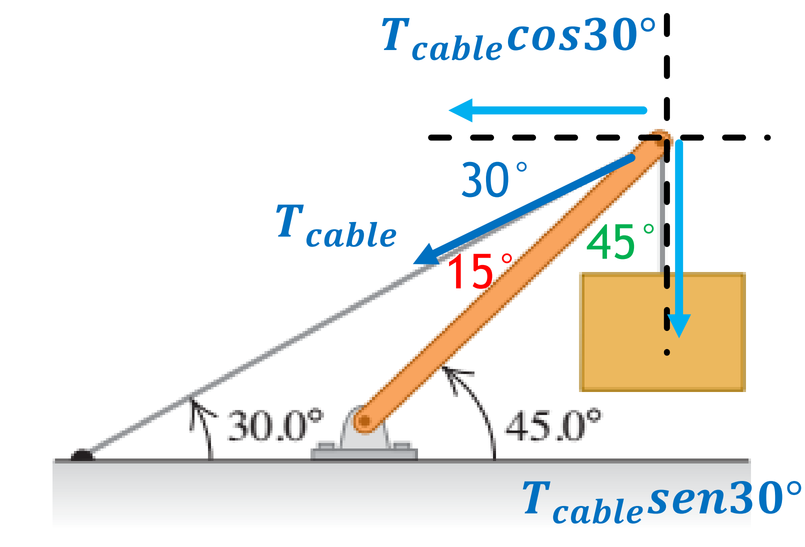
Observe que el ángulo que forma la reacción del apoyo no es igual al que forma en el sistema en equilibrio.

11.13 Calcule la tensión *T* en cada cable, así como la magnitud y dirección de la fuerza ejercida sobre el puntal por el pivote en los sistemas de la figura. En cada caso, sea *w=500N* el peso de la caja suspendida, que contiene inapreciables objetos de arte. El puntal es uniforme y también pesa *w*. En cada caso empiece dibujando un diagrama de cuerpo libre del puntal.

Resolución realizaremos los diagramas de cuerpo libre del cuerpo rígido pero también realizaremos el diagrama para los ángulos para que nos sea mas fácil para plantear las sumatorias del objeto, el punto "O" será sobre el pivote o bisagra.

Nota: en el diagrama de ángulos la tensión del cable se puede trabajar con los 30° o 60° para las sumatorias de fuerzas, pero para la sumatoria de torques se empleara los 15°





Planteando las sumatorias de fuerzas en "x" y "y"

$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad R_x - T_{cable}cos30° = 0 \qquad R_x = T_{cable}cos30°$

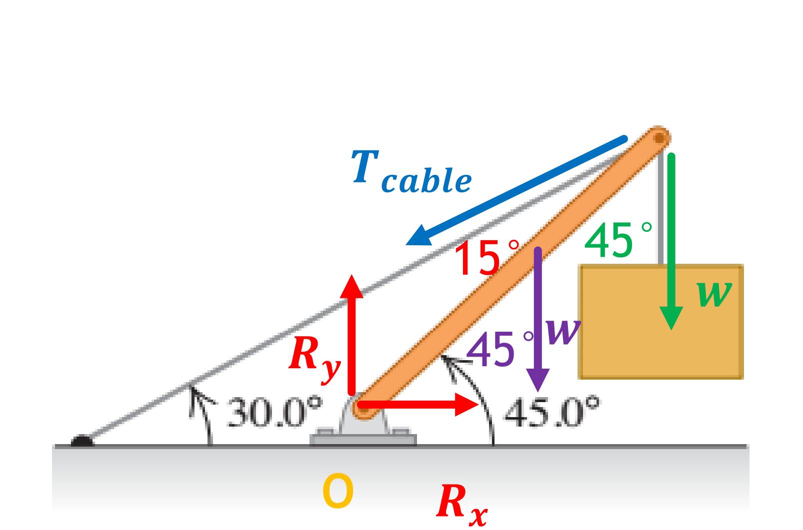
$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad R_y - w - w - T_{cable}sen30° = 0$

$$R_y = w + w + T_{cable}\, sen30°$$

En este caso podemos decir que la sumatoria de torques se realizara en el punto "o" para el peso de la viga se utilizara el valor L/2 ya que es uniforme.

Se planea la sumatoria de torques en el punto que se elimine

la mayor cantidad de variables para resolver el sistema



$$\sum \tau_o = 0 \ \ positivo\ en\ sentido\ horario$$

En el punto "o" considerar que las fuerzas que nacen ahí no son consideradas

$$w\left(\frac{\cancel{L}}{2}\right)sen45° + w(\cancel{L})sen45° \ - T_{cable}(\cancel{L})sen15° = 0$$

$$\frac{w}{2}sen45° + wsen45° = T_{cable}sen15°$$

$$T_{cable} = \frac{\frac{w}{2}sen45° + wsen45°}{sen15°} = \frac{0.5(500)sen45° + 500sen45°}{sen15°} = 2{,}049.04N$$

Se puede resolver para encontrar el valor del puntual o bisagra que permite la forma del sistema

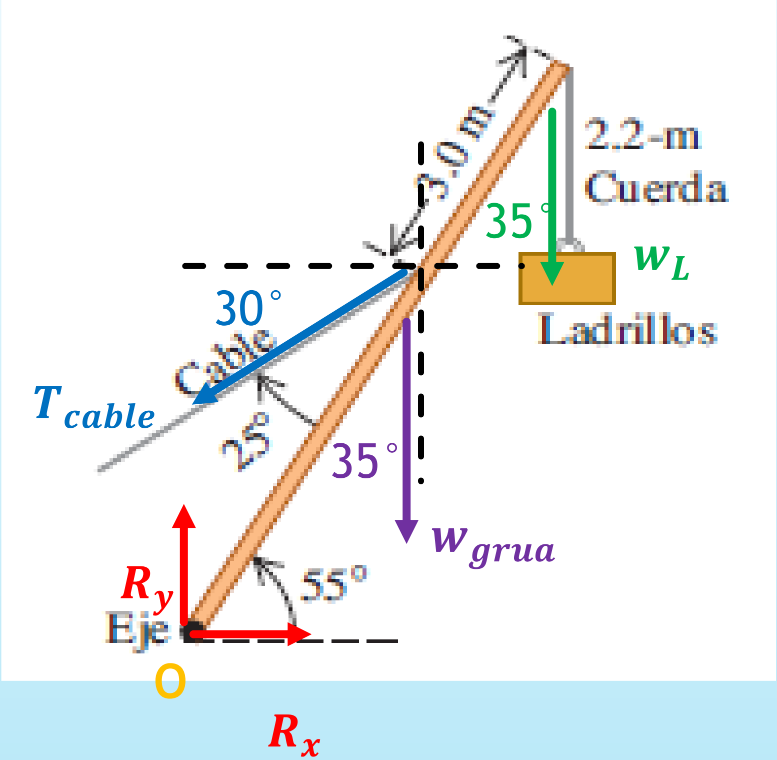
$$R_x = T_{cable}cos30° = 2{,}049.04\ cos30° = 1774.52N$$

$$R_y = w + w + T_{cable}\ sen30° = 500 + 500 + 2{,}049.04sen30° = 2{,}024.52N$$

$$R = \sqrt[2]{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt[2]{1774.52^2 + 2024.52^2} = 2{,}692.14N$$

$$\beta = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x} = \tan^{-1}\frac{2024.52}{1774.52} = 48.76°$$

11.18. Una grúa de 15,000 N pivotea alrededor de un eje sin fricción en su base y está apoyada por un cable que forma un ángulo de 25° con la grúa (figura 11.29). La grúa tiene 16 m de largo y no es uniforme; su centro de gravedad es de 7.0 m desde el eje medidos a lo largo de la grúa. El cable está unido a 3.0 m del extremo superior de la grúa. Cuando la grúa se levanta a 55° por encima de la horizontal, sosteniendo un palé de ladrillos de 11,000 N mediante una cuerda muy ligera de 2.2 m, calcule *a*) la tensión en el cable y *b*) las componentes vertical y horizontal de la fuerza ejercida por el eje sobre la grúa. Empiece dibujando un diagrama de cuerpo libre de la grúa.



Resolución: realizando el diagrama se plantean las sumatorias pero en este caso se tiene que el centro de masa se localiza a la mitad de la figura pero el centro de gravedad que influye en el valor del peso esta a 7m del eje.

Planteando las sumatorias de fuerzas en "x" y "y"

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad R_x - T_{cable}cos30° = 0 \qquad R_x = T_{cable}cos30°$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad R_y - w_{grua} - w_L - T_{cable}sen30° = 0$$

$$R_y = w_{grua} + w_L + T_{cable}\, sen30°$$

$$\sum \tau_o = 0 \;\; positivo\ en\ sentido\ horario$$

En el punto "o" considerar que las fuerzas que nacen ahí no son consideradas

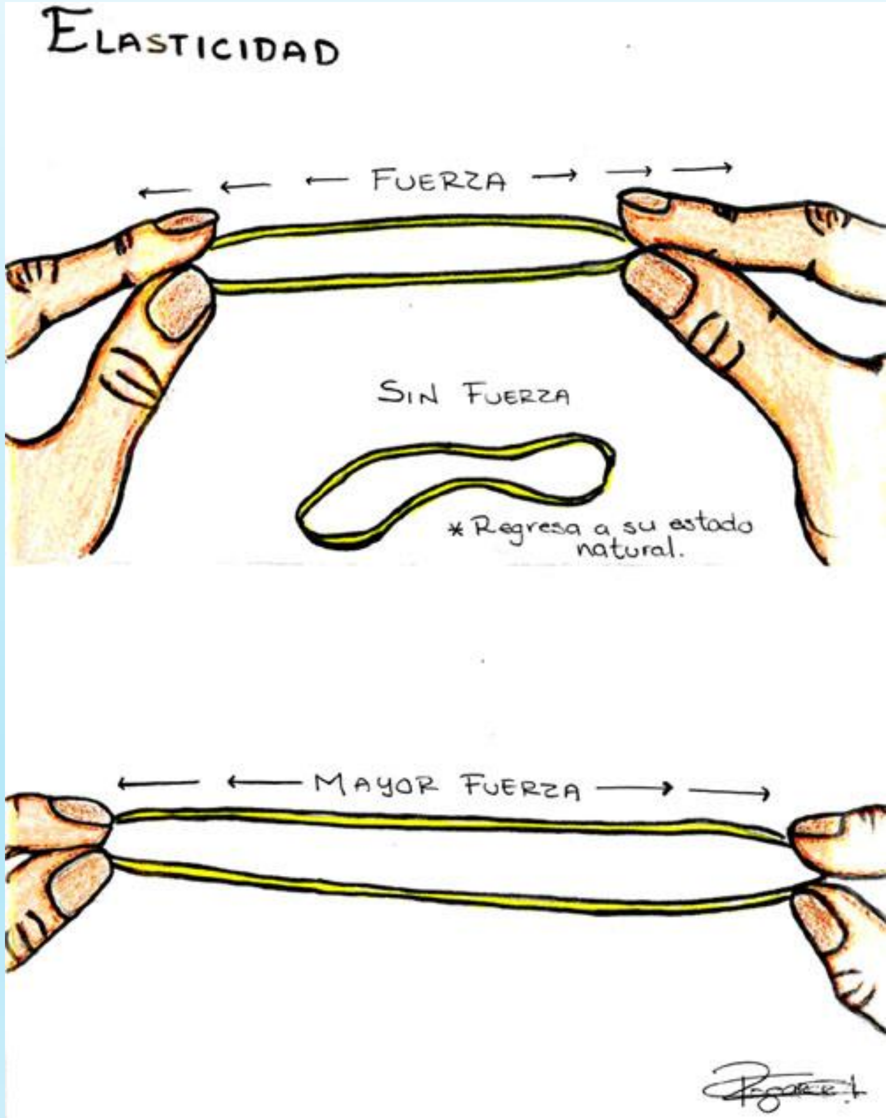
$$w_{grua}(7)sen35° + w_L(16)sen35° \; - T_{cable}(13)sen25° = 0$$

$$T_{cable} = \frac{w_{grua}(7)sen35° + w_L(16)sen35°}{13sen25°} = \frac{15000(7)sen35° + 11000(16)sen35°}{13sen25°} = 29{,}336.34N$$

$$R_x = 25{,}406.02N \qquad R_y = 40{,}668.17N$$

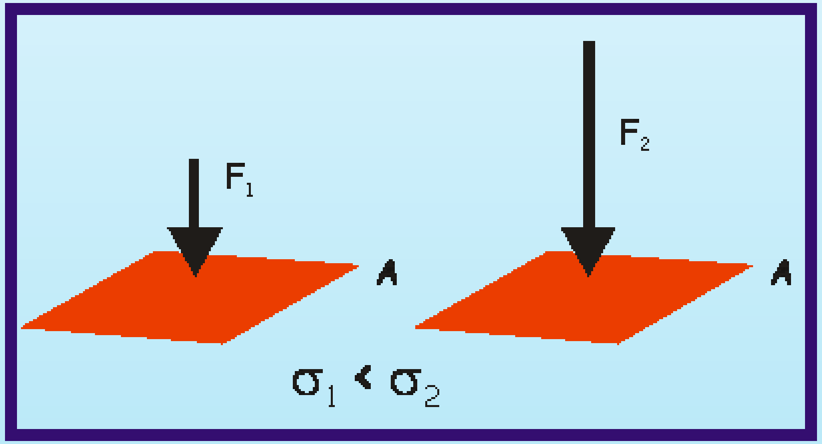
Elasticidad

En física el término **elasticidad** designa la propiedad mecánica de ciertos materiales de sufrir deformaciones reversibles cuando se encuentran sujetos a la acción de fuerzas exteriores y de recuperar la forma original si estas fuerzas exteriores se eliminan. Comúnmente se confunde la elasticidad con la **distensibilidad**, que se refiere a la capacidad de un material de deformarse ante una tensión externa.



Esfuerzo(σ): La fuerza externa que actúa sobre un cuerpo genera un efecto por unidad de área transversal.

$$\sigma = \frac{F_{\perp}}{A} \quad \left[\frac{N}{m^2}\right]$$



La fuerza que se aplica es perpendicular al área de contacto del cuerpo, es una consideración escalar.

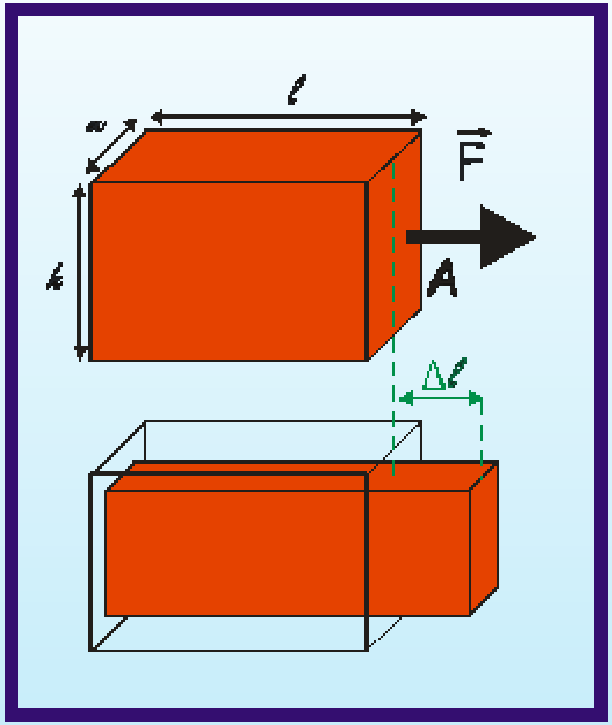
En consecuencia a este esfuerzo(σ) que sufre el material se produce en el una deformación, esta es un cambio de las propiedades físicas del material.

$$\Delta propiedad = es\ el\ cambio\ de\ las\ condiciones\ finales\ y\ iniciales\ del\ material.$$

Deformación unitaria(ε): es una medida del grado de deformación que sufre el material por el esfuerzo aplicado en él.

$$\varepsilon = \frac{\Delta\, Deformación\ del\ material}{Condiciones\ iniciales} \quad [\,]\ adimensional$$

El valor de la deformación dependerá del tipo de esfuerzo y deformación que sufra el objeto.



Ley de Hooke para la mecánica de solidos

Cuando un objeto es sometido a fuerzas externas, sufre deformaciones. Aplicando un peso y estirando, al quitar ese peso y el cuerpo volver al tamaño original, se dice que éste es un cuerpo elástico.

La **Ley de Hooke** se aplica a materiales elásticos hasta el límite denominado **límite de elasticidad**.

$$\boldsymbol{\sigma} \propto \boldsymbol{\varepsilon}$$

La ley de Hooke nos plantea la idea que las deformaciones que sufre un material son proporcionales al esfuerzo aplicadas a el, pero si partimos de esa implicación se deberá de agregar una constante de proporcionalidad.

$$\sigma = (Modulo\ de\ elasticidad)\ \varepsilon$$

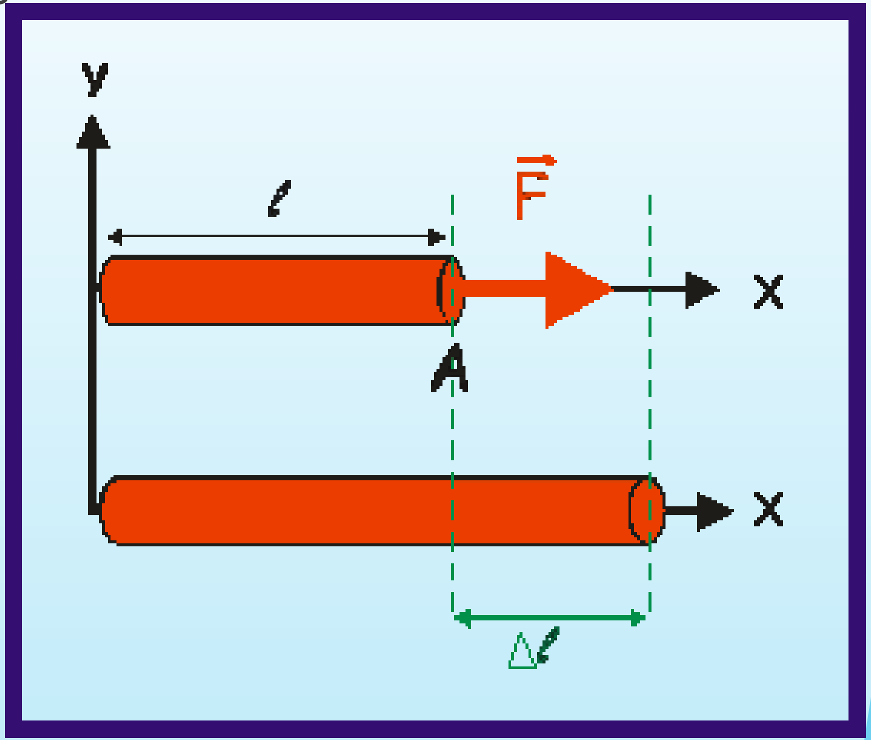
Modulo de elasticidad: Un módulo elástico es un tipo de constante elástica que involucra una medida relacionada con la tensión y una medida relacionada con la deformación. Esta varia dependiendo del material que se emplee para lo cual en el estudio de los materiales de ingeniería se realizan ensayos para calcular estos valores.

Modulo de Young

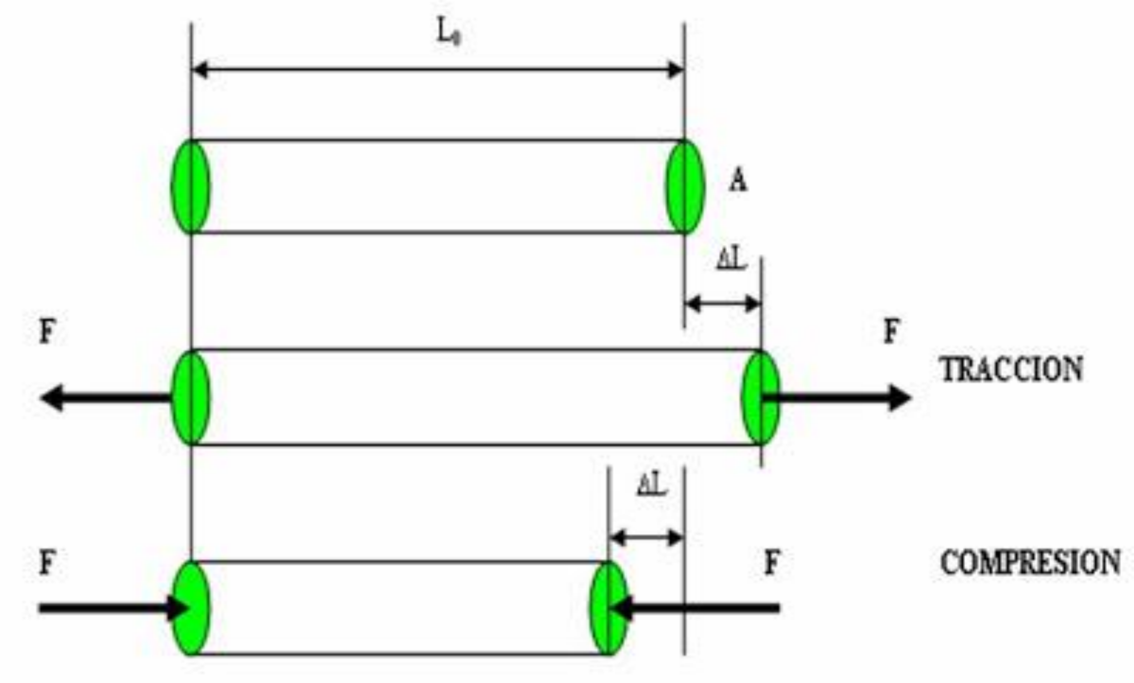
También llamado modulo de elasticidad es la resistencia del material al cambio de longitud ”L” se le denomina con la letra “Y” a este modulo.

$$\Delta L = L_F - L_o \quad deformación\ de\ la\ longitud$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_o} \quad deformación\ unitaria\ por\ longitud$$



$$\sigma = Y_{material}\ \varepsilon$$



$$Y_{material} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F_{\perp}/A}{\Delta L/L_o} = \frac{F_{\perp} L_o}{A \Delta L}$$

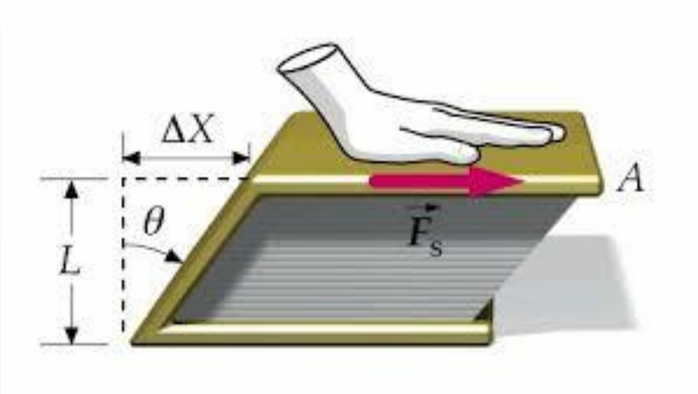
La deformación que sufre el material se podrá dar en tracción(tensión) y en compresión en ambos casos solo usaremos la variación de las condiciones de la longitud.

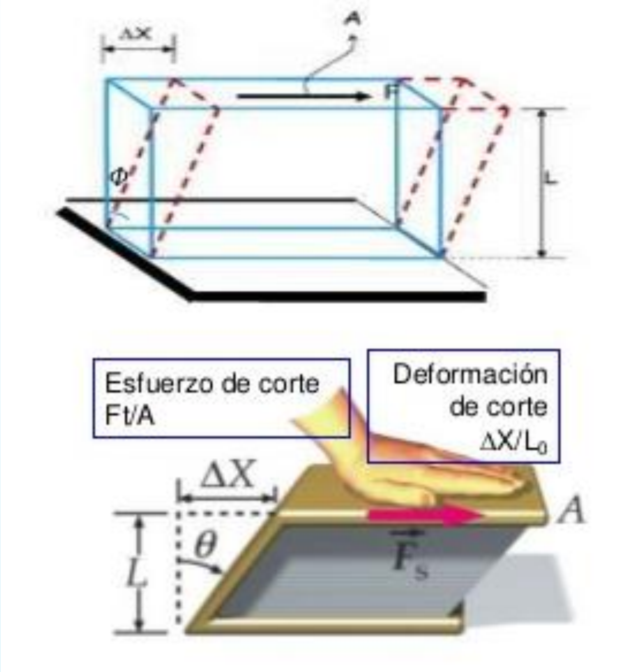
Nota: si importa la forma del material para el calculo del área

Modulo de corte, Coeficiente de Rigidez(s): Es la resistencia al movimiento de los planos dentro de un solido paralelos entre ellos.

$$\sigma = s\ \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{L} \qquad \sigma = \frac{F_{||}}{A}$$





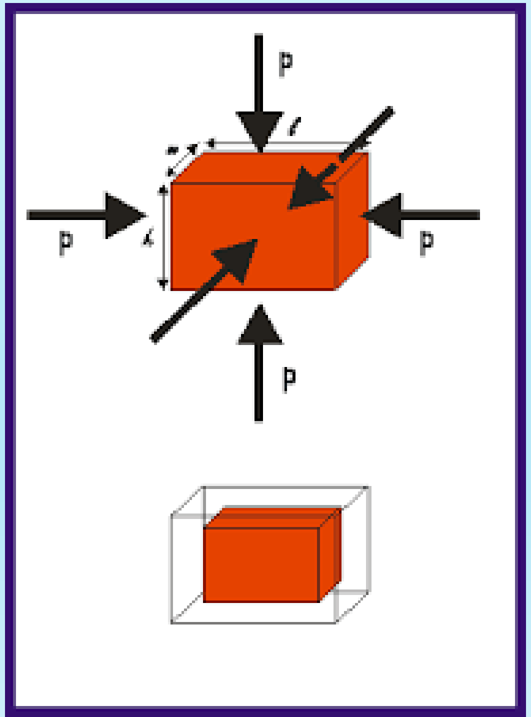
En este caso se toman las deformaciones paralelas al material Ejm: cortar un tomate

Modulo Volumétrico(B): es la resistencia al material a la compresión de su forma en este caso no existe expansión en este caso pero si es posible la expansión térmica del material.

$$P = \frac{F}{A}\ [Pa]\ presión$$

$$\Delta P = -B\ \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta V}{V_o} \quad en\ este\ caso\ la\ diferencia\ de\ volumen\ queda\ negativa$$



Comportamiento del material por lo esfuerzos que sufre