VARIABLES ALEATORIAS UNIDIMENSIONALES CONTINUAS

VARIABLES ALEATORIAS UNIDIMENSIONALES CONTINUAS

Una variable es continua si el conjunto de sus posibles valores es infinito no numerable. La forma de representar a una variable continua es a través de un intervalo en el conjunto de los números reales.

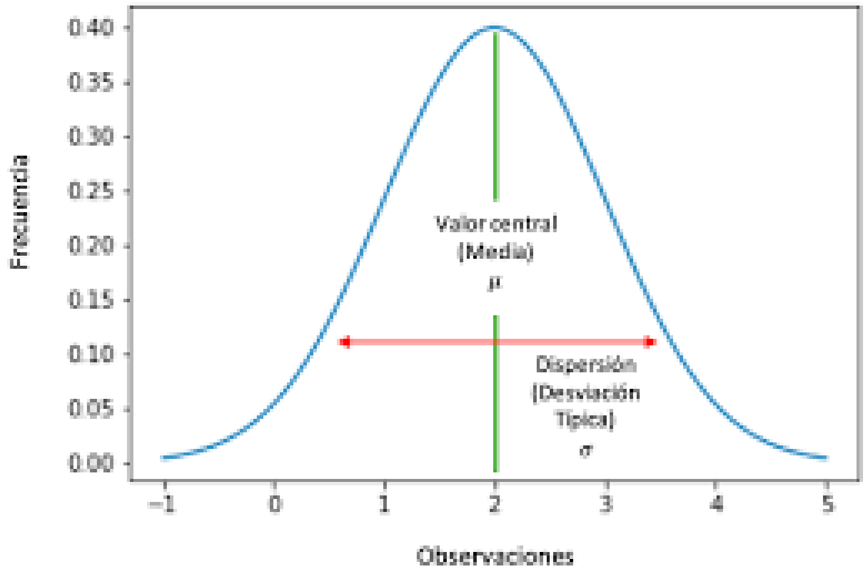
$R_x = a \leq x \leq b$

- *Ejemplo:*

Se ha observado en un experimento, que el tiempo que tarda una reacción química de cierto compuesto esta comprendido en el intervalo de 0.1 a 0.2 segundos. Si se toma a X como la variable "tiempo de reacción", el recorrido de X esta dado por el intervalo $Rx=\{0.1 \leq x \leq 0.2\}$.

Dado que entre cualquiera de los valores entre a y b existe un número infinito de probabilidades, es necesario definir la probabilidad a través de una función de densidad de probabilidad f(x).

- La función de densidad de probabilidad es una función continua no negativa que describe una curva en términos de la variable X que representa su comportamiento probabilístico y satisface las siguientes condiciones:
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$
- $P(a < x < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$



- Función acumulada

40.	$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$

- Esperanza (media)

42.	$\mu=E(x)=\begin{cases}\sum_x xf(x)\\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx\end{cases}$

- Varianza

43.	$\sigma^2=V(x)=E(x^2)-\mu^2$
44.	$\sigma^2=E(x-\mu)=\begin{cases}\sum (x-\mu)^2 f(x)\\ \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)d(x)\end{cases}$

EJEMPLO 1

- Suponga que el error en la temperatura de reacción, en °C, para un experimento controlado de laboratorio es una variable aleatoria continua X, que tiene la función de densidad de probabilidad:
- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} & -1 < x < 2 \end{cases}$ $;0 \; en \; otro \; caso$
- Verifique que es una función de densidad.
- Encuentre la probabilidad $P(0 < x \leq 1)$
- Encuentre F(x) y utilícela para evaluar $(0 < x \leq 1)$

EJEMPLO 2:

- Suponga que el tiempo de atención de cada cliente en una estación de servicio es una variable aleatoria continua con la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}(x+2) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Sea x variable aleatoria continua (duración en horas)

- Verifique que es una función de densidad.
- Calcule la probabilidad de que el tiempo de atención esté entre 15 y 30 minutos.
- ¿Cuál es la probabilidad que de 20 clientes que llegaron a la estación de servicio menos de 3 sean atendidos en menos de 15 minutos?
- Calcule la media y varianza de la distribución.

EJEMPLO 3:

- Un profesor universitario nunca termina su clase antes del final de la hora y siempre termina dentro de dos minutos después de la hora. Sea X=el tiempo que transcurre entre el final de la hora y el final de la clase y suponga que la función de densidad de probabilidad de es:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

- Determine el valor de k.
- ¿Cuál es la probabilidad de que la clase termine dentro de 1 minuto del final de la hora?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la clase continúe durante por lo menos 90 segundos después del final de la hora?

EJEMPLO 4:

- El número total de horas, medidas en unidades de 100 horas, que una familia utiliza una aspiradora en un periodo de un año es una variable aleatoria continua X que tiene la función de densidad:

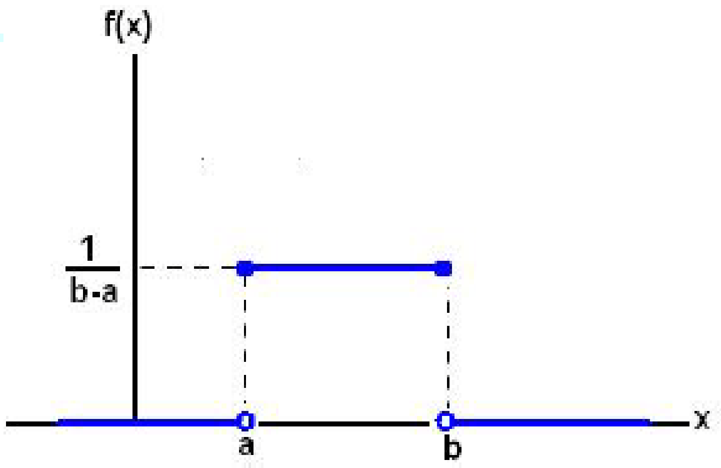
$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

- Encuentre la probabilidad de que en un periodo de un año, una familia utilice su aspiradora:
  - Menos de 120 horas
  - Entre 50 y 100 horas
  - ¿Cuál es la probabilidad de que de 20 familias al menos 3 de ellas utilicen su aspiradora como mínimo 150 horas?

DISTRIBUCIÓN UNIFORME CONTINUA

- Es una distribución plana con una probabilidad uniforme en un intervalo cerrado.
- La función de densidad de la variable aleatoria uniforme continua X en el intervalo de es

$$f(x;A,B) = \frac{1}{B-A} \quad A \leq x \leq B$$



EJEMPLO 1:

- Se sabe que los tiempos en que se realiza un experimento se distribuyen en forma uniforme y están entre cero y tres minutos.
- ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo en que se realiza un experimento esté entre 1.5 y 3 minutos?
- Si se realizan 5 experimentos, ¿Cuál es la probabilidad de que 2 de ellos se realicen en un tiempo de entre 1.8 y 3 minutos?

EJEMPLO 2:

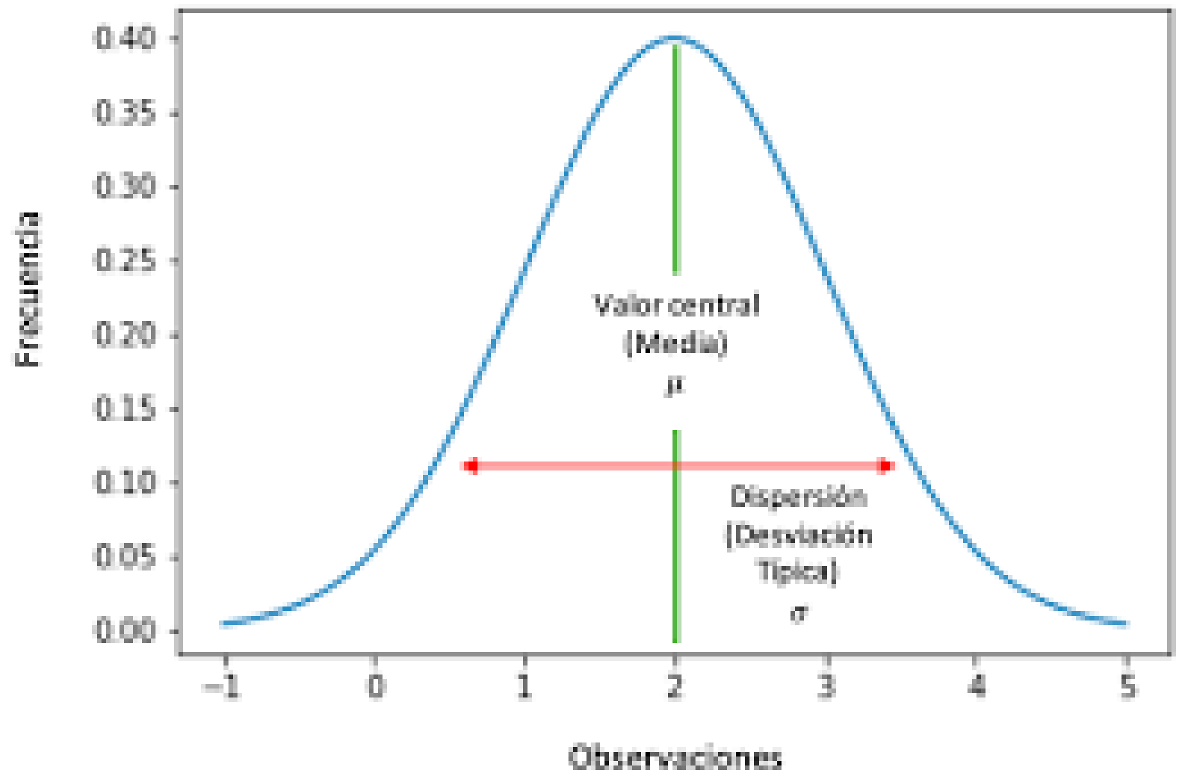
- Las ventas diarias de un supermercado se distribuyen en forma uniforme, con media Q. 40,000 diarios y un mínimo de Q. 30,000 diarios.
- Determinar la venta máxima diaria.
- ¿En qué porcentaje de días las ventas excederán los Q. 34,000?

DISTRIBUCIÓN NORMAL O GAUSSIANA:

- La distribución normal viene determinada por dos parámetros, su media y su desviación estándar.

- Tiene una única moda, que coincide con su media y su mediana.
- El área total bajo la curva es igual a 1.
- Es simétrica con respecto a su media . Según esto, para este tipo de variables existe una probabilidad de un 50% de observar un dato mayor que la media, y un 50% de observar un dato menor.

DISTRIBUCIÓN NORMALIZADA



DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma_x}$$

- Donde:
  - X: variable aleatoria distribuida normalmente
  - U= media aritmética de la variable.
  - Desviación estándar o típica de la variable
  - Z=valor crítico de la tabla normal Z

EJEMPLO 1:

- Dada una distribución normal con $\mu = 30$ y $\sigma = 6$ encuentre:
  - El área de la curva normal a la derecha de $x=17$
  - El área de la curva normal a la izquierda de $x=22$
  - El área de la curva normal entre $x=32$ y $x=41$
  - El valor de x que tiene 80% del área de la curva normal a la izquierda
  - Los dos valores de X que contienen 75% central del área de la curva normal

EJEMPLO 2:

- Se regula una máquina despachadora de refresco para que sirva un promedio de 200 mililitros por vaso. Si la cantidad de bebida se distribuye normalmente con una desviación estándar igual a 15 mililitros.
  - ¿Qué fracción de los vasos contendrán más de 224 mililitros?
  - ¿Cuántos vasos probablemente se derramarán si se utilizan vasos de 230 mililitros para las siguientes 1000 bebidas?
  - ¿Por debajo de qué valor obtendremos 25% de las bebidas más pequeñas?

EJEMPLO 3:

- Un proceso fabrica cojinetes de bolas cuyos diámetros se distribuye normalmente con media de 2.505 cm y desviación estándar de 0.008 cm. Las especificaciones requieren que el diámetro esté dentro del intervalo 2.5 +- 0.01 cm. ¿Qué proporción de cojinetes de bolas cumplen con la especificación?
- Suponga que se ha recalibrado el proceso de tal forma que la media del diámetro mide ahora 2.5 cm. ¿A qué valor debe reducirse la desviación estándar para que 95% de los diámetros satisfaga la especificación?

EJEMPLO 4:

- La administración de una empresa maquiladora quiere calcular los costos de reparación anual de cierta máquina, para lo cual lleva a cabo un estudio en el que obtiene que los costos de reparación anual se comportan de forma normal con media $ 400 000 y desviación estándar de $ 50 000.
- Calcule la probabilidad de que los costos de reparación para este año estén entre $ 300 000 y $ 500 000.
- ¿Debajo de qué costo se encuentra el presupuesto para la reparación anual de las máquinas en 10% de los casos?

EJEMPLO 5

- Una máquina que produce cojinetes de bolas inicialmente se ajustó de modo que el diámetro promedio verdadero de los cojinetes que produce sea de 0.5000 pulg. Un cojinete es aceptable si su diámetro está dentro de 0.004 pulg de su valor objetivo. Suponga, sin embargo, que el ajuste cambia durante el curso de la producción, de modo que los cojinetes tengan diámetros normalmente distribuidos con valor medio de 0.499 pulg y desviación estándar de 0.002 pulg. ¿Qué porcentaje de los cojinetes producidos no será aceptable?

APROXIMACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

- Si "n" es grande y si "p" o "q" son muy próximos a cero, la distribución binomial puede aproximarse estrechamente a una distribución normal.

$$z = \frac{(x \pm 0.5) - np}{\sqrt{npq}}$$

$$np \geq 10 \; y \; nq \geq 10$$

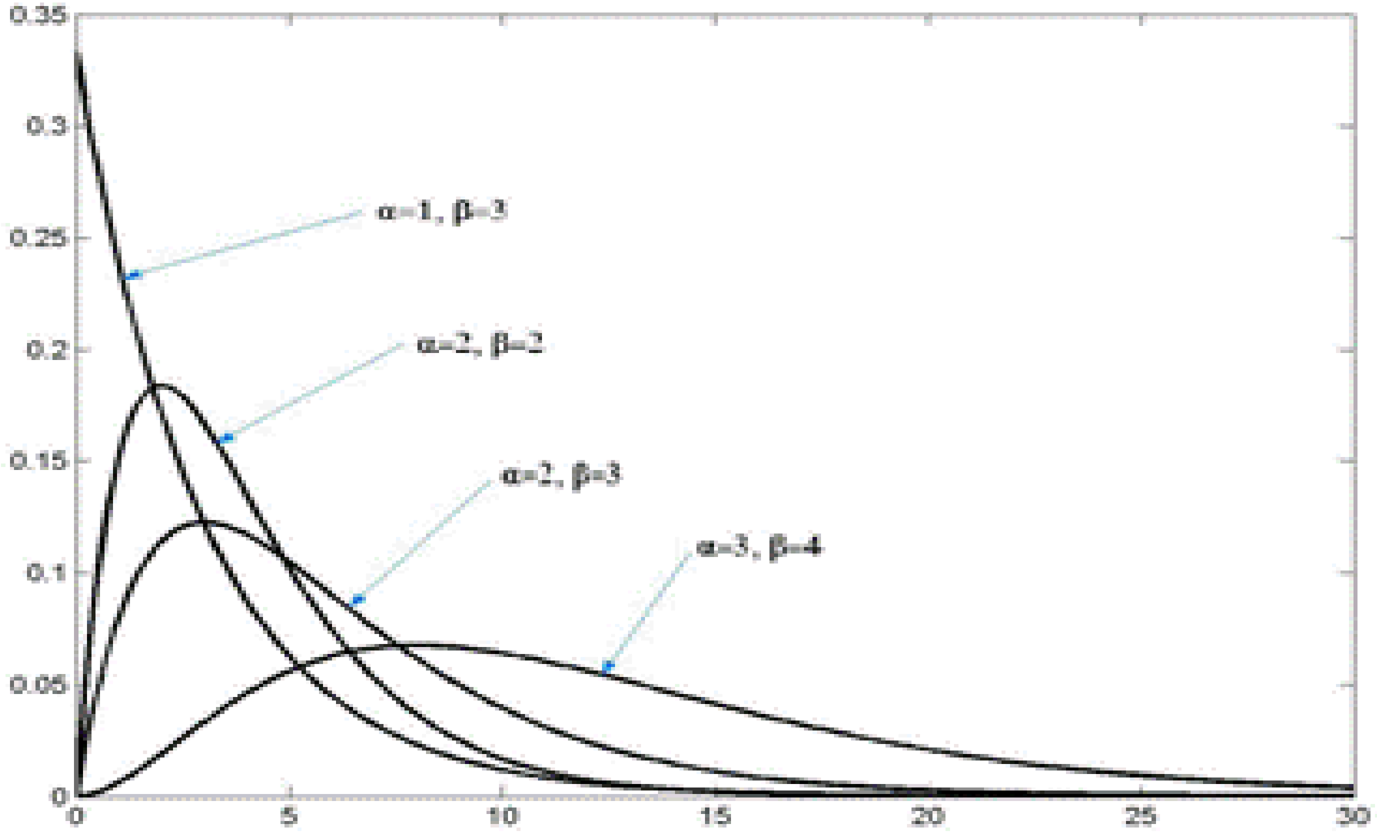
EJEMPLO 6:

- Suponga que 10% de todas las flechas de acero producidas por medio de un proceso no cumplen con las especificaciones pero pueden ser retrabajadas (en lugar de ser desechadas). Considere una muestra aleatoria de 200 flechas y sea X el número entre éstas que no cumplen con las especificaciones y pueden ser retrabajadas. ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que X sea
  - Cuando mucho 30?
  - Menos que 30?
  - Entre 15 y 25 (inclusive)

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL-GAMMA

- La distribución exponencial es un caso especial de la distribución gamma. Ambas tienen un gran número de aplicaciones. Juegan un papel importante tanto en teoría de colas como en problemas de confiabilidad. El tiempo entre llegadas en las instalaciones de servicio y el tiempo de falla de los componentes y sistemas eléctricos, frecuentemente involucran la distribución exponencial.

GRÁFICO DE LA DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL GAMMA



DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & x > o \\ o & en\ otro\ caso \end{cases}$$

- Donde:
  - B= tiempo medio entre eventos, tiempo medio entre fallas.
- RELACIÓN CON POISSON:
- Poisson: evento o suceso en un determinado tiempo
- Exponencial: intervalo de tiempo para que suceda un evento

EJEMPLO 1:

- Algunas cepas de paramecio producen y secretan partículas asesinas que causan al contacto la muerte de un individuo sensible. El número medio de partículas asesinas emitidas por un paramecio asesino es de 1 cada 5 horas. ¿Cuál es la probabilidad de que deban esperarse cuando mucho 4 horas antes de que se emita la primera partícula?

EJEMPLO 2:

- En un negocio de comida rápida tipo americano el tiempo en que tarda en atender a un cliente sigue una distribución exponencial con parámetro 0.2 cliente por minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que un mismo cliente sea atendido en un tiempo inferior a 3 minutos en al menos 4 de las 6 veces que allí comió?

EJEMPLO 3

- Un sistema usa un componente cuya duración en años es una variable aleatoria con distribución exponencial con media de 4 años. Si se instalan 3 de estos componentes y trabajan independientemente, determine la probabilidad que al cabo de 6 años, dos de ellos sigan funcionando.

EJEMPLO 4

- La llegada de los camiones a una bodega tiene distribución de Poisson con media de 4 por hora. Calcule la probabilidad que el tiempo transcurrido de la llegada de un camión sea menor a 10 minutos.

DISTRIBUCIÓN GAMMA

- Es el equivalente continuo de la binomial negativa.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0 \\ 0, & \text{para otro } x \end{cases}$$

$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$

EJEMPLO 1:

- En una planta telefónica se estima que las llamadas llegan a razón de 0.4 por minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que transcurran menos de 6 min para que ingresen dos llamadas conociendo que su comportamiento pertenece a una distribución Gamma?

EJEMPLO 2

El restaurante "El Cafetalito" tiene muchos años de experiencia en la preparación de diferentes tipos de café, los ingredientes que llevan cada uno de estos son muy variados pero el tiempo que le toma en preparar un café tiene como parámetro 0.2 café/minuto. Determine la probabilidad de que el mesero emplee:

a. Menos de 8 min en la preparación de una orden de dos tazas de café.
b. Por lo menos 12 min en la preparación de una orden de 3 tazas de café.

EJEMPLO 3

Si un componente eléctrico falla una vez cada 5 horas. ¿Cuál es el tiempo medio que transcurre hasta que fallan dos componentes? ¿Cuál es la probabilidad de que transcurran 12 horas antes de que fallen los dos componentes?

EJEMPLO 4:

- En cierta ciudad, el consumo diario de energía eléctrica, en millones de kilowatts hora, es una variable aleatoria X que tiene una distribución gamma con media igual a 6 y varianza 12.
- Encuentre la probabilidad de que en cualquier día dado el consumo de energía diario exceda 12 millones de kilowatts hora.

DISTRIBUCIÓN BETA

- Es utilizada frecuentemente para las variables aleatorias que representan proporciones (% de impurezas presentes en un compuesto químico) cantidad de tiempo que una máquina está en reparación.

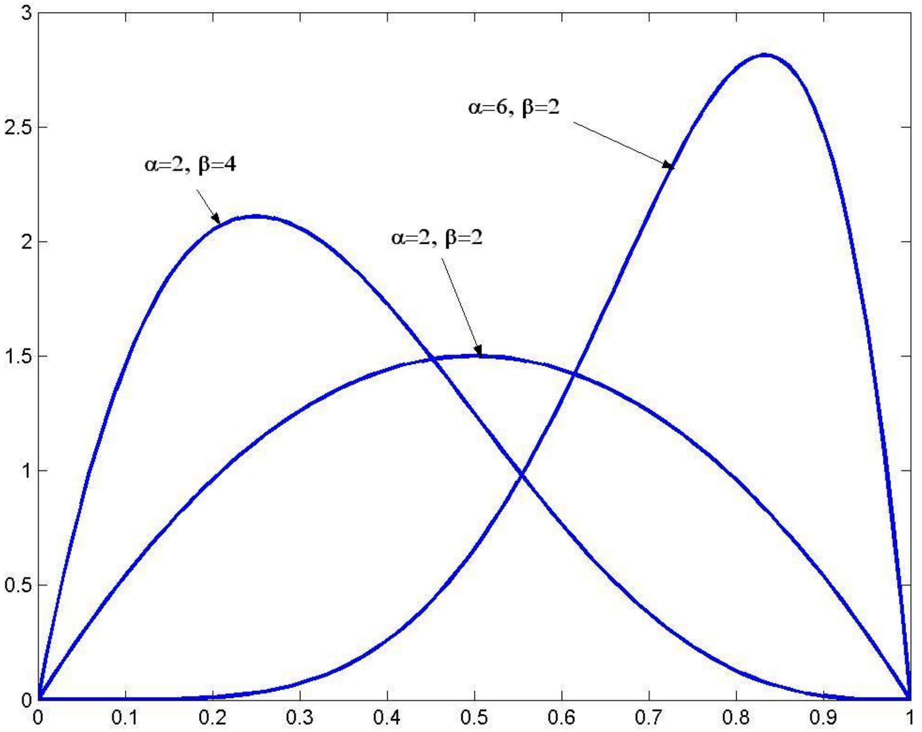
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{para otro } x \end{cases}$$

MEDIA Y VARIANZA

$$\mu = E[X] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$\sigma^2 = V[X] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

GRÁFICO DE LA DISTRIBUCIÓN BETA



EJEMPLO 1

- En cierto país la proporción de tramos de autopista que requieren reparación en un año es una variable aleatoria con distribución Beta con parámetros $\alpha=3$ y $\beta=2$. Calcule:
- En promedio que porcentaje de tramos en autopista requieren reparación en un año cualquiera.
- La probabilidad de que a lo sumo la mitad de los tramos de la autopista requieran reparación en 1 año cualquiera.

EJEMPLO 2

- Un distribuidor de gasolina llena los tanques del depósito cada lunes. Se ha observado que la cantidad que vende cada semana se puede modelar con la distribución beta con $\alpha=4$, $\beta=2$
- Encuentre el valor esperado de la venta semanal
- Encuentre la probabilidad que en alguna semana venda al menos 90%

DISTRIBUCIÓN WEIBULL

- Tiene sus aplicaciones en la teoría de la confiabilidad, durabilidad y control de calidad de ciertos tipos de sistemas.

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^{\beta}}, & \mathrm{x} > 0 \\ 0, & \text{para otro x} \end{cases}$$

EJEMPLO 1:

- Suponga que la vida en años de una batería es una variable aleatoria de Weibull con $\alpha=0.5$ y $\beta=2$. Calcular la probabilidad de que la batería este operando después de dos años.

EJEMPLO 2:

- Suponga que la vida útil de cierto elemento es una variable aleatoria que tiene distribución Weibull con $\alpha=3$ y $\lambda=0.5$ Calcular la probabilidad de que el elemento dure más de un año y medio.