Distribución normal

miércoles, 4 de octubre de 2023 18:47

DISTRIBUCIÓN NORMAL

- Ejemplo 1
- Dada una distribución normal con μ= 30 y σ= 6 encuentre:
  - El área de la curva normal a la derecha de x=17 (Probabilidad)
  - El área de la curva normal a la izquierda de x=22
  - El área de la curva normal entre x=32 y x=41
  - El valor de x que tiene 80% del área de la curva normal a la izquierda
  - El valor de x que tiene 40% del área de la curva normal a la derecha
  - Los dos valores de X que contienen 75% central del área de la curva normal

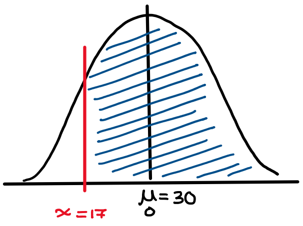
PARÁMETROS

$\mu = 30$

$\sigma = 6$

$$n(x:\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2} \quad -\infty < x < \infty$$

a.-



$$P(x > 17) = \int_{17}^{\infty} \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)[(x-30)/6]^2}\, dx$$

$= \boxed{0,9849}$

TEOREMA DE LÍMITE CENTRAL

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad Z = \frac{17-30}{6} = -2,1667$$

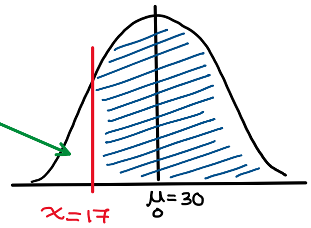
$\simeq -2,17$

0,07

$-2,1$ —— $\boxed{0,0150}$

$P(z) = 0,0150$

$1 - P(z) = \boxed{0,985}$



b.-

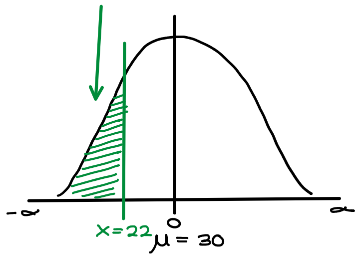
$$P(x < 22) = \int_{-\infty}^{22} \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)[(x-30)/6]^2}\, dx =$$

$P(x < 22)$

$$Z = \frac{22-30}{6} = -1,3\overline{3}$$

0,03

$-1,3$ —— $\boxed{0,09176}$



$P(x < 22) = \boxed{0,09176}$

c.-

$$P(\underset{X_1}{32} \leq x \leq \underset{X_2}{41}) = \int_{32}^{41} \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)[(x-30)/6]^2}\, dx =$$

$$Z_1 = \frac{32-30}{6} = 0,3\overline{3}$$

0,03

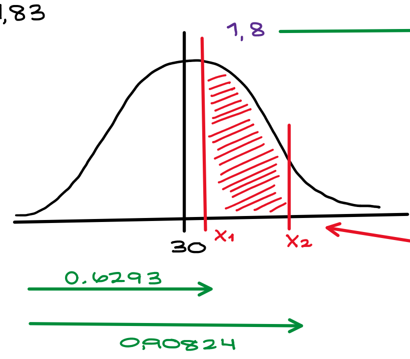
$0,3$ —— $\boxed{0,62930}$

$$\frac{\quad}{6}$$

$$Z_2 = \frac{41-30}{6} = 1{,}83$$

$0{,}3 \longrightarrow \boxed{0{,}62930}$

$1{,}8 \longrightarrow \boxed{0{,}96638}$

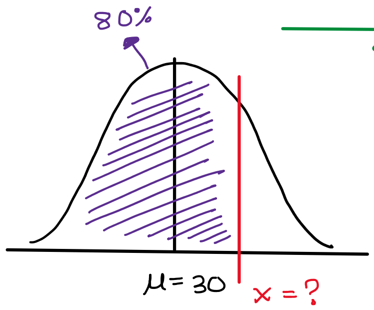


$= P(Z_2) - P(Z_1)$

$= 0{,}96638 - 0{,}62930$

$= \boxed{0{,}33708}$

d.-



$P(z) = 0{,}8 \qquad z = ?$

BUSCAR EN LA TABLA EL VALOR MÁS CERCANO A 0.8

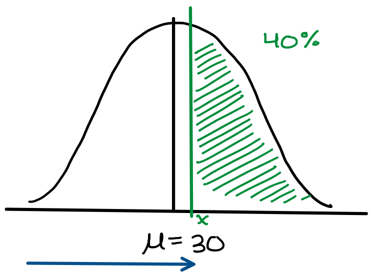
$0{,}8 \longleftarrow 0{,}79955 \rightarrow 0{,}04$

$z = 0{,}84$

$$0{,}84 = \frac{x-30}{6}$$

$$\boxed{x = 35{,}04}$$

e.-



$1 - P(z) = 1 - 0{,}4$

$= 0{,}6$

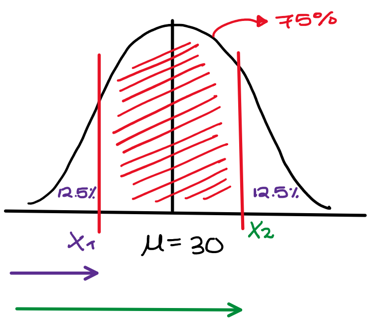
$0{,}2 \longleftarrow 0{,}59871 \rightarrow 0{,}05$

$z = 0{,}25$

$$0{,}25 = \frac{x-30}{6}$$

$$\boxed{x = 31{,}5}$$

f.-



$P(z) = 0{,}125$

$z_1 = -1{,}15$

$$-1{,}15 = \frac{x_1 - 30}{6} \qquad \boxed{x_1 = 23{,}1}$$

$P(z_2) = 0{,}875$

$z_2 = 1{,}15$

$$1{,}15 = \frac{x_2 - 30}{6} \qquad \boxed{x_2 = 36{,}9}$$

Ejemplo 2:

- Se regula una máquina despachadora de refresco para que sirva un promedio de 200 mililitros por vaso. Si la cantidad de bebida se distribuye normalmente con una desviación estándar igual a 15 mililitros.

- Se regula una máquina despachadora de refresco para que sirva un promedio de 200 mililitros por vaso. Si la cantidad de bebida se distribuye normalmente con una desviación estándar igual a 15 mililitros.
  - ¿Qué fracción de los vasos contendrán más de 224 mililitros?
  - ¿Cuántos vasos probablemente se derramarán si se utilizan vasos de 230 mililitros para las siguientes 1000 bebidas?
  - ¿Por debajo de qué valor obtendremos 25% de las bebidas más pequeñas?

$\mu = 200$

$\sigma = 15$

a.- $P(x > 224)$

$Z = \dfrac{224 - 200}{15} = 1,60$ $\qquad P(Z) = 0,94520$

$1 - P(Z) = \boxed{0,0548}$

R/ 5,48 % DE LOS VASOS CONTENDRÁN MÁS DE 224 ml.

Ejemplo 3:

La administración de una empresa maquiladora quiere calcular los costos de reparación anual de cierta máquina, para lo cual lleva a cabo un estudio en el que obtiene que los costos de reparación anual se comportan de forma normal con media $ 400 000 y desviación estándar de $ 50 000.

Calcule la probabilidad de que los costos de reparación para este año estén entre $ 300 000 y $ 500 000.

¿Debajo de qué costo se encuentra el presupuesto para la reparación anual de las máquinas en 10% de los casos?

$\mu = 400000$

$\sigma = 50000$

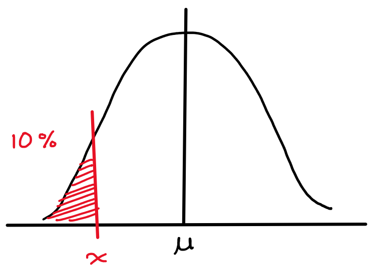
a.- $P(300000 \leq x \leq 500000) = ?$

$Z_1 = \dfrac{300000 - 400000}{50000} = -2,00$ $\qquad P(Z) = 0,02275$

$Z_2 = \dfrac{500000 - 400000}{50000} = 2,00$ $\qquad P(Z_2) = 0,97725$

$P(Z_2) - P(Z_1) = \boxed{0,9545}$

b.-



$P(Z) = 0,10$

$Z = -1,28$

$-1,28 = \dfrac{x - 400000}{50000}$

$\boxed{x = \$\, 336,000}$

Ejemplo 4

- Un proceso fabrica cojinetes de bolas cuyos diámetros se distribuye normalmente con media de 2.505 cm y desviación estándar de 0.008 cm. Las especificaciones requieren que el diámetro esté dentro del intervalo 2.5 +- 0.01 cm. ¿Qué proporción de cojinetes de bolas cumplen con la especificación?

- Suponga que se ha recalibrado el proceso de tal forma que la media del diámetro mide ahora 2.5 cm. ¿A qué valor debe reducirse la desviación estándar para que 95% de los diámetros satisfaga la especificación?

$\mu = 2{,}505$ cm

$\sigma = 0{,}008$ cm

$2.5 \pm 0{,}01 = (2{,}49 \leq x \leq 2{,}51)$ CUMPLE CON LAS ESPECIFICACIONES

a.- $Z_1 = \dfrac{2{,}49 - 2{,}505}{0{,}008} = -1{,}88$ $\quad P(Z_1) = 0{,}03005$

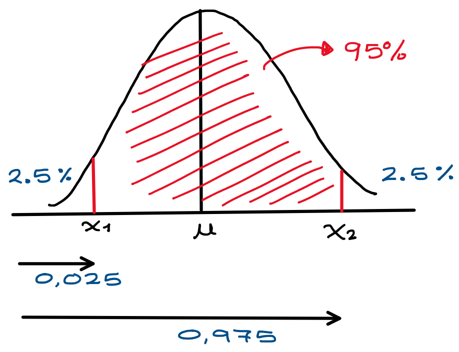
$Z_2 = \dfrac{2{,}51 - 2{,}505}{0{,}008} = 0{,}63$ $\quad P(Z_2) = 0{,}73565$

$P(Z_2) - P(Z_1) = \boxed{0{,}7056}$

R// 70,56 % CUMPLE CON LOS ESPECIFICACIONES

b.- $\mu = 2.5$ cm $\quad x_1 \quad x_2$

$\sigma = \ ?$ $\quad (2{,}49 \leq x \leq 2{,}51)$ CUMPLE CON LAS ESPECIFICACIONES



$P(Z_1) = 0{,}025$

$Z = -1{,}96$

$-1{,}96 = \dfrac{2{,}49 - 2{,}5}{\sigma}$

$\boxed{\sigma = 0{,}00510 \text{ cm}}$

$P(Z_2) = 0{,}975$

$Z = 1{,}96$ $\quad 1{,}96 = \dfrac{2{,}51 - 2{,}5}{\sigma}$

$\sigma = 0{,}00510$