Aplicaciones de la derivada

Después de que se toma una tableta de antibiótico, la concentración del antibiótico en el torrente sanguíneo se modela por la función

$$C(t) = 8(e^{-0.4t} - e^{-0.6t})$$

donde el tiempo t se mide en horas y C se mide en $\mu g/mL$. ¿Cuál es la concentración máxima de antibiótico durante las primeras 12 horas?

REGLA CADENA

VALOR MÁX.

VALOR MÁX $C(t)$ $[0,12]$ INTERVALO CERRADO.

ABSOLUTO.

1) VALORES CRÍTICOS ($C'(t)=0$, $C'(t) \nexists$)

$$C'(t) = 8(-0.4e^{-0.4t} + 0.6e^{-0.6t}) = 0$$

$$-0.4e^{-0.4t} + 0.6e^{-0.6t} = 0$$

$$0.6e^{-0.6t} = 0.4e^{-0.4t}$$

$$\frac{e^{-0.6t}}{e^{-0.4t}} = \frac{0.4}{0.6}$$

$$e^{-0.2t} = \frac{2}{3}$$

$$-0.2t = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$t = \frac{\ln(2/3)}{-0.2} = -5\ln(2/3)$$

$(2/3)^{-1}$

$$t = 5\ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx 2.03$$

VALOR CRÍTICO

FUNCIÓN ORIGINAL

$$\boxed{C\left(5\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)} = 1.19\ \mu g/mL.$$

b) $\boxed{\begin{array}{l} C(0) = 0 \\ C(12) = 0.06 \end{array}}$ $\mu g/mL$. $\mu g/mL$.

c) VALOR MÁXIMO ABSOLUTO

$1.19\ \mu g/mL$ ✓

¿CUÁNDO SE DA? $t = 2.03$ HORAS

$$t = -5\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$t = 5\ln\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{2^{-1}}{3^{-1}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$$

Teorema del valor medio

TAREA

ESTUDIAR.

Cómo las derivadas afectan la forma de una gráfica

$f'(x), \; f''(x).$

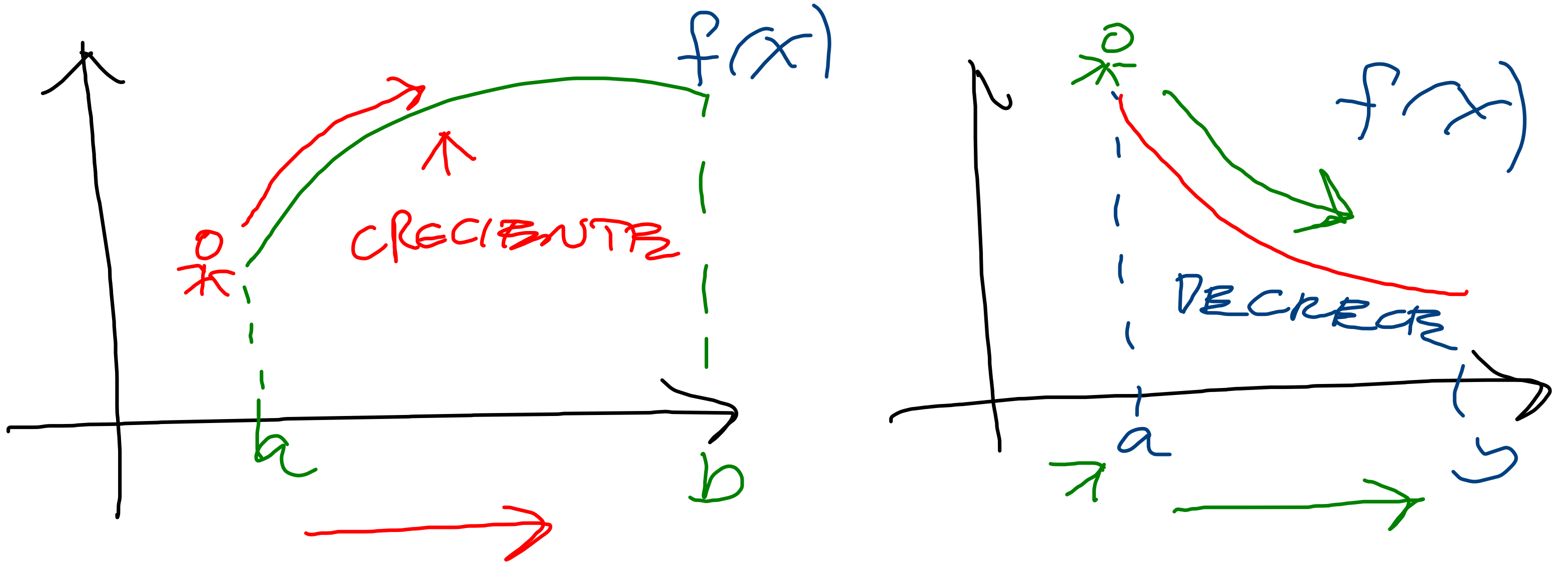
¿$f(x)$?,

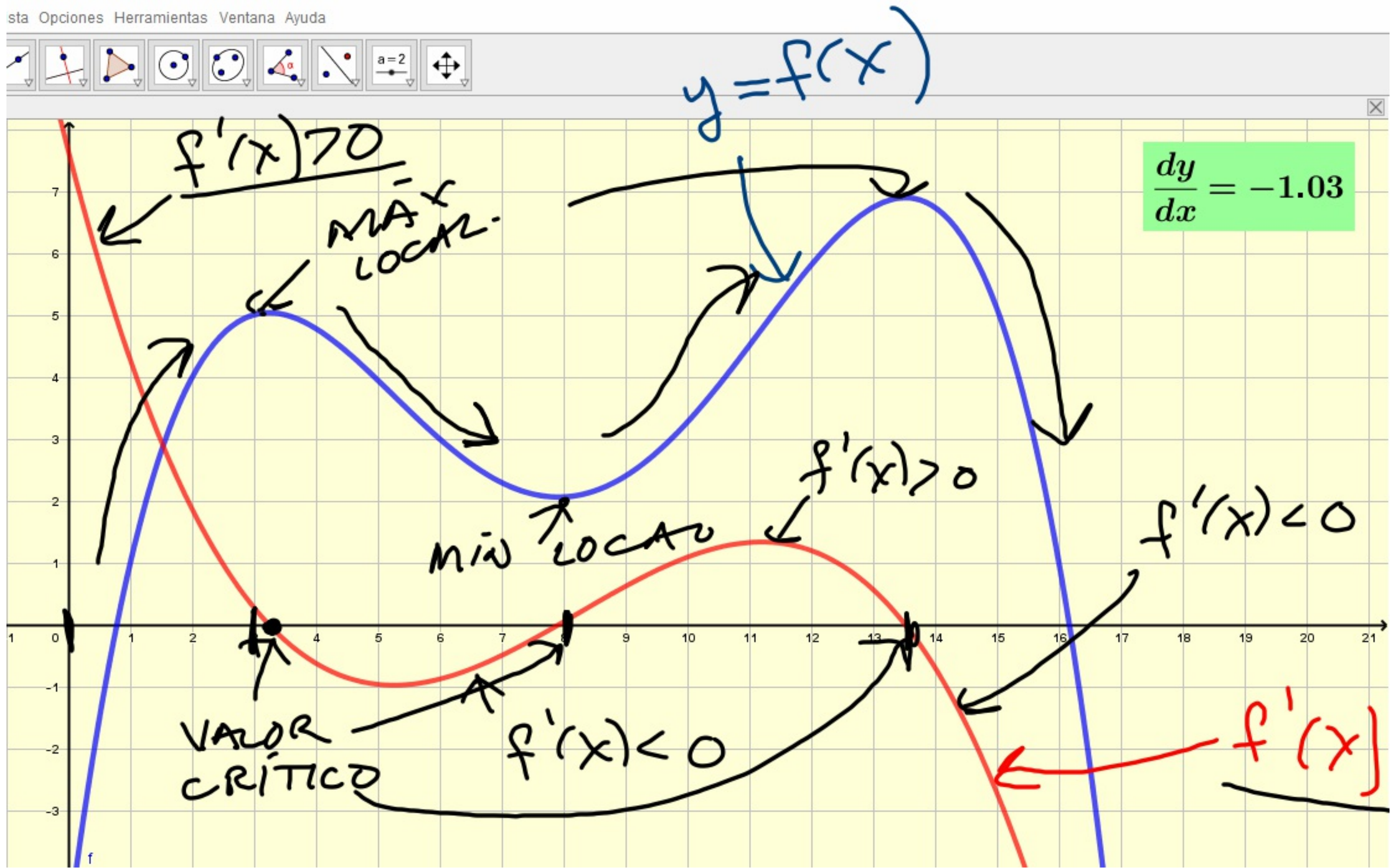
Primera derivada

Prueba creciente/decreciente

(a) Si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo, entonces f es creciente en ese intervalo.

(b) Si $f'(x) < 0$ sobre un intervalo, entonces f es decreciente en ese intervalo.



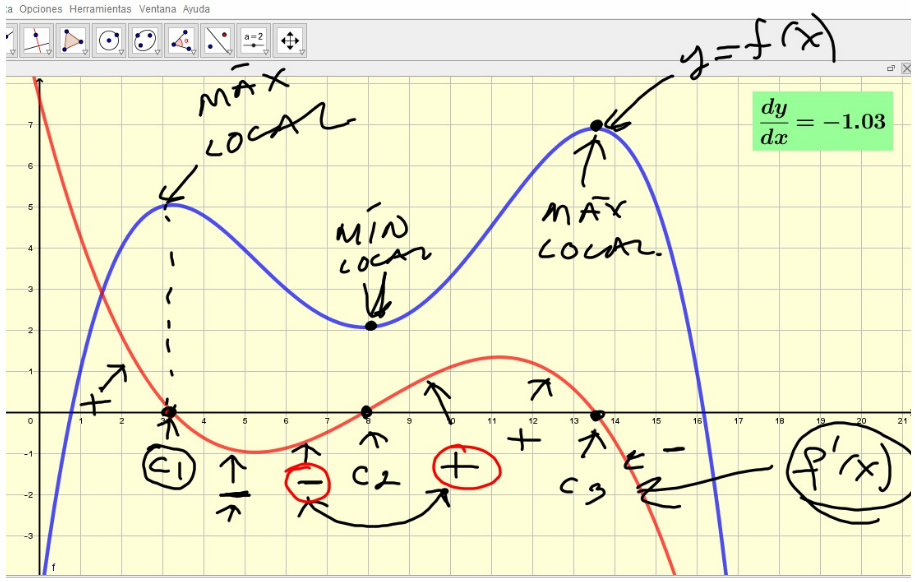


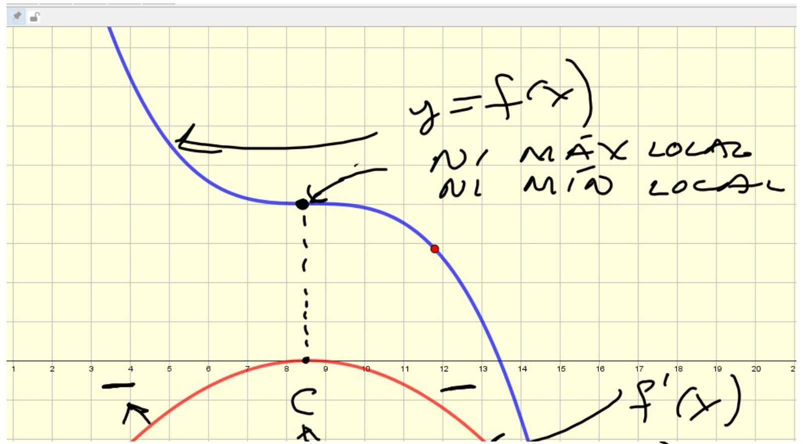
Prueba de la primera derivada Suponga que c es un número crítico de una función continua f.

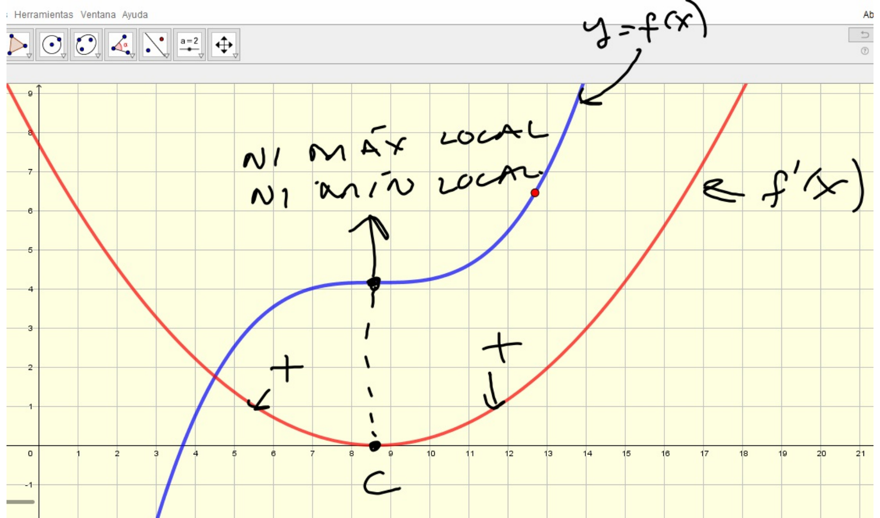
(a) Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c.

(b) Si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un mínimo local en c.

(c) Si f' es positiva por ambos lados de c, o negativa por ambos lados de c, entonces f no tiene ningún máximo o mínimo local en c.

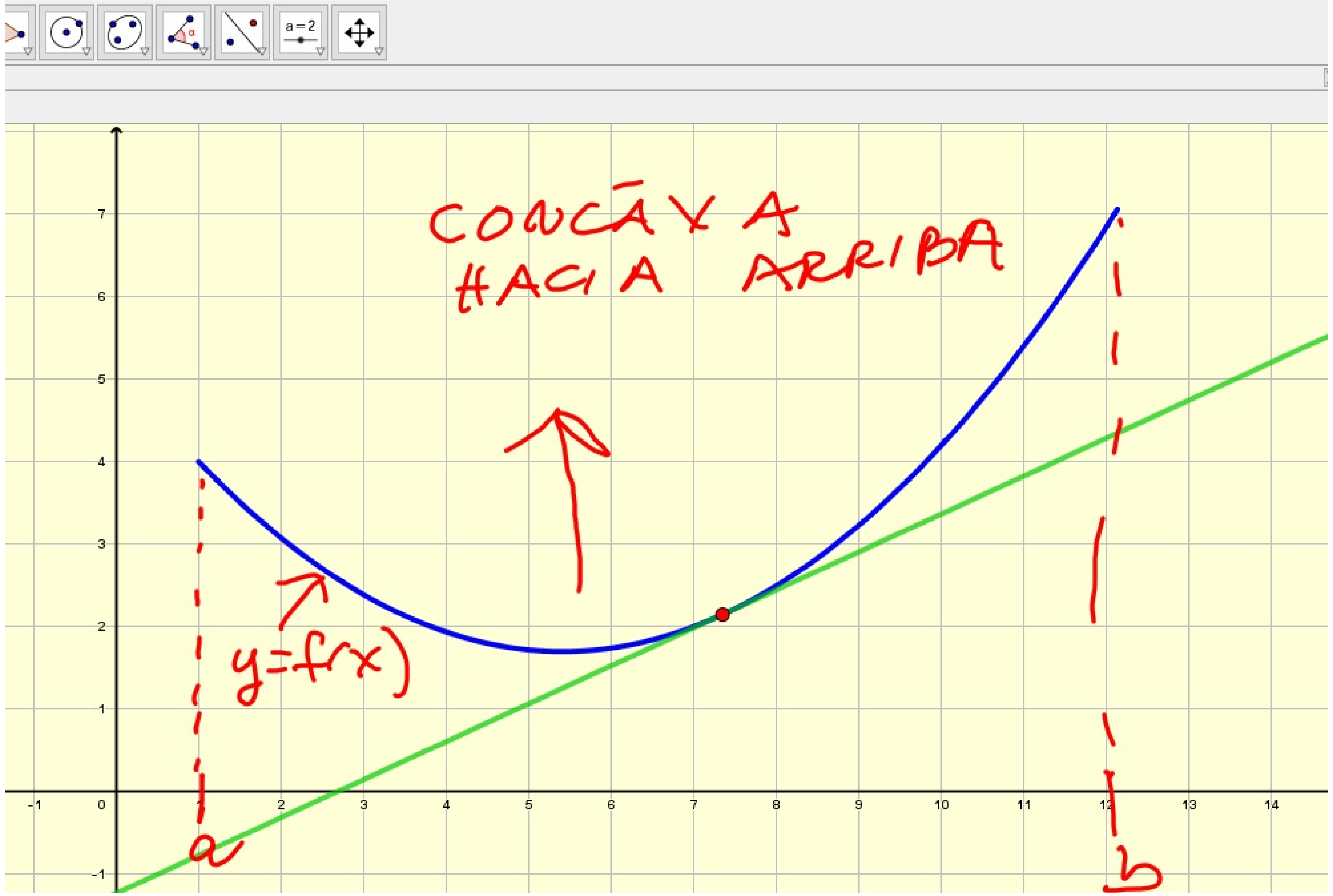


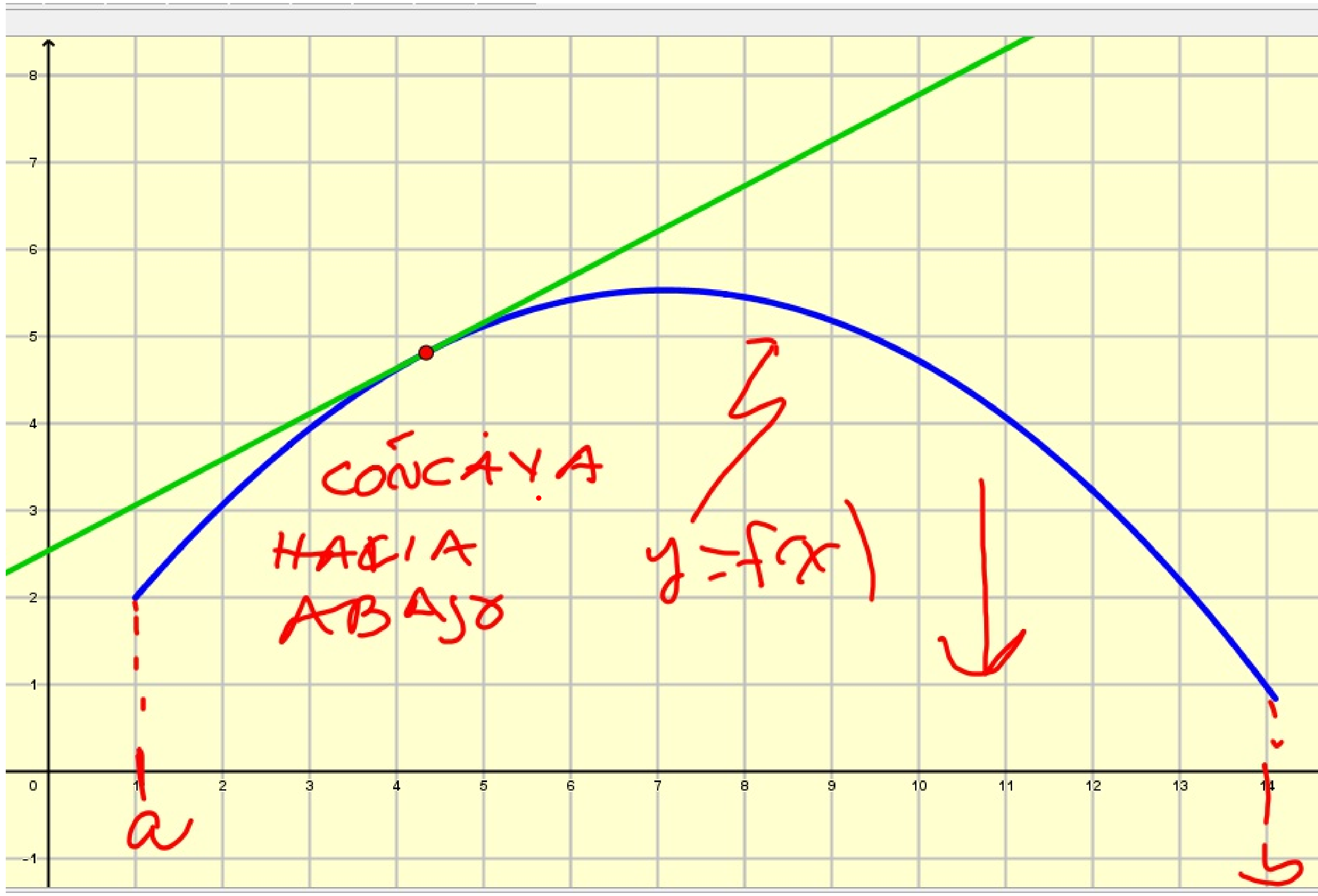




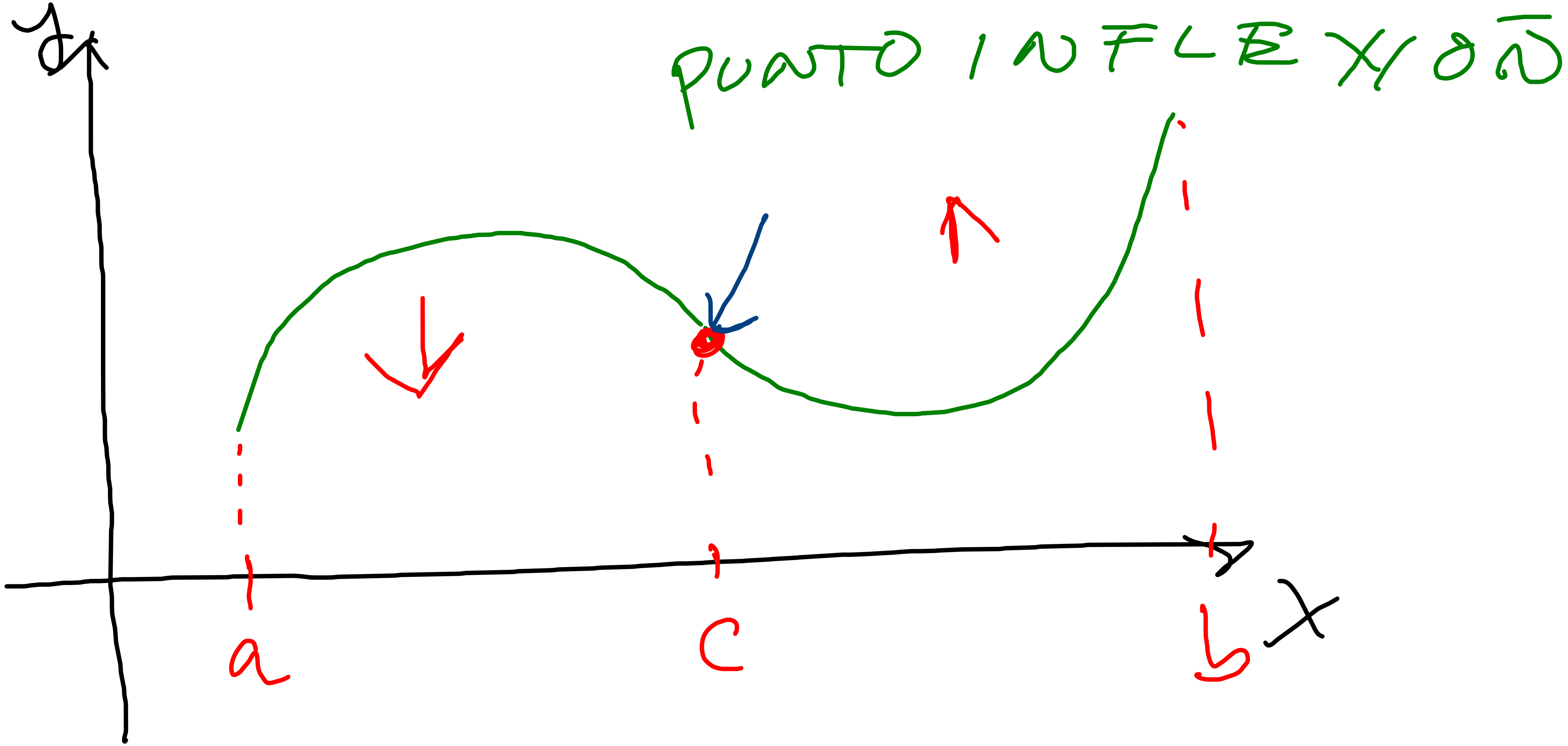
Segunda derivada

Definición Si la gráfica de f se encuentra arriba de todas sus rectas tangentes en un intervalo I, entonces se dice que es **cóncava hacia arriba** en I. Si la gráfica de f se encuentra abajo de todas sus rectas tangentes en I, se dice que es **cóncava hacia abajo** en I.





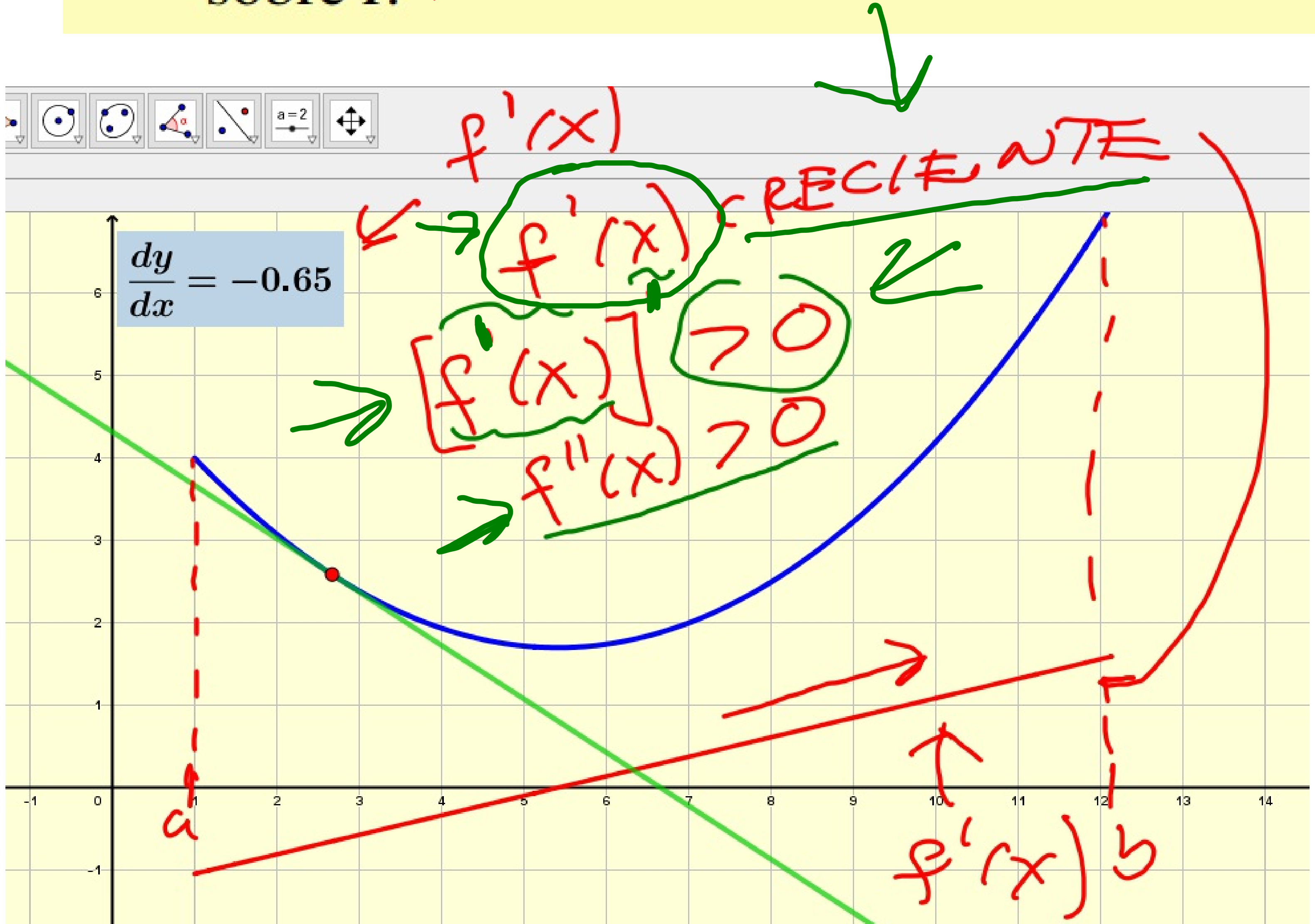
Definición Un punto P sobre una curva $y = f(x)$ se llama **punto de inflexión** si f es continua ahí y la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba en P.

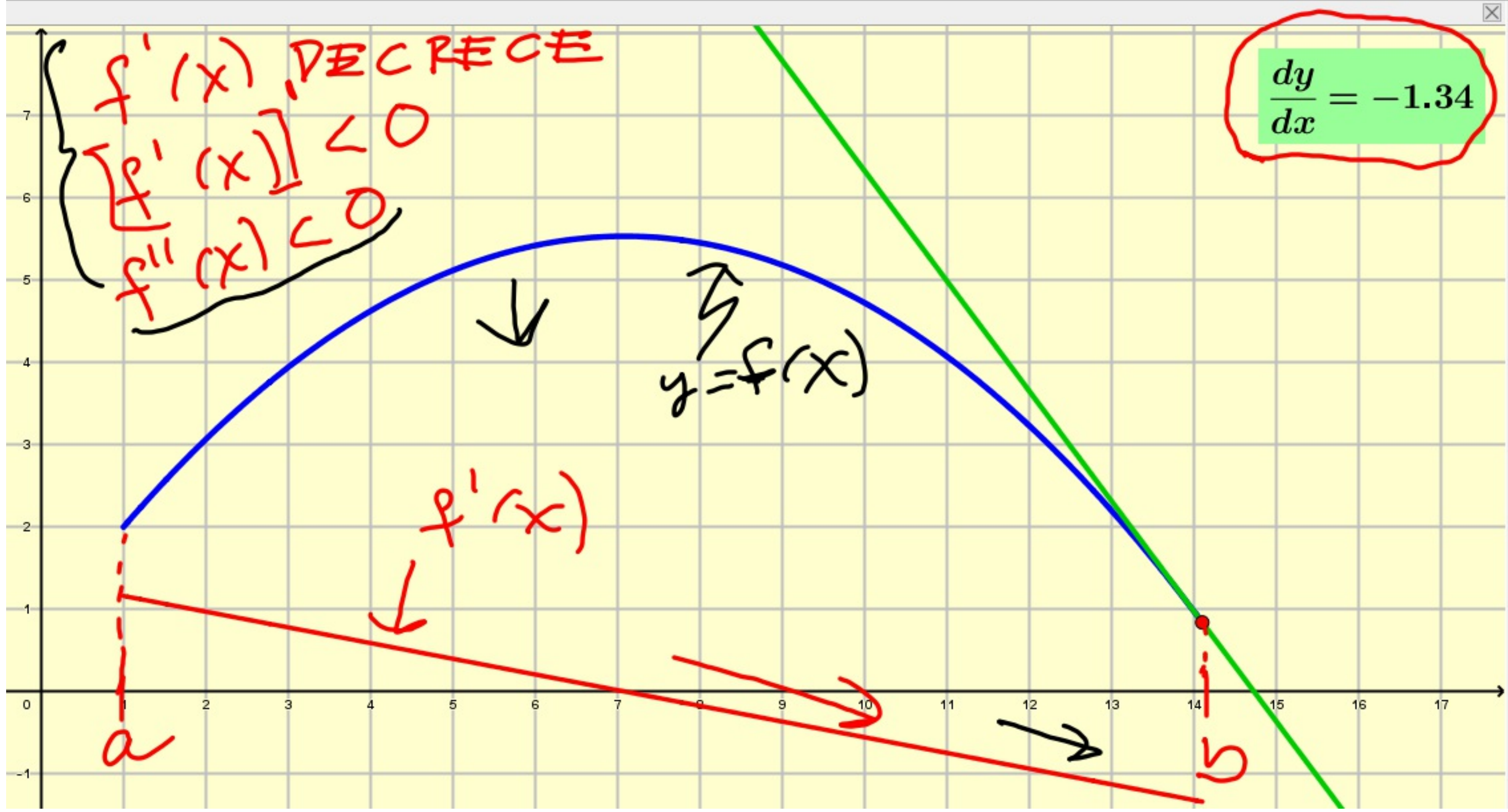


Prueba de concavidad

(a) Si $f''(x) > 0$ para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre I.

(b) Si $f''(x) < 0$ para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre I.



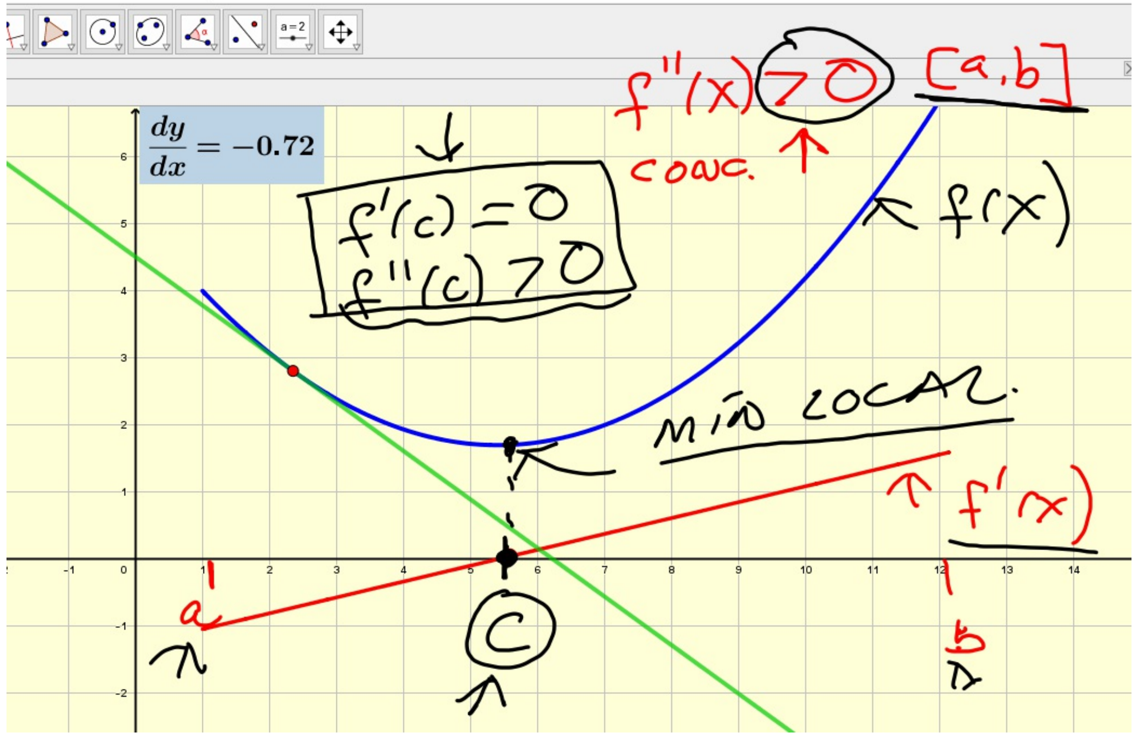


Prueba de la segunda derivada Suponga que f'' es continua cerca de c. ← CRÍTICO

(a) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en c.

(b) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en c.

a)



b)