Distribuciones especiales

lunes, 11 de septiembre de 2023 08:02

Distribución	Función de probabilidad	Media	Varianza
Binomial	$b(x;n,p)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$ $x=0,1,2,\ldots$	np	npq
Geométrica	$g(x;p)=pq^{x-1}$ $x=1,2,3,\ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Binomial Negativa	$b^*(x;k,p)=\binom{x-1}{k-1}p^k q^{x-k}$ $x=k,k+1,k+2,\ldots$	$\frac{k}{p}$	$\frac{kq}{p^2}$

Ejemplo:

- Consideremos el experimento en donde se lanza una moneda 3 veces.
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos caras en los tres lanzamientos?
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener en el tercer lanzamiento una segunda cara?
- ¿Cuál es la probabilidad de que en el tercer lanzamiento se obtenga la primera cara?

S = {CCC, CCE, CEC, ECC, CEE, ECE, EEC, EEE}

BINOMIAL b

n = número de ensayos
x = número de éxitos
p = probabilidad de éxito
q = probabilidad de fracaso (1-p)

$b(x;n,p) = {}_nC_x\, p^x q^{n-x}$

a.- n = 3, x = 2, p = 1/2 ÉXITO: CARA

$b(2;3,1/2) = {}_3C_2 (1/2)^2 (1-1/2)^1$
$= \boxed{3/8}$

BINOMIAL NEGATIVA (PASCAL) b*

x = Número de ensayo
K = Número de éxito

$b^*(x;K,p) = {}_{x-1}C_{K-1}\, p^K q^{x-K}$

x = 3, K = 2, p = 1/2

$b^*(3;2,1/2) = {}_{3-1}C_{2-1}(0{,}5)^2(1-0{,}5)^{3-2}$
$= {}_2C_1 (0{,}5)^2 (0{,}5)^1$
$= \boxed{2/8}$

Geometrica g

$g(x;p) = p\,q^{x-1}$ x = número de ensayo EL PRIMER ÉXITO

x = 3, p = 1/2

$g(3;1/2) = (0{,}5)(1-0{,}5)^{3-1}$
$= 0{,}5(0{,}5)^2$
$= \boxed{1/8}$

* $b^*(3;1,1/2) = {}_2C_0 (0{,}5)^1(0{,}5)^2$ 1

Ejemplo 2:

- La enfermedad de Tay es una afección genética que suele ser mortal en niños. Si ambos padres son portadores de la enfermedad, la probabilidad de que sus hijos desarrollen la enfermedad es aproximadamente 0.25. Suponga que un esposo y esposa son portadores y que tienen tres hijos. Si los resultados de los tres embarazos son mutuamente independientes, ¿Cuáles son las probabilidades de los siguientes eventos?
- Los tres hijos desarrollan la enfermedad.
- Sólo uno de los hijos desarrolla la enfermedad.
- El tercer hijo desarrolla la enfermedad, dado que los primeros dos no la desarrollaron.

a.- n = 3 ÉXITO: DESARROLLE LA ENFERMEDAD

x = 3, p = 0,25

$b(3;3,0{,}25) = {}_3C_3(0{,}25)^3(0{,}75)^0$
$= \boxed{0{,}0156}$

b.- n = 3, x = 1, p = 0,25

$b(3;1,0{,}25) = {}_3C_1(0{,}25)^1(0{,}75)^2$
$= \boxed{0{,}4219}$

c.- p = 0,25 INDEPENDIENTES

Ejemplo 3:

La probabilidad de que un paciente se recupere de una delicada operación de corazón es 0,9.

¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 5 de los próximos 7 pacientes que se sometan a esta intervención sobrevivan?

¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 5 de 7 pacientes que se sometan a esta intervención sobrevivan?

a.- n = 7 ÉXITO: SOBREVIVA

x = 5, p = 0,9

$b(7;5,0{,}9) = {}_7C_5(0{,}9)^5(0{,}1)^2$
$= \boxed{0{,}1240}$

b.- n = 7, x ⩾ 5, p = 0,9 $5 \le x \le 7$

x = 5 ó x = 6 ó x = 7

$b(7;x,0{,}9) = {}_7C_5(0{,}9)^5(0{,}1)^2 + {}_7C_6(0{,}9)^6(0{,}1)^1 + {}_7C_7(0{,}9)^7(0{,}1)^0$
$= \sum_{x=5}^{7} {}_7C_x (0.9)^x (0{,}1)^{7-x} = \boxed{0{,}9743}$

¿Cuál es la probabilidad de que menos de 5 pacientes se recuperen?

n = 7, x < 5, p = 0.9 $0 \le x \le 4$

$b(7;x,0{,}9) = \sum_{x=0}^{4} {}_7C_x(0{,}9)^x(0{,}1)^{7-x} = \boxed{0{,}0257}$

¿Cuál es la probabilidad que a lo mucho 5 pacientes se recuperen?

$n=7$

$x \leq 5$ $\quad 0 \leq x \leq 5$

$p=0.9$ $\quad b(7; x; 0.9) = \sum_{x=0}^{5} {}_7C_x (0.9)^x (0.1)^{7-x} = \boxed{0.1497}$

¿Cuál es la probabilidad de que más de 5 pacientes se recuperen?

$n=7$

$x > 5$ $\quad 6 \leq x \leq 7$

$p=0.9$ $\quad b(7; x; 0.9) = \sum_{x=6}^{7} {}_7C_x (0.9)^x (0.1)^{7-x} = \boxed{0{,}8503}$

Ejemplo 3:
La probabilidad de que una persona que vive en cierto condominio posea una perro se estima en 0.3.

a. Encuentre la probabilidad de que la décima persona entrevistada aleatoriamente en este condominio sea la quinta persona que posee un perro.

b. Encuentre la probabilidad de que la tercera persona entrevistada aleatoriamente en este condominio sea la primera persona que posee un perro.

a.- binomial b^*

$x = 10$ $\quad b^*(10; 5, 0{,}3) = {}_9C_4 (0{,}3)^5 (1-0{,}3)^5$

$k = 5$ $\quad = \boxed{0{,}0515}$

$p = 0{,}3$

b.- $x = 3$ $\quad g(3; 0.3) = 0{,}3(0{,}7)^2$

$p = 0.3$ $\quad = \boxed{0{,}147}$

* $x=3$
$k=1$
$p=0.3$ $\quad b^*(3, 1, 0{,}3) = {}_2C_0 (0{,}3)^1 (0{,}7)^2$

1

Ejemplo 4:

- Suponga que 90% de todas las baterías de cierto proveedor tienen voltajes aceptables. Un tipo de linterna requiere que las dos baterías sean tipo D y funcionará sólo si sus dos baterías tienen voltajes aceptables. Entre diez linternas seleccionadas al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos ocho funcionarán?

$x \geq$

$n=10$

$x \geq 8$ $\quad 8 \leq x \leq 10$

$p = 0{,}9(0{,}9) = 0{,}81$ $\quad b(10; x; 0{,}81) = \sum_{x=8}^{10} {}_{10}C_x (0{,}81)^x (0{,}19)^{10-x}$

$P(B_1 \cap B_2)$ $\quad = \boxed{0{,}7078}$

Ejemplo 5:

- Los registros de una compañía constructora de pozos, indican que la probabilidad de que uno de sus pozos nuevos, no requiera de reparaciones en el término de un año es de 0.80.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el sexto pozo construido por esta compañía en un año dado sea el segundo en requerir reparaciones?

b. ¿Cuál es la probabilidad que un año dado solamente dos de seis pozos construidos requieran reparaciones?

$p = 0{,}2$

a.- b^* $\quad b^*(6; 2, 0{,}2) = {}_5C_1 (0{,}2)^2 (0.8)^4 = \boxed{0{,}0819}$

$x = 6$

$k = 2$

b.- b $\quad b(2; 6, 0{,}2) = {}_6C_2 (0{,}2)^2 (0{,}8)^4 = \boxed{0{,}2458}$

$n = 6$

$x = 2$

Ejemplo 6:

- El 10% de los discos de computador producidos por un nuevo proceso salen defectuosos. Si hay 30 discos en una caja:
- ¿Cuántos esperaría usted que salieran defectuosos?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el número de discos defectuosos sea igual al número esperado?
- Se seleccionan 5 discos, ¿Cuál es la probabilidad de que el último disco sea el segundo que usted selecciona defectuoso?

$p = 0.1$

a.- $E(x) = np$

$= 30(0.1) = \boxed{3 \text{ DEFECTUOSOS}}$

b.- $n = 30$

No. esperado $x = 3$ $\quad b(3; 30, 0.1) = {}_{30}C_3 (0.1)^3 (0.9)^{27}$

$p = 0.1$ $\quad = \boxed{0{,}2361}$

c.- binomial negativa

_ _ _ _ ☑

$x = 5$ $\quad b^*(5; 2, 0.1) = {}_4C_1 (0.1)^2 (0.9)^3$

$k = 2$

$p = 0.1$ $\quad = \boxed{0{,}0292}$

- Ejemplo 7
- Un cliente potencial entra a una agencia de automóviles cada hora. La probabilidad de que una vendedora cierre una transacción es de 0.10. Si está determinada a continuar trabajando hasta vender tres automóviles.
- ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que trabajar exactamente ocho horas?
- ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que trabajar más de ocho horas?

a.- $p = 0.1$ _ _ _ _ _ _ _ $\boxed{—}$

- ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que trabajar más de ocho horas?

a.- $p = 0{,}1$

$q = 0{,}9$

$x = 8$

$K = 3$

$$b^*(8;3,\ 0{,}1) = {}_7C_2\,(0{,}1)^3(0{,}9)^5 = \boxed{0{,}0124}$$

b. $x > 8$ $\quad 1 - P(x \leq 8)$

$3 \leq x \leq 8$

$K = 3$

$$\overset{x=3}{b^*(x;3,0.1) = {}_2C_2\,(0.1)^3(0{,}9)^0} + \overset{x=4}{{}_3C_2\,(0,1)^3(0,9)^1} + \overset{x=5}{{}_4C_2\,(0,1)^3(0,9)^2} + \overset{x=6}{{}_5C_2\,(0,1)^3(0{,}9)^3} + \overset{x=7}{{}_6C_2\,(0,1)^3(0,9)^4} + \overset{x=8}{{}_7C_2\,(0,1)^3(0,9)^5}$$

$$= \sum_{x=3}^{8} {}_{(x-1)}C_2\ (0,1)^3(0,9)^{x-3} = 0{,}0381$$

$$1 - P(3 \leq x \leq 8)$$

$$1 - 0{,}0381 = \boxed{0{,}9619}$$

Ejemplo 8
De un lote grande de artículos fabricados en cierta máquina industrial el 10% tiene defectos. El gerente de la industria exige probar uno a uno artículos elegidos al azar de diferentes lotes. Si el primer artículo con defecto resulta antes de la sexta prueba el gerente subirá el precio del artículo debido a la garantía. Determine la probabilidad de que se lleve a efecto la media propuesta por el gerente.

x: No. de prueba

$p = 0.1$

$x < 6$ ó $x \leq 5 = 1 \leq x \leq 5$

$$g(x \leq 5;\ 0.1) = \overset{x=1}{0{,}1(0{,}9)^0} + \overset{x=2}{(0{,}1)(0{,}9)^1} + \overset{x=3}{0{,}1(0{,}9)^2} + \overset{x=4}{0{,}1(0{,}9)^3} + \overset{x=5}{0{,}1(0{,}9)^4}$$

$$= \sum_{x=1}^{5} (0,1)(0.9)^{x-1} = \boxed{0{,}4095}$$

binomial negativa

$x \leq 5$ $\quad 1 \leq x \leq 5$

$K = 1$

$p = 0{,}1$

$$b^*(x;1,0{,}1) = \sum_{x=1}^{5} {}^{1}_{\cancel{x-1}}C_{1-1}\ (0{,}1)^1(0{,}9)^{x-1}$$

$$= \boxed{0{,}4095}$$