# 1.5 Límites al infinito

## INTRODUCCIÓN

Los límites al infinito se utilizan para estudiar el comportamiento de las funciones cuando los valores de $x$ crecen sin límite o cuando decrecen si límite

## OBJETIVOS

Al finalizar el estudio y desarrollar las actividades de este tema el estudiante estará en capacidad de

- Calcular límites de funciones cuando *x* tiende al infinito positivo.
- Calcular límites de funciones cuando *x* tiende al infinito negativo.
- Encontrar las asíntotas horizontales de una función.

## Límites al infinito

La expresión

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Se lee "**El límite cuando $x$ tiende al infinito de la función $f(x)$ es $L$**", y significa que los valores de $f(x)$ se aproximan al número $L$ cuando los valores de $x$ crecen sin límite. La figura 8 muestra geométricamente el concepto de límite al infinito

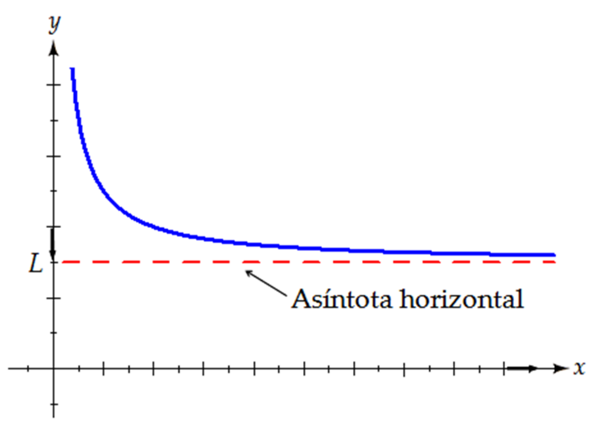



**Figura 1**

En forma equivalente la expresión

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ están muy cerca del número $L$ cuando $x$ toma valores negativos muy grandes. La figura 2 ilustra este límite

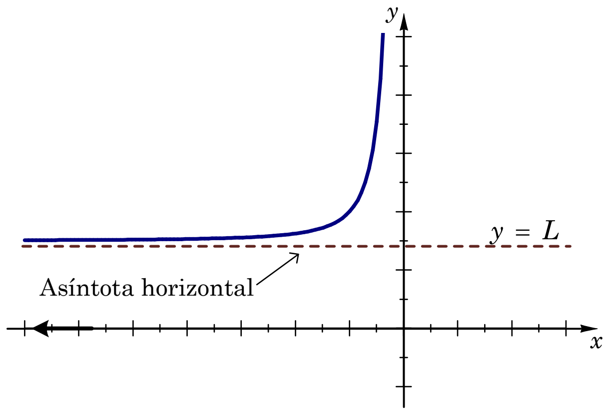



**Figura 2**

## Asíntota horizontal

La recta $y = L$ se llama asíntota horizontal de la gráfica de la función $f(x)$, si alguno de los siguientes límites es verdadero

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \text{o bien} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

La propiedad anterior sugiere que para obtener las asíntotas horizontales de una función, hay que calcular los límites cuando $x$ tiende al infinito positivo y cuando $x$ tiende al infinito negativo.

## Propiedades de los límites al infinito

Hay varias propiedades para el cálculo de límites al infinito, sin embargo, las dos que se presentan aquí son suficientes para calcular la mayor parte de los límites al infinito

### Propiedad 1

Si $r > 0$ entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^r} = 0$

Si $r > 0$ y si $x^r$ está definida para valores negativos de $x$ entonces $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^r} = 0$

### Propiedad 2

Si $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = L$ y la función $f$ es continua en $L$ entonces

$$\lim_{x\to\infty} f\left(g(x)\right) = f\left(\lim_{x\to\infty} g(x)\right) = f(L)$$

La propiedad anterior es de mucha utilidad cuando se quiere calcular límites al infinito de funciones compuestas.

## Propiedades del infinito

Cuando se calculan límites que involucran el infinito, es frecuente tener que realizar algunos cálculos que lo involucran. Estos cálculos se pueden realizar utilizando las propiedades de los límites. En forma simple se pueden expresar como

$$
\begin{aligned}
\infty + \infty &\to \infty \\
\infty \cdot \infty &\to -\infty \\
\infty \cdot (-\infty) &\to -\infty \\
(-\infty) \cdot (-\infty) &\to -\infty \\
c(+\infty) &\to +\infty \quad \text{si } \ c > 0 \\
c(+\infty) &\to -\infty \quad \text{si } \ c < 0 \\
(+\infty)^n &\to +\infty \quad \text{si } \ n > 0
\end{aligned}
$$

## Formas indeterminadas

Cuando se calculan límites, se pueden presentar alguna de las formas indeterminadas siguientes

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \infty - \infty, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad 1^{\infty}, \qquad \infty^{0}$$

Cuando esto sucede, es necesario manipular algebraicamente la expresión para poder calcular el límite.

## Ejemplo 1: Cálculo de límites al infinito

Calcule los siguientes límites

**a.** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3x}{2x^2 + 12}$ **b.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 3x}{2x^2 - 4x^3}$ **c.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 3x}{4 - 5x}$

## Solución

**a.** Al calcular el límite del numerador y del denominador se obtiene

$$\lim_{x\to\infty} \left(x^2 - 3x\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(2x^2 + 12\right) = +\infty$$

Como el límite de la función tiene forma indeterminada $\frac{+\infty}{+\infty}$ hay que multiplicar el numerador y el denominador por un factor de la forma $\frac{1}{x^n}$, en donde $n$ es la potencia mas grande que tenga la variable $x$ en el denominador

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x}{2x^2+12} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x}{2x^2+12} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{12}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{3}{x}}{2+\frac{12}{x^2}}$$

Ahora se utilizan las propiedades de los límites

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x}{2x^2+12} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{12}{x^2}}$$

$$= \frac{1-0}{2+0}$$

$$= \frac{1}{2}$$

**b.** para calcular el límite

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3x}{2x^2-4x^3}$$

Se procede de la misma forma que el inciso anterior, calculando los límites del numerador y denominador.

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x^2-3x\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(2x^2-4x^3\right) = -\infty$$

Los límites del numerador se han calculado fácilmente pues ya debe ser del conocimiento del estudiante el comportamiento final de los polinomios en el infinito positivo y en el infinito negativo.

Como el límite de la función tiene forma indeterminada $\frac{+\infty}{-\infty}$ hay que multiplicar el numerador y el denominador por un factor de la forma $\frac{1}{x^n}$, en donde $n$ es la potencia más grande que tenga la variable $x$ en el denominador

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3x}{2x^2-4x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3x}{2x^2-4x^3} \cdot \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3}-\frac{3x}{x^3}}{\frac{2x^2}{x^3}-\frac{4x^3}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{\frac{2}{x}-4}$$

Ahora se utilizan las propiedades de los límites, para terminar de calcular el límite

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x}{2x^2-4x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{\frac{2}{x}-4}$$

$$=\frac{0-0}{0-4}=\frac{0}{4}$$

$$=0$$

**c.** Para calcular el límite

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x}{4-5x}$$

Se procede de la misma forma que el inciso anterior, calculando los límites del numerador y denominador.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-3x\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(4-5x\right)=-\infty$$

Como el límite de la función tiene forma indeterminada $\frac{+\infty}{-\infty}$ hay que multiplicar el numerador y el denominador por un factor de la forma $\frac{1}{x^n}$, en donde $n$ es la potencia mas grande que tenga la variable $x$ en el denominador

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x}{4-5x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x}{4-5x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x}-\frac{3x}{x}}{\frac{4}{x}-\frac{5x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-3}{\frac{4}{x}-5}$$

Ahora se utilizan las propiedades de los límites, para terminar de calcular el límite

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x}{4-5x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-3}{\frac{4}{x}-5}$$

$$=\frac{(-\infty)-3}{0-5}$$

$$=\frac{-\infty}{-5}$$

$$=+\infty$$

## **Ejemplo 2:** Cálculo de límite al infinito con radical

Calcule el límite

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 9}}{2 - 5x}$$

## Solución

Al calcular el límite del numerador y del denominador se obtiene

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x - \sqrt{4x^2 + 9}\right) = -\infty - (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} (2 - 5x) = 2 - (-\infty) = +\infty$$

Como el límite de la función tiene forma indeterminada $\frac{-\infty}{+\infty}$ hay que multiplicar el numerador y el denominador por un factor de la forma $\frac{1}{x^n}$, en donde $n$ es la potencia mas grande que tenga la variable $x$ en el denominador

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 9}}{2 - 5x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 9}}{2 - 5x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{x} - \frac{\sqrt{4x^2 + 9}}{x}}{\frac{2}{x} - \frac{5x}{x}}$$

Observe que ahora se tiene un problema con la variable $x$ que aparece por debajo del radical. Para poder aplicar los teoremas de límites al infinito es necesario introducir $x$ dentro del radical, para ello es fundamental tomar en cuenta la siguiente propiedad, ya que de otra forma el resultado que se obtendrá será incorrecto

$$x = \begin{cases} \sqrt{x^2} & si \quad x \geq 0 \\ -\sqrt{x^2} & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Como en este problema $x \to -\infty$, debemos reemplazar $x = -\sqrt{x^2}$. Realizando la sustitución y simplificando se obtiene

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 9}}{2 - 5x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 9}}{2 - 5x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1 - \frac{\sqrt{4x^2 + 9}}{-\sqrt{x^2}}}{\frac{2}{x} - 5}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 9}}{2 - 5x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - \dfrac{\sqrt{4x^2 + 9}}{-\sqrt{x^2}}}{\dfrac{2}{x} - 5}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \sqrt{\dfrac{4x^2 + 9}{x^2}}}{\dfrac{2}{x} - 5}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \sqrt{4 + \dfrac{9}{x^2}}}{\dfrac{2}{x} - 5}$$

Utilizando las leyes para calcular límites al infinito se obtiene que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 9}}{2 - 5x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \sqrt{4 + \dfrac{9}{x^2}}}{\dfrac{2}{x} - 5}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{4 + 0}}{0 - 5}$$

$$= -\frac{3}{5}$$

## Ejemplo 3: Cálculo de límite al infinito con radical y sin denominador

Calcule el límite

$$\lim_{x \to +\infty} \left( \sqrt{9x^2 + ax} - 3x \right)$$

## Solución

Al intentar calcular este límite utilizando las reglas para evaluar el infinito se tiene

$$\lim_{x \to +\infty} \left( \sqrt{9x^2 + ax} - 3x \right) = \infty - \infty$$

El límite tiene forma indeterminada $\infty - \infty$, por lo que se deben realizar operaciones algebraicas que permitan utilizar las propiedades de los límites al infinito.

Racionalizando la expresión se tiene

$$\lim_{x \to +\infty} \left( \sqrt{9x^2 + ax} - 3x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left( \sqrt{9x^2 + ax} - 3x \right) \cdot \frac{\sqrt{9x^2 + ax} + 3x}{\sqrt{9x^2 + ax} + 3x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(9x^2 + ax) - 9x^2}{\sqrt{9x^2 + ax} + 3x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{ax}{\sqrt{9x^2 + ax} + 3x}$$

Ahora que ya se tiene una expresión racional, se multiplica el numerador y el denominador por $\dfrac{1}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{\sqrt{9x^2+ax}+3x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{ax}{x}}{\frac{\sqrt{9x^2+ax}}{x}+\frac{3x}{x}}$$

Como $x$ tiende al infinito positivo se tiene que $x=\sqrt{x^2}$ , entonces

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{\sqrt{\frac{9x^2+ax}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{\sqrt{9+\frac{a}{x}}}$$

Utilizando las propiedades de los límites al infinito se obtiene que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{\sqrt{9+0}}=\frac{a}{3}$$

## **Ejemplo 4:** Cálculo de límite de una función compuesta

Calcule el límite

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{x^2-1}{8-x^3}}$$

## Solución

Observe que en este problema hay que calcular el límite de una función compuesta y utilizará la propiedad correspondiente. Calculando el límite de la función racional dentro del coseno se tiene

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{8-x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{8-x^3}\cdot\frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}-\frac{1}{x^3}}{\frac{8}{x^3}-\frac{x^3}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}{\frac{8}{x^3}-1}$$

$$=\frac{0-0}{0-1}=0$$

Como la función raíz cúbica es continua en 0, se puede aplicar el teorema para el límite de una función compuesta, como se muestra a continuación

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{x^2-1}{8-x^3}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{8-x^3}}$$
$$= \sqrt[3]{0}$$
$$= 0$$

## Ejemplo 5: Cálculo de asíntotas horizontales

Determine las asíntotas horizontales de la función

$$f(x) = \frac{x+4}{\sqrt{4x^2-3x+5}}$$

## Solución

Para obtener las asíntotas horizontales de una función, es necesario calcular los límites

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Calculando el primero de los límites se tiene

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+4}{\sqrt{4x^2-3x+5}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+4}{\sqrt{4x^2-3x+5}}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{4}{x}}{\frac{\sqrt{4x^2-3x+5}}{\sqrt{x^2}}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{4}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{4}{x}}{\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}$$
$$= \frac{1+0}{\sqrt{4-0+0}}$$
$$= \frac{1}{2}$$

Por lo que la recta $y = \frac{1}{2}$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función *f*.

Calculando el segundo límite

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+4}{\sqrt{4x^2-3x+5}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+4}{\sqrt{4x^2-3x+5}}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+4}{\sqrt{4x^2-3x+5}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{x}{x}+\dfrac{4}{x}}{\dfrac{\sqrt{4x^2-3x+5}}{-\sqrt{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\dfrac{4}{x}}{-\sqrt{\dfrac{4x^2}{x^2}-\dfrac{3x}{x^2}+\dfrac{5}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\dfrac{4}{x}}{-\sqrt{4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}$$

$$=-\frac{1+0}{\sqrt{4-0+0}}$$

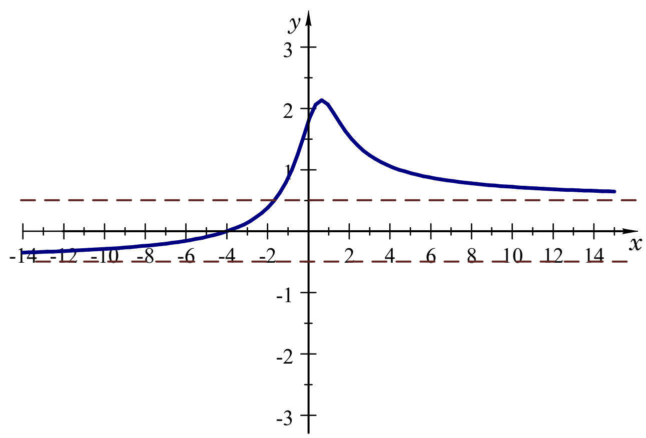
$$=-\frac{1}{2}$$

Por lo que la recta $y=-\dfrac{1}{2}$ es una asíntota horizontal de la función $f$.

Es decir que la función tiene dos asíntotas horizontales que son

$$y=\frac{1}{2}\quad \text{y} \quad y=-\frac{1}{2}$$

La siguiente figura muestra la representación gráfica de la función




## Ejercicios sobre límites al infinito

En los ejercicios 1 a 26 utilice las propiedades de los límites para calcular los límites siguientes:

**1.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x}{2x^2+3}$

**2.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^3-3x+2}{2x^2-3x^3}$

**3.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+5x^2+6}{2x^2+3}$

**4.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(2x-1)}{2x^2-3x}$

**5.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+5x^2+6}{2x^4-16}$

**6.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^3-3x+2}{2x^5-x^3+6}$

**7.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left( \dfrac{2}{x^4} - 1 \right)$

**8.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left( \dfrac{2x}{x-3} - \dfrac{5x-1}{x+4} \right)$

**9.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4 - 2\sqrt{x}}{5\sqrt{x} - 1}$

**10.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left( \dfrac{1 - 8\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x}} \right)$

**11.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 6}$

**12.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 6}$

**13.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 2}{\sqrt{9x^2 + 1}}$

**14.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + 2}{\sqrt{9x^2 + 1}}$

**15.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - \sqrt{x^2 + x}}{10 + x}$

**16.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - \sqrt{x^2 + x}}{10 + x}$

**17.** $\lim\limits_{t \to +\infty} \left( \sqrt{3t^2 + t} - 2t \right)$

**18.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left( x + \sqrt{x^2 + 2x} \right)$

**19.** $\lim\limits_{x \to \infty} \left( \sqrt{x^2 + 4x + 1} - x \right)$

**20.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left( 4x - \sqrt{16x^2 - x} \right)$

**21.** $\lim\limits_{t \to -\infty} \left( \sqrt{t^2 + t} - \sqrt{t^2 + 4} \right)$

**22.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left( 3x + \sqrt{9x^2 - x} \right)$

**23.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left( 3x - \sqrt{9x^2 + x} \right)$

**24.** $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\sqrt{t + \sqrt{t + \sqrt{t}}}}{\sqrt{t + 1}}$

**25.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left( \sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt[3]{x^3 + 1} \right)$

**26.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left( \sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx} \right)$

**27.** Halle el valor de $k$ de tal forma que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{kx^2 - x} + 12}{6 - x} = k$

**28.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{8x^2 + x}{2x^2 + 9}}$

**29.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left( \dfrac{2x^2 + 9}{8x^2 + x} \right)$

**30.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left( \dfrac{2x^2 + 9}{8x^2 + x} \right)^4 \left( \dfrac{2x}{3x + 1} \right)$

**31.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{sen}\left( \dfrac{\pi x}{4 + 3x} \right)$

**31.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \tan\left( \dfrac{\pi x}{x - 1} \right)$

**32.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \cos^{-1}\left( \dfrac{x}{\sqrt{1 + 4x^2}} \right)$