Derivadas de Funciones Trigonométricas Inversas

Las derivadas de las funciones trigonométricas se deducen a partir de la definición de función inversa y derivación implícita.

Sabemos que $\boldsymbol{y = sen^{-1}x} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{sen\,y = x}$ tomando en cuenta dominios

Si derivamos respecto de $\boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{D_x y = D_x sen^{-1}x}$ a partir de $\boldsymbol{D_x sen\,y = D_x x}$

$$\boldsymbol{\cos y\, D_x y = 1 \rightarrow D_x y = \frac{1}{\cos y}}$$

Utilizando la identidad $\boldsymbol{\cos y = \sqrt{1 - sen^2\,y}}$ y sabiendo que $\boldsymbol{sen\,y = x}$, sustituyendo en $\boldsymbol{\cos y = \sqrt{1 - x^2}}$ tenemos que

$\boldsymbol{D_x y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$ **por lo que**

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = D_x sen^{-1}x}}$$

Entonces

$$\boldsymbol{D_x sen^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \qquad \boldsymbol{D_x \cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\boldsymbol{D_x \tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}} \qquad \boldsymbol{D_x \cot^{-1}x = -\frac{1}{1+x^2}}$$

$$\boldsymbol{D_x}\sec^{-1}\boldsymbol{x} = \mathbf{\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}} \qquad \boldsymbol{D_x \csc^{-1}x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$$

Con regla de la cadena…. Si $u = f(\boldsymbol{x})$

$$\boldsymbol{D_x sen^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} D_x u} \qquad \boldsymbol{D_x cos^{-1} u = -\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} D_x u}$$

$$\boldsymbol{D_x tan^{-1} u = \frac{1}{1 + u^2} D_x u} \qquad \boldsymbol{D_x cot^{-1} u = -\frac{1}{1 + u^2} D_x u}$$

$$\boldsymbol{D_x sec^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{\mathbf{u}^2 - 1}} D_x u} \qquad \boldsymbol{D_x csc^{-1} u = -\frac{1}{u\sqrt{\mathbf{u}^2 - 1}} D_x u}$$