Proyecto 1 Intermedia 1

Matematica Intermedia 1 (Universidad de San Carlos de Guatemala)

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA / DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MATEMÁTICA INTERMEDIA II Sección: C
Catedrático: MBA ING. FRANCISCO GARCÍA
AUX. MIGUEL ORELLANA

PROYECTO No.1

No. de Registro	Nombre completo del estudiante
[redacted]	[redacted]
[redacted]	[redacted]

[redacted]

Guatemala, [28/09/2020]

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

El presente informe describe el Proyecto No.1 de matemática intermedia 2 cuyo tema a desarrollar es el de “Uso de diferenciales para la resolución de problemas”.

Se busca resolver los diferentes problemas planteados en el documento utilizando diferentes métodos y programas para la obtención de resultados más precisos, con esto se busca mejorar la capacidad de análisis matemático de los estudiantes.

Se utilizaron diferentes programas matemáticos para la resolución de los problemas como “Mathlab”,” Geogebra”, “Wólfram” y “Symbolab”. Luego de la recopilación de datos se continuo con la explicación de cada problema planteado y análisis de los datos obtenidos a través de un video.

Al finalizar el análisis de resultados se espera llegar a una conclusión sobre los datos solicitados y recopilados durante la realización del proyecto.

2.OBJETIVOS

Objetivos General

Realizar un análisis matemático completo sobre los problemas planteados para su posterior resolución.

Objetivos específicos

- Aplicar conocimientos matemáticos para la resolución de los problemas.

- Aprender a identificar el método óptimo para resolver cada tipo de problema.

- Aprender a identificar el método con el cual se obtiene un resultado más preciso minimizando el error en este.

3.MARCO TEORICO

Para plantear y resolver los problemas dados se utilizaron diversos conocimientos matemáticos y físicos que fueron explicados en la primera y segunda unidad del curso de Matemática Intermedia 2.

Suma de vectores

se utiliza para sumar cantidades que poseen de una magnitud y dirección para encontrar un vector resultante que tenga una magnitud y dirección dada por los 2 vectores anteriores este se conoce como vector resultante.

Identidades trigonométricas

son igualdades que involucran funciones trigonométricas, estas son útiles cuando se necesitamos simplificar o escribir una misma expresión de forma.

Diferenciales totales

Los diferenciales totales nos ayudan a conocer el error que puede tener una expresión de 2 o más variables siempre y cuando estas sean derivables, para obtener el diferencial total se tienen que derivar la función parcialmente y multiplicarla por el diferencial respecto al cual se derivó la función y así para cada variable que encontremos en la expresión y sumar todas estas.

Integral doble

La integral doble es utilizada para calcular volúmenes bajo la superficie de una función que depende de 2 variables.

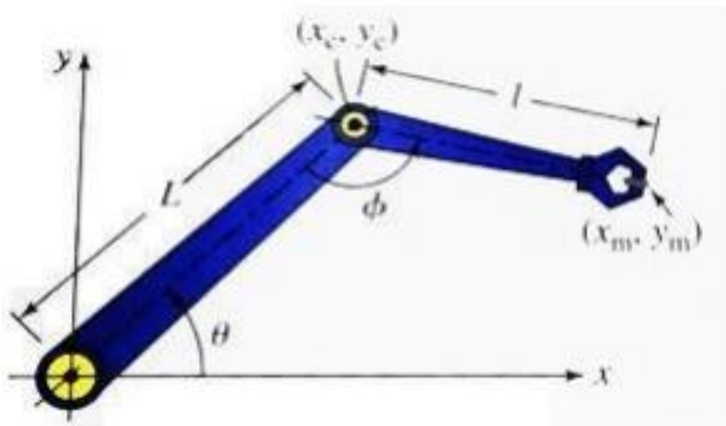
Sumatoria de Riemann

La sumatoria de Riemann conocida como una integral por definición se trata de construir elementos diferenciales a lo largo de una función y con estos elementos diferenciales construir el Área o volumen deseado.

4.RESULTADOS

Problema 1:

Brazo robótico Un brazo de robot bidimensional cuyo hombro está fijo en el origen sigue el rastro de su posición por medio de un ángulo del hombro θ y un ángulo del codo φ como se muestra en la figura. El ángulo del hombro se mide en el sentido contrario a las manecillas del reloj desde el eje x positivo y el ángulo del codo se mide en esa misma dirección desde el abrazo superior hasta el brazo inferior, los cuales tienen una longitud L y l.



a) La ubicación de la unión del codo está dada por $(xc\ ,\ yc)$, donde

xc = $Lcos\theta$,

yc = $Lsen\theta$.

Encuentre las fórmulas correspondientes para la ubicación $(xm,\ ym)$ de la mano.

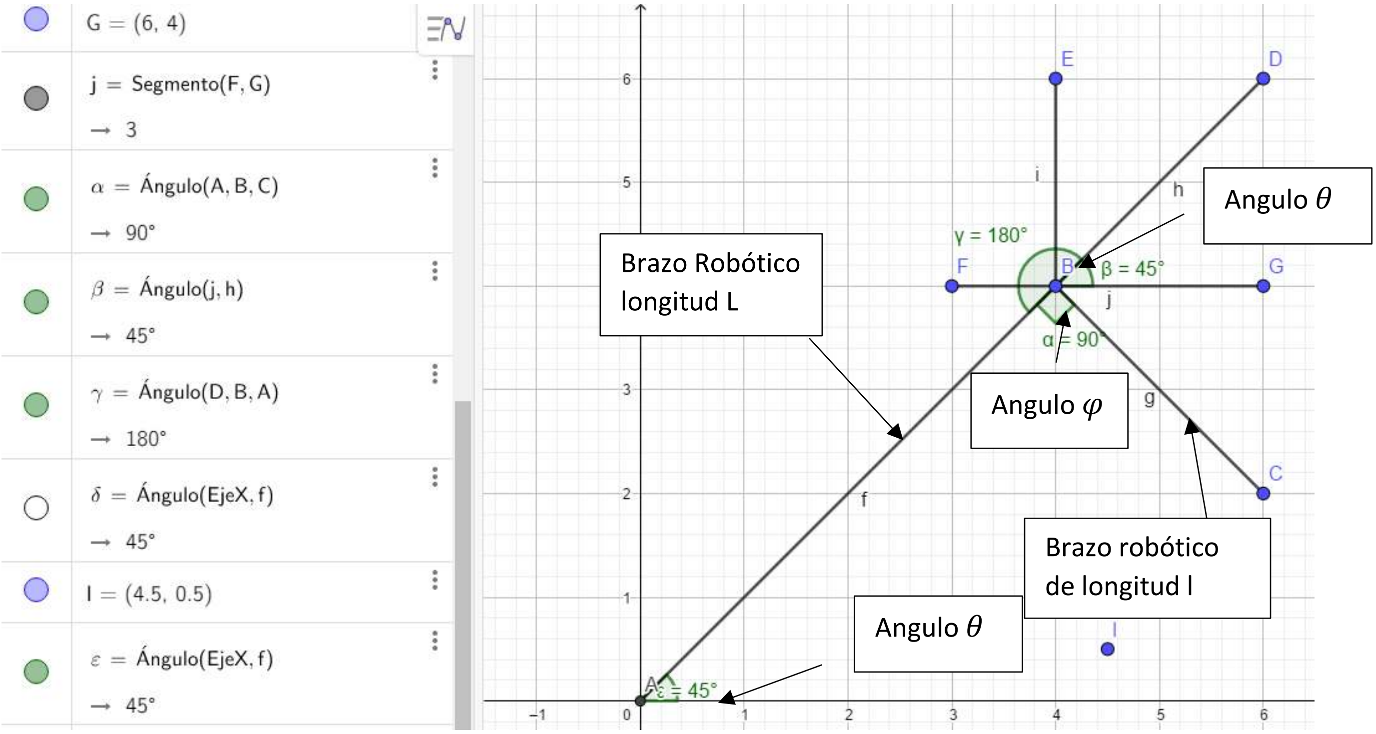
Procedimiento

Ya que sabemos las coordenadas de la unión podemos hace un vector nuevo que vaya desde la Unión hasta el final del otro brazo robótico de longitud l y sumar las componentes de los 2 vectores para obtener un vector resultante en xm y ym.

Xm=Lcos(θ)$+\mathrm{lcos}(\theta+\ \varphi+180)$.

Ym$=$ Lsin(θ)$+\mathrm{lsin}(\theta+\ \varphi+180)$.

Se llego a la conclusión de que el complemento para obtener la posición xm tenía que ser $\mathrm{l}\cos(\varphi + 180 + \theta)$ ya que este es el vector medido desde la posición xc hasta el punto xm. Y que el Angulo se mide desde el origen seria la suma de $(\theta + 180 + \varphi)$.



Este complemento se puede reescribir de la siguiente manera gracias a las identidades trigonométricas que dictan que cos (180+ θ) = -cos(θ) y sin (180+ θ) =-sin(θ).P

Xm=Lcos(θ)-lcos(θ+ φ).

Ym= Lsin(θ)-lsin(θ+ φ).

Respuestas de la pregunta A

B). Muestre que las diferenciales totales de xm y ym pueden escribirse como:

$$dxm = -ymd\theta + (yc - ym)\, d\varphi.$$

$$dym = -xmd\theta + (xc - xm)\, d\varphi.$$

Procedimiento:

Para encontrar el diferencial total de xm se tiene que tomar la función de xm y derivarla parcialmente en θ y φ.

$$xm = Lcos(\theta) - lcos(\theta + \phi)$$

$$dxm = -Lsin(\theta)d\theta + lsin(\theta + \phi)d\theta + 0d\phi + lsin(\phi + \phi\,)d\phi$$
$$dxm = -\big(Lsin(\theta) - lsin(\theta + \phi)\big)d\theta + ld\phi$$

$$ym = \ Lsin(\theta)d\theta - lsin(\theta + \phi)$$

$$dxm = -(ym)d\theta + lsin(\phi)d\phi$$

$$ym = Lsin(\theta) - lsin(\theta + \phi) \longrightarrow -ym + Lsin(\theta) = lsin(\theta + \phi)$$

$$dxm = -(ym)d\theta + \big(-ym + Lsin(\theta)\big)d\phi \longrightarrow yc = Lsin(\theta)$$

$$dxm = -ymd\theta + (yc - ym)d\phi$$

Para encontrar el diferencial total de ym se tiene que tomar la función de ym y derivarla parcialmente en θ y φ.

$$ym = Lsin(\theta) - lsin(\theta + \phi)$$

$$dym = Lcos(\theta)d\theta - lcos(\theta + \phi)d\theta + 0d\phi - lcos(\theta + \phi)d\phi$$

$$dym = \big(Lcos(\theta) - lcos(\theta + \phi)\big)d\theta - lcos(\theta + \phi)d\phi$$

$$xm = Lcos(\theta) - lcos(\theta + \phi) \longrightarrow -xm + Lcos(\theta) = lcos(\theta + \phi)$$

$$dym = xmd\theta - (-xm + Lcos(\theta))d\phi$$

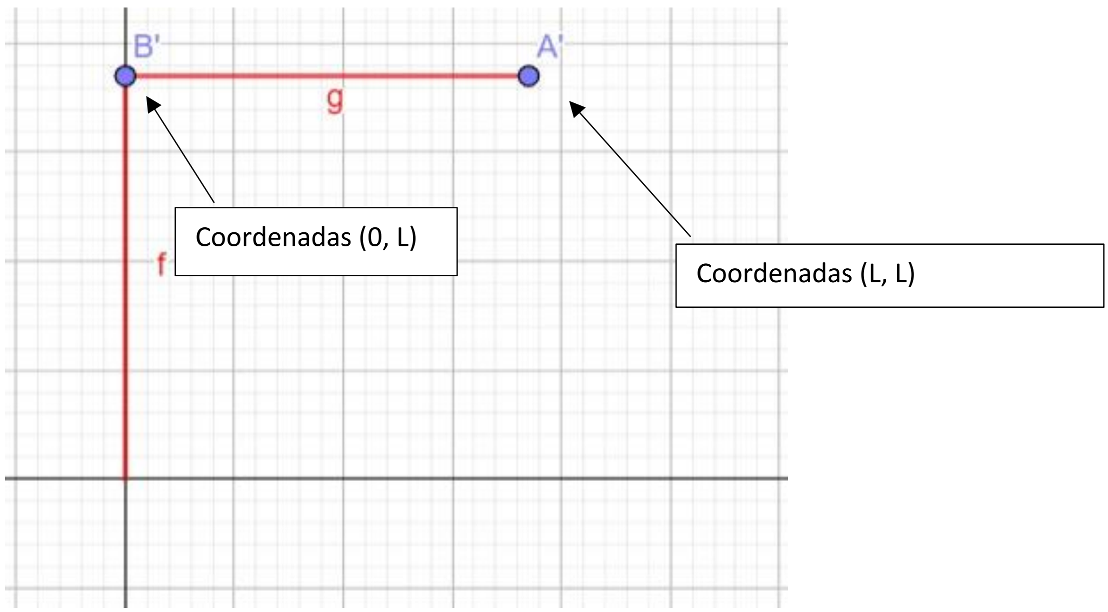
$$dym = xmd\theta - (-xm + xc)d\phi$$

$$dym = xmd\theta + (xm - xc)d\phi$$

El segundo diferencial no quedo igual al que se encuentra en el documento.

c)Suponga que L = l y que el brazo está ubicado de manera que alcanza el punto (L, L). Suponga también que el error en la medición de cada uno de los ángulos θ y φ es a lo más de $\pm\frac{3}{4}$ Calcule el error máximo aproximado en la coordenada x de la ubicación de la mano, para cada una de las dos posiciones posibles.

La primera posición (L, L) es:



Para encontrar el error de medición en la coordenada x utilizamos la ecuación encontrada anteriormente.

$$dxm = -ymd\theta + (yc - ym)d\phi$$

Se sustituten los valores $Ym = Yc = L$ ya que estos 2 valores son iguales entonces la y $d\theta = d\phi = \pm\frac{\pi}{240}$

Se convirtieron los grados hexadecimales a radianes ya que la calculadora tomaria el $\frac{3}{4}$ como una unidad no como grados.

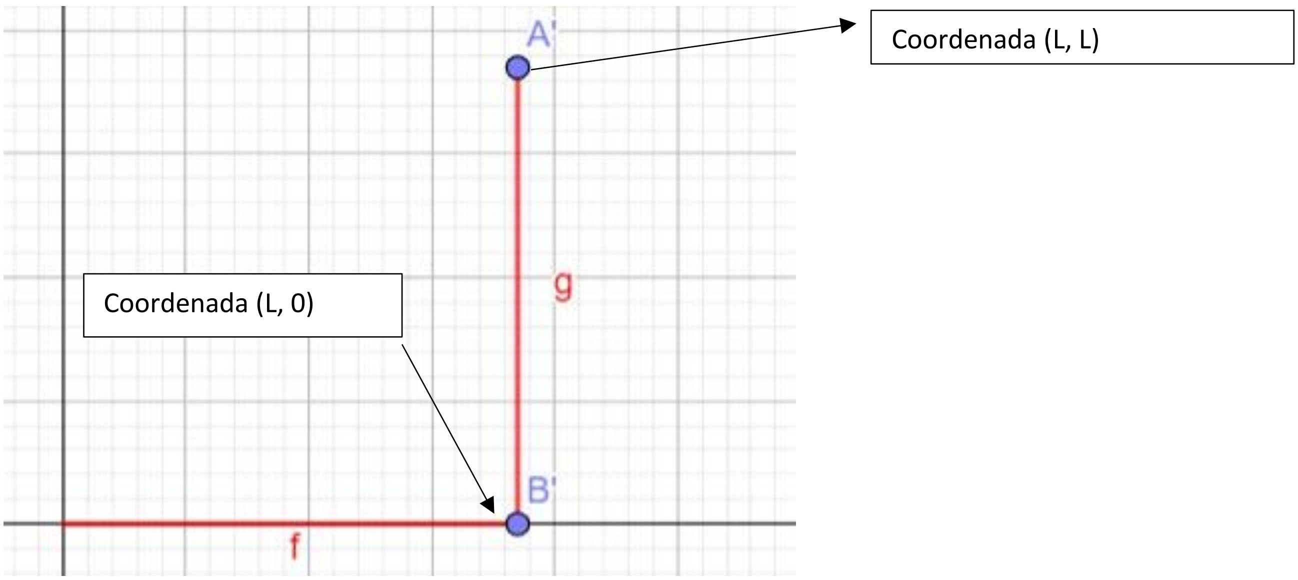
Reescribiendo la ecuación con los valores

$$dxm = -Ld\theta + (L - L)d\phi$$

$$dxm = -Ld\theta$$

$$dxm = \pm L(\frac{\pi}{240})$$

Segunda posición



Se sustituten los valores $Yc = 0,\ Ym = L$ y $d\theta = d\phi = \pm\frac{\pi}{240}$ en la ecuación, Se convirtieron los grados hexadecimales a radianes ya que la calculadora tomaria el $\frac{3}{4}$ como una unidad no como grados.

$0.75\ a\ Radianes\ es \frac{\pi}{240}$

$$dxm = -ymd\theta + (yc - ym)d\phi$$

Reescribiendo la ecuación con los valores

$$dxm = -Ld\theta + (0 - L)d\phi$$

$$dxm = -Ld\theta - Ld\phi$$

$$dxm = -L\left(\frac{\pi}{240}\right) - L(\frac{\pi}{240})$$

$$dxm = -2L\left(\frac{\pi}{240}\right)$$

$$dxm = -L\left(\frac{\pi}{120}\right)$$

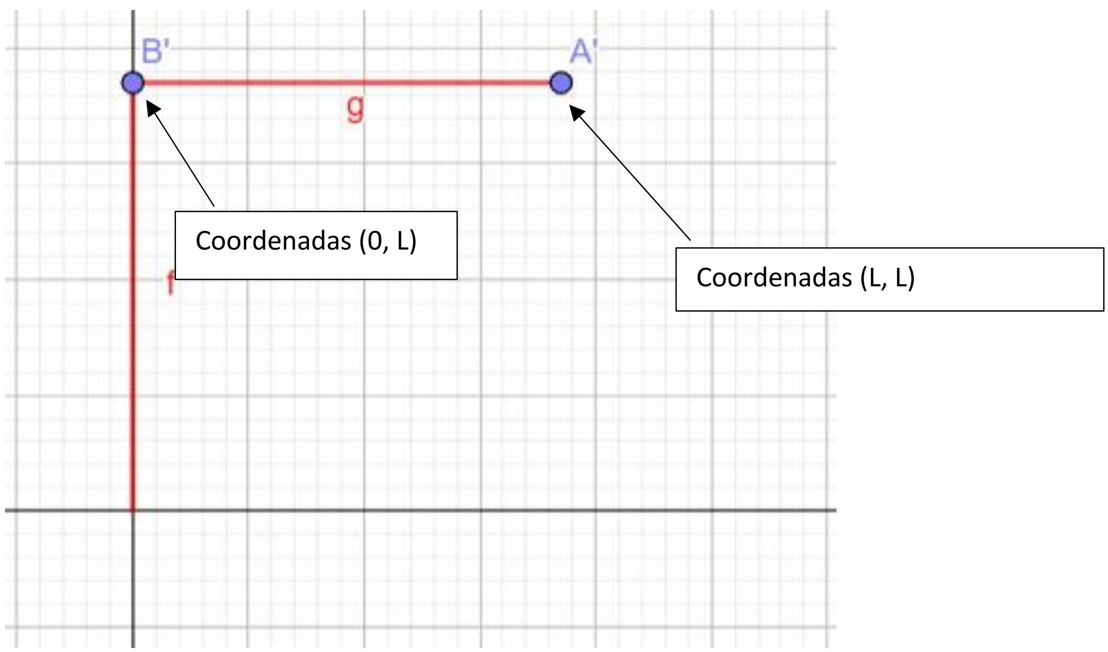
d) Obtenga en valor numérico de sus resultados valuando para L igual a dos veces la suma de los dígitos de su carnet, para cada una de las posiciones mencionadas en el inciso anterior.

Suma de los digitos del carnet 201903787 dos veces

L=(2+0+1+9+0+3+7+8+7)*2

L=74

La primera posición (L, L) es:



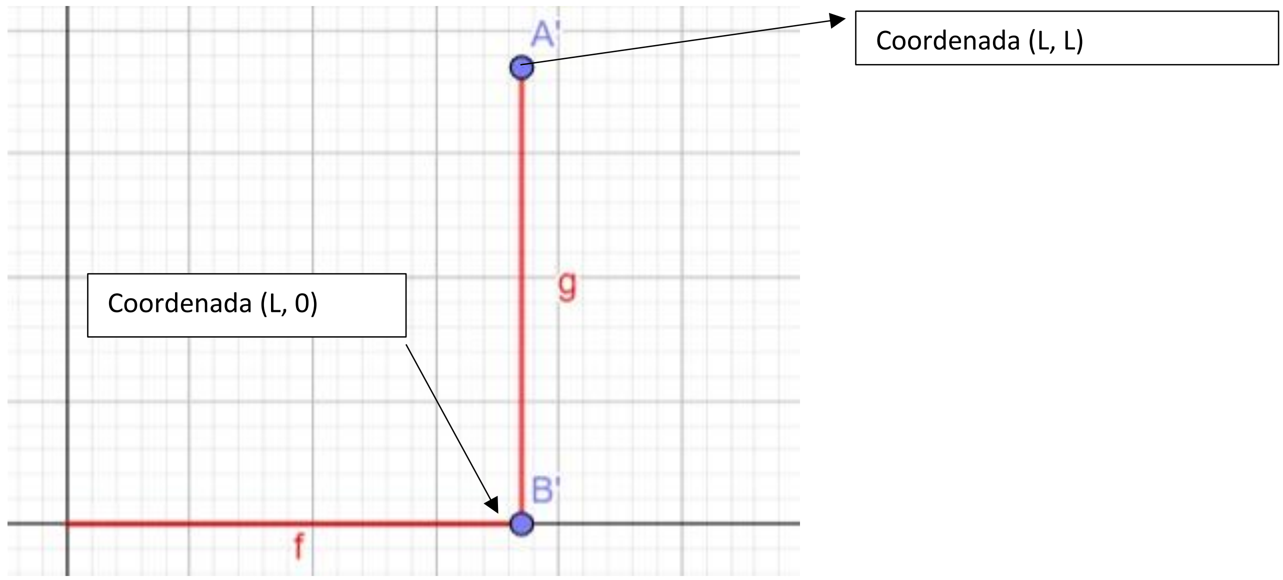
El error para la primera Posición

$$dxm = \pm L(\frac{\pi}{240})$$

$$dxm = \pm 74(\frac{\pi}{240})$$

$$dxm = \pm(\frac{35\pi}{120})$$

El error para la segunda posición



Suma de los digitos del carnet 201903787 dos veces

L=(2+0+1+9+0+3+7+8+7)*2

L=74

El error para la segunda Posición:

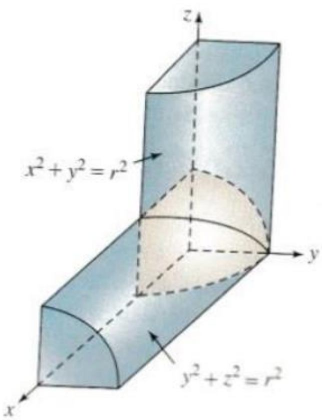
$$dxm = -L\left(\frac{\pi}{120}\right)$$

$$dxm = -74\left(\frac{\pi}{120}\right)$$

$$dxm_2 = \pm(\frac{37\pi}{120})$$

Problema 2

El sólido acotado por los cilindros $x^2 + y^2 = r^2$ y $y^2 + z^2 = r^2$ recibe el nombre de bicilndro. Un octavo del sólido se muestra en la figura. Elija y evalúe la integral correcta correspondiente al volumen V del bicilndro.



a) $$4\int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\left(r^2-y^2\right)^{1/2}dydx$$

b) $$8\int_{0}^{r}\int_{0}^{\sqrt{r^2-y^2}}\left(r^2-y^2\right)^{1/2}dxdy$$

c) $$8\int_{0}^{r}\int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}}\left(r^2-y^2\right)^{1/2}dydx$$

La integral correcta seria la del inciso B y C ya que son la misma integral solo que sus cambiaron los límites de integración y su orden, la opción A no pude ser ya que los límites que toma corresponden a los primeros 4 cuadrantes entonces se tendría que multiplicar por 2 ya que se da la integral da la mitad del volumen.

Explicación:

Función que determina la altura es $z^2 + y^2 = r^2$ en términos z=$\sqrt{r^2 - y^2}$

Como solo queremos el primer octante 0≤y≤r Y de $y^2 + x^2 = r^2$ en términos de x es $x = \sqrt{r^2 - y^2}$ por lo tanto los límites de integración de la integral doble son

$$0 \leq y \leq r$$

$$0 \leq x \leq \sqrt{r^2 - y^2}$$

Y la función que da la altura a los cuadrados es $\sqrt{r^2 - y^2}$ entonces la integral en el primer octante está dada por.

$$\int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} \sqrt{r^2 - y^2}\, dxdy$$

Debido a que solo estamos tomando el primer octante y la figura se muestra en los 8 octantes se debe de multiplicar por 8.

$$8\int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} \sqrt{r^2-y^2}\, dxdy$$

A. Sustituya el valor de r por la suma de los dígitos de su carnet, en el resultado de la integral y valúe, para obtener un valor del volumen.

Utilizando el carnet de Sebastián Pivaral

R=2+0+1+9+0+7+0+6+4=29

Entonces

$$8\int_0^{29} \int_0^{\sqrt{841-y^2}} \sqrt{841-y^2}\, dxdy$$

$$8\int_0^{29} x * \sqrt{841-y^2}|_0^{\sqrt{841-y^2}} dy$$

$$8\int_0^{29} \left(\sqrt{841-y^2} * \sqrt{841-y^2}\right) - (\sqrt{841-y^2} * 0)dy$$

$$8\int_0^{29} \left(\sqrt{841-y^2}\right)^2 dy \longrightarrow 8\int_0^{29} 841-y^2 dy$$

$$8[841y - \frac{y^3}{3}]_0^{29} \longrightarrow 8\left[(841*29) - \frac{29^3}{3}\right] - 8\left[(841*0) - \frac{0^3}{3}\right]$$

$$V = 8[24389 - \frac{24389}{3}] \qquad V = 130074.667u^3$$

El volumen calculado a mano con integral doble es de $130074.667u^3$

Calculando con Wolphram alpha:

Computational Inputs:

» function to integrate: 8*(841-y^2)^(1/2)

» variable 1: y

» lower limit 1: 0

» upper limit 1: 29

» variable 2: x

» lower limit 2: 0

» upper limit 2: (841-y^2)^(1/2)

Compute

Definite integral: More digits

$$\int_0^{29}\int_0^{\sqrt{841-y^2}} 8\sqrt{841-y^2}\,dx\,dy = \frac{390224}{3} \approx 130075.$$

Download Page POWERED BY THE **WOLFRAM LANGUAGE**

Los resultados son los mismos por lo tanto podemos concluir que el volumen que calculamos antes es correcto. Y se puede comprobar que la opción C también es la correcta ya que da el mismo resultado, se utilizo el mismo programa para calcular la integral.

Definite integral:

$$\int_0^{29}\int_0^{\sqrt{841-x^2}} 8\sqrt{841-y^2}\,dy\,dx = 130075.$$

B. Calcule el volumen que obtuvo valuando la integral, haciendo el cálculo con una hoja electrónica, sumando n elementos diferenciales de volumen. Donde n = 8r

Para calcular una integral doble a través de una suma de Riemann con N elementos diferenciales se utilizo una hoja de cálculos de Excel con La regla del punto medio.

Para el cual se hizo el cálculo de la primera integral para que quedara en términos de Y así poner aplicar una suma de Riemann más sencilla con N=232 elementos diferenciales como se muestra en la imagen se cálculo el número de elementos el intervalo de integración que es desde 0 a 29 posteriormente se calculó la altura de cada diferencial.

Por último, se encontró el Área que generaban los 232 elementos y se sumaron para encontrar el volumen deseado, se multiplico por 8 ya que la función que ingresamos para evaluar la sumatoria de Riemann no contaba que necesitamos los 8 octantes.

	A	B	C	D	E	F	G
222	222	27.625	77.859375	9.73242188			
223	223	27.75	70.9375	8.8671875			
224	224	27.875	63.984375	7.99804688			
225	225	28	57	7.125			
226	226	28.125	49.984375	6.24804688			
227	227	28.25	42.9375	5.3671875			
228	228	28.375	35.859375	4.48242188			
229	229	28.5	28.75	3.59375			
230	230	28.625	21.609375	2.70117188			
231	231	28.75	14.4375	1.8046875			
232	232	28.875	7.234375	0.90429688			
233							
234							
235				Columna A		Columna B	
236	Volumen bajo la curva aproximada			N elementos		Intervalo de integración	
237	16311.8203						
238							
239	Volumen total aproximado			Columna C		Columna D	
240	130494.563			altura de los rectangulos		Area de los rectangulos	
241							

El Área que se definió para 232 elementos diferenciales es 130494.563

c. Dé una explicación lógica que justifique la diferencia entre ambos volúmenes.

Debido a que la sumatoria de Riemann tiene un límite de elementos que forman el volumen estos no serán suficientes calcular el Área de una manera precisa, solo nos da un valor aproximado del Volumen deseado, si se quiere obtener el Volumen real se tendrían que utilizar ∞ Elementos diferenciales.

5.CONCLUSIONES

- Nos fueron de gran ayuda todos los conocimientos aprendidos a lo largo de la carrera y en el curso de matemática intermedia 2 ya que nos ayudaron a explicar cómo solucionar los problemas, así mismo encontrar la manera más fácil de dar la solución.

- Se logro determinar que la manera más precisa para encontrar el volumen generado por una curva es utilizar una integral triple y identificar con cuales límites de integración se pueden resolver más fáciles las integrales.

- Se logro determinar que la sumatoria de Riemann para determinar volúmenes hay que utilizar Infinitos elementos diferenciales para que el error al momento de calcular el volumen sea el mínimo o no exista.

6. REFERENCIAS

1. Alcántar, R. (2020). Integral doble - Portafolio de Cálculo Vectorial de Raúl Alcántar Peñaloza. Recuperado el 25 de Septiembre de 2020, de https://sites.google.com/site/portafolioraulalcantar/cuarto-parcial/integral-doble

2. (2020). Recuperado el 27 de septiembre de 2020, de https://matematica.laguia2000.com/general/identidades-trigonometricas

3. Stewart, J. (2012). *Cálculo de varias variables Trascendentes tempranas* (7th ed.). Cengage Learning Editores.

4. Suma de vectores: método gráfico, ejemplos, ejercicios resueltos - Lifeder. (2020). Recuperado el 24 de Septiembre de 2020, de https://www.lifeder.com/suma-de-vectores/#:~:text=La%20suma%20de%20vectores%20es%20la%20operaci%C3%B3n%20de,har%C3%ADa%20con%20cantidades%20escalares%2C%20es%20decir%2C%20adicionando%20n%C3%BAmeros.

5. Sumas de Riemann sobre rectángulos. (2020). Recuperado el 27 de Septiembre de 2020, de https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/SumasRiemannRect-JS/index.html

6. Zill, D. (2011). *Cálculo de una variable* (4th ed.). México: McGraw Hill.