Función de probabilidad continua

lunes, 2 de octubre de 2023 08:04

Ejemplo 1:

- Suponga que el tiempo de atención de cada cliente en una estación de servicio es una variable aleatoria continua con la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}(x+2) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea x variable aleatoria continua (duración en horas)

- Verifique que es una función de densidad.
- Calcule la probabilidad de que el tiempo de atención esté entre 15 y 30 minutos.
- ¿Cuál es la probabilidad que de 20 clientes que llegaron a la estación de servicio menos de 3 sean atendidos en menos de 15 minutos?
- Calcule la media y varianza de la distribución.

VERIFICAR

$$\int_0^1 \frac{2}{5}(x+2)\,dx = 1$$

$$\frac{2}{5}\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_0^1 = 1$$

$$\frac{2}{5}\left(\frac{5}{2}\right) = 1$$

$1 = 1$ ✓ SI ES UNA FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

b.- $P(15 \le x \le 30)$ min

$$P(1/4 \le x \le 1/2)\ h = \int_{1/4}^{1/2} \frac{2}{5}(x+2)\,dx = 19/80 = \boxed{0,2375}$$

c.- $n = 20$

$x < 3$ $\quad 0 \le x \le 2$

$p = 17/80$

$$P(x < 15\,min) = P(x < 1/4\,h) = \int_0^{1/4} \frac{2}{5}(x+2)\,dx = 17/80$$

$$b(x; 20, 17/80) = \sum_{x=0}^{2} {}_{20}C_x\,(17/80)^x(1 - 17/80)^{20-x}$$

$$= \boxed{0,1702}$$

d.- ESPERANZA = MEDIA

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,x\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{5}(x+2)\cdot x\,dx = 8/15 = 0,5333 \text{ horas}$$

TIEMPO PROMEDIO DE ESPERA ES 32 MIN.

e.- VARIANZA σ^2

$$\sigma^2 = \int_0^1 (x - 8/15)^2 \, \frac{2}{5}(x+2) \, dx = 37/450 \simeq 0{,}0822 \; u^2$$

DESVIACIÓN

$$\sigma = \sqrt{37/450} \simeq \boxed{0{,}2867 \text{ HORAS}}$$

$*$ $\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2$

$$E(x^2) = \int_0^1 \frac{2}{5}(x+2) \, x^2 \, dx = 11/30$$

$$\sigma^2 = 11/30 - (8/15)^2 = 37/450$$

- Ejemplo 2
- Suponga que el error en la temperatura de reacción, en °C, para un experimento controlado de laboratorio es una variable aleatoria continua X, que tiene la función de densidad de probabilidad:
- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} & -1 < x < 2 \end{cases}$; $0 \; en \; otro \; caso$
- Verifique que es una función de densidad.
- Encuentre la probabilidad P(0<x≤1)
- Encuentre F(x) y utilícela para evaluar (0<x≤1) y (1.5<x≤2)
- Calcule la esperanza
- Calcule la desviación estándar

- VERIFICAR $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{x^2}{3} \, dx = 1$

$1 = 1$ ✓ ES UNA FUNCIÓN DE DENSIDAD

b.- $$P(0 < x \leq 1) = \int_0^1 \frac{x^2}{3} \, dx = 1/9 \simeq \boxed{0{,}1111}$$

c.- $F(x) \longrightarrow$ FUNCIÓN ACUMULADA

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, dt$$

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{t^2}{3} \, dt \implies \left. \frac{t^3}{9} \right|_{-1}^{x}$$

$$F(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{1}{9}$$

$$\boxed{F(x) = \frac{x^3+1}{9} \quad -1 < x < 2}$$

FUNCIÓN ACUMULADA

$$P(0 < x \leq 1) = \left.\frac{x^3+1}{9}\right|_0^1 = \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = 1/9$$

$$P(1{,}5 < x \leq 2) = \left.\frac{x^3+1}{9}\right|_{1,5}^2 = 1 - 35/72 = 37/72 \simeq \boxed{0{,}5139}$$

d.- $$E(x) = \mu = \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{3} \cdot x \, dx = 5/4 = \boxed{1{,}25\ °C}$$

e.- $$\sigma^2 = \int_{-1}^{2} (x - 5/4)^2 \frac{x^2}{3} dx = 51/80$$

$$\sigma = \sqrt{51/80} = \boxed{0{,}7984\ °C}$$

Ejemplo 3:
El número total de horas, **medidas en unidades de 100 horas**, que una familia utiliza una aspiradora en un periodo de un año es una variable aleatoria continua X que tiene la función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ \mathbf{2 - x} & 1 \leq x < 2 \\ 0 \textit{ en otro caso} & \end{cases}$$

Encuentre la probabilidad de que, en un periodo de un año, una familia utilice su aspiradora:

1. Menos de 120 horas
2. Entre 50 y 100 horas
3. ¿Cuál es la probabilidad de que de 20 familias al menos 3 de ellas utilicen su aspiradora como mínimo 150 horas?

VERIFICAR $$\int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx = 1$$

$1 = 1$ ✓

a.- $x < 120$ horas

$$\frac{120}{100} = 1{,}2$$

$$P(x < 1{,}2) = \int_0^1 x\,dx + \int_1^{1,2} (2-x)\,dx$$

$$= 17/25 = \boxed{0.68}$$

b.- $50 < x < 100$

$$P(0.5 < x < 1) = \int^1 x\,dx = 3/8 = \boxed{0{,}375}$$

$$P(0.5 < x < 1) = \int_{0,5}^{1} x\,dx = 3/8 = \boxed{0,375}$$

c.- $n = 20$

$x \geq 3 \qquad 3 \leq x \leq 20$

$p = 1/8$

$$P(x \geq 1,5) = \int_{1,5}^{2} (2 - x)\,dx = 1/8$$

$$b(x; 20, 1/8) = \sum_{x=3}^{20} {}_{20}C_x \,(1/8)^x (7/8)^{20-x}$$

$$= \boxed{0,4647}$$

Ejemplo 4:

La resistencia de una muestra de un determinado material viene dada por una variable aleatoria, "X" con función de distribución de probabilidad **acumulada:**

$$F(x) = \begin{cases} 0 \; x < 0 \\ 3x^2 - 2x^3 \; 0 \leq x < 1 \\ 0 \; x \geq 1 \end{cases}$$

a. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de material tomado al azar esté entre 0,4 y 0,8 la resistencia?

b. Una muestra de material se encuentra en estado ideal de resistencia si ésta se encuentra entre 0.4 y 0.8. Si se considera 10 muestras de materiales, ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 7 de ellos tengan resistencia ideal?

c. ¿Cuál será el número medio de materiales con resistencia no ideal que se tendrá que escoger hasta encontrar uno con resistencia ideal?

a.- $P(0,4 \leq x \leq 0,8)$

$$3x^2 - 2x^3 \Big|_{0,4}^{0,8} = 112/125 - 44/125 = 68/125 = \boxed{0,544}$$

* FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 6x - 6x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{OTRO CASO} \end{cases}}$$

b. $n = 10$

$x \geq 7 \qquad 7 \leq x \leq 10$

$p = 0,544$

$$b(10; x, 0,544) = \sum_{x=7}^{10} {}_{10}C_x \,(0,544)^x (1 - 0,544)^{10-x}$$

$$= \boxed{0,2535}$$

c.- Geométrica

$$\mu = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}544} = 1{,}8382 \simeq \boxed{2 \text{ MUESTRAS}}$$

RESISTENCIA IDEAL ← p

- Ejemplo 5
- Un profesor universitario nunca termina su clase antes del final de la hora y siempre termina dentro de dos minutos después de la hora. Sea X=el tiempo que transcurre entre el final de la hora y el final de la clase y suponga que la función de densidad de probabilidad de es:
- $f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 \le x \le 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$
- Determine el valor de k.
- ¿Cuál es la probabilidad de que la clase termine dentro de 1 minuto del final de la hora?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la clase continúe durante por lo menos 90 segundos después del final de la hora?

$$\int_0^2 kx^2\,dx = 1$$

$$k\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^2\right) = 1$$

$$k\left(\frac{8}{3}\right) = 1$$

$$k = 3/8$$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 3/8\,x^2 & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{OTRO CASO} \end{cases}}$$

b.- $P(x \le 1) = \int_0^1 3/8\,x^2\,dx = 1/8 = \boxed{0{,}125}$

c.- $x \geq 90\text{ s}$

$\frac{90}{60} = 3/2 \text{ min}$

$$P(x \geq 1{,}5 \text{ min}) = \int_{1{,}5}^2 3/8\,x^2\,dx = 37/64 \simeq \boxed{0{,}5781}$$