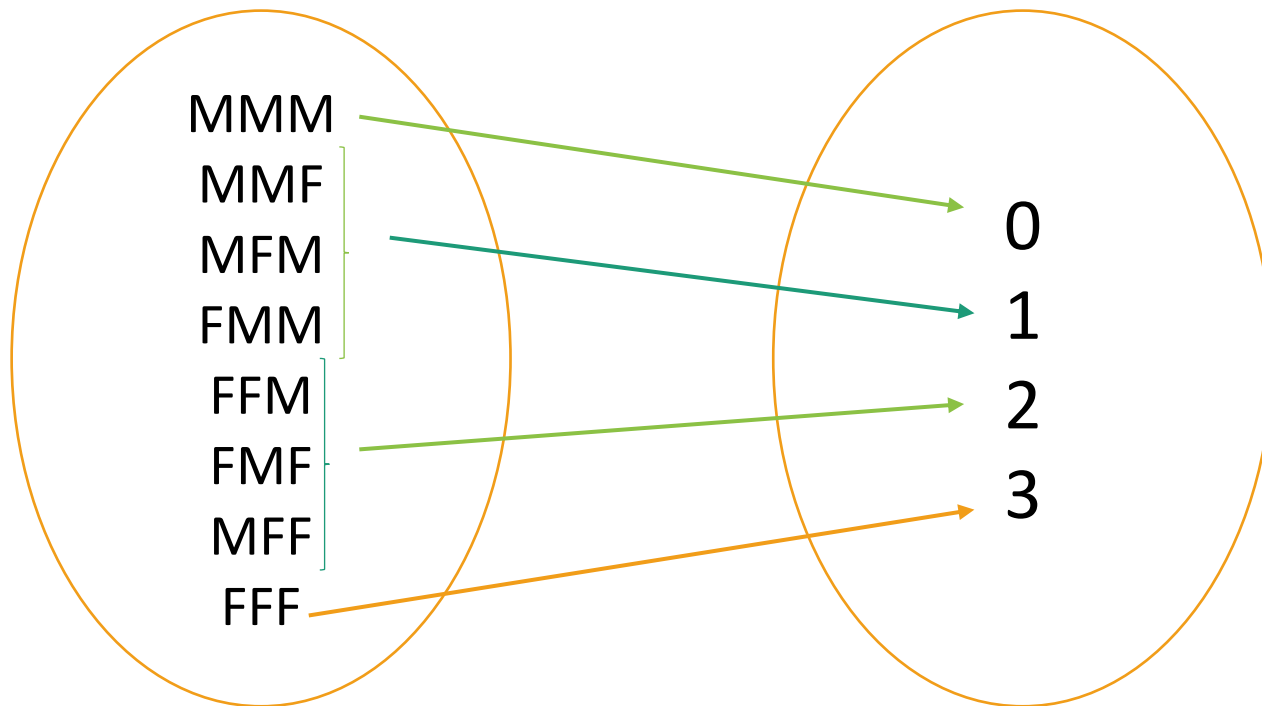




Variables
aleatorias
(III
Unidad)

- De un conjunto de personas se seleccionan 3 al azar y se clasifican de acuerdo a su género: masculino o femenino.
- X = numero de mujeres seleccionadas. (Variable)
- $R_x = \{0, 1, 2, 3\}$



Variables Aleatorias

El concepto de variable aleatoria proporciona una medida para relacionar cualquier resultado con una medida numérica, es decir la variable que asocia un numero con el resultado de un experimento aleatorio se conoce como variable aleatoria.

Recorrido de una variable aleatoria (R_x): se define como el conjunto de todos los valores posibles que puede tomar la variable.

Las variables aleatorias pueden clasificarse como:

- Unidimensionales
 - Bidimensionales
-



Variables Aleatorias Unidimensionales

Se definen cuando interesa analizar y observar solo una de las características del espacio muestral y se asigna, a cada elemento de este, una función que se asocia con un número real.

Las variables aleatorias unidimensionales a su vez, se clasifican según su recorrido en:

- Discretas
 - Continuas
-

Variables Aleatorias Unidimensionales Discretas

Una variable es discreta si su recorrido se identifica como un conjunto de valores **numerables** finito o infinito.

- $R_x = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\}$

Esperanza

- Es un promedio ponderado de los posibles valores de X , teniendo como medida de ponderación sus probabilidades de ocurrencia.

$$E(x) = \sum x \cdot p(x)$$

Varianza

- La varianza es un estimador de la dispersión de una variable aleatoria X respecto a su esperanza $E(X)$, mide el grado de concentración de los valores de X .

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

Continuando con el ejemplo:

- Tabla de distribución de probabilidad

X	P(x)
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8
	$\Sigma 1$

Esperanza: $E(x) = 0 \left(\frac{1}{8}\right) + 1 \left(\frac{3}{8}\right) + 2 \left(\frac{3}{8}\right) + 3 \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{2} = 1.5 \cong 2 \text{ mujeres}$

Varianza: $V(x) = 0^2 \left(\frac{1}{8}\right) + 1^2 \left(\frac{3}{8}\right) + 2^2 \left(\frac{3}{8}\right) + 3^2 \left(\frac{1}{8}\right) - 1.5^2 = \frac{3}{4}$

Desviación estándar $s = \sqrt{3/4} = 0,86660$



Ejemplo 1:

- Consideremos el número posible de caras que pueden aparecer cuando se lanzan tres monedas no cargadas. Sea “X” el número de caras, determine el espacio muestral. Determine la probabilidad de cada evento el espacio muestral.
-

Ejemplo 2 :

- Una caja contiene 8 bombillos, de los cuales tres están defectuosos. Se selecciona un bombillo de la caja y se prueba, si éste sale defectuoso se selecciona y se prueba otro bombillo (sin reemplazo), hasta que se escoja un bombillo no defectuoso. Sea X el número de bombillos escogidos.
 - Realice una tabla de distribución de probabilidad de la variable X .
 - Encuentre el número esperado de bombillos seleccionados.
-

Ejemplo 3:

- Cuando el departamento de salud examinó pozos privados en un condado en busca de dos impurezas que comúnmente se hallan en el agua potable, se encontró que 20% de los pozos no tenían ninguna impureza, 40% tenían la impureza A y 50% tenían la impureza B. (obviamente algunos tenían ambas impurezas). Si uno pozo de los existentes en el condado se escoge al azar, encuentre la distribución de probabilidad para Y , el número de impurezas halladas en el pozo.
-

Ejemplo 4

- Un embarque de siete televisores contiene dos unidades defectuosas. Un hotel hace una compra al azar de tres de los televisores. Si x es el número de unidades defectuosas que compra el hotel, encuentre la distribución de probabilidad de X .
-

Ejemplo 5:

- En cierto programa de televisión del Canal 3, una persona participa en un concurso con las siguientes reglas:
 - Si contesta correctamente a una pregunta con cinco respuestas posibles (sólo una correcta) gana Q.10,000.
 - En caso contrario se le propone una segunda pregunta con tres respuestas posibles (sólo una es correcta). Si acierta gana Q.1,000.
 - Si tampoco acierta la segunda respuesta, se le propone una tercera con dos respuestas posibles (sólo una correcta). Si acierta no gana nada, pero si falla debe pagar Q.500.
 - El juego termina cuando la persona acierta o tras fallar la tercera pregunta.
 - ¿Cuál es la esperanza del juego?
-

Ejemplo 6

- Una compañía de refrescos anuncia premios en las tapitas asegurando que en cada 1000 tapas hay 500 con “inténtalo otra vez”, 300 con premio de Q5.00, 150 con premio de Q10.00, 40 con premio de Q50.00 y 10 con premio de Q100.00. Una persona, al que no le gusta el refresco, decide comprar una botella cuyo costo es de Q10.00.
 - Determine el valor esperado de la “ganancia” de la persona que compra el refresco.
 - ¿Cuál es la probabilidad del comprador de perder su dinero?
-

Distribuciones de probabilidad discretas

- El experimento consta de una secuencia de n experimentos más pequeños llamados ensayos, donde n se fija antes del experimento.
- Cada ensayo puede dar por resultado uno de los mismo dos resultados posibles, los cuales se denotan como éxito (S) y falla (F).
- Los ensayos son independientes, de modo que el resultado en cualquier ensayo particular no influye en el resultado de cualquier otro ensayo.
- La probabilidad de éxito $P(S)$ es constante de un ensayo a otro, esta probabilidad se denota por p .

Calcular la probabilidad de que caigan dos caras en tres lanzamientos. $P=3/8$

Calcular la probabilidad de que caiga cara por segunda vez en el tercer tiro. $P=2/8$

Calcule la probabilidad de que caiga cara por primera vez en el tercer tiro. $P=1/8$

Binomial

CCC
CCE
CEC
ECC
EEC
ECE
CEE
EEE

Binomial negativa

CCC
CCE
CEC
ECC
EEC
ECE
CEE
EEE

Geométrica

CCC
CCE
CEC
ECC
EEC
ECE
CEE
EEE

Binomial

Busca la probabilidad de x éxito en n pruebas, donde n es fija.

$$b(x; n, p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} & x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

- Donde p =probabilidad de éxito
- q = probabilidad de fracaso
- n = número de intentos
- X =número de éxitos
- Media $E(x)=np$
- Varianza $V(x)=npq$

Ejemplo 1

- Veinte por ciento de todos los teléfonos de cierto tipo son llevados a reparación cuando todavía está vigente la garantía. De éstos 60% se repara, en tanto que el otro 40% se debe sustituir por nuevas unidades. Si una compañía compra 10 de estos teléfonos, ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente dos terminen siendo reemplazados dentro del periodo de garantía?
-

Ejemplo 2:

- Se construye un complejo sistema electrónico con cierto número de piezas de respaldo en sus subsistemas. Un subsistema tiene cuatro componentes idénticos, cada uno con una probabilidad de 0.2 de fallar en menos de 1000 horas. El subsistema va a operar si dos de los cuatro componentes están operando. Suponga que los componentes operan de manera independientemente. Encuentre la probabilidad de que:
 - Exactamente dos de los cuatro componentes dure más de 1000 horas.
 - El subsistema opere más de 1000 horas.
-

Ejemplo 3:

- Suponga que 90% de todas las baterías de cierto proveedor tienen voltajes aceptables. Un tipo de linterna requiere que las dos baterías sean tipo D y funcionará sólo si sus dos baterías tienen voltajes aceptables. Entre diez linternas seleccionadas al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos ocho funcionarán?
-

Ejemplo 4:

- La probabilidad de que un paciente se recupere de una delicada operación de corazón es 0,9.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 5 de los próximos 7 pacientes que se sometan a esta intervención sobrevivan?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 5 de 7 pacientes que se sometan a esta intervención sobrevivan?
-

Ejemplo 5:

- Suponga que los motores de un aeroplano operan en forma independiente y de que fallan con una probabilidad de 0.4. Suponiendo que uno de estos artefactos realiza un vuelo seguro en tanto se mantenga funcionando cuando menos la mitad de uno de los motores, determine qué aeroplano, uno de 4 motores o uno de 2, tiene mayor probabilidad de terminar su vuelo exitosamente.
-

Binomial Negativa

- Considera un experimento donde las propiedades son las mismas que la que se indica para un experimento binomial a excepción de que las pruebas se repiten hasta que ocurra un número fijo de éxitos.
- En lugar de encontrar la probabilidad de x éxitos en n pruebas, donde n es fija, nos interesa ahora la probabilidad de que ocurra k -ésimo éxito en la x -ésima prueba.

- x = número de ensayo en donde ocurre el k -ésimo éxito.
- k = número de éxitos.

$$b^*(x; k, p) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}$$

$$E(x) = k/p$$

$$V(x) = kq/p^2$$



Ejemplo 1:

- Un estudio geológico indica que un pozo petrolero de exploración perforado en una región particular debe producir petróleo con probabilidad de 0.2. Encuentre la probabilidad de que el tercer descubrimiento de petróleo llegue en el quinto pozo perforado.
-

Ejemplo 2-3:

- Un basquetbolista no encesta con probabilidad de 0.3 cada vez que tira. Calcular la probabilidad de que enceste por 4ta. vez en el décimo tiro
- Los registros de una compañía constructora de pozos, indican que la probabilidad de que uno de sus pozos nuevos, no requiera de reparaciones en el término de un año es de 0.80. ¿Cuál es la probabilidad de que el sexto pozo construido por esta compañía en un año dado sea el segundo en requerir reparaciones?

Ejemplo 4

- La probabilidad de que cierto estudiante crea cierto chisme acerca de su catedrático es de 0,8.
- ¿Cuál es la probabilidad que la sexta persona que escucha tal historia sea la cuarta que lo crea?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera persona que escucha tal historia sea la primera en creerla?

Distribución geométrica

- El número de la prueba en el que ocurre el primer éxito.

$$g(x; p) = pq^{x-1}$$

$$E(x) = 1/p$$

$$V(x) = q^2/p$$

Ejemplo 1

- Suponga que 30% de los solicitantes para cierto trabajo industrial posee capacitación avanzada en programación computacional. Los candidatos son elegidos aleatoriamente entre la población y entrevistados de forma sucesiva. Encuentre la probabilidad de que el primer solicitante con capacitación avanzada en programación se encuentre en la quinta entrevista.

Ejemplo 2

- Se sabe que en cierto proceso de fabricación, en promedio, uno de cada 100 artículos está defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que el quinto artículo que se inspecciona sea el primer defectuoso que se encuentra?

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

- No requiere independencia
- Se basa en el muestreo que se realiza sin reemplazo en una muestra aleatoria de tamaño n de N artículos.
- Se utiliza mucho en muestreo de aceptación, pruebas electrónicas y garantía de calidad, ya que el artículo se destruye y por ello no se puede reemplazar en la muestra.

$$h(x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Donde:

- N tamaño de población
- K número de éxitos en la población
- n tamaño de la muestra
- X número de éxitos en la muestra



Ejemplo 1:

- Lotes de 40 componentes cada uno se denominan aceptables si no contienen más de tres defectuosos. El procedimiento para muestrear el lote es la selección de 5 componentes al azar y rechazar el lote si se encuentra un componente defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentre exactamente un defectuoso en la muestra si hay tres defectuosos en todo el lote?
-



Ejemplo 2:

- Un almacén contiene diez máquinas impresoras, cuatro de las cuales son defectuosas. Una compañía selecciona cinco de las máquinas al azar pensando que todas están en buenas condiciones .
 - ¿Cuál es la probabilidad de que las cinco no sean defectuosas?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo 2 sean defectuosas?
-



Ejemplo 3:

- De un lote 10 misiles, se seleccionan cuatro al azar y se lanzan. Si el lote contiene tres misiles defectuosos que no explotarán. ¿Cuál es la probabilidad de que:
 - Los cuatro exploten?
 - A los más dos fallen?
-

DISTRIBUCIÓN MULTINOMIAL

- El experimento binomial se convierte en un experimento multinomial si cada prueba tiene más de dos resultados posibles. Ejemplo: un producto se puede clasificar como ligero, pesado o aceptable.

$$P(x_1, x_2, \dots, x_k; p_1, p_2, \dots, p_k) = \left(\frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k} \right)$$



Ejemplo 1:

- Si un par de dados se lanza 6 veces, ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 7 u 11 dos veces, un par igual una vez y cualquier otra combinación 3 veces?
-

Ejemplo 2

- Las probabilidades son de 0.4, 0.2, 0.3 y 0.1, respectivamente, de que un delegado llegue por aire a una cierta convención, llegue en autobús, en automóvil o en tren.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que entre 9 delegados seleccionados aleatoriamente en esta convención, 3 hayan llegado por aire, 3 en autobús, 1 en automóvil y 2 en tren?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que 5 hayan llegado en auto?
-

Distribución de Poisson

- La distribución de probabilidad de la variable de Poisson X , que representa el número de resultados que ocurren en un intervalo de tiempo dado o en una región específica, es:

$$p(x; \mu) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots$$
$$\mu = \lambda t$$

El intervalo de tiempo dado puede ser cualquier duración. La región específica puede ser un segmento de línea, un área, un volumen o tal vez un pedazo de material.

λ : Es el **promedio de sucesos** que ocurren en una unidad de tiempo o en una región y se le conoce como **intensidad del flujo**

Ejemplo 1:

- El administrador de un hospital, que ha estado estudiando las admisiones diarias de emergencia durante un periodo de varios años, ha llegado a la conclusión de que están distribuidas de acuerdo con la ley de Poisson. Los registros del hospital revelan que, durante este periodo, las admisiones de emergencia han sido, en promedio, de tres por día. Si el administrador está en lo cierto al suponer una distribución de Poisson, encontrar la probabilidad de que:
 - En un día dado, ocurran exactamente dos admisiones de emergencia.
 - En un día particular, no ocurra admisión de emergencia alguna.
 - En un día particular, sean admitidos tres o cuatro casos de emergencia.
-




Ejemplo 2

- Si un banco recibe en promedio 6 cheques sin fondo por día. ¿cuáles son las probabilidades de que reciba,
 - Cuatro cheques sin fondo en un día dado?
 - 10 cheques sin fondos en cualquiera de dos días consecutivos?
-



Ejemplo 3

- El número de errores mecanográficos hechos por una secretaria es en promedio de cuatro errores por página. Si en una página se dan más de cuatro errores, la secretaria debe volver a escribir toda la página.. ¿Cuál es la probabilidad de que una página seleccionada al azar no tenga que volver a ser escrita?
-



Distribución hipergeométrica multivariada.

Ejemplo 4:

Se va a utilizar un grupo de 10 individuos para un estudio biológico. El grupo incluye 3 personas con sangre tipo O, 4 con sangre tipo A y 3 con sangre tipo B. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra aleatoria de 5 personas incluya a 1 con sangre tipo O, 2 con tipo A y 2 con tipo B?

Ejemplo 5

- Un club de estudiantes extranjeros tiene en sus listas a 2 canadienses, 3 japoneses, 5 italianos y 2 alemanes. Si se selecciona un comité de 4 estudiantes aleatoriamente, encuentre la probabilidad de que:
 - A) estén representadas todas las nacionalidades;
 - B) estén representadas todas las nacionalidades, excepto la italiana.

Aproximación Binomial-Poisson

- Caso especial: Se utiliza en cualquier experimento binomial en el cual n es grande y p es pequeña. $n \geq 50$ y $np \leq 5$



Ejemplo 6

- Un artículo en Los Ángeles Times reporta que 1 de cada 200 personas porta el gen defectuoso que provoca cáncer de colon hereditario. En una muestra de 1000 individuos, ¿cuál es la probabilidad aproximada del número que porta este gen sea a lo mucho de 3?
-