



---

# TEORÍA DE REDES

---

INGENIERA NORA GARCIA  
AUXILIAR MARCOS PATÁN

# CRITICAL PATH METHOD (CPM)



Para utilizar el método CPM o de Ruta Crítica se necesita seguir los siguientes pasos:

1. Definir el proyecto con todas sus actividades o partes principales.
2. Establecer relaciones entre las actividades. Decidir cuál debe comenzar antes y cuál debe seguir después.
3. Dibujar un diagrama conectando las diferentes actividades en base a sus relaciones de precedencia.
4. Definir costos y tiempo estimado para cada actividad.
5. Identificar la trayectoria más larga del proyecto, siendo ésta la que determinará la duración del proyecto (Ruta Crítica).
6. Utilizar el diagrama como ayuda para planear, supervisar y controlar el proyecto.

# EJEMPLO I:

Una firma de contadores públicos requiere las siguientes actividades para una auditoría:

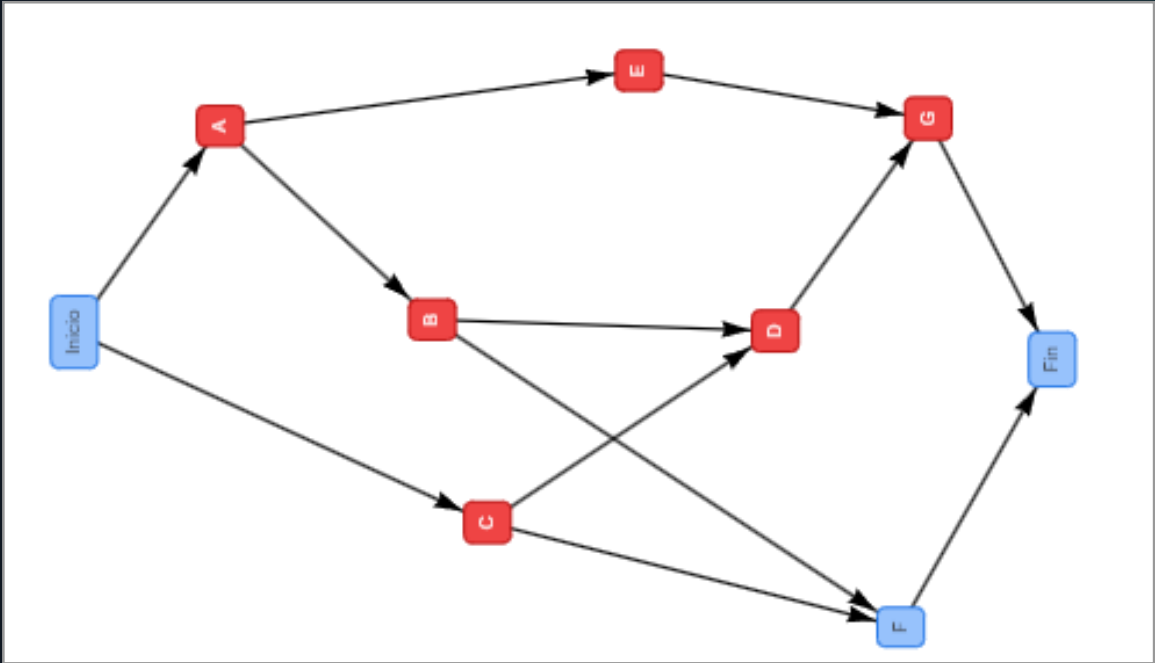
1. Dibuje una red para este proyecto.
2. Haga un pase hacia adelante y un pase hacia atrás para determinar el IP, TP, IL y TL.
3. ¿Cuál es la ruta crítica y el tiempo de terminación del proyecto?

Actividad	Precedentes inmediatos	Tiempo (días)
a	-	3
b	a	2
c	-	5
d	b, c	2
e	a	4
f	b, c	6
g	e, d	5

Paso 1: Evaluación de las relaciones entre las actividades

Para poder graficar el diagrama de Redes (Actividades en Nodos), se requiere conocer las relaciones de precedencia y descendencia de cada actividad; es por ello que en la siguiente tabla se muestran las relaciones de cada actividad de tal forma que podamos crear nuestro gráfico. Se incluyen dos actividades ficticias de “Inicio” y “Fin”.

Precedentes	Actividad	Descendientes
Inicio → A	A	A → B A → E
A → B	B	B → D B → F
Inicio → C	C	C → D C → F
B → D C → D	D	D → G
A → E	E	E → G
B → F C → F	F	F → Fin
D → G E → G	G	G → Fin



Paso 3: Tabla de Tiempos de cada Actividad

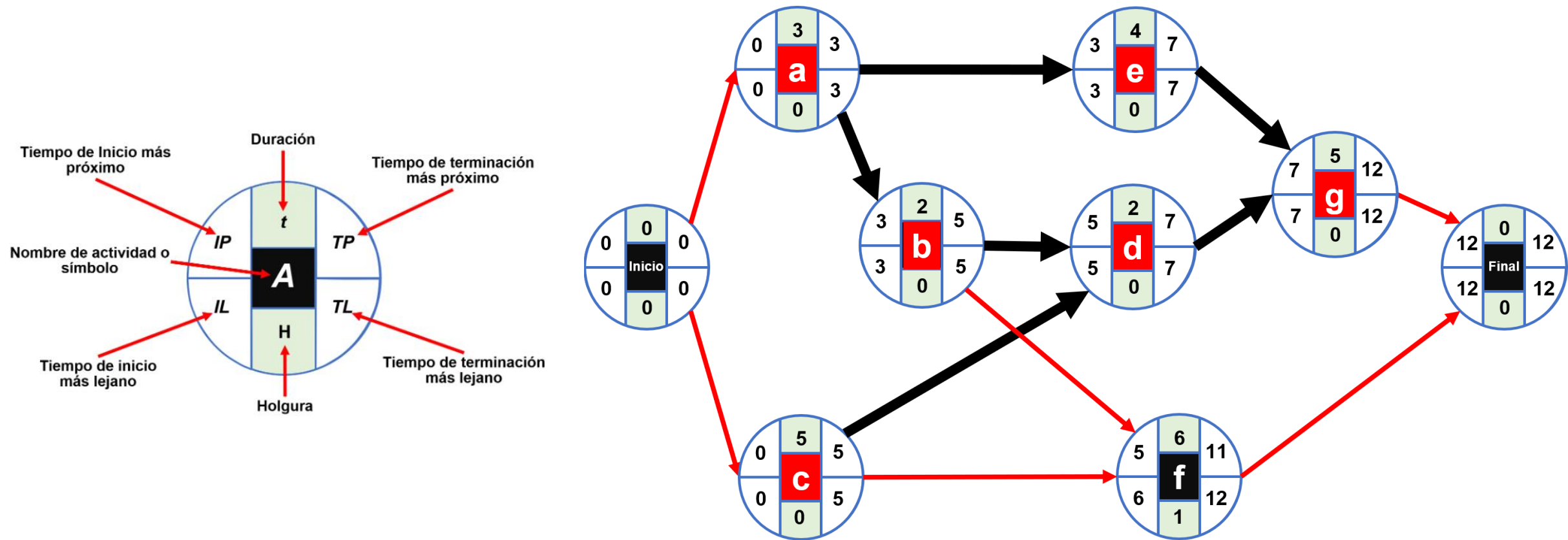
La siguiente tabla presenta los resultados de cada actividad:

- **Inicio más próximo (IP):** Es igual al tiempo de terminación más próximo del precedente de la actividad. Si tiene más de un precedente se toma el mayor valor.
- **Término más próximo (TP):** Es igual al tiempo de inicio más próximo de la actividad más su duración (t).  $TP = IP + t$ .
- **Inicio más lejano (IL):** Es igual al tiempo de terminación más lejano menos su duración (t).  $IL = TL - t$ .
- **Término más lejano (TL):** Es igual al tiempo de inicio más lejano de la actividad que le sigue. Si tiene más de un descendente se toma el menor valor.
- **Holgura:** Se puede calcular de dos formas.  $H = IL - IP = TL - TP$ . Las actividades con holgura 0 conforman la ruta crítica y se encuentran resaltadas de color verde.
- **Holgura Libre:** Se mide restando el inicio más próximo (IP) de la operación sucesora con el término más próximo de la actividad (TP). Representa la cantidad de tiempo que se puede retrasar una operación programada sin retrasar la fecha de inicio más próximo de la actividad sucesora.

Actividad	Duración	Inicio más próximo (IP)	Término más próximo (TP)	Inicio más lejano (IL)	Término más lejano (TL)	Holgura	Holgura Libre
A	3	0	3	0	3	0	0
B	2	3	5	3	5	0	0
C	5	0	5	0	5	0	0
D	2	5	7	5	7	0	0
E	4	3	7	3	7	0	0
F	6	5	11	6	12	1	1
G	5	7	12	7	12	0	0

Paso 4: Colocar datos de tabla al diagrama

En el diagrama colocar los datos de la tabla anterior



#### Paso 4: Diagrama de Redes (Actividades en Nodos)

En el gráfico que se presenta a continuación, se muestran las actividades del proyecto teniendo en cuenta lo siguiente:

- Las actividades de color rojo son las que representan la ruta crítica.
- Tiempo de Inicio más Próximo (IP), Tiempo de Terminación más Próximo (TP), Tiempo de Inicio más Lejano (IL), Tiempo de Terminación más Lejano (TL) y la Holgura.

#### Paso 5: sacar las rutas críticas del gráfico

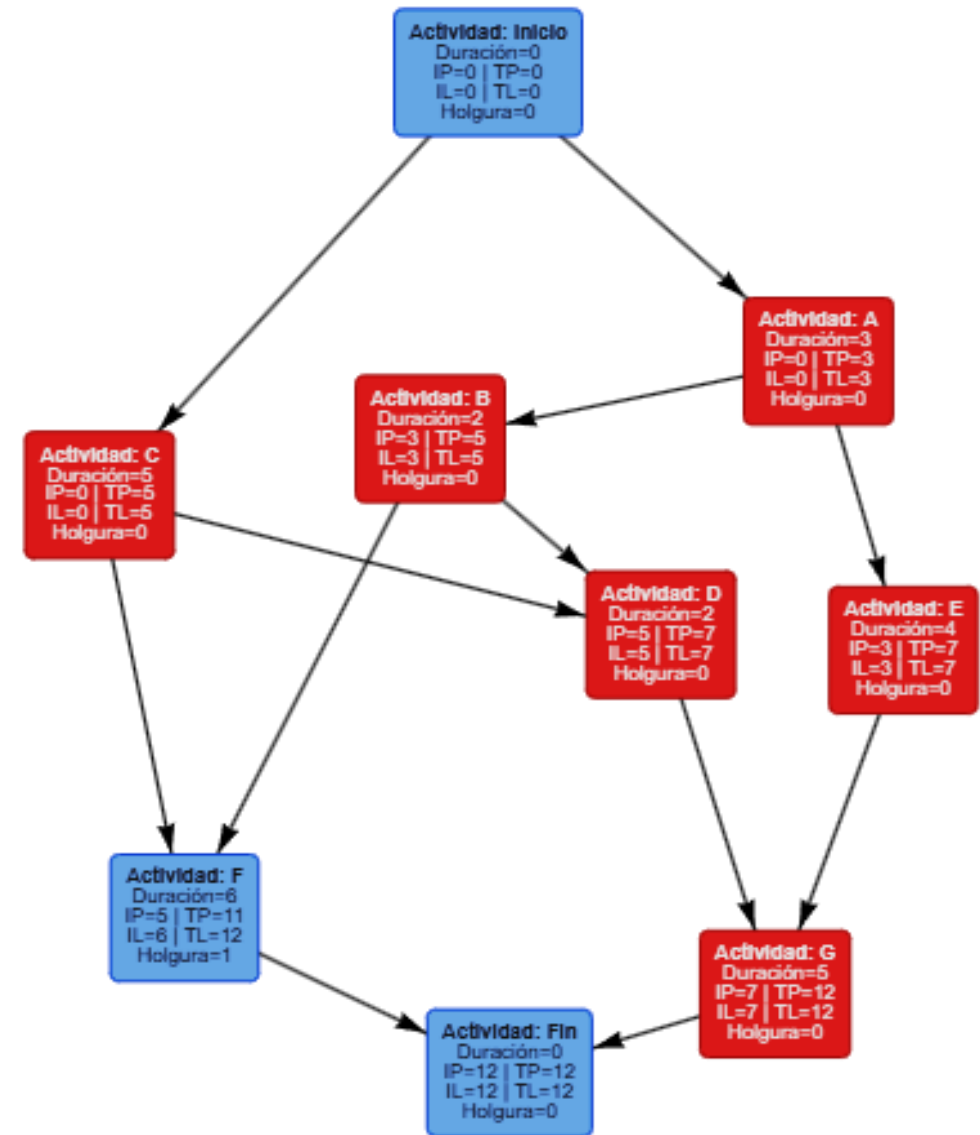
El proyecto tiene 3 rutas críticas:

A → B → D → G

A → E → G

C → D → G

La duración total del proyecto es de 12 Días



## EJEMPLO 2:

El arranque de una planta se basa en la siguiente red:

1. Dibuje una red para este proyecto.
2. ¿Cuál es el tiempo de terminación del proyecto?
3. Identifique la ruta crítica.

Actividad	Precedentes inmediatos	Tiempo (días)
<b>a</b>	-	<b>4</b>
<b>b</b>	-	<b>8</b>
<b>c</b>	-	<b>3</b>
<b>d</b>	<b>a</b>	<b>3</b>
<b>e</b>	<b>a</b>	<b>6</b>
<b>f</b>	<b>c</b>	<b>5</b>
<b>g</b>	<b>b, d</b>	<b>6</b>



DIAGRAMA

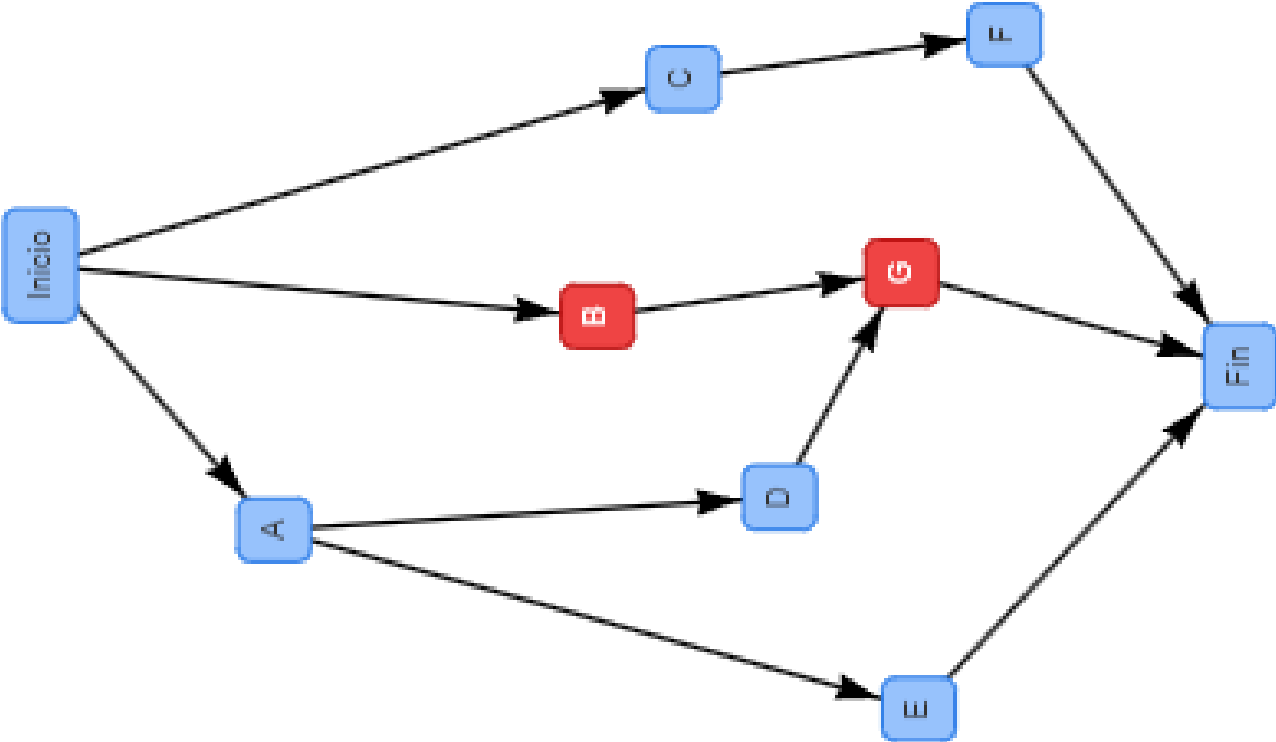


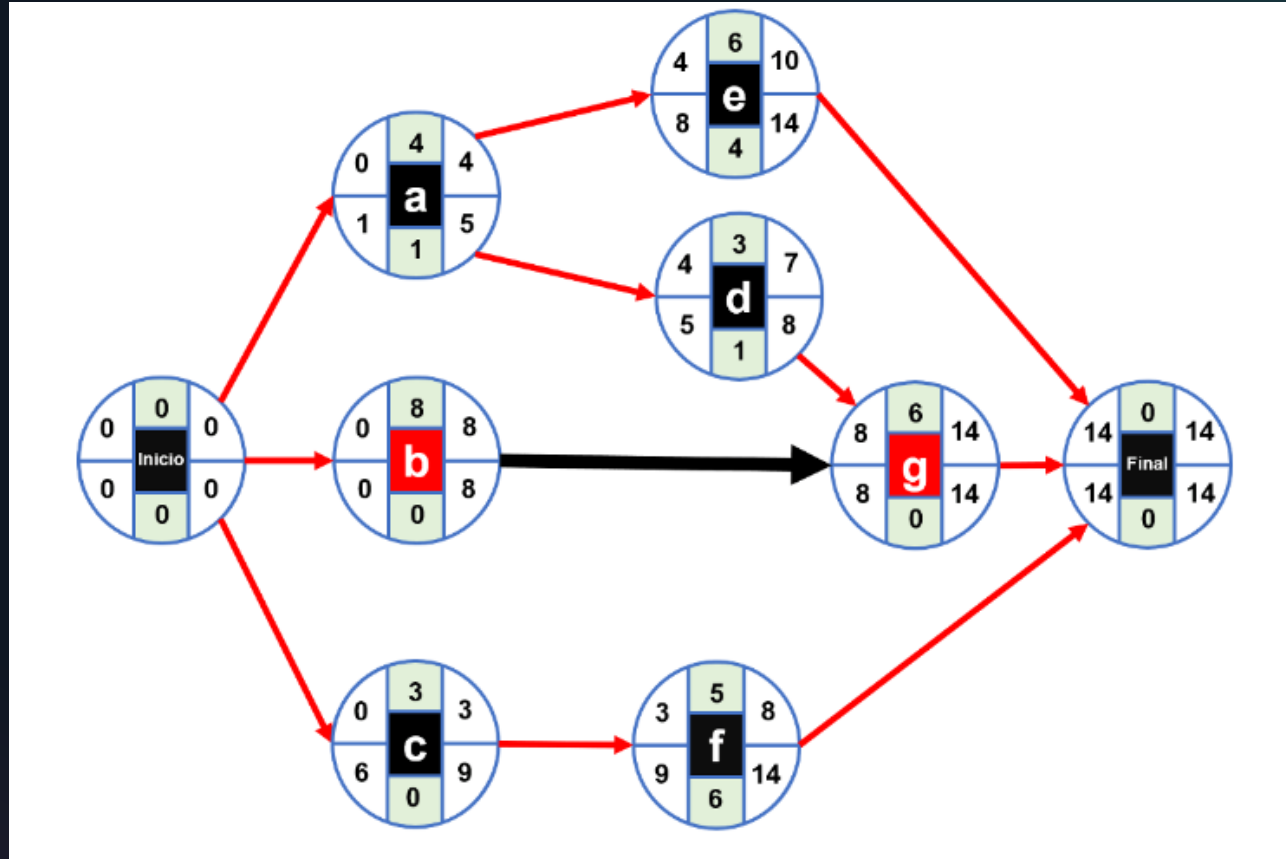
Tabla de Tiempos de cada Actividad

La siguiente tabla presenta los resultados de cada actividad:

- **Inicio más próximo (IP):** Es igual al tiempo de terminación más próximo del precedente de la actividad. Si tiene más de un precedente se toma el mayor valor.
- **Término más próximo (TP):** Es igual al tiempo de inicio más próximo de la actividad más su duración (t).  $TP = IP + t$ .
- **Inicio más lejano (IL):** Es igual al tiempo de terminación más lejano menos su duración (t).  $IL = TL - t$ .
- **Término más lejano (TL):** Es igual al tiempo de inicio más lejano de la actividad que le sigue. Si tiene más de un descendente se toma el menor valor.
- **Holgura:** Se puede calcular de dos formas.  $H = IL - IP = TL - TP$ . Las actividades con holgura 0 conforman la ruta crítica y se encuentran resaltadas de color verde.
- **Holgura Libre:** Se mide restando el inicio más próximo (IP) de la operación sucesora con el término más próximo de la actividad (TP). Representa la cantidad de tiempo que se puede retrasar una operación programada sin retrasar la fecha de inicio más próximo de la actividad sucesora.

Actividad	Duración	Inicio más próximo (IP)	Término más próximo (TP)	Inicio más lejano (IL)	Término más lejano (TL)	Holgura	Holgura Libre
A	4	0	4	1	5	1	0
B	8	0	8	0	8	0	0
C	3	0	3	6	9	6	0
D	3	4	7	5	8	1	1
E	6	4	10	8	14	4	4
F	5	3	8	9	14	6	6
G	6	8	14	8	14	0	0

a) En el siguiente gráfico se presenta la red del proyecto



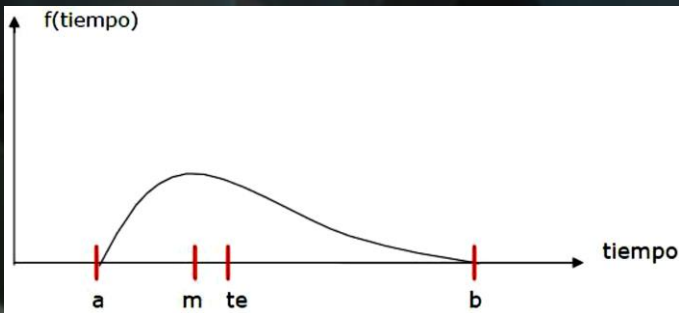
b) La duración total del proyecto es de 14 Días

c) La ruta crítica del proyecto es: B → G

# PROGRAM EVALUATION AND REVIEW TECHNIQUE (PERT)

El tiempo de ejecución de las actividades es obtenido a través de la estimación de 3 escenarios posibles: optimista (a), normal (m) y pesimista (b). El tiempo (aleatorio) que requiere cada actividad está asociado a una función probabilística beta, que ha demostrado ser la que mejor modela la distribución del tiempo de duración de una actividad.

A continuación se presenta un gráfico que muestra la función de densidad de probabilidad para la función beta, la cual tiene una asimetría positiva.



Luego, el tiempo esperado ( $t_e$ ) y la varianza asociada a cada actividad se obtienen a través de las siguientes fórmulas:

$$t_e = \frac{a + 4m + b}{6} \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{36}$$

# EJEMPLO I:

Se tiene el siguiente proyecto con 25 actividades:

Calcular la ruta crítica y el tiempo de finalización del proyecto.

Actividad	Precedentes	Duración (semanas)		
		Tiempo Pesimista	Tiempo Medio	Tiempo Optimista
A		6	4	3
B		3	2	1
C	A	5	3	2
D	A	10	6	4
E	A	4	2	1
F	B	7	5	3
G	B	6	4	2
H	C	5	3	1
I	H	8	5	3
J	D	9	5	3
K	E	4	2	1
L	G	12	6	3
M	L	5	3	1
N	I,J,K	6	3	1
O		9	5	2
P	O	8	5	1
Q	O	7	4	1
R	O	5	3	1
S	E,P	3	2	1
T	R,S	4	2	1
U	T	5	3	1
V	T	6	3	1
W	T	7	4	1
X	B	8	4	2
Y	W	4	2	1

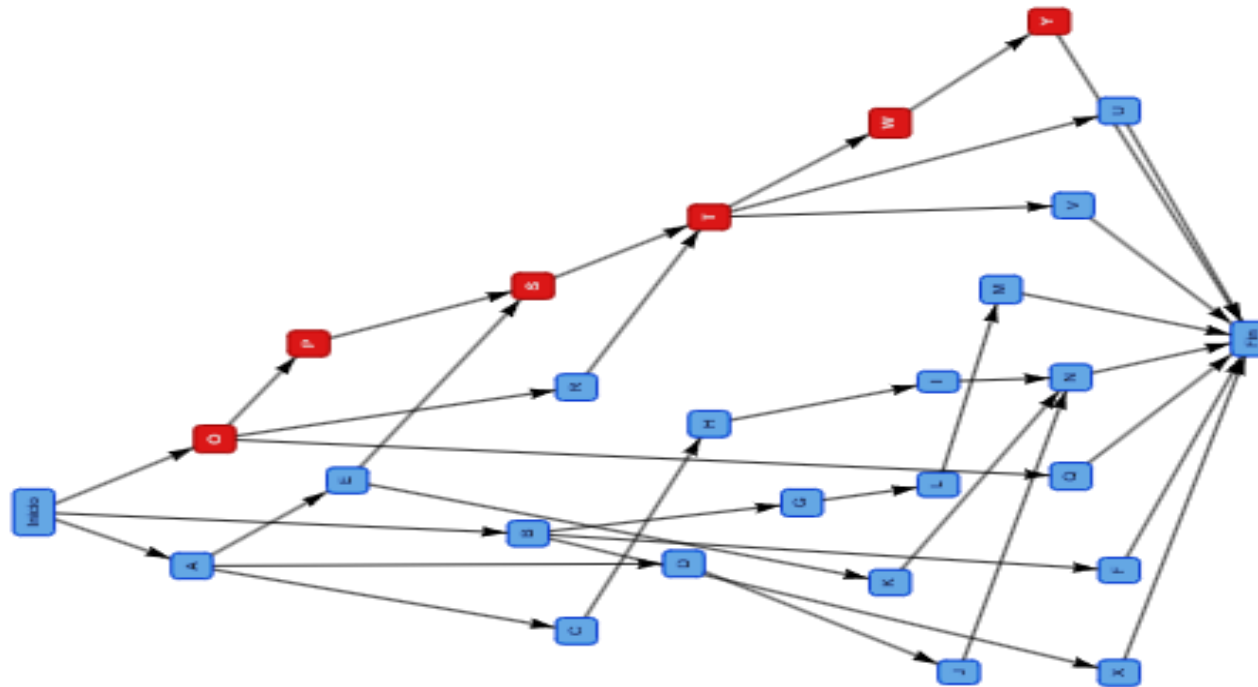
## Paso 1: Evaluación de las relaciones entre las actividades

Para poder graficar el diagrama de Redes (Actividades en Nodos), se requiere conocer las relaciones de precedencia y descendencia de cada actividad; es por ello que en la siguiente tabla se muestran las relaciones de cada actividad de tal forma que podamos crear nuestro gráfico. Se incluyen dos actividades ficticias de “Inicio” y “Fin”.

Precedentes	Actividad	Descendientes
Inicio → A	A	A → CA → DA → E
Inicio → B	B	B → FB → GB → X
A → C	C	C → H
A → D	D	D → J
A → E	E	E → KE → S
B → F	F	F → Fin
B → G	G	G → L
C → H	H	H → I
H → I	I	I → N
D → J	J	J → N
E → K	K	K → N
G → L	L	L → M
L → M	M	M → Fin
I → NJ → NK → N	N	N → Fin
Inicio → O	O	O → PO → QO → R
O → P	P	P → S
O → Q	Q	Q → Fin
O → R	R	R → T
E → SP → S	S	S → T
R → TS → T	T	T → UT → VT → W
T → U	U	U → Fin
T → V	V	V → Fin
T → W	W	W → Y
B → X	X	X → Fin
W → Y	Y	Y → Fin

## Paso 2: Diagrama de Redes (Actividades en Nodos)

En el gráfico que se presenta a continuación, se muestran las actividades del proyecto teniendo en cuenta lo siguiente:



Paso 3: Tabla de Tiempos PERT

La siguiente tabla presenta el cálculo del tiempo estimado, desviación estándar y varianza según el método PERT:

- Tiempo Estimado:
$$T_e = \frac{(T_o + 4 \times T_m + T_p)}{6}$$
- Desviación Estándar:
$$\sigma = \frac{(T_p - T_o)}{6}$$
- Varianza:
$$Varianza = \sigma^2$$
- Varianza del Proyecto:
$$\sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

Donde i corresponde a las actividades que pertenecen a la ruta crítica. En caso de múltiples rutas críticas, se elige la ruta con mayor varianza.
- Tiempo Esperado del Proyecto:
$$T_E = \sum_{i=1}^n (T_e)_i$$

Donde i corresponde a las actividades que pertenecen a la ruta crítica.

Actividad	Tiempo Optimista (T <sub>o</sub> )	Tiempo Medio (T <sub>m</sub> )	Tiempo Pesimista (T <sub>p</sub> )	Tiempo Esperado (T <sub>e</sub> )	Desviación Estándar (σ)	Varianza (σ <sup>2</sup> )
A	3	4	6	4.1667	0.5	0.25
B	1	2	3	2	0.3333	0.1111
C	2	3	5	3.1667	0.5	0.25
D	4	6	10	6.3333	1	1
E	1	2	4	2.1667	0.5	0.25
F	3	5	7	5	0.6667	0.4445
G	2	4	6	4	0.6667	0.4445
H	1	3	5	3	0.6667	0.4445
I	3	5	8	5.1667	0.8333	0.6944
J	3	5	9	5.3333	1	1
K	1	2	4	2.1667	0.5	0.25
L	3	6	12	6.5	1.5	2.25
M	1	3	5	3	0.6667	0.4445
N	1	3	6	3.1667	0.8333	0.6944
O	2	5	9	5.1667	1.1667	1.3612
P	1	5	8	4.8333	1.1667	1.3612
Q	1	4	7	4	1	1
R	1	3	5	3	0.6667	0.4445
S	1	2	3	2	0.3333	0.1111
T	1	2	4	2.1667	0.5	0.25
U	1	3	5	3	0.6667	0.4445
V	1	3	6	3.1667	0.8333	0.6944
W	1	4	7	4	1	1
X	2	4	8	4.3333	1	1
Y	1	2	4	2.1667	0.5	0.25



Paso 4: Tabla de Tiempos para calcular la Ruta Crítica

La siguiente tabla presenta los resultados de cada actividad:

Inicio más próximo (IP): Es igual al tiempo de terminación más próximo del precedente de la actividad. Si tiene más de un precedente se toma el mayor valor.

Término más próximo (TP): Es igual al tiempo de inicio más próximo de la actividad más su duración (t).  $TP = IP + t$ .

Inicio más lejano (IL): Es igual al tiempo de terminación más lejano menos su duración (t).  $IL = TL - t$ .

Término más lejano (TL): Es igual al tiempo de de inicio más lejano de la actividad que le sigue. Si tiene más de un descendente se toma el menor valor.

Holgura: Se puede calcular de dos formas.  $H = IL - IP = TL - TP$ . Las actividades con holgura 0 conforman la ruta crítica y se encuentran resaltadas de color verde.

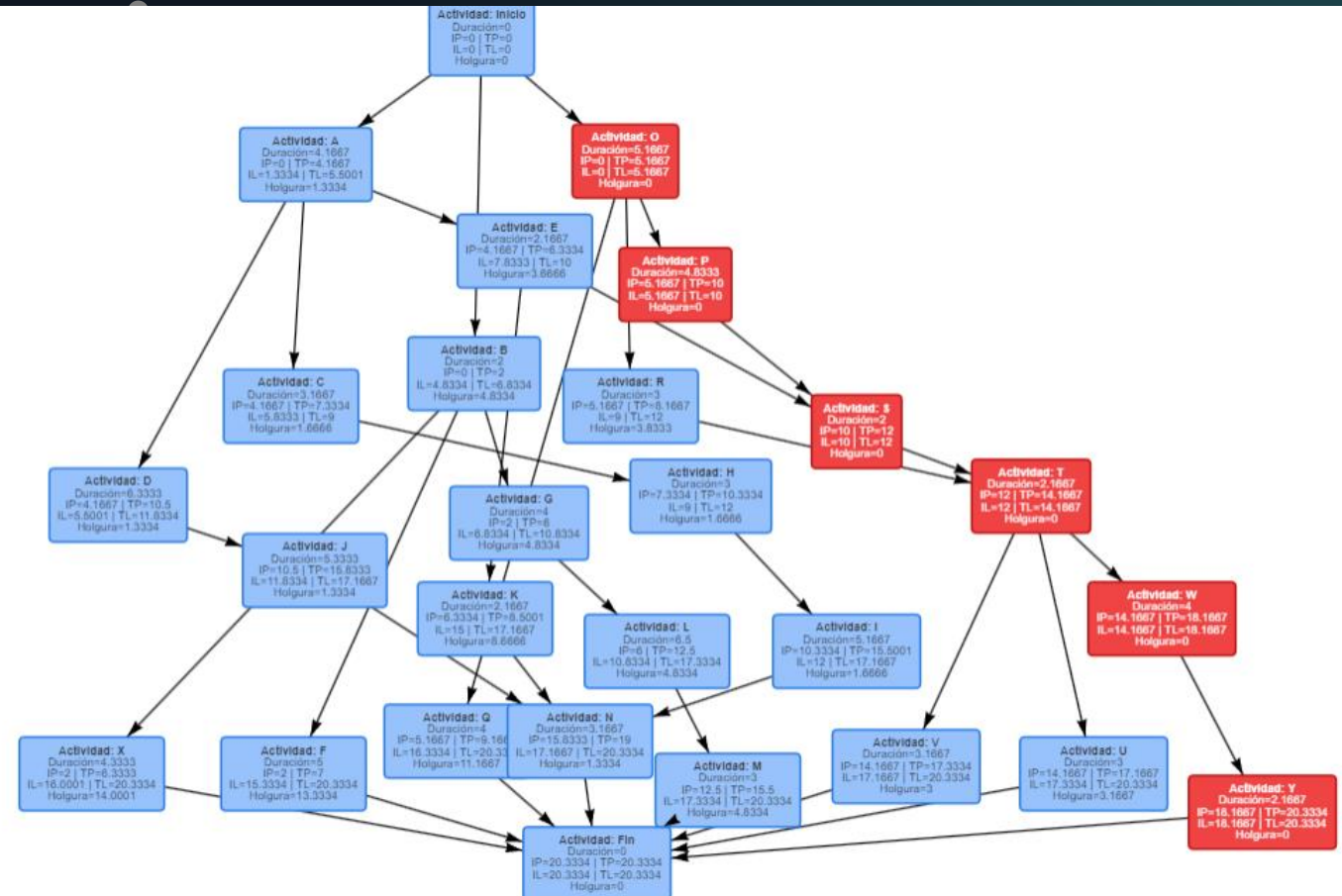
Holgura Libre: Se mide restando el inicio más próximo (IP) de la operación sucesora con el término más próximo de la actividad (TP). Representa la cantidad de tiempo que se puede retrasar una operación programada sin retrasar la fecha de inicio más próximo de la actividad sucesora.

Actividad	Duración	Inicio más próximo (IP)	Término más próximo (TP)	Inicio más lejano (IL)	Término más lejano (TL)	Holgura	Holgura Libre
A	4.1667	0	4.1667	1.3334	5.5001	1.3334	0
B	2	0	2	4.8334	6.8334	4.8334	0
C	3.1667	4.1667	7.3334	5.8333	9	1.6666	0
D	6.3333	4.1667	10.5	5.5001	11.8334	1.3334	0
E	2.1667	4.1667	6.3334	7.8333	10	3.6666	0
F	5	2	7	15.3334	20.3334	13.3334	13.3334
G	4	2	6	6.8334	10.8334	4.8334	0
H	3	7.3334	10.3334	9	12	1.6666	0
I	5.1667	10.3334	15.5001	12	17.1667	1.6666	0.3332
J	5.3333	10.5	15.8333	11.8334	17.1667	1.3334	0
K	2.1667	6.3334	8.5001	15	17.1667	8.6666	7.3332
L	6.5	6	12.5	10.8334	17.3334	4.8334	0
M	3	12.5	15.5	17.3334	20.3334	4.8334	4.8334
N	3.1667	15.8333	19	17.1667	20.3334	1.3334	1.3334
O	5.1667	0	5.1667	0	5.1667	0	0
P	4.8333	5.1667	10	5.1667	10	0	0
Q	4	5.1667	9.1667	16.3334	20.3334	11.1667	11.1667
R	3	5.1667	8.1667	9	12	3.8333	3.8333
S	2	10	12	10	12	0	0
T	2.1667	12	14.1667	12	14.1667	0	0
U	3	14.1667	17.1667	17.3334	20.3334	3.1667	3.1667
V	3.1667	14.1667	17.3334	17.1667	20.3334	3	3
W	4	14.1667	18.1667	14.1667	18.1667	0	0
X	4.3333	2	6.3333	16.0001	20.3334	14.0001	14.0001
Y	2.1667	18.1667	20.3334	18.1667	20.3334	0	0

La ruta crítica del proyecto es:  $O \rightarrow P \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow W \rightarrow Y$

El tiempo esperado del proyecto es de 20.3334 Semanas

La varianza del proyecto es 4.3335

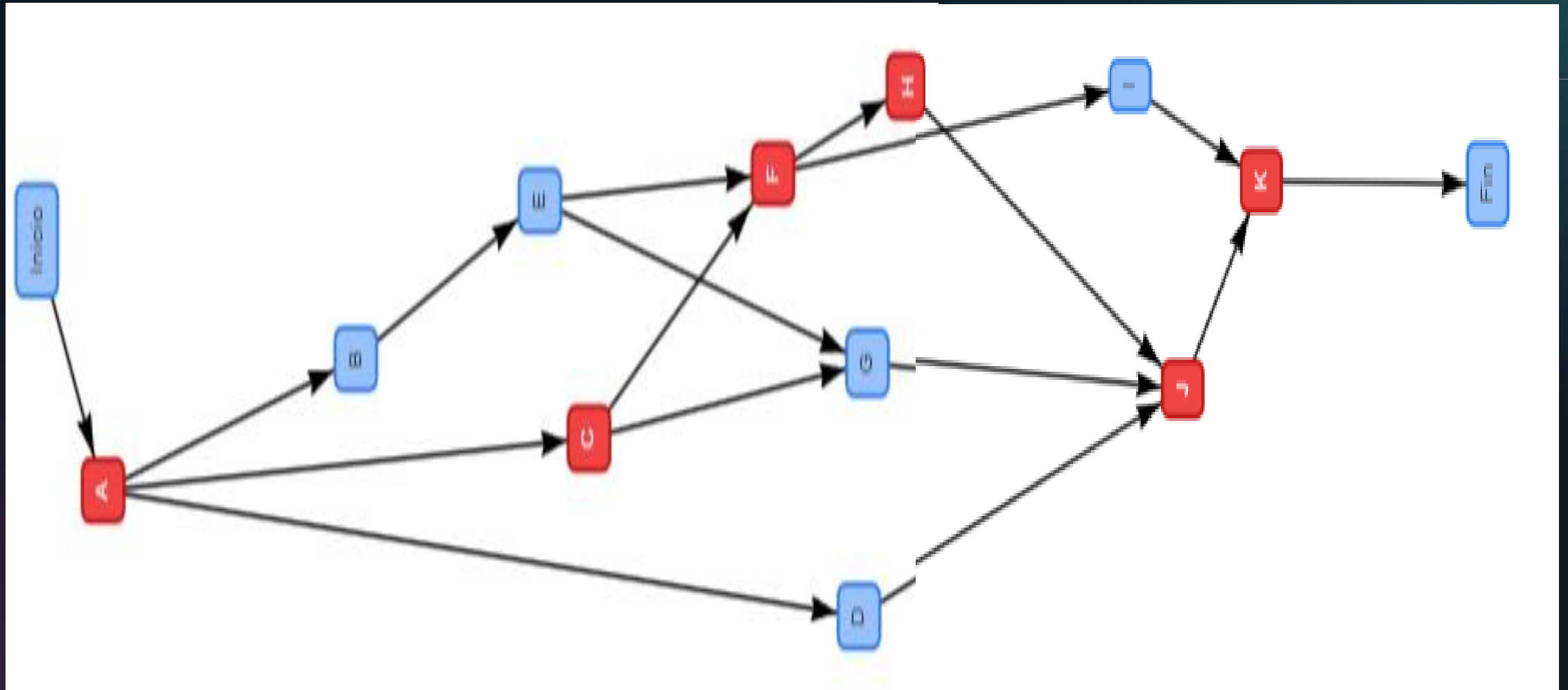


## EJEMPLO 2:

Dibuje la red AEN correspondiente y responda las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el tiempo esperado (estimado) para la actividad C?
- ¿Cuál es la varianza para la actividad C?
- Con base en los cálculos de tiempos estimados, ¿cuál es la ruta crítica?
- ¿Cuál es el tiempo esperado de la ruta crítica?
- ¿Cuál es la varianza de las actividades ubicadas a lo largo de la ruta crítica?
- ¿Cuál es la probabilidad de terminar el proyecto antes de la semana 36?

Actividad	Precedentes Inmediatos	Optimista	Más probable	Pesimista
A		4	8	10
B	A	2	8	24
C	A	8	12	16
D	A	4	6	10
E	B	1	2	3
F	E,C	6	8	20
G	E,C	2	3	4
H	F	2	2	2
I	F	6	6	6
J	D,G,H	4	6	12
K	I,J	2	2	3



Actividad	Tiempo Optimista (T <sub>o</sub> )	Tiempo Medio (T <sub>m</sub> )	Tiempo Pesimista (T <sub>p</sub> )	Tiempo Esperado (T <sub>e</sub> )	Desviación Estándar (σ)	Varianza (σ <sup>2</sup> )
A	4	8	10	7.6667	1	1
B	2	8	24	9.6667	3.6667	13.4447
C	8	12	16	12	1.3333	1.7777
D	4	6	10	6.3333	1	1
E	1	2	3	2	0.3333	0.1111
F	6	8	20	9.6667	2.3333	5.4443
G	2	3	4	3	0.3333	0.1111
H	2	2	2	2	0	0
I	6	6	6	6	0	0
J	4	6	12	6.6667	1.3333	1.7777
K	2	2	3	2.1667	0.1667	0.0278

Actividad	Duración	Inicio más próximo (IP)	Término más próximo (TP)	Inicio más lejano (IL)	Término más lejano (TL)	Holgura	Holgura Libre
A	7.6667	0	7.6667	0	7.6667	0	0
B	9.6667	7.6667	17.3334	8	17.6667	0.3333	0
C	12	7.6667	19.6667	7.6667	19.6667	0	0
D	6.3333	7.6667	14	25.0001	31.3334	17.3334	17.3334
E	2	17.3334	19.3334	17.6667	19.6667	0.3333	0.3333
F	9.6667	19.6667	29.3334	19.6667	29.3334	0	0
G	3	19.6667	22.6667	28.3334	31.3334	8.6667	8.6667
H	2	29.3334	31.3334	29.3334	31.3334	0	0
I	6	29.3334	35.3334	32.0001	38.0001	2.6667	2.6667
J	6.6667	31.3334	38.0001	31.3334	38.0001	0	0
K	2.1667	38.0001	40.1668	38.0001	40.1668	0	0

La ruta crítica del proyecto es:  $A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow J \rightarrow K$

El tiempo esperado del proyecto es de 40.1668 Semanas

La varianza del proyecto es 10.0275

a) El tiempo estimado de la actividad C es:

$$(8+4 \times 12+16)/6 = 12 \text{ semanas}$$

b) La varianza de C sería

$$[(16-8)/6]^2 = 1.7777$$

c) La ruta crítica del proyecto es:

A → C → F → H → J → K

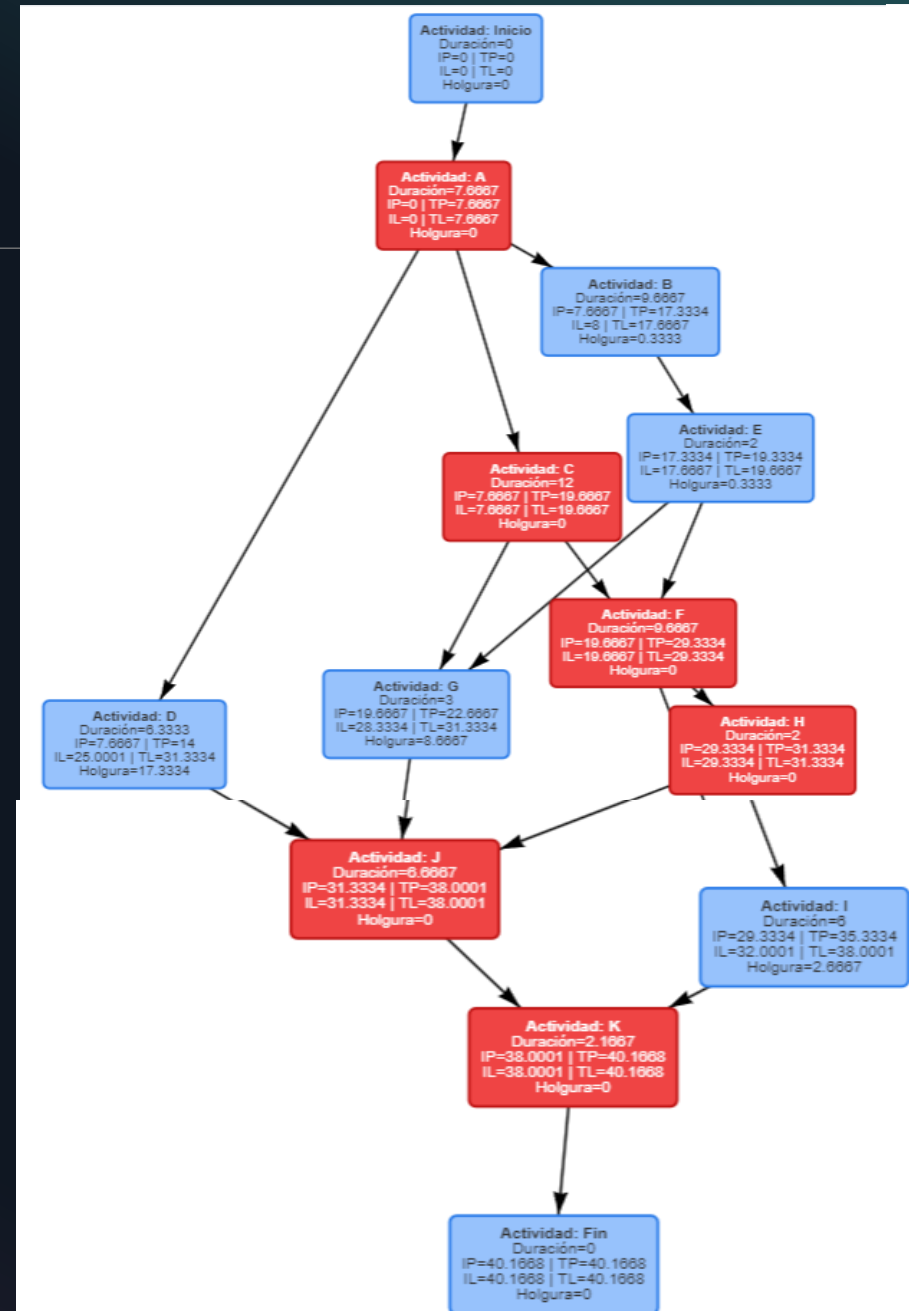
d) El tiempo esperado de la ruta crítica es

40.1668 semanas

e) La varianza de las actividades de la ruta crítica es

10.0275.

f) Para calcular la probabilidad, realizaremos lo siguiente:





f) Para calcular la probabilidad, realizaremos lo siguiente:

**Paso 1: El Método PERT parte de dos supuestos:**

- Los tiempos de terminación del proyecto siguen una distribución de probabilidad normal.
- Los tiempos de las actividades son estadísticamente independientes.

A partir de estos supuestos, se utiliza la curva de distribución normal (campana de Gauss) para representar las fechas de terminación del proyecto. Esta distribución indicará que el proyecto tiene 50% de probabilidad de que termine antes del Tiempo Esperado (TE = 40.1668 semanas) y otro 50% de probabilidad que supere ese valor.

Para calcular La probabilidad de que el proyecto termine en menos de 36 semanas realizaremos lo siguiente:

$$P(t < T) = P(z < Z)$$

Asimismo:

$$Z = \frac{T - T_E}{\sigma}$$

Donde:

- **T:** Fecha de vencimiento que se requiere evaluar.
- **σ:** Desviación Estándar del Proyecto. Se obtiene de la raíz cuadrada de la Varianza.

Reemplazando los valores tendríamos:

$$P(t < 36) = P(z < \frac{36 - 40.1668}{\sqrt{10.0275}})$$

$$P(t < 36) = P(z < -1.3158)$$

$$P(t < 36) = 0.0941$$

**Nota:** Para calcular este valor se utiliza la tabla de distribución normal.

**Paso 2: Gráfico de Campana de Gauss del Proyecto:**

Para graficar la campana de Gauss de los tiempos de finalización del proyecto, se debe marcar en el eje X el valor evaluado (36) y pintar el área hacia el lado izquierdo.

