1.4 Límites infinitos

INTRODUCCIÓN

En esta sección se estudian los límites infinitos. Estos límites resultan cuando al evaluar una función en números muy cercanos al número a, los valores de $f(x)$ se hacen cada vez mayores, ya sea con valores negativos o positivos.

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio y desarrollar las actividades de esta unidad el estudiante estará en capacidad de

- Calcular límites infinitos en funciones racionales.
- Obtener las asíntotas verticales de una función.

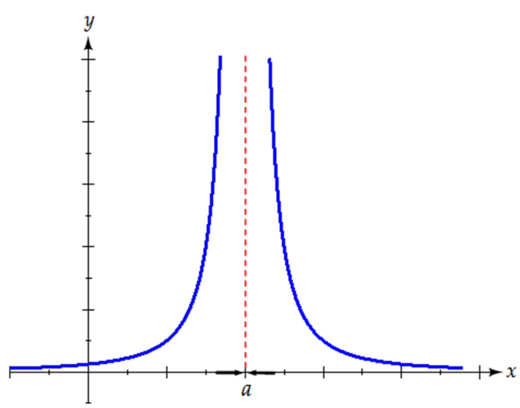
Límites infinitos

La expresión

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Se lee "**El límite cuando x tiende a a en la función $f(x)$ es infinito**", y significa que los valores de $f(x)$ están creciendo sin límite cuando los valores de x se aproximan al número $x = a$ por la derecha o por la izquierda. Decir que el límite es infinito no significa que el límite existe, más bien es una forma de explicar que el límite no existe porque los valores de $f(x)$ son infinitamente grandes. La figura 7 muestra la gráfica de una función con límite infinito en $x = a$.

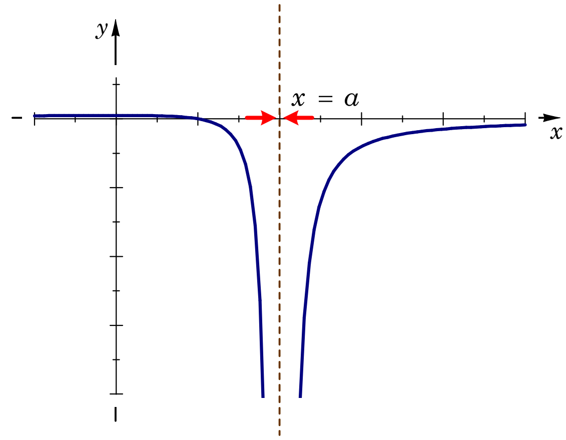
La recta $x = a$ recibe el nombre de **asíntota vertical** de la gráfica de la función $f(x)$,



En forma equivalente, la expresión

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

significa que $f(x)$ toma valores negativos muy grandes cuando x se encuentra cerca de $x = a$, ya sea que nos acerquemos al valor de a por la derecha o por la izquierda. La siguiente figura ilustra esta situación en forma gráfica



Otros límites infinitos son

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

Debe estar claro que ninguno de estos límites existe, sim embargo por medio de ellos podemos establecer el comportamiento de la función cuando x tiende al número a.

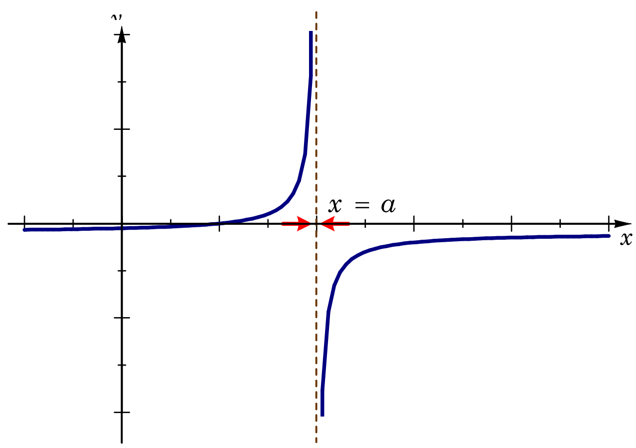
Por otro lado, cuando se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ no existe}$$

significa que el límite por la izquierda no es igual que el límite por la derecha, aunque ambos límites sean infinitos con valores positivos o negativos, como se muestra en la figura siguiente

Por ejemplo, en la gráfica siguiente se tiene que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$



por lo que se concluye que $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe, ya que el límite por la derecha y el límite por la izquierda son diferentes

Propiedades de los límites infinitos

Al calcular un límite de una función racional de la forma

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Si $\lim_{x \to c} f(x) \neq k$ y $\lim_{x \to c} g(x) = 0$, entonces el límite tiene la forma $\frac{k}{0}$, donde k es una constante distinta de cero. En este caso el límite es tipo infinito y por lo tanto no existe. Se puede usar una tabla de valores para determinar el comportamiento de la función cuando x tiende a c por la izquierda y cuando x tiende a c por la derecha o bien utilizar algunos de los muchos teoremas que se requieren para calcularlo utilizando solo propiedades.

Propiedad 1

a. $\lim_{x \to 0^+} \frac{k}{x^n} = +\infty \quad , n > 0, \quad k > 0$

b. $\lim_{x \to 0^-} \frac{k}{x^n} = +\infty \quad , n > 0, \quad k > 0$, n es un número par

c. $\lim_{x \to 0^-} \frac{k}{x^n} = -\infty \quad , n > 0, \quad k > 0$, n es un número impar

Propiedad 2

Si c y L son números reales y

$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \to c} g(x) = L$$

Entonces.

a. $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = +\infty \pm L = +\infty$

b. $\lim_{x \to c} [f(x)g(x)] = (+\infty)(L) = +\infty$, si $L > 0$

c. $\lim_{x \to c} [f(x)g(x)] = (+\infty)(L) = -\infty$, si $L < 0$

d. $\lim_{x \to c} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\infty}{L} = +\infty$, si $L > 0$

e. $\lim_{x \to c} \left[\frac{g(x)}{f(x)}\right] = \frac{L}{\infty} = 0$, si $L > 0$

Otras formas indeterminadas

Hasta ahora solo se ha trabajado con la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Cuando se calculan limites que involucran al infinito se pueden presentar las formas indeterminadas siguientes

$$\infty - \infty, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad 0 \cdot \infty$$

Si un límite tiene forma indeterminada es necesario transformar la función con operaciones algebraicas de tal forma que se obtenga una función equivalente que no tenga forma indeterminada al calcular el límite.

Asíntota vertical

La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función $y = f(x)$ si uno de los siguientes límites es verdadero

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

Ejemplo 1: Cálculo de límite infinito

Calcule el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 - 4x^3}{5x^2 + 3x^3}$$

Solución

Al evaluar el límite del numerador se tiene

$$\lim_{x\to 0} \left(2 - 4x^3\right) = 2 - 4(0)^2 = 2$$

Calculando ahora el límite del denominador

$$\lim_{x\to 0} \left(5x^2 + 3x^3\right) = 5(0)^2 + 3(0)^3 = 0$$

Como el límite del numerador es una constante y el límite del denominador es 0, el límite no existe y es un límite del tipo infinito. La función tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

Cuando esto sucede, es necesario calcular el límite por la derecha y el límite por la izquierda,

Para obtener el límite por la derecha evaluamos la función en un número muy cercano a cero por la derecha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2 - 4x^3}{5x^2 + 3x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2 - 4x^3}{x^2\left(5 + 3x\right)}$$

Evaluando la función en 0.01

$$f(0.01) = \frac{2 - 4(0.01)^3}{(0.01)^2(5 + 3(0.01))} = 3976.1$$

Es claro que los valores de $f(x)$ están creciendo sin límite con valores positivos, razón por la cual podemos concluir que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2 - 4x^3}{5x^2 + 3x^3} = +\infty$$

De la misma forma, para calcular el límite por la izquierda, se evalúa la función en un número cercano a 0 por la izquierda

Evaluando la función para -0.01

$$f(-0.01) = \frac{2 - 4(-0.01)^3}{(-0.01)^2(5 + 3(-0.01))} = 4024.2$$

Es claro que los valores de $f(x)$ están creciendo sin límite con valores positivos, razón por la cual podemos concluir que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2 - 4x^3}{5x^2 + 3x^3} = +\infty$$

Como el límite por la derecha y el límite por la izquierda tienden al infinito positivo, se concluye que

Respuesta:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 - 4x^3}{5x^2 + 3x^3} = +\infty$$

Ejemplo 2: Cálculo de límite infinito con raiz

Calcule el límite

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{3 - x}$$

Solución

Al evaluar el límite del numerador se tiene

$$\lim_{x \to 3^+} \sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{(3)^2 - 9} = 0$$

Calculando el límite del denominador

$$\lim_{x \to 3^+} (3 - x) = 3 - 3 = 0$$

Como ambos límites son iguales a 0, el límite tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$, y se deben realizar operaciones algebraicas para calcular el límite.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{3 - x} &= \lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{3 - x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{x^2 - 9}} \\
&= \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 9}{(3 - x)\sqrt{x^2 - 9}} \\
&= \lim_{x \to 3^+} \frac{(x - 3)(x + 3)}{-(x - 3)\sqrt{x^2 - 9}} \\
&= \lim_{x \to 3^+} \frac{x + 3}{-\sqrt{x^2 - 9}}
\end{aligned}$$

Al evaluar el límite anterior se obtiene que el límite del numerador es 6 mientras que el límite del denominador es cero, es decir que el límite es de tipo infinito. Evaluando la expresión en un número que se aproxime a 3 por la derecha se tiene

$$\frac{(3.001) + 3}{-\sqrt{(3.001)^2 - 9}} = -77.466$$

La función tiene valores negativos muy grandes, por lo que podemos concluir que

Respuesta:

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{3 - x} = -\infty$$

Ejemplo 3: Cálculo de límite infinito con raíz en el denominador

Calcule el límite

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}-1}$$

Solución

Al evaluar el límite del numerador se tiene

$$\lim_{x \to 1^-} (x-1) = 1-1 = 0$$

Calculando el límite del denominador

$$\lim_{x \to 1^-} \left(\sqrt{2x-x^2}-1\right) = \sqrt{2(1)-(1)^2}-1 = 0$$

Como ambos límites son iguales a 0, el límite tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$, y se deben realizar racionalizar el denominador para eliminar el factor que hace que el límite tenga forma indeterminada.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}-1} &= \lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2x-x^2}+1}{\sqrt{2x-x^2}+1} \\
&= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)\left(\sqrt{2x-x^2}+1\right)}{\left(2x-x^2\right)-1} \\
&= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)\left(\sqrt{2x-x^2}+1\right)}{-\left(x^2-2x+1\right)} \\
&= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)\left(\sqrt{2x-x^2}+1\right)}{-(x-1)^2} \\
&= \lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{2x-x^2}+1}{-(x-1)}
\end{aligned}$$

Como se ha eliminado el factor que hacía que el límite fuera indeterminado, se procede a calcular nuevamente el límite del numerador y el límite del denominador, obteniéndose ahora en el numerador

$$\lim_{x \to 1^-} \left(\sqrt{2x-x^2}+1\right) = \sqrt{2(1)-(1)^2}+1 = 2$$

El límite del denominador es

$$\lim_{x \to 1^-} -(x-1) = -(1-1) = 0$$

Como el límite es del tipo infinito, evaluamos la última función en un número que se aproxime a 1 por la izquierda, para establecer si el infinito es positivo o bien si es negativo.

Evaluando en 0.999 se obtiene

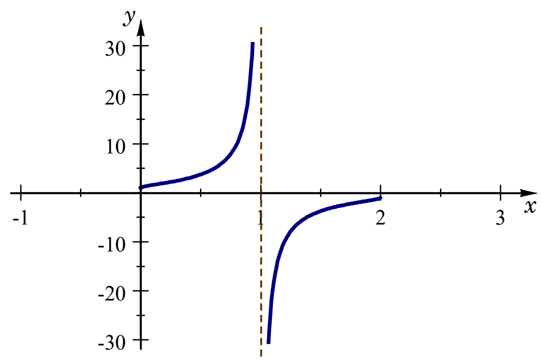
$$\frac{\sqrt{2(0.999)-(0.999)^2}+1}{-(0.999-1)} = \frac{1.999}{-(-0.001)} = 1999.9$$

La función toma valores positivos muy grandes, por lo que podemos concluir que

Respuesta:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x - 1}{\sqrt{2x - x^2} - 1} = +\infty$$

En la siguiente figura se muestra la gráfica de la función, donde claramente se puede ver que la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de la función.



Ejemplo 4: Cálculo de límites con resta de fracciones

Calcule el límite

$$\lim_{x \to -4^-} \left(\frac{2}{x^2 + 3x - 4} + \frac{3}{x + 4} \right)$$

Solución

Observe que, en este problema la función está compuesta por la diferencia de dos expresiones racionales.

En la primera expresión racional, cuando x se aproxima a —4 por la izquierda, el denominador se aproxima a cero con valores positivos, por lo que

$$\lim_{x \to -4^-} \frac{2}{x^2 + 3x - 4} = +\infty$$

En la segunda expresión racional, cuando x se aproxima a —4 por la izquierda, el denominador se aproxima a cero con valores negativos, por lo que

$$\lim_{x \to -4^-} \frac{3}{x + 4} = -\infty$$

Si se intenta calcular el límite como la suma de los límites de las dos expresiones racionales se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -4^-} \left(\frac{2}{x^2 + 3x - 4} + \frac{3}{x + 4} \right) &= \lim_{x \to -4^-} \frac{2}{x^2 + 3x - 4} + \lim_{x \to -4^-} \frac{3}{x + 4} \\ &= +\infty - \infty \end{aligned}$$

La expresión $+\infty - \infty$ es una forma indeterminada y debemos elegir otro procedimiento para calcular el límite.

Lo que procede en este caso es desarrollar la suma de fracciones y simplificar la expresión resultante. Luego calcular el límite

$$\lim_{x \to -4^-} \left(\frac{2}{x^2 + 3x - 4} + \frac{3}{x + 4} \right) = \lim_{x \to -4^-} \left(\frac{2}{(x + 4)(x - 1)} + \frac{3}{x + 4} \right)$$

$$= \lim_{x \to -4^-} \frac{2 + 3(x - 1)}{(x + 4)(x - 1)}$$

$$= \lim_{x \to -4^-} \frac{3x - 1}{(x + 4)(x - 1)}$$

Ahora se calcula el límite del numerador y del denominador para establecer el tipo de límite se está calculando

$$\lim_{x \to -4^-} (3x - 1) = 3(-4) - 1 = -13$$

$$\lim_{x \to -4^-} (x + 4)(x - 1) = (-4 + 4)(-4 - 1) = (0)(-5) = 0$$

Como el límite del numerador es una constante y el límite del denominador es 0, el límite es tipo infinito y lo calculamos evaluando un número ligeramente menor que — 4 en la función

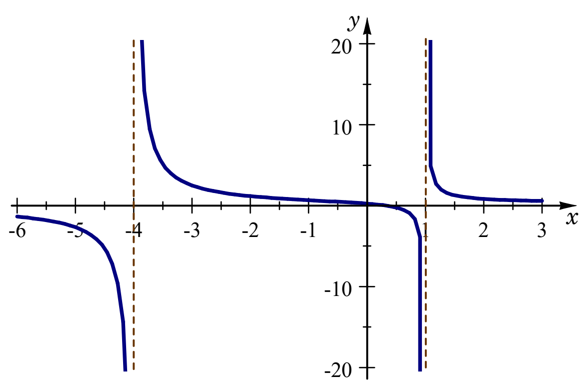
$$\frac{3(-4.001) - 1}{(-4.001 + 4)(-4.001 - 1)} = \frac{-13.003}{(-0.001)(-5.001)} = -2599.7$$

La función tiene valores negativos muy grandes, por lo que podemos concluir que

Respuesta:

$$\lim_{x \to -4^-} \left(\frac{2}{x^2 + 3x - 4} + \frac{3}{x + 4} \right) = -\infty$$

La figura siguiente muestra la gráfica de la función, donde puede verse que la recta $x = -4$ es una asíntota vertical.



Ejercicios sobre límites infinitos

En los ejercicios 1 a 26 utilice las propiedades de los límites para calcular los límites siguientes:

1. $\lim_{x \to 3^+} \frac{2}{x - 3}$

2. $\lim_{x \to 5^+} \frac{2 - x}{x - 5}$

3. $\lim_{x \to -2^+} \frac{x}{x + 2}$

4. $\lim_{x \to 3} \frac{4x^2}{x^2 - 9}$

5. $\lim_{x \to 3} \frac{4x^2}{x^2 - 9}$

6. $\lim_{x \to 4^-} \frac{x^2}{16 - x^2}$

7. $\lim\limits_{w\to 3^-} \dfrac{3-w}{(w-3)^2}$

8. $\lim\limits_{w\to 3^+} \dfrac{3+w}{(w-3)^2}$

9. $\lim\limits_{w\to -3} \dfrac{3-w}{(w+3)^2}$

10. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x^2+4}{x^3-x^2}$

11. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x^2+4}{x^3-x^2}$

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2+4}{x^3-x^2}$

13. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x^2+4x}{4x^2+5x^3}$

14. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{5+x}}{x}$

15. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

16. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$

17. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{3-x}$

18. $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{\sqrt{x^2-25}}{5-x}$

19. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)$

20. $\lim\limits_{x\to 3^-} \left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{2}{x^2-9}\right)$

21. $\lim\limits_{x\to 3^-} \left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{2}{x^2-9}\right)$

22. $\lim\limits_{x\to -1^-} \left(\dfrac{1}{x^2-x-2}+\dfrac{3}{x+1}\right)$

23. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^3+9x^2+20x}{x^2+x-12}$

24. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}-1}$

25. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}-2}$

26. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{x}\right)$

En los 27 a 32 encuentre las asíntotas verticales de la función

27. $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$

28. $f(x) = \dfrac{x}{4x-2x^2}$

29. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-16}$

30. $f(x) = \dfrac{x^2-x-12}{x^2-6x+8}$

31. $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$

32. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{3-5x-2x^2}}$