Derivación implícita

$x^2 + y^2 = r^2$

función explícita $\rightarrow$ $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

función implícita $\rightarrow$ $x^2 + y^2 = r^2$

$z = f(x,y)$ $\rightarrow$ $F(x,y) = 0$

$\frac{dy}{dx}$ $\rightarrow$ $\frac{\partial F}{\partial x} \cancel{\frac{dx}{dx}}^{1} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Ej. Encontrar $\frac{dy}{dx}$

$$\cos(xy) = 1 + \operatorname{sen} x$$

$$F(x,y,) = \cos(xy) - 1 - \operatorname{sen} x$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_x = -y\operatorname{sen}(xy) - \cos x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -x\operatorname{sen}(xy)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(-y\operatorname{sen}xy - \cos x)}{-x\operatorname{sen}(xy)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\operatorname{sen}xy + \cos x}{x\operatorname{sen}(xy)}$$

$z = f(x,y)$ $\rightarrow$ $F(x,y,z) = 0$ $\rightarrow$ $z - f(x,y) = 0$

$\frac{\partial z}{\partial x}$: $\frac{\partial}{\partial x} F(x,y,z) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\cancel{\frac{\partial x}{\partial x}}^{1} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\cancel{\frac{\partial y}{\partial x}}^{0} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = \frac{-F_x}{F_z}$$

$\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\cancel{\frac{\partial x}{\partial y}}^{0} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\cancel{\frac{\partial y}{\partial y}}^{1} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\frac{F_y}{F_z}$$

Ej. Calcular $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$.

$$x^2 - y^3 + z^4 - 3z = 2$$

$\frac{\partial z}{\partial x}$: $\rightarrow$ $\frac{\partial z}{\partial x} \quad -\frac{F_x}{F_z}$

$$F(x,y,z) = x^2 - y^3 + z^4 - 3z - 2 = 0$$

$$F_x = 2x \quad , \quad F_z = 4z^3 - 3$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{4z^3-3}$$

$\frac{\partial z}{\partial y}$: $\rightarrow$ $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$

$$F_y = -3y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-(-3y^2)}{4z^3-3} = \frac{3y^2}{4z^3-3}$$

Ej. Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$xyz + x\ln y = xz^2$$

$$F(x,y,z) = xyz + x\ln y - xz^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

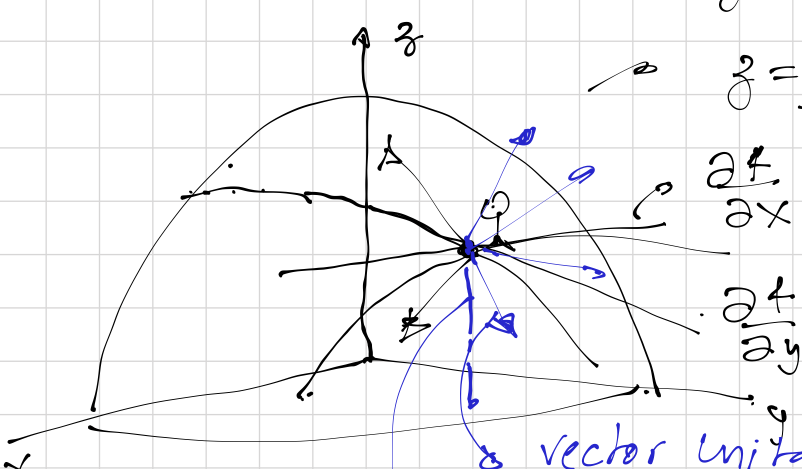
$F_x = yz + \ln y - z^2$ $F_z = xy - 2xz$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{(yz + \ln y - z^2)}{xy - 2xz}$$

$$F_y = xz + \frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{(xz + x/y)}{xy - 2xz}$$

Derivadas direccionales y vector gradiente

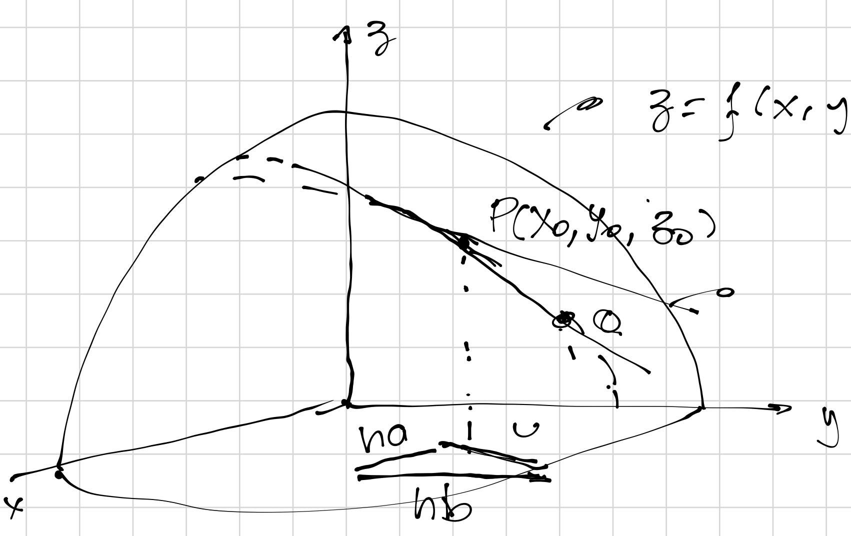


vector unitario → $U = \cos\theta\, i + \operatorname{sen}\theta\, j$

Derivada direccional. vector V

$$U = \frac{V}{\|V\|}$$

$$U = ai + bj$$



$$\overline{PQ} = hU = \langle ha, bh \rangle$$

$$ha = x - x_0$$

$$hb = y - y_0$$

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0+ha,\ y_0+hb) - f(x_0,y_0)}{h}$$

$$D_u f(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+ha,\ y_0+hb) - f(x_0,y_0)}{h}$$

Teorema :

Si f es una función derivable de x e y, entonces f tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $u = \langle a, b \rangle$ y

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y) \cdot a + f_y(x,y) \cdot b$$

Ej. Determine $D_u f(x,y)$ de la función

$f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$ en el punto $P(0, \pi/3)$ en la dirección del vector $v = -6i + 8j$

$$v = -6i + 8j \quad \to \quad u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{-6i + 8j}{\sqrt{(-6)^2 + (8)^2}} = \frac{-6i + 8j}{\sqrt{36+64}}$$

$$D_u f(0, \pi/3) = (e^0 \operatorname{sen} \tfrac{\pi}{3}) \cdot (-3/5) + (e^0 \cos \pi/3)(\tfrac{4}{5}) = -0.1196$$

Ej. Determine la derivada direccional de la función

$f(x,y,z) = xy^2 + y^{-1} z$ $\quad P(2,1,1)$ en la dirección del vector $v = i + j + k$

$$D_u f(2,1,1) = f_x \cdot a + f_y \cdot b + f_z \cdot c$$

$$u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{i + j + k}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{i}{\sqrt{3}} + \frac{j}{\sqrt{3}} + \frac{k}{\sqrt{3}}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad b = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$D_u f(2,1,1) = y^2 tg^{-1} z \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + (2xy\, tg^{-1} z) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{xy^2}{1+z^2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$D_u f(2,1,1) = (1^2 tg^{-1} 1)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + [2(2)(1)\, tg^{-1} 1]\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2(1)^2}{1+1^2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$D_u f(2,1,1) = 2.84$

Ej. Determine $D_u f$ de $f(x,y,z) = xy^2z^2$ en $P(2,1,1)$ en la dirección del $Q(0,-3,5)$

$P \xrightarrow{V} Q \rightarrow V = \langle (x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1) \rangle$

$V = \langle (0-2), (-3-1), (5-1) \rangle = \langle -2, -4, 4 \rangle$

$V = -2i - 4j + 4k$

$U = \frac{V}{\|V\|} = \frac{-2i - 4j + 4k}{\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (4)^2}} = \frac{-2i - 4j + 4k}{\sqrt{4 + 16 + 16}} \rightarrow \sqrt{36}$

$U = \frac{-2}{6} i - \frac{4}{6} j + \frac{4}{6} k = -\frac{1}{3} i - \frac{2}{3} j + \frac{2}{3} k$

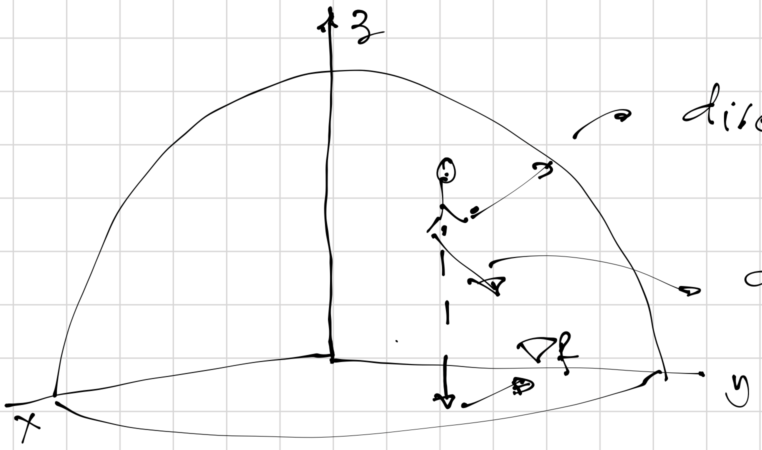
$D_u f = f_x \cdot a + f_y \cdot b + f_z \cdot c$

$D_u f = (y^2 z^2) \cdot a + (2xyz^2) \cdot b + (2xy^2 z) \cdot c$

$D_u f(2,1,1) = (1^2)(1^2)\left(-\frac{1}{3}\right) + 2(2)(1)(1^2) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + (2)(2)(1^2)(1)\left(\frac{2}{3}\right)$

$D_u f(2,1,1) = -\frac{1}{3}$

vector gradiente (∇)



dirección de máximo crecimiento (ascenso)

dirección de mínimo decrecimiento (descenso)

El vector gradiente proporciona el vector de máximo ascenso o mínimo descenso.

$\mathbb{R}^2 \to \quad \nabla f = f_x(x,y)i + f_y(x,y)j$

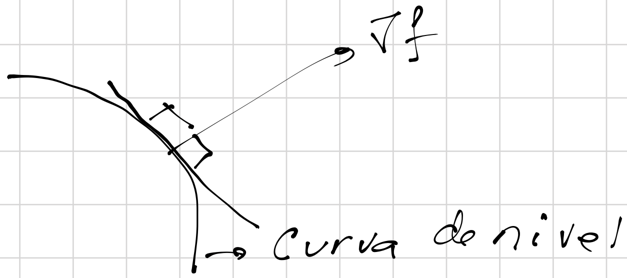
$\mathbb{R}^3 \to \quad \nabla f = f_x(x,y)i + f_y(x,y)j + f_z(x,y)k$

Propiedades

1. Suponga que f es una función derivable de dos o tres variables, el valor máximo de la derivada direccional $D_uf(x,y)$ es $\|\nabla f(x,y)\|$ y ocurre cuando el vector unitario tiene la misma dirección que el vector gradiente.

2. La mínima derivada direccional se encuentra calculando $-\|\nabla f(x,y)\|$

3. El gradiente es perpendicular u ortogonal a las curvas de nivel.



Ej. Suponga que en cierta región del espacio, el potencial eléctrico V está dado por

$$V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$$

a) Encuentre la razón de cambio del potencial en $P(3,4,5)$ en la dirección del vector $v = i + j - k$

b) ¿En qué dirección cambia más rápido el potencial eléctrico en P.

c) ¿Cuál es la máxima razón de camb

a) $\quad D_uf(3,4,5) = \nabla f(x,y,z) \cdot u$

$$u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{i + j - k}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{i}{\sqrt{3}} + \frac{j}{\sqrt{3}} - \frac{k}{\sqrt{3}}$$

$$\nabla f(x, y, z) = f_x i + f_y j + f_z k$$

$$= (10x - 3y + \cancel{x} z) i + (-3x + xz) j + (xy) k$$

$$D_u f(3,4,5) = (30 - 12 + 20)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + (-9 + 15)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + (12)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$D_u f(3,4,5) = \frac{38}{\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{3}} - \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{32}{\sqrt{3}}$$

b)

$$\nabla f(x, y, z) = (10x - 3y + yz) i + (-3x + xz) j + (xy) k$$

$$\nabla f(x, y, z) = 38 i + 6 j + 12 k$$

c)

$$D_u f = \|\nabla f\| = \sqrt{(38)^2 + (6)^2 + (12)^2} = 40.3$$