SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN HOMOGENEOS (METODO DE VALORES Y VECTORES PROPIOS)

Para sistemas lineales homogéneos con coeficientes reales y constantes de primer orden:

$$\begin{aligned}
x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\
x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
x'_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n
\end{aligned}$$

Este sistema para poder analizarlo mejor se escribirá en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} + \cdots + a_{2n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} + a_{m2} + a_{m3} + \cdots + a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_2 \end{pmatrix}$$

El sistema anterior se representará como una ecuación diferencial matricial de la forma siguiente:

$$X' = ax$$

Donde **"a"** es la matriz de coeficientes de tamaño "mxn", "X'" representa el vector columna de derivadas y "x" el vector columna de variables. A partir de lo anterior se tomará para los siguientes cálculos.

Para resolver $X' = ax$ se supone que $x = Ke^{\lambda t}$ es una familia de soluciones del sistema, "λ" el valor propio generado de la solución de la Ecuacion diferencial y "K" es un vector propio de solución que depende de "λ".

Ahora comprobando que $x = Ke^{\lambda t}$ es solución del sistema derivamos la ecuación anterior tenemos:

$$x' = \lambda Ke^{\lambda t}$$

sustituyendo en $x' = ax$t

Tenemos→ $\lambda Ke^{\lambda t} = a(Ke^{\lambda t})$

$$aK - \lambda K = 0$$

La Ecuacion anterior no se puede efectuar porque se tiene que "a" es una matriz de coeficientes y "λ" es un valor numérico (real o imaginario), entonces debemos de convertir a "λ" en un matriz, por lo tanto, a "λ" la multiplicamos por la matriz identidad "I" que no altera la Ecuacion:

$$aK - \lambda IK = 0 \rightarrow \ (a - \lambda I)K = 0$$

Ahora el objetivo de este método es encontrar los valores de "λ", **la única forma de encontrarlo es aplicando determinantes:**

$$|a - \lambda I| = 0$$

Resolviendo Lo anterior genera una ecuación de grado "n", encontrándose al resolverla los valores de "λ", los cuales al sustituirlos en $(a - \lambda I)K = 0$ genera los valores de "K".

A los valores de "λ" se le denominan ***VALORES PROPIOS (EIGENVALORES) Y A "K" VECTORES PROPIOS (EIGENVECTORES).*** De la ecuación $|a - \lambda I| = 0$ los valores de propios ("λ") pueden ser:

1. Reales Distintos.
2. Reales Repetidos.
3. Complejos.

1. ***VALORES PROPIOS REALES DISTINTOS:***

Sean $\boldsymbol{\lambda_1}$, $\boldsymbol{\lambda_2}$, ... $\boldsymbol{\lambda_n}$ valores propios reales y distintos de la matriz de coeficientes **"a"** del sistema homogéneo $\boldsymbol{x}^{/} = \boldsymbol{ax}$ y sean $\boldsymbol{k_1}$, $\boldsymbol{k_2} \dots \boldsymbol{k_n}$ los vectores propios correspondientes a cada $\boldsymbol{\lambda_1}$, $\boldsymbol{\lambda_2}$, ... $\boldsymbol{\lambda_n}$, entonces la solución general del sistema es:

$$\boldsymbol{x_G(t) = C_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 k_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots C_n k_n e^{\lambda_n t}}$$

2. ***VALORES PROPIOS REALES REPETIDOS:***

En general si "$\boldsymbol{M}$" es un entero positivo y $(\boldsymbol{\lambda - a})^{\boldsymbol{M}}$ es un factor de la ecuación característica, entonces se dice que $\boldsymbol{\lambda = a}$ es un valor propio de multiplicidad "M", para este curso solo se vera casos de multiplicidad 2. Cuando se tienen valores propios repetidos solo se presentan los siguientes 2 casos:

a) Puede ser que sea posible encontrar dos vectores propios $\boldsymbol{k_1}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{k_2}$ linealmente independientes, que correspondan a los 2 valores propios, entonces la solución es:

$$\boldsymbol{x_G(t) = C_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 k_2 e^{\lambda_1 t}}$$

b) Si el valor propio $\boldsymbol{\lambda_1}$ de multiplicidad 2 le corresponde solamente un vector propio, entonces siempre es posible encontrar 2 soluciones linealmente independientes que se obtienen de la forma siguientes: sabemos que $(\boldsymbol{a - \lambda I})\boldsymbol{K_1} = \boldsymbol{0}$ de la cual obtenemos $\boldsymbol{k_1}$, para obtener $\boldsymbol{k_2}$ se utilízala siguiente ecuación matricial:

$$(\boldsymbol{a - \lambda I})\boldsymbol{K_1 = k_2}$$

Y las soluciones están dadas de la forma siguiente:

$$\boldsymbol{x_1 = k_1 e^{\lambda_1 t}}$$
$$\boldsymbol{x_2 = k_2 t e^{\lambda_1 t}}$$
$$\boldsymbol{x_G(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 t e^{\lambda_1 t}}$$

3. ***VALORES PROPIOS COMPLEJOS:***

Sea $\boldsymbol{\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta}$, son valores propios complejos de la matriz de coeficientes; sus correspondientes vectores propios también tendrán elementos complejos.

<u>Teorema:</u> sea "$\boldsymbol{a}$" es la matriz del sistema homogéneo, todos los elementos son reales; sea "$\boldsymbol{k}$" el vector propio correspondiente al valor propio complejo $\boldsymbol{\lambda_1} \rightarrow \boldsymbol{x_1 = k_1 e^{\lambda_1 t}}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{x_1 = \overline{k_1} e^{\lambda_1 t}}$.

<u>Teorema:</u> sea $\boldsymbol{\lambda_1 = \alpha + i\beta}$ un valor propio complejo de la matriz "$\boldsymbol{a}$" del sistema homogéneo y sean:

$$\boldsymbol{B_1 = \frac{1}{2}[k_1 + \overline{k_1}]} \quad \boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{B_2 = \frac{i}{2}[k_1 - \overline{k_1}]}$$

Entonces la solución general queda escrita como:

$$\boldsymbol{x_G(t) = C_1(B_1 \cos(\beta t) - B_2 \sin(\beta t))e^{\alpha t}}$$
$$\boldsymbol{+ \; C_2(B_2 \cos(\beta t) + B_1 \sin(\beta t))e^{\alpha t}}$$

<u>Ejemplo 1 (VALORES PROPIOS REALES DISTINTOS):</u>

Resolver El siguiente Sistema de Ecuaciones Diferenciales Homogéneo:

$$\boldsymbol{X' = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} x}$$

Solución:
Siempre el primer paso es resolver el determinante $|\boldsymbol{a - \lambda I}| = \boldsymbol{0}$ para encontrar los valores propios "$\boldsymbol{\lambda}$"

$$\left| \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$Det = (-1)^{m+n} a_{ij} |M_{ij}|$$

$$det = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} - (4)\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix} 4 & -1-\lambda \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)[(-1-\lambda)(6-\lambda)] - (4)[(4)(6-\lambda)] + 0 = 0$$

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 27\lambda - 90 = 0$$

resolviendo el polinomio y obteniendo los valores propios:

$$\lambda_1 = -5; \quad \lambda_2 = 6; \quad \lambda_3 = 3$$

AHORA PARA CADA VALOR PROPIO HAY QUE CALCULARLE SU VECTOR PROPIO DE SOLUCION, ENTONCES TENEMOS:

- **Para $\lambda_1 = -5$:** Para este valor propio genera su vector propio $K_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$, donde los valores de k_1, k_2 **y** k_3 hay que determinarlos mediante:

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_2 \end{pmatrix} = 0$$

Para determinar $K_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$ hay que escalonar la matriz y las soluciones deben de quedar infinitas (quedan infimitas porque estamos analizando un sistema de ecuaciones diferenciales y como solución es una familia de soluciones)

Entonces sustituyendo el valor de de $\lambda_1 = -5$ y escalonando la matriz tenemos:

$$\begin{pmatrix} -1-(-5) & 4 & 2 \\ 4 & -1-(-5) & -2 \\ 0 & 0 & 6-(-5) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = 0$$

Escalonando tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = 0$$

Podemos ver que el sistema tiene infinitas soluciones (porque la ultimo fila es nula), Dando las soluciones del sistema tenemos:

$$k_3 = 0$$

$$k_1 + k_2 + \left(\frac{1}{2}\right) k_3 = 0, \text{ sustituyendo } k_3 = 0$$

$$k_1 + k_2 = 0$$

Despejando tenemos:

$$k_1 = -k_2$$

Se observa las infinitas soluciones, ahora tendremos que parametrizar k_2 **, el valor del parámetro que usaremos será 1**, entonces el vector propio de solución es:

$$k_2 = 1 \quad , \qquad k_1 = -1 \quad y \quad k_3 = 0$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad K_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces la solución para el primer valor propios es:

$$x_1(t) = C_1 K_1 e^{\lambda_1 t} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-5t}$$

- $\underline{\boldsymbol{Para \quad \lambda_2 = 6:}}$ Para este valor propio genera su vector propio $K_2 = \begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix}$, donde los valores de $k_4, k_5\ y\ k_6$ hay que determinarlos mediante:

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix} = 0$$

Para determinar $K_2 = \begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix}$ hay que escalonar la matriz y las soluciones deben de quedar infinitas (quedan infimitas porque estamos analizando un sistema de ecuaciones diferenciales y como solución es una familia de soluciones)

Entonces sustituyendo el valor de de $\lambda_2 = 6$ y escalonando la matriz tenemos:

$$\begin{vmatrix} -1-(6) & 4 & 2 \\ 4 & -1-(6) & -2 \\ 0 & 0 & 6-(6) \end{vmatrix}\begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 4 & 2 \\ 4 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escalonando tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4/7 & -2/7 \\ 0 & 1 & 2/11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix} = 0$$

Podemos ver que el sistema tiene infinitas soluciones (porque la ultimo fila es nula), Dando las soluciones del sistema tenemos:

$$k_5 + \left(\frac{2}{11}\right)k_6 = 0$$

Despejando tenemos:

$$k_5 = -\left(\frac{2}{11}\right)k_6$$

$$k_4 - \left(\frac{4}{7}\right)k_5 - \left(\frac{2}{7}\right)k_6 = 0, \textbf{ sustituyendo } \quad k_5 = -\left(\frac{2}{11}\right)k_6$$

$$k_4 - \left(\frac{4}{7}\right)\left(-\frac{2}{11}k_6\right) - \left(\frac{2}{7}\right)k_6 = 0$$

$$k_4 - \left(\frac{2}{11}\right)k_6 = 0$$

Despejando tenemos:

$$k_4 = \left(\frac{2}{11}\right)k_6$$

Se observa las infinitas soluciones, ahora tendremos que parametrizar k_6 **, el valor del parámetro que usaremos será 1**, entonces el vector propio de solución es:

$$k_5 = -\left(\frac{2}{11}\right) \quad , \quad k_4 = \left(\frac{2}{11}\right) \quad y \quad k_6 = 1$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad K_2 = \begin{pmatrix} 2/11 \\ -2/11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces la solución para el segundo valor propios es:

$$x_2(t) = C_2K_2e^{\lambda_2\, t} = C_2\begin{pmatrix} 2/11 \\ -2/11 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6\,t}$$

- $\underline{\boldsymbol{Para \quad \lambda_3 = 3:}}$ Para este valor propio genera su vector propio $K_3 = \begin{pmatrix} k_7 \\ k_8 \\ k_9 \end{pmatrix}$, donde los valores de $k_7, k_8\ y\ k_9$ hay que determinarlos mediante:

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_7 \\ k_8 \\ k_9 \end{pmatrix} = 0$$

Para determinar $K_3 = \begin{pmatrix} k_7 \\ k_8 \\ k_9 \end{pmatrix}$ hay que escalonar la matriz y las soluciones deben de quedar infinitas (quedan infimitas porque estamos analizando un sistema de ecuaciones diferenciales y como solución es una familia de soluciones)

Entonces sustituyendo el valor de de $\boldsymbol{\lambda_3 = 3}$ y escalonando la matriz tenemos:

$$\begin{vmatrix} -1-(3) & 4 & 2 \\ 4 & -1-(3) & -2 \\ 0 & 0 & 6-(3) \end{vmatrix} \begin{pmatrix} k_7 \\ k_8 \\ k_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_7 \\ k_8 \\ k_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escalonando tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_7 \\ k_8 \\ k_9 \end{pmatrix} = 0$$

Podemos ver que el sistema tiene infinitas soluciones (porque la ultimo fila es nula), Dando las soluciones del sistema tenemos:

$$k_9 = 0$$

Despejando tenemos:

$$k_7 - k_8 - \left(\frac{1}{2}\right) k_9 = 0, \text{ sustituyendo } \ k_3 = 0$$

$$k_7 - k_8 = 0$$

Despejando tenemos:

$$k_7 = k_8$$

Se observa las infinitas soluciones, ahora tendremos que parametrizar $\boldsymbol{k_2}$ **, el valor del parámetro que usaremos será 1**, entonces el vector propio de solución es:

$$k_8 = 1 \quad , \qquad k_7 = 1 \quad y \quad k_9 = 0$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} k_7 \\ k_8 \\ k_9 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad K_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces la solución para el tercer valor propios es:

$$x_3(t) = C_3 K_3 e^{\lambda_3 t} = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}$$

Solución General:

$$X_g(t) = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-5t} + C_2 \begin{bmatrix} 2/11 \\ -2/11 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6t} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t}$$

Ejemplo 2 (VALORES PROPIOS REALES DISTINTOS):

Resolver El siguiente Sistema de Ecuaciones Diferenciales Homogéneo:

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} x$$

Solución:

Siempre el primer paso es resolver el determinante $|a - \lambda I| = 0$ para encontrar los valores propios "λ"

$$\left| \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -2-\lambda & 3 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$Det = (-1)^{m+n} a_{ij} |M_{ij}|$$

$$(3-\lambda)\begin{vmatrix}-2-\lambda & 3\\ 0 & 4-\lambda\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 4-\lambda\end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix}1 & -2-\lambda\\ 2 & 0\end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)[(-2-\lambda)(4-\lambda)-(3)(0)] - 2[(1)(4-\lambda)-(3)(2)] - [(1)(0)-(-2-\lambda)(2)] = 0$$

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 + 2\lambda - 24 = 0$$

resolviendo el polinomio y obteniendo los valores propios:

$$\lambda_1 = -2 \quad , \quad \lambda_2 = 3 \quad \& \quad \lambda_3 = 4$$

AHORA PARA CADA VALOR PROPIO HAY QUE CALCULARLE SU VECTOR PROPIO DE SOLUCION, ENTONCES TENEMOS:

- **Para $\lambda_1 = -2$:** Para este valor propio genera su vector propio $K_1 = \begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}$, donde los valores de k_1, k_2 **y** k_3 hay que determinarlos mediante:

$$\begin{pmatrix}3-\lambda & 2 & -1\\ 1 & -2-\lambda & 3\\ 2 & 0 & 4-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_2\end{pmatrix} = 0$$

Para determinar $K_1 = \begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}$ hay que escalonar la matriz y las soluciones deben de quedar infinitas (quedan infimitas porque estamos analizando un sistema de ecuaciones diferenciales y como solución es una familia de soluciones)

Entonces sustituyendo el valor de de $\lambda_1 = -2$ y escalonando la matriz tenemos:

$$\begin{pmatrix}3-(-2) & 2 & -1\\ 1 & -2-(-2) & 3\\ 2 & 0 & 4-(-2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 2 & 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix} = 0$$

Escalonando tenemos:

$$\begin{pmatrix}1 & 2/5 & -1/5\\ 0 & 1 & -8\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix} = 0$$

Podemos ver que el sistema tiene infinitas soluciones (porque la ultimo fila es nula), Dando las soluciones del sistema tenemos:

$$k_2 - 8k_3 = 0$$

Despejando tenemos:

$$k_2 = 8k_3$$

$$k_1 + \left(\frac{2}{5}\right)k_2 - \left(\frac{1}{5}\right)k_3 = 0\text{ , sustituyendo } k_2 = 8k_3$$

$$k_1 + \left(\frac{15}{5}\right)k_3 = 0$$

Despejando tenemos:

$$k_1 = -3k_3$$

Se observa las infinitas soluciones, ahora tendremos que parametrizar k_3 **, el valor del parámetro que usaremos será 1**, entonces el vector propio de solución es:

$$k_2 = 8 \quad , \quad k_1 = -3 \quad y \quad k_3 = 1$$

$$K_1 = \begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad K_1 = \begin{pmatrix}-3\\8\\1\end{pmatrix}$$

Entonces la solución para el primer valor propios es:

$$x_1(t) = C_1K_1e^{\lambda_1 t} = C_1\begin{pmatrix}-3\\8\\1\end{pmatrix}e^{-2t}$$

- $\underline{\boldsymbol{Para \quad \lambda_2 = 3:}}$ Para este valor propio genera su vector propio $\boldsymbol{K_2} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k_4} \\ \boldsymbol{k_5} \\ \boldsymbol{k_6} \end{pmatrix}$, donde los valores de $\boldsymbol{k_4, k_5\ y\ k_6}$ hay que determinarlos mediante:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3-\lambda} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2-\lambda} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{4-\lambda} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{k_4} \\ \boldsymbol{k_5} \\ \boldsymbol{k_6} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Para determinar $\boldsymbol{K_2} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k_4} \\ \boldsymbol{k_5} \\ \boldsymbol{k_6} \end{pmatrix}$ hay que escalonar la matriz y las soluciones deben de quedar infinitas (quedan infimitas porque estamos analizando un sistema de ecuaciones diferenciales y como solución es una familia de soluciones)

Entonces sustituyendo el valor de de $\boldsymbol{\lambda_2 = 3}$ y escalonando la matriz tenemos:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3-3} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2-3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{4-3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{k_4} \\ \boldsymbol{k_5} \\ \boldsymbol{k_6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{k_4} \\ \boldsymbol{k_5} \\ \boldsymbol{k_6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Escalonando tenemos:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1/2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{k_4} \\ \boldsymbol{k_5} \\ \boldsymbol{k_6} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Podemos ver que el sistema tiene infinitas soluciones (porque la ultimo fila es nula), Dando las soluciones del sistema tenemos:

$$\boldsymbol{k_5} - \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)\boldsymbol{k_6} = \mathbf{0}$$

Despejando tenemos:

$$\boldsymbol{k_5} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)\boldsymbol{k_6}$$

$$\boldsymbol{k_4} - \mathbf{5}\boldsymbol{k_5} + \mathbf{3}\boldsymbol{k_6} = \mathbf{0}, \quad \textbf{sustituyendo } \boldsymbol{k_5} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)\boldsymbol{k_6}$$

$$\boldsymbol{k_4} - \mathbf{5}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{k_6}\right) + \mathbf{3}\boldsymbol{k_6} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{k_4} + \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)\boldsymbol{k_6} = \mathbf{0}$$

Despejando tenemos:

$$\boldsymbol{k_4} = -\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)\boldsymbol{k_6}$$

Se observa las infinitas soluciones, ahora tendremos que parametrizar $\boldsymbol{k_6}$ **, el valor del parámetro que usaremos será 1**, entonces el vector propio de solución es:

$$\boldsymbol{k_5} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) \quad , \quad \boldsymbol{k_4} = -\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) \quad \boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{k_6} = \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{K_2} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k_4} \\ \boldsymbol{k_5} \\ \boldsymbol{k_6} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{K_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1/2} \\ \mathbf{1/2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Entonces la solución para el segundo valor propios es:

$$\boldsymbol{x_2(t)} = \boldsymbol{C_2 K_2 e^{\lambda_2\, t}} = \boldsymbol{C_2}\begin{pmatrix} \mathbf{-1/2} \\ \mathbf{1/2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}\boldsymbol{e^{3\, t}}$$

- $\underline{\boldsymbol{Para \quad \lambda_3 = 4:}}$ Para este valor propio genera su vector propio $\boldsymbol{K_3} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k_7} \\ \boldsymbol{k_8} \\ \boldsymbol{k_9} \end{pmatrix}$, donde los valores de $\boldsymbol{k_7, k_8\ y\ k_9}$ hay que determinarlos mediante:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3-\lambda} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2-\lambda} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{4-\lambda} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{k_7} \\ \boldsymbol{k_8} \\ \boldsymbol{k_9} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Para determinar $K_3 = \begin{pmatrix} k_7 \\ k_8 \\ k_9 \end{pmatrix}$ hay que escalonar la matriz y las soluciones deben de quedar infinitas (quedan infimitas porque estamos analizando un sistema de ecuaciones diferenciales y como solución es una familia de soluciones)

Entonces sustituyendo el valor de de $\boldsymbol{\lambda_3 = 4}$ y escalonando la matriz tenemos:

$$\begin{pmatrix} 3-4 & 2 & -1 \\ 1 & -2-4 & 3 \\ 2 & 0 & 4-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_7 \\ k_8 \\ k_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -6 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_7 \\ k_8 \\ k_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escalonando tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_7 \\ k_8 \\ k_9 \end{pmatrix} = 0$$

Podemos ver que el sistema tiene infinitas soluciones (porque la ultimo fila es nula), Dando las soluciones del sistema tenemos:

$$k_8 - \left(\frac{1}{2}\right) k_9 = 0$$

Despejando tenemos:

$$k_8 = \left(\frac{1}{2}\right) k_9$$

Despejando tenemos:

$$k_7 - 2k_8 + k_9 = 0, \text{ sustituyendo } \quad k_8 = \left(\frac{1}{2}\right) k_9$$

$$k_7 - 2\left(\frac{1}{2} k_9\right) + k_9 = 0$$

$$k_7 = 0$$

Se observa las infinitas soluciones, ahora tendremos que parametrizar $\boldsymbol{k_9}$ **, el valor del parámetro que usaremos será 1**, entonces el vector propio de solución es:

$$k_8 = \frac{1}{2} \quad , \qquad k_7 = 0 \quad y \quad k_9 = 1$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} k_7 \\ k_8 \\ k_9 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces la solución para el tercer valor propios es:

$$x_3(t) = C_3 K_3 e^{\lambda_3 t} = C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$$

Solución General:

$$X_g(t) = C_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$$

Ejemplo 3 (*VALORES PROPIOS REALES REPETIDOS*):

CASO 1 **(PROPONIENDO SOLUCIONES LINEALMENTE INDEPENDIENTES)**

Resolver el siguiente sistema de Ecuaciones Diferenciales:

$$X' = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} X$$

Siempre el primer paso es resolver el determinante $|a - \lambda I| = 0$ para encontrar los valores propios "λ"

$$\left| \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$Det = (-1)^{m+n} a_{ij} |M_{ij}|$$

$$(5-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 + 10\lambda^2 - 25\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \;, \qquad \lambda_{2,3} = 5$$

- Para $\lambda_1 = 0$: Para este valor propio genera su vector propio $K_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$, donde los valores de $k_1, k_2\, y\, k_3$ hay que determinarlos mediante:

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -4 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5-0 & -4 & 0 \\ 1 & 0-0 & 2 \\ 0 & 2 & 5-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escalonando tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4/5 & 0 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = 0$$

Podemos ver que el sistema tiene infinitas soluciones (porque la ultimo fila es nula), Dando las soluciones del sistema tenemos:

$$k_2 + (5/2)k_3 = 0$$

Despejando tenemos:

$$k_2 = -(5/2)k_3$$

$$k_1 - \left(\frac{4}{5}\right)k_2 = 0 \text{ , sustituyendo } k_2 = -(5/2)k_3$$

$$k_1 - \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)k_3 = 0$$

Despejando tenemos:

$$k_1 = -2k_3$$

Se observa las infinitas soluciones, ahora tendremos que parametrizar k_3 **, el valor del parámetro que usaremos será 1**, entonces el vector propio de solución es:

$$k_2 = -5/2 \;, \qquad k_1 = -2 \quad y \quad k_3 = 1$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad K_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -5/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces la solución para el primer valor propios es:

$$\boldsymbol{x_1(t) = C_1 K_1 e^{\lambda_1 t} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -5/2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{(0)\, t} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -5/2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

- ***Para*** $\boldsymbol{\lambda_2 = 5}$**:** Para este valor propio genera su vector propio $K_2 = \begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix}$, donde los valores de $\boldsymbol{k_4, k_5\ y\ k_6}$ hay que determinarlos mediante:

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -4 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix} = 0$$

Para determinar $\boldsymbol{K_2} = \begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix}$ hay que escalonar la matriz y las soluciones deben de quedar infinitas (quedan infimitas porque estamos analizando un sistema de ecuaciones diferenciales y como solución es una familia de soluciones)

Entonces sustituyendo el valor de de $\boldsymbol{\lambda_2 = 5}$ y escalonando la matriz tenemos:

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -4 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5-5 & -4 & 0 \\ 1 & 0-5 & 2 \\ 0 & 2 & 5-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escalonando tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix} = 0$$

Podemos ver que el sistema tiene infinitas soluciones (porque la ultimo fila es nula), Dando las soluciones del sistema tenemos:

$$\boldsymbol{k_5 = 0}$$

$$\boldsymbol{k_4 - 5k_5 + 2k_6 = 0, \quad \text{sustituyendo } k_5 = 0}$$

$$\boldsymbol{k_4 + 2k_6 = 0}$$

Despejando tenemos:

$$\boldsymbol{k_4 = -2k_6}$$

Se observa las infinitas soluciones, ahora tendremos que parametrizar $\boldsymbol{k_6}$ **, el valor del parámetro que usaremos será 1**, entonces el vector propio de solución es:

$$\boldsymbol{k_5 = 0 \quad , \qquad k_4 = -2 \quad y \quad k_6 = 1}$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad K_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces la solución para el segundo valor propios es:

$$\boldsymbol{x_2(t) = C_2 K_2 e^{\lambda_2 t} = C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5\,t}}$$

- ***Para*** $\boldsymbol{\lambda_3 = 5}$**:** Para este valor propio QUE ES REPETIDO TAMBIEN genera su vector propio DISTINTO $K_3 = \begin{pmatrix} k_7 \\ k_8 \\ k_9 \end{pmatrix}$, donde los valores de $k_7, k_8\ y\ k_9$ hay que determinarlos mediante:

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -4 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_7 \\ k_8 \\ k_9 \end{pmatrix} = 0$$

Para determinar $K_3 = \begin{pmatrix} k_7 \\ k_8 \\ k_9 \end{pmatrix}$ hay que escalonar la matriz y las soluciones deben de quedar infinitas (quedan infimitas porque estamos analizando un sistema de ecuaciones diferenciales y como solución es una familia de soluciones)

Entonces sustituyendo el valor de de $\boldsymbol{\lambda_3 = 5}$ y escalonando la matriz tenemos:

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -4 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_7 \\ k_8 \\ k_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5-5 & -4 & 0 \\ 1 & 0-5 & 2 \\ 0 & 2 & 5-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_7 \\ k_8 \\ k_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_7 \\ k_8 \\ k_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

SI OBSERVAMOS ES LA MISMA MATRIZ DEL VALOR PROPIO $\boldsymbol{\lambda_2 = 5}$, ENTONCES YA SABEMOS EL PROCEDIMIENTO QUE HAY QUE HACER Y SU RESPECTIVO RESULTADO, POR LO TANTO, PARA ESTE VALOR PROPIO REPETIDO $\boldsymbol{\lambda_3 = 5}$ NO ESTA IGUALADO A CERO SINO AL RESULTADO ANTERIOR (porque ya sabemos el procedimiento y su respectivo resultado)

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_7 \\ k_8 \\ k_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Escalonando tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_7 \\ k_8 \\ k_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Podemos ver que el sistema tiene infinitas soluciones (porque la ultimo fila es nula), Dando las soluciones del sistema tenemos:

$$k_8 = \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$k_7 - 5k_8 + 2k_9 = 0, \text{ sustituyendo } \quad k_8 = \left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$k_7 - 5\left(\frac{1}{2}\right) + 2k_9 = 0$$

$$k_7 = \frac{5}{2} - 2k_9$$

Se observa las infinitas soluciones, *<u>ahora están con constantes dichas soluciones</u>*, AHORA SE TENDRA CUIDADO DE SEPARAR LO QUE SE VA A PARAMETRIZAR Y LAS CONSTANTES DE DICHAS SOLUCIONES, PROPONIENDO LAS SOLUCIONES ANTES DE PARAMETRIZAR TENEMOS:

$$k_8 = \frac{1}{2} \quad , \qquad k_7 = \frac{5}{2} - 2k_9\ y \quad k_9 = k_9$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} k_7 \\ k_8 \\ k_9 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad K_3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - 2k_9 \\ \frac{1}{2} \\ k_9 \end{pmatrix}$$

SEPARANDO LO QUE SON CONSTANTES Y LO QUE REPRESENTA LO VARIABLE TENEMOS:

$$K_3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2k_9 \\ 0 \\ k_9 \end{pmatrix}$$

el valor del parámetro que usaremos será 1 para k_9

$$K_3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

SI OBSERVAMOS UNO DE LOS VETORES PROPIOS (que es el segundo vector) ES EL MISMO VECTOR PROPIO DE SOLUCION DE $\lambda_2 = 5$, ENTONCES ESE VECTOR HAY QUE HACER LINEALMENTE INDEPENDIENTE, ESTO SIGNIFICA QUE LO TENEMOS QUE MULTIPLCAR POR LA VARIABLE INDEPENDIENTE DEL SISTEMA

$$K_3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces se observa que para cada valor propio se tiene su vector propio diferentes, aunque los valores propios sean repetidos.

$$x_3(t) = C_3 K_3 e^{\lambda_3 t} = C_3 \left[\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{5t}$$

Solución General:

$$X_g(t) = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -5/2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} + C_3 \left[\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{5t}$$

<u>Ejemplo 4 (*VALORES PROPIOS REALES REPETIDOS)*</u>:

<u>CASO 2 (SOLUCIONES DE VECTORES PROPIOS LINEALMENTE INDEPENDIENTES)</u>

Resolver el siguiente sistema de Ecuaciones Diferenciales:

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} X$$

Siempre el primer paso es resolver el determinante $|a - \lambda I| = 0$ para encontrar los valores propios "λ"

$$\left| \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$Det = (-1)^{m+n} a_{ij} |M_{ij}|$$

$$(3-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \ , \qquad \lambda_{2,3} = 2$$

- *Para* $\boldsymbol{\lambda_1 = 1}$: Para este valor propio genera su vector propio $\boldsymbol{K_1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k_1} \\ \boldsymbol{k_2} \\ \boldsymbol{k_3} \end{pmatrix}$, donde los valores de $\boldsymbol{k_1, k_2\ y\ k_3}$ hay que determinarlos mediante:

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3-1 & -1 & -1 \\ 1 & 1-1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escalonando tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = 0$$

Podemos ver que el sistema tiene infinitas soluciones (porque la ultimo fila es nula), Dando las soluciones del sistema tenemos:

$$k_2 - k_3 = 0$$

Despejando tenemos:

$$k_2 = k_3$$

$$k_1 - \left(\frac{1}{2}\right)k_2 - \left(\frac{1}{2}\right)k_3 = 0\ \text{, sustituyendo}\ k_2 = k_3$$

$$k_1 - \left(\frac{1}{2}\right)k_3 - \left(\frac{1}{2}\right)k_3 = 0$$

Despejando tenemos:

$$k_1 = k_3$$

Se observa las infinitas soluciones, ahora tendremos que parametrizar $\boldsymbol{k_3}$ **, el valor del parámetro que usaremos será 1**, entonces el vector propio de solución es:

$$k_2 = 1 \quad , \qquad k_1 = 1 \quad y \quad k_3 = 1$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces la solución para el primer valor propios es:

$$x_1(t) = C_1 K_1 e^{\lambda_1 t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1)\,t}$$

- ***Para*** $\boldsymbol{\lambda_2 = 5}$**:** Para este valor propio genera su vector propio $\boldsymbol{K_2} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k_4} \\ \boldsymbol{k_5} \\ \boldsymbol{k_6} \end{pmatrix}$, donde los valores de $\boldsymbol{k_4, k_5\ y\ k_6}$ hay que determinarlos mediante:

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix} = 0$$

Para determinar $\boldsymbol{K_2} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k_4} \\ \boldsymbol{k_5} \\ \boldsymbol{k_6} \end{pmatrix}$ hay que escalonar la matriz y las soluciones deben de quedar infinitas (quedan infimitas porque estamos analizando un sistema de ecuaciones diferenciales y como solución es una familia de soluciones)

Entonces sustituyendo el valor de de $\boldsymbol{\lambda_2 = 5}$ y escalonando la matriz tenemos:

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3-2 & -1 & -1 \\ 1 & 1-2 & -1 \\ 1 & -1 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

SE OBSERVA QUE TODAS LAS FILAS SON IGUALES, ESTO SIGNIFICA QUE SOLO EXISTE UNA SOLA ECUACION CON TRES VARIABLES, ESTO IMPLICA QUE SE TIENE INFINITAS SOLUCIONES

$$k_4 - k_5 - k_6 = 0$$

Despejando tenemos:

$$k_4 = k_5 + k_6$$

Se observa las infinitas soluciones, AHORA SE TENDRA CUIDADO DE SEPARAR LO QUE SE VA A PARAMETRIZAR, ESTA SOLUCION CONTIENE DOS VARIABLES, PROPONIENDO LAS SOLUCIONES ANTES DE PARAMETRIZAR TENEMOS:

$$k_4 = k_5 + k_6 \; , \qquad k_5 = k_5 \;\; y \;\; k_6 = k_6$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad K_2 = \begin{pmatrix} k_5 + k_6 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix}$$

SEPARANDO LO QUE REPRESENTA LO VARIABLE TENEMOS (vectores columna solo para lo que representa k_5 y vectores columna para lo que representa k_6):

$$K_2 = \begin{pmatrix} k_5 \\ k_5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_6 \\ 0 \\ k_6 \end{pmatrix}$$

el valor del parámetro que usaremos será 1 para k_5 y k_6

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

SI OBSERVAMOS QUE EL VECTOR PROPIO PARA EL VALOR PROPIO $\lambda_2 = 2$ REPETIDO GENERO YA SUS DOS VECTORES PROPIOS DIFERENTES DEL VALOR PROPIO REPETIDO DOS VECES.

$$x_2(t) = C_2 K_2 e^{\lambda_2 t} = C_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] e^{2t}$$

Solución General:

$$X_g(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1)t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] e^{2t}$$

Ejemplo 5 (*VALORES PROPIOS COMPEJOS*):

Resolver El siguiente Sistema de Ecuaciones Diferenciales Homogeneo

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix} x$$

Solución:

Siempre el primer paso es resolver el determinante $|a - \lambda I| = 0$ para encontrar los valores propios "λ"

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 3 & -\lambda & 6 \\ -4 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo el Determinante

$$\boldsymbol{Det} = (-1)^{m+n} a_{ij} \left| M_{ij} \right|$$

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 6 \\ 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix} 3 & -\lambda \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 15 = 0$$

$$\lambda_1 = -3 \qquad \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$$

Para $\lambda_3 = -3$ este valor propio genera su vector propio $K_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$, donde los valores de k_1, k_2 *y* k_3 hay que determinarlos mediante:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 3 & -\lambda & 6 \\ -4 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-(-3) & 1 & 2 \\ 3 & -(-3) & 6 \\ -4 & 0 & -3-(-3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escalonando tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = 0$$

Podemos ver que el sistema tiene infinitas soluciones (porque la ultimo fila es nula), Dando las soluciones del sistema tenemos:

$$k_2 + 2k_3 = 0$$

Despejando tenemos:

$$k_2 = -2k_3$$

$$k_1 + \left(\frac{1}{5}\right)k_2 + \left(\frac{2}{5}\right)k_3 = 0\text{ , sustituyendo } k_2 = -2k_3$$

$$k_1 + \left(\frac{1}{5}\right)(-2k_3) + \left(\frac{2}{5}\right)k_3 = 0$$

$$k_1 = 0$$

Se observa las infinitas soluciones, ahora tendremos que parametrizar k_3 **, el valor del parámetro que usaremos será 1**, entonces el vector propio de solución es:

$$k_2 = -2 \;, \qquad k_1 = 0 \quad y \quad k_3 = 1$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad K_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces la solución para el primer valor propios es:

$$x_1(t) = C_1 K_1 e^{\lambda_1 t} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-3)t}$$

***Para*: $\lambda_{2,3} = 1 + 2i$** cuando tenemos raíces complejas trabajaremos *siempre con la raíz de signo positivo* $\boldsymbol{\lambda = 1 + 2i}$, entonces este valor propio genera su vector propio $K_2 = \begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix}$, donde los valores de k_4, k_5 *y* k_6 hay que determinarlos mediante:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 3 & -\lambda & 6 \\ -4 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix} = 0$$

Para determinar $K_2 = \begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix}$ hay que escalonar la matriz y las soluciones deben de quedar infinitas (quedan infimitas porque estamos analizando un sistema de ecuaciones diferenciales y como solución es una familia de soluciones)

Entonces sustituyendo el valor de de $\boldsymbol{\lambda_2 = 1 + 2i}$ y escalonando la matriz tenemos:

$$\begin{pmatrix} 2-(1+2i) & 1 & 2 \\ 3 & -(1+2i) & 6 \\ -4 & 0 & -3-(1+2i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-2i & 1 & 2 \\ 3 & -1-2i & 6 \\ -4 & 0 & -4-2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escalonando la Matriz Tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+\frac{1}{2}i \\ 0 & 1 & \frac{3}{2}i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Podemos ver que el sistema tiene infinitas soluciones (porque la ultimo fila es nula), **AHORA TRATAREMOS DE DESPEJAR UNA VARIABLE DE CADA FILA DE TAL FORMA QUE EL COMPLEJO NO QUEDE EN EL DENOMINAR (lo anterior simplemente por facilidad de los cálculos)**, Dando las soluciones del sistema tenemos:

$$k_5 + \left(\frac{3}{2}i\right)k_6 = 0$$

$$k_5 = -\left(\frac{3}{2}i\right)k_6$$

$$k_4 + \left(1 + \frac{1}{2}i\right)k_6 = 0$$

Despejando tenemos:

$$k_4 = -\left(1 + \frac{1}{2}i\right)k_6$$

Se observa las infinitas soluciones, ahora tendremos que parametrizar k_6 **, el valor del parámetro que usaremos será 1**, entonces el vector propio de solución es:

$$k_5 = -\left(\frac{3}{2}i\right)k_6 \quad , \qquad k_4 = -1 - \frac{1}{2}i \quad y \quad k_6 = 1$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix} \quad \to \quad K_2 = \begin{pmatrix} -1-\frac{1}{2}i \\ -\frac{3}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces la solución para el segundo valor propios es:

$$x_2(t) = C_2(B_1 \cos(\beta t) - \sin(\beta t))e^{\alpha t} + C_3(B_2 \cos(\beta t) + B_1 \sin(\beta t))e^{\alpha t}$$

Ahora debemos de calcular los valore de B_1 & B_2 **, la formula general es:**

$$B_1 = \frac{1}{2}[k_1 + \overline{k_1}] \quad y \quad B_2 = \frac{i}{2}[k_1 - \overline{k_1}]$$

Ajustando a nuestros vector propio tendríamos

$$B_1 = \frac{1}{2}[k_2 + \overline{k_2}] \quad y \quad B_2 = \frac{i}{2}[k_2 - \overline{k_2}]$$

Donde $\overline{k_2}$ **es el vector propio del conjugado de los valores complejos.**

$$B_1 = \frac{1}{2}\left[k_2 + \overline{k_2}\right]$$

$$B_1 = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} -1 - \frac{1}{2}i \\ -\frac{3}{2}i \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 + \frac{1}{2}i \\ \frac{3}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora

$$B_2 = \frac{i}{2}\left[\begin{pmatrix} -1 - \frac{1}{2}i \\ -\frac{3}{2}i \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 + \frac{1}{2}i \\ \frac{3}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} -i \\ -3i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i^2}{2} \\ -\frac{3i^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde $i^2 = -1$

$$B_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Recordando que $\lambda_2 = \alpha + i\beta = 1 + 2i$

Entonces la solución para el segundo valor propios es

$$x_2(t) = C_2(B_1\cos(\beta t) - B_2\sin(\beta t))e^{\alpha t} + C_3(B_2\cos(\beta t) + B_1\sin(\beta t))e^{\alpha t}$$

$$x_2(t) = C_2\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cos(2t) - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\sin(2t)\right)e^t + C_3\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\cos(2t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\sin(2t)\right)e^t$$

LA SOLUCION GENERAL ES:

$$x_G(t) = C_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{(-3)\,t} + C_2\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cos(2t) - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\sin(2t)\right)e^t + C_3\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\cos(2t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\sin(2t)\right)e^t$$