Proyecto

Matematica Intermedia 1 (Universidad de San Carlos de Guatemala)

OBJETIVOS

- Comprender el uso de Campos direccionales generados por computadora y curvas solución.
- Comprender el método de isóclinas para las ecuaciones diferenciales.

DESCRIPCION TEORICA

ISOCLINAS Y CAMPOS DE DIRECCIONES

Resolver una ecuación diferencial analíticamente puede ser difícil o casi imposible. Sin embargo, existe una aproximación gráfica que se puede usar para aprender mucho acerca de la solución de una ecuación diferencial. Se trata de uno de los métodos para resolver varias clases de ecuaciones diferenciales de manera gráfica mediante la interpretación geométrica de las ecuaciones diferenciales y sus soluciones; para metodología es útil analizar las ecuaciones de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Cuya solución es una función $y = g(x)$. Geométricamente, en la ecuación se afirma que, en cualquier punto (x, y) la pendiente (dy/dx) de la solución en ese punto está dada por $f(x, y)$.Esto puede indicarse si se traza un pequeño segmento rectilíneo que pase por el punto (x, y) con la pendiente $f(x, y)$. La colección de todos esos segmentos rectilíneos se llama campo direccional de la ecuación diferencial. El campo direccional puede observarse si se trazan pequeños segmentos rectilíneos en algún conjunto representativo de puntos en el plano xy.Se elige una rejilla rectangular de puntos. Una vez que se obtiene un esquema del campo direccional, a menudo es posible ver de inmediato el comportamiento cualitativo de las soluciones, o quizá observar regiones que tienen algún interés especial.

Isóclinas: Si es necesario trazar manualmente el campo direccional de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ es útil observar que la pendiente y' de la solución tiene valor constante en todos los puntos de la curva $f(x, y) = c$ .Estas curvas se denominan curvas isóclinas. Para ecuaciones relativamente simples es posible trazar el campo direccional dibujando unas cuantas isóclinas y luego insertar los segmentos rectilíneos tangentes a la solución en varios puntos de cada una. Cuando se hace variar el parámetro **c**, obtenemos un conjunto de isoclinas en los elementos lineales se constituyen adecuadamente. La totalidad de esos elementos lineales se llama de diversos modos: campo de direcciones, campo direccional, campo pendiente o campo de elementos lineales de la ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$ el campo de direcciones recuerda las “líneas de flujo” de la familia de curvas de solución de la ecuación diferencial de la cual obtenemos soluciones particulares como pueden ser los puntos (0,1), (2,3) etc.

Solución y Resultados

INVESTIGACION A: Graficar el campo direccional, aplicando el método de isóclinas, para la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = sen\,(x - y)$$

Método de isóclinas.

Sustituyendo la ecuación diferencial (ED):

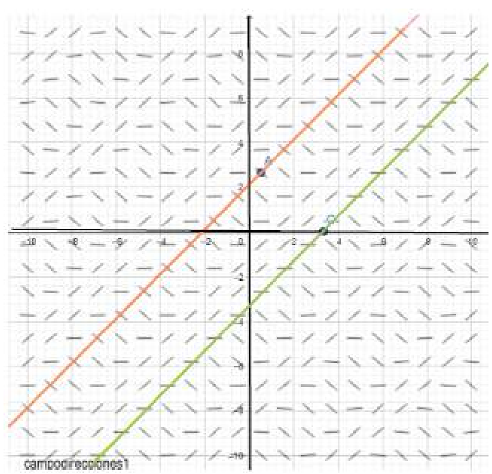
$$sen\theta(x - y) = c$$

Despejando (y):

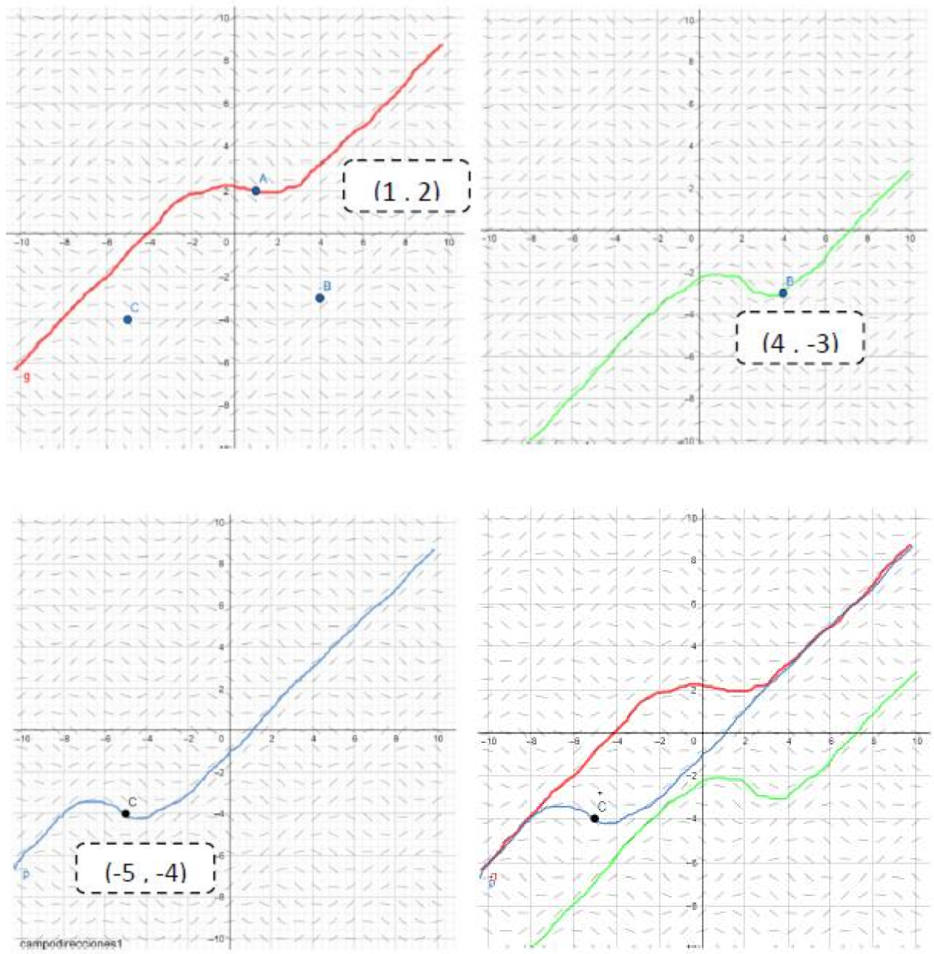
$$y = x - sen^{-1}(c)$$

Pendiente=c	F(x)	isóclina
-1/10	$y = x - seno^{-1}(-1/10)$	$y = x + 5.7$
-1/8	$y = x - seno^{-1}(-1/8)$	$y = x + 7.2$
-1/2	$y = x - seno^{-1}(-1/2)$	$y = x + 30$
1/2	$y = x - seno^{-1}(-1/2)$	$y = x - 30$
1/8	$y = x - seno^{-1}(1/8)$	$y = x - 7.2$
1/10	$y = x - seno^{-1}(1/10)$	$y = x - 5.7$

Gráfica, Isóclinas utilizando los siguientes intervalos −10≤ x ≤10; −10≤ y ≤10



Trazar curvas solución en los puntos (1,2), (4,-3), (-5,-4).



a) Sustituir $y = ax + b$ en la ecuación diferencial para determinar cómo deben ser los coeficientes para obtener una solución.

$$\frac{dy}{dx} = sen\ (x - y)$$

Derivando:

$$y = ax + b\ \rightarrow\ \frac{dy}{dx} = a$$

$$(\mathrm{a}) = \mathrm{sen}(\mathrm{x} - (\mathrm{ax} + \mathrm{b}))$$

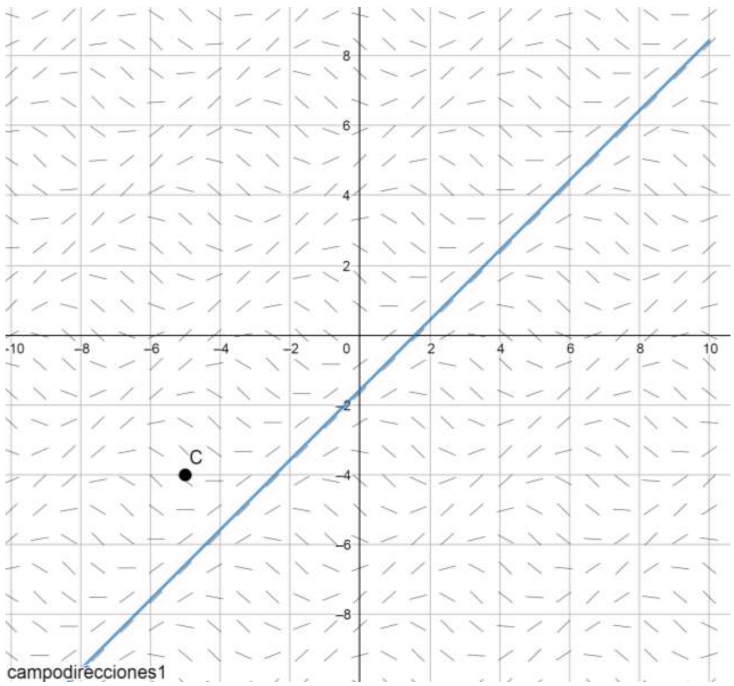
$$\mathrm{x}(1 - \mathrm{a}) - \mathrm{b} = \mathrm{sen}^{-1}(\mathrm{a})$$

$$1 - a = 0 \ \rightarrow \ a = 1$$

$$-b = \ sen^{-1}(a) \ \rightarrow \ b = -\frac{\pi}{2}$$

$$y = x - \frac{\pi}{2}$$

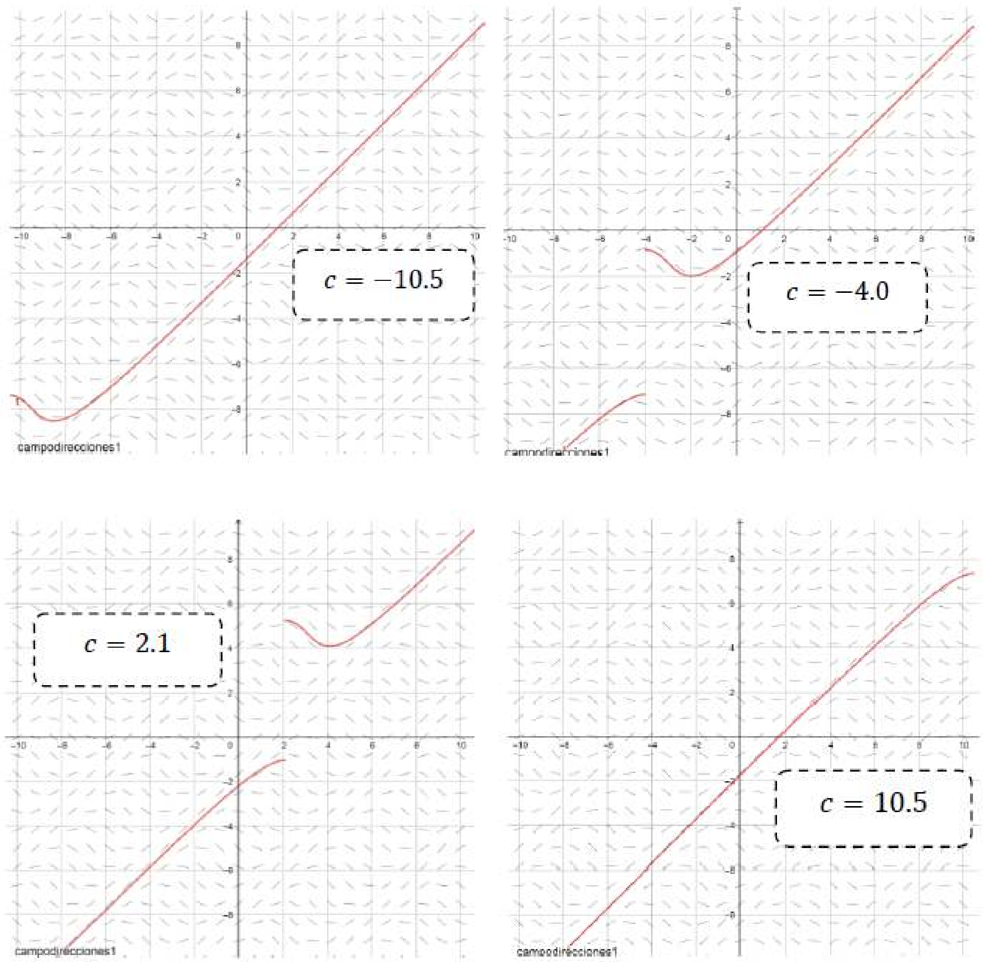
Grafica de la solución particular



b) Un sistema de álgebra por computadora proporciona la solución general

$$y(x) = x - 2\tan^{-1}(\frac{x - 2 - c}{x - c})$$

Graficar esta solución para algunos valores de la constante y comparar las curvas solución resultantes con las presentadas en la figura 1. C



Análisis: en los valores de C= ± 10.5, la curva solución presenta la forma de la gráfica de la solución particular $y = x - \pi/2$.

INVESTIGACION B: Para realizar su propia investigación, considerar que n es el dígito mayor que 1, más pequeño en su número de carnet, y por medio de la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} cos\ (x - ny)$$

Carnet: 201700806 → n= 2

Sustituyendo la ecuación diferencial (ED):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}cos\ (x - 2y)$$

a). Investigar, con el inciso (a) de la investigación A, la posibilidad de líneas rectas como soluciones.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}cos\ (x - 2y)$$

Derivando:

$$y = ax + b\ \rightarrow\ \frac{dy}{dx} = a$$

$$(\mathrm{a}) = \frac{1}{2}cos\ (x - 2(ax + b))$$

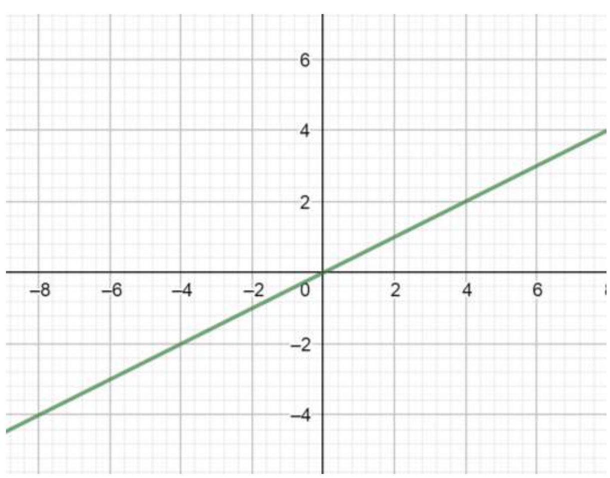
$$2a = cos(x - 2ax - 2b)$$

$$\cos^{-1}(2\mathrm{a}) = \mathrm{x}(1 - 2\mathrm{a}) - 2\mathrm{b}$$

$$1 - 2\mathrm{a} = 0\ \rightarrow\ \mathrm{a} = \frac{1}{2}$$

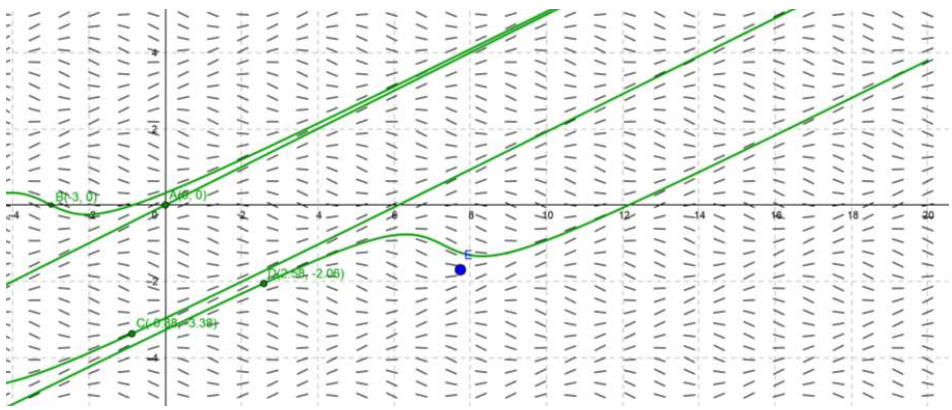
$$-2\mathrm{b} =\ \cos^{-1}(2\mathrm{a})\ \rightarrow\ \mathrm{b} = 0$$

Solución: $\mathrm{y} = \frac{\mathrm{x}}{2}$

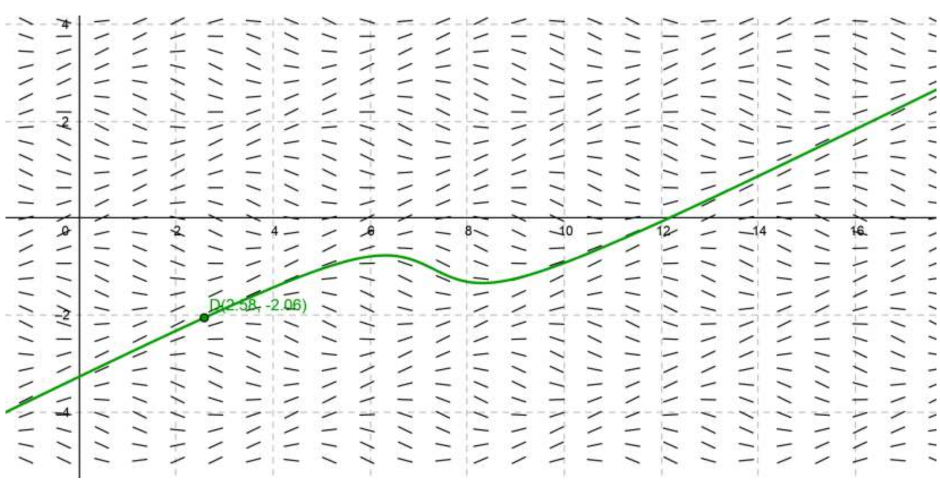


b**). Generar un campo direccional para esta ecuación diferencial**, con la ventana seleccionada de tal manera que pueda dibujar alguna de estas líneas rectas, además de un número suficiente de curvas solución no lineales, tal que se pueda realizar una conjetura acerca de qué le sucede a $y(x)$ cuando $x \to \infty$. Realizar su inferencia tan completamente como sea posible. Dado el valor inicial $y(0)=y_0$ intentar predecir (tal vez en términos de y_0) el comportamiento de $y(x)$ cuando $x \to \infty$

Se observan cuatro posibles soluciones, que siguen la forma del campo direccional.



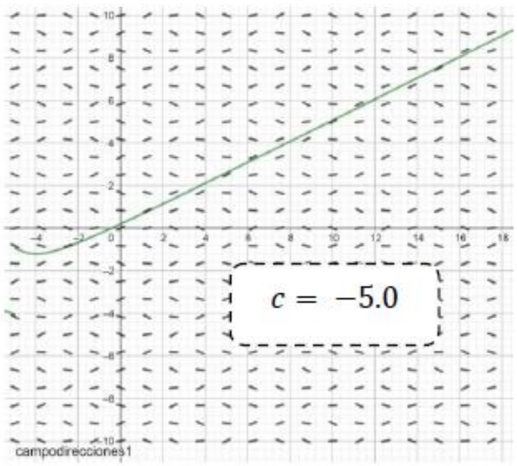
Conjetura acerca de qué le sucede a $y(x)$ cuando $x \to \infty$. En base a la grafica anterior, se determina que el comportamiento de $y(x)$ cuando $x \to \infty$ es repetido $x \to \infty$, lo único que varía es el desplazamiento vertical.

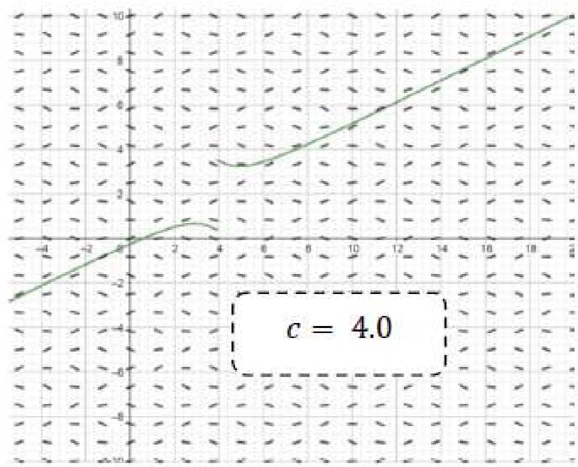


c) Un sistema de álgebra en computadora proporciona la solución general:

$$y(x) = \frac{1}{2}(x + 2\tan^{-1}(\frac{1}{x - c}))$$

Graficas de la solución, para diferentes valores de c:





¿Se puede establecer relación entre esta solución simbólica y sus curvas solución gráficas (líneas rectas o curvas)?

R// Al momento de graficar la solución proporcionada, se observa que el comportamiento e la solución en similar a las gráficas (cuando $x \to \infty$). Por lo tanto, se determina que existe una relación entre la solución simbólica y las curvas solución graficadas, tantas líneas rectas y líneas curveadas. Lo que indica, que las dos respuestas son correctas y son parte de la familia de soluciones de la Ecuación Diferencial.

CONCLUSION

- Se comprendió el uso de Campos direccionales generados por computadora y curvas solución.

- se determina que existe una relación entre la solución simbólica y las curvas solución graficadas

BIBLIOGRAFIA

- https://www.uv.mx/personal/aherrera/files/2014/04/00a.-Isoclinas-y-Campo-de-Direcciones.pdf

- Ecuaciones diferenciales. Novena edición. Dennis Zill. Editorial CENGAGE.