EJERCICIOS 1.1

3. $t^5y^{(4)} - t^3y'' + 6y = 0$

6. $\dfrac{d^2R}{dt^2} = -\dfrac{k}{R^2}$

8. $\ddot{x} - \left(1 - \dfrac{\dot{x}^2}{3}\right)\dot{x} + x = 0$

En los problemas del 11-14 compruebe que la función indicada es una solución explícita de la ecuación diferencial dada. Tome un intervalo I de definición apropiado para cada solución.

14. $y'' + y = \tan x;\quad y = -(\cos x)\ln(\sec x + \tan x)$

En los problemas 15-18 compruebe que la función indicada $y = \phi(x)$ es una solución explícita de la ecuación diferencial dada de primer orden. Proceda como en el ejemplo 6, considerado a ϕ simplemente como una *función* y dé su dominio. Luego considere a ϕ como una *solución* de la ecuación diferencial y dé al menos un intervalo I de definición.

16. $y' = 25 + y^2;\quad y = 5 \tan 5x$

En los problemas 21-24 compruebe que la familia de funciones indicada es una solución de la ecuación diferencial dada. Suponga un intervalo I de definición adecuado para cada solución.

21. $\dfrac{dP}{dt} = P(1 - P);\quad P = \dfrac{c_1e^t}{1 + c_1e^t}$

En los problemas 31-34 determine los valores de m para que la función $y = e^{mx}$ sea una solución de la ecuación diferencial dada.

34. $2y'' + 7y' - 4y = 0$

En los problemas 35 y 36 determine los valores de m para que la función $y = x^m$ sea una solución de la ecuación diferencial dada.

35. $xy'' + 2y' = 0$

EJERCICIOS 1.2

En los problemas 7-10, $x = c_1\cos t + c_2$ sen t es una familia de soluciones de dos parámetros de la ED de segundo orden $x'' + x = 0$. Determine una solución del PVI de segundo orden que consiste en esta ecuación diferencial y las condiciones iniciales dadas.

8. $x(\pi/2) = 0, \quad x'(\pi/2) = 1$

9. $x(\pi/6) = \frac{1}{2}, \quad x'(\pi/6) = 0$

En los problemas 17-24 determine una región del plano xy donde la ecuación diferencial dada tendría una solución única cuya gráfica pase por un punto (x_0, y_0) en la región.

18. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$

19. $x\dfrac{dy}{dx} = y$

33. a) Verifique que $3x^2 - y^2 = c$ es una familia de soluciones uniparamétricas de la ecuación diferencial $y\,dy/dx = 3x$.

b) Bosqueje, a mano, la gráfica de la solución implícita $3x^2 - y^2 = 3$. Determine todas las soluciones explícitas $y = \phi(x)$ de la ED del inciso a) definidas por esta relación. Dé el intervalo I de definición de cada una de las soluciones explícitas.

c) El punto $(-2, 3)$ está en la gráfica de $3x^2 - y^2 = 3$ pero ¿cuál de las soluciones explícitas del inciso b) satisface que $y(-2) = 3$?

EJERCICIOS 2.1

3. $\dfrac{dy}{dx} = 1 - xy$

a) $y(0) = 0$ **b)** $y(-1) = 0$

c) $y(2) = 2$ **d)** $y(0) = -4$

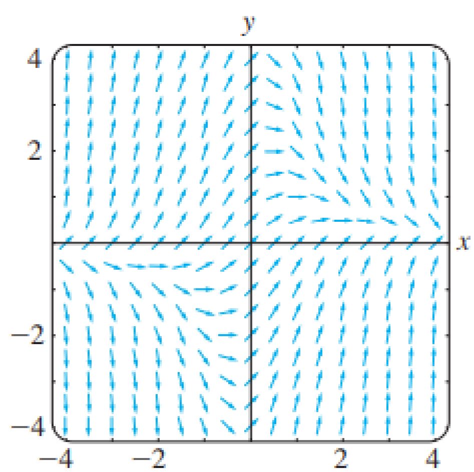

FIGURA 2.1.14 Campo direccional del problema 3. p

En los problemas 5-12 use un paquete computacional para obtener un campo direccional para la ecuación diferencial dada. Dibuje a mano una curva solución aproximada que pase por los puntos dados.

7. $y\dfrac{dy}{dx} = -x$

a) $y(1) = 1$
b) $y(0) = 4$

10. $\dfrac{dy}{dx} = xe^{y}$

a) $y(0) = -2$
b) $y(1) = 2.5$

EJERCICIOS 2.2

En los problemas 1-22 resuelva la ecuación diferencial dada por separación de variables.

7. $\dfrac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$

11. $\csc y\,dx + \sec^2 x\,dy = 0$

15. $\dfrac{dS}{dr} = kS$

20. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 2y - x - 2}{xy - 3y + x - 3}$

En los problemas 23-28 encuentre una solución explícita del problema con valores iniciales dados.

24. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - 1}{x^2 - 1}, \quad y(2) = 2$

27. $\sqrt{1 - y^2}\,dx - \sqrt{1 - x^2}\,dy = 0, \quad y(0) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

En los problemas 29 y 30 proceda como en el ejemplo 5 y determine una solución explícita del problema con valores iniciales dado.

29. $\dfrac{dy}{dx} = ye^{-x^2}, \quad y(4) = 1$

30. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 \operatorname{sen} x^2, \quad y(-2) = \frac{1}{3}$

EJERCICIOS 2.3

En los problemas 1-24 determine la solución general de la ecuación diferencial dada. Indique el intervalo I más largo en el que está definida la solución general. Determine si hay algunos términos transitorios en la solución general.

5. $y' + 3x^2y = x^2$

9. $x\dfrac{dy}{dx} - y = x^2 \operatorname{sen} x$

15. $y\,dx - 4(x + y^6)\,dy = 0$

20. $(x + 2)^2\dfrac{dy}{dx} = 5 - 8y - 4xy$

En los problemas 25-36 resuelva el problema con valores iniciales. Indique el intervalo I más largo en el que está definida la solución.

29. $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E, \quad i(0) = i_0,$

L, R, E e i_0 constantes

33. $(x + 1)\dfrac{dy}{dx} + y = \ln x, \quad y(1) = 10$

En los problemas 41 y 42 proceda en una forma similar al ejemplo 6 para resolver el problema con valores iniciales Utilice una utilería gráfica para trazar la gráfica de la función continua $y(x)$.

41. $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = 4x, \quad y(0) = 3$, donde

$$P(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le 1 \\ -\dfrac{2}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

EJERCICIOS 2.4

En los problemas 1-20 determine si la ecuación diferencial exacta dada es exacta. Si es exacta, resuélvala.

5. $(2xy^2 - 3)\,dx + (2x^2y + 4)\,dy = 0$

9. $(x - y^3 + y^2 \operatorname{sen} x)\,dx = (3xy^2 + 2y \cos x)\,dy$

16. $(5y - 2x)y' - 2y = 0$

En los problemas 21 a 26 resuelva el problema con valores iniciales.

22. $(e^x + y)\,dx + (2 + x + ye^y)\,dy = 0, \quad y(0) = 1$

25. $(y^2 \cos x - 3x^2y - 2x)\,dx$
$+ (2y \operatorname{sen} x - x^3 + \ln y)\,dy = 0, \quad y(0) = e$

En los problemas 27 y 28 determine el valor de k para el que la ecuación diferencial es exacta.

27. $(y^3 + kxy^4 - 2x)\,dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)\,dy = 0$

En los problemas 29 y 30 compruebe que la ecuación diferencial dada es no exacta. Multiplique la ecuación diferencial dada por el factor integrante indicado $\mu(x, y)$ y compruebe que la nueva ecuación es exacta. Resuelva.

30. $(x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (y^2 + 2xy - x^2)\,dy = 0;$
$\mu(x, y) = (x + y)^{-2}$

En los problemas 31-36 resuelva la ecuación diferencial dada determinando, como en el ejemplo 4, un factor integrante adecuado.

31. $(2y^2 + 3x)\,dx + 2xy\,dy = 0$

34. $\cos x\,dx + \left(1 + \dfrac{2}{y}\right) \operatorname{sen} x\,dy = 0$

EJERCICIOS 2.5

Cada una de las ED de los problemas 1-14 es homogénea.

En los problemas 1 a 10 resuelva la ecuación diferencial dada usando las sustituciones adecuadas.

6. $(y^2 + yx)\,dx + x^2\,dy = 0$

8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 3y}{3x + y}$

10. $x\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 - y^2}, \quad x > 0$

En los problemas 11-14 resuelva el problema que se presenta con valores iniciales.

14. $y\,dx + x(\ln x - \ln y - 1)\,dy = 0, \quad y(1) = e$

Cada una de las ED de los problemas 15 a 22 es una ecuación de Bernoulli.

En los problemas 15 a 20 resuelva cada ecuación diferencial usando una sustitución adecuada.

17. $\dfrac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)$

20. $3(1 + t^2)\dfrac{dy}{dt} = 2ty(y^3 - 1)$

En los problemas 21 y 22 resuelva el problema que se presenta con valores iniciales.

22. $y^{1/2}\dfrac{dy}{dx} + y^{3/2} = 1, \quad y(0) = 4$

Cada una de las ED de los problemas 23-30 es de la forma dada en la ecuación (5).

En los problemas 23 a 28 resuelva la ecuación diferencial dada usando una sustitución adecuada.

24. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - x - y}{x + y}$

26. $\dfrac{dy}{dx} = \mathrm{sen}(x + y)$

En los problemas 29 y 30 resuelva el problema que se presenta con valores iniciales.

30. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x + 2y}{3x + 2y + 2}, \quad y(-1) = -1$

EJERCICIOS 3.1

3. La población de un pueblo crece con una rapidez proporcional a la población en el tiempo t. La población inicial de 500 aumenta 15% en 10 años. ¿Cuál será la población pasados 30 años? ¿Qué tan rápido está creciendo la población en $t = 30$?

4. La población de bacterias en un cultivo crece con una rapidez proporcional a la cantidad de bacterias presentes al tiempo t.

Después de tres horas se observa que hay 400 bacterias presentes. Después de 10 horas hay 2 000 bacterias presentes. ¿Cuál era la cantidad inicial de bacterias?

6. Inicialmente había 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Después de 6 horas la masa disminuyó 3%. Si la rapidez de decaimiento, en cualquier momento, es proporcional a la cantidad de la sustancia presente al tiempo t, determine la cantidad que queda después de 24 horas.

9. Cuando pasa un rayo vertical de luz por un medio transparente, la rapidez con que decrece su intensidad I es proporcional a $I(t)$, donde t representa el espesor, en metros, del medio. En agua limpia de mar, la intensidad a 1 metro debajo de la superficie es 25% de la intensidad inicial I_0 del rayo incidente. ¿Cuál es la intensidad del rayo a 5 metros debajo de la superficie?