Aplicaciones de la derivada

3 **Teorema del valor extremo** Si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y d en $[a, b]$.

4 **Teorema de Fermat** Si f tiene un máximo o un mínimo local en c, y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

6 **Definición** Un **número crítico** de una función f es un número c en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

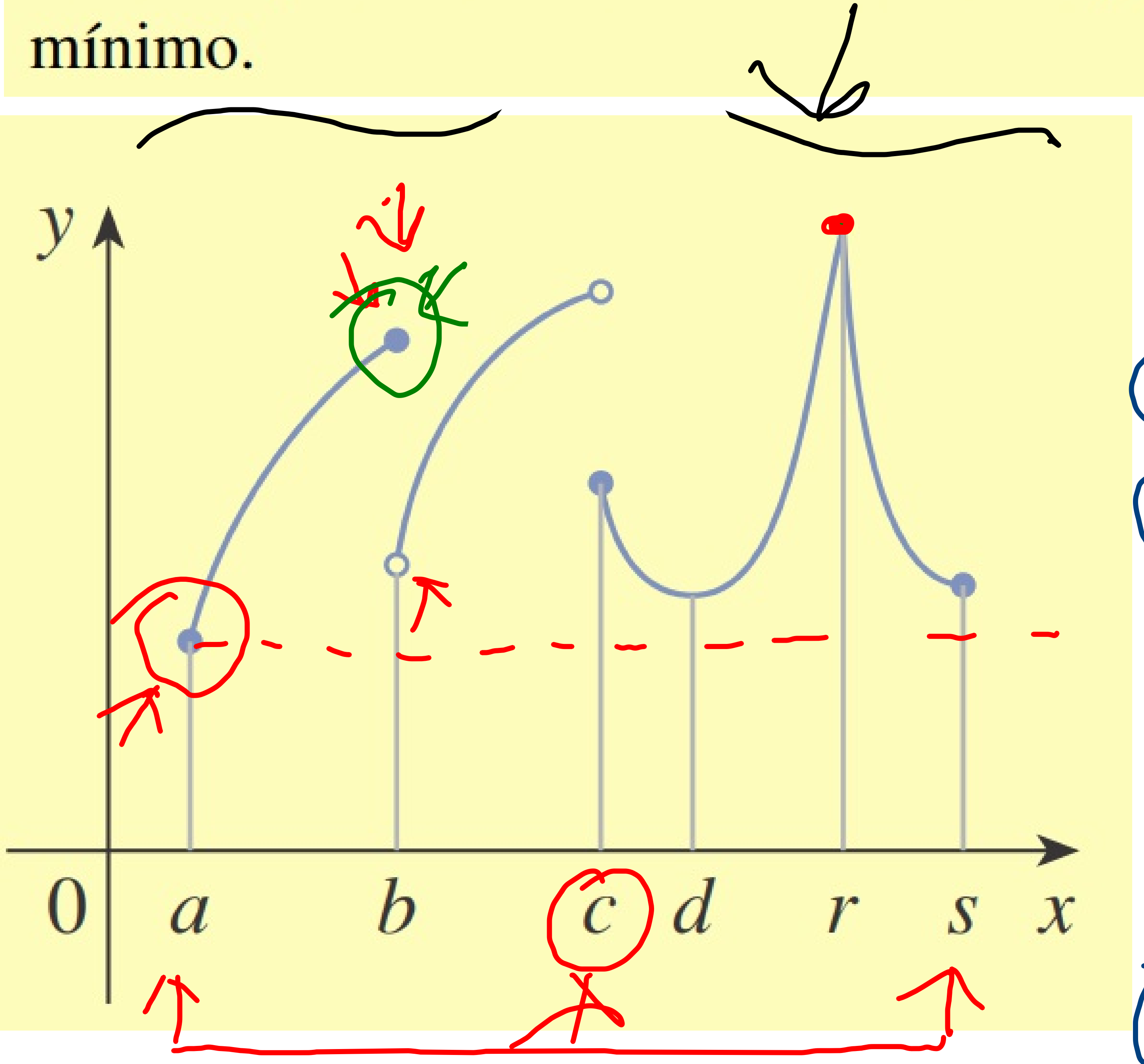
REAL.

7 Si f tiene un máximo o un mínimo local en c, entonces c es un número crítico de f.

Método del intervalo cerrado Para encontrar los valores máximo y mínimo *absolutos* de una función continua f sobre un intervalo cerrado $[a, b]$:

1. Encuentre los valores de f en los números críticos de f en (a, b).
2. Encuentre los valores de f en los puntos extremos del intervalo.
3. El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el más pequeño, el valor mínimo absoluto.

3–4 Para cada uno de los números *a*, *b*, *c*, *d*, *r* y *s*, indique si la función cuya gráfica se muestra, tiene un máximo o mínimo absolutos, un máximo o mínimo locales, o ni un máximo ni un mínimo.



a: ¿MÁX Ó MÍN LOCAL? NO
MÍN ABS.

b: NI LOCAL, NI ABS.

c: ¿MÁX Ó MÍN LOCAL? NO
NI MÁX, NI MÍN ABS

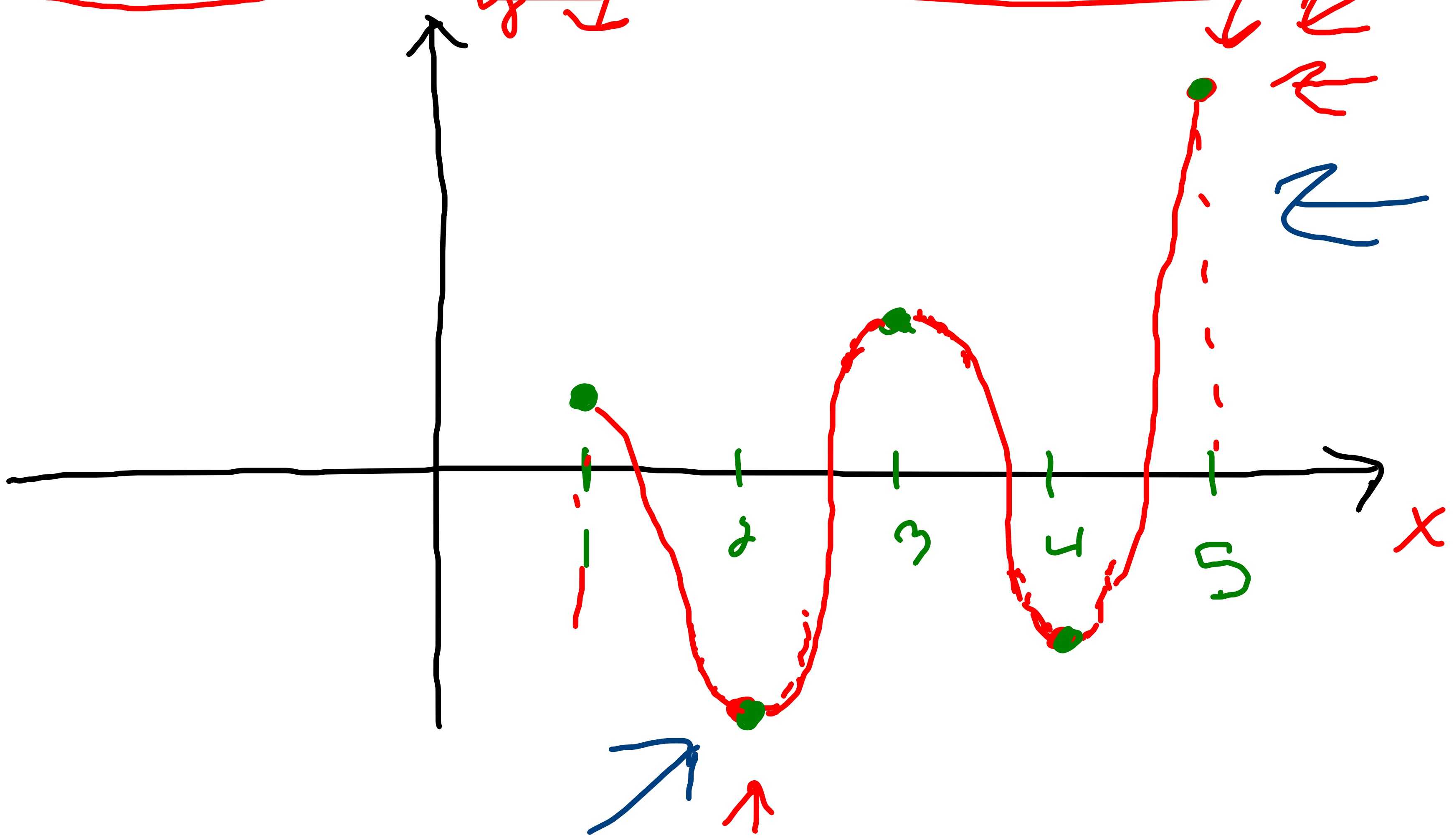
d: MÍN LOCAL.

r: MÁX LOCAL.
MÁX ABS

s: NI LOCAL, NI ABS.

7–10 Trace la gráfica de una función f que es continua sobre $[1, 5]$ y tiene las propiedades dadas.

Máximo absoluto en 5, mínimo absoluto en 2, máximo local en 3, mínimos locales en 2 y 4



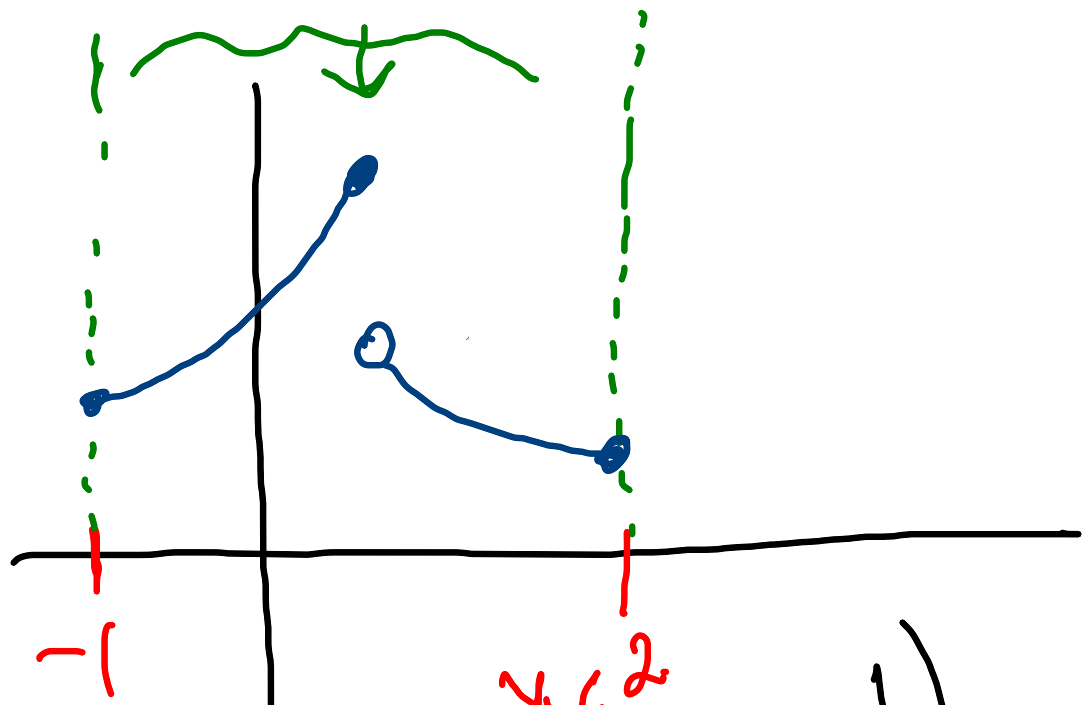
$f(x)$

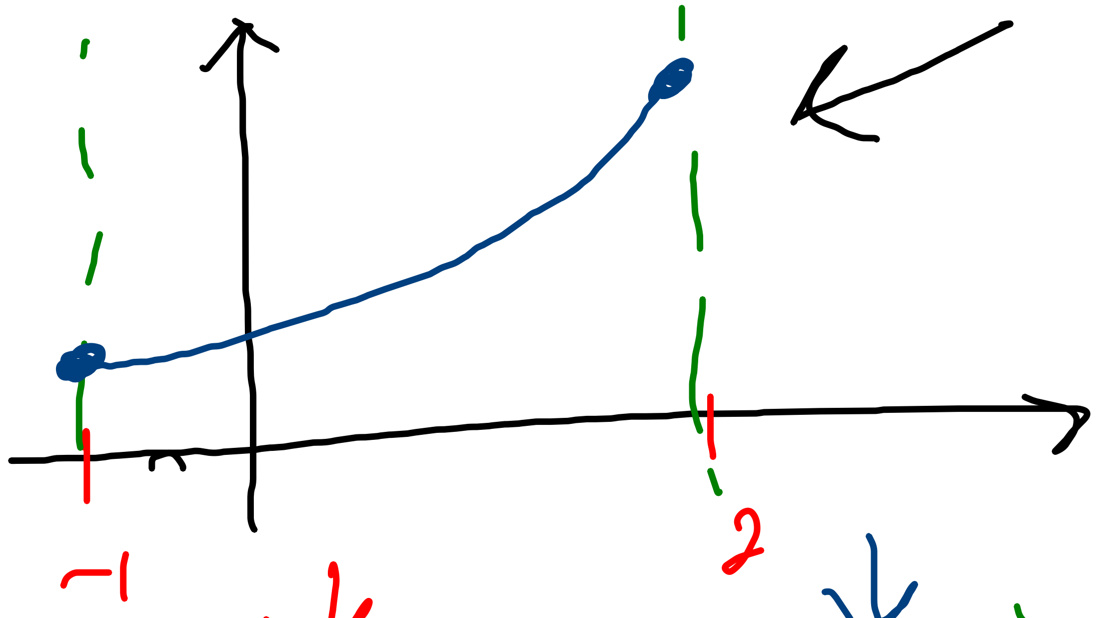
$f(x) + c$

(a) Trace la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que tiene un máximo absoluto, pero no máximo local.

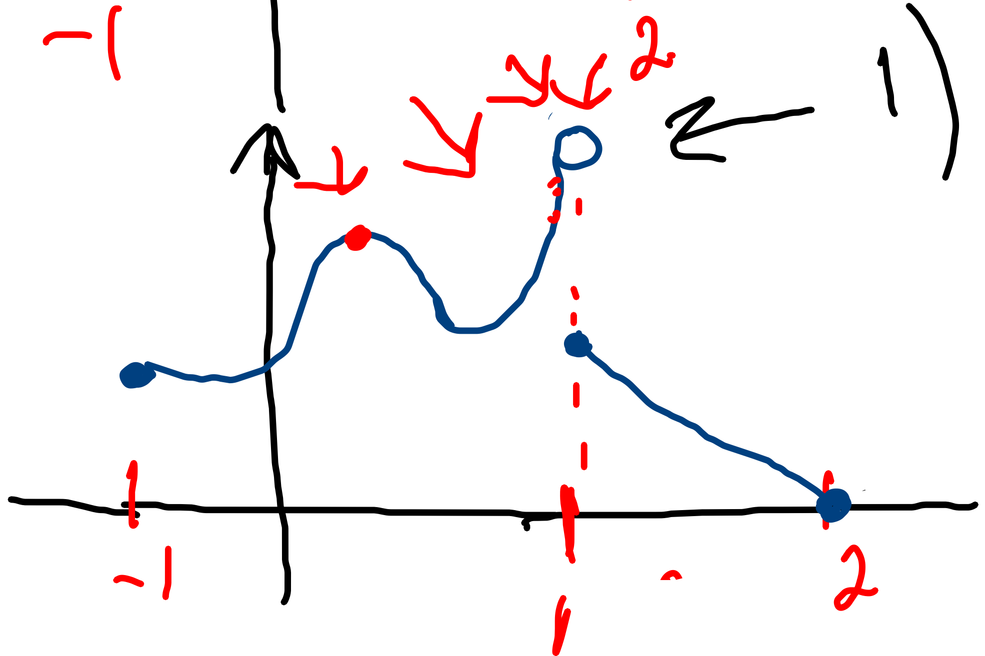
(b) Trace la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que tiene un máximo local, pero no máximo absoluto.

a)





b)



$f(0.9) < f(0.99) < f(0.999)$

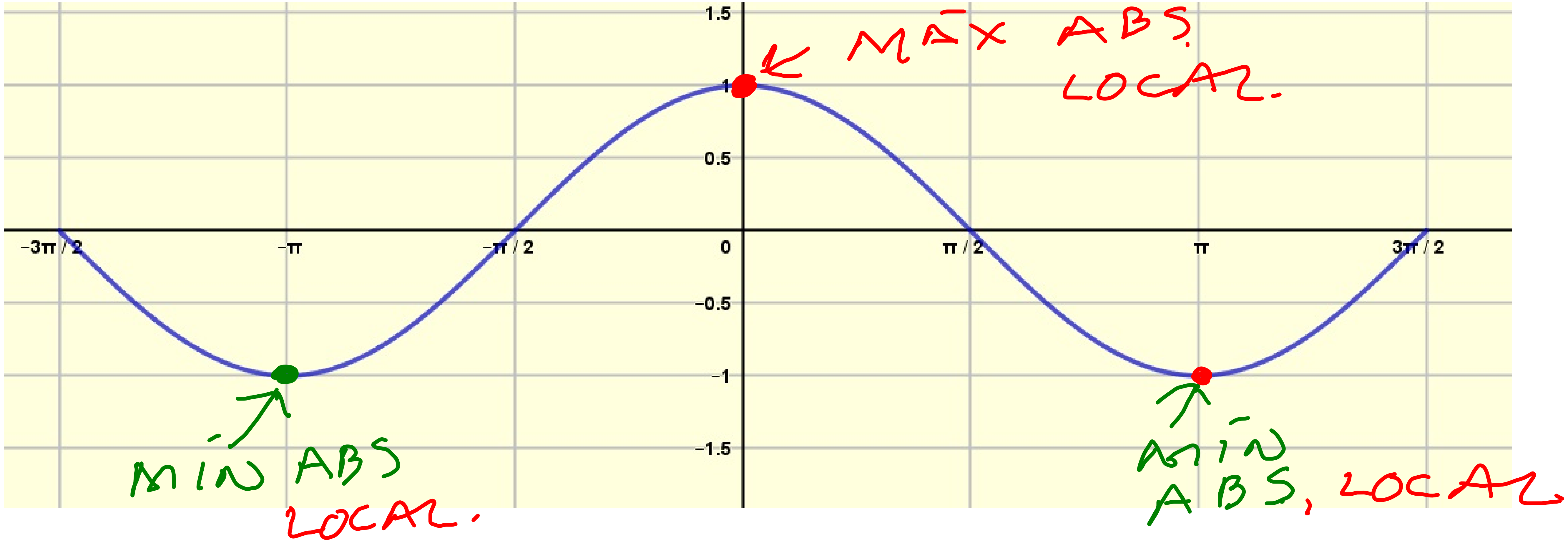
NO HAY MÁX ABS.

15–28 Trace a mano la gráfica de f y utilícela para encontrar los valores máximos y mínimos, absolutos y locales de f. (Utilice las gráficas y transformaciones de las secciones 1.2 y 1.3.)

$$f(t) = \cos t, \quad -3\pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$$

$[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

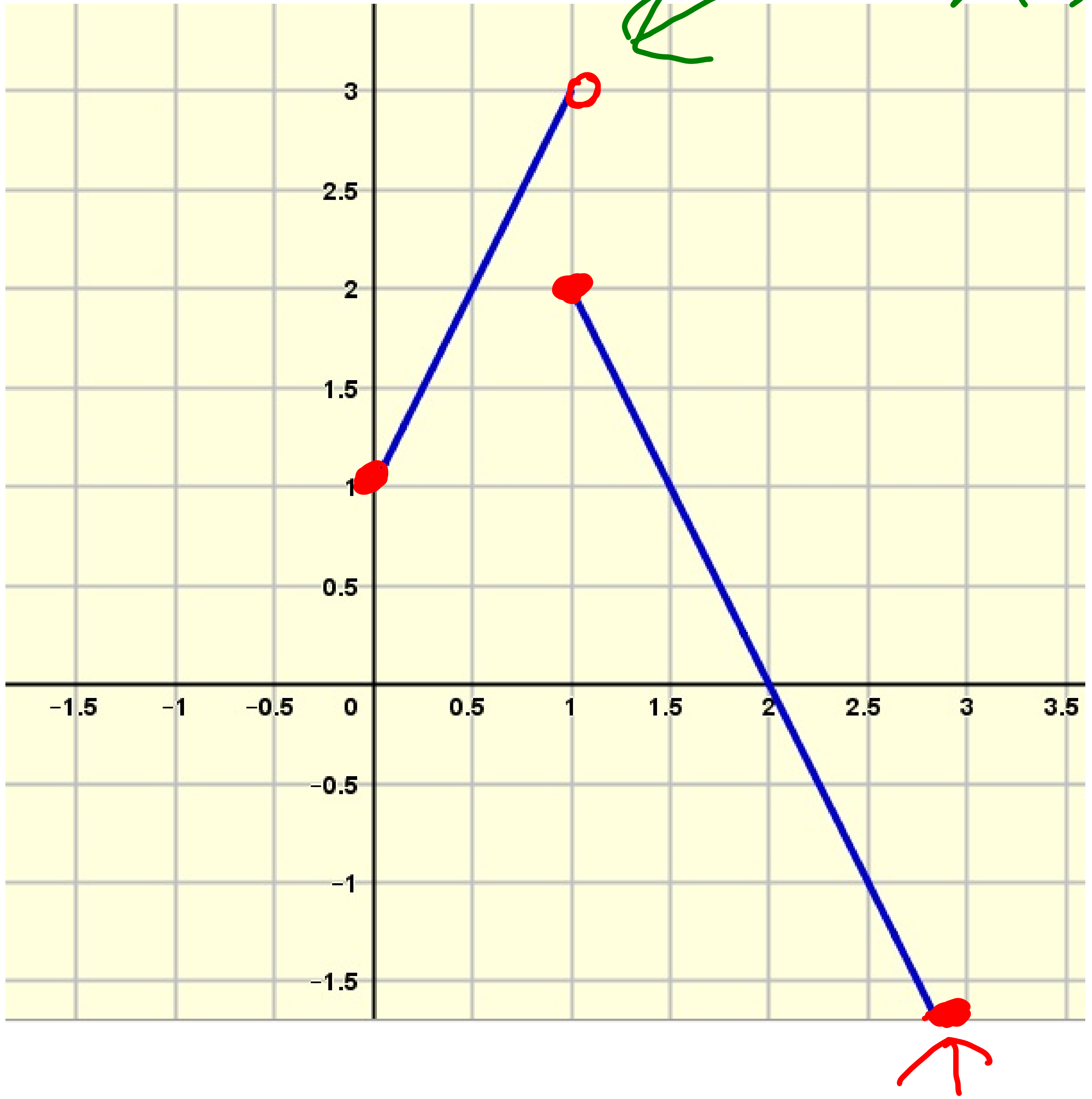
MÁX
MÍN
ABS.



15–28 Trace a mano la gráfica de f y utilícela para encontrar los valores máximos y mínimos, absolutos y locales de f. (Utilice las gráficas y transformaciones de las secciones 1.2 y 1.3.)

[0, 3]

$$f(x) = \begin{cases} \underline{2x + 1} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 4 - 2x & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$



$\left.\begin{array}{l}\text{MÁX LOCAL.}\\ \text{MÍN LOCAL.}\end{array}\right\}$ NO

MÁX ABS NO

MÍN ABS $x = 3$

Determine los números críticos de la función.

$$h(p) = \frac{p-1}{p^2+4}$$

¿NÚMEROS CRÍTICOS?
$h'(p) = 0$, $h'(p)$ NO EXISTA.

$$h'(p) = \frac{(p^2+4) - 2p(p-1)}{(p^2+4)^2} = \frac{\cancel{p^2}+4 - \cancel{2p^2}+2p}{(p^2+4)^2}$$

$$h'(p) = \frac{-p^2+2p+4}{(p^2+4)^2}$$

a) $h'(p) = 0$, $-p^2+2p+4 = 0$ →

NÚMEROS CRÍTICOS

$$\boxed{\begin{aligned} p_1 &= 1+\sqrt{5} \\ p_2 &= 1-\sqrt{5} \end{aligned}}$$

b) $h'(p)$ NO EXISTE $(p^2+4)^2 = 0$ → NO HAY "p" REAL.

NO APORTA MÁS NÚMEROS CRÍTICOS

Determine los números críticos de la función.

$$f(x) = x^{-2} \ln x$$

a) $f'(x)=0$

b) $f'(x)$ NO EXISTE.

$$f'(x) = -2x^{-3}\ln x + \frac{1}{x}x^{-2}$$

$$f'(x) = \frac{-2\ln x}{x^3} + \frac{1}{x^3} = \frac{-2\ln x+1}{x^3}$$

a) $\frac{-2\ln x+1}{x^3} = 0$, $\quad -2\ln x+1=0 \leftarrow$

$$\ln x = \frac{1}{2}$$

$$x = e^{1/2} \approx 1.65$$

b) $\frac{-2\ln x+1}{x^3}$ NO EXISTE, $\quad x^3=0$, $\boxed{x=0}$

NÚMEROS CRÍTICOS

$x=e^{1/2}$, $\quad x=0$

DONDE BUSCAR EXTREMOS LOCALES.

Determine los números críticos de la función.

$$g(t) = |3t - 4|$$

$$g(t) = \begin{cases} 3t-4, & 3t-4 \geq 0, \quad t \geq \frac{4}{3} \\ -3t+4 & 3t-4 < 0 \quad t < \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$g'(t) = \begin{cases} 3, & t \geq \frac{4}{3} \\ -3 & t < \frac{4}{3} \end{cases}$$

a) ¿$g'(t) = 0$? NO, NO APORTA NÚMEROS CRÍTICOS.

b) ¿$g'(t)$ NO EXISTE? ¿$g'(t)$ NO ES CONTINUA?

$$g'_-(t) = g'_+(t)$$

$$¿g'_-\left(\tfrac{4}{3}\right) = g'_+\left(\tfrac{4}{3}\right)?$$

$$-3 \neq 3$$

$t = \frac{4}{3}$ $g'(t)$ NO EXISTE.

$t = \frac{4}{3}$ NÚMERO CRÍTICO.

47–62 Determine los valores máximo absoluto y mínimo absoluto de *f* en el intervalo dado.

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$, $[-3, 5]$

Método del intervalo cerrado Para encontrar los valores máximo y mínimo *absolutos* de una función continua *f* sobre un intervalo cerrado $[a, b]$:

1. Encuentre los valores de f en los números críticos de f en (a, b).
2. Encuentre los valores de f en los puntos extremos del intervalo.
3. El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el más pequeño, el valor mínimo absoluto.

$(-3, 5)$

1) $f'(x) = 3x^2 - 12x = 0$, $\boxed{x=0}$, $\boxed{x=4}$, $\cancel{x=8}$

¿$f'(x)$ NO EXISTE? NO APORTA VALORES CRÍTICOS

$\to f(0) = 5$

$\to f(4) = -27$

2) $\to f(-3) = -76$

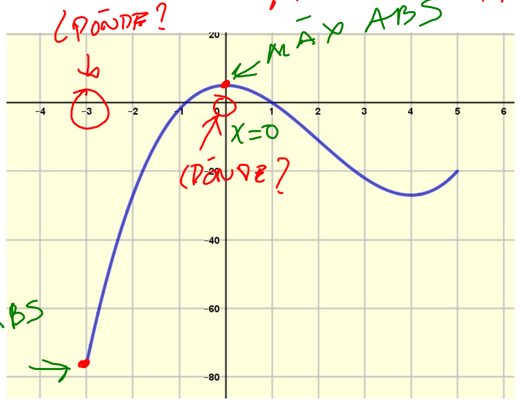
$\to f(5) = -20$

$\mathbb{R}$.

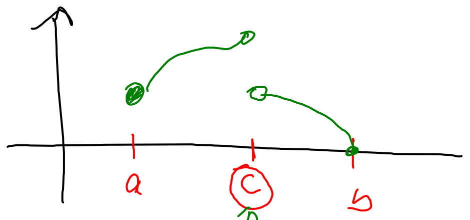
3) $\boxed{\begin{array}{l} \text{MÍN ABS} = -76 \\ \text{MÁX ABS} = 5 \end{array}}$

VALORES MÁX MÍN ABS

¿DÓNDE? $x = -3$, $x = 0$ EXTRA



MÍN ABS



$[a, b]$

c VALOR CRÍTICO $f(c)$ ∄

47–62 Determine los valores máximo absoluto y mínimo absoluto de f en el intervalo dado.

$$f(x) = xe^{x/2}, \quad [-3, 1]$$

TAREA

$f'(x) = ?$