Ej. Encuentre la primera derivada f_x y f_y

$$f(x,y) = 5x^4y^3 - x^2y^6 + 5x^5 - 4y$$

$$f_x = 20x^3y^3 - 2xy^6 + 25x^4$$

$$f_y = 15x^4y^2 - 6x^2y^5 - 4$$

Ej. Determine f_x y f_y

$$f(x,y) = \frac{4\sqrt{xy}}{3y^2+1} \quad (xy)^{1/2}$$

$$f_x = \frac{4\,\frac{1}{2}(xy)^{-1/2}(y)}{3y^2+1}$$

$$f_y = \frac{(3y^2+1)\,4\,\frac{1}{2}(xy)^{-1/2}(x) - 4\sqrt{xy}\,(6y)}{(3y^2+1)^2}$$

$$f_y = \frac{2x(xy)^{-1/2}(3y^2+1) - 24y\sqrt{xy}}{(3y^2+1)^2}$$

Ej. Determine f_x y f_y

$$\frac{d}{du}\,tg^{-1}u = \frac{1}{1+u^2} * \frac{du}{dx}$$

$$f(x,y) = e^{x^2 \tan^{-1} y^2}$$

$$f_x = e^{x^2 tg^{-1} y^2}(2x\, tg^{-1} y^2)$$

$$f_y = e^{x^2 tg^{-1} y^2} * x^2\left(\frac{1}{1+y^4}\right)(2y)$$

Derivadas de Orden Superior

$$z = f(x,y)$$

Primera derivada $\rightarrow$ f_x o f_y

Segunda derivada $\rightarrow$ $f_{xx} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial f^2}{\partial x^2}$

$$f_{yy} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Tercera derivada $\rightarrow$ $f_{xxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$

$$f_{yyy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

Derivadas Parciales mixtas.

$$\underrightarrow{f_{xy}} = \frac{\partial f}{\partial x \partial y} \qquad f_{yx} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}$$

$$\underrightarrow{f_{xyxy}} = \frac{\partial f}{\partial x \partial y \partial x \partial y}$$

<u>Teorema de Clairaut</u>

Sea f una función de dos variables. Si las derivadas parciales f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} son continuas en algún disco abierto, entonces

$$f_{xy} = f_{yx}$$

en cada punto sobre el disco.

Ej. Verifique el teorema de Clairaut.

$$f(x,y) = \cos(x^2 y)$$

$$\underline{f_{xy}} = f_{yx}$$

<u>f_{xy}</u>

$$f_x = -\operatorname{sen}(x^2 y)(2xy)$$

$$f_{xy} = -[\operatorname{sen}(x^2 y)(2x) + (2xy)\cos(x^2 y)\, x^2$$

$$f_{xy} = -2x \operatorname{sen}(x^2 y) - 2x^3 y \cos(x^2 y)$$

f_{yx}

$$f_y = -\operatorname{sen}(x^2y)(x^2)$$

$$f_{yx} = -[\operatorname{sen}(x^2y)(2x) + x^2\cos(x^2y)(2xy)$$

$$f_{yx} = -2x\operatorname{sen}(x^2y) - 2x^3y\cos(x^2y)$$

Ej. Determine la derivada parcial

$$f_{xyxy}, \quad f_{xxx}, \quad f_{yyx}$$

$$f(x,y) = \operatorname{sen}(2x+5y)^2$$

f_{xyx}

$$f_x = \cos(2x+5y)^2 \times 2(2x+5y)'(2) = 4[(2x+5y)\cos(2x+5y)^2]$$

$$(8x+20y)\cos$$

$$f_{xy} = (8x+20y)[-\operatorname{sen}(2x+5y)^2\, 2(2x+5y)'(5) + \cos(2x+5y)^2(20)$$

$$f_{xy} = -40(2x+5y)^2\operatorname{sen}(2x+5y)^2 + 80\cos(2x+5y)^2$$

$$f_{xyx} = -40[(2x+5y)^2\cos(2x+5y)^2(4) + \operatorname{sen}(2x+5y)^2(2)(2x+5y)'(2)$$

$$+ 80\operatorname{sen}(2x+5y)^2\, 2(2x+5y)(2)$$

$$f_{xyx} = -160(2x+5y)^2\cos(2x+5y)^2 - 160\operatorname{sen}(2x+5y)^2(2x+5y)$$

$$+ 320\operatorname{sen}(2x+5y)^2(2x+5y)$$

f_{xxx} $\quad \operatorname{sen}(2x+5y)^2$

$$f_x = \cos(2x+5y)^2\, 2(2x+5y)(2) = 4(2x+5y)\cos(2x+5y)^2$$

$$f_{xx} = 4[(2x+5y)(-\operatorname{sen}(2x+5y)^2(2)(2x+5y)(2) + \cos(2x+5y)^2(2)$$

$$f_{xx} = -16(2x+5y)^2\operatorname{sen}(2x+5y)^2 + 8\cos(2x+5y)^2$$

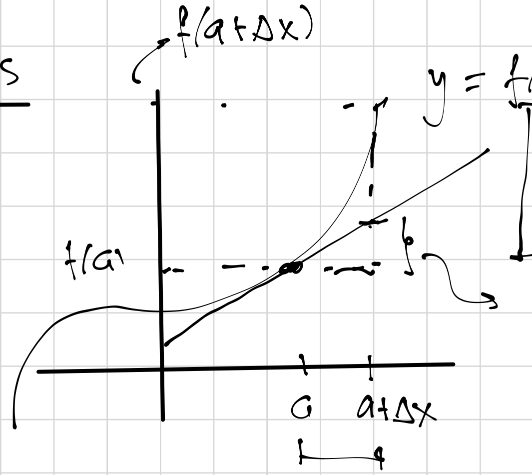
$$f_{xxx} = -16[(2x+5y)^2\cos(2x+5y)^2(2)(2x+5y)'(2) + \operatorname{sen}(2x+5y)^2$$

$$\times 2(2x+5y)'(2)] - 8\operatorname{sen}(2x+5y)^2(2x+5y)(2)$$

$$f_{xxx} = -64(2x+5y)^3\cos(2x+5y)^2 - 64\cdot(2x+5y)\,\text{sen}(2x+5y)^2$$
$$-16(2x+5y)\,\text{sen}(2x+5y)^2 \quad //$$

Diferenciales

$y = f(x)$



Δy = incremento en y

dy = diferencial.

Δx = incremento en x

$dy = f'(x)dx \rightarrow$ diferencial de la funcion.

$z = f(x,y)$

$\Delta x \simeq dx$

$\Delta y \simeq dy$

diferencial total.

$$\boxed{dz = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy}$$

Ej. Determine el diferencial de la funcion.

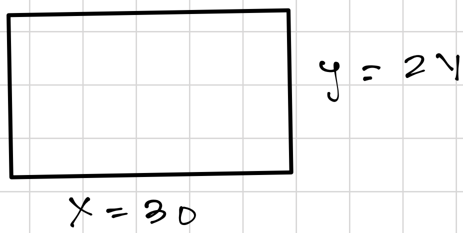
$$z = f(x,y) = e^{-2x}\cos 2\pi y$$

$$dz = f_x dx + f_y dy$$

$$dz = -2e^{-2x}\cos 2\pi y\,dx - 2\pi e^{-2x}\,\text{sen}\,2\pi y\,dy$$

Ej. La longitud y ancho de un rectangulo se mide como 30 cm y 24 cm respectivamente con un error de medición de a lo sumo de 0.1 cm. de cada uno.

Use diferenciales para estimar el error maximo en el area calculada del rectangulo



$dx = 0.1$ cm $\quad dy = 0.1$ cm

$$A = xy$$

$$dA = A_x\,dx + A_y\,dy$$

$$dA = y\,dx + x\,dy$$

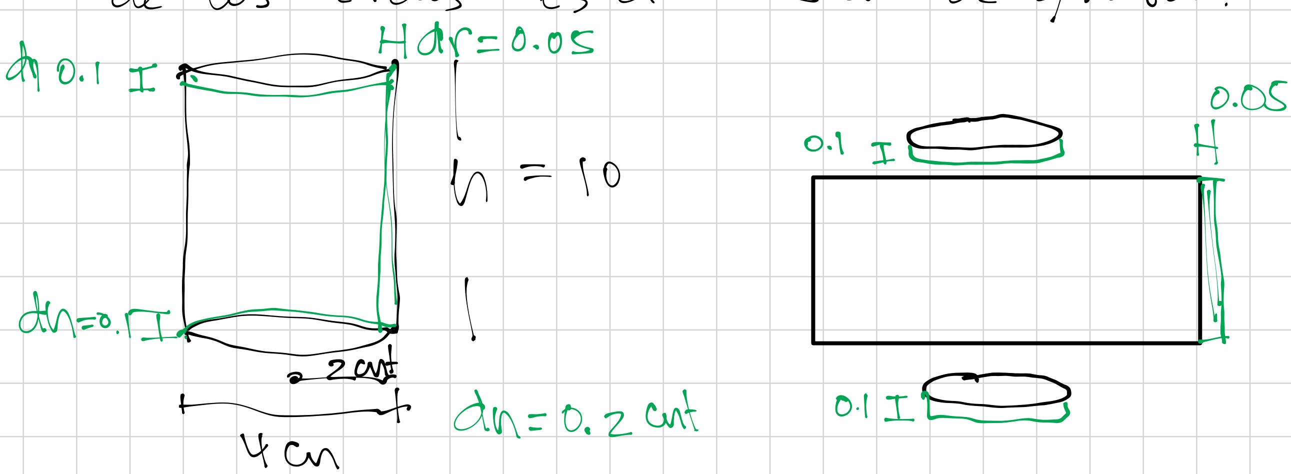
$$dA = (24)(0.1) + (30)(0.1) = 2.4 + 3 = 5.4$$

maximo error en el calculo del area.

Porcentaje del error relativo

$$\%\,E.R. = \frac{dA}{A} * 100 = \frac{5.4}{(30)(24)} = \frac{5.4}{720} * 100 = 0.75\%$$

Ej. Use diferenciales para estimar la cantidad de metal de una lata cilindrica cerrada de 10 cm de alto y 4 cm de diametro, si el metal en la tapa y el fondo es de 0.1 cm y el metal de los lados es de 0.05 cm de grosor.



$$V = \pi r^2 h$$

$$dV = V_r\,dr + V_h\,dh$$

$$dV = 2\pi r h\,dr + \pi r^2\,dh$$

$$dV = 2\pi(2)(10)(0.05) + \pi(2)^2(0.2)$$

$$dV = 3.1416 + 2.5132 = 5.6548 \text{ cm}^3$$