UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MATEMÁTICA INTERMEDIA 3

MI3B

TAREA No. __2_

DESCRIPCIÓN DE CALIFICACIÓN		CALIFICACIÓN
Presentación		
Ejercicios resueltos		
Ejercicio calificado 1	#	
Ejercicio calificado 2	#	
CALIFICACIÓN TOTAL		

Nombre: Javier Andrés Monjes Solórzano____________

Carné:202100081________________________________

Profesor: Ingeniero Benjamín Piedrasanta

Fecha:_ 20 _/ _ 12 __/ 2022

EJERCICIOS 3.1

#1 | P. 92 | Ej. 11

Datado con carbono

11. Los arqueólogos utilizan piezas de madera quemada o carbón vegetal, encontradas en el lugar para datar pinturas prehistóricas de paredes y techos de una caverna en Lascaux, Francia. Vea la figura 3.1.11. Utilice la información de la página 87 para precisar la edad aproximada de una pieza de madera quemada, si se determinó que 85.5% de su C-14 encontrado en los árboles vivos del mismo tipo se había desintegrado.

Pintura rupestre que muestra un caballo y una vaca, c. 17000 ac (pintura rupestre), Prehistoric / Caves of Lascaux, Dordogne, Francia / Bridgeman Imágenes

FIGURA 3.1.11 Pintura en una caverna del problema 11.

$A(t) = A_0 e^{kt}$

$\frac{1}{2}A_0 = A(5600)$; $\frac{1}{2}A_0 = A_0 e^{-5600k}$

$5600k = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$

$k = \frac{-\ln 2}{5600} = -0.00012378t$

$t = 660$; $A_0 = A(660)$

$A(660) = A_0 e^{-0.00012378(660)} = 0.921553 A_0$

El 92 aproximadamente de la cantidad original de C 14 permanecio en el doth a partir de 1988

$\boxed{= 0.921553 A_0}$

#2 | P. 92 | Ej. 13

Ley de Newton enfriamiento/calentamiento

13. Un termómetro se cambia de una habitación cuya temperatura es de 21 °C al exterior, donde la temperatura del aire es de −12 °C. Después de medio minuto el termómetro indica 10 °C. ¿Cuál es la lectura del termómetro en $t = 1$ min? ¿Cuánto tiempo le tomará al termómetro alcanzar los −9 °C?

T_0 = temperatura inicial

T = Temperatura ambiente

t = tiempo

T	21°	10°	x
t	0	0.3	

$\frac{dT}{dt} = k(T_0 - T)$ $\quad \frac{dT}{dt} = k\,dt$ $\quad \int \frac{dT}{T_0 - T} = \int k\,dt$ $\quad \ln T_0 - T = kt + C$

$T_0 - T = Ce^{kt}$ $\quad T_0 = T + Ce^{kt}$ $\quad 21 = -12 + Ce^{k(0)}$

$C = -7/4$

$T_0 = -12 - \frac{7}{4}e^{kt}$ $\quad 10 = -12 - \frac{7}{4}e^{k(0.3)} \rightarrow \frac{-88}{7} = e^{k(0.3)}$

$\ln\left|\frac{-88}{7}\right| = k(0.3) \rightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{88}{7}\right)}{0.3} \rightarrow T = -12 - \frac{7}{4}e^{\left(\frac{\ln|-88/7|}{0.3}\right)(1)} = 36.67°$

$-9 = -12 - \frac{7}{4}e^{\left(\frac{\ln\left(\frac{88}{7}\right)}{0.3}\right)t} \rightarrow \frac{-12}{7} = e^{\left(\frac{\ln(88/7)}{0.3}\right)t} \rightarrow \ln\left(\frac{12}{3}\right) = \frac{\ln\left(\frac{88}{7}\right)}{0.3}t$

$t = \frac{0.3\ln\left(\frac{12}{7}\right)}{\ln\frac{88}{7}} = 3.06$

$\boxed{t = 3.06 \text{ minutos}}$

#3 | P.92 | G: 15 $\quad T = 20°C \quad t = ?s$

$T_A = 100°C$

Temp.	20°	22°	98°
tiempo	0	1	2

15. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial era de 20 °C, se deja caer en un gran tanque de agua hirviendo. ¿Cuánto tiempo tardará la barra en alcanzar los 90 °C si se sabe que su temperatura aumentó 2° en 1 segundo? ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar los 98 °C?

$\frac{dT}{dt} = k(T-T_A) \to \int \frac{dT}{T-T_A} = \int k\,dt$ $\quad 20 = 100°C + Ce^{k(0)}$ $\quad -80 = C$ $\quad T = 100 - 80e^{kt}$

$22 = 100°C - 80°e^{k}$ $\quad -78 = -80e^{k}$ $\quad e^{k} = \frac{39}{40}$

$T - T_A = Ce^{kt} \quad T = T_A + Ce^{kt}$

$k = \ln\left|\frac{39}{40}\right| \quad T = 100 - 80e^{(\ln(\frac{39}{40}))t};\ 98 = 100 - 80e^{(\ln(\frac{39}{40}))t} = -2 = 80e^{(\ln(\frac{39}{40}))t}$

$\frac{1}{40} = e^{(\ln(\frac{39}{40}))t} = \ln\left(\frac{1}{40}\right) = \ln\left(\frac{39}{40}\right)t \to t = \frac{\ln(\frac{1}{40})}{\ln(\frac{39}{40})} = 145.7$

$\boxed{t = 146 \text{ Segundos} \quad T = 98°C}$

#4 | P.92 | G: 16 $\quad t = ?s$

$T_0 = 100°C \quad T_A = 100$

Temp	100°	90°	10°
tiemp	0	1	2

16. Dos grandes tanques *A* y *B* del mismo tamaño se llenan con fluidos diferentes. Los fluidos en los tanques *A* y *B* se mantienen a 0 °C y a 100 °C, respectivamente. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es 100 °C, se sumerge dentro del tanque *A*. Después de 1 minuto la temperatura de la barra es de 90 °C. Después de 2 minutos se saca la barra e inmediatamente se transfiere al otro tanque. Después de 1 minuto en el tanque *B* la temperatura se eleva 10 °C. ¿Cuánto tiempo, medido desde el comienzo de todo el proceso, le tomará a la barra alcanzar los 99.9 °C?

$\frac{dT}{dt} = k(T-T_A) \to \int \frac{dT}{T-T_A} = \int k\,dt$

$T - T_A = Ce^{kt} \quad T = T_A + Ce^{kt}$

$T_1(t) = Ce^{kt} \to T(0) = 100 \quad 100 = C$

$T_1(t) = 100e^{kt} \to T_1(1) = 100e^{kt} = 90°C$

$k_1 = \ln(0.9);\ T_1(t) = 100e^{t\ln 0}$

$T_1(2) = 100e^{2\ln(0.9)}$

$100(0.9)^2 = 81°C$

$T_2(t) = 100 + C_2e^{k_2t};\ T_2(0) = 81$

$T_2(0) = 100 + C_2e^{k_2(0)}$

$C_2 = 19$

$T_2 = 100 + 19e^{kt} \quad 100 + C_2 = 81$

$T_2(1) = 100 - 19e^{kt} = 91$

$e^{kt} = \frac{9}{19} \to k_2 = \ln\frac{9}{19}$

$T_2(t) = 100 - 19e^{t(\frac{9}{19})};\ T_2(t) = 99.9$

$100 - 19e^{t\ln(\frac{9}{19})} = 99.9 \to e^{t(\ln\frac{9}{19})} = \frac{0.1}{19} \to t = \frac{\ln(\frac{0.1}{19})}{\ln(\frac{9}{19})} = 7.02$

$t_T = 2 + 7.02$

$t_T = 9.02$

El tiempo total para alcanzar 99°C en el segundo envase es de aproximadamente 9.02 minutos.

# 5	P. 92	G. 17

$T = 21°C$ $t = ?s$

$T_a = ?$

Temp	21	43	63
tiemp.	0	0.5	1

17. Un termómetro que indica 21 °C se coloca en un horno precalentado a una temperatura constante. A través de una ventana de vidrio en la puerta del horno, un observador registra que el termómetro lee 43 °C después de $\frac{1}{2}$ minuto y 63 °C después de 1 minuto. ¿Cuál es la temperatura del horno?

$\frac{dT}{dt} = K(T - T_0) \rightarrow \int \frac{dT}{T - T_0} = \int K dt$ $T = Ta + Ce^{kt}$

$21 = Ta + Ce^{k(0)}$

$-21 + Ta = C$

$t = Ta - (Ta - 21)e^{kt}$

$43 = Ta - (Ta - 21)e^{k(\frac{1}{2})}$ $- 63 = Ta - (Ta - 21)e^{kt}$

$e^{k(\frac{1}{2})} = \left|\frac{43 - Ta}{Ta - 21}\right|^2$ $e^{k} = \frac{63 - Ta}{Ta - 21} \rightarrow (43 - Ta)^2 = (63 - Ta)(21 - Ta)$

$1849 - 86Ta + \cancel{Ta^2} = 1323 - 63Ta - 21Ta + \cancel{Ta^2}$

$-86Ta + 84Ta = 1323 - 1849 \rightarrow -2Ta = -526 \rightarrow Ta = 263°$

$\boxed{\text{La temperatura fue de } 263°C}$

# 6	P. 93	G. 19

$Ta = 21°$

Temp	37	29	27°
tiemp	0	x	1+x

19. Un cadáver se encontró dentro de un cuarto cerrado en una casa donde la temperatura era constante a 21 °C. Al tiempo del descubrimiento la temperatura del corazón del cadáver se determinó de 29 °C. Una hora después una segunda medición mostró que la temperatura del corazón era de 27 °C. Suponga que el tiempo de la muerte corresponde a $t = 0$ y que la temperatura del corazón en ese momento era de 37 °C. Determine cuántas horas pasaron antes de que se encontrara el cadáver. [*Sugerencia:* Sea que $t_1 > 0$ denote el tiempo en que se encontró el cadáver.]

$\frac{dT}{dt} = K(T - Ta) \rightarrow \int \frac{dT}{T - Ta} = \int K dt$

$T = Ta + Ce^{kt} \rightarrow 37 = Ta + Ce^{k(0)}$

$37 - 21 = C;\ C = 16$

$T = Ta + 16e^{kT}$

$29 = 21 + 16e^{kt}$

$8 = 16e^{kt}$

$\frac{8}{16} = e^{kt}$

$\frac{1}{2} = e^{kt}$

$\ln(\frac{1}{2}) = kx \rightarrow K = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{x}$

$T = 21 + 16e^{(\frac{\ln(\frac{1}{2})}{x})t} \rightarrow 27 = 21 + 16e^{(\frac{\ln(\frac{1}{2})}{x})(1+x)}$

$6 = 16e^{(\frac{\ln(\frac{1}{2})}{x})(1+x)} \rightarrow \frac{3}{8} = e^{(\frac{\ln(\frac{1}{2})}{x})x} + e^{(\frac{\ln(\frac{1}{2})}{x})}$

$\frac{3}{8} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{1/x} \rightarrow \frac{3}{4} = (\frac{1}{2})^{1/x} \rightarrow \frac{1}{x}\ln(\frac{1}{2}) = \ln(\frac{3}{4})$

$x = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(\frac{3}{4})} = 2.4h$

$\boxed{\text{La muerte tuvo lugar aproximadamente 2.4 horas antes del descubrimiento del cuerpo.}}$

Mezclas

#7 P.93 Ej. 24

24. En el problema 23, ¿cuál es la concentración $c(t)$ de sal en el tanque al tiempo t? ¿Y al tiempo $t = 5$ min? ¿Cuál es la concentración en el tanque después de un largo tiempo, es decir, conforme $t \to \infty$? ¿Para qué tiempo la concentración de sal en el tanque es igual a la mitad de este valor límite?

$x = 1600 - 1000e^{(-t/100)}$

$\frac{x}{800} = 2 - 2e^{-t/100}$

$C(5) = 2 - 2e^{-1/2}$

$C = 0.0975\ lb/gal$

$C(t) = 1 = 2 - 2e^{-t/100}$

$1 - 2 = -2e^{-t/100}$

$-1 = -2e^{-t/100}$

$-1 = 2e^{-t/100}$

$\frac{1}{2} = e^{-t/100}$

$\ln\frac{1}{2} = \frac{-t}{100}$

$t = 100\ln\left(\frac{1}{2}\right) \to t = 69.3\ min$

$\boxed{t = 69.3\ min}$

#8 P.93 Ej.25

$V = 2000L \quad C_e = 0.25$

$f_e = 40 \quad C_s = x$

$f_s = 40$

25. Resuelva el problema 23 suponiendo que la solución sale con una razón de 40 L/min. ¿Cuándo se vacía el tanque?

$\frac{ds}{dt} = C_e f_e - C_s f_s \qquad \frac{ds}{dt} = 0.25(40) - \frac{x}{2000}(40)$

$A(0) = 0$

$\frac{ds}{dt} = 10 - \frac{x}{50} \to 10 = \frac{ds}{dt} + \frac{x}{50} \to e^{\int \frac{x}{50}} = e^{1/50\, t} \qquad C = -\frac{1}{10}$

$\frac{dA}{dt} = 10 - \frac{10A}{500 - (10-5)t} = 10 - \frac{A}{100-t} \to A = 1000 - 10t + C(100-t)^2$

$1000 - 10t + \left(-\frac{1}{10}\right)(100-t)^2 \to \frac{100t - t^2}{10}$

$\boxed{100\ minutos}$

#9 P93 Ej 27

$C_e = 0.25 \quad C_s = A$

$f_e = 20 \quad f_s = 15$

$C_s = \frac{A}{400 + (20-15)t}$

$C_s = \frac{A}{400 + 5t}$

27. Un gran tanque está parcialmente lleno con 400 L de fluido en los que se disolvieron 5 kg de sal. La salmuera tiene 0.25 kg de sal por litro que entra al tanque a razón de 20 L/min. La solución bien mezclada sale del tanque a razón de 15 L/min. Determine la cantidad de kg de sal que hay en el tanque después de 30 minutos.

$\frac{dA}{dt} = C_e f_e - C_s f_s$

$0.25(20) - \left(\frac{A}{400+5t}\right)15$

$5 - \left(\frac{A}{400+5t}\right)15$

$5 = \frac{dA}{dt} + \frac{15A}{400+5t} \to e^{\int \frac{A}{400+5t}} = e^{3\ln(400+5t)} = (400+5t)^3$

$\int 5(400+5t)^3 dt \to A(t) - \frac{5}{4}(80+t) + \frac{C}{80+t} \to 5(4)(0) \frac{5}{4}\frac{80 C}{80^3}$

$C = 80^3(5-100) = 95.8 \to A(t) = 5\left(80 + 1 - 95\left(\frac{80}{94}\right)^t\right)$

$A(30) = -\frac{5}{4} - 110 - 78\left(\frac{80}{110}\right)^3 \to A(30) = \frac{550}{9} - 95\left(\frac{8}{14}\right)^3 = 107$

$\boxed{80\ minutos \quad 107\ Kg}$

Circuitos en serie

#10 | P. 93 | G. 29

$F(t) = 30V$ $\quad R = 50$

$L = 0.1h$

29. Se aplica una fuerza electromotriz de 30 volts a un circuito en serie *LR* con 0.1 henrys de inductancia y 50 ohms de resistencia. Determine la corriente $i(t)$, si $i(0) = 0$. Determine la corriente conforme $t \to \infty$.

$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)$ $\quad \left(0.1\frac{di}{dt} + 50i = 30\right) \div 0.1$ $\rightarrow$ $e^{500t}i = \frac{3}{5}e^{500t} + C \Rightarrow i(t) = \frac{3}{5} + Ce^{-500t}$

$\frac{di}{dt} + 500i = 300$ $\quad e^{\int 500\,dt} \rightarrow e^{500t}$ $\quad \frac{3}{5} - \frac{3}{5}Ce^{-500t} \rightarrow 0 = \frac{3}{5} + Ce^{0}$

$i(00) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-500(0)}$ $= \frac{3}{5} = C = -\frac{3}{5}$ $\rightarrow t\ \infty$

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} = \frac{3}{5}}$$

#11 | P. 93 | G. 32

$R\frac{dq}{dt} + \left(\frac{1}{C}\right)q = E(t)$

$R = 1000$; $C = 5\times10^{-6}$

$E(t) = 200$

32. Se aplica una fuerza electromotriz de 200 volts a un circuito en serie *RC*, en el que la resistencia es de 1000 ohms y la capacitancia es de 5×10^{-6} farads. Determine la carga $q(t)$ en el capacitor, si $i(0) = 0.4$. Determine la carga y la corriente en $t = 0.005$ s. Encuentre la carga conforme $t \to \infty$.

$q = \frac{1}{1000} + Ce^{-200t}$; $i = -200Ce^{-200t}$, $i(0) = 0.4$; $C = -\frac{1}{500}$, $q(0.005) = 0.003$ ohms

$i(0.005) = 0.1472$ ampdi $\rightarrow$ $q \rightarrow \frac{1}{1000}$ $\quad t \rightarrow \infty$

$$\boxed{q \rightarrow \frac{1}{100} \quad t \rightarrow \infty}$$

#12 | P. 93 | G. 33

33. Se aplica una fuerza electromotriz

$$E(t) = \begin{cases} 120, & 0 \le t \le 20 \text{ s} \\ 0, & t > 20 \text{ s} \end{cases}$$

a un circuito en serie *LR* en el que la inductancia es de 20 henrys y la resistencia es de 2 ohms. Determine la corriente $i(t)$, si $i(0) = 0$.

$0 \le t \le 20$ $\quad FI = e^{t/10}$

$20\frac{di}{dt} + 2i = 120$

$i(0) = 0$

$\left(\frac{d}{dt}\right)\left[e^{t/10}i\right] = 6e^{t/10}$ $\rightarrow$ $i = 60 + Ce^{-t/10}$; $C = -60$ $\quad i = 60 - 60e^{-t/10}$

$t > 20 \rightarrow$ $20\frac{di}{dt} = 0$; $Ce^{-t/10} \rightarrow t = 20 \rightarrow C = e^{-t/10} + 20 \rightarrow T = 60 - 60e^{-2}$

$C = 60(e^{2} - 2) \rightarrow 60 - 60e^{2} \rightarrow C_2 = 60(e^{2} - 1)$

$$\boxed{i(t) = \begin{cases} 60 - 60e^{-t/10} ; & 0 \le t \le 20 \\ 60(e^{2} - 1)e^{-t/10} ; & t > 20 \end{cases}}$$

EJERCICIOS 3.2

Ecuación logística

#13 | P. 101 | Ej. 1

$\frac{dP}{dt} = P\left(r - \frac{r}{K}P\right) \rightarrow \frac{dP}{dt} = P(a - bP)$

1. La cantidad $N(t)$ de supermercados del país que están usando sistemas de revisión computarizados se describe por el problema con valores iniciales

$$\frac{dN}{dt} = N(1 - 0.0005N), \quad N(0) = 1.$$

a) Use el concepto de esquema de fase de la sección 2.1 para predecir cuántos supermercados se espera que adopten el nuevo procedimiento en un periodo prolongado. A mano, dibuje una curva solución del problema con valores iniciales dados.

b) Resuelva el problema con valores iniciales y después utilice un programa de graficación para comprobar y trazar la curva solución del inciso a). ¿Cuántas compañías se espera que adopten la nueva tecnología cuando $t = 10$?

a) $\frac{dN}{dt} = N(1 - 0.0005N) = 0 \quad N = 0$

$N = 2000$

$0 < N < 2000; \ \frac{dN}{dt} > 0$

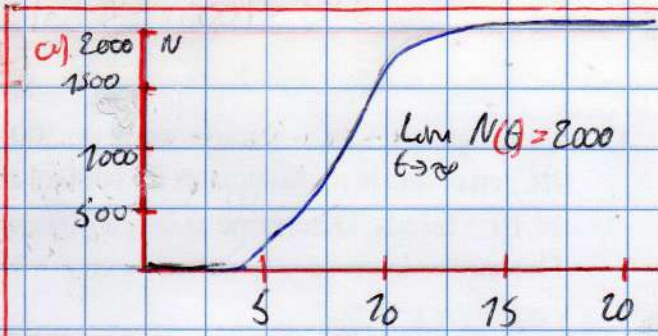
$\lim_{t \to \infty} N(t) = 2000$

b) $\frac{dN}{N(1 - 0.0005N)} = \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N - 2000}\right) dN = dt$

$\ln N - \ln(N - 2000) = t + C$

$N(t) = \frac{2000e^{ct}}{1 + e^{c+t}} = \frac{2000e^{c+t}}{(1 + e^{c}e^{t})} \rightarrow N(0) = 1$

$e^{c} = \frac{1}{1999} \rightarrow N(t) = \frac{2000e^{t}}{(1999 + e^{t})} \rightarrow N(10) = 1833.59$



b) $N(10) = 1834$ compañías

#14 | P. 101 | Ej. 2

$\frac{dN}{dt} = N(a - bN); \ N(0) = 500$

2. La cantidad $N(t)$ de personas en una comunidad bajo la influencia de determinado anuncio está gobernada por la ecuación logística. Inicialmente $N(0) = 500$ y se observa que $N(1) = 1000$. Determine $N(t)$ si se predice que habrá un límite de 50000 personas en la comunidad que verán el anuncio.

$N = \frac{500a}{500b + (a - 500b)e^{-at}}$

$\lim_{t \to \infty} N = \frac{a}{b} = 50{,}000 \ ; \ N(1) = 1000$

$a = 0.7033, \ b = 0.000014 \rightarrow N = \frac{50{,}000}{1 + 99e^{-0.7033t}}$

$$\boxed{N = \frac{50.000}{1 + 99e^{-0.7033t}}}$$

EJERCICIOS 4.1

#15 | P. 130 | Ej. 2

4.1.1 PROBLEMAS CON VALORES INICIALES Y CON VALORES EN LA FRONTERA

En los problemas 1-4 la familia de funciones que se proporciona es la solución general de la ecuación diferencial en el intervalo que se indica. Encuentre un miembro de la familia que sea una solución del problema con valores iniciales.

2. $y = c_1e^{4x} + c_2e^{-x}, (-\infty, \infty)$;
$y'' - 3y' - 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

$y = C_1e^{4x} + C_2e^{-x}$; $(-\infty, \infty)$
$y'' - 3y' - 4y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$

$y = C_1e^{4x} + C_2e^{-x}$; $y(0) = C_1 + C_2$ $\rightarrow C_1 = \frac{3}{5}$; $C_2 = \frac{2}{5}$
$y' = 4C_1e^{4x} - C_2e^{-x}$; $y'(0) = 4C_1 + C_2 = 2$

$\boxed{y = \frac{3}{5}e^{4x} + \frac{2}{5}e^{-x}}$

# 16	P. 131	Ej. 17

4.1.2 ECUACIONES HOMOGÉNEAS

En los problemas 15-22 determine si el conjunto de funciones es linealmente independiente sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

17. $f_1(x) = 5, \quad f_2(x) = \cos^2 x, \quad f_3(x) = \operatorname{sen}^2 x$

$W(f_1, f_2, f_3)$

$$\begin{bmatrix} 5 & \cos^2 x & \operatorname{Sen}^2 x \\ 0 & -2\operatorname{sen}^2 x - 2\cos^2 x & 2\operatorname{sen}\cos x \\ 0 & 2\operatorname{sen}^2 x - 2\cos^2 x & 2\cos^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x \end{bmatrix}$$

$5[(+2\operatorname{sen}x\cos x)(2\cos^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x) - (2\operatorname{sen}x\cos x)(2\operatorname{sen}^2 x - 2\cos^2 x)]$
$- \cos^2 x[0(2\cos^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x) - 0(2\operatorname{sen}(\cos x))] + \operatorname{Sen}^2 x[0(2\operatorname{sen}^2 x - 2\cos^2 x) - 0(-2\operatorname{sen}\cos x)]$
$5[-4\cancel{\operatorname{sen}x\cos^3 x} + 4\cancel{\operatorname{sen}^3 x\cos x} - 4\cancel{\operatorname{sen}^3 x\cos x} + 4\cancel{\operatorname{sen}x\cos^3 x}]$
$5(0) = 0$

$\boxed{5(0) = 0 \text{ Linealmente dependiente}}$

# 17	P. 131	Ej. 17

21. $f_1(x) = 1 + x, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = x^2$

$W(f_1, f_2, f_3)$ $\begin{bmatrix} 1+x & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$1+x[1(0) - (0)] + (x)[(1)(0) - (1)(0)] + x^2[1(0) - 1(0)]$
$1 + x(0) + x(0-0) \quad x^2(0-0) \rightarrow 1 + x(0) + x(0)\, x^2(0)$
$1 + 0 + 0 + 0$
1

$\boxed{\text{Linealmente independiente}}$

EJERCICIOS 4.3

# 18	P. 140	Ej. 5

En los problemas 1-14, obtenga la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden dada.

5. $y'' + 8y' + 16y = 0$

$e^{\gamma t}(\gamma^2 + 8\gamma + 16) = 0 \rightarrow \gamma = -4$ multiplicidad 2 $\rightarrow y = C_1e^{-4t} + C_2te^{-4t}$
$y = C_1e^{-4x} + C_2x^{-4x}$

$y'' + 8y' + 16y = 0$
$ay'' + by' + cy = 0$
$(e^{\gamma t})'' + 8(e^{\gamma t})' + 16e^{\gamma t} = 0$

$\boxed{y = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x}}$

11. $y'' - 4y' + 5y = 0$

# 19	P. 140	Ej. 11

$y'' - 4y' + 5y = 0$

$((e^{\gamma t}))'' - 4((e^{\gamma t}))' + 5e^{\gamma t} = 0$

$e^{\gamma t}(y^2 - 4y + 5) = 0$

$y = 2 + i \; ; \; y = 2 - i$

$y_1 = a + i\beta$

$y_1 \neq y_2 \rightarrow y_2 = a - i\beta$

$y = e^{2t}(C_1 \cos(t) + C_2 \operatorname{sen}(t))$

$y = e^{2t}(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$

$\boxed{y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)}$

# 20	P. 140	Ej. 20

En los problemas 15-28 encuentre la solución general de la ecuación diferencial de orden superior dada.

20. $\dfrac{d^3x}{dt^3} - \dfrac{d^2x}{dt^2} - 4x = 0$ $\rightarrow \dfrac{d^3x}{dt^3} - \dfrac{d^2x}{dt^2} - 4x = 0 \rightarrow x'''(t) - x''(t) - 4x = 0$

$((e^{\gamma t}))''' - ((e^{\gamma t}))'' - 4e^{\gamma t} = 0$

$e^{\gamma t}(y^3 - y^2 - 4) = 4 \rightarrow y = 2 \; ; \; y = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \; ; \; y = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$

$C_1 e^{2t}$

$e^{-\frac{1}{2}t}\left(C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + C_3 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right) \rightarrow e^{-t/2}\left(C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{7}t}{2}\right) + C_3 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{7}t}{2}\right)\right)$

$x_1 = C_1 e^{2t} + e^{-t/2}\left(C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{7}t}{2}\right) + C_3 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{7}t}{2}\right)\right)$

$x = C_1 e^{2t} + e^{-t/2}\left(C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{7}t}{2}\right) + C_3 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{7}t}{2}\right)\right)$

$\boxed{x = C_1 e^{2t} + e^{-t/2}\left(C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{7}t}{2}\right) + C_3 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{7}t}{2}\right)\right)}$

# 21	P. 140	Ej. 27

27. $\dfrac{d^5u}{dr^5} + 5\dfrac{d^4u}{dr^4} - 2\dfrac{d^3u}{dr^3} - 10\dfrac{d^2u}{dr^2} + \dfrac{du}{dr} + 5u = 0$

$\dfrac{d^5u}{dr^5} + 5\dfrac{d^4u}{dr^4} - 2\dfrac{d^3u}{dr^3} - 10\dfrac{d^2u}{dr^2} + \dfrac{du}{dr} + 5u = 0 \rightarrow \dfrac{d^5}{dr^5}(u) + 5\dfrac{d^4}{dr^4}(u) - 2\dfrac{d^3}{dr^3}(u) - 10\dfrac{d^2}{dr^2}(u) + \dfrac{d}{dr}(u) + 5u = 0$

$\dfrac{d^5}{dr^5} = 0 \rightarrow 0 + 5\dfrac{d^4}{dr^4}(u) - 2\dfrac{d^3}{dr^3}(u) - 10\dfrac{d^2}{dr^2}(u) + \dfrac{d}{dr}(u) + 5u = 0$

$\dfrac{d^4}{dr^4} = 0 \rightarrow 0 + 5(0) - 2\dfrac{d^3}{dr^3}(u) - 10\dfrac{d^2}{dr^2}(u) + \dfrac{d}{dr}(u) + 5u = 0$

$\dfrac{d^3}{dr^3} = 0 \quad 0 + 5(0) - 2(0) - 10\dfrac{d^2}{dr^2}(u) + \dfrac{d}{dr}(u) + 5u = 0$

$\dfrac{d^2}{dr^2} = 0 \rightarrow 0 + 5(0) - 2(0) - 10(0) + \dfrac{d}{dr}(u) + 5u = 0$

$\dfrac{d}{dr}(u) = 0 \rightarrow 0 + 5(0) - 2(0) - 10(0) + 0 + 5u = 0$

$m^5 + 5m^4 - 2m^3 - 10m^2 + m + 5 = 0$

$m = -1 \; ; \; m = 1$

$\boxed{u = C_1 e^{-r} + C_2 r e^{-r} + C_3 e^{r} + C_4 r e^{r} + C_5 e^{-5r}}$

#22 P.140 G.32

En los problemas 29-36 resuelva el problema con valores iniciales

32. $4y'' - 4y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 5$

$4m^2 - 4m - 3 \rightarrow m = -1/2$, $m = 3/2$

$4y'' - 4y' - 3y = 0$; $ay'' + by' + cy = 0$

$y = C_1 e^{-x/2} + C_2 e^{3x/2}$

$4((e^{yt})'' - 4((e^{yt}))' + 3e^{yt} = 0$

$y(0) = 1$, $y'(0) = 5$

$e^{yt}(4y^2 - 4y + 3) = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$y = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$C_1 + C_2 = 1, \ -\frac{1}{2}C_1 + \frac{3}{2}C_2 = 5$

$C_1 = -\frac{7}{4}$; $C_2 = \frac{11}{4} \rightarrow y = -\frac{7}{4}e^{-x/2} + \frac{11}{4}e^{3x/2}$

$\boxed{y = -\frac{7}{4}e^{-x/2} + \frac{11}{4}e^{3x/2}}$

#23 P.141 G.36

36. $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 1$

$y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0 \rightarrow m^3 + 2m^2 - 5m - 6 = 0 \rightarrow m \rightarrow$ $m = -1$, $m = 2$, $m = -3$

$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-3x}$

$y(0) = 0$; $y'(0) = 0$; $y''(0) = 1$

$C_1 + C_2 + C_3 = 0$; $-C_1 + 2C_2 - 3C_3 = 0$, $C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 1$

$C_1 = -\frac{1}{6}$; $C_2 = \frac{1}{15}$; $C_3 = \frac{1}{10} \rightarrow y = -\frac{1}{6}e^{-x} + \frac{1}{15}e^{2x} + \frac{1}{10}e^{-3x}$

$\boxed{y = -\frac{1}{6}e^{-x} + \frac{1}{15}e^{2x} + \frac{1}{10}e^{-3x}}$

EJERCICIOS 4.4

5. $\frac{1}{4}y'' + y' + y = x^2 - 2x$

#24 P.150 G.5

$\frac{1}{4}y'' + y' + y = x^2 - 2x \rightarrow \frac{1}{4}m^2 + m^2 + 1 = 0 \rightarrow m \rightarrow m_1 = m_2 = -2$

$y_c = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$; $y_p = Ax^2 + Bx + C$

$A = 1, \ 2A + B = -2$; $\frac{1}{2}A + B + C = 0$

$A = 1$

$B = -4$

$C = \frac{7}{2}$

$y_p = x^2 - 4x + \frac{7}{2} \rightarrow y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + x^2 - 4x + \frac{7}{2}$

$\boxed{y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + x^2 - 4x + \frac{7}{2}}$

#25 | P.150 | Ej.13

13. $y'' + 4y = 3 \operatorname{sen} 2x$

$y'' + 4y = 3\operatorname{sen}2x \rightarrow m^2+4=0 \rightarrow m_1=4 \; ; m_2=-4$

$y_c = C_1e^{4x}+C_2e^{-4x}$; $y_p = Axe^{4x}$ Sustituyendo $\rightarrow 8A=2$

$A=\frac{1}{4}$; $y_p=\frac{1}{4}$

$y = C_1e^{4x}+C_2e^{-4x}+\frac{1}{4}xe^{4x}$ $\boxed{y=C_1e^{4x}+C_2e^{-4x}+\frac{1}{4}xe^{4x}}$

#26 | P.150 | Ej.20

20. $y'' + 2y' - 24y = 16 - (x+2)e^{4x}$

$m_1=6$ $\quad y_c = C_1e^{-6x}+C_2e^{4x}$

$y''+2y'-24y=16 \rightarrow m^2+2m-24=0$ $\quad m_2=4$ $\quad y_p = A+(Bx^2+Cx)e^{4x}$

Sustituyendo $\rightarrow -24A=16$

$2B+10C=-2 \rightarrow 20B-1$; $A=-\frac{2}{3}$; $B=-\frac{1}{20}$; $C=-\frac{19}{100}$

$y_p = -\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{20}x^2+\frac{19}{100}x\right)e^{4x} \rightarrow y_c = C_1e^{-6x}+C_2e^{4x}-\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{20}x^2+\frac{19}{100}x\right)e^{4x}$

$\boxed{y_c = C_1e^{-6x}+C_2e^{4x}-\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{20}x^2+\frac{19}{100}x\right)e^{4x}}$

#27 | P.151 | Ej.29

29. $5y'' + y' = -6x, \quad y(0)=0, y'(0)=-10$ $\quad y_c = C_1e^{-x/5}+C_2$

$5y''+y'=-6x \rightarrow 5m^2+m=0 \rightarrow m=\frac{x}{5}$ $\quad y_p = Ax^2+Bx \rightarrow A=-3$, $B=30$

$y_c = C_1e^{-x/5}+C_2-3x^2+30x \rightarrow C_1=200$; $C_2=-200$

$y=200e^{-x/5}-200-3x^2+30$ $\boxed{y=200e^{-x/5}-200-3x^2+30}$

#28 | P.151 | Ej.31

31. $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x}, \quad y(0)=-3, y'(0)=1$

$y_c = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\operatorname{sen}x)$

$y_p = Ae^{-4x} \rightarrow$ Sustituyendo $\rightarrow A=7$

$y = e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\operatorname{sen}x)+7e^{-4x}$

$C_1=-10$; $C_2=9$

$y = e^{-2x}(-10\cos x+9\operatorname{sen}x)+7e^{-4x}$

$\boxed{y = e^{-2x}(-10\cos x+9\operatorname{sen}x)+7e^{-4x}}$