2.1 Elementos fundamentales de la Geometría

OBJETIVOS

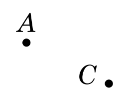
- Conocer los elementos fundamentales de la Geometría y su representación.
- Aprender las definiciones fundamentales obtenidas a partir de los elementos fundamentales.
- Encontrar la medida de ángulos en figuras geométricas utilizando los postulados y teoremas de ésta sección.

Términos básicos no definidos

La Geometría tiene tres entes o elementos fundamentales no definidos: **punto**, **recta** y **plano.**

Punto

El punto es el primer elemento que no está definido en Geometría. Se representa gráficamente por un pequeño círculo y una letra mayúscula que lo identifica. La siguiente figura muestra tres puntos *A, B* y *C*.

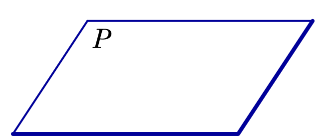


Recta

El segundo término no definido de la Geometría Euclideana es el de recta, aunque se entiende que una recta es un conjunto infinito de puntos que se extienden indefinidamente en sentidos opuestos. Para referirse a una recta, se seleccionan dos puntos sobre ella; la recta queda determinada por dichos puntos. Una recta también se puede identificar por una letra minúscula. La figura siguiente muestra la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por los puntos A y B. La recta de la figura también está identificada como la recta l.

Plano

El tercer término no definido de la Geometría Euclideana es el de plano. Se entiende que un plano es una superficie totalmente plana que se extiende indefinidamente. Una mesa de vidrio o la cubierta de un escritorio da la idea de un plano. Un plano se representa geométricamente por una figura de cuatro lados y una letra mayúscula. La siguiente figura representa al plano P.



Definiciones fundamentales

A partir de los elementos fundamentales se pueden definir todos los otros elementos de la Geometría, en ésta sección se definen algunos de ellos.

Espacio

Está formado por todos los puntos posibles y contiene infinitos planos.

Puntos colineales

Son todos los puntos que están situados sobre una misma recta.

Puntos coplanares

Son todos los puntos que están situados en un mismo plano.

Segmento de recta

El segmento de recta AB está formado por todos los puntos entre A y B incluyendo los puntos A y B. La longitud de un segmento es la distancia entre sus puntos extremos. Para indicar que la longitud del segmento AB es 5 escribimos $AB = 5$. La siguiente figura muestra el segmento de recta AB.

Rayo o semirecta

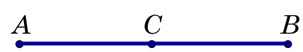
El Rayo AB está formado por todos los puntos que se extienden en una sola dirección a partir del punto A pasando por el punto B. El punto A se llama origen o punto extremo del rayo. La siguiente figura muestra el Rayo AB.

Rayo AB

Punto medio de un segmento

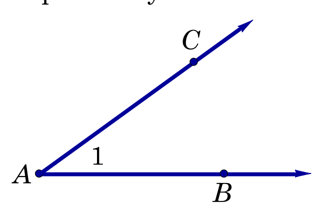
Es el punto que divide un segmento en dos segmentos iguales. Si C es el punto medio de AB, entonces

$$AC = CB$$



Ángulos y su medida

Un ángulo está formado por dos rayos que tienen el mismo punto extremo. Al punto extremo común se le llama vértice y a los dos rayos se las llama lados del ángulo. El ángulo de la figura siguiente está formado por los rayos AB y AC, su vértice está en el punto A y sus lados son los rayos AB y AC.



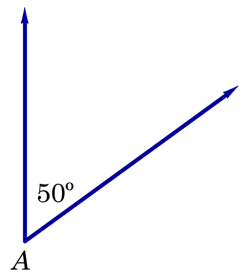
Para referirse al ángulo de la figura anterior se puede hacer como $\angle 1$, $\angle CAB$, $\angle BAC$ y si el vértice no es compartido con otro ángulo puede identificarse como $\angle A$.

En Geometría usualmente la medida de un ángulo se expresa en grados sexagesimales. Un círculo tiene 360 grados, así un grado (1º) es el ángulo formado por $\frac{1}{360}$ parte de un círculo. Un grado se divide en 60 minutos y un minuto se divide en 60 segundos.

$$1^{\circ} = 60'$$
$$1' = 60''$$

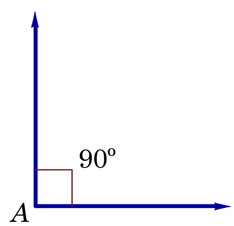
Ángulo agudo

Es un ángulo cuya medida es mayor que cero y menor de 90º. Por ejemplo el ángulo A de la figura siguiente tiene una medida de 50º, es decir $\angle A = 50^{\circ}$



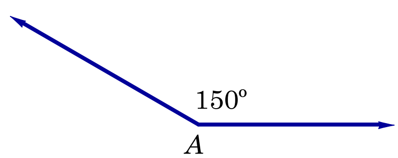
Ángulo recto

Es un ángulo cuya medida es 90º y usualmente se representa con una pequeña escuadra en el vértice del ángulo.



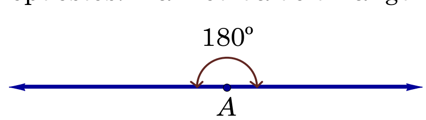
Ángulo obtuso

Es un ángulo cuya medida es mayor de 90º pero menor que 180º, en la figura siguiente se muestra un ángulo obtuso de 150º



Ángulo llano

Es un ángulo cuyos lados son rayos opuestos. La medida de un ángulo llano es 180º



Postulados y Teoremas

El estudio formal de la Geometría requiere el uso de postulados, teoremas y demostraciones. Los postulados son enunciados que se aceptan como verdaderos y ellos no pueden demostrarse mientras que los teoremas son proposiciones derivadas de los postulados y pueden ser demostradas, aunque en muchos casos las demostraciones son muy complicadas. En este curso se presentan únicamente los postulados y teoremas que se consideran necesarios para la solución de problemas geométricos.

SIETE POSTULADOS IMPORTANTES

1. Una recta contiene cuando menos dos puntos; un plano contiene cuando menos tres puntos, no todos en la misma recta; el espacio contiene cuando menos cuatro puntos, no todos en el mismo plano.
2. Existe una recta y sólo una que pasa por dos puntos.
3. Existe un plano y sólo uno que pasa por tres puntos no están en una sola recta.
4. Si dos puntos están en un plano, entonces la recta que los contiene se encuentra también en el mismo plano.
5. Si dos planos diferentes se intersecan, su intersección es una recta.
6. Entre dos puntos existe una distancia, y sólo una.
7. A cada ángulo le corresponde un número real único mayor o igual a 0° y menor o igual a 180°.

Relaciones entre puntos rectas y ángulos

Cuando se combinan puntos rectas, segmentos y ángulos, se obtienen figuras geométricas; las cuales dan origen a definiciones y teoremas que relacionan los elementos geométricos. A continuación se presentan algunas definiciones y teoremas importantes.

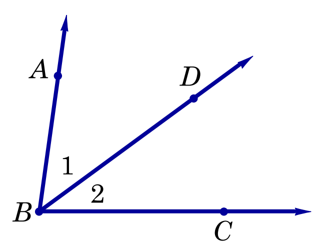
Puntos sobre una recta

Si tres puntos A, B y C se encuentran sobre una recta, y el punto B está entre los puntos A y C, entonces las distancias entre ellos se relacionan de la siguiente forma

$$AB + BC = AC$$

Ángulos adyacentes

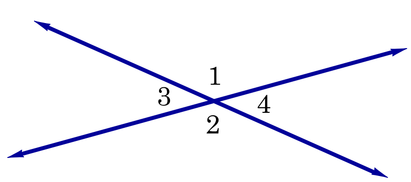
Son dos ángulos que están en el mismo plano, tienen el mismo vértice y un lado en común, pero no tienen puntos interiores comunes. La suma de las medidas de los ángulos adyacentes da como resultado la medida del ángulo mayor formado.



$$\angle ABC = \angle 1 + \angle 2$$

Ángulos opuestos por el vértice

Si dos rectas se intersecan en un punto, los ángulos opuestos por el vértice son iguales



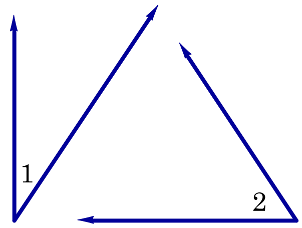
$\angle 1$ y $\angle 2$ son opuestos por el vértice, entonces $\angle 1 = \angle 2$

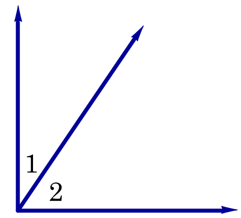
$\angle 3$ y $\angle 4$ son opuestos por el vértice, entonces $\angle 3 = \angle 4$

Ángulos complementarios

Si la suma de las medidas de dos ángulos es 90º, los ángulos se llaman complementarios. En las dos figuras que se muestran $\angle 1$ y $\angle 2$ son complementarios, entonces

$$\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$$

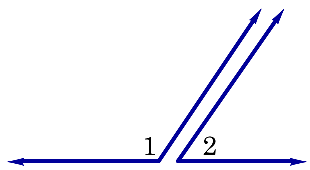


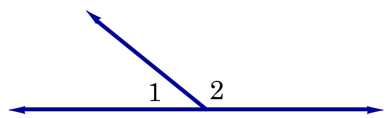


Ángulos suplementarios

Si la suma de las medidas de dos ángulos es 180º, los ángulos son suplementarios, en las dos figuras mostradas $\angle 1$ y $\angle 2$ son suplementarios, entonces

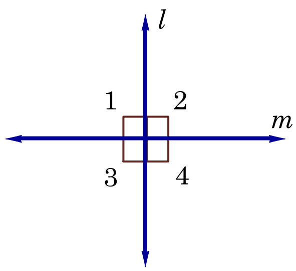
$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$$





Rectas perpendiculares

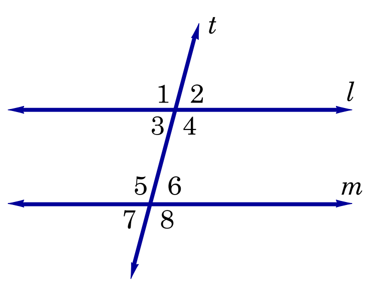
Si dos rectas se intersecan formando ángulos rectos, las rectas son perpendiculares y la medida de los cuatro ángulos formados es 90º. En la figura las rectas l y m son perpendiculares.



$$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = 90^\circ$$

Rectas paralelas

Dos rectas son paralelas cuando están en un mismo plano y no tienen ningún punto en común. Cuando dos rectas paralelas son intersecadas por una transversal, se forman 8 ángulos como se muestra en la figura siguiente



Puede observarse que se forman cuatro pares de ángulos que son opuestos por el vértice así como ocho pares de ángulos que comparten el mismo vértice y son suplementarios. Adicionalmente se definen los ángulos siguientes

Ángulos correspondientes

Los ángulos situados del mismo lado de la transversal, uno externo y el otro externo pero con vértice diferente se llaman ángulos correspondientes; hay cuatro pares de ángulos correspondientes. Los ángulos correspondientes son iguales, es decir

$$\angle 1 = \angle 5, \qquad \angle 2 = \angle 6, \qquad \angle 3 = \angle 7, \qquad \angle 4 = \angle 8$$

Ángulos alternos internos

Los ángulos situados dentro de las paralelas, en lados opuestos de la transversal y con vértice diferente se llaman ángulos alternos internos; hay dos pares de ángulos alternos internos. Los ángulos alternos internos son iguales, es decir

$$\angle 3 = \angle 6, \qquad \angle 4 = \angle 5$$

Ángulos alternos externos

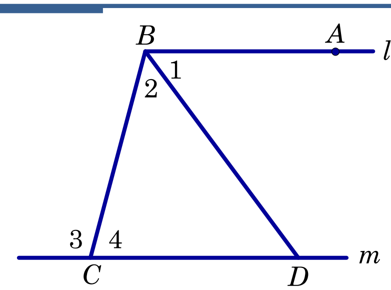
Los ángulos situados fuera de las paralelas, en lados opuestos de la transversal y con vértice diferente se llaman ángulos alternos externos; hay dos pares de ángulos alternos externos. Los ángulos alternos externos son iguales, es decir

$$\angle 1 = \angle 8, \qquad \angle 2 = \angle 7$$

Ejemplo 1: Calculando ángulos entre paralelas

Si las rectas l y m son paralelas y $\angle 1 = \angle 2 = 55^\circ$,

Calcule la medida de $\angle 4$



Solución

Para resolver éste problema se utilizarán las propiedades de ángulos establecidas en las secciones anteriores.

Calculando el ángulo $\angle ABC$ cuya medida es la suma de dos ángulos adyacentes

$$\angle ABC = \angle 1 + \angle 2 = 55^\circ + 55^\circ = 110^\circ$$

Ahora se puede calcular el $\angle 3$ ya que es igual al $\angle ABC$ pues son alternos internos entre paralelas

$$\angle 3 = \angle ABC = 110^\circ$$

Finalmente, el $\angle 3$ y el $\angle 4$ son ángulos suplementarios, es decir que suman 180º

$$\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$$

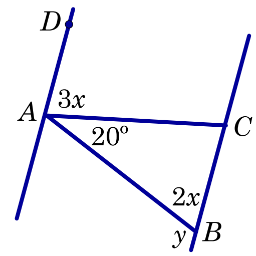
$$\angle 4 = 180^\circ - \angle 3$$

$$= 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

Entonces la medida del $\angle 4$ es 70º

Ejemplo 2: Calculando ángulos expresados en términos de variables

Si los segmentos AD y CB son paralelos,
Encuentre los valores de x y y.



Solución

La medida del ángulo $\angle DAB = 3x + 20$ pues se obtiene sumando dos ángulos adyacentes. Como el ángulo $\angle DAB$ y el ángulo cuya medida es y son alternos internos tienen la misma medida se obtiene que

$$3x + 20 = y$$

Por otro lado el $\angle 2x$ y el $\angle y$ son suplementarios, entonces sus medidas suman 180º, es decir

$$2x + y = 180$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones por sustitución se obtiene

$$\begin{aligned} 2x + y &= 180 \\ 2x + (3x + 20) &= 180 \\ 5x &= 150 \\ x &= 32 \end{aligned}$$

Sustituyendo $x = 32$ para encontrar el valor de y

$$\begin{aligned} y &= 3x + 20 \\ y &= 3(32) + 20 \\ y &= 116 \end{aligned}$$

De donde los valores buscados son $x = 32$ y $y = 116$

Ejemplo 3: Calculando ángulos expresados en términos de variables

La medida de un ángulo agudo es tal que su ángulo complementario y su suplementario están en razón de 3 a 7. Encontrar la medida del ángulo.

Solución

Sea x la medida del ángulo buscado, entonces su complemento es $90 - x$ y su suplemento es $180 - x$. Como la razón entre su complemento y su suplemento es $\frac{3}{7}$, se obtiene la ecuación

$$\frac{90 - x}{180 - x} = \frac{3}{7}$$

Resolviendo la ecuación anterior

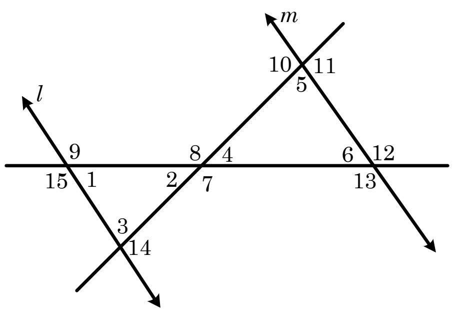
$$7(90 - x) = 3(180 - x)$$

$$630 - 7x = 540 - 3x$$
$$3x - 7x = 540 - 630$$
$$-4x = -90$$
$$x = 22.5$$

La medida del ángulo agudo es 22.5º o bien 22º 30´.

Ejercicios de la sección 2.1

Para resolver los ejercicios 1 a 10, utilice la figura siguiente, donde $l \parallel m$.



1. Indique que pares de ángulos son opuestos por el vértice.

2. Indique que pares de ángulos son alternos internos entre paralelas.

3. Indique que pares de ángulos son adyacentes y suplementarios.

4. Indique que ángulos son agudos.

5. Indique que ángulos son obtusos.

6. Indique que pares ángulos son correspondientes entre paralelas.

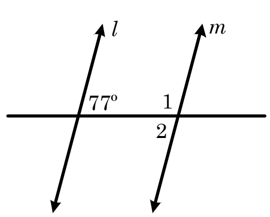
7. Indique que pares de ángulos son alternos externos entre paralelas.

8. Indique que pares de ángulos son suplementarios y no comparten el mismo vértice.

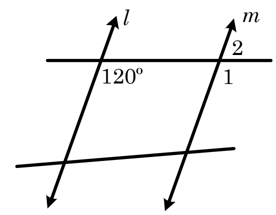
9. Si $\angle 1 = 60^\circ$. Calcule la medida del $\angle 6$

10. Si $\angle 3 = 80^\circ$. Calcule la medida del $\angle 11$

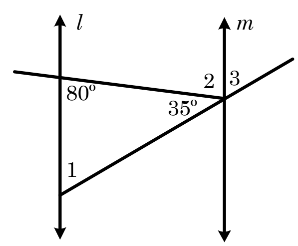
11. Si $l \parallel m$, encuentre $\angle 1$ y $\angle 2$.



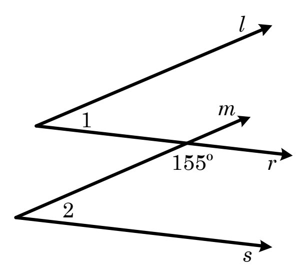
12. Si $l \parallel m$, Encuentre $\angle 1$ y $\angle 2$.



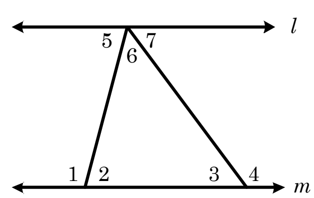
13. Si $l \parallel m$. Encuentre la medida de los otros ángulos numerados.



14. Si $l \parallel m$ y $r \parallel s$, encuentre $\angle 1$ y $\angle 2$.

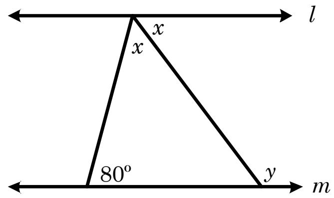


15. Si $l \parallel m$, $\angle 3 = n^\circ$ y $\angle 1 = 2n^\circ$. Encuentre la medida de los otros ángulos numerados en términos de n.

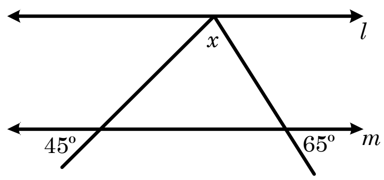


16. En la figura del problema anterior, encuentre x si $\angle 7 = (3x + 5)^\circ$ y $\angle 4 = (5x + 15)^\circ$

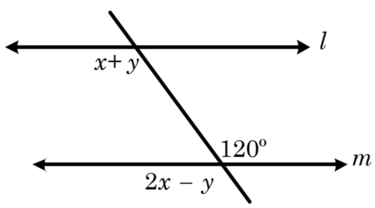
17. Si $l \parallel m$. Encuentre la medida de los ángulos x y y.



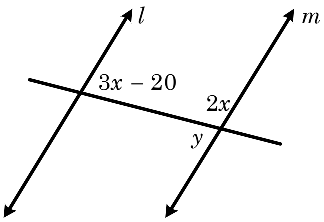
18. Si $l \parallel m$. Encuentre la medida del ángulo x.



19. Si $l \parallel m$. Encuentre los valores de x y de y.



20. Si $l \parallel m$. Encuentre los valores de x y de y.



21. Un ángulo mide $2x + 3y$. ¿Cuál es la diferencia entre las medidas de su complemento y de su suplemento?

22. La diferencia entre las medidas de dos ángulos complementarios es x. Exprese en términos de x la medida del ángulo mayor.

23. La suma de las medidas del complemento y el doble de la medida del suplemento de un ángulo es igual a 354. Encuentre la medida del ángulo.

24. Dos ángulos son tales que las medidas de sus complementos están en razón 3 a 2, mientras que las medidas de sus suplementos están en razón 9 a 8. Encuentre la medida de cada ángulo.

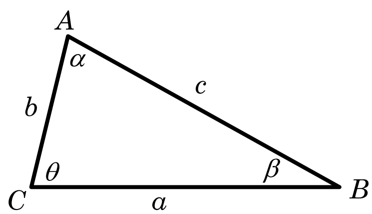
2.2 Triángulos

OBJETIVOS

- Calcular el área y el perímetro de triángulos.
- Obtener los lados y ángulos de triángulos utilizando las relaciones entre otros ángulos en figuras geométricas.
- Calcular los lados de un triángulo usando el teorema de Pitágoras y las propiedades de los triángulos semejantes.

Definición

Un **triángulo**, en Geometría, es un polígono formado por tres rectas que se cortan dos a dos en tres puntos, que no están alineados. Los puntos de intersección de las rectas se les llama **vértices** y los segmentos de recta que forman el triángulo se llaman lados. Cada par de lados en un triángulo forman un ángulo interno, por lo tanto un triángulo tiene 3 lados y 3 ángulos internos, como se muestra en la figura siguiente



Clasificación de triángulos

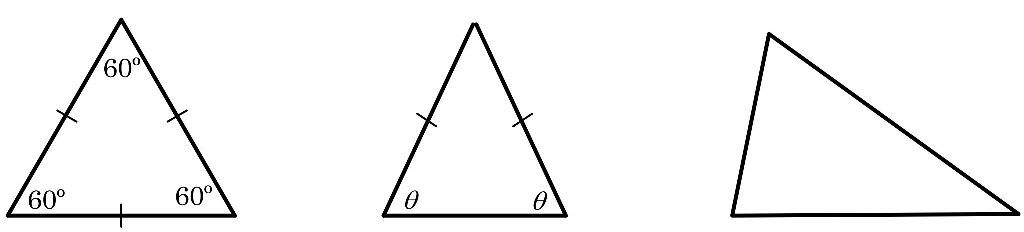
Por sus lados:

Por las longitudes de sus lados, los triángulos se clasifican como:

Triángulo equilátero: Es el triángulo que tiene 3 lados iguales y tres ángulos iguales, cada ángulo tiene una medida de 60º.

Triángulo isósceles: Es el que tiene dos lados iguales. Los ángulos opuestos a esos lados son iguales.

Triángulo escaleno: Es el que tiene sus tres lados con diferente longitud. En el triángulo escaleno los tres ángulos tienen diferente medida.



Triángulo equilátero Triángulo isósceles Triángulo escaleno

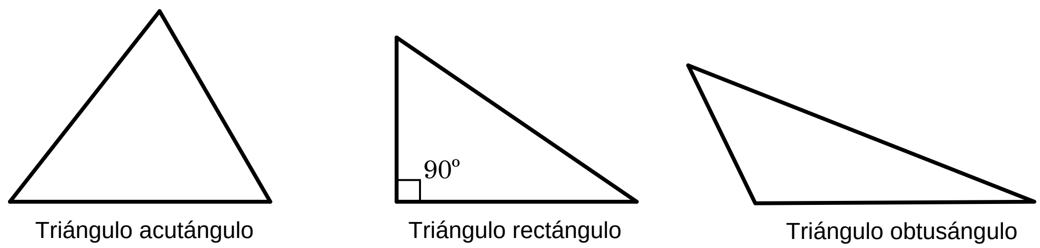
Por sus ángulos:

Por la medida de sus ángulos, los triángulos se clasifican como:

Triángulo acutángulo: Es el triángulo en el que todos sus ángulos internos son agudos.

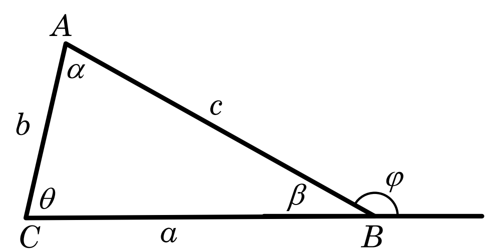
Triángulo rectángulo: Es el que tiene un ángulo recto, es decir su medida es 90º.

Triángulo obtusángulo: Es el que tiene un ángulo obtuso, es decir un ángulo que mide más de 90º y menos de 180º.



Propiedades generales del triángulo

La figura muestra un triángulo en donde los ángulos internos son α , β y θ . También se muestra el ángulo externo φ , el cual se forma al prolongar uno de los lados del triángulo.

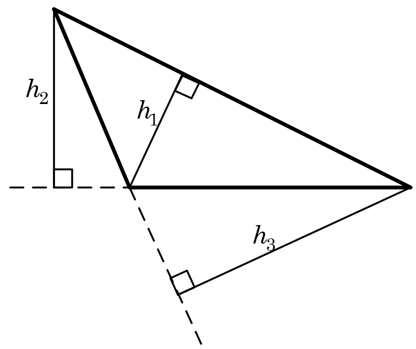


Cuatro de las propiedades generales de un triángulo son:

1. La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180º, es decir que
$$\alpha + \beta + \theta = 180^{\circ}$$
2. La medida de un ángulo externo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos opuestos, es decir
$$\varphi = \theta + \alpha$$
3. En un triángulo rectángulo los ángulos agudos son complementarios, es decir que sus medidas suman 90º.
4. La suma de las medidas de dos lados de un triángulo, siempre es mayor que la medida del otro lado, es decir
$$a + b > c, \qquad b + c > a, \qquad a + c > b$$

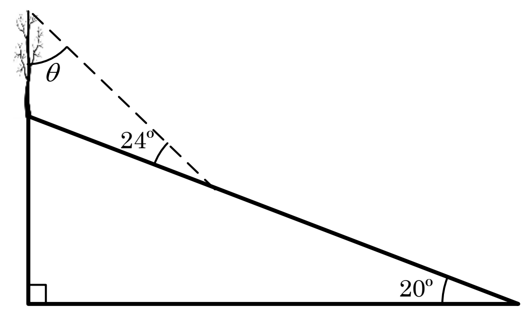
Altura de un triángulo:

Es el segmento que va desde uno de sus vértices a la recta que contiene al lado opuesto y que es perpendicular a dicha recta. Puesto que un triángulo tiene 3 vértices hay una altura correspondiente a cada uno, es decir que un triángulo tiene 3 alturas. En los triángulos obtusos para trazar dos de sus alturas es necesario prolongar los lados opuestos, como se muestra en la figura siguiente



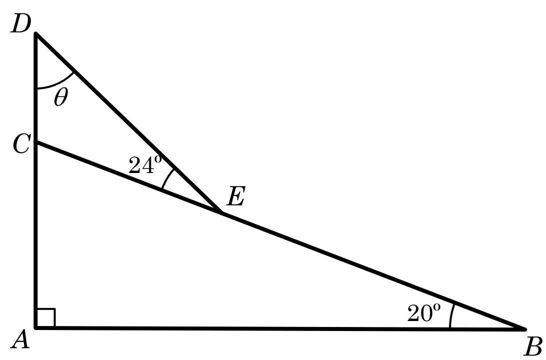
Ejemplo 1: Calculando ángulos en triángulos

En la figura se muestra un árbol que se encuentra en la parte superior de una colina que forma un ángulo de 20º con la horizontal. Un observador situado en un punto sobre la colina mide el ángulo formado entre la colina y la punta del árbol en 24º. Calcule la medida del ángulo θ.



Solución

Identificando los puntos importantes de la figura se tiene la figura geométrica siguiente



La medida del ángulo $\angle ACB$ es

$$\angle ACB = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$$

Ya que en un triángulo rectángulo, los ángulos agudos son complementarios. Como los ángulos $\angle ACB$ y $\angle DCE$ son suplementarios se obtiene

$$\begin{aligned}\angle DCE &= 180^\circ - \angle ACB \\ &= 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ\end{aligned}$$

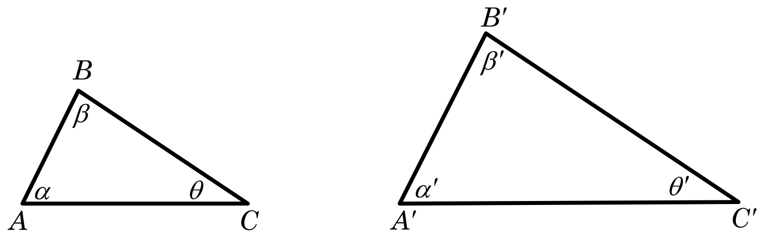
Finalmente, se puede obtener el ángulo θ ya que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º, entonces

$$\begin{aligned}\theta &= 180^\circ - 24^\circ - \angle DCE \\ &= 180^\circ - 24^\circ - 110^\circ \\ &= 46^\circ\end{aligned}$$

Triángulos semejantes

Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales y sus lados correspondientes son proporcionales, en la figura se muestran los triángulos semejantes ΔABC y $\Delta A'B'C'$. En forma simbólica para indicar que dos triángulos son semejantes se escribe

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$



El ángulo α es correspondiente con el ángulo α' y por lo tanto son iguales, es decir $\alpha = \alpha'$. El ángulo β es correspondiente con el ángulo β', entonces $\beta = \beta'$. Finalmente el ángulo θ es correspondiente con el ángulo θ', entonces $\theta = \theta'$.

Los lados correspondientes son los que están opuestos a los ángulos correspondientes, así tenemos que el lado AB es correspondiente con el lado $A'B'$, el lado BC es correspondiente con el lado $B'C'$ y el lado AC es correspondiente con el lado $A'C'$.

Puesto que los lados correspondientes son proporcionales, cuando dos triángulos son semejantes se pueden establecer las relaciones siguientes

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Para establecer que dos triángulos son semejantes y poder así utilizar las ecuaciones que se derivan de la proporcionalidad de sus lados se puede utilizar el postulado de los triángulos semejantes

POSTULADO SOBRE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Si dos ángulos de un triángulo son iguales a dos ángulos de otro triángulo, los triángulos son semejantes.

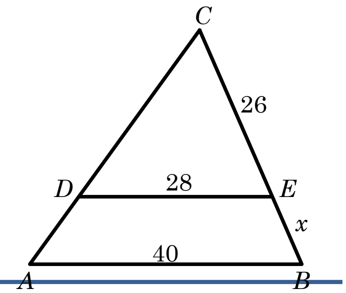
Adicionalmente en el cuadro siguiente se presentan algunos teoremas sobre semejanza, que pueden resultar de mucha utilidad en la solución de problemas. Estos teoremas se pueden demostrar utilizando el postulado de la semejanza de triángulos y las relaciones entre ángulos estudiadas en la sección anterior

TEOREMAS SOBRE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

1. Si dos triángulos son semejantes, la razón de sus perímetros es igual a la razón de cualquier par de lados correspondientes.
2. Si una recta es paralela a uno de los lados de un triángulo, la recta divide a los otros dos lados en segmentos que son proporcionales.
3. Si dos triángulos son semejantes, sus alturas correspondientes están en la misma razón que cualquier par de lados correspondientes.
4. En un triángulo rectángulo, la altura perpendicular a la hipotenusa forma dos triángulos que son semejantes entre sí y semejantes al triángulo dado.

Ejemplo 2: Semejanza de triángulos

Dado el triángulo ΔABC, donde $AB \parallel DE$, $AB = 40$, $DE = 28$ y $CE = 26$. Encuentre la longitud del segmento BE.



Solución

Al trazar una recta paralela a uno de los lados de un triángulo se forman dos triángulos semejantes ya que estos tienen un ángulo común y además los ángulos correspondientes entre paralelas son iguales, entonces los triángulos ΔABC y ΔDEC son semejantes. Utilizando la proporcionalidad entre sus lados se obtiene

$$\frac{EC}{BC} = \frac{DE}{AB}$$

Sustituyendo la información dada y despejando x

$$\frac{26}{26+x} = \frac{28}{40}$$

$$(26)(40) = 28(26+x)$$

$$\frac{(26)(40)}{28} = 26 + x$$

$$x = \frac{(26)(40)}{28} - 26 = \frac{260}{7} - 26$$

$$x = \frac{78}{7} \approx 11.14$$

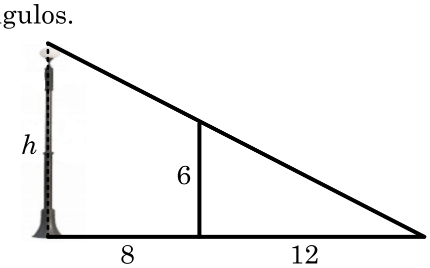
Respuesta: la longitud del segmento BE es aproximadamente 11.14 unidades.

Ejemplo 3: Altura de un poste de luz

Para determinar la altura de un poste de luz, una persona de 6 pies de altura se coloca a una distancia de 8 pies de la base del farol. Se mide que la longitud de la sombra que la persona proyecta sobre el suelo tiene 12 pies de largo. Determine la altura del poste.

Solución

La figura ilustra el problema. Puede observarse que se forman dos triángulos semejantes ya que tienen un ángulo común y además ambos tienen un ángulo de 90º pues son triángulos rectángulos.



Si h es la altura del triángulo, se establece la proporcionalidad entre la altura h del triángulo grande con la altura del triángulo pequeño y la base del triángulo grande (8+12), con la base del triángulo pequeño, obteniéndose la ecuación

$$\frac{h}{6} = \frac{8+12}{12}$$

Al despejar h se obtiene la altura del poste

$$h = \frac{(20)(6)}{12}$$
$$= 10$$

Respuesta: la altura del poste es de 10 pies

Teorema de Pitágoras

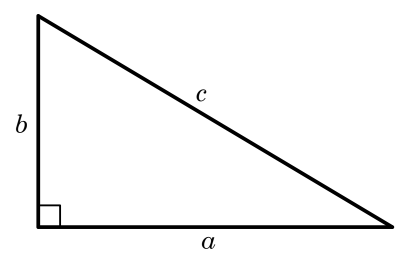
Junto con la proporcionalidad de los lados correspondientes en los triángulos semejantes, el Teorema de Pitágoras es una de las expresiones más utilizadas en la solución de problemas geométricos, éste teorema establece que

Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Si c es la hipotenusa, a y b son los catetos del triángulo, entonces

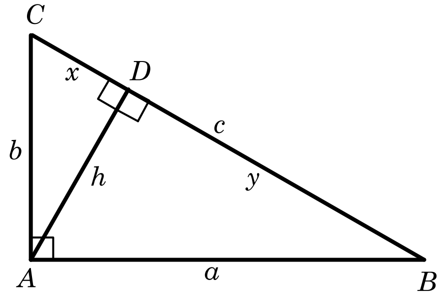
$$c^2 = a^2 + b^2$$



Demostración

Hay muchas maneras de demostrar el teorema de Pitágoras, una de ellas consiste en utilizar la semejanza de triángulos semejantes, que es la que se presenta aquí.

Al trazar la altura correspondiente a la hipotenusa, se forman dos nuevos triángulos, que son semejantes entre sí y que son semejantes al triángulo dado (véase teoremas de semejanza). Sea h la altura del triángulo dado, x y y los catetos de los triángulos formados, como se muestra en la figura



El triángulo ΔABC es semejante al triángulo ΔDBA. Estableciendo igualdad entre los cocientes de las hipotenusas con el cociente entre los catetos mayores se obtiene

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{y}$$

De donde se obtiene que $a^2 = cy$

En forma similar, el triángulo ΔABC es semejante al triángulo ΔDAC. Estableciendo igualdad entre los cocientes de las hipotenusas con el cociente entre los catetos mayores se obtiene

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CD}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{x}$$

De donde se obtiene que $b^2 = cx$

Sumando las expresiones obtenidas para a^2 y b^2 se tiene

$$a^2 + b^2 = cy + cx$$

$$c(y + x)$$

Como $c = x + y$, se puede sustituir, c por $y + x$ para completar la demostración del teorema

$$a^2 + b^2 = c(y + x)$$

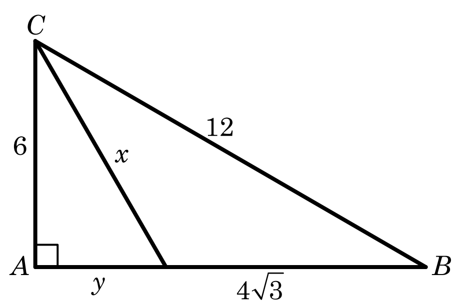
$$a^2 + b^2 = c(c)$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Quedando así demostrado el teorema.

Ejemplo 4: Utilizando el teorema de Pitágoras

La figura muestra un triángulo rectángulo con hipotenusa de longitud 12 cm y uno de sus catetos con longitud 6 cm. Encuentre x y y.



Solución

La longitud del cateto AB puede expresarse como $AB = y + 4\sqrt{3}$. Aplicando el teorema de Pitágoras se tiene

$$6^2 + \left(y + 4\sqrt{3}\right)^2 = 12^2$$

Resolviendo la ecuación para encontrar y

$$\left(y + 4\sqrt{3}\right)^2 = 144 - 36$$

$$y + 4\sqrt{3} = \pm\sqrt{108}$$

$$y = \pm 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$$

Descartando la raíz negativa pues el valor de y debe ser positivo.

$$y = 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

Para encontrar x se aplica nuevamente el teorema de Pitágoras, ahora en el triángulo rectángulo pequeño

$$6^2 + y^2 = x^2$$

Sustituyendo $y = 2\sqrt{3}$ y despejando x se tiene

$$36 + (2\sqrt{3})^2 = x^2$$

$$x^2 = 36 + 4(3)$$

$$x^2 = 48$$

$$x = \pm\sqrt{48}$$

Descartando nuevamente la raíz negativa se tiene que

$$x = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

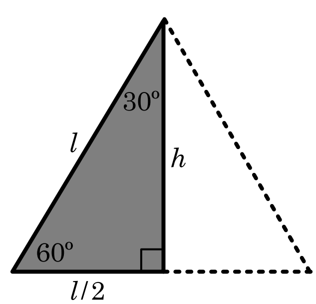
Respuesta: $x = 4\sqrt{3}$ y $y = 2\sqrt{3}$

Triángulos especiales

Dos de los triángulos más utilizados en geometría son el triángulo rectángulo que tiene ángulos agudos con medidas de 30º y 60º y el triángulo rectángulo isósceles que tiene dos ángulos agudos iguales de 45º.

Triángulo 30º- 60º- 90º

En la figura se muestra el triángulo.



Nótese que al juntar dos triángulos 30-60-90 se forma un triángulo equilátero, que tiene sus tres lados iguales, por lo tanto en el triángulo 30-60-90 si la hipotenusa tiene longitud l, la base tiene longitud $l/2$. Para determinar la altura se utiliza el teorema de Pitágoras.

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 = l^2$$

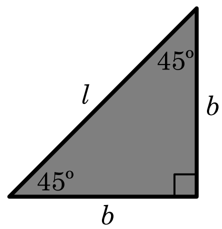
$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{4l^2 - l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

Triángulo 45º- 45º- 90º

La figura muestra un triángulo rectángulo isósceles



Puesto que el triángulo es isósceles, tiene dos catetos iguales de longitud b, para expresar la longitud de los catetos en términos de l se utiliza el teorema de Pitágoras

$$b^2 + b^2 = l^2$$

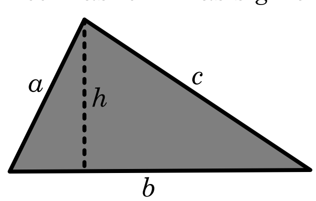
$$2b^2 = l^2$$

$$b^2 = \frac{l^2}{2}$$

$$b = \sqrt{\frac{l^2}{2}} = \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}l$$

Área y perímetro del triángulo

En un triángulo de lados a, b, c y altura h, donde h corresponde al lado de longitud b, como se indica en la figura. El área y el perímetro se calculan con las fórmulas siguientes

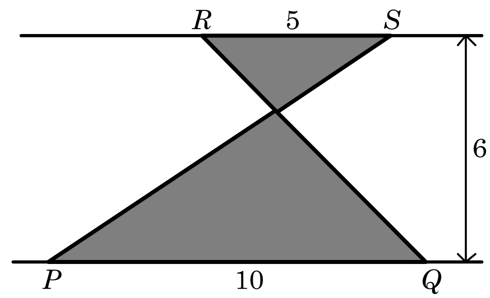


$$\text{Area} = \frac{1}{2}bh$$

$$\text{Perímetro} = a + b + c$$

Ejemplo 5: Calculando áreas de triángulos

En la figura $RS \parallel PQ$. Encuentre el área sombreada.

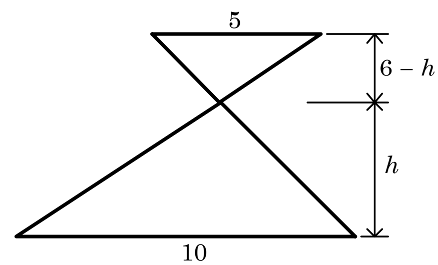


Solución

Si las rectas son paralelas, los triángulos son semejantes ya que tienen dos de sus ángulos correspondientes iguales pues son ángulos alternos internos entre paralelas. Si h es la altura del triángulo de base 10, la altura del triángulo de base 5 es $6-h$

Por semejanza de triángulos se tiene

$$\frac{10}{5} = \frac{h}{6-h}$$
$$2(6-h) = h$$
$$12-2h = h$$
$$h = 4$$



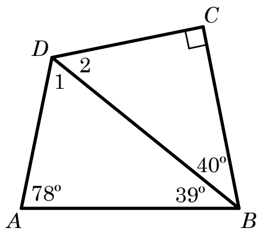
Entonces el triángulo de base 10 tiene altura 4 y el triángulo pequeño tiene altura 2. Al área total es la suma de las áreas de los dos triángulos

$$A = A_1 + A_2$$
$$= \frac{1}{2}(10)(4) + \frac{1}{2}(5)(2) = 20 + 5$$
$$A = 25$$

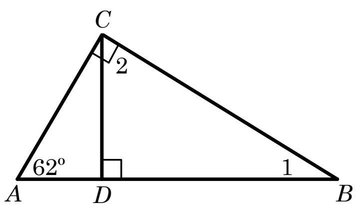
Respuesta: El área sombreada es 25 unidades cuadradas.

Ejercicios de la sección 2.2

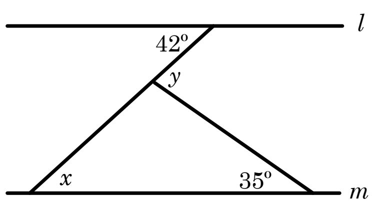
1. Encuentre la medida de los ángulos 1 y 2.



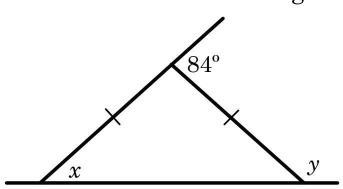
2. Encuentre la medida de los ángulos 1 y 2.



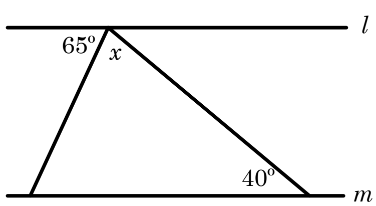
3. Si $l \parallel m$, encuentre la medida de los ángulos x y y.



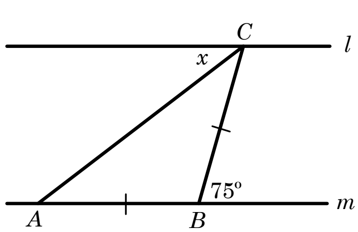
4. Encuentre la medida de los ángulos x y y.



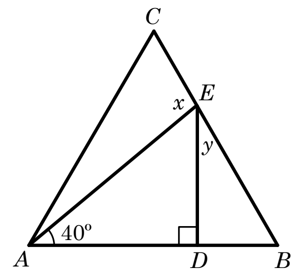
5. Si $l \parallel m$, encuentre la medida del ángulo x.



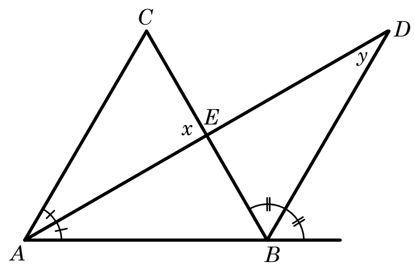
6. Si $l \parallel m$ y $AB = CD$, encuentre la medida del ángulo x.



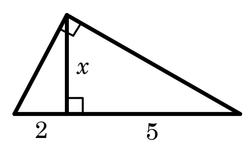
7. Si ΔABC es equilátero, encuentre la medida de los ángulos x y y.



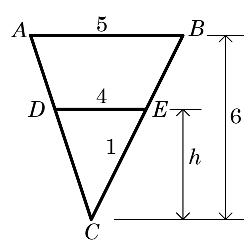
8. Si ΔABC es equilátero, encuentre la medida de los ángulos x y y.



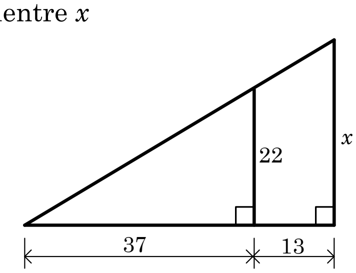
9. Encuentre x



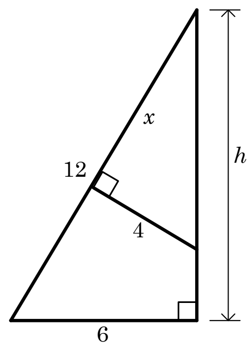
10. El segmento AB es paralelo al segmento DE. Calcula h.



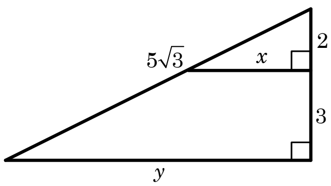
11. Encuentre x



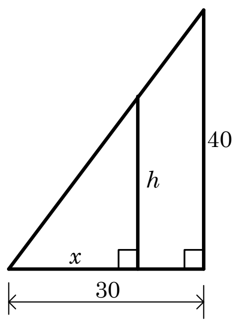
12. Encuentre h y x.



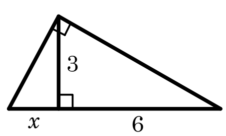
13. Encuentre x y y.



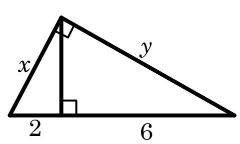
14. Exprese h en términos de x.



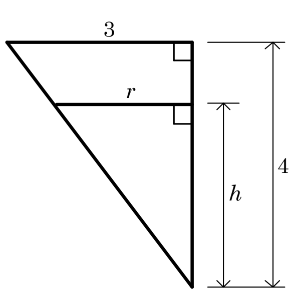
15. Encuentre x



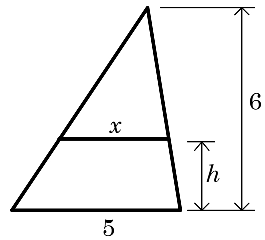
16. Encuentre x y y.



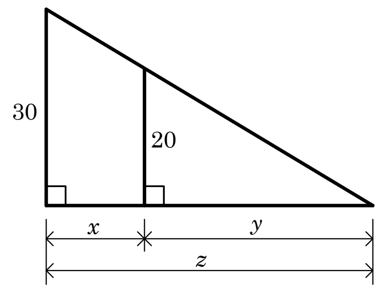
17. Exprese h en términos de r.



18. Exprese h en términos de x.



19. Exprese y en términos de x.



20. En la figura del problema anterior. Exprese z en términos de x.

21. Una persona camina 7 km hacia el norte, luego 6 km hacia el este y finalmente 4 km hacia el norte. ¿A qué distancia está del punto de partida?

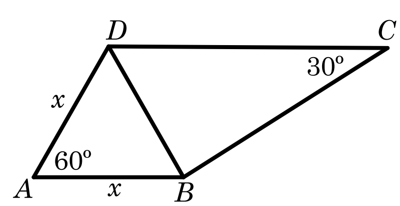
22. Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 6 cm. Si la base del triángulo mide 10 cm. Encontrar la altura trazada a la base.

23. Encontrar la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 6 cm.

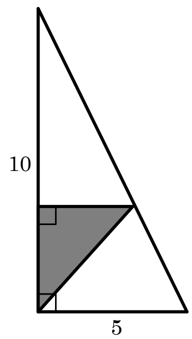
24. La hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles mide 8 cm. Encontrar la medida de los catetos.

25. El lado de un triángulo equilátero es igual a la altura de otro triángulo equilátero. ¿En qué razón están el perímetro del triángulo mayor y el perímetro del triángulo menor?

26. Si $AB \parallel CD$, expresar la longitud del lado DC en términos de x.



27. Se inscribe un triángulo rectángulo isósceles dentro de un triángulo rectángulo de base 5 cm y altura 10 cm. Encuentre el área sombreada.



28. Un triángulo isósceles tiene lados iguales de 8 cm y base de 6 cm. Se traza una paralela a la base a una distancia de 5 cm de ella.

(a) Calcule el área de los triángulos formados.

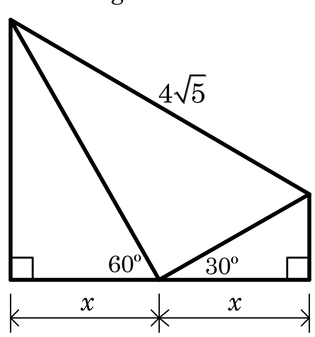
(b) Calcule la razón del perímetro del triángulo menor con la del triángulo mayor.

(c) Calcule la razón en la que se encuentra el área del triángulo mayor con la del menor.

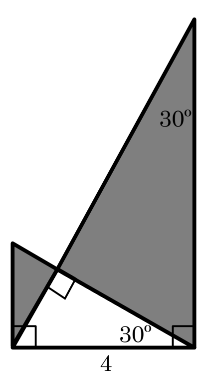
29. Los lados de un triángulo miden 10, 17 y 21 cm. Encontrar la altura trazada al lado de 21 cm. (Sugerencia: use dos variables)

30. Encontrar el perímetro de un triángulo equilátero de área $18\sqrt{3}$.

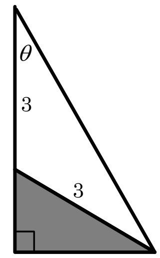
31. Encuentre la longitud x



32. Encuentre el área sombreada

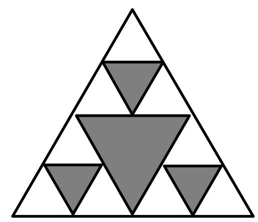


33. Si la medida del ángulo θ es 30º, calcule el área sombreada

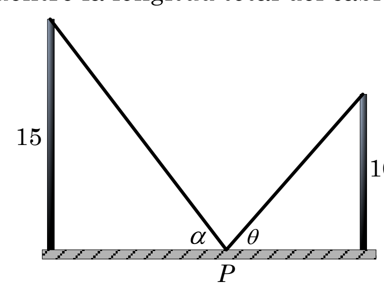


34. Dado un triángulo equilátero de lado 6 cm, se traza un segmento paralelo a la base y a una altura de 4 cm. Encuentre en que razón se encuentran el área del triángulo pequeño que se ha formado con respecto al área del triángulo dado.

35. Si el lado del triángulo equilátero más grande mide 4 cm y todos los triángulos inscritos son equiláteros, calcule el área sombreada



36. La figura muestra dos postes de alturas 15 y 10 metros separados entre sí por una distancia de 20 metros. El cable que sostiene los postes está anclado al suelo en el punto P. Si $\alpha = \theta$, encuentre la longitud total del cable.



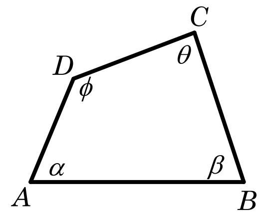
2.3 Cuadriláteros

OBJETIVOS

- Calcular el área y el perímetro del cuadrado, rectángulo, paralelogramo, rombo y trapecio.
- Resolver problemas en los cuales se involucran cuadriláteros y triángulos.
- Calcular áreas sombreadas en figuras geométricas que contienen triángulos y cuadriláteros.

Definición

Un **cuadrilátero** es una figura plana, que tiene cuatro lados, cuatro vértices y cuatro ángulos internos. Dos lados consecutivos se intersectan en un vértice formando así un ángulo interno.



Una propiedad de todos los cuadriláteros es que la suma de sus ángulos internos es igual a 360º, es decir que

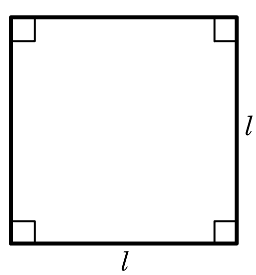
$$\alpha + \beta + \theta + \phi = 360^\circ$$

La propiedad anterior se demuestra fácilmente ya que al trazar un segmento que pase por dos vértices opuestos se forman dos triángulos y como ya se ha establecido en la sección anterior la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º.

Los cuadriláteros que serán estudiados en ésta sección son el cuadrado, el rectángulo, el paralelogramo, el trapecio y el rombo.

El cuadrado

El cuadrado es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados iguales, los cuatro ángulos iguales con medida de 90º y sus lados opuestos paralelos



Las fórmulas para calcular el área y el perímetro de un cuadrado son

$$A = l^2$$

$$P = 4l$$

En algunos problemas puede ser útil calcular la diagonal d del cuadrado. Al utilizar el teorema de Pitágoras

$$d^2 = l^2 + l^2$$
$$= 2l^2$$

Extrayendo raíz cuadrada para despejar la diagonal se tiene

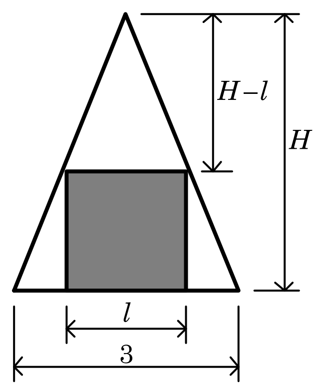
$$d = \sqrt{2l^2}$$
$$d = \sqrt{2}\, l$$

Ejemplo 1: Un cuadrado inscrito en un triángulo

Se inscribe un cuadrado dentro de un triángulo isósceles de 3 cm en la base y lados iguales de 4 cm. El cuadrado está inscrito de tal forma que uno de sus lados está sobre la base del triángulo. Calcule el área y el perímetro del cuadrado.

Solución

La figura muestra el cuadrado inscrito en el triángulo, en donde H es la altura del triángulo y l es el lado del cuadrado



La altura H del triángulo dado se calcula utilizando el teorema de Pitágoras

$$H^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4^2$$
$$H^2 = 16 - \frac{9}{4} = \frac{55}{4}$$
$$H = \sqrt{\frac{55}{4}} = \frac{\sqrt{55}}{2}$$

Para calcular el lado del cuadrado note que el triángulo de base l y altura $H - l$, es semejante al triángulo de base 3 y altura H. Utilizando proporcionalidad entre sus lados se tiene

$$\frac{H - l}{H} = \frac{l}{3}$$
$$3(H - l) = Hl$$
$$3H - 3l = Hl$$
$$3H = 3l + Hl$$

Factorizando l en el lado derecho y despejando l

$$3H = l(3 + H)$$
$$l = \frac{3H}{3 + H}$$

Sustituyendo $H = \dfrac{\sqrt{55}}{2}$ se obtiene que

$$l = \frac{3\left(\frac{\sqrt{55}}{2}\right)}{3 + \frac{\sqrt{55}}{2}} = \frac{3\left(\frac{\sqrt{55}}{2}\right)}{\frac{6+\sqrt{55}}{2}} = \frac{3\sqrt{55}}{6+\sqrt{55}}$$

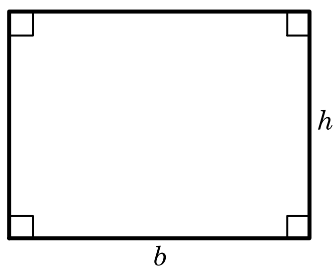
Ahora ya se puede calcular el área y el perímetro del cuadrado

$$A = l^2 = \left(\frac{3\sqrt{55}}{6+\sqrt{55}}\right)^2 = \frac{9(55)}{\left(6+\sqrt{55}\right)^2} = \frac{495}{36+12\sqrt{55}+55} = \frac{495}{91+12\sqrt{55}} \text{ cm}^2$$

$$P = 4l = 4\left(\frac{3\sqrt{55}}{6+\sqrt{55}}\right) = \frac{12\sqrt{55}}{6+\sqrt{55}} \text{ cm}$$

El rectángulo

Es un cuadrilátero que tiene sus lados opuestos iguales y paralelos y todos sus ángulos internos miden 90º. En la figura siguiente se muestra un rectángulo de base b y altura h.



Las fórmulas para calcular el área y el perímetro de un rectángulo son

$$A = bh$$

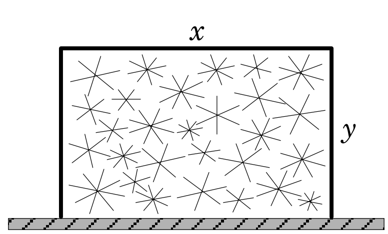
$$P = 2b + 2h$$

Ejemplo 2: Cercado de un terreno

Un agricultor quiere construir una hortaliza rectangular de 112 metros cuadrados para sembrar lechugas. Si dispone de 30 metros lineales de material de cercado y quiere aprovechar una pared ya construida como uno de los lados. Determine las dimensiones que debe tener la hortaliza.

Solución

Sean x y y las dimensiones de la hortaliza, como se muestra en la figura siguiente



Como el terreno es rectangular se tiene que el área es

$$A = xy$$

$$112 = xy$$

Los 30 metros de material de cercado serán utilizados para 3 de los lados del rectángulo pues donde se encuentra la pared no será necesario cercar, entonces

$$x + 2y = 30$$

Despejando x de la última ecuación se obtiene

$$x = 30 - 2y$$

Sustituyendo en la primera ecuación y despejando y

$$112 = (30 - 2y)y$$

$$2y^2 - 30y + 112 = 0$$

$$y^2 - 15y + 56 = 0$$

$$(y - 8)(y - 7) = 0$$

Las soluciones de la ecuación son $y = 8$ y $y = 7$.

Si $y = 8$ se obtiene que $x = 30 - 2(8) = 14$

Si $y = 7$ se obtiene que $x = 30 - 2(7) = 16$

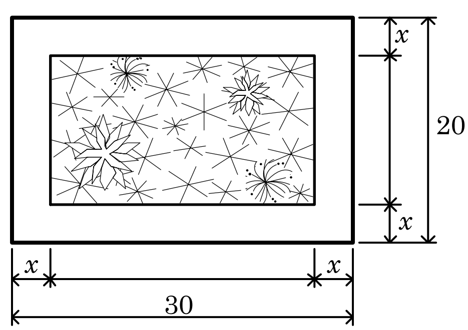
Respuesta: Se puede construir la hortaliza de dos formas: largo 16 m y ancho 7 m o bien largo 14 m y ancho 8 m.

Ejemplo 3: Construcción de un jardín

En un terreno rectangular de 30 pies de largo por 20 pies de ancho se quiere construir un jardín rectangular que tenga un área de 336 pies^2. El jardín debe estar rodeado de un corredor de ancho constante para que se pueda caminar alrededor del mismo. Determine el ancho del corredor.

Solución

Sea x el ancho del corredor rectangular, como se muestra en la figura



El área del jardín puede expresarse en términos de x ya que el largo es $30 - 2x$ y el ancho es $20 - 2x$. Como el área del jardín se sabe que es 336 pies^2 se obtiene la ecuación siguiente

$$(30 - 2x)(20 - 2x) = 336$$

Resolviendo la ecuación anterior se obtendrá el ancho del corredor. Desarrollando el producto e igualando a cero

$$600 - 60x - 40x + 4x^2 = 336$$

$$4x^2 - 100x + 264 = 0$$

Dividiendo ambos lados entre 4 y factorizando el lado izquierdo

$$x^2 - 25x + 66 = 0$$
$$(x - 22)(x - 3) = 0$$

De donde las soluciones de la ecuación son $x = 22$ y $x = 3$.

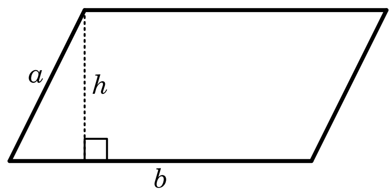
El ancho del corredor no puede ser 22 pies ya que se sobrepasan las dimensiones del patio.

Respuesta: El ancho del jardín es de 3 pies.

El paralelogramo y el rombo

El paralelogramo

Es un cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos y sus lados opuestos iguales. En la figura siguiente se muestra un paralelogramo de lados a y b, y altura h.

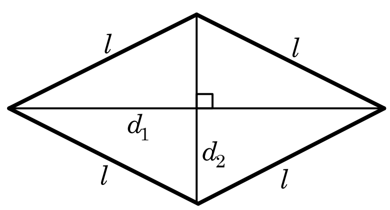


El área y el perímetro del paralelogramo son

$$A = bh$$
$$P = 2a + 2b$$

El rombo

El rombo es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados iguales y sus lados opuestos paralelos. En un rombo es usual referirse a sus diagonales ya que éstas son perpendiculares entre sí. La figura muestra un rombo de lados l y diagonales d_1 y d_2.



El área y el perímetro del rombo son

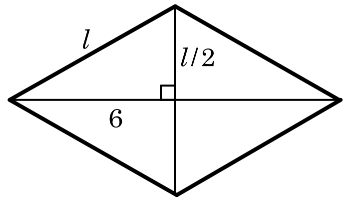
$$A = \frac{d_1\, d_2}{2}$$
$$P = 4l$$

Ejemplo 4: Área de un rombo

La diagonal menor de un rombo mide lo mismo que sus lados y la diagonal mayor mide 12 cm. Encontrar el área del rombo

Solución

Si la diagonal menor tiene la misma longitud que los lados y la diagonal mayor $d_1 = 12$ entonces dos lados consecutivos y la diagonal menor forman un triángulo equilátero como se muestra en la figura



La altura del triángulo equilátero mide 6 cm ya que es la mitad de la diagonal mayor. Utilizando el teorema de Pitágoras para calcular l se tiene

$$l^2 = 6^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$l^2 - \frac{l^2}{4} = 36$$

$$\frac{3l^2}{4} = 36$$

$$l = \sqrt{\frac{(36)(4)}{3}} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

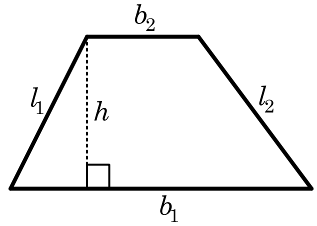
La longitud de la diagonal menor es $d_2 = l = 4\sqrt{3}$

Ahora se calcula el área del rombo pues se conoce la longitud de las dos diagonales

$$A = \frac{d_1 d_2}{2} = \frac{(12)(4\sqrt{3})}{2} = 24\sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$

El Trapecio

Es un cuadrilátero que tiene dos de sus lados opuestos paralelos y los otros lados opuestos no paralelos. A los lados paralelos usualmente se les llama base 1(b_1) y base 2 (b_2). Si los lados no paralelos tienen la misma longitud al trapecio se le llama isósceles. La altura h del trapecio es el segmento perpendicular a los lados paralelos



Las ecuaciones para calcular el área y el perímetro del trapecio son

$$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$

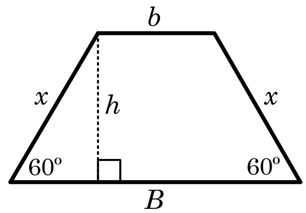
$$P = b_1 + b_2 + l_1 + l_2$$

Ejemplo 5: Dimensiones de un trapecio

Un trapecio isósceles tiene área de $18\sqrt{3}$ cm² y perímetro de 24 cm. Si dos de los ángulos iguales tienen medida de 60º, calcule las dimensiones de los lados y la altura del trapecio

Solución

Sea x la longitud de los lados iguales, B y b las longitudes de los lados paralelos y h la altura del trapecio como se muestra en la figura

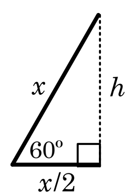


Como se conoce el área y el perímetro del trapecio, se puede escribir las ecuaciones

$$A = \frac{1}{2}h(B + b) = 18\sqrt{3}$$

$$P = B + b + 2x = 24$$

Es claro que solamente con éstas dos ecuaciones no se puede resolver el problema pues hay cuatro incógnitas. Observe que utilizando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo que se muestra a continuación se puede expresar B y h en términos de x y b.



El cateto adyacente es igual a $x/2$ pues el triángulo es la mitad de un triángulo equilátero. Por el teorema de Pitágoras

$$h^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{3x^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

La base B puede expresarse como

$$B = b + 2\left(\frac{x}{2}\right) = b + x$$

Reemplazando las expresiones obtenidas en la ecuación del área

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)(b + x + b) = 18\sqrt{3}$$

$$x(2b + x) = 72$$

Reemplazando las expresiones en la fórmula del perímetro

$$(b + x) + b + 2x = 24$$

$$2b + 3x = 24$$

Despejando b de la última ecuación

$$2b = 24 - 3x$$

$$b = \frac{24 - 3x}{2}$$

Sustituyendo b en la ecuación $x(2b + x) = 72$ se obtiene una ecuación de una variable

$$x\left(2\left(\frac{24 - 3x}{2}\right) + x\right) = 72$$

Resolviendo la ecuación se encuentra el valor de x

$$x(24 - 3x + x) = 72$$

$$24x - 2x^2 - 72 = 0$$

$$x^2 - 12x + 36 = 0$$

$$(x - 6)^2 = 0$$

$$x = 6$$

Si $x = 6$

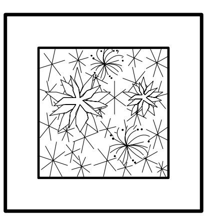
$$b = \frac{24 - 3x}{2} = \frac{24 - 3(6)}{2} = 3$$

$$B = b + x = 3 + 6 = 9$$

Por lo tanto las dimensiones del trapecio son base mayor 9 cm, base menor 3 cm y lados iguales 6 cm.

Ejercicios de la sección 2.3

1. Encuentre el lado de un cuadrado que tenga cuatro veces el área de un cuadrado de lado 2 cm.
2. Encuentre el lado de un cuadrado que tenga cuatro veces el perímetro de un cuadrado de lado 2 cm.
3. Una foto cuadrada de 6 pulgadas por lado se ha de colocar en un marco cuadrado como se muestra en la figura. Si el área que rodea la fotografía es igual al área de la foto. Calcule el lado del marco.



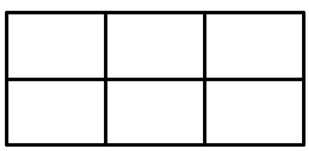
4. La suma de los perímetros de dos cuadrados es 60 cm y la suma de sus áreas es 125 cm². Determine las dimensiones de cada cuadrado.
5. Un terreno rectangular tiene 30 metros de largo y 375 metros cuadrados de área. Calcule el ancho del terreno.
6. La sala rectangular de una casa tiene el doble de largo que de ancho. Si el perímetro de la sala es 18 m. Calcule sus dimensiones.
7. Se va a construir una bodega rectangular de 60 pies de ancho por 80 pies de largo. La municipalidad exige que el área verde que rodea la bodega es el 50% del área de la bodega. Determine las dimensiones del terreno rectangular donde se puede construir la bodega.
8. Encontrar la base y la altura de un rectángulo de área 35 cm^2 y perímetro 24 cm.
9. Un granjero compró 100 m de material para cercar un terreno de 544 m^2 de área. Determine las dimensiones del terreno.
10. Un granjero compro 200 metros de cerca para cerrar un terreno rectangular. El granjero utilizará una pared ya existente como uno de los lados del terreno, de manera que solo debe cercar 3 lados. Encuentre el área del terreno si el lado angosto medirá la mitad del lado ancho.
11. Un terreno rectangular de 24 pies de ancho por 32 pies de largo está rodeado de una banqueta de ancho uniforme. Si el área de la banqueta

es de 512 pies cuadrados, calcule el ancho de la banqueta.

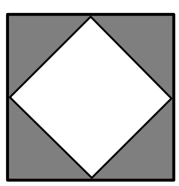
12. Una cartulina de 20 pulgadas de ancho por 32 pulgadas de alto será utilizada para colocar un cartel. El margen en la parte superior e inferior será el doble que el margen en los lados. Encuentre el ancho de los márgenes si la parte impresa tendrá un área de 330 pulgadas cuadradas.

13. En un jardín cuadrado se van a sembrar rosas y luego será cercado por todo su borde. Si el costo de la cerca es de Q12 por metro lineal y el costo por sembrar las rosas es de Q12 por metro cuadrado, Determine el lado del jardín que se puede construir si el costo total es de Q826.

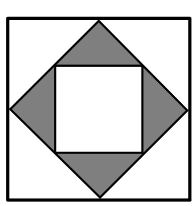
14. Un constructor dispone de 73 metros lineales de tabla yeso que bebe utilizar para construir 6 oficinas rectangulares iguales en un terreno rectangular de 105 m^2 de área, como se muestra en la figura. Determine las dimensiones de cada oficina.



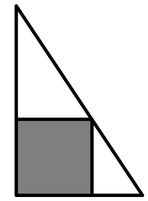
15. Se inscribe un cuadrado dentro de otro cuadrado de lado 6 cm, como se muestra en la figura. Si los vértices del cuadrado inscrito coinciden con los puntos medios del cuadrado circunscrito, calcule el área sombreada.



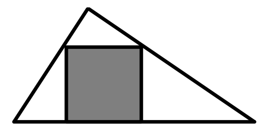
16. La figura muestra 3 cuadrados, uno inscrito dentro del otro, de manera que los vértices del cuadrado inscrito coinciden con el punto medio del cuadrado circunscrito. Si el lado del cuadrado mayor es 6 cm. Calcule el área sombreada.



17. Se inscribe un cuadrado dentro de un triángulo rectángulo de 4 cm en la base por 6 cm de altura, como se muestra en la figura. Determine el área del cuadrado.



18. Se inscribe un cuadrado dentro de un triángulo rectángulo con catetos de 4 cm en y 6 cm de longitud, como se muestra en la figura. Determine el área del cuadrado.



19. Encontrar el área de un rombo cuyas diagonales miden 9 cm y 12 cm.

20. El área de un rombo mide 64 cm^2. Encontrar la medida de sus diagonales sabiendo que están en razón 2 a 1.

21. en un trapecio isósceles la longitud de los lados iguales es un medio de la longitud de la base, mientras que la altura es un tercio de la longitud de la base. Si el perímetro del trapecio es 60 cm. Calcula el área del trapecio.

22. Un trapecio isósceles tiene ángulos iguales de 45º, si la longitud de la base mayor es 20 cm y la de la base menor es 12 cm. Calcule el área y el perímetro del trapecio.

23. Un trapecio tiene base menor de 5 cm y altura de 3 cm. Si el área del trapecio es de 33 cm^2. Calcule la base mayor del trapecio.

24. Los ángulos en la base de un trapecio isósceles miden 45º. La base mayor mide 12 cm y la base menor mide 6 cm. Encontrar el área del trapecio.

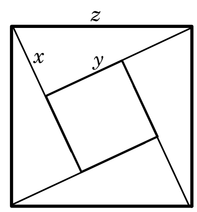
25. Un trapecio de área 100 tiene bases de 6 y 14 unidades, respectivamente. Encontrar el área de los dos triángulos que se forman cuando se prolongan los dos lados no paralelos hasta intersecarse.

26. En un triángulo equilátero cuyos lados miden 8 cm, se traza un segmento paralelo a uno de sus lados de tal manera que se forma un trapecio isósceles cuyos lados no paralelos miden 4 cm. Encontrar el área del trapecio.

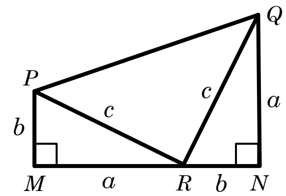
27. En un trapecio los lados paralelos miden 25 cm y 4 cm. Si los lados no paralelos miden 20 cm y 13 cm. Calcule el área del trapecio.

28. La suma de las áreas de un cuadrado y un triángulo equilátero es 60 cm^2 y la suma de sus perímetros es 40 cm. Determine el lado del cuadrado y el lado del triángulo equilátero.

29. En la figura que se muestra un cuadrado de lado z que contiene en su interior cuatro triángulos rectángulos iguales y un cuadrado. Si las longitudes de los catetos de cada triángulo son x y y. Utilice el hecho de que el área del cuadrado exterior es igual a la suma del área del cuadrado interior más el área de los cuatro triángulos para demostrar el teorema de Pitágoras, es decir que $z^2 = x^2 + y^2$



30. Calcule el área del trapecio $MNPQ$ de dos maneras diferentes para demostrar el teorema de Pitágoras, es decir que $c^2 = a^2 + b^2$



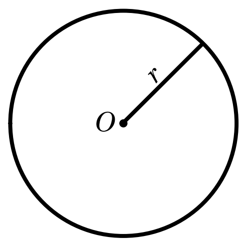
4 La circunferencia y el círculo

OBJETIVOS

- Calcular el área del círculo y el perímetro de la circunferencia.
- Calcular el área y el perímetro de sectores y segmentos circulares.
- Calcular la medida de ángulos y arcos en la circunferencia.
- Resolver problemas de áreas y perímetros en los cuales están relacionadas varias figuras geométricas.

Definición

Una **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos en un mismo plano, que están a una distancia dada, de un punto dado, situado en el mismo plano. El punto dado se llama **centro** de la circunferencia. El **círculo** es el conjunto de todos los puntos interiores a una circunferencia. El **radio** es el segmento que une el centro con cualquiera de los puntos de la circunferencia. La figura siguiente muestra una circunferencia de radio r y centro en el punto O.



Algunos elementos en la circunferencia

Algunos de los elementos geométricos que se relacionan con la circunferencia son

Cuerda:

Es un segmento cuyos puntos extremos están sobre la circunferencia. En la figura de abajo los segmentos AB y CD son cuerdas.

Diámetro:

Es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. En la figura AB es un diámetro.

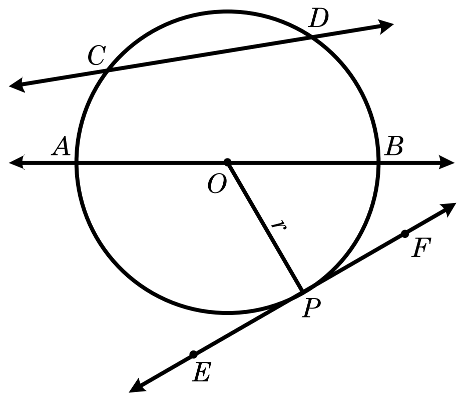
Secante:

Es una recta que contiene a una cuerda. En la figura las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son secantes.

Tangente:

Es una recta que se encuentra en el mismo plano que la circunferencia y que la interseca solamente en un punto. El punto de intersección se llama punto de tangencia. Una recta tangente es perpendicular al radio en el punto de tangencia.

En la figura la recta $\overleftrightarrow{EF}$ es tangente a la circunferencia en el punto P, por lo tanto el radio OP es perpendicular a la recta tangente en P.



Área y perímetro

Las expresiones para calcular el área del círculo y el perímetro de la circunferencia son

$$A = \pi r^2$$

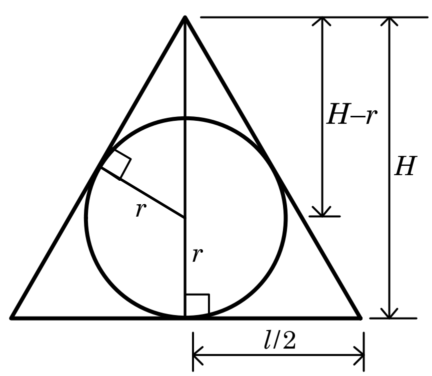
$$P = 2\pi r$$

Ejemplo 1: Círculo inscrito en triángulo equilátero

Encuentre el área de un círculo inscrito en un triángulo equilátero de lado 6 cm.

Solución

La figura muestra el círculo inscrito en el triángulo equilátero, donde l es el lado, H es la altura del triángulo y r es el radio de la circunferencia.



Por el teorema de Pitágoras se puede calcular la altura H ya que se conoce el lado del triángulo $l = 6$

$$H^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2$$

$$H^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}$$

$$H = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}l = \frac{\sqrt{3}}{2}(6) = 3\sqrt{3}$$

Ahora observe que el triángulo que tiene base r e hipotenusa $H - r$ es semejante al triángulo de base $l/2$ e hipotenusa l ya que ambos son rectángulos y tienen un ángulo agudo común. Al aplicar proporcionalidad entre sus lados se tiene

$$\frac{H-r}{r} = \frac{l}{\frac{l}{2}}$$

Despejando r y sustituyendo los valores de l y H se obtiene

$$\frac{H-r}{r} = 2$$

$$H - r = 2r$$

$$H = 3r$$

$$r = \frac{H}{3}$$

$$r = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

Entonces el área del círculo es

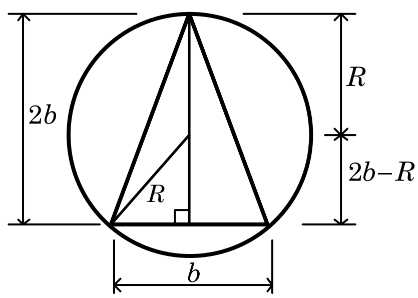
$$A = \pi r^2 = \pi\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3\pi$$

Ejemplo 2: Triángulo isósceles inscrito en círculo

Encuentre el área de un triángulo isósceles inscrito en un círculo de radio R si la altura del triángulo es igual al doble de su base.

Solución

En la figura se muestra el triángulo inscrito, así como su altura y el radio del círculo trazado a uno de los vértices del triángulo.



Al aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es R, uno de sus catetos es $2b - R$ y el otro cateto con longitud $\frac{b}{2}$ se tiene

$$R^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + (2b - R)^2$$

Despejando la base b en términos del radio R se tiene

$$R^2 = \frac{b^2}{4} + 4b^2 - 4bR + R^2$$

$$0 = b^2 + 16b^2 - 16bR$$

Trasladando los términos al lado izquierdo y factorizando se tiene

$$17b^2 - 16bR = 0$$

$$b(17b - 16R) = 0$$

Como b no puede ser igual a cero se tiene que

$$b = \frac{16R}{17} \quad \text{y} \quad h = 2b = 2\left(\frac{16R}{17}\right) = \frac{32R}{17}$$

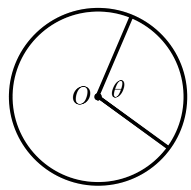
El área del triángulo es

$$A = \frac{1}{2}(b)(h) = \frac{1}{2}\left(\frac{16R}{17}\right)\left(\frac{32R}{17}\right) = \frac{256}{289}R^2$$

Arcos, sectores y segmentos

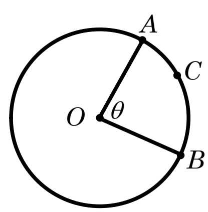
Ángulo central:

Es el ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia. En la figura θ es un ángulo central.



Arco:

Si A y B son dos puntos en una circunferencia, el arco AB, está formado por los puntos A y B y por todos los puntos de la circunferencia entre A y B. Como hay dos arcos que se pueden asociar a dos puntos sobre una circunferencia, es importante aclarar a cuál de los arcos se está haciendo referencia. Por ejemplo, en la siguiente figura para referirse al arco subtendido por el ángulo θ, se puede utilizar un punto intermedio entre los puntos A y B, y llamarlo arco ACB



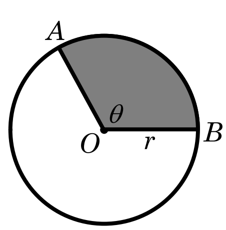
Longitud de arco:

Como el perímetro de una circunferencia es $2\pi r$, es lógico pensar que la longitud del arco está relacionada con el perímetro de la misma. De hecho si el ángulo central es θ, su medida está en grados y el radio de la circunferencia es r, la longitud del arco es

$$l = \frac{\theta}{360}(2\pi r) = \frac{\theta \pi r}{180}$$

Sector circular:

Un sector circular es una región plana limitada por dos radios y un arco de círculo. En la figura ABO es un sector circular.



Como el área de un círculo es πr^2, es razonable pensar que el área de un sector sea proporcional al ángulo θ y al área del círculo. La expresión para calcular el área del sector circular cuando el ángulo θ está expresado en grados es

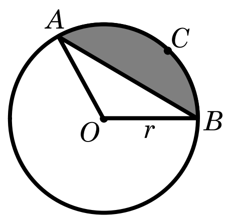
$$A = \frac{\theta}{360}(\pi r^2)$$

El perímetro se obtiene sumando la longitud del radio con el doble del radio, es decir

$$P = \frac{\theta \pi r}{180} + 2r$$

Segmento circular:

Un segmento circular es la región limitada por una cuerda y por un arco del círculo. En la figura ACB es un segmento circular



El área del segmento circular se obtiene restando el área del triángulo al área del sector, es decir

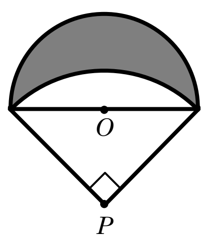
$$A = A \text{ sector } OACB - A \text{ triángulo } OAB$$

El perímetro del segmento se obtiene sumando la longitud del arco con la longitud de la curda, es decir

$$P = \text{ longitud } ACB + \text{ longitud } AB$$

Ejemplo 3: Calculando el área sombreada

La figura muestra una semicircunferencia con centro en el punto O, cuyo diámetro es 20 cm y un sector circular con centro en el punto P. Encuentre el área sombreada.

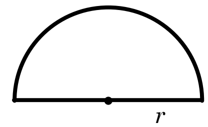


Solución

Para calcular el área sombreada, se debe expresar el área sombreada como la suma y resta de áreas de figuras geométricas conocidas (triángulos, círculos, cuadrados, etc.). Para ello hay que observar con detenimiento la región sombreada y diseñar una estrategia. Muchas veces el mismo problema se puede resolver combinando las áreas de formas diferentes.

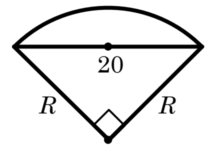
En éste problema el área sombreada se puede calcular como el área del semicírculo de radio $r = 10\,\text{cm}$, menos el área del segmento circular de radio R.

El área del semicírculo es



$$A_1 = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi(10)^2 = 50\pi$$

Para calcular el área del segmento primero hay que calcular el radio R usando el teorema de Pitágoras



$$R^2 + R^2 = 20^2$$
$$2R^2 = 400$$
$$R = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

El área del segmento es el área del sector menos el área del triángulo, es decir

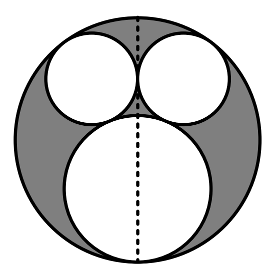
$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{\theta}{360}(\pi R^2) - \frac{1}{2}(R)(R) \\ &= \frac{90}{360}\pi\left(10\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(10\sqrt{2}\right)\left(10\sqrt{2}\right) \\ &= \frac{100(2)}{4}\pi - \frac{100(2)}{2} \\ &= 50\pi - 100 \end{aligned}$$

Finalmente el área sombreada es

$$\begin{aligned} A &= A_1 - A_2 \\ &= 50\pi - (50\pi - 100) \\ &= 100\,\mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

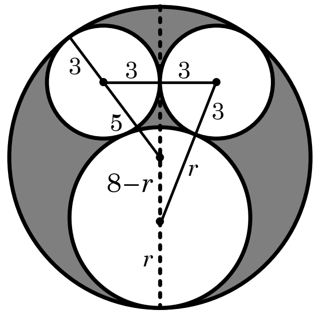
Ejemplo 4: Calculando el área sombreada en círculos

La figura muestra una circunferencia de 8 centímetros de radio que tiene inscritas tres circunferencias. Las dos circunferencias pequeñas tienen radio de 3 centímetros y son tangentes interiormente a la circunferencia mayor y al diámetro mostrado con línea discontinua. La otra circunferencia tiene radio desconocido y es tangente a las dos circunferencias pequeñas y a la circunferencia mayor. Encuentre el área sombreada.

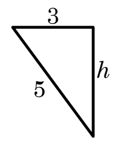


Solución

En la siguiente figura se han trazado algunos segmentos que muestran las relaciones entre los radios de las circunferencias.



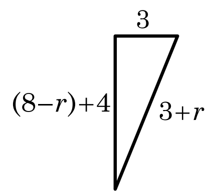
Note que se forman dos triángulos rectángulos, en el triángulo pequeño, el cateto menor mide 3 cm y la hipotenusa mide 5 cm pues es la diferencia entre el radio mayor 8 y el radio menor 3. Al calcular el cateto mayor de éste triángulo se obtiene



$$3^2 + h^2 = 5^2$$

$$h = \sqrt{25 - 9} = 4$$

Al utilizar el teorema de Pitágoras en el otro triángulo rectángulo se tiene



$$\left[(8 - r) + 4\right]^2 + (3)^2 = (3 + r)^2$$

Resolviendo la ecuación anterior para r

$$(8 - r)^2 + 8(8 - r) + 16 + 9 = 9 + 6r + r^2$$

$$64 - 16r + r^2 + 64 - 8r + 16 = 6r + r^2$$

$$144 - 24r = 6r$$

$$30r = 144$$

$$r = \frac{144}{30} = \frac{24}{5}$$

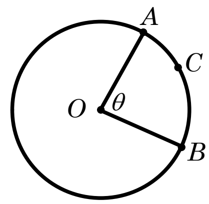
El área sombreada en la figura es

$$A_s = \pi(8)^2 - 2\pi(3)^2 - \pi\left(\frac{24}{5}\right)^2 = 64\pi - 18\pi - \frac{576}{25}\pi$$

$$= \frac{574}{25}\pi \text{ cm}^2$$

Medida de arcos y ángulos en la circunferencia

Ya se ha definido un arco de la circunferencia y se ha calculado su longitud. Un arco de circunferencia también puede ser medido en grados. La medida de un arco se define como la medida de su ángulo central. En la figura la medida del arco ACB es θ

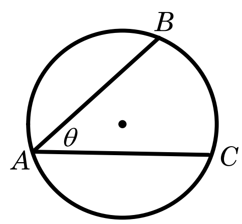


$$ACB = \theta$$

Los siguientes teoremas permiten calcular una serie de ángulos y arcos que son formados cuando dos rectas secantes o tangentes se intersecan para formar ángulos en el interior o en el exterior de una circunferencia.

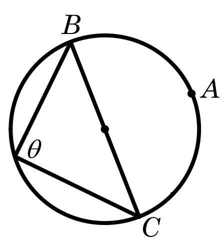
Angulo inscrito en la circunferencia

Un ángulo se llama inscrito si su vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son dos cuerdas de la circunferencia. La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida del arco que intercepta.



$$\theta = \frac{1}{2}BC$$

Un caso especial del ángulo inscrito es el que subtiende un arco de 180º, cuya medida es 90º, como se muestra en la siguiente figura

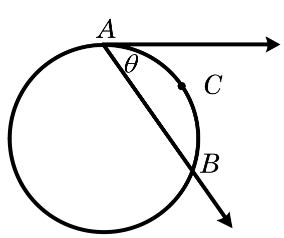


$$\theta = \frac{1}{2}BAC = \frac{1}{2}(180^{\circ}) = 90^{\circ}$$

De donde se puede concluir que la medida de un ángulo inscrito en una semicircunferencia es 90º.

Angulo formado por una secante y una tangente

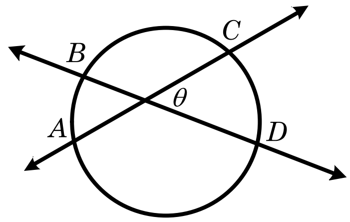
La medida de un ángulo que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados están formados por una recta secante y por una recta tangente a la circunferencia, es igual a la mitad de la medida del arco interceptado.



$$\theta = \frac{1}{2}ACB$$

Angulo formado por dos secantes que se intersecan en el interior de la circunferencia

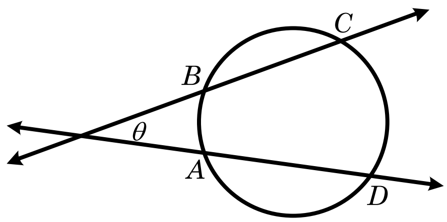
La medida de un ángulo formado por dos secantes que se intersecan en el interior de una circunferencia, es igual a la mitad de la suma de las medidas de los arcos interceptados.



$$\theta = \frac{1}{2}\left(AB + CD\right)$$

Angulo formado por dos secantes que se intersecan fuera de la circunferencia

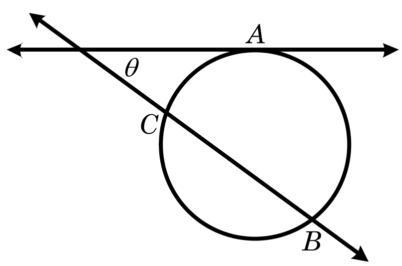
La medida de un ángulo formado por dos secantes que se intersecan fuera de una circunferencia, es igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos interceptados.



$$\theta = \frac{1}{2}\left(CD - AB\right)$$

Ángulo formado por una tangente y una secante que se intersecan fuera de la circunferencia.

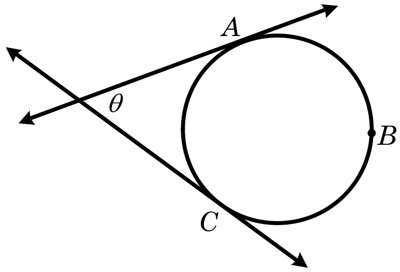
La medida de un ángulo formado por una tangente y una secante que se intersecan en el exterior de una circunferencia, es igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos interceptados.



$$\theta = \frac{1}{2}\left(AB - AC\right)$$

Ángulo formado por dos tangentes que se intersecan fuera de la circunferencia.

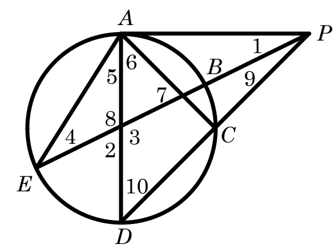
La medida de un ángulo formado por dos tangentes que se intersecan en el exterior de una circunferencia, es igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos interceptados.



$$\theta = \frac{1}{2}\left(ABC - AC\right)$$

Ejemplo 5: Calculando ángulos en la circunferencia

En la figura mostrada el segmento AP es tangente a la circunferencia en A, los segmentos AD y BE son diámetros, la medida del arco $AE = 115^\circ$, los segmentos $AD = AP$. Encuentre la medida de todos los ángulos numerados.



Solución

Se utilizarán los teoremas de ésta sección para calcular los ángulos y algunos arcos que son necesarios para calcular otros ángulos. Los ángulos no necesariamente se calcularán en el orden de los números.

Él $\angle 8$ es un ángulo central ya que los segmentos AD y BE son diámetros, entonces

$$\angle 8 = AE = 115^\circ$$

Él $\angle 3$ es igual al $\angle 8$ pues son ángulos opuestos por el vértice, entonces

$$\angle 3 = \angle 8 = 115^\circ$$

Él $\angle 2$ es suplementario del ángulo $\angle 8$, entonces

$$\angle 2 = 180^\circ - \angle 8 = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$$

Como el segmento BE es un diámetro, entonces

$$BAE = 180^\circ$$

Calculando el arco AB

$$AB + AE = 180^\circ$$

$$AB = 180^\circ - AE = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$$

Él $\angle 4$ es un ángulo inscrito en la circunferencia, entonces

$$\angle 4 = \frac{1}{2} AB = \frac{65^\circ}{2} = 32.5^\circ$$

Como la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°

$$\angle 5 = 180^\circ - \angle 4 - \angle 8 = 180^\circ - 32.5^\circ - 115^\circ = 32.5^\circ$$

Él $\angle 1$ está formado por una tangente y una secante a la circunferencia, entonces

$$\angle 1 = \frac{1}{2}\left(AE - AB\right) = \frac{1}{2}(115^\circ - 65^\circ) = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$$

Como los segmentos $AD = AP$, entonces el triángulo ΔDAP es isósceles y los ángulos $\angle 10$ y $\angle APD$ son iguales. Por otro lado el segmento AD es perpendicular al segmento AP, entonces el triángulo ΔDAP es rectángulo y también es isósceles, entonces

$$\angle 10 = 45^\circ$$

Como la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°

$$\angle 9 = 180^o - \angle 10 - \angle 3 = 180^o - 45^o - 115^o = 20^o$$

El triángulo ΔDAP es rectángulo pues esta inscrito en una semicircunferencia, entonces los ángulos 6 y 10 son complementarios, entonces

$$\angle 6 = 90^o - \angle 10 = 90^o - 45^o = 45^o$$

Solo falta calcular $\angle 7$, para hacerlo se usará la suma de los ángulos internos de un triángulo, pero antes hay que calcular el $\angle EAC$

$$\angle EAC = \angle 5 + \angle 6 = 32.5^o + 45^o = 77.5^o$$

Finalmente se puede calcular el $\angle 7$

$$\angle 7 = 180^o - \angle EAC - \angle 4 = 180 - 77.5^o - 32.5^o = 70^o$$

Ejercicios de la sección 2.4

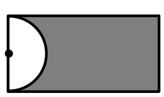
1. Encuentre el área de círculo si su perímetro es 44 cm.

2. Encontrar el perímetro de un círculo si su área es 24π cm^2.

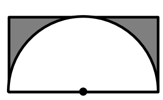
3. Encuentre el área comprendida entre dos círculos que tienen el mismo centro si los diámetros son 12 cm y 16 cm.

4. Encuentre el área de un círculo inscrito en un cuadrado de 6 cm de lado.

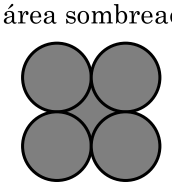
5. Se inscribe un semicírculo en un rectángulo de base 20 cm y altura 10 cm como se muestra en la figura. Calcule el área sombreada.



6. Se inscribe un semicírculo en un rectángulo de base 16 cm. Encuentre el área sombreada.



7. En la figura los cuatro círculos son tangentes entre sí y tienen el mismo radio de 5 cm. Encuentre el área sombreada.

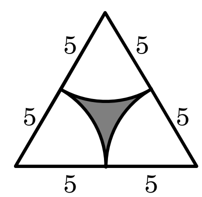


8. Encuentre el área de un cuadrado inscrito en un círculo de radio 6 cm.

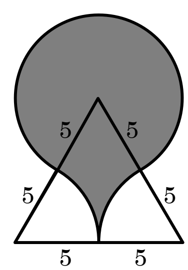
9. Encuentre el área de un cuadrado inscrito en un semicírculo de radio 6 cm.

10. Un rectángulo de 6 cm por 8 cm está inscrito en un círculo. Encontrar el área que está dentro del círculo pero fuera del rectángulo.

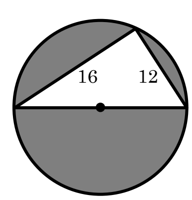
11. El triángulo de la figura es equilátero de lado 10 cm. Encuentre el área sombreada.



12. Encuentre el área sombreada

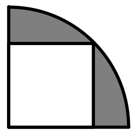


13. La figura muestra un triángulo inscrito en una semicircunferencia. Encuentre el área sombreada.

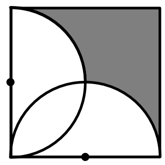


14. Los radios de dos círculos concéntricos difieren en $\sqrt{2}$. Encontrar el radio de cada círculo sabiendo que el área del anillo formado es $2\pi\left(1 + 3\sqrt{2}\right)$.

15. Se inscribe un cuadrado en un cuarto de círculo de radio 5 cm, como se muestra en la figura, encuentre el área sombreada



16. Dos semicírculos están inscritos en un cuadrado de lado 6 cm, como se muestra en la figura. Encontrar el área sombreada.



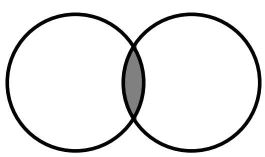
17. En un círculo de radio 6 cm, se recorta un anillo de área igual a la mitad del área del círculo, encontrar el ancho del anillo.

18. Se inscribe un triángulo equilátero en un círculo de radio 8 cm. Encontrar el área del segmento limitado por un lado del triángulo y por la circunferencia.

19. En un círculo de radio 6 cm, calcule el área del segmento si la longitud de la cuerda es 6 cm.

20. Encontrar el perímetro de un segmento si el radio del círculo es 12 cm y el ángulo central mide 120º.

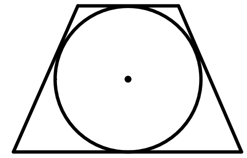
21. La figura muestra dos círculos iguales de radio 8 cm que se intersecan de manera que su cuerda común mide 8 cm. Encontrar el área sombreada



22. Dos rectas tangentes a una circunferencia interceptan un arco de 120º. Encontrar el perímetro de la región limitada por las dos tangentes y el arco.

23. En un círculo de radio 10 cm se inscribe un trapecio isósceles cuyas bases miden 12 y 16 cm. Si el centro del círculo queda en el interior del trapecio, encontrar el área dentro del círculo pero fuera del trapecio.

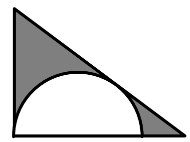
24. En la figura se muestra un trapecio isósceles cuyas bases miden 18 cm y 8 cm. Todos los lados del trapecio son tangentes a la circunferencia. Encontrar el área del trapecio.



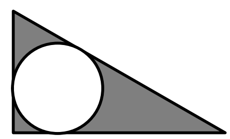
25. Un rombo tiene diagonales de 18 y 24 cm. Encontrar el área de u círculo inscrito en el rombo.

26. Un trapecio se inscribe en un semicírculo de radio 1 cm. Si la diagonal del trapecio mide $\sqrt{3}$, encuentre el área del trapecio.

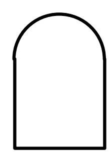
27. En la figura se muestra un círculo inscrito en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 8 cm y 6 cm. Calcule el área sombreada.



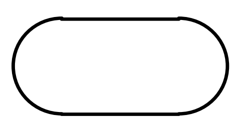
28. Se inscribe un círculo en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 4 cm y 2 cm. Encuentre el área sombreada.



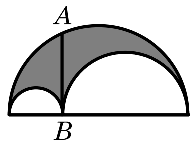
29. Una ventana de iglesia tiene la forma de un rectángulo con un semicírculo sobrepuesto, como se muestra en la figura. Determine las dimensiones de la misma si su perímetro es $10 + 2\pi$ y su área es $8 + \pi$



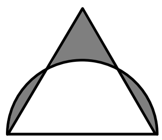
30. Se quiere construir una pista de atletismo con una longitud total de 400 metros, con un campo de futbol rectangular en su interior que tenga un área de 6,000 metros cuadrados. Determine las dimensiones de la pista.



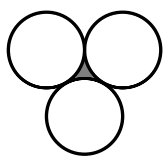
31. En la figura se muestran dos semicírculos inscritos en un semicírculo de radio 4 cm. Si la longitud del segmento AB es 3 cm. Encuentre el área sombreada.



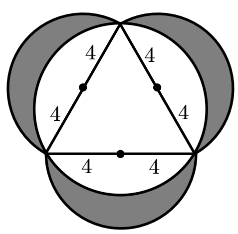
32. En la figura se muestra un triángulo equilátero de 2 cm de lado y una semicircunferencia que tiene su diámetro sobre uno de los lados del triángulo. Encuentre el área sombreada.



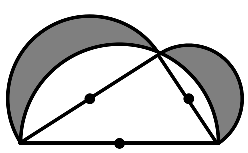
33. Tres círculos iguales de 12 cm de radio son tangentes entre sí. Encontrar el área sombreada.



34. Encuentre el área sombreada en la siguiente figura.



35. La figura muestra un triángulo rectángulo cuyos catetos miden a y b, inscrito en una semicircunferencia. Encuentre el área sombreada.

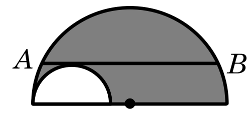


36. Un jardín circular tiene 12 metros de diámetro y es atravesado por un camino de 3 metros de ancho, de forma que uno de los lados del camino pasa por el centro del jardín. Encontrar el área que está sembrada.

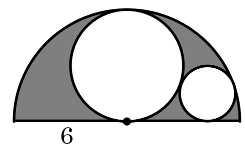
37. Los lados de un triángulo isósceles miden 5, 5 y 6 cm. Encontrar la razón de las áreas de los círculos inscrito y circunscrito.

38. En un círculo de radio R se inscribe y se circunscribe un triángulo equilátero. Encontrar la razón de las áreas del triángulo inscrito al triángulo circunscrito.

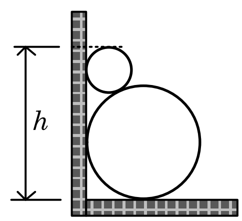
39. Un semicírculo de radio R contiene en su interior otro semicírculo de radio desconocido. Si la longitud de la cuerda AB es 24 cm. Encontrar el área sombreada.



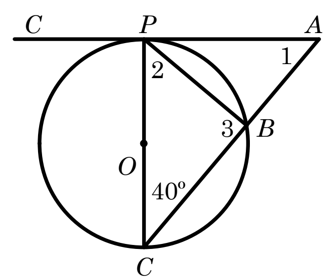
40. La figura muestra una semicircunferencia de radio 6 cm que tiene en su interior dos círculos de radios inscritos como se muestra en la figura. Encontrar el área sombreada.



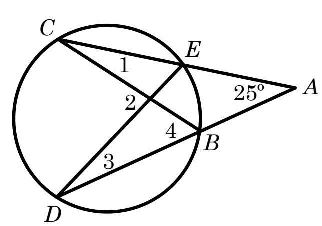
41. Encuentre la altura h si los círculos tienen radios de 10 cm y 4 cm.



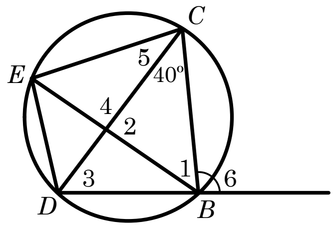
42. En la figura el segmento PC es un diámetro y el segmento AC es tangente en P. Encuentre la medida de los ángulos numerados.



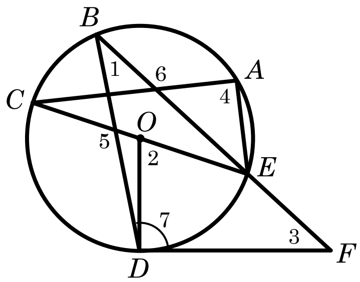
43. En la figura $CD = 110^{\circ}$. Encuentre la medida de los ángulos numerados.



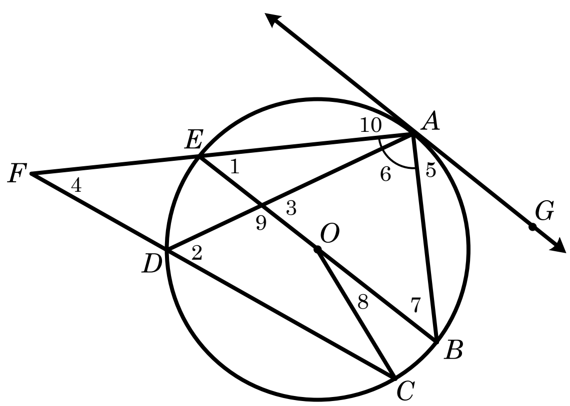
44. En la figura $BC = 120^{\circ}$, $EC = 85^{\circ}$ Encuentre la medida de los ángulos numerados.



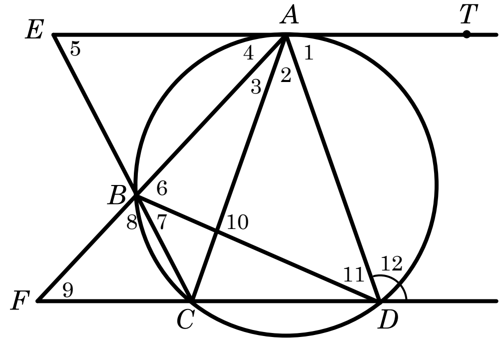
45. En la figura el segmento CE es un diámetro, $CB = 25^{\circ}$, $DE = 80^{\circ}$. Encuentre la medida de los ángulos numerados.



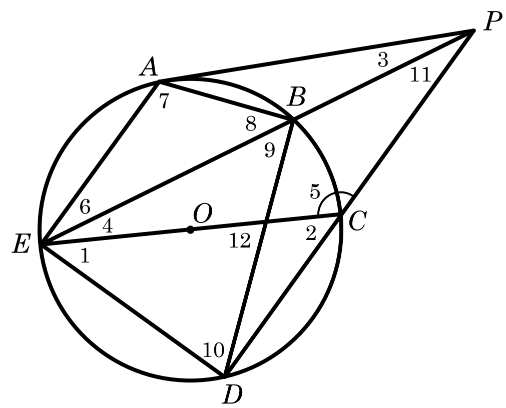
46. En la figura el segmento BE es un diámetro, la recta AG es tangente en A, $AB = 80^{\circ}$, $BC = 20^{\circ}$, $DE = 50^{\circ}$. Calcule la medida de los ángulos numerados.



47. En la figura la recta ET es tangente en A, $\overline{ET} \parallel \overline{FD}$, el arco $AD = 140^{\circ}$, $BC = 50^{\circ}$. Encuentre la medida de los ángulos numerados.



48. En la figura el segmento CE es un diámetro, $CD = 80^{\circ}$, $BC = 50^{\circ}$, $\angle 3 = 20^{\circ}$. Encuentre la medida de los ángulos numerados.



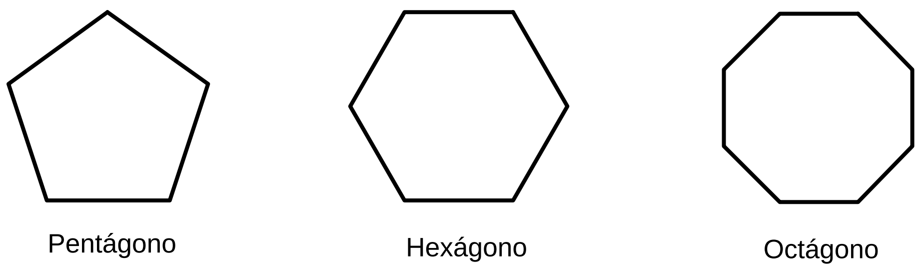
2.5 Polígonos regulares

OBJETIVOS

- Calcular el área y el perímetro de polígonos regulares.
- Calcular áreas sombreadas en figuras geométricas que involucren polígonos regulares.

Definición

Un polígono regular de n lados es una figura plana formada por n segmentos que se intersecan dos a dos formando una figura con n vértices, n ángulos iguales y n lados iguales. Las figura siguiente muestra tres polígonos regulares, un pentágono, un hexágono y un octágono.



Lado de un polígono regular

Es el segmento que tiene como puntos extremos dos vértices del polígono y se representa con la letra l.

Centro de un polígono regular

Se llama centro de un polígono regular al centro común de sus circunferencias inscrita y circunscrita.

Radio de un polígono regular

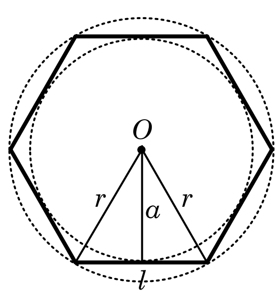
El radio de un polígono regular es el radio de su circunferencia circunscrita.

Apotema de un polígono regular

Se llama apotema de un polígono regular al radio de su circunferencia inscrita y se representa con la letra a

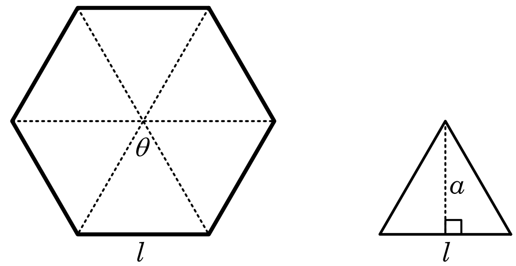
Ángulo central de un polígono regular

Es el ángulo que tiene como vértice el centro del polígono y sus lados son los segmentos que contienen a dos vértices consecutivos. La medida del ángulo central es $\theta = \dfrac{360}{n}$



Área y perímetro de un polígono

Para calcular el área de un polígono, se puede suponer que éste está formado por n triángulos iguales, como se muestra en la figura siguiente.



La altura de cada triángulo es el apotema a, entonces el área de cada triángulo es

$$A_n = \frac{1}{2}(l)(a)$$

Como el polígono tiene n lados se tiene que las expresiones para calcular el área y el perímetro son

$$A = \frac{1}{2}nla$$

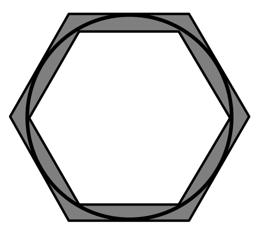
$$P = nl$$

Ejemplo 1: Hexágono inscrito y circunscrito a una circunferencia

Un hexágono está inscrito y otro hexágono está circunscrito a una circunferencia de radio 6 cm. Encuentre el área de la región que se encuentra entre los dos hexágonos.

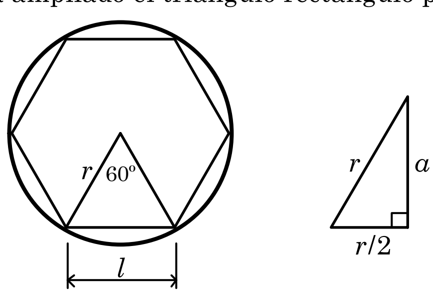
Solución

La figura muestra el área de la región buscada



El área sombreada es el área del hexágono circunscrito menos el área del hexágono inscrito.

Al calcular el área del hexágono inscrito se tienen los elementos mostrados en la figura siguiente en donde se ha ampliado el triángulo rectángulo para mostrar los elementos



La medida del ángulo central es $\theta = \frac{360}{6} = 60^\circ$

Como el triángulo es equilátero, el lado es igual al radio y apotema se puede calcular utilizando el teorema de Pitágoras

$$a^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2$$

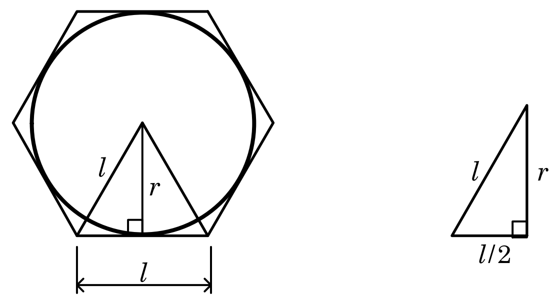
$$a^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3r^2}{4}$$

$$a = \sqrt{\frac{3r^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}r = \frac{\sqrt{3}}{2}(6) = 3\sqrt{3}$$

Entonces el área del hexágono inscrito es

$$A_I = \frac{1}{2}nla = \frac{1}{2}(6)(6)\left(3\sqrt{3}\right) = 54\sqrt{3}$$

Para el hexágono circunscrito los elementos se muestran en la figura siguiente



Para este hexágono la apotema es igual al radio y se utiliza el teorema de Pitágoras para calcular l

$$r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2$$

$$l^2 - \frac{l^2}{4} = r^2$$

$$\frac{3l^2}{4} = r^2$$

$$l = \sqrt{\frac{4r^2}{3}} = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r = \frac{2\sqrt{3}}{3}(6) = 4\sqrt{3}$$

Entonces el área del hexágono circunscrito es

$$A_S = \frac{1}{2}nla = \frac{1}{2}(6)\left(4\sqrt{3}\right)(6) = 72\sqrt{3}$$

Finalmente, el área sombreada es

$$\begin{aligned} A &= A_S - A_I \\ &= 72\sqrt{3} - 54\sqrt{3} \\ &= 18\sqrt{3} \end{aligned}$$

Ejercicios de la sección 2.5

1. Encuentre el área y el perímetro de un hexágono si su lado mide 6 cm.

2. Encuentre el área de un hexágono si su apotema es igual a 12 cm.

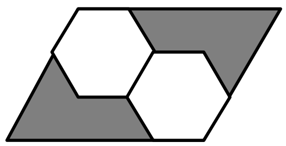
3. Si un triángulo equilátero y un hexágono tienen perímetros iguales de 18 cm. Encuentre la razón de sus áreas.

4. Si el área de un hexágono es igual a $150\sqrt{3}$ encuentre el lado y la apotema.

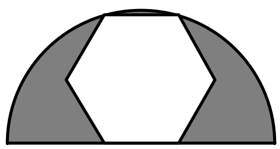
5. Si un hexágono tiene apotema de $3\sqrt{3}$, encuentre el perímetro de la circunferencia circunscrita.

6. Si el área de un hexágono regular es $48k^2\sqrt{3}$, donde k es una constante. Encuentre la razón de las áreas de los círculos inscrito y circunscrito.

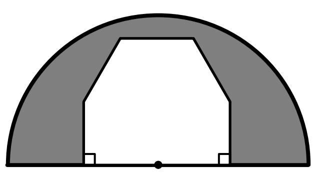
7. En la figura el lado del hexágono mide 2 cm. Encuentre el área sombreada.



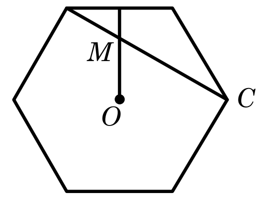
8. Se inscribe un hexágono regular en una semicircunferencia de radio 6 cm. Encuentre el área sombreada.



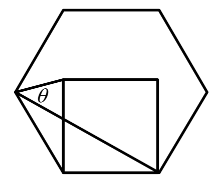
9. La entrada a una mina está formada por una semicircunferencia de 4 metros de radio y una puerta de acceso que tiene una altura en el centro de 3 metros. Si los 5 lados que forman la puerta tienen la misma longitud, calcule el área sombreada.



11. En la figura se muestra un hexágono con centro en el punto O, Si la longitud del segmento MC es 8 cm. Encuentre el área del hexágono.



12. La figura muestra un cuadrado dentro de un hexágono, de forma que el lado del hexágono es igual al lado del cuadrado. Calcule el ángulo θ



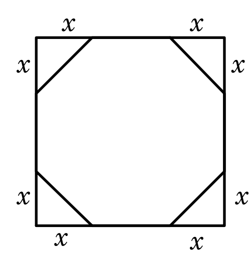
13. El área de un polígono regular mide 100 cm^2 y su perímetro mide 20 cm. ¿Cuánto mide su apotema.

14. Un triángulo equilátero, un hexágono, un cuadrado y un círculo tienen área de 100 cm^2. Calcule que figura tiene el mayor perímetro.

15. La figura muestra un octágono inscrito en un cuadrado. Si el área del octágono es 100 cm^2.

(a) Calcule el valor de x.

(b) Calcule el área del cuadrado.



2.6 Prismas y paralelepípedos

OBJETIVOS

- Calcular el área lateral y el área total de prismas rectos.
- Calcular el volumen de prismas rectos.
- Resolver problemas en los cuales es necesario utilizar las fórmulas de áreas y volúmenes de prismas rectos.

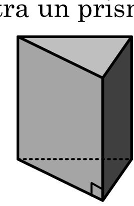
En ésta sección se estudiará como calcular el volumen y el área de los objetos geométricos de tres dimensiones, tales como el cubo y la caja rectangular. El volumen de un sólido es el espacio utilizado por él y se mide en unidades cúbicas; a la superficie que limita al sólido se le llama área superficial y se mide en unidades cuadradas.

Para el estudio de ésta sección se procederá primero a definir las características generales de los sólidos y luego se presentarán las expresiones para calcular el área superficial, el área total y el volumen. La deducción de algunas de las fórmulas que se presentan requiere el uso del cálculo integral, el cual será estudiado en cursos posteriores.

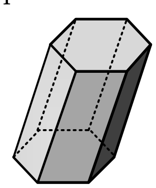
Prismas

Un prisma es un sólido que tiene al menos dos de sus caras iguales y contenidas en planos paralelos, estas caras son llamadas **bases**. Las otras caras de un prisma son llamadas **caras laterales** y tienen la forma de un paralelogramo. Las caras de un prisma se intersecan unas con otras en segmentos llamados **aristas.** Las aristas que unen dos caras laterales se llaman **aristas laterales.**

Un prisma se llama **prisma recto** si las caras laterales son perpendiculares a sus bases. Un prisma se llama **prisma oblicuo** cuando las caras laterales no son perpendiculares a sus bases. A los prismas se les denomina de acuerdo a la forma de sus bases, si por ejemplo si se tiene un prisma cuyas bases son un triángulo y sus caras laterales son perpendiculares a las bases se le llama **prisma triangular recto**. En la figura siguiente se muestra un prisma triangular recto y un prisma hexagonal oblicuo.



Prisma triangular recto



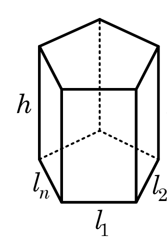
Prisma hexagonal oblicuo

Altura de un prisma

La altura h de un prisma es el segmento que va de una base a otra y es perpendicular a ellas.

Área y volumen de un prisma

El **área lateral, *A.L.*** es la suma de las áreas de las caras laterales y como se muestra en la figura de la derecha éstas caras son paralelogramos de base l_i y altura h, entonces



$$\begin{aligned} A.L. &= l_1 h + l_2 h + l_3 h + \cdots + l_n h \\ &= (l_1 + l_2 + l_3 + \cdots l_n)h \\ &= Ph \end{aligned}$$

Donde P es el perímetro de la base.

El **área total, *A.T.*** de un prisma es la suma de área lateral más las áreas de las dos bases, B. entonces

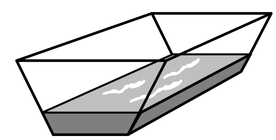
$$\begin{aligned} A.T. &= A.L. + 2B \\ &= Ph + 2B \end{aligned}$$

El **volumen, V** de un prisma es el producto del área de su base B, multiplicada por la altura h, es decir

$$V = Bh$$

Ejemplo 1: El tanque de sección trapezoidal

Un bebedero de agua en un zoológico tiene forma de trapecio isósceles con 2 pies de base, 2 pies de altura y 4 pies de ancho en la parte superior, como se muestra en la figura. El trapecio tiene una longitud de 12 pies y contiene agua con una profundidad de 0.5 pies.

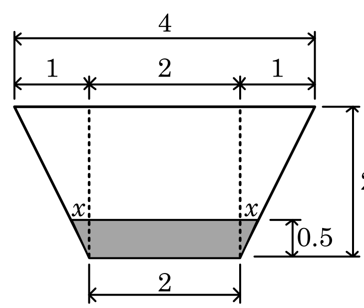


(a) Calcule el volumen de agua en el depósito.

(b) Si el volumen de agua es de 36 pies cúbicos, calcule la altura del agua.

Solución

(a) Al observar el volumen de agua, puede verse que tiene la forma de un prisma recto con bases en forma de trapecio y altura de 12 pies. En la figura siguiente se muestra la base trapezoidal y las variables utilizadas para calcular el área.



El área de la base es

$$B = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$$

Donde $b_1 = 2$, $h = 0.5$ y la base mayor es $b_2 = 2 + 2x$. Para calcular x es necesario utilizar semejanza de triángulos

$$\frac{x}{1} = \frac{0.5}{2}$$

$$x = 0.25$$

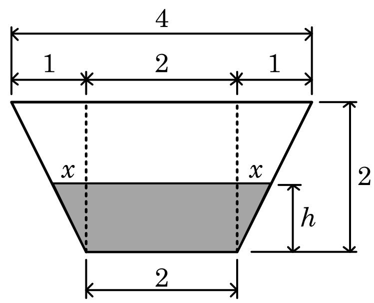
Entonces el área de la base es

$$B = \frac{1}{2}(2 + 2 + 2(0.25))(0.5) = 1.125 \text{ pies}^2$$

El volumen del agua es

$$V = Bl = (1.125)(12) = 13.5 \text{ pies}^3$$

(b) Ahora se conoce el volumen pero no se conoce la altura del agua. La figura siguiente muestra la nueva situación



El área de la base es

$$B = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$$

Donde $b_1 = 2$ y la base mayor es $b_2 = 2 + 2x$. Ahora se usa la semejanza de triángulos para expresar x en términos de h ya que queremos encontrar la altura.

$$\frac{x}{1} = \frac{h}{2}$$

$$x = \frac{h}{2}$$

Ahora b_2 se puede expresar en términos de h

$$b_2 = 2 + 2x = 2 + 2\left(\frac{h}{2}\right) = 2 + h$$

Entonces el área de la base es

$$B = \frac{1}{2}(2 + 2 + h)(h) = \frac{1}{2}h(4 + h)$$

El volumen del agua es

$$V = Bl = \frac{h}{2}(4 + h)(12) = 36 \text{ pies}^3$$

Despejando h en la ecuación anterior

$$24h + 6h^2 - 36 = 0$$

$$h^2 + 4h - 6 = 0$$

Resolviendo por fórmula cuadrática

$$h = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(-6)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -2 \pm \sqrt{10}$$

Como h debe ser positiva, se tiene que la altura del agua es

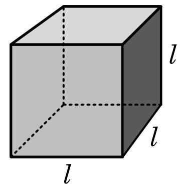
$$h = -2 + \sqrt{10} \approx 1.16 \text{ pies.}$$

El cubo y la caja rectangular

Dos de los prismas rectos más utilizados en Geometría son el cubo y la caja rectangular o paralelepípedo. En ésta sección se presentan las fórmulas para calcular las áreas y sus volúmenes.

El cubo

El cubo es un prisma recto en el cual sus bases son cuadrados de lado l y altura h también es igual a l. Por tanto, sus caras laterales también son cuadrados de lado l. La figura muestra la forma de un cubo.



Como el cubo tiene 6 caras iguales, de área l^2, el área total del cubo es

$$A = 6l^2$$

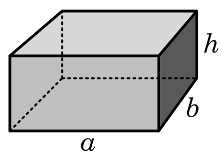
El volumen del cubo es el área de la base multiplicado por la altura

$$V = (l^2)h = (l^2)l$$

$$V = l^3$$

La caja rectangular o paralelepípedo

La caja rectangular es un prisma recto que tiene como bases dos rectángulos de ancho a y de largo b. Si la altura de la caja rectangular es h, las caras laterales son 4 rectángulos dos de base a y altura h y dos de base b y altura h. La figura siguiente muestra una caja rectangular



El área lateral de la caja rectangular se encuentra sumando las áreas de las cuatro caras, es decir

$$A.L. = 2(ah) + 2(bh)$$

El área total se encuentra sumando las áreas de las bases al área lateral

$$A.T. = 2ah + 2bh + 2ab$$

El volumen es el área de la base multiplicada por la altura

$$V = (ab)h$$

Ejemplo 2: Volumen de un cubo

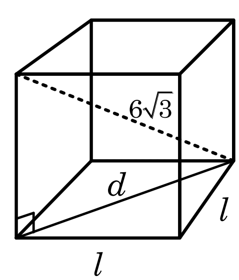
Encontrar el área y el volumen de un cubo cuya diagonal mide $6\sqrt{3}$ cm

Solución

La figura muestra un cubo de lado l, su diagonal principal y una de las diagonales en la base del cubo.

La longitud de la diagonal d en la base es

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{l^2 + l^2} \\ &= \sqrt{2l^2} \\ &= \sqrt{2}\,l \end{aligned}$$



Usando nuevamente el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de la diagonal principal

$$l^2 + d^2 = \left(6\sqrt{3}\right)^2$$

$$l^2 + \left(\sqrt{2}\, l\right)^2 = 36(3)$$

$$l^2 + 2l^2 = 108$$

$$3l^2 = 108$$

$$l = \sqrt{\frac{108}{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

Ahora ya se puede calcular el área y el volumen del cubo

$$A = 6l^2 = 6\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 24(3) = 72 \text{ cm}^2$$

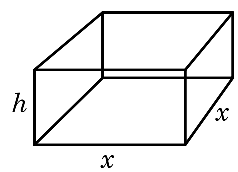
$$V = l^3 = \left(2\sqrt{3}\right)^3 = 8\sqrt{27} = 8\left(3\sqrt{3}\right) = 24\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

Ejemplo 3: Dimensiones de una caja rectangular

Se quiere construir una caja rectangular abierta de base cuadrada y una altura de 6 cm. La caja será construida de un material para la base que cuesta Q3 el centímetro cuadrado y el material para los lados tiene un costo de Q2 el centímetro cuadrado. Determine las dimensiones de la caja si se dispone de Q576 para su construcción.

Solución

Sea x la longitud de la base, como se muestra en la figura siguiente



El costo de los materiales depende del área superficial de la caja. El área de la base es

$$A.B. = x^2$$

Note que solo se toma una de las bases pues la caja es abierta. El costo de la base se encuentre multiplicando el costo unitario Q3 por el área

$$C.B. = 3\left(x^2\right)$$

Como las cuatro caras laterales son iguales, el área lateral es

$$A.L. = 4(xh) = 4x(6) = 24x$$

El costo de los lados se encuentra multiplicando Q2 por el área lateral.

$$C.L. = 2(24x) = 48x$$

El costo total se encuentre sumando el costo de la base más el costo de los lados

Costo total = Costo de la base + Costo de los lados

$$C.T. = 3x^2 + 48x$$

$$576 = 3x^2 + 48x$$

Resolviendo la ecuación para x

$$3x^2 + 48x - 576 = 0$$

$$x^2 + 16x - 192 = 0$$

$$(x + 24)(x - 8) = 0$$

De donde se obtiene que $x = 8$ y $x = -24$.

Como x no puede ser negativa, se concluye que las dimensiones de la caja rectangular son de 8 cm por lado en la base y 6 cm de altura.

Ejercicios de la sección 2.6

1. Encuentre el área total y el volumen de un cubo si la diagonal de una de sus caras mide 6 cm.

2. Encuentre el volumen de un cubo si la longitud de su diagonal mayor mide 8 cm.

3. Si el área total de un cubo mide 108 cm^2, calcule su volumen.

4. Si el volumen de un cubo mide 125 cm^3, calcule el área total.

5. Para determinar el volumen de un sólido irregular, este es sumergido en un depósito en forma de paralelepípedo rectangular de base cuadrada de 10 cm por lado. Si la altura del agua en el depósito aumenta 1.2 cm al introducir el sólido, calcule su volumen.

6. La base de un prisma recto es un triángulo equilátero de lado 6 cm. Encontrar el volumen y el área total si la altura es de 10 cm.

7. La base de un prisma recto es un rombo con diagonales de 6 cm y 8 cm. Encontrar el volumen del sólido y el área lateral si la altura es de 10 cm.

8. La base de un prisma recto de altura 4 pies, es un hexágono regular. Si el área lateral del prisma es 144 pies^2. Encontrar el volumen del prisma.

9. ¿Cuántos ladrillos de 20 por 10 por 5 cm se necesitan para construir una pared de 6 m por 2 m por 10 cm, considerando que el 12% de la pared es utilizado por la mezcla que va entre los ladrillos.

10. Dos de las dimensiones de un prisma rectangular recto son de 6 y 8 pulgadas. Si la diagonal del prisma mide 12 pulgadas. Encontrar la tercera dimensión.

11. Un recipiente rectangular recto tiene una base de 12 cm por 8 cm. Se llena con agua hasta una profundidad de 5 cm y se observa que al sumergir completamente un cubo sólido el nivel del agua sube a 5.5 cm. Encontrar la arista del cubo.

12. La altura de un prisma hexagonal recto mide el doble del lado de la base. Si el volumen del prisma es de $192\sqrt{3}$ cm^3, Encuentre el área lateral del prisma.

13. Un prisma rectangular recto de área total 236 cm^2 tiene altura de 6 cm. Si el ancho de la base es menor en 2 cm que su longitud. Encuentre su volumen.

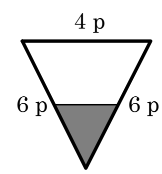
14. Un depósito tiene una longitud de 10 pies y su sección transversal se muestra en la figura

(a) Calcule la capacidad total del depósito.

(b) Si la altura del agua es de 2 pies, calcule el volumen de agua en el depósito.

(c) Si el volumen de agua en el depósito es de 60 pies^3. Calcule la altura del agua.

(d) Calcule el área del espejo de agua en la superficie si la altura es de 2 pies.



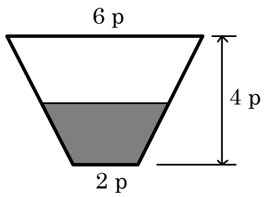
15. Un depósito tiene una longitud de 10 pies y su sección transversal es el trapecio isósceles que se muestra en la figura

(a) Calcule la capacidad total del depósito.

(b) Si la altura del agua es de 2 pies, calcule el volumen de agua en el depósito.

(c) Si el volumen de agua en el depósito es de 60 pies^3. Calcule la altura del agua.

(d) Calcule el área del espejo de agua en la superficie si la altura es de 2 pies.



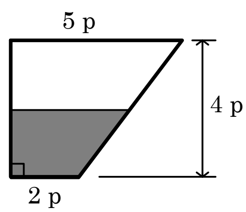
16. Un depósito tiene una longitud de 10 pies y su sección transversal se muestra en la figura

(a) Calcule la capacidad total del depósito.

(b) Si la altura del agua es de 2 pies, calcule el volumen de agua en el depósito.

(c) Si el volumen de agua en el depósito es de 60 pies^3. Calcule la altura del agua.

(d) Calcule el área del espejo de agua en la superficie si la altura es de 2 pies.



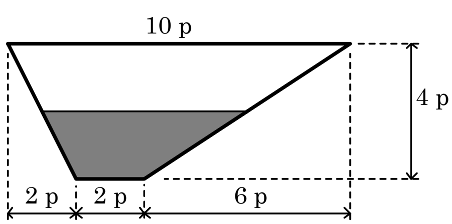
17. Un depósito tiene una longitud de 10 pies y su sección transversal se muestra en la figura

(a) Calcule la capacidad total del depósito.

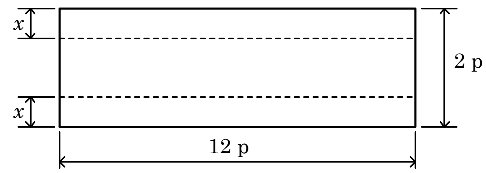
(b) Si la altura del agua es de 3 pies, calcule el volumen de agua en el depósito.

(c) Si el volumen de agua en el depósito es de 100 pies^3. Calcule la altura del agua.

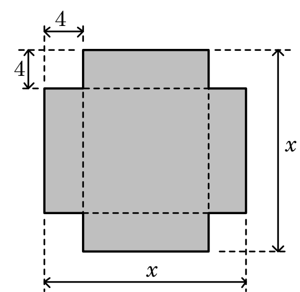
(d) Calcule el área del espejo de agua en la superficie si la altura es de 2 pies.



18. A partir de una lámina rectangular de 12 pies de largo y 2 pies de ancho se va a construir un canal rectangular, doblando hacia arriba la lámina en la línea que se muestra discontinua en la figura. Determine x de tal forma que la capacidad del canal sea de 4.5 pies^3.



19. De un cartón cuadrado se va a construir una caja rectangular de base cuadrada y altura 4 cm. Para hacerlo se cortarán cuadrados de 4 cm por lado en cada una de las esquinas del cartón como se muestra en la figura. Determine el valor de x de tal forma que el volumen de la caja sea de 324 cm^3.



20. Para que una maleta de equipaje en los vuelos de avión sea adecuada, debe tener la forma de una caja rectangular de manera que el largo de la base sea el doble del ancho y la suma del perímetro de la base con la altura debe ser de 82 pulgadas. Determine las dimensiones de la maleta si el área superficial total es de 1836 pulgadas cuadradas.

2.7 Cilindros, conos, esferas y pirámides

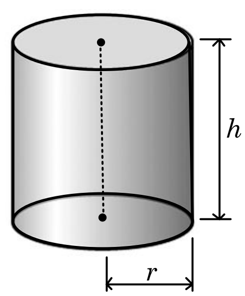
OBJETIVOS

- Calcular el área y el volumen de cilindros, conos, esferas y pirámides regulares
- Resolver problemas de solidos inscritos y circunscritos.
- Resolver problemas en los cuales los modelos se construyen utilizando las fórmulas de áreas y volúmenes de sólidos.

En ésta sección se estudiará como calcular el volumen y el área del cilindro, el cono, la esfera y las pirámides regulares. Al igual que la sección anterior, el desarrollo de los contenidos es informal y no se presentan las deducciones de las fórmulas; algunas de ellas son intuitivas mientras que otras requieren del cálculo integral para ser demostradas.

El cilindro circular recto

Un cilindro es un sólido que tiene dos bases circulares iguales contenidas en planos paralelos. La **superficie lateral** o área lateral del cilindro está formada por todos los puntos unen las dos bases del cilindro. El **eje del cilindro** circular es el segmento que une los dos centros de las bases. Si el eje es perpendicular a las bases el cilindro se llama **cilindro circular recto**, mientras que cuando el eje no es perpendicular a la base el cono se llama **cono oblicuo**. La **altura** h del cilindro circular es el segmento perpendicular a las dos bases. En la figura se muestra un cilindro circular recto.



Las fórmulas para calcular el área lateral, el área total y el volumen de un cilindro se obtienen de la misma forma que las de un prisma recto, es decir que el área lateral es el perímetro de la base multiplicado por la altura.

$$A.L. = (2\pi r)h$$

$$A.T. = 2hrh + 2\pi r^2$$

El volumen se obtiene multiplicando el área de la base por la altura, es decir

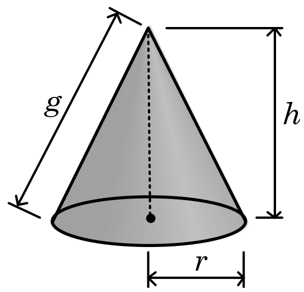
$$V = \left(\pi r^2\right)h$$

El cono circular recto

Es un sólido que tiene como base un círculo y un punto fuera del círculo llamado **vértice.** El **eje del cono** es el segmento de recta que va del vértice al centro de la base circular. La **altura** h del cono es el segmento perpendicular a la base que une a ésta con el vértice. Si el eje del cono es perpendicular a la base el cono se llama **cono circular recto,** mientras que si el eje no es perpendicular a la base el cono se llama **cono oblicuo**.

En un cono circular recto, se llama **generatriz** al segmento que va del vértice a un punto en la circunferencia de la base. La figura muestra un cono circular recto.

La **superficie lateral** o área lateral de un cono está formada por todos los puntos que se obtienen al unir el vértice con cualquier punto de la circunferencia en la base del cono.



El área lateral del cono está dada por

$$A.L. = (2\pi r)\, g$$

Donde g es la generatriz que se puede calcular por el teorema de Pitágoras, $g = \sqrt{r^2 + h^2}$, entonces

$$A.L. = (2\pi r)\sqrt{r^2 + h^2}$$

El área total del cono se obtiene al sumar el área lateral con el área de la base

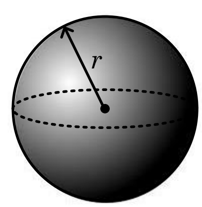
$$A.T. = (2\pi r)\sqrt{r^2 + h^2} + \pi r^2$$

La fórmula para calcular el volumen del cono es la tercera parte del área de la base multiplicada por la altura

$$V = \frac{1}{3}\left(\pi r^2\right)h$$

La Esfera

Una esfera es un sólido que está formado por todos los puntos en el espacio que están a una misma distancia de un punto fijo llamado **centro de la esfera.** La figura siguiente muestra una esfera de radio r



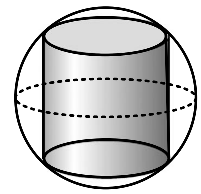
Las fórmulas para calcular el área superficial y el volumen de una esfera son

$$A = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

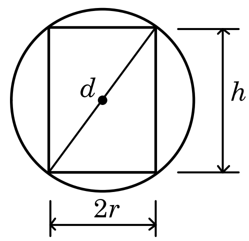
Ejemplo 1: El cilindro inscrito en una esfera

Se inscribe un cilindro circular recto dentro de una esfera de radio 8 cm, como se muestra en la figura. Si la altura del cilindro es el doble de su diámetro, calcule el volumen del cilindro.



Solución

Para establecer como se relacionan la altura y el radio del cilindro con el radio de la esfera, es recomendable hacer una gráfica de una sección transversal del sólido, en donde se vean los datos involucrados.



En la figura de arriba d es el diámetro de la esfera, h es la altura del cilindro y $2r$ es el diámetro del cilindro. Como el triángulo formado por estos segmentos es rectángulo, al utilizar el teorema de Pitágoras se tiene

$$d^2 = (2r)^2 + h^2$$

$$(16)^2 = 4r^2 + h^2$$

Como la altura del cilindro es el doble de su diámetro, entonces

$$h = 2(2r) = 4r$$

Sustituyendo h y despejando r

$$16^2 = 4r^2 + (4r)^2$$

$$256 = 4r^2 + 16r^2$$

$$256 = 20r^2$$

Por lo que el radio del cilindro es

$$r = \sqrt{\frac{256}{20}} = \sqrt{\frac{64}{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

Y la altura del cilindro es

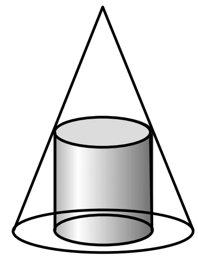
$$h = 4r = 4\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{32\sqrt{5}}{5}$$

Ahora ya se puede calcular el volumen del cilindro

$$V = \left(\pi r^2\right)h = \pi\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2\left(\frac{32\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{(64)(5)(32)\pi\sqrt{5}}{(25)(5)} = \frac{2048\pi\sqrt{5}}{25} \approx 575.47 \text{ cm}^3$$

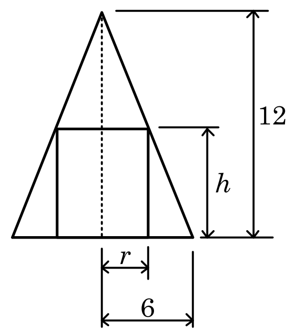
Ejemplo 2: El cilindro inscrito en un cono

Se inscribe un cilindro circular recto dentro de un cono circular recto de radio 6 cm y altura 12 cm, como se muestra en la figura. Si la altura del cilindro es el doble de su radio, calcule el volumen del dentro del cono y fuera del cilindro.



Solución

Sea r el radio del cilindro y h su altura. Al hacer un dibujo de la sección transversal que pasa por el eje de los sólidos se tiene



Los triángulos que se forman son semejantes, pues son triángulos rectángulos y tienen un ángulo común. Al utilizar la proporcionalidad de la altura con respecto a la base se obtiene

$$\frac{h}{12} = \frac{6 - r}{6}$$

Como la altura h del cilindro es igual al doble del radio, $h = 2r$, se tiene

$$\frac{2r}{12} = \frac{6 - r}{6}$$

$$2r = 12 - 2r$$

$$4r = 12$$

$$r = \frac{12}{4} = 3$$

Entonces el radio del cilindro es $r = 3$ cm y la altura es $h = 6$ cm.

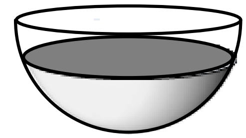
Ahora se puede calcular el volumen dentro del cono y fuera del cilindro que no es más que el volumen del cono menos el volumen del cilindro.

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{cono}} - V_{\text{cilindro}} \\ &= \frac{1}{3}\pi R^2 H - \pi r^2 h \\ &= \frac{1}{3}\pi (6)^2 (12) - \pi (3)^2 (6) \\ &= 144\pi - 54\pi \\ &= 90\pi \end{aligned}$$

El volumen dentro del cono y fuera del cilindro es 90π cm^3.

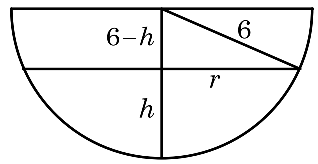
Ejemplo 3: El espejo de agua en un tanque semiesférico

Un depósito tiene forma semiesférica de radio 6 pies y tiene su parte ancha hacia arriba. Si el depósito contiene agua con una profundidad de 3 pies. Calcule el área del espejo de agua que se forma en la superficie del agua.



Solución

El espejo de agua es la sección circular horizontal que se forma en la superficie del agua. Para encontrar la forma como se relacionan los segmentos se dibujara una sección transversal vertical que pase por el centro del depósito, donde r es el radio del espejo de agua circular.



Usando el teorema de Pitágoras se puede expresar el radio r en términos de la altura del agua h y del radio de la esfera

$$r^2 + (6-h)^2 = (6)^2$$
$$r^2 + 36 - 12h + h^2 = 36$$
$$r^2 = 12h - h^2$$
$$r = \sqrt{12h - h^2}$$

Como $h = 6$

$$r = \sqrt{12(4) - (4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ pies}$$

El área del espejo de agua es

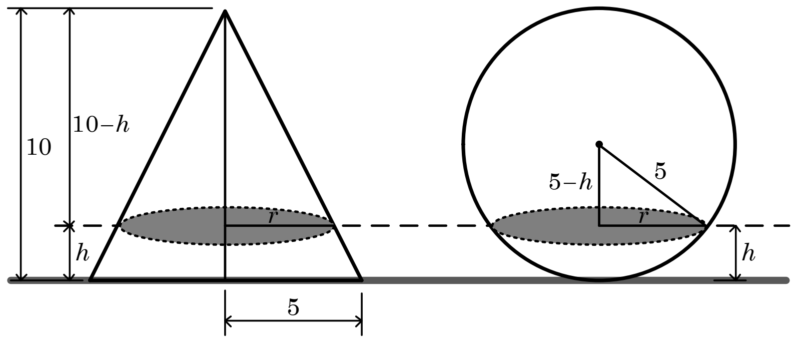
$$A = \pi r^2 = \pi\left(4\sqrt{2}\right)^2 = 32\pi \text{ pies}^2$$

Ejemplo 4: Calculando la altura de un plano

Una esfera de radio 5 cm y un cono de radio 5 cm y altura 10 cm, se encuentran colocados sobre una superficie plana. Se desea trazar un plano paralelo a la superficie de manera que de sus intersecciones con los dos sólidos resulten círculos iguales. ¿A qué distancia de la superficie debe quedar el plano?

Solución

Al trazar un plano a una altura h de la superficie sobre la cual descansan los dos sólidos, como se muestra en la figura siguiente, se forman dos círculos de radios iguales r.



La idea es expresar r en términos de h tanto en el cono como en la esfera. Como los radios de los círculos son iguales, se puede establecer una ecuación en términos de h, al igualar el radio del cono con el radio de la esfera.

En el cono se forman dos triángulos semejantes, en donde

$$\frac{10-h}{10} = \frac{r}{5}$$

$$r = \frac{10-h}{2}$$

En la esfera se forma un triángulo rectángulo, donde la hipotenusa es el radio de la esfera y uno de los catetos es el radio del círculo, entonces

$$r^2 + (5-h)^2 = 5^2$$

$$r^2 = 25-(5-h)^2$$

$$r^2 = 25-25+10h-h^2$$

$$r = \sqrt{10h-h^2}$$

Igualando los radios ya que éstos son iguales

$$\sqrt{10h-h^2} = \frac{10-h}{2}$$

Al resolver la ecuación anterior se obtendrá la altura h

$$10h-h^2 = \left(\frac{10-h}{2}\right)^2$$

$$10h-h^2 = \frac{100-20h+h^2}{4}$$

$$40h-4h^2 = 100-20h+h^2$$

$$5h^2-60h+100 = 0$$

$$h^2-12h+20 = 0$$

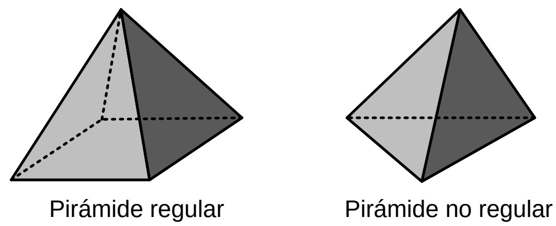
$$(h-10)(h-2) = 0$$

Las soluciones de la ecuación anterior son $h = 10$ y $h = 2$. Como puede comprobarse los dos valores de h resuelven el problema, ya que si $h = 10$ se obtienen dos círculos iguales de radio $r = 0$, mientras que cuando $h = 2$ se obtienen dos círculos iguales de radio $r = 4$.

Pirámides

Una **Pirámide** es un sólido que tiene como base un polígono y un punto fuera del plano que contiene a la base llamado **vértice**, de tal forma que cada vértice del polígono está unido al vértice de la pirámide por un segmento llamado **arista**. Dos aristas consecutivas junto con un lado de la base forman un triángulo llamado **cara lateral.**

Una pirámide se llama **pirámide regular** si su base es un polígono regular y sus caras laterales son triángulos iguales. **La altura de una pirámide** es el segmento perpendicular que va desde el vértice al plano que contiene a la base. El **apotema** de una pirámide regular es la altura de cualquiera de los triángulos iguales que sirven de caras laterales. La figura siguiente muestra una pirámide regular de base cuadrada y una pirámide no regular de base triangular.

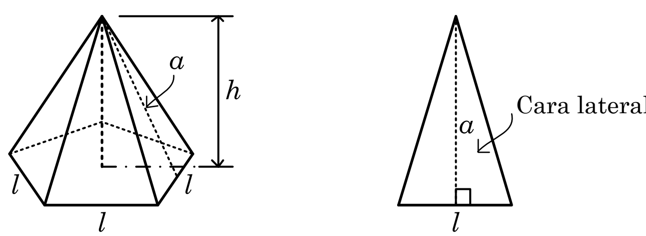


Área y volumen de una pirámide

El **área lateral** de una pirámide es igual a la suma de las áreas de sus caras laterales. El **área total** es igual a la suma del área lateral más el área de la base.

Para calcular el área lateral y el área total en una pirámide no regular es necesario conocer las medidas de todas sus caras laterales y el área de su base.

Para calcular el área lateral de una pirámide regular únicamente se necesita calcular el área de una de las caras laterales y multiplicarla por el número de lados. La figura siguiente muestra una pirámide regular y una de sus caras laterales



Si la base tiene n lados, el área lateral es

$$A.L. = n\left(\frac{1}{2}al\right) = \frac{nal}{2}$$

El volumen de una pirámide regular se obtiene multiplicando el área de la base B por la altura y dividiendo entre tres. (Se requiere de matemática más avanzada para deducir las fórmulas de volumen)

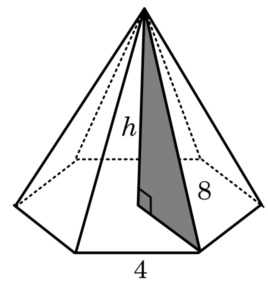
$$V = \frac{1}{3}Bh$$

Ejemplo 5: Área y volumen de una pirámide

La arista lateral de una pirámide regular mide 8 cm. La base es un hexágono regular de lado 4 cm. Encontrar el área lateral y el volumen de la pirámide.

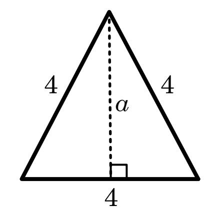
Solución

En la figura se muestra la pirámide hexagonal, Observe que la arista lateral, la altura h y el radio del hexágono forman un triángulo rectángulo, el cual se muestra sombreado en la figura



La base es un hexágono de lado 3 cm, para obtener el área es necesario calcular el apotema. Por el teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} 4^2 &= a^2 + 2^2 \\ a &= \sqrt{16-4} \\ &= \sqrt{12} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

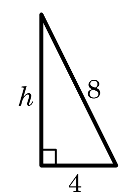


El área de la base es

$$B = 6\left(\frac{1}{2}(4)\left(2\sqrt{3}\right)\right) = 24\sqrt{3}$$

Para calcular la altura de la pirámide, nuevamente se utiliza el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo que tiene como hipotenusa una arista

$$\begin{aligned} h^2 + 4^4 &= 8^2 \\ h &= \sqrt{64-16} \\ &= \sqrt{48} \\ &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

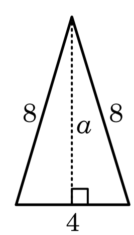


Entonces el volumen de la Pirámide es

$$V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\left(24\sqrt{3}\right)\left(4\sqrt{3}\right) = (32)(3) = 96\,\text{cm}^3$$

Para obtener el área lateral primero hay que calcular el área de una de las caras. La apotema de la cara lateral es

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{8^2 - 2^2} = \sqrt{60} \\ &= 2\sqrt{15} \end{aligned}$$



Entonces el área de una cara lateral es

$$A = \frac{1}{2}(4)\left(2\sqrt{15}\right) = 4\sqrt{15}$$

El área lateral de la pirámide es

$$A.L. = 6A = 6\left(4\sqrt{15}\right) = 24\sqrt{15}$$

Ejercicios de la sección 2.7

1. El volumen de un cilindro es $320\pi\,\text{cm}^3$ y su altura es 5 cm. Calcule su área lateral.

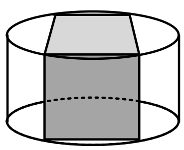
2. Encuentre el volumen de un cilindro generado por la rotación de un rectángulo de 4 cm por 10 cm alrededor de su lado menor.

3. En un cilindro en donde el área lateral es el doble de la suma del área de las bases. ¿Cómo están relacionadas su altura y su radio.

4. En una fábrica se va a construir una lata cilíndrica de aluminio para colocar su producto. La altura del cilindro debe ser de 10 pulgadas y el área superficial total igual a 112π pulgadas cuadradas. Determine el radio de la lata cilíndrica.

5. Se inscribe un cilindro circular recto en un prisma rectangular de base cuadrada de lado 4 cm y altura 6 cm. Encuentre el volumen del cilindro.

6. Se inscribe un cubo en un cilindro circular recto como se muestra en la figura. Si la arista del cubo mide 5 cm. Calcule el volumen del cilindro.



7. Encontrar en qué porcentaje aumenta el volumen de un cilindro cuando la altura se aumenta en 10% y el radio se aumenta en 25%.

8. Un depósito cilíndrico descansa sobre el suelo de tal forma que su eje está en forma horizontal. La altura del cilindro es 6 m y su diámetro es 3 m. Calcule el área del espejo de agua cuando la altura del agua es de 2 m?

9. Un cono de radio 6 cm tiene un área total de $156\pi\,\text{cm}^2$. Encontrar su volumen.

10. Un cilindro y un cono tienen radios y alturas iguales. ¿En qué razón están sus volúmenes?

11. Un cono se inscribe en una pirámide rectangular regular, de tal forma que el vértice del cono coincide con el vértice de la pirámide. Encontrar el volumen de la pirámide si la directriz del cono mide 9 cm y el radio de la base del cono mide 4 cm.

12. Se funde un cilindro metálico de radio 6 y altura 18 cm. Con el material resultante se construye un cono de radio 7 cm. Encontrar la altura del cono.

13. Se construye una tienda de campaña cónica utilizando una lona que tiene forma de semicírculo de radio 2 m. Encuentre el volumen de la tienda de campaña.

14. Encuentre el área de una esfera que tiene un volumen de $288\pi\,\text{cm}^3$.

15. Se corta una esfera de radio 8 cm con un plano que pasa a 3 cm de su centro. Encontrar el área de la sección transversal circular.

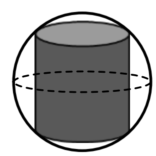
16. Una esfera de radio 6 cm. Será recubierta con una capa metálica de 0.5 cm de espesor. Calcule la cantidad de material necesario para recubrir la esfera.

17. Se circunscribe un cilindro circular recto a una esfera de radio R. Encuentre el área lateral del cilindro en términos de R.

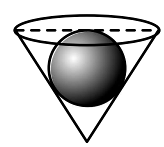
18. Se inscribe un cilindro circular recto dentro de una esfera de radio 6 cm. La altura del cilindro es igual a su diámetro. Encontrar el volumen del cilindro.

19. Se funden dos esferas de plástico de radios k y $2k$. El material resultante se utiliza para construir un cilindro de altura $3k$. Encontrar el radio del cilindro.

20. Se inscribe un cilindro recto de altura 8 cm en una esfera de radio 5 cm. Encontrar el volumen del cilindro.



21. Se inscribe una esfera dentro de un cono circular recto de base 8 cm y generatriz 8 cm, como se muestra en la figura. Encontrar el volumen de la esfera.



22. Una esfera de radio 6 cm. Tiene un cubo inscrito y un cubo circunscrito. Encontrar la razón de las áreas del cubo inscrito al cubo circunscrito.

23. Para fabricar municiones de escopeta de 0.25 cm de diámetro se funden cilindros de plomo de 2 cm de diámetro y 20 cm de longitud. ¿Cuántas municiones se obtienen de un cilindro de plomo?

24. Un cono truncado se forma cuando un cono regular recto de 5 cm de radio y 12 cm de altura es cortado por un plano paralelo a la base del cono y que pasa a 5 cm de la base. Calcule el volumen del cono truncado.

25. Encontrar el área lateral de una pirámide cuya base es un hexágono de lado 6 cm y que tiene una altura de 12 cm.

26. Cada una de las aristas de una pirámide triangular regular mide 4 cm. Calcule su volumen.

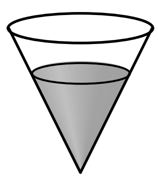
27. La base de una pirámide es un cuadrado de lado 10 cm. Cada una de las aristas mide 15 cm. Encuentre el volumen y el área lateral de la pirámide.

28. La artista de una pirámide hexagonal regular mide 8 cm. El lado de la base mide 4 cm. Encontrar el volumen de la pirámide.

29. Un depósito tiene la forma de un cono circular recto invertido de 2 metros de radio y 6 metros de altura.

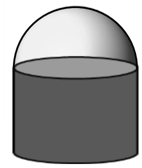
(a) Calcule la capacidad total del depósito.

(b) Si el depósito contiene agua hasta una altura de 4 metros. Calcule el volumen de agua.

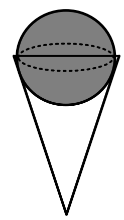


30. Un cono circular recto cuya altura es igual al doble del diámetro de su base se inscribe en una esfera de radio 6 cm. Calcule el volumen del cono.

31. Se va a construir una bodega para almacenar granos con la forma de un cilindro circular recto coronado con un techo semiesférico, como se muestra en la figura. Si las paredes del cilindro tienen una altura de 5 metros. Si el área superficial total es de 336 metros cuadrados, determine el radio del cilindro.



32. Un cono de helado tiene 2 pulgadas de diámetro en la parte superior y 4 pulgadas de altura. En él se vierte una bola de helado esférica de modo que la mitad de ella queda dentro del cono, como se muestra en la figura. Encuentre el volumen de la esfera de helado.



33. En el problema anterior, si la bola de helado se derrite, calcule la altura el helado alcanza dentro del cono.