Curvas solución sin la solución

Campos direccionales

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \to \quad \frac{dy}{dx} = \text{pendiente } m$$

$$m = f(x,y) \to$$ en cada punto de la función $f(x,y)$ se tiene una pendiente

Una solución de una ecuación diferencial es una función derivable cuya gráfica $y = f(x)$ tiene su pendiente en cada punto $(x, g(x))$ a través de la cual pasa $y'(x) = f(x,y)$ entonces es una curva solución.

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = m$$

$$f(x,y) = m = c \to \text{isoclinas}$$

en cada isoclina se trazan pequeños segmentos de rectas que vienen dados por c.

$c = ctc, 0, \pm 1, \pm 2$

$c = m = 0$ —

$c = 1 \to / \to 45°$

$c = -1 \to \backslash \quad -45°$

$c = 2 \to / \quad 63$

$c = -2 \to \backslash \quad -63$

Al conjunto de isoclinas se conoce como campo direccional.

Ej. Trazar el campo direccional de la Ec.

$$\frac{dy}{dx} = x - y$$

y que muestre una curva solución.

$$\frac{dy}{dx} = x - y = c \to x - y = c$$

$$x - c = y \to y = x - c$$

recta.

$c = 0 \rightarrow \boxed{y = x}$

$c = 1 \rightarrow \boxed{y = x - 1}$

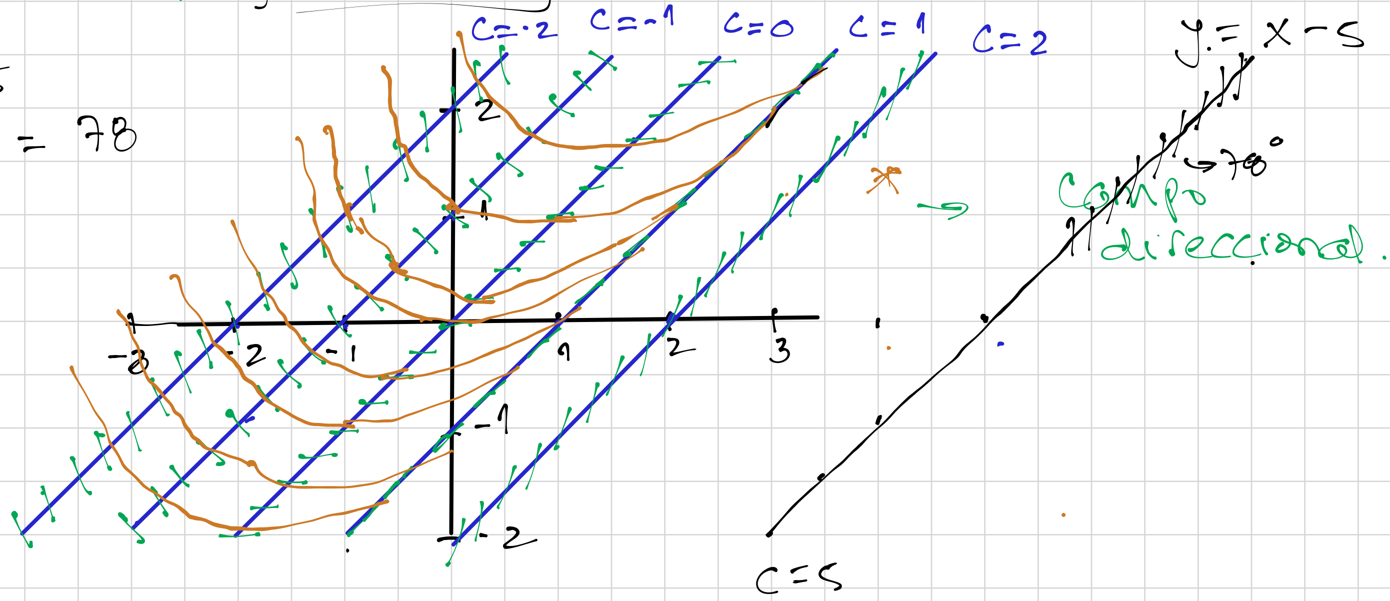
$c = -1 \rightarrow \boxed{y = x + 1}$

$c = 2 \quad y = x - 2$

$c = -2 \quad y = x + 2$

$m = 5$

$tg^{-1} m = 78$



Ej. $\frac{dy}{dx} = x^2 - y$

$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = x^2 - y = c \rightarrow \boxed{y = x^2 - c}$

Parábolos.

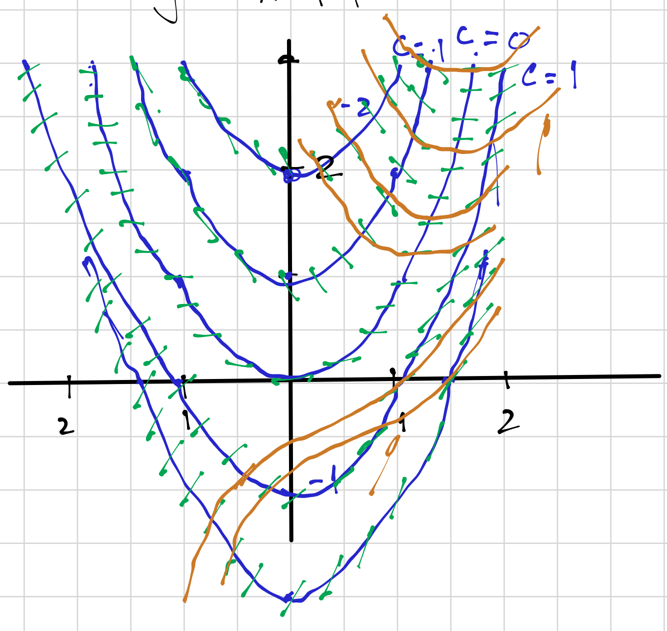
$c = 0 \rightarrow y = x^2$

$c = 1 \rightarrow y = x^2 - 1$

$c = -1 \rightarrow y = x^2 + 1$

$c = 2 \quad y = x^2 - 2$

$c = -2 \quad y = x^2 + 2$



Ecuaciones separables

una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\,h(y)$$

se dice que es separable o que tiene variables separable

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx$$

$$H(y) = G(x) + C$$

Ej. Resolver

$$e^{x} y \frac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$$

$$e^{x} y \frac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x} \cdot e^{-y} = e^{-y}(1+e^{-2x})$$

$$e^{x} y \frac{dy}{dx} = e^{-y}(1+e^{-2x}) \qquad \left(\frac{1}{e^{x}} + \frac{e^{-2x}}{e^{x}}\right)$$

$$\frac{y\,dy}{e^{-y}} = \frac{(1+e^{-2x})}{e^{x}}\,dx \qquad \frac{1}{e^{x}} = e^{-x} \qquad e^{-2x} \cdot e^{-x}$$

$$\int y e^{y}\,dy = \int (e^{-x} + e^{-3x})\,dx$$

$u = y \qquad du = dy$

$\int dv = \int e^{y}\,dy \qquad v = e^{y}$

$u = -x$

$du = -dx$

$-du = dx$

$-\int e^{u}\,du$

$$y e^{y} - \int e^{y}\,dy = y e^{y} - e^{y}$$

$$y e^{y} - e^{y} = -e^{-x} - \frac{1}{3}e^{-3x} + C$$

Ej. Resolver $(e^{y}+1)^{2} e^{-y}\,dx + (e^{x}+1)^{3} e^{-x}\,dy = 0$

$$(e^x+1)^3 e^{-x}\,dy = -(e^y+1)^2 e^{-y}\,dx$$

$$\int \frac{dy}{(e^y+1)^2 e^{-y}} = \int -\frac{dx}{(e^x+1)^3 e^{-x}}$$

$$\int \frac{e^y}{(e^y+1)^2}\,dy = -\int \frac{e^x}{(e^x+1)^3}\,dx$$

$u = e^y+1$ $\qquad\qquad$ $v = e^x+1$

$du = e^y\,dy$ $\qquad\qquad$ $dv = e^x\,dx$

$$\int \frac{du}{u^2} = -\int \frac{dv}{v^3} \rightarrow \int u^{-2}\,du = \int -v^{-3}\,dv$$

$$\frac{u^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{v^{-3+1}}{\underset{-2}{-3+1}} + C$$

$$-u^{-1} = \frac{1}{2}v^{-2} + C$$

$$-(e^y+1)^{-1} = \frac{1}{2}(e^x+1)^{-2} + C \rightarrow \text{Solución Implícita}$$

Ej. Resolver

$$y\ln x\,\frac{dx}{dy} = \left(\frac{y+1}{x}\right)^2 \qquad \frac{(y+1)^2}{x^2}$$

V.D $\quad$ V.I

$$y\ln x\,dx = \frac{(y+1)^2}{x^2}\,dy$$

$$\int x^2\ln x\,dx = \int \frac{(y+1)^2}{y}\,dy = \int \frac{y^2+2y+1}{y}\,dy$$

$$\int x^2\ln x\,dx = \int (y+2+y^{-1})\,dy \qquad \int\frac{dy}{y}$$

$u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x}\,dx \rightarrow uv - \int v\,du$

$\int dv = \int x^2\,dx \qquad v = \frac{1}{3}x^3$

$\frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int \frac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x}}\,dx$

$\frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx$

$\frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 = \frac{1}{2}y^2 + 2y + \ln y + c$

Ej. Resolver $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + 2y - x - 2}{xy - 3y + x - 3}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x+2) - 1(x+2)}{y(x-3) + 1(x-3)}$

$u = y - 1$
$du = dy$
$2\int \frac{du}{u}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{(y-1)(x+2)}{(y+1)(x-3)}$

$\int \frac{(y+1)}{(y-1)}\,dy = \int \frac{(x+2)}{(x-3)}\,dx$

$$\begin{array}{r|l} x-3 & x+2 \\ & \underline{-x+3} \\ & 5 \end{array} \quad 1$$

$$\begin{array}{r|l} y-1 & y+1 \\ & \underline{-y+1} \\ & 2 \end{array} \quad 1$$

$\rightarrow \int 1 + \frac{2}{y-1}\,dy = \int 1 + \frac{5}{x-3}\,dx$

$y + 2\ln(y-1) = x + 5\ln(x-3) + c$

Ej. Resolver $x^2\frac{dy}{dx} = y - xy \qquad y(-1) = -1$

$y(x_0) = y_0$

$x^2\frac{dy}{dx} = y(1-x)$

$y(-1) = -1$
$y'(-1) = 5$

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{1-x}{x^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int (x^{-2} - \frac{1}{x})\,dx$$

$$\ln|y| = -x^{-1} - \ln|x| + c \rightarrow \text{sol general.}$$

$y(-1) = -1$ $x = -1$ $y = -1$

$$\cancel{\ln|-1|}^{0} = -(-1)^{-1} - \cancel{\ln|-1|}^{0} + c$$

$$c = -1$$

<u>sol</u> $\ln y = -x^{-1} - \ln x - 1$

<u>Ecuaciones lineales</u>

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)\,y = g(x)$$

se dice que es una ecuación lineal de la variable dependiente y.

$$\left[a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)\right] * \frac{1}{a_1(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}\,y = \frac{g(x)}{a_1(x)}$$

$$P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)} \qquad Q(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \rightarrow \text{Forma estandar}$$

Procedimiento

1. Encontrar un factor de integración

$$F.I. = e^{\int P(x)\,dx}$$

2. multiplicar el factor de integración por toda la ecuación.

$$\underbrace{F.I.\frac{dy}{dx} + F.I.\,P(x)\,y}_{} = F.I.\,Q(x)$$

3. Resolver la Ecuación resultante

$$\frac{d}{dx}(F.I.\,y) = F.I.\,Q(x)$$

$$\int d(F.I.\,y) = \int F.I.\,Q(x)\,dx$$

$$F.I.\,y = \int F.I.\,Q(x)\,dx + C$$

$$y = \frac{\int F.I.\,Q(x)\,dx + C}{F.I.}$$