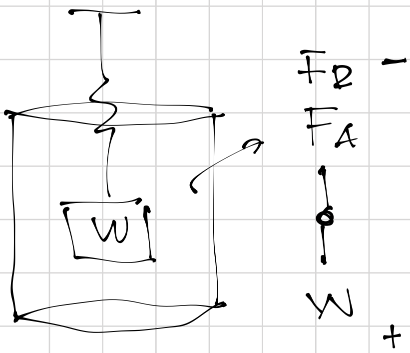
Movimiento Amortiguado



$$F_A = \beta \frac{dx}{dt}$$

$$F_R = Kx$$

$$\Sigma F_y = ma$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - K(x+s) - \beta\frac{dx}{dt}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \cancel{mg - Ks} - Kx - \beta\frac{dx}{dt}$$

$$\left[m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + Kx = 0 \right] * \frac{1}{m}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{K}{m}x = 0}$$

$$2\lambda = \frac{\beta}{m} \qquad w^2 = \frac{K}{m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + w^2x = 0$$

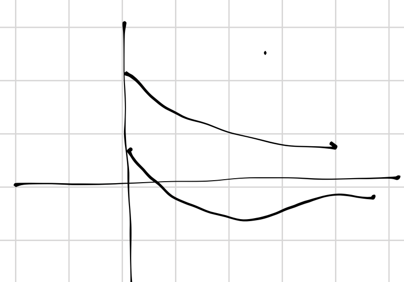
$$m^2 + 2\lambda m + w^2 = 0 \rightarrow m = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 - 4(1)(w^2)}}{2(1)}$$

$$m = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - w^2}$$

Caso 1 $\quad \lambda^2 - w^2 > 0 \rightarrow$ raices reales no repetidas.

m_1 y m_2

$$x(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t}$$



movimiento sobreamortiguado.

Caso 2 $\quad \lambda^2 - w^2 = 0 \rightarrow$ raices reales repetidas.

$m_1 = m_2 \quad m.$

$$x(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 t e^{m_1 t}$$

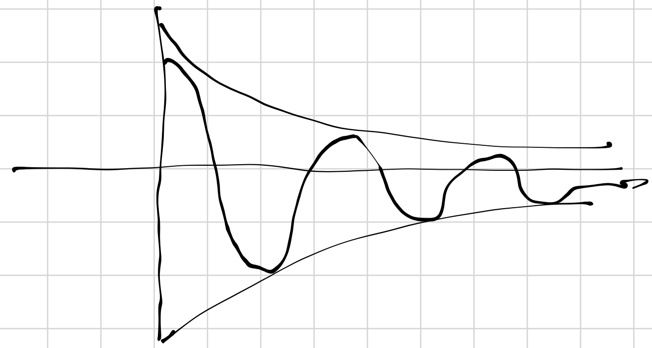
movimiento Criticamente Amortiguado.

Caso 3 $\quad \lambda^2-\omega^2<0 \to$ raices reales y complejas.

$$m = \alpha \pm \beta i$$

$$x(t) = e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t + c_2\operatorname{sen}\beta t)$$

movimiento Subamortiguado

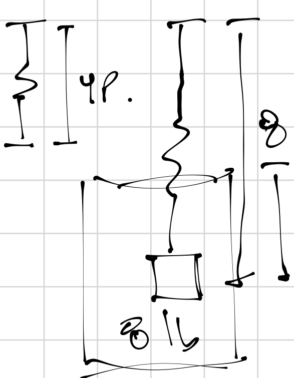


$A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$

$\phi = tg^{-1}\dfrac{c_1}{c_2}$

$x(t)=Ae^{\alpha t}\operatorname{sen}(\omega t+\phi)$

Ej. Un resorte de 4 pies mide 8 pies de largo despues de colgarle una masa que pesa 8 libras. El medio por el que se mueve la masa ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a $\sqrt{2}$ veces la velocidad instantanea. Encuentre la ecuacion del movimiento si la masa se libera inicialmente desde la posicion de equilibrio con una velocidad descendente de 5 p/s. Calcule el tiempo en que la masa alcanza su desplazamiento extremo desde la posicion de equilibrio, Cual es la posicion de la masa en ese instante



$x(0)=0$

$x'(0)=5$ p/s.

$x=4$ pies

$F_A = \sqrt{2}\,\dfrac{dx}{dt}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$W = 8lb = mg \longrightarrow m = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ slug.

$F = W = kx$

$8lb = k(4p) \rightarrow k = \frac{8}{4} = 2 \frac{lb}{pie}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\sqrt{2}}{1/4}\frac{dx}{dt} + \frac{2}{1/4}x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\sqrt{2}\frac{dx}{dt} + 8x = 0$$

$m^2 + 4\sqrt{2}m + 8 = 0 \qquad m_1 = -2.82$

$m_2 = -2.82$

$$x(t) = C_1 e^{-2.82t} + C_2 t e^{-2.82t}$$

$x(0) = 0 \qquad 0 = C_1 e^{-2.82(0)} + C_2(0)e^{-2.82(0)}$

$C_1 = 0$

$x'(0) = 5$

$$x'(t) = -2.82 C_1 e^{-2.82t} - 2.82 C_2 t e^{-2.82t} + C_2 e^{-2.82t}$$

$$5 = -2.82 C_2(0) e^{-2.82(0)} + C_2 e^{-(2.82(0))}$$

$C_2 = 5$

$$\boxed{x(t) = 5te^{-2.82t}}$$

Puntos Criticos

$x'(t) = 0$

$$5(-2.82)te^{-2.82t} + 5e^{-2.82t} = 0$$

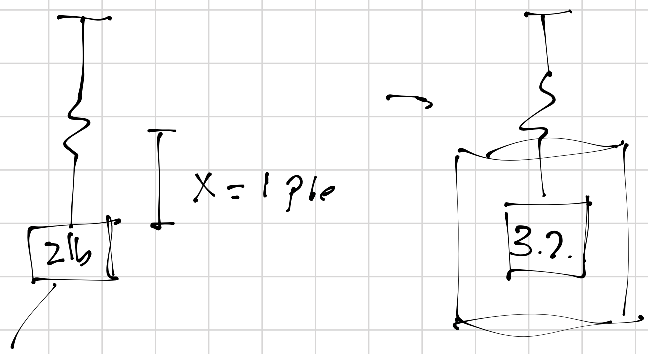
$$e^{-2.82t}(-5(2.82)t + 5) = 0$$

$$+5(2.82)t = +5$$

$$t = \frac{1}{2.82} = 0.354$$

$$x(0.354) = 5(0.354)e^{-2.82(0.354)} = 0.652 \text{ pies}$$

Ej. Una fuerza de 2 libras alarga 1 pie un resorte. Una masa que pesa 3.2 libras se une al resorte y luego se sumerge el sistema en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a 0.4 veces la velocidad instantanea. Encuentre la Ecuación de movimiento si inicialmente se libera la masa desde el reposo en un punto situado a 1 pie por encima de la posición de equilibrio.



$$F_A = 0.4\frac{dx}{dt}$$

$$x'(0) = 0$$
$$x(0) = -1$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$W = 3.2\text{ lb} = mg \qquad m = \frac{3.2}{32} = \frac{1}{10}\text{ slug.}$$

$$F = W = kx$$
$$2\text{ lb} = k(1) \rightarrow k = 2\,\frac{\text{lb}}{\text{pie}}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{0.4}{1/10}\frac{dx}{dt} + \frac{2}{1/10}x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 20x = 0$$

$$m^2 + 4m + 20 = 0 \rightarrow m = -2 \pm 4i$$

$$x(t) = e^{-2t}(C_1\cos 4t + C_2 \operatorname{sen} 4t)$$

$x(0) = -1 \qquad x'(0) = 0$

$$-1 = e^{-2(0)}\left(C_1 \cos 4(0) + C_2 \,\text{sen}\, 4(0)\right)$$

$$\boxed{C_1 = -1}$$

$$x'(t) = -4e^{-2t} C_1 \,\text{sen}\, 4t - 2e^{-2t} C_1 \cos 4t + 4e^{-2t} C_2 \cos 4t - 2e^{-2t} C_2 \,\text{sen}\, 4t$$

$$0 = -4e^{-2(0)} C_1 \,\text{sen}\, 4(0) - 2C_1 e^{-2(0)} \cos 4(0) + 4e^{-2(0)} C_2 \cos 4(0) - 2e^{-2(0)} C_2 \,\text{sen}\, 4(0)$$

$$0 = -2C_1 + 4C_2$$

$$0 = -2(-1) + 4C_2 \qquad C_2 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x(t) = e^{-2t}\left(-\cos 4t - \frac{1}{2} \,\text{sen}\, 4t\right)$$

Forma alternativa

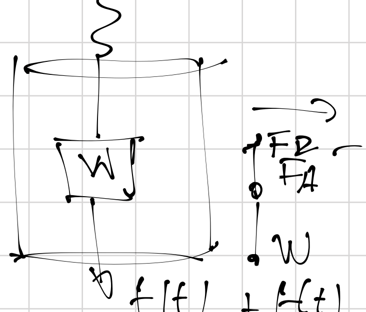
$$x(t) = Ae^{-2t} \,\text{sen}\,(4t + \phi)$$

$$A = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\phi = tg^{-1} \frac{C_1}{C_2} = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = tg^{-1}\, 2 = 1.1071$$

$$x(t) = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-2t} \,\text{sen}\,(4t + 1.1071)$$

Movimiento Forzado < Amortiguado / no Amortiguado.



F_R

$$F_A = \beta \frac{dx}{dt}$$

$$\Sigma F_y = ma$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - K(x+s) - F_A + f(t)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \cancel{mg - ks}^{\,0} - kx - F_A + f(t)$$

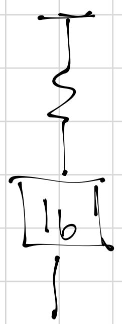
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \cancel{\beta\frac{dx}{dt}} \quad kx = f(t) \rightarrow$$ forzada Amortiguada.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = f(t) \rightarrow$$ forzado no Amortiguado.

Ec. dif. no Homogenea.

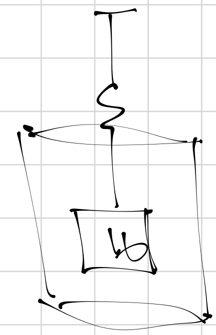
$$x(t) = X_{transitorio} + X_{estacionario}.$$

Ej. una masa que pesa 16 libras alarga $\frac{8}{3}$ pie un resorte. La masa se libera inicialmente desde el reposo desde un punto 2 pies abajo de la posición de equilibrio y el movimiento posterior ocurre en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a $\frac{1}{2}$ de la velocidad instantanea. Encuentre la ecuación del movimiento si se aplica a la masa una fuerza externa igual a $f(t) = 10\cos 3t$



$x = \frac{8}{3}$ pie

$$\boxed{\begin{aligned} x'(0) &= 0 \\ x(0) &= 2\text{ pie.} \end{aligned}}$$



$F_A = \frac{1}{2}\frac{dx}{dt}$ (β)

$f(t) = 10\cos 3t$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{f(t)}{m}$$

$$W = mg \rightarrow 16 = m(32) \rightarrow m = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}\text{ slug.}$$

$$F = W = kx \rightarrow k = \frac{16}{\frac{8}{3}} = 6\ \frac{lb}{pie}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1/2}{1/2}\frac{dx}{dt} + \frac{6}{1/2}x = \frac{10\cos 3t}{1/2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 12x = 20\cos 3t$$

$$x = x_t + x_e$$

$\underline{x_t}$ $\quad n^2 + n + 12 = 0 \quad \rightarrow \quad n = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{47}}{2} i$

$$x_t = e^{-1/2\, t}\left(c_1 \cos \frac{\sqrt{47}}{2} t + c_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{47}}{2} t\right)$$

$\underline{x_e}$ $\quad f(t) = 20\cos 3t$

$$\beta = 3$$

$$(D^2 + 9)(20\cos 3t) = 0 \quad \rightarrow \quad D^2 + 9 = 0 \quad \rightarrow \quad D = \pm 3i$$

$$x_e = c_3 \cos 3t + c_4 \operatorname{sen} 3t$$

$$x' = -3c_3 \operatorname{sen} 3t + 3c_4 \cos 3t$$

$$x'' = -9c_3 \cos 3t - 9c_4 \operatorname{sen} 3t$$

$$-9c_3\cos 3t - 9c_4 \operatorname{sen} 3t - 3c_3 \operatorname{sen} 3t + 3c_4 \cos 3t + 12c_3 \cos 3t + 12c_4 \operatorname{sen} 3t = 20\cos 3t$$

$$\cos 3t\,(-9c_3 + 3c_4 + 12c_3) = 20\cos 3t$$

$$3c_3 + 3c_4 = 20 \quad (1)$$

$$\operatorname{sen} 3t\,(-9c_4 - 3c_3 + 12c_4) = 0$$

$$\begin{aligned} -3c_3 + 3c_4 &= 0 \quad + \quad (2) \\ 3c_3 + 3c_4 &= 20 \end{aligned}$$

$$6c_4 = 20 \quad \rightarrow \quad c_4 = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

$$-3c_3 + 3c_4 = 0$$

$$3c_4 = 3c_3 \quad \rightarrow \quad c_3 = c_4 = \frac{10}{3}$$

$$x_e = \frac{10}{3}\cos 3t + \frac{10}{3}\operatorname{sen} 3t$$

$$x = x_t + x_e$$

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{47}}{2}t + c_2\sin\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) + \frac{10}{3}\cos 3t + \frac{10}{3}\sin 3t$$

$x(0) = 2 \qquad x'(0) = 0$

$$2 = \overset{1}{e^{-\frac{1}{2}(0)}}\, c_1 \overset{1}{\cos\frac{\sqrt{47}}{2}(0)} + c_2 e^{-\frac{1}{2}(0)} \overset{0}{\sin\frac{\sqrt{47}}{2}(0)} + \frac{10}{3}\overset{1}{\cos 3(0)} + \frac{10}{3}\overset{0}{\sin 3(0)}$$

$$2 = c_1 + \frac{10}{3} \rightarrow c_1 = 2 - \frac{10}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$x' = -\frac{\sqrt{47}}{2}e^{-\frac{1}{2}t}c_1\sin\frac{\sqrt{47}}{2}t - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}c_1\cos\frac{\sqrt{47}}{2}t + \frac{\sqrt{47}}{2}c_2 e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{47}}{2}t - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}c_2\sin\frac{\sqrt{47}}{2}t$$

$$- \frac{10(3)}{3}\sin 3t + \frac{10(3)}{3}\cos 3t$$

$$0 = -\frac{1}{2}c_1 + \frac{\sqrt{47}}{2}c_2 + 10 \qquad -\frac{2}{3} + 10$$

$$\frac{\sqrt{47}}{2}c_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}\right) + 10 \rightarrow \qquad \frac{28}{3}$$

$$\frac{\sqrt{47}}{2}c_2 = \frac{28}{3} \qquad c_2 = \frac{56}{3\sqrt{47}}$$

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(-\frac{4}{3}\cos\frac{\sqrt{47}}{2}t + \frac{56}{3\sqrt{47}}\sin\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) + \frac{10}{3}\cos 3t + \frac{10}{3}\sin 3t$$