Clase Física 1 13

Movimiento Oscilatorio

Ecuaciones del MAS

Ejemplo 1. Un sistema masa resorte con una masa de 0.5kg se coloca en un movimiento oscilatorio descrito por la siguiente función cosenoidal $\boldsymbol{x(t) = 4\cos(\pi t + \pi/4)\ \ en\ m}$

a) calcular la amplitud , *frecuencia(f)* , periodo del sistema de oscilación

Para esta condición es mejor identificar la información proporcionada por la función para realizar el calculo

Amplitud(A ó Xmax) = 4m (es el valor que acompaña a la función sen o cos)

El valor que multiplica al tiempo dentro de la función es el valor de la frecuencia de oscilación angular ω

$$\omega = \pi \frac{rad}{s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \rightarrow \qquad T = \frac{2\pi}{\pi} = 2\ s$$

La frecuencia se calcula de la misma forma a partir de su expresión o con el valor del periodo

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} \approx 0.5\ Hz$$

b) estimar las expresiones para la velocidad y aceleración en función del tiempo para esta expresión

Para este caso dependiendo de la función que se proporcione se puede integrar o derivar en función del tiempo

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -4sen\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) * \pi$$

$$v(t) = -4\pi\ sen\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \quad en \frac{m}{s}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -4\pi \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) * \pi$$

$$a(t) = -4\pi^2 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \quad en\ \frac{m}{s^2}$$

c) calcular los valores de posición, velocidad y aceleración del sistema masa-resorte en el instante t= 1.5s

En este caso lo mejor será simplemente sustituir en las funciones calculadas anteriormente ya que cada instante de tiempo cambian estas características (Recordatorio calcula en RAD para este punto del curso).

$$x(t=1.5) = 4\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = 4\cos(\pi(1.5) + \pi/4) = +2.82m$$

$$v(t=1.5) = -4\pi\, sen\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = -4\pi\, sen\left(\pi(1.5) + \frac{\pi}{4}\right) = +8.886\ \frac{m}{s}$$

$$a(t=1.5) = -4\pi^2\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = -4\pi^2\cos\left(\pi(1.5) + \frac{\pi}{4}\right) = -27.91\ m/s^2$$

Los signos de los resultados nos ayudan a establecer las direcciones del movimiento ya que son características de vector pero están basadas en el punto de equilibrio del sistema masa-resorte.

d) Calculo de velocidad y aceleración máxima del sistema masa-resorte.

Para estos casos se debe de recordar que los valores máximos se darán cuando las funciones tomen sus valor de

+/- 1 por lo cual es muy útil el recordar que lo que acompañe a la función serán sus valores máximos

$$v_{max} = \pm A\omega = \pm 4(\pi) = \pm 4\pi\frac{m}{s} \approx 12.57\frac{m}{s}$$

$$a_{max} = \pm A\omega^2 = \pm 4(\pi)^2 = \pm 4\pi^2\frac{m}{s^2} \approx 39.48\ m/s^2$$

Calculo de los valores mínimos para estos casos se darán un valor de 0 pero dependerá mucho en que posición se dará estos casos tomar en consideración la funciones que trabaje

e) Calcular el desplazamiento del sistema masa resorte en el intervalo de 0 a 1.5 s

Para este caso solo se necesitara las posiciones en los tiempos determinados

$$x(t=1.5) = 4\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = 4\cos(\pi(1.5) + \pi/4) = +2.82m$$

$$x(t=0) = 4\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = 4\cos(\pi(0) + \pi/4) = +2.82m$$

$$\Delta x = x_f - x_o = +2.82m - (+2.82m) = 0\ m$$

En estos casos recordar que hay una dependencia de la función trigonométrica para el calculo lo cual es de considerar siempre.

f) calcular la constate de resorte del sistema masa-resorte

$$\omega^2 = \frac{k_{res}}{m} \quad \rightarrow \quad k_{res} = m\omega^2 = 0.5(\pi)^2 = 4.93\ N/m$$

g) los valores de la fuerza neta y la fuerza del resorte en los instantes de t= 2 s

$$F_{res} = -k_{res}x(t) = -4.93(4)\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = -19.74\cos\left(\pi(2) + \frac{\pi}{4}\right) = -13.96\ N$$

$$F_{neta} = m\,a(t) = 0.5\left(-4\pi^2\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\right) = -2\pi^2\cos\left(\pi(2) + \frac{\pi}{4}\right) = -13.96\ N$$

En este resultado es igual debido a que la fuerza que genera el movimiento es la fuerza de reconstitución del resorte.

Ejercicio 3. Un sistema de masa-resorte está bajo un sistema MAS, la ecuación que representa la aceleración en función del tiempo es $a(t) = -32\pi^2 \cos(16\pi t - \pi)$, donde la a esta en m/s^2.

1. Determine la máxima rapidez de la masa en m/s :

A) 16.0π B) 4.0π C) 2.0π D) 1.0π E) 8π

2. Determine la posición x en m donde la velocidad del bloque es mínima:

A)+/- 0.125 B) +/- 0.150 C) +/- 0.100 D) +/- 0.075 E) +/- 0.0500

Resolución en estos casos podríamos realizar una integración para determinar las expresiones de velocidad y posición, tendremos mayor facilidad al interpretar la información de la función de aceleración.

$$a_{max} = A\omega^2$$

$$a_{max} = 32\pi^2\, rad/s^2 \quad \omega = 16\pi \frac{rad}{s}$$

$$A = \frac{a_{max}}{\omega^2} = \frac{32\pi^2}{(16\pi)^2} = 0.125\, m$$

$$v_{max} = A\omega = 0.125(16\pi) = 2\pi\, rad/s$$

Para determinar la posición donde la velocidad es mínima(cero) es cuando las funciones de posición y aceleración toman sus máximos valores por lo cual esto seria en los puntos de la amplitud

$$X = \pm A\ en\ m = \pm 0.125m$$

Ejercicio 1. Un bloque de 200g conectado a un resorte ligero para el cual la constante de resorte es de 500 N/m está libre de oscilar sobre una superficie horizontal sin fricción, se desplaza 5cm desde el equilibrio y se suelta del reposo.

Calcular:

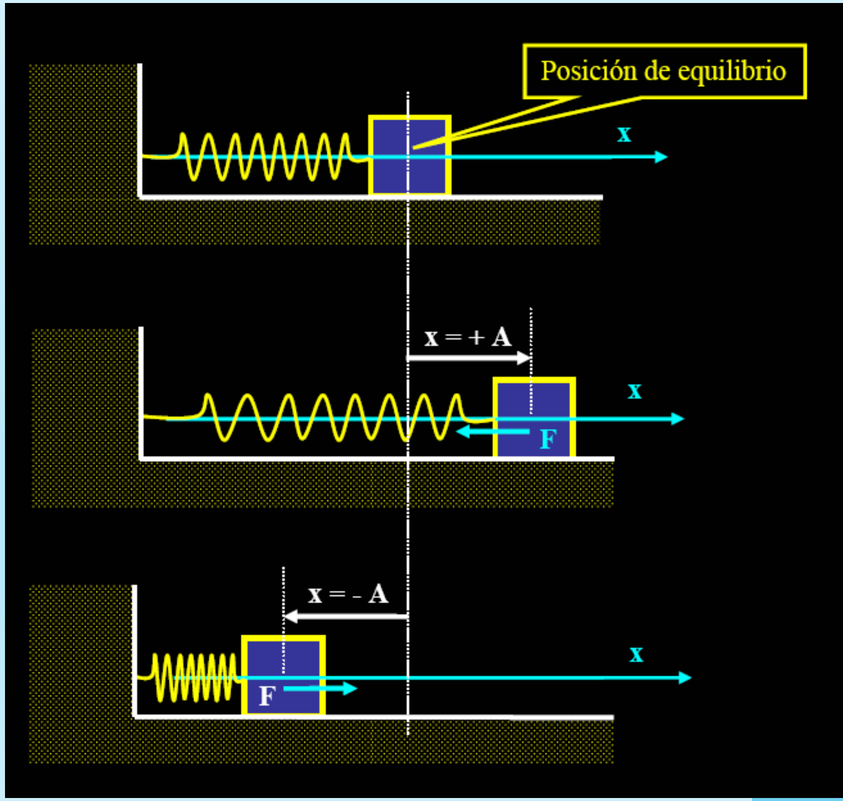
a) Periodo de oscilación, Frecuencia de oscilación, velocidad angular de oscilación

b) velocidad máxima y aceleración máxima

c) funciones de posición, velocidad y aceleración del sistema masa resorte

d) energía del sistema masa resorte

e) cambiando las condiciones iniciales del sistema masa resorte con x_o= 5cm y v_o= -1m/s determine funciones de posición velocidad y aceleración para estas condiciones.



Resolución para plantear la ecuación del MAS de este sistema masa-resorte es necesario establecer las condiciones iniciales que serán las que marcaran todo. En este caso se parte del reposo en la posición de equilibrio.

$$v_o = 0\frac{m}{s} \quad x_o = A = 0.05m \quad K_{res} = 500\frac{N}{m} \quad m = 0.20kg$$

a) $\omega = \sqrt{\frac{k_{res}}{m}} = \sqrt{\frac{500}{0.20}} = 50\frac{rad}{s}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{50} = 0.1257\ s$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.1257} \approx 7.96\ Hz$$

Para los próximos incisos ya que para estructurar el problema partimos de las condiciones físicas y las condiciones iniciales

$$v_o = 0\frac{m}{s} \quad x_o = A = 0.05m \quad K_{res} = 500\frac{N}{m} \quad m = 0.20kg \quad \omega = 50\frac{rad}{s}$$

b) velocidad máxima y aceleración máxima

El por que de la amplitud es debido a que es el primer y máximo desplazamiento que realizar el sistema masa-resorte

$$v_{max} = \pm A\omega = \pm 0.05(50) = \pm 2.5\frac{m}{s}$$

$$a_{max} = \pm A\omega^2 = \pm 0.05(50)^2 = \pm 125\frac{m}{s^2}$$

c) funciones de posición, velocidad y aceleración del sistema masa resorte

Para el calculo del ángulo de desfase en este primer caso se realizara una igualación con las condiciones iniciales en la función de posición en el tiempo t=0s.

$$x(t) = Acos\,(\cancel{\omega}t + \varphi)$$

$$x_o = Acos\varphi$$

$$\varphi = \cos^{-1}\frac{x_o}{A} = \cos^{-1}\frac{0.05}{0.05} = \cos^{-1}1 = 0rad$$

En este caso no hay desfase por que se parte del reposo de lo contrario si existe la posibilidad de calcular ángulo.

$$x(t) = Acos\,(\omega t + \varphi) = 0.05\cos(50t)$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -0.05sen\,(50t) * 50$$

$$v(t) = -2.5sen\,(50t) \quad en\frac{m}{s}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -2.5\cos(50t) * 50$$

$$a(t) = -125\cos(50t) \quad en\,\frac{m}{s^2}$$

d) energía del sistema masa resorte

Se parte de la información inicial del sistema pero considerar que la energía mecánica en estos sistemas se conserva solo si no cambian las condiciones iniciales del mismo.

$$v_o = 0\frac{m}{s} \quad x_o = A = 0.05m \quad K_{res} = 500\frac{N}{m} \quad m = 0.20kg \quad \omega = 50\frac{rad}{s}$$

$$E = \frac{1}{2}k_{res}A^2 = \frac{1}{2}(500)(0.05)^2 = 0.625\,J$$

e) cambiando las condiciones iniciales del sistema masa resorte con x_o= 5cm y v_o= -1m/s determine funciones de posición velocidad y aceleración para estas condiciones.

$$v_o = -1\frac{m}{s} \quad x_o = 0.05m \quad K_{res} = 500\frac{N}{m} \quad m = 0.20kg \quad \omega = 50\frac{rad}{s}$$

En este punto es necesario establecer que existirá desfase y que el valor de la amplitud es desconocido por lo cual se calculan con las siguientes expresiones

$$\varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{v_o}{\omega x_o}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{(-1)}{50(0.05)}\right) = 0.38\,rad$$

$$A = \sqrt{x_o^2 + \frac{v_o^2}{\omega^2}} = \sqrt{0.05^2 + \frac{(-1)^2}{50^2}} = 0.054m$$

Estas son ahora las nuevas condiciones para plantear las ecuaciones del MAS

Partiendo de las nuevas condiciones iniciales y de los cálculos de las mismas se procede a establecer sus ecuaciones del MAS

$$v_o = -1\frac{m}{s} \quad \varphi = 0.38rad \quad A = 0.054m \quad K_{res} = 500\frac{N}{m} \quad m = 0.20kg \quad \omega = 50\frac{rad}{s}$$

$$x(t) = Acos\,(\omega t + \varphi) = 0.054\cos(50t + 0.38) \quad en\ m$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -0.054sen\,(50t + 0.38) * 50$$

$$v(t) = -2.7sen\,(50t + 0.38) \quad en\frac{m}{s}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -2.7\cos(50t + 0.38) * 50$$

$$a(t) = -135\cos(50t + 0.38) \quad en\ \frac{m}{s^2}$$

Nota: en este tipo de problemas las condiciones iniciales y condiciones físicas son determinantes para las ecuaciones que se podrán formular.

Ejercicio 4. Un sistema masa-resorte está bajo un sistema MAS en la dirección horizontal. La masa es de 0.25kg, la constante del resorte es de $4\pi^2$ N/m y la amplitud es de 0.12m.

1. El tiempo mínimo en s que emplea el resorte en moverse de la posición x=-0.12m a la posición x=+0.12m:

A) 2.00 B) 4.00 C) 0.50 D) 1.00 E) 0.25

2. Determine la posición x en m donde la magnitud de la fuerza sobre el bloque es mínima:

A) 0.12 B) 0.06 C) 0.00 D) -0.06 E) -0.12

Para este caso el tiempo mínimo del ciclo del movimiento del MAS es necesario dividir el movimiento en 4 movimientos y ese seria la forma de determinar el tiempo que se toma para el movimiento.

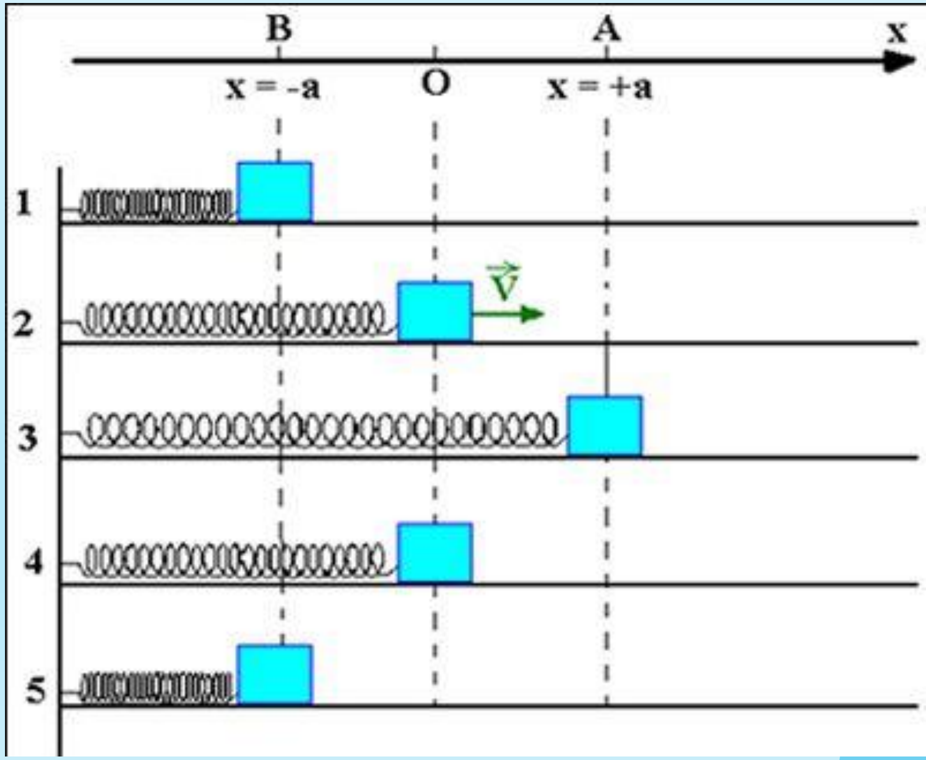
Para estimar el tiempo es necesario estimar primero el periodo de este sistema MAS.

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{res}}{m}} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{0.25}} = 4\pi \frac{rad}{s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{4\pi} = 0.50s$$

Si vemos el sistema del MAS para cubrir el movimiento se realizan dos movimientos por lo cual es $t = \frac{T}{2} = \frac{0.5}{2} = 0.25s$

Para la posición donde la fuerza es mínima es donde la aceleración sea cero esto se dará en $x = 0m$ donde la velocidad es máxima.



Ejercicio 5. Un bloque de masa 25kg descansa sobre una superficie horizontal sin fricción y está conectado a un resorte de constante k= 20,825.00 N/m. si el bloque se desplaza 0.20m con respecto a su posición de equilibrio y se suelta. ¿Qué rapidez en m/s tendrá el bloque al pasar por su posición x=-0.10m? :

A) 1.0 B) 5.0 C) 2.0 D) 4.0 E) 3.0

Resolución en este caso se pregunta sobre la rapidez en un punto con respecto al movimiento del MAS, para lo cual se estimara la función de posición para establecer en que tiempo se logra. Ya con esta información será fácil trasladar a la función de velocidad en función del tiempo.

$$v_o = 0\frac{m}{s} \quad x_o = A = 0.2m \quad K_{res} = 20{,}825\frac{N}{m} \quad m = 25kg$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{res}}{m}} = \sqrt{\frac{20{,}825}{25}} = 28.86\frac{rad}{s}$$

Se puede establecer que el valor del ángulo de desfase es cero ya que parte del reposo y podremos generar una ecuación de tipo coseno o seno de cualquier forma.

$$x(t) = Acos\,(\omega t + \varphi) = 0.2\cos(28.86t)$$

Teniendo la función de posición la igualamos al valor que se busca de x=-0.10m y con ese tiempo se sustituye en la función de velocidad del MAS.

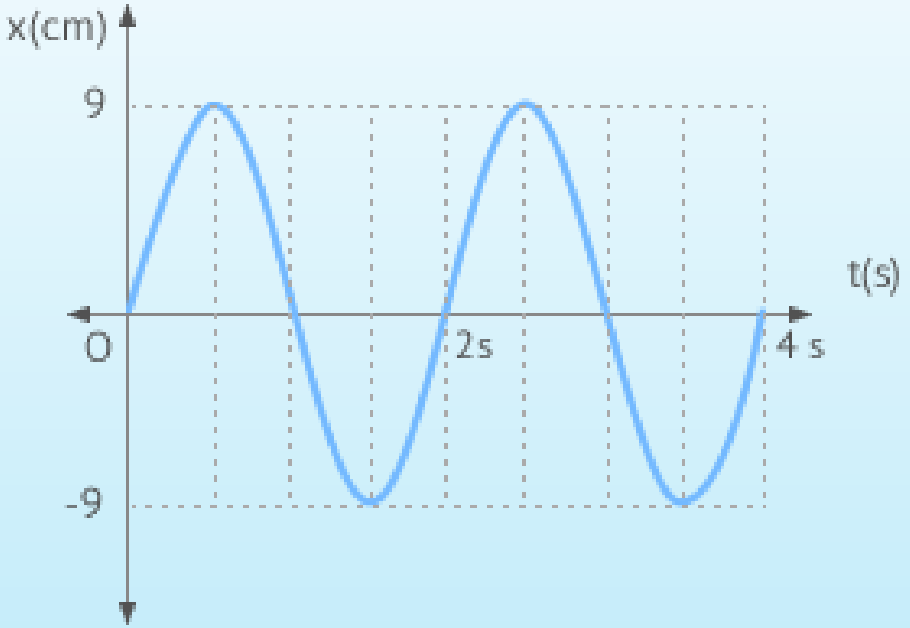
$$-0.1 = 0.2\cos(28.86t)$$

$$t = \frac{\cos^{-1}\left({}^{-0.1}/_{0.2}\right)}{28.86} = 0.07257\text{s}$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -0.20sen\,(28.86t) * 28.86 = -5.772sen\,(28.86t) \quad en\,\frac{m}{s}$$

$$v(t) = -5.772sen\,(28.86t) = -5.772sen\big(28.86(0.07257)\big) = -4.9987 \approx -5.0\,\frac{m}{s}$$

Ejercicio 6. Se encuentra un sistema masa-resorte bajo las condiciones del MAS como muestra la grafica a continuación, se sabe que la masa del sistema es de 0.5kg y parte del reposo determine: a) velocidad angular de oscilación. b) constante de resorte y c) función de posición en términos del tiempo si se sabe que es de tipo senoidal.



Resolución recordatorio que la función nace de la información de la grafica y de las condiciones de la misma por lo que al observar el primer valor de corte al eje vertical esta se encuentra sin ángulo de desfase, de lo contrario se plantea como anteriormente se ah realizado en ejemplos anteriores con el valor de Xo.

$v_o = 0\frac{m}{s} \quad x_o = A = 0.09m \quad m = 0.5kg \;\; T = 2s$

a) $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi\, rad/s$

b) $\omega^2 = \frac{k_{res}}{m} \quad \rightarrow \quad k_{res} = m\omega^2 = (0.5)(\pi)^2 = 4.935\ N/m$

c) $v_o = 0\frac{m}{s} \;\; \varphi = 0rad \;\; A = 0.09m \quad K_{res} = 4.935\frac{N}{m} \quad m = 0.5kg \quad \omega = \pi\frac{rad}{s}$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = 0.09\ sen(\pi t)\ \ en\ m$$