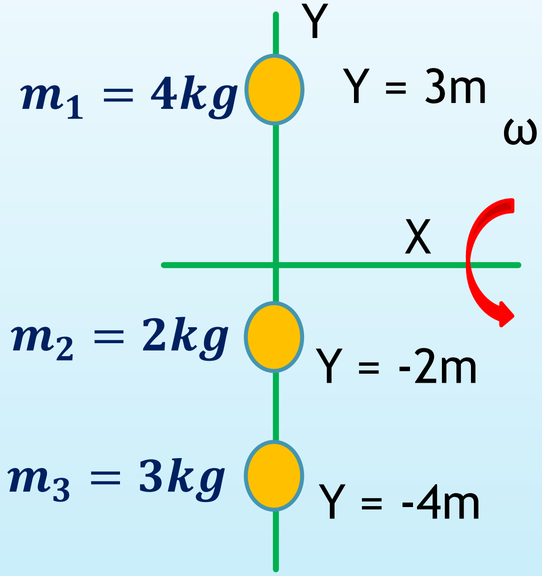
Clase Física 1 04

Calculo de momentos de inercia

Energía Cinética Rotacional

Ejemplo: Una varilla de masa despreciable se le colocan tres esferas pequeñas que pueden ser tratadas como partículas estas se conectan a lo largo del eje "Y" donde esta ubicada la varilla, este sistema gira sobre el eje "X" a una rapidez de 2 rad/s. Encontrar: (a). El momento de inercia del sistema sobre el eje "X" y la energía cinética total (b) la rapidez tangencial de cada una de las partículas y la energía cinética rotacional de cada una.



(a)Al considerar al sistema como la suma de cada una de las partículas se estima la inercia

Del sistema para calcular la energía cinética total a partir de estos datos.

Nota: establecer cuales serán las formas de las figuras del sistema, la varilla no tiene efectos

Y las esferas se tratan como partículas.

$$I_{sis} = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_{sis} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 = 4(3)^2 + 2(2)^2 + 3(4)^2 = \mathbf{92\ kg * m^2}$$

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I_{sis} \omega^2 = \frac{1}{2}(92)(2)^2 = \mathbf{184\ J}$$

(b) En el caso de las relaciones lineales y energía cinética dependemos de su posición pero esto es distancia o radio, por lo cual solo colocamos valor numérico.

$$v_{tan1} = r_1 \omega = 3(2) = 6\frac{m}{s} \qquad K_{rot1} = \frac{1}{2} I_1 \omega^2 = \frac{1}{2}(m_1 r_1^2)\omega^2 = \frac{1}{2}(4(3)^2)(2)^2 = 72\ J$$

$$v_{tan2} = r_2 \omega = 2(2) = 4\frac{m}{s} \qquad K_{rot2} = \frac{1}{2} I_2 \omega^2 = \frac{1}{2}(m_2 r_2^2)\omega^2 = \frac{1}{2}(2(2)^2)(2)^2 = 16J$$

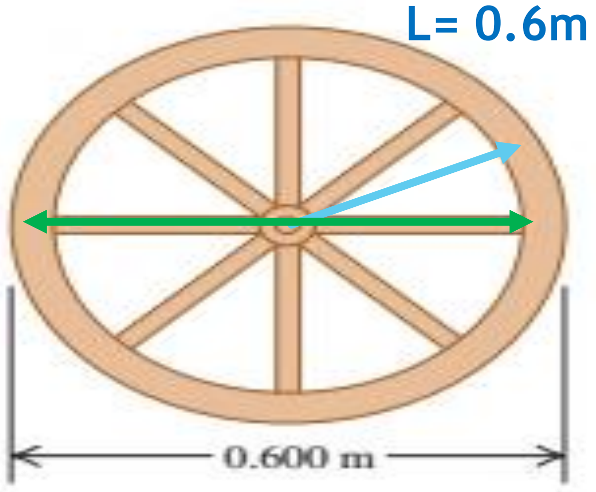
$$v_{tan3} = r_3 \omega = 4(2) = 8\frac{m}{s} \qquad K_{rot3} = \frac{1}{2} I_3 \omega^2 = \frac{1}{2}(m_3 r_3^2)\omega^2 = \frac{1}{2}(3(4)^2)(2)^2 = 96\ J$$

La energía cinética total se podría calcular como la suma de las energías individuales

$$K_{rot} = K_{rot1} + K_{rot2} + K_{rot3} = 72 + 16 + 96 = 184\ J$$

9.39. Una rueda de carreta (figura 9.30) tiene un radio de 0.300 m y la masa de su borde es de 1.40 kg. Cada rayo, que está sobre un diámetro y tiene 0.300 m de longitud, tiene una masa de 0.280 kg. ¿Qué momento de inercia tiene la rueda alrededor de un eje que pasa por su centro y es perpendicular a su plano?

Figura 9.30 Ejercicio 9.39.



Para la resolución se deberá considerar que forma tomara la figura si serán 8 varillas medidas

Desde su extremo con un radio R= 0.3m ó 4 varillas desde su centro con L = 0.6m

Por lo cual usaremos la primera opción pero recuerde que si cambia la forma a emplear también

Puede cambiar la masa.

Para primer caso masa m = 0.28kg R= 0.3m

$$I_{sis} = I_{aro} + 8I_{varillas}$$

$$I_{sis} = m_{aro}R_{aro}^2 + 8(\frac{1}{3}m_{var}R_{var}^2)$$

$$I_{sis} = (1.4)(0.3)^2 + 8\left(\frac{1}{3}(0.28)(0.3)^2\right) = 0.1932\ kg * m^2$$

Para segundo caso masa m = 0.56kg L= 0.6m

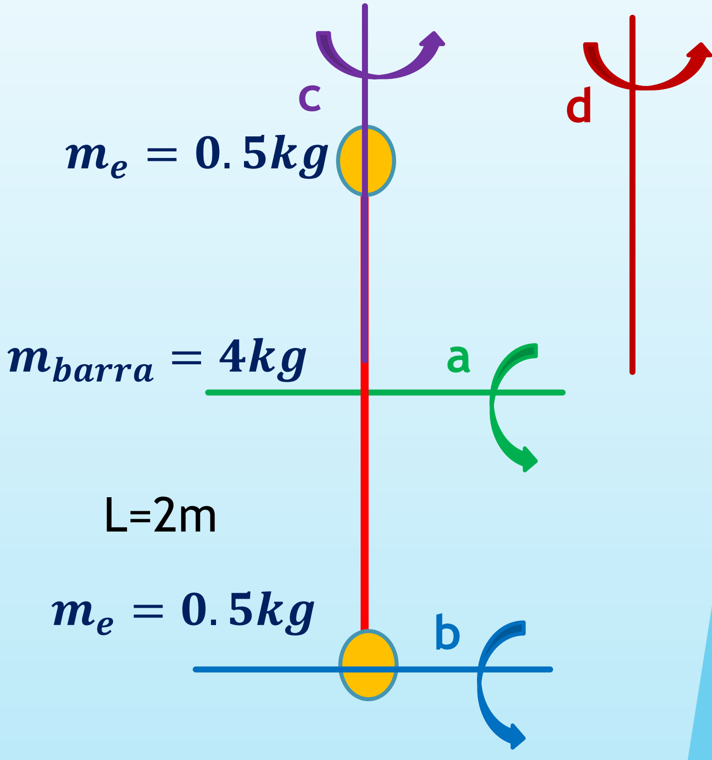
$$I_{sis} = I_{aro} + 4I_{varillas}$$

$$I_{sis} = m_{aro}R_{aro}^2 + 4(\frac{1}{12}m_{var}L^2)$$

$$I_{sis} = (1.4)(0.3)^2 + 4\left(\frac{1}{12}(0.56)(0.6)^2\right) = 0.1932\ kg * m^2$$

Nota: tomar en consideración la importancia de la forma y la ubicación del eje de rotacion

9.37. Dos esferas pequeñas están pegadas a los extremos de una barra uniforme de 2.00 m de longitud y masa de 4.00 kg. Las esferas tienen masa de 0.500 kg cada una y se pueden tratar como masas puntuales. Calcule el momento de inercia de esta combinación en torno a cada uno de los ejes siguientes: *a*) un eje perpendicular a la barra que pasa por su centro; *b*) un eje perpendicular a la barra que pasa por una de las esferas; *c*) un eje paralelo a la barra que pasa por ambas esferas; *d*) un eje paralelo a la barra que está a 0.500 m de ella.



(a)En este caso se uso el color verde para identificar su eje y podemos observar que

Cada esfera esta a L/2 de su eje de rotación y la barra esta en su centro de masa

$$I_{sis} = I_{barra} + 2\,I_{esfera}$$

$$I_{sis} = \frac{m_{barra}L^2}{12} + 2m_e(L/2)^2 = \frac{(4)(2)^2}{12} + 2(0.5)(1)^2 = 2.33\ kg * m^2$$

(b) En este caso se uso el color azul para identificar su eje y podemos observar que

Una de las esferas se elimina por estar en el eje de rotación y la otras figuras están

Cambiando sus distancias al eje de rotación.

$$I_{sis} = I_{barra} + I_{esfera}$$

$$I_{sis} = \frac{m_{barra}L^2}{3} + m_e(L)^2 = \frac{(4)(2)^2}{3} + (0.5)(2)^2 = 7.33\ kg * m^2$$

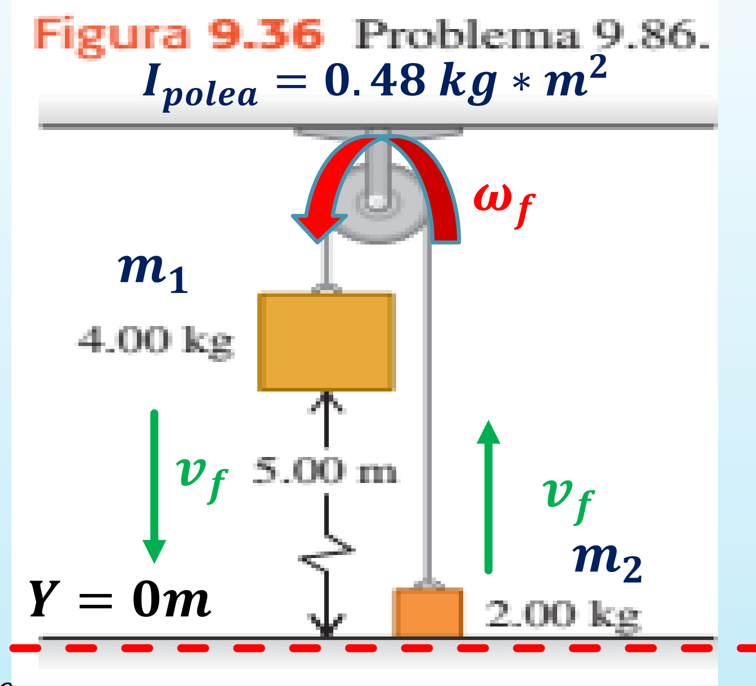
(c) En este caso se uso el color morado para identificar el eje y podemos observar que pasa por todos los objetos y debido a su distribución quedara cero su momento de inercia.

$$I_{sis} = I_{barra} + I_{esfera} = 0\ kg * m^2$$

(d) En este caso se empleo el color rojo oscuro y al momento de estar paralelo a (c) podemos considerar al sistema como una partícula a una distancia d= 0.5m

$$I_{sis} = (m_{barra} + 2m_e)d^2 = \big(4 + 2(0.5)\big)(0.5)^2 = 1.25\ kg * m^2$$

9.86. La polea de la figura 9.36 tiene 0.160 m de radio y su momento de inercia es de 0.48 kg*m^2 . La cuerda no resbala en la polea. Use métodos de energía para calcular la rapidez del bloque de 4.00 kg justo antes de golpear el piso.



Resolución: se planea el sistema de energías para cada partícula del mismo,

En las dos condiciones al inicio del movimiento y al final de movimiento.

Al no haber agentes externos el sistema es conservativo y parte del reposo.

Efectos de los resortes hasta el capitulo 14 serán considerados.

Realizar las relaciones lineales y angulares del sistema de polea.

$$\omega_f = \frac{v_f}{R}$$

$$\Delta E = 0 \qquad \rightarrow \quad E_f = E_o$$

$$\cancel{U_{1gf}} + U_{2gf} + \cancel{U_{polea\,gf}} + K_{1f} + K_{2f} + K_{rotf} = U_{1go} + \cancel{U_{2go}} + \cancel{U_{polea\,go}} + \cancel{K_{1o}} + \cancel{K_{2o}} + \cancel{K_{roto}}$$

Se despeja para la velocidad final del sistema, incluyendo las relaciones lineales y angulares

$$K_{1f} + K_{2f} + K_{rotf} = U_{1go} - U_{2gf}$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_f^2 + \frac{1}{2}m_2 v_f^2 + \frac{1}{2}I_{polea}\omega_f^2 = m_1 gh - m_2 gh$$

$$v_f^2\left(m_1 + m_2 + \frac{I_{polea}}{R^2}\right) = 2gh(m_1 - m_2)$$

$$v_f = \sqrt[2]{\frac{2gh(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + \frac{I_{polea}}{R^2}}} = \sqrt[2]{\frac{2(9.8)(5)(4-2)}{4 + 2 + \frac{0.48}{0.16^2}}} = \mathbf{2.81\ m/s}$$

Dinámica Circular del Cuerpo en rotación

Torca, Torque O Torça (τ)

En mecánica newtoniana, se denomina momento de una fuerza (respecto a un punto dado) a una magnitud (pseudo) vectorial, obtenida como producto vectorial del vector de posición del punto de aplicación de la fuerza (con respecto al punto al cual se toma el momento) por el vector fuerza, en ese orden. También se denomina momento dinámico o sencillamente momento. Ocasionalmente recibe el nombre de torque, del inglés torque, derivado a su vez del latín torquere (retorcer).

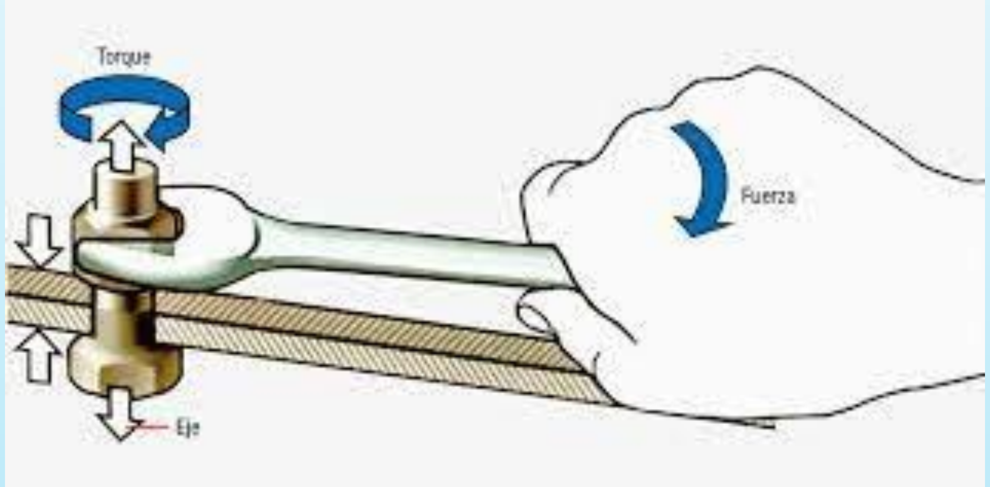
El torque al ser la relación con la rotación

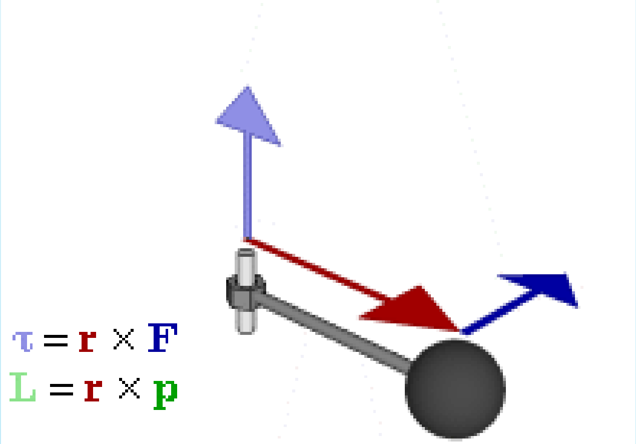
Importara donde actúa y su dirección

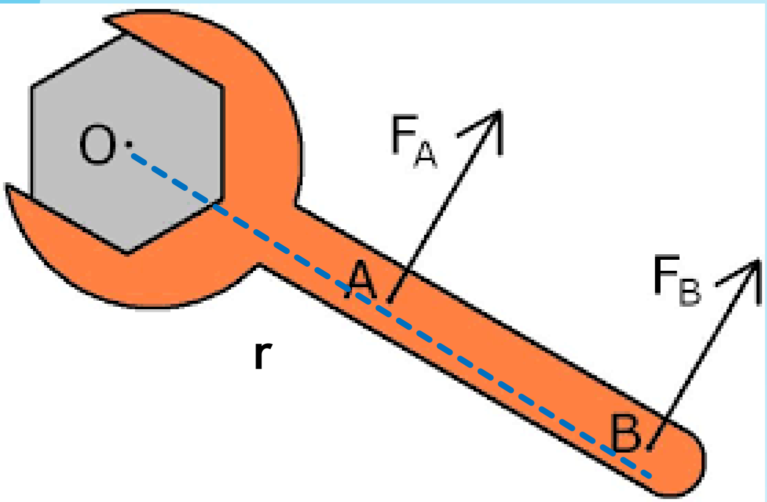
Por lo cual todas las fuerzas al momento de

Actuar podrán generar momento de torsión

O torque.





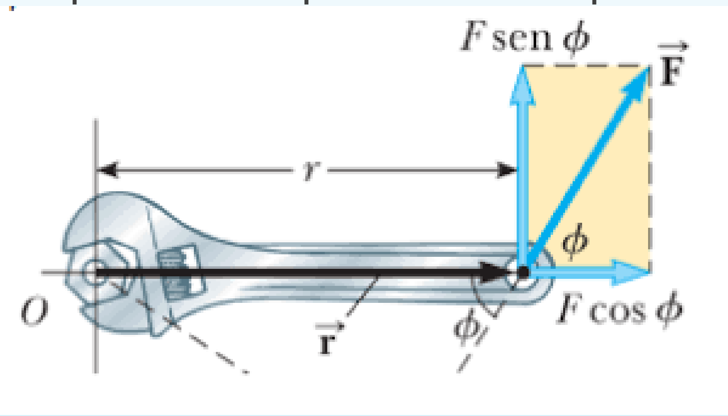


El toque al ser una característica vectorial depende del punto donde actúa con eje de rotación y la distancia que los separa le llamaremos brazo o palanca.

El torque es un vector perpendicular a la fuerza y radio de acción.

Calculo de momento de torsión o torque

Al ser una característica vectorial originada de dos características vectoriales se empleara el operados de producto cruz para todos los cálculos posibles.



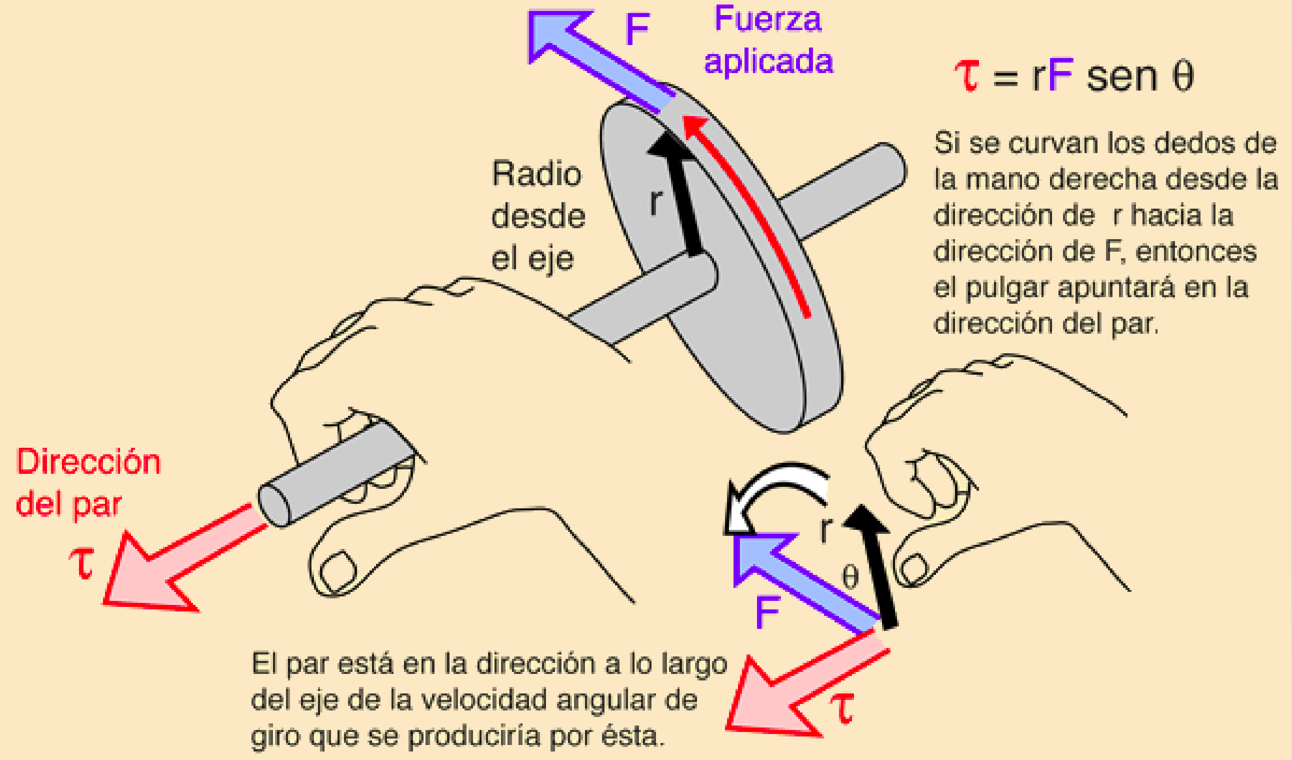
$$\tau = \vec{r} \times \vec{F} \;\; [N * m]$$

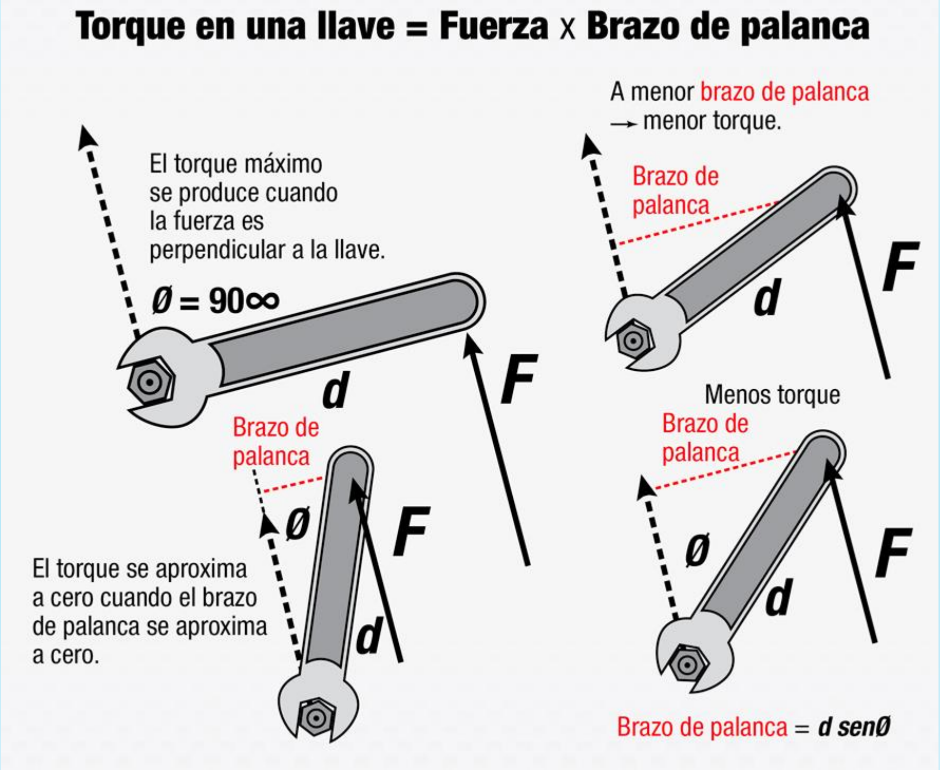
Nota: se empleara la notación N*m para establecer que es una característica

Vectorial. $\tau = \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}$

Se calculan lo valores de las componentes de la matriz o en su otro caso su forma de magnitud

$|\boldsymbol{\tau}| = |\boldsymbol{r}||\boldsymbol{F}| \sin \boldsymbol{\theta}$ ***Recordatorio es el angulo entre los dos vectores***



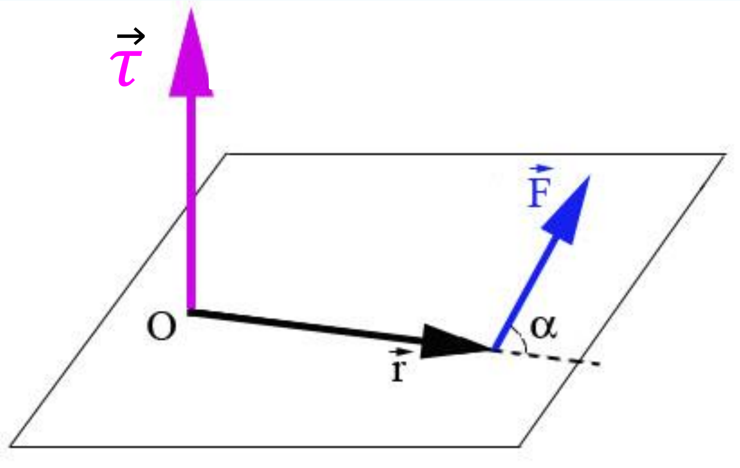


Ejemplo una partícula de masa de 0.5Kg de masa se encuentra en la posición r= (4,-5,-3)m y se le aplica una fuerza F= (-5,8,0)N determine el torque que produce la fuerza sobre el y el ángulo que se forma entre ellos.

Resolución: se determinara el torque que sufre la partícula por medio del calculo

De determinantes de la matriz y posteriormente con ese vector se calcula el ángulo

Entre los vectores.



$$|\vec{r}| = \sqrt[2]{4^2 + (-5)^2 + (-3)^2} = \ 7.071m$$

$$|\vec{F}| = \sqrt[2]{(-5)^2 + 8^2 + (0)^2} = \ 9.43N$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 4 & -5 & -3 \\ -5 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \big(-5(0) - (8)(-3)\big)\hat{\imath} - \big((4)(0) - (-5)(-3)\big)\hat{\jmath} + (4(8) - (-5)(-5))\hat{k}$$

$$\boldsymbol{\vec{\tau} = \left(+24\hat{\imath} + 15\hat{\jmath} + 7\hat{k}\right)N * m}$$

Para el calculo del ángulo se emplea el resultado del producto cruz

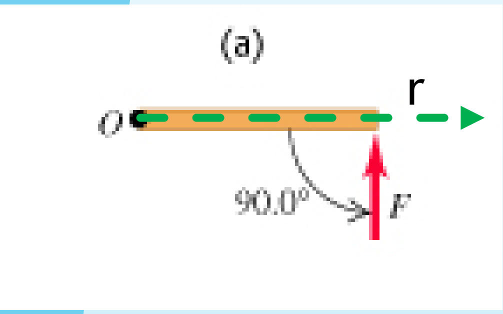
$$|\vec{\tau}| = \sqrt[2]{24^2 + 15^2 + 7^2} = \ 29.15 \ N * m$$

Se emplea la formula de la magnitud del torque $|\vec{\tau}| = |\vec{r}||\vec{F}| \sin\alpha$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{|\vec{\tau}|}{|\vec{r}||\vec{F}|}\right) = \sin^{-1}\frac{29.15 \ N * m}{(7.071m)(9.43N)} = 25.92°$$

Determine los torques de las siguientes fuerzas que actúan sobre el cuerpo rígido de longitud de 2.5m, la fuerza que actúa en todas las situaciones es de 100 N y establezca la dirección del torque.

Resolución: para mayor facilidad del ángulo realizar una proyección del vector de radio desde el eje de rotación para determinar el ángulo para el calculo del torque.

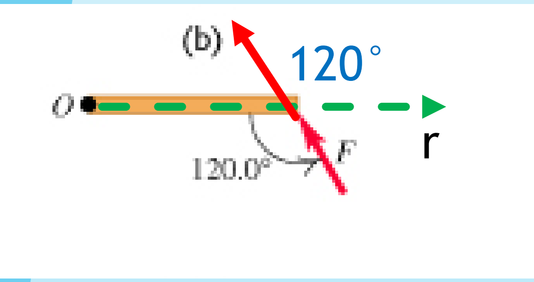


$$\tau_a = r\,F\,sen\,\theta = (2.5m)(100N)sen\,90°$$

$$\tau_a = 250\;N * m$$

Torque antihorario

El torque máximo se da cuando los vectores de radio y fuerza con perpendiculares.

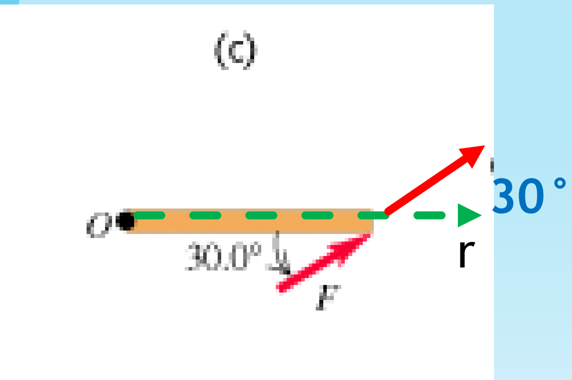


$$\tau_b = r\,F\,sen\,\theta = (2.5m)(100N)sen\,120°$$

$$\tau_b = 216.51\;N * m$$

Torque antihorario

El torque depende del ángulo entre los vectores por lo cual es necesario cuidado en él.

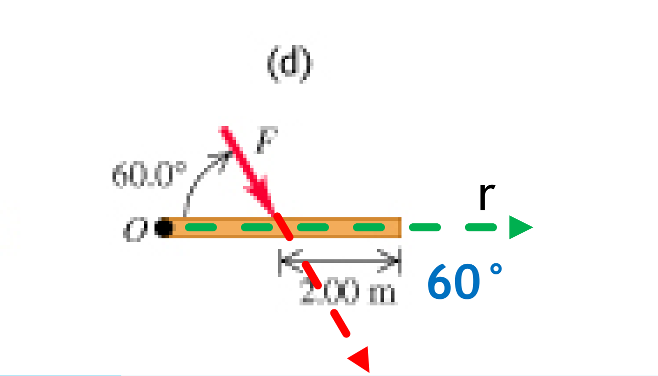


$$\tau_c = r\,F\,sen\,\theta = (2.5m)(100N)sen\,30°$$

$$\tau_c = 125.0\;N * m$$

Torque antihorario

El valor del torque va disminuyendo conforme el ángulo se aproxime a cero



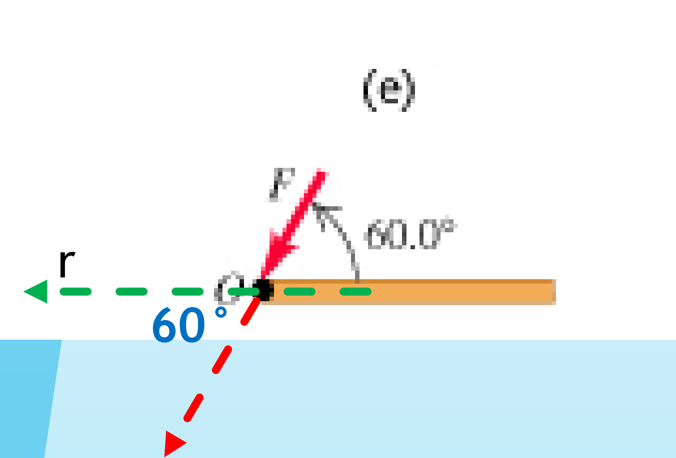
$$\tau_d = r\,F\,sen\,\theta = (0.5m)(100N)sen\,60°$$

$$\tau_d = 43.30\ N * m$$

Torque horario

El valor del torque va disminuyendo conforme el cambio del radio o punto de acción

Con respecto al eje de rotación.



$$\tau_e = r\,F\,sen\,\theta = (0m)(100N)sen\,60°$$

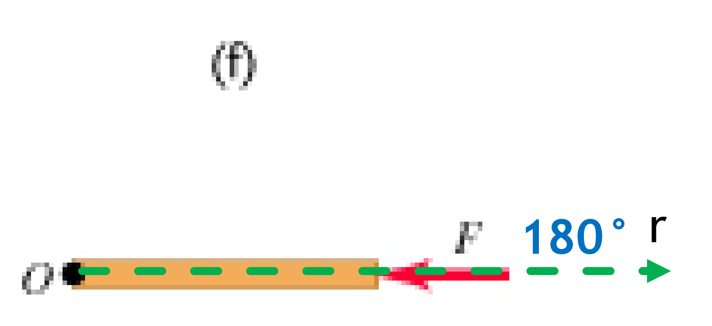
$$\tau_e = 0\ N * m$$

Torque cero

El valor del torque va disminuyendo conforme el cambio del radio o punto de acción

Con respecto al eje de rotación y si la fuerza nace en el eje de rotación el torque

Se anula.



$$\tau_f = r\,F\,sen\,\theta = (2.5m)(100N)sen\,180°$$

$$\tau_e = 0\ N * m$$

Torque cero

Se anula el valor del torque si el vector de la fuerza y el radio son paralelos

O antiparalelos, ya que en esta condición la fuerza no ayuda a la rotación