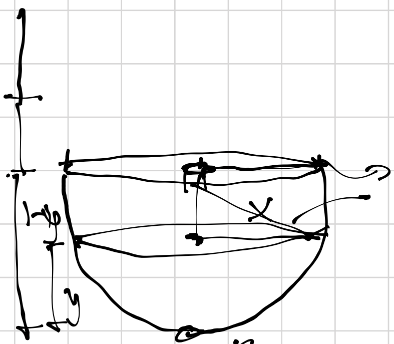
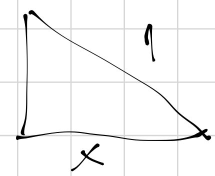
Ej. Suponga que inicialmente un tanque de agua semiesférico con radio de 1 mt tiene su lado recto como fondo, donde a su vez tiene un orificio de 1cmt de radio. Si se abre dicho orificio a la 1:00 pm. a que hora estará vacío.



$A_e = \pi r^2 = \pi x^2$



$a = \pi r^2$

$a = \pi \left(\frac{1}{100}\right)^2$

$\cancel{1cmt} = x \cdot \frac{1m}{100\cancel{cm}} = \frac{1}{100} m$

$(1-y)^2 + x^2 = 1$

$\cancel{1^2} - 2y + y^2 + x^2 = \cancel{1}$

$x^2 = 2y - y^2 \rightarrow A_e = \pi(2y - y^2)$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{a}{A_e}\sqrt{2gy}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\pi\left(\frac{1}{100}\right)^2}{\pi(2y-y^2)}\sqrt{2(9.81)y} \rightarrow \sqrt{2(9.81)} \cdot \sqrt{y}$$

$y \cdot y^{-1/2} \quad y^2 \cdot y^{-1/2}$

$$\int \frac{(2y - y^2)}{\sqrt{y}}\, dy = \int -\frac{\sqrt{2 \cdot 9.81}}{100^2}\, dt$$

$\sqrt{y} \quad y^{1/2}$

$$\int (2y^{1/2} - y^{3/2})\, dy = -\frac{\sqrt{2 \cdot 9.81}}{100^2} t + C$$

$$2\frac{y^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{y^{5/2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{\sqrt{2 \cdot 9.81}}{100^2} t + C$$

$$\frac{4}{3}y^{3/2} - \frac{2}{5}y^{5/2} = -0.000442t + C$$

$y(0) = 1$

$$\frac{4}{3}(1)^{3/2} - \frac{2}{5}(1)^{5/2} = -0.000442(0) + C$$

$$g = 9.81 m^2/s$$

$$C = 0.933$$

$$\frac{4}{3} y^{3/2} - \frac{2}{5} y^{5/2} = -0.000442t + 0.933$$

$t = ?$ $\quad y = 0$

$$\frac{4}{3}(0)^{3/2} - \frac{2}{5}(0)^{5/2} = -0.000442t + 0.933$$

$$0.000442t = 0.933$$

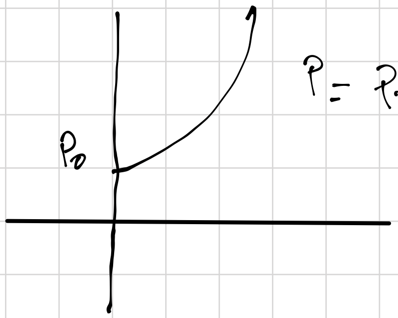
$$t = \frac{0.933}{0.000442} = 2,110.85 \text{ segundos.}$$

$t = 0.586$ horas $\approx$ 35 minutos.

el tanque queda vacío a 13:35 minutos.

Modelos no Lineales

Ecuación logística → crecimiento de una población.



$$P = P_0 e^{rt}$$

tasa de natalidad
tasa de mortandad.

$\beta(t)$ → Es el número de nacimientos por unidad de población en tiempo en el tiempo t.

$\delta(t)$ → Es el número de muertes por unidad de población por unidad de tiempo en el tiempo t.

Intervalo $\to [t, t+\Delta t]$

nacimientos $= \beta(t) \cdot P(t) \cdot \Delta t$

muertes $= \delta(t) \cdot P(t) \cdot \Delta t$

$\Delta P =$ nacimientos $-$ muertes.

$$\Delta P = \beta(t) \cdot P(t) \Delta t - \delta(t) P(t) \cdot \Delta t]$$

$$\Delta P = [\beta(t) \cdot P(t) - \delta(t) P(-)] \Delta t$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = [\beta(t) - \delta(t)] P(t)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} \approx \frac{dP}{dt}$$

$$\frac{dP}{dt} = [\beta(t) - \delta(t)] P \to \text{Ec. logística.}$$

$$\beta = \beta_0 - \beta_1 P \qquad \delta = \delta_0$$

$$\frac{dP}{dt} = [\beta_0 - \beta_1 P - \delta_0] P = [\underbrace{\beta_0 - \delta_0} - \beta_1 P] P$$

$$a = \beta_0 - \delta_0 \qquad b = \beta_1$$

$$\frac{dP}{dt} = [a - bP] P = b\left[\frac{a}{b} - P\right] P \qquad \begin{array}{l} K = b \\ M = \frac{a}{b} \end{array}$$

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = K(M-P)P}$$

$$\int \frac{dP}{(M-P)P} = \int K \, dt$$

$$\frac{1}{(M-P)P} = \frac{A}{P} + \frac{B}{M-P}. \qquad M-P=0$$

$$P=0 \qquad P=M$$

$$A = \frac{1}{M-P} \to A = \frac{1}{M}$$

$$B = \frac{1}{P} \to B = \frac{1}{M}$$

$$u = M - P$$
$$du = -dP$$

$$\frac{1}{M}\int \frac{dP}{P} + \frac{1}{M}\int \frac{dP}{M-P} = kt + C$$

$$\left[\frac{1}{M}\ln P - \frac{1}{M}\ln(M-P) = kt + C\right] * M$$

$$\ln P - \ln(M-P) = kMt + \cancel{CM}\; C$$

$$\cancel{e}^{\ln \frac{P}{M-P}} = e^{kMt + C}$$

$$\frac{P}{M-P} = e^{kMt} \cdot \cancel{e^{C}}\; C = Ce^{kMt}$$

$$\frac{P}{M-P} = Ce^{kMt}$$

$$P = (M-P)\,Ce^{kMt} = CMe^{kMt} - PCe^{kMt}$$

$$P + PCe^{kMt} = CMe^{kMt}$$

$$P(1 + Ce^{kMt}) = CMe^{kMt}$$

$$P = \frac{CMe^{kMt}}{(1 + Ce^{kMt}}$$

$$P(0) = P_0$$

$$\frac{P_0}{M-P_0} = C\cancel{e^{kM(0)}} \to C = \frac{P_0}{M-P_0}$$

$$P = \frac{\frac{P_0}{M-P_0} Me^{kMt}}{1 + \frac{P_0}{M-P_0} e^{kMt}} = \frac{\frac{P_0Me^{kMt}}{\cancel{M-P_0}}}{\frac{M-P_0 + P_0e^{kMt}}{\cancel{M-P_0}}}$$

$$P = \frac{P_0 M e^{kMt}}{M - P_0(1-e^{kMt})}$$

Ej. Suponga que una comunidad cuenta con 15,000 personas que son susceptibles de adquirir el síndrome de Michaud una enfermedad contagiosa. En el tiempo $t=0$ el numero $N(t)$ de personas que han desarrollado el padecimiento es de 5000 y este se incrementa a una tasa de 500 personas por dia. Asuma que dN/dt es proporcional al producto del numero de aquellos que han adquirido la enfermedad y el de aquellos que no. ¿Cuanto tiempo tomará para que otras 5000 personas desarrollen la enfermedad.

maximo poblacion → limite de la poblacion = 15000

$$\lim_{t\to\infty} P = \lim_{t\to\infty} \frac{P_0 M e^{kMt}}{M - P_0(1-e^{kMt})} = M$$

$N(0) = 5000$ $\qquad \frac{dN}{dt}_{=0} = 500$ P/dia.

$\frac{dN}{dt} \propto$ (enfermos)(no estan enfermos)

N = personas enfermas

$(15,000 - N)$ = Personas no enferm.

$$\frac{dN}{dt} \propto N(15000 - N) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{dN}{dt} = kN(15000 - N)$$

$N(0) = 5000$ $\qquad \frac{dN}{dt} = 500$

$$500 = k(5000)(15000 - 5000)$$

$$k = \frac{50\cancel{0}}{500\cancel{0}(10000)} = \frac{1}{10(10000)} = \frac{1}{100,000}$$

$$\frac{dN}{dt} = kN(15000 - N)$$

$$\int \frac{dN}{N(15000-N)} = \int k\,dt$$

$$\frac{1}{N(15000-N)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{15000-N}$$

$15000 - N = 0$

$N = 15000$

$N = 0$ $\quad$ $N = 15000$

$$A = \frac{1}{15000-N} = \frac{1}{15000}$$

$$B = \frac{1}{N} = \frac{1}{15000}$$

$$\frac{1}{15000}\int \frac{dN}{N} + \frac{1}{15000}\int \frac{dN}{15000-N} = \int k\,dt$$

$$\left[\frac{1}{15000}\ln N - \frac{1}{15000}\ln(15000-N) = kt + C\right] * 15000$$

$$\ln \frac{N}{1500-N} = \cancel{15000}\left(\frac{1}{\cancel{100{,}000}}\right)t + C(15000)$$

$$\cancel{e}^{\cancel{\ln} \frac{N}{15000-N}} = e^{0.15t + C}$$

$$\frac{N}{15000-N} = e^{0.15t + C} = e^{0.15t}\,\cancel{e}^{C}\ C$$

$$\frac{N}{15000-N} = Ce^{0.15t}$$

$N(0) = 5000$

$$\frac{5000}{15000-5000} = C\cancel{e}^{\cancel{0.15(0)}}\ 1 \Rightarrow C = \frac{50\cancel{00}}{100\cancel{00}} = \frac{5}{10}$$

$$C = \frac{1}{2}$$

$$\frac{N}{15000-N} = \frac{1}{2} e^{0.15t}$$

$t = ?$ $N = 10{,}000$

$$\frac{10000}{15000-10000} = \frac{1}{2} e^{0.15t}$$

$$\frac{100\cancel{00}}{50\cancel{00}} = \frac{1}{2} e^{0.15t}$$

$$2 = \frac{1}{2} e^{0.15t}$$

$$\ln 4 = \cancel{\ln} e^{0.15t}$$

$$0.15t = \ln 4 \qquad t = \frac{\ln 4}{0.15} = 9.24 \text{ dias}$$

Ej. La cantidad $N(t)$ de personas de una comunidad bajo la influencia de un determinado anuncio está gobernada por la ecuación logística. Inicialmente se tienen 50 personas que han observado el anuncio y al día siguiente se tienen 1000 personas que han observado el anuncio. Determine una relación o una ecuación. Si se predice que habrá un límite de 50,000 personas de la comunidad que verán el anuncio.