Clase Física 2 06

Ley de Gauss

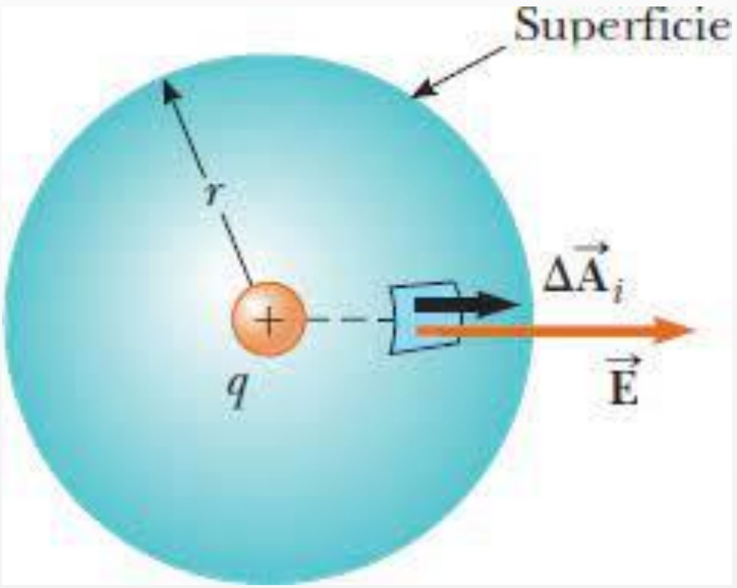
Aplicaciones de ley de gauss

superficiales y volumétricas.

Ley de Gauss

En física la ley de Gauss, relacionada con el teorema de la divergencia o teorema de Gauss, establece que el flujo de ciertos campos a través de una superficie cerrada es proporcional a la magnitud de las fuentes de dicho campo que hay en el interior de la misma superficie. Estos campos son aquellos cuya intensidad decrece como la distancia a la fuente al cuadrado. La constante de proporcionalidad depende del sistema de unidades empleado

$$\Phi_E = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$$



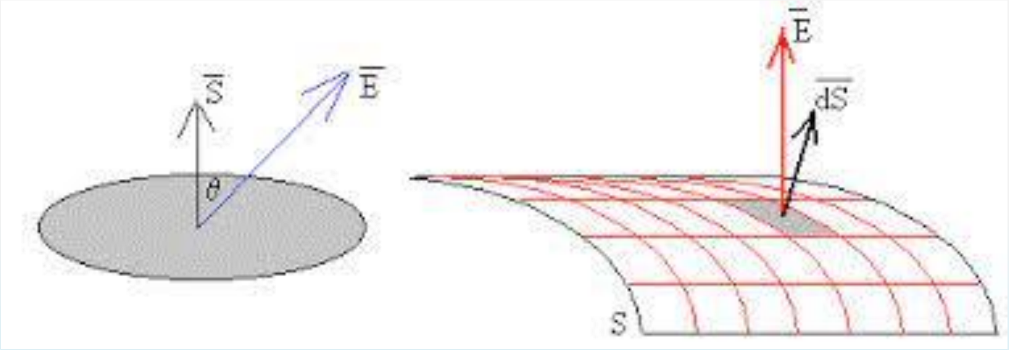
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint EdA\,cos\theta = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

Donde:

dA es el área superficial gaussiana que encierra la carga de la distribución

E es el campo eléctrico en la distancia de la superficie gaussiana

qenc es la carga que se esta encerrada en la superficie gaussiana



Las superficies gaussianas básicas serian:

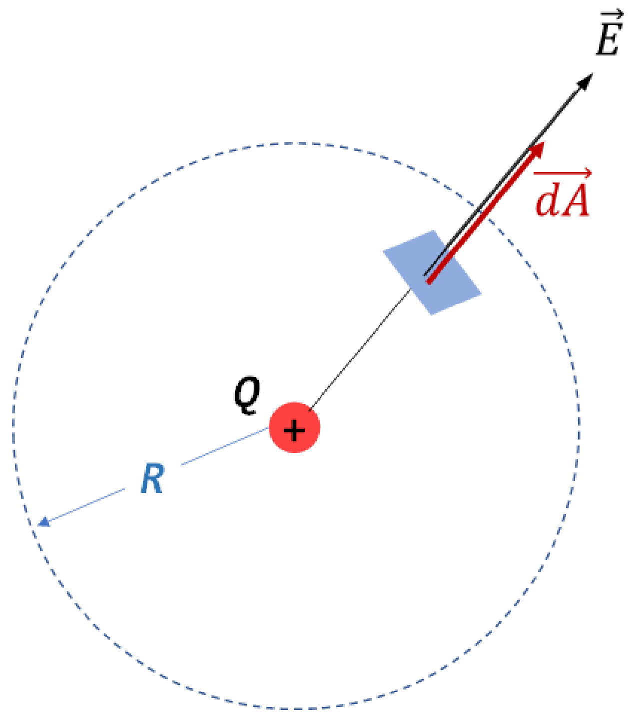
esfera $dA = 4\pi r^2$

Cilindro $dA = 2\pi rL$

Calculo del campo eléctrico de partícula cargada empleando ley de Gauss

En este planteamiento debemos de considerar que la superficie gaussiana debe de ser simétrica a la distribución cargada para permitir tener los diferenciales de área paralelos al campo para que sea mas fácil el calculo del campo eléctrico por tener el cos0° = 1.

Para este caso será la superficie gaussiana de una esfera la que pueda acomodarse de mejor manera para trabajar



$$q_{enc} = +Q$$
$$dA = 4\pi r^2$$
$$\int E dA = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$
$$E(4\pi r^2) = \frac{+Q}{\varepsilon_0}$$
$$E = \frac{+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

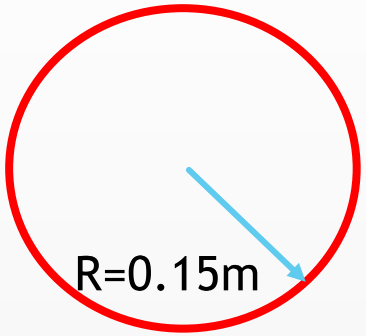
pero si lo representamos como vector seria de la siguiente manera teniendo en cuenta r=R

$$\vec{E} = \frac{+Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\ \hat{r}\ \ \frac{N}{C}$$

Considerar que es radial por que el vector de campo se proyecta en todas las direcciones

Ejemplo 1. una esfera aislante con un radio de 0.15m tiene una densidad de carga uniforme de $7.5\mu C/m^3$ a.¿Cuál es el campo eléctrico inmediatamente fuera de la superficie? b. ¿El campo a 0.3m de su centro ? c. ¿El campo en el interior a 0.075m de su centro?

Resolución en este caso se habla de una esfera aislante recordar que los materiales aislantes distribuyen su carga en su volumen a menos que se alteren.

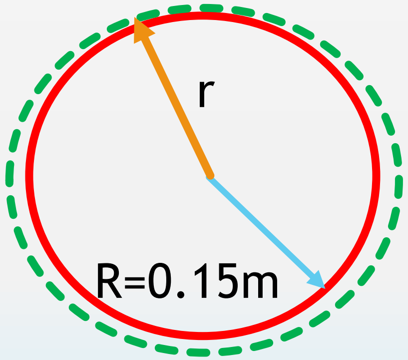


En este caso la forma gaussiana es de una esfera que encierra en secciones a la esfera para el calculo del campo eléctrico, para calcular sus campos siempre es bueno generar la superficie gaussiana para facilitar la orientación de la carga.

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

En esta distribución de carga volumétrica es importante considerar por partes la sección que se encierra de carga.

a. Campo eléctrico r=R



$$q_{enc} = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$dA = 4\pi r^2$$

$$\int E dA = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0}$$

Se despeja para el campo eléctrico teniendo en cuenta que la carga que se encierra es completa ya que estamos en la periferia de la esfera cargada. $\rho = 7.5\mu C/m^3$

$$E(4\pi r^2) = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi R^2) = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho \cancel{4\pi} R^3}{3\varepsilon_0(\cancel{4\pi} R^2)} = \frac{\rho \cancel{R^3}}{3\varepsilon_0 \cancel{R^2}} = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0} = \frac{(7.5x10^{-9})(0.15)}{3(8.85x10^{-12})} = \mathbf{42.373 \frac{N}{C}} \quad \hat{r}\ \mathbf{saliente}$$

b. Campo eléctrico r=0.3m

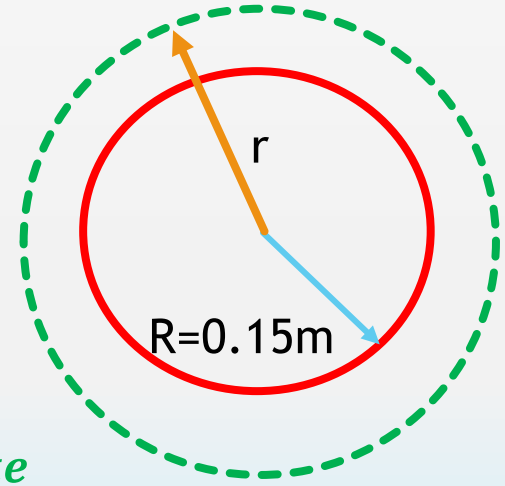
En este caso la superficie gaussiana esta alejada del punto donde esfera estaba cargada por lo tanto los radios no serán iguales.

$q_{enc} = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 \quad dA = 4\pi r^2$

$$\int E dA = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0}$$

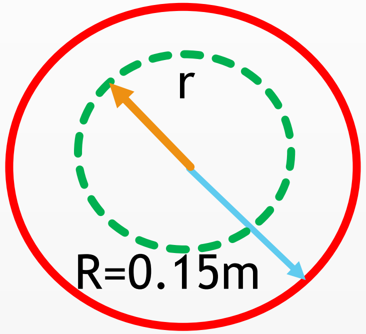
$$E = \frac{\rho 4\pi R^3}{3\varepsilon_0(4\pi r^2)} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{(7.5x10^{-9})(0.15)^3}{3(8.85x10^{-12})(0.3)^2} = \mathbf{10.59 \frac{N}{C}} \quad \hat{r}\ \mathbf{saliente}$$



c. Campo eléctrico r=0.075m

En este escenario nos encontramos dentro de la distribución por lo tanto los valores de r serán iguales pero no estaremos encerrando toda la carga de la distribución por lo tanto lo que se va a alterar es el valor de la carga encerrada.

$$q_{enc} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad dA = 4\pi r^2$$



$$\int E dA = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

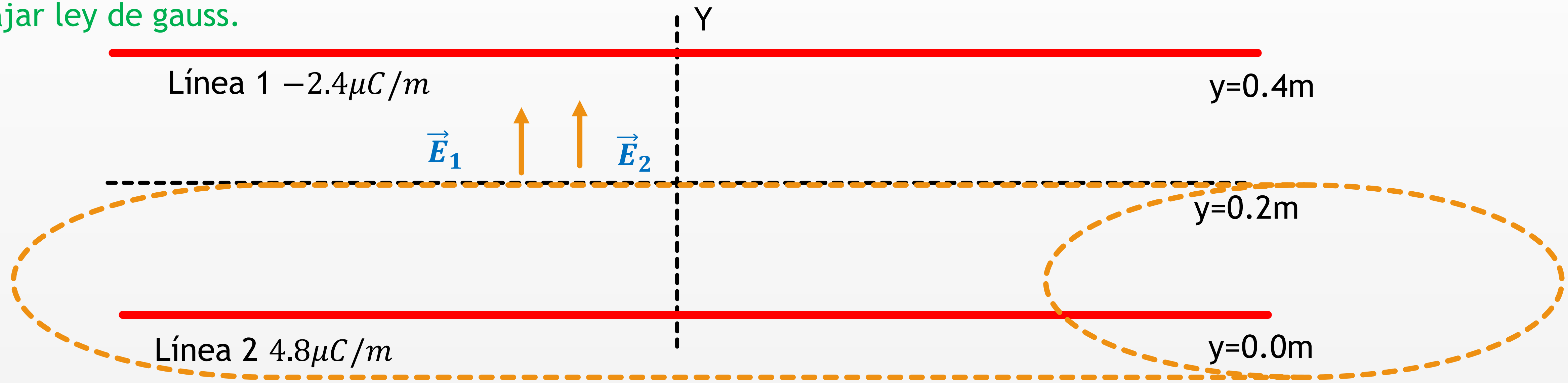
$$E(4\pi r^2) = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho 4\pi r^3}{3\varepsilon_0(4\pi r^2)} = \frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \frac{(7.5x10^{-9})(0.075)}{3(8.85x10^{-12})} = \boldsymbol{21.186\frac{N}{C}} \quad \boldsymbol{\hat{r}\ saliente}$$

De todos estos resultados podemos observar que el punto con mayor valor de campo es cuando se encierra toda la carga y disminuye al momento de salir de la distribución, ahora dentro de la distribución aun no se completa la carga encerrada por eso el valor va en forma incremental conforme se encierre la carga.

Ejemplo 2. Una línea de carga uniforme y muy larga tiene una carga por longitud de $4.8\mu C/m$ yace a lo largo del eje “x”. Una segunda línea de carga tiene una carga por unidad de longitud de $-2.4\mu C/m$ y es paralela al eje “x” en y=0.4m ¿Cuál es el campo eléctrico en el punto y=0.2m por la distribución de cargas?

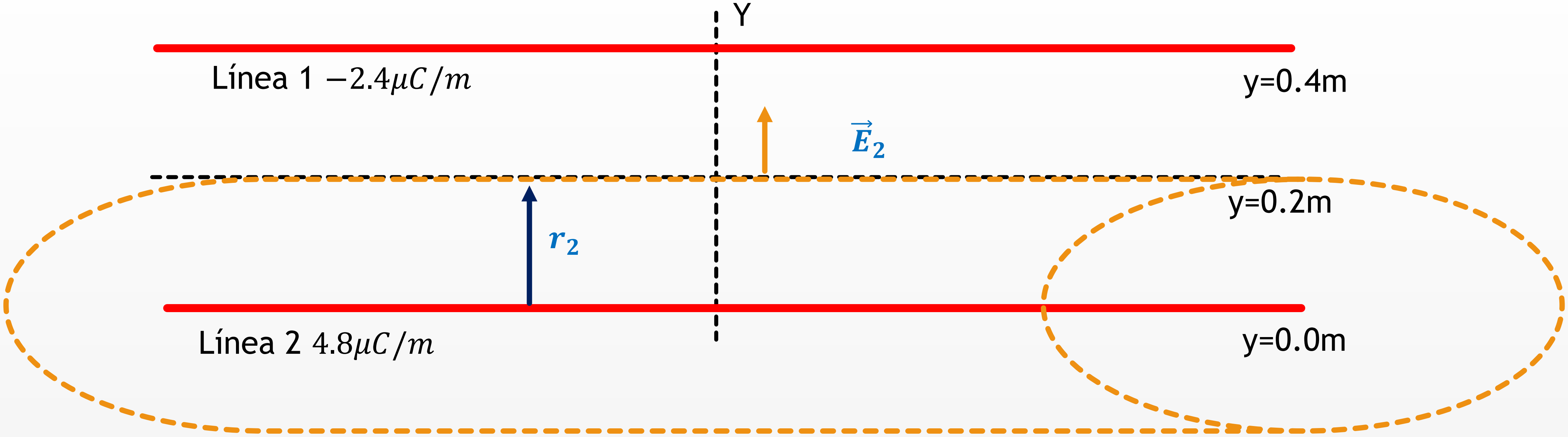
Resolución en este caso estimaremos las direcciones del campo sobre el eje ”y” pero hay que considerar que cada distribución de carga se estimara su campo eléctrico por la condición de alta simetría que emplea para trabajar ley de gauss.



En este caso los campos ambos van a la dirección de “y” positiva para lo cual a las líneas de carga se les va a emplear la figura cilíndrica tomando como parte de referencia el cascaron cilíndrico para estimar los campos en y=0.2m para posteriormente

Cilindro $dA = 2\pi rL$

Se estimaran las dos distribuciones por separado para lograr tener los campos de forma correcta.



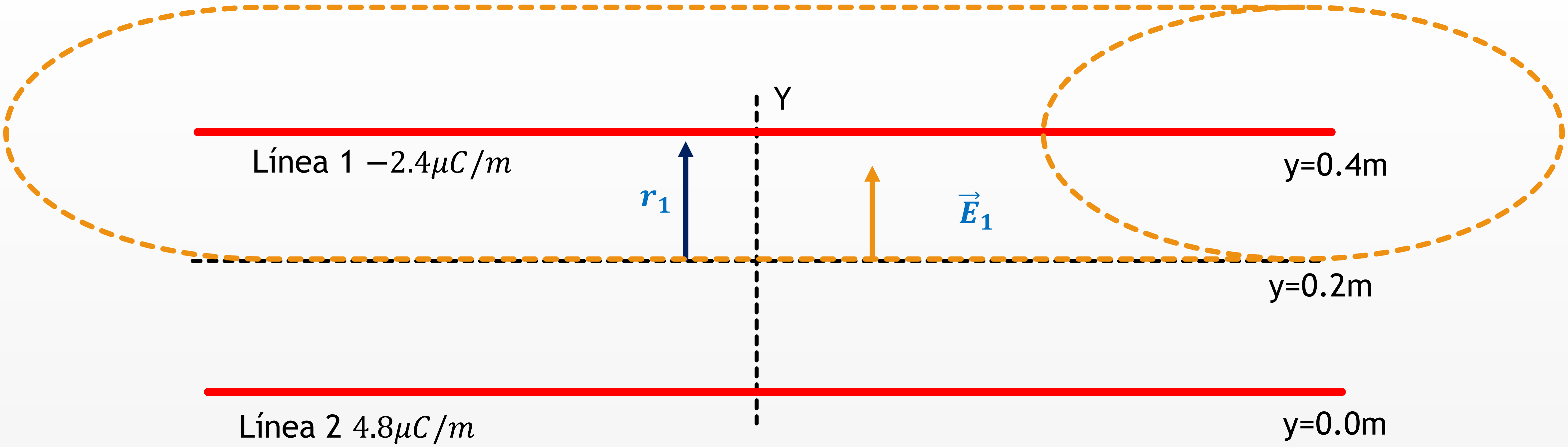
$q_{enc} = \lambda_2 l \quad dA = 2\pi r_2 l$

$$\int E dA = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E(2\pi r_2 l\ ) = \frac{\lambda_2 l}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda_2 \cancel{l}}{\varepsilon_0(2\pi r_2 \cancel{l}\ )} = \frac{\lambda_2}{\varepsilon_0(2\pi r_2\ )} = \frac{4.8x10^{-6}}{(8.85x10^{-12})(2\pi(0.2))} = 4.32x10^5 \frac{N}{C}\hat{j}$$

Ya con los dos campos solamente quedara sumarlos para obtener el campo el en punto y=0.2m



$$q_{enc} = \lambda_1 l \quad dA = 2\pi r_1 l$$

$$\int E dA = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E(2\pi r_1 l) = \frac{\lambda_1 l}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda_1 \cancel{l}}{\varepsilon_0(2\pi r_1 \cancel{l})} = \frac{\lambda_1}{\varepsilon_0(2\pi r_1)} = \frac{2.4x10^{-6}}{(8.85x10^{-12})(2\pi(0.2))} = 2.16x10^5 \frac{N}{C}\hat{j}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2.16x10^5 \frac{N}{C}\hat{j} + 4.32x10^5 \frac{N}{C}\hat{j} = \boldsymbol{6.48x10^5 \frac{N}{C}\hat{j}}$$

Ejemplo 3. Dos laminas infinitas de carga no conductoras se encuentran pelarelas entre si. Ambas laminas tienen una densidad superficial de valor σ. calcular el campo eléctrico a la izquierda de la dos laminas, a la derecha y entre las dos laminas.

En este caso previo a estimar los campos eléctricos entre las configuraciones de las placas es necesario estimar el campo eléctrico que estas producen y posteriormente realizar sus consideraciones.

Para este caso será necesario estimar el campo eléctrico usando la distribución gaussiana cilíndrica pero serán las tapaderas del cilindro la clave por ser simétricas para el caso.

$\sigma = \dfrac{Q}{A} \quad q_{enc} = \sigma A$

$dA = A$ $\;$ *ya que el radio es casi infinito*

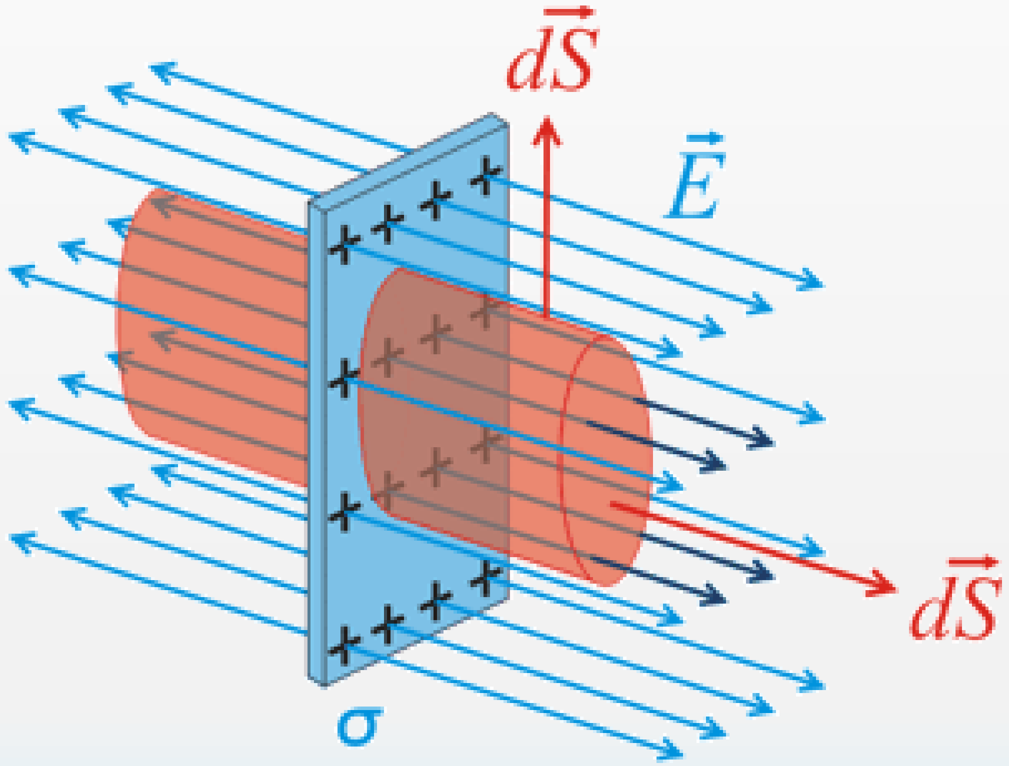
$$\int E dA = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

se considera las dos tapaderas por lo tanto serán dos integrales

que se sumen

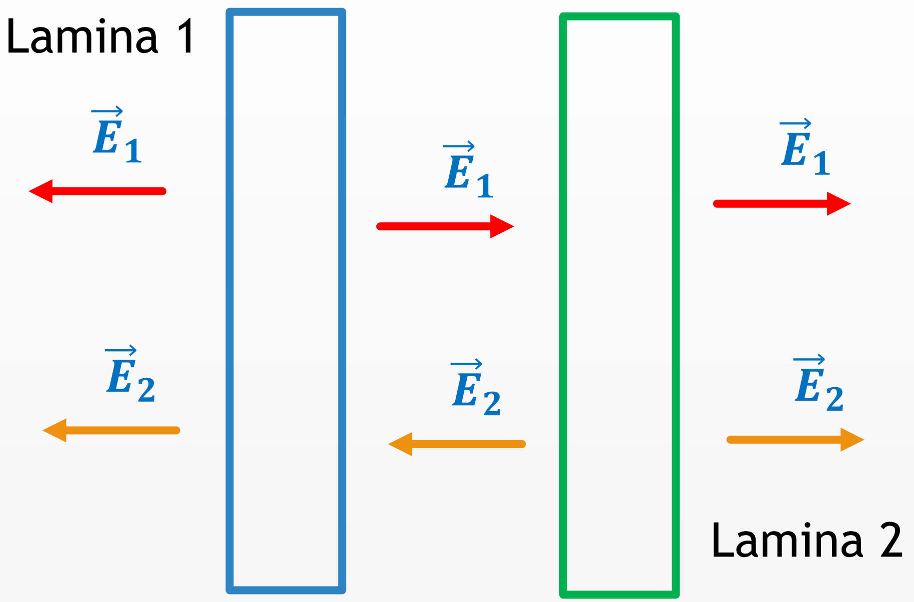
$$EA + EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$\boldsymbol{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$



El campo eléctrico calculado es solo para una placa en este caso haremos los cálculos para las dos en los escenarios planteados.

En este caso se realizara la suma de los efectos de los campos en las 3 regiones tomando en consideraciones que el campo eléctrico calculado anteriormente será el que usaremos para los resultados finales.



$$\vec{E}_{centro} = 0$$

Para el centro podremos observar que por ser de mismo signo no tendrán campo dentro de ellas.

$$\vec{E}_{izquierda} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_{derecha} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Estos resultados pueden variar si la configuración cambia el signo de la carga de una placa dejándolo de la siguiente forma.