1.2 Propiedades de los límites

DESCRIPCIÓN

En la sección anterior se desarrolló el concepto de límite, se estudió el cálculo de límites en forma aproximada usando la gráfica de la función o una tabla de valores. Ahora bien, para calcular el valor exacto del límite de una función es preciso realizar un cálculo analítico del mismo.

En Esta unidad se estudian las propiedades de los límites, las cuales se utilizan para obtener el valor exacto de un límite por medio de procesos algebraicos.

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio y desarrollar las actividades de Esta unidad el estudiante estará en capacidad de:

- Calcular el límite de una función usando las propiedades de los límites.
- Calcular límites laterales en funciones que están definidas por dos o más fórmulas usando propiedades de los límites.

Propiedades de los límites

En esta sección se presenta un resumen de las propiedades de los límites. Las propiedades permiten calcular límites de funciones sin tener que recurrir a la gráfica de la función o a una tabla de valores. La demostración de estas propiedades se hace utilizando la definición formal de límite que no se presenta en estos documentos. Para ver las demostraciones el estudiante debe consultar un libro formal de cálculo diferencial e integral.

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Si k y c son números reales y n es un entero positivo, f y g son funciones tales que:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c} g(x) = M \ ,$$

1. $\lim_{x \to c} k = k$
2. $\lim_{x \to c} x = c$
3. $\lim_{x \to c} x^n = c^n$
4. $\lim_{x \to c} kf(x) = k \lim_{x \to c} f(x) = kL$
5. $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) = L + M$
6. $\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x) = L - M$
7. $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x) = LM$
8. $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad \text{si } M \neq 0$
9. $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to c} f(x)\right]^n = L^n$
10. $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, si n es par $L > 0$

Las propiedades anteriores no es necesario saberlas de memoria y se pueden resumir en la siguiente propiedad, conocida como la propiedad de evaluación

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(c)}{g(c)}\quad \text{siempre y cuando } g(c)\neq 0$$

Ejemplo 1: Cálculo de límites usando propiedades

Utilice las propiedades de los límites para calcular los límites siguientes

a. $\lim\limits_{x\to -3}\left(2x^2-3x+4\right)$ **b.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-3}{x^2+4}$ **c.** $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}}{4-x}$

Solución

a. Para resolver este problema, se utilizarán una a una las propiedades de los límites. Primero se utilizan las propiedades 5 y 6 para expresar el límite como una suma y resta de límites más simples

$$\lim_{x\to -3}\left(2x^2-3x+4\right)=\lim_{x\to -3}2x^2-\lim_{x\to -3}3x+\lim_{x\to -3}4$$

Ahora se utiliza la propiedad 4 para separar las constantes

$$\lim_{x\to -3}\left(2x^2-3x+4\right)=2\lim_{x\to -3}x^2-3\lim_{x\to -3}x+\lim_{x\to -3}4$$

Finalmente se utilizan las propiedades 1, 2 y 3 que permiten evaluar los límites

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -3}\left(2x^2-3x+4\right)&=2(-3)^2-3(-3)+4\\&=(2)(9)+9+4\\&=31\end{aligned}$$

En la práctica el límite anterior se calcula fácilmente sustituyendo $x=-3$ como se muestra a continuación, este procedimiento se conoce como cálculo de límites por evaluación directa.

$$\lim_{x\to -3}\left(2x^2-3x+4\right)=2(-3)^2-3(-3)+4=18+9+4=31$$

b. Para calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-3}{x^2+4}$ veamos primero que sucede con el denominador.

como $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+4\right)=0+4=4$, no es igual a cero, el límite se puede calcular utilizando propiedad 8 como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x-3}{x^2+4}&=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 0}(x^2+4)}\\&=\frac{0-3}{(0)^2+4}=\frac{-3}{4}\\&=-\frac{3}{4}\end{aligned}$$

c. El límite $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}}{4-x}$ se calcula de forma similar al del inciso anterior, calculando primero el límite del denominador $\lim\limits_{x\to 0}(4-x)=4-7=-3$. Como éste es diferente de cero podemos utilizar la propiedad 8 y la propiedad 10, obteniendo

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x-3}}{4-x}=\frac{\lim\limits_{x\to 7}\sqrt{x-3}}{\lim\limits_{x\to 7}(4-x)}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 7}(x-3)}}{\lim\limits_{x\to 7}(4-x)}$$

$$=\frac{\sqrt{(7)-3}}{4-(7)}=\frac{\sqrt{4}}{-3}$$

$$=-\frac{2}{3}$$

Funciones que coinciden en un intervalo, excepto en un punto del mismo

Si f y g son dos funciones tales que $f(x)=g(x)$ para todo número en un intervalo abierto que contiene a $x=c$, excepto en el número c, entonces:

Si el límite $\lim\limits_{x\to c} g(x)=L$, entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$

La figura 1 ilustra la propiedad anterior, en ella se muestran las gráficas de las funciones $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ y $g(x)=x+2$. Estas funciones son iguales en todos sus puntos, menos en el punto donde $x=2$. La función f no está definida en ese punto ya que $f(2)=\dfrac{(2)^2-4}{(2)-2}=\dfrac{0}{0}$, que no es un número real. Sin embargo la función g si ésta definida en $x=2$ ya que $g(2)=(2)+2=4$.

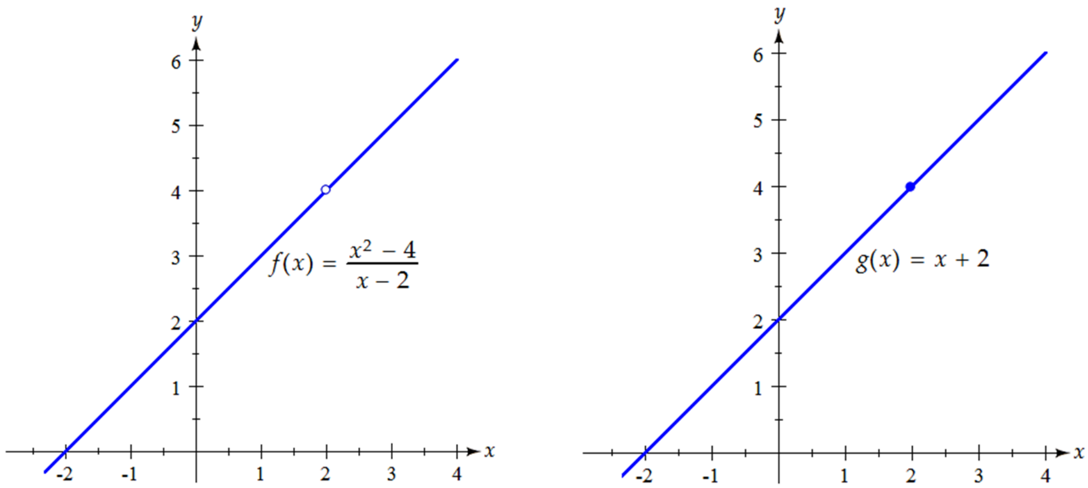


Figura 1

Al observar las gráficas de las funciones se puede ver que cuando x tiende a 2 ambas tienen el mismo límite que es 4, es decir

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

La propiedad anterior es muy útil para el cálculo de límites de la forma $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, en donde $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to c} g(x)=0$, ya que se obtiene como resultado la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$. Con operaciones algebraicas se puede encontrar una función que coincida en todos los puntos cerca de $x=c$ y utilizarla para calcular el límite, el ejemplo 2 ilustra este procedimiento.

Procedimiento para calcular un límite de la forma $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$

1. Si $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$, entonces $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}$

2. Si $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to c} g(x) = 0$, entonces la expresión racional tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$. En este caso se deben efectuar operaciones algebraicas para obtener una función que coincida en todos los puntos y utilizarla para calcular el límite.

3. Si $\lim_{x \to c} f(x) \neq 0$ y $\lim_{x \to c} g(x) = 0$, entonces el límite tiene la forma $\frac{k}{0}$, donde k es una constante distinta de cero. En éste caso el límite es tipo infinito y por lo tanto no existe. Se puede usar una tabla de valores para determinar el comportamiento de la función cuando x tiende a c por la izquierda y cuando x tiende a c por la derecha.

Sugerencias para el estudiante

El siguiente resumen le ayudará a elegir el procedimiento apropiado para calcular el límite en una función, usando las propiedades de los límites

1. Para calcular el límite $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ siga el procedimiento siguiente

a. Si al calcular el límite del denominador $\lim_{x \to c} g(x) = M$, donde $M \neq 0$, el límite se puede calcular por evaluación directa.

b. Si al calcular el límite del denominador $\lim_{x \to c} g(x) = M$, donde $M = 0$, y el límite del numerador es $\lim_{x \to c} f(x) = L = 0$. Entonces el límite tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ y se deben efectuar operaciones algebraicas para obtener una función equivalente para calcular el límite.

c. Si al calcular los límites del numerador y denominador se obtiene la forma $\frac{L}{0}$, entonces el límite es del tipo infinito y por lo tanto no existe. Se recomienda calcular los límites $\lim_{x \to c^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim_{x \to c^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ para determinar el comportamiento asintótico de la función en $x = c$. Los límites infinitos se estudian en otra sección en este sitio.

2. Para calcular $\lim_{x \to c} f(x)$ cuando f es una función con varias fórmulas. Si para $x < c$ la función tiene una fórmula y para $x > c$ la función tiene otra fórmula; se deben calcular los límites laterales

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c^+} f(x)$$

Si los límites laterales son iguales entonces $\lim_{x \to c} f(x)$ existe y es igual al valor de los límites laterales, si los límites laterales son distintos entonces $\lim_{x \to c} f(x)$ no existe.

Ejemplo 2: Cálculo de límites de la forma 0/0

Utilice las propiedades de los límites para calcular los límites siguientes

a. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^2 + 6x}{x^2 - 9}$ **b.** $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 2x - 8}$

c. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2(h + 3)^2 - 3(h + 3) - 9}{h}$ **d.** $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

Solución

a. Para calcular $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^2 + 6x}{x^2 - 9}$ primero calculamos el límite del denominador

$$\lim_{x \to -3} (x^2 - 9) = (-3)^2 - 9 = 9 - 9 = 0$$

Como el denominador tiende a cero, debemos calcular el límite del numerador

$$\lim_{x \to -3} (2x^2 + 6x) = 2(-3)^2 + 6(-3) = 18 - 18 = 0$$

Ya que tanto el numerador como el denominador tienden a cero cuando x tiende a -3 el límite tiene forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$ es necesario factorizar el numerador y el denominador y cancelar los factores comunes, para poder evaluar el límite

$$\lim_{x \to -3} \frac{2x^2 + 6x}{x^2 - 9} = \lim_{x \to -3} \frac{2x(x + 3)}{(x - 3)(x + 3)}$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{2x}{(x - 3)}$$

Ahora, ya que el límite del denominador cuando x tiende a -3 es distinto de cero, se calcular el límite utilizando la propiedad 8

$$\lim_{x \to -3} \frac{2x^2 + 6x}{x^2 - 9} = \lim_{x \to -3} \frac{2x}{(x - 3)}$$

$$= \frac{2(-3)}{(-3) - 3} = \frac{-6}{-6}$$

$$= 1$$

b. Procediendo de la misma forma que en el inciso anterior, se tiene que tanto el límite del numerador como el del denominador son iguales a cero, por lo tanto debemos efectuar operaciones algebraicas para evaluar el límite.

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 2x - 8} = \lim_{x \to 4} \frac{(x - 4)(x - 1)}{(x - 4)(x + 2)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x - 1)}{(x + 2)}$$

Como ahora el límite del denominador cuando x tiende a 4 es diferente de cero usamos la propiedad 8 obteniendo

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 2x - 8} = \frac{x - 1}{x + 2}$$

$$= \frac{4 - 1}{4 + 2} = \frac{3}{6}$$

$$= \frac{1}{2}$$

c. Nuevamente se tiene que tanto el numerador como el denominador tienden a 0 cuando x tiende a 4, por lo tanto nuevamente se tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$

A diferencia de los dos ejemplos anteriores, ahora es conveniente desarrollar los productos en el numerador y luego simplificar la fracción resultante

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{2(h+3)^2 - 3(h+3) - 9}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{2(h^2 + 6h + 9) - 3h - 9 - 9}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 + 12h + 18 - 3h - 18}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 + 9h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(2h+9)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (2h + 9) \\
&= 2(0) + 9 \\
&= 9
\end{aligned}$$

d. Por simple observación vemos que $\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$ tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Como el numerador de la función tiene radicales, para obtener una función equivalente es necesario racionalizar, para lo cual debemos multiplicar el numerador y denominador de la fracción por el conjugado de $\sqrt{x} - 3$

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} \cdot \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$$

El producto en el denominador es una diferencia de cuadrados, mientras que el producto del denominador no debe desarrollarse pues lo que se quiere es cancelar el factor $x - 9$
.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} &= \lim_{x \to 9} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 - (3)^2}{(x-9)\left(\sqrt{x} + 3\right)} \\
&= \lim_{x \to 9} \frac{x - 9}{(x-9)\left(\sqrt{x} + 3\right)} \\
&= \lim_{x \to 9} \frac{1}{\left(\sqrt{x} + 3\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{9} + 3} = \frac{1}{3 + 3} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

En el cálculo de éste límite se ha asumido que el estudiante ya tiene claro que después de racionalizar la fracción, el límite del denominador es distinto de 0 y por lo tanto se ha utilizado la propiedad 8.

Ejemplo 3: Cálculo de límites con dos radicales

Calcule el límite

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{4x+5}-5}{2-\sqrt{x-1}}$$

Solución

Calculando el límite del numerador

$$\lim_{x \to 5}\left(\sqrt{4x+5}-5\right) = \sqrt{4(5)+5}-5 = 5-5 = 0$$

Calculando el límite del denominador

$$\lim_{x \to 5}\left(2-\sqrt{x-1}\right) = 2-\sqrt{5-1} = 2-2 = 0$$

Como el límite del numerador es 0 y el límite del denominador también es 0, resulta que el límite de la función tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$ será necesario realizar operaciones algebraicas para cancelar el factor que produce la forma indeterminada.
Racionalizando el numerador se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{4x+5}-5}{2-\sqrt{x-1}} &= \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{4x+5}-5}{2-\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{4x+5}+5}{\sqrt{4x+5}+5} \\
&= \lim_{x \to 5} \frac{(4x+5)-25}{\left(2-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{4x+5}+5\right)} \\
&\lim_{x \to 5} \frac{4x-20}{\left(2-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{4x+5}+5\right)}
\end{aligned}$$

Observe que el producto en el denominador no se ha desarrollado. Ahora hay que racionalizar la expresión $2-\sqrt{x-1}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{4x+5}-5}{2-\sqrt{x-1}} &= \lim_{x \to 5} \frac{4x-20}{\left(2-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{4x+5}+5\right)} \cdot \frac{2+\sqrt{x-1}}{2+\sqrt{x-1}} \\
&= \lim_{x \to 5} \frac{(4x-20)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}{(4-(x-1))\left(\sqrt{4x+5}+5\right)} \\
&= \lim_{x \to 5} \frac{4(x-5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}{(5-x)\left(\sqrt{4x+5}+5\right)}
\end{aligned}$$

Multiplicando por -1 el numerador y el denominador para invertir el orden del factor $5-x$ se podrá cancelar el factor que produce la forma indeterminada

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{4x+5}-5}{2-\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to5}\frac{-4(x-5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}{(x-5)\left(\sqrt{4x+5}+5\right)}$$
$$= \lim_{x\to5}\frac{-4\left(2+\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{4x+5}+5\right)}$$

Finalmente, podemos calcular el límite por evaluación

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{4x+5}-5}{2-\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to5}\frac{-4\left(2+\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{4x+5}+5\right)}$$
$$= \frac{-4\left(2+\sqrt{5-1}\right)}{\left(\sqrt{4(5)+5}+5\right)}$$
$$= \frac{-4(4)}{(5+5)}$$
$$= -\frac{8}{5}$$

Respuesta:

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{4x+5}-5}{2-\sqrt{x-1}} = -\frac{8}{5}$$

Ejemplo 4: Cálculo de límites con raíces cúbicas

Calcule el límite

$$\lim_{x\to2}\frac{4x^2+x-18}{(4x)^{1/3}-2}$$

Solución

Evaluando el límite del numerador se tiene

$$\lim_{x\to2}\left(4x^2+x-18\right) = 4(2)^2+(2)-18 = 0$$

Evaluando el límite del denominador se tiene

$$\lim_{x\to2}\left((4x)^{1/3}-2\right) = (4\cdot2)^{1/3}-2 = 0$$

Como ambos límites son iguales a cero, el límite de la función tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$ y es necesario realizar operaciones algebraicas para calcular el límite.

Para racionalizar el denominador que contiene raíces cúbicas hay utilizar el producto notable

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Cuando los exponentes son fraccionarios el producto anterior se puede expresar como

$$a-b = (a^{1/3}-b^{1/3})(a^{2/3}+a^{1/3}b^{1/3}+b^{2/3})$$

Utilizando el producto anterior para calcular el límite se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{4x^2+x-18}{(4x)^{1/3}-2} &= \lim_{x\to 2}\frac{4x^2+x-18}{(4x)^{1/3}-(8)^{1/3}}\cdot\frac{(4x)^{2/3}+(4x)^{1/3}(8)^{1/3}+(8)^{2/3}}{(4x)^{2/3}+(4x)^{1/3}(8)^{1/3}+(8)^{2/3}}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{(4x+9)(x-2)\left((4x)^{2/3}+(4x)^{1/3}(8)^{1/3}+(8)^{2/3}\right)}{4x-8}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{(4x+9)(x-2)\left((4x)^{2/3}+(4x)^{1/3}(2)+4\right)}{4(x-2)}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{(4x+9)\left((4x)^{2/3}+(4x)^{1/3}(2)+4\right)}{4}
\end{aligned}$$

El límite del denominador en la última expresión es diferente de cero y se puede calcular por evaluación,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{4x^2+x-18}{(4x)^{1/3}-2} &= \lim_{x\to 2}\frac{(4x+9)\left((4x)^{2/3}+(4x)^{1/3}(2)+4\right)}{4}\\
&= \frac{(8+9)\left((8)^{2/3}+2(8)^{1/3}+4\right)}{4}\\
&= \frac{17(4+4+4)}{4}\\
&= (17)(3)\\
&= 51
\end{aligned}$$

Respuesta:

$$\lim_{x\to 2}\frac{4x^2+x-18}{(4x)^{1/3}-2} = 51$$

Ejemplo 5: Cálculo de límites con división sintética

Calcule el límite

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{6x^2-7x-5}{2x^4-5x^3+x^2-4x-3}$$

Solución

Calculando el límite del numerador

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\left(6x^2-7x-5\right) = 6\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2-7\left(-\tfrac{1}{2}\right)-5 = 0$$

Calculando el límite del denominador

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\left(2x^4-5x^3+x^2-4x-3\right) = 2\left(-\tfrac{1}{2}\right)^4-5\left(-\tfrac{1}{2}\right)^3+\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2-4\left(-\tfrac{1}{2}\right)-3 = 0$$

El límite que se va a calcular tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$, por lo que se deben realizar operaciones algebraicas para cancelar el factor que produce la indeterminación.

Factorizando el numerador se tiene

$$6x^2-7x-5 = \frac{(6x-10)(6x+3)}{2\times 3} = (3x-5)(2x+1)$$

Para factorizar el denominador se utiliza división sintética, sabiendo que $x = -\frac{1}{2}$ es un cero del denominador.

$$\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -5 & 1 & -4 & -3 & -\frac{1}{2} \\ & -1 & 3 & -2 & 3 & \\ \hline 2 & -6 & 4 & -6 & 0 & \end{array}$$

Como el residuo en la división es cero se tiene que $x = -\frac{1}{2}$ es una raíz del polinomio y $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ es un factor. El polinomio se puede factorizar como

$$\begin{aligned} 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x - 3 &= \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(2x^3 - 6x^2 + 4x - 6\right) \\ &= (2x+1)(x^3 - 3x^2 + 2x - 3) \end{aligned}$$

Al sustituir los dos polinomios factorizados y simplificar se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{6x^2 - 7x - 5}{2x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x - 3} &= \lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{(3x-5)(2x+1)}{(2x+1)(x^3 - 3x^2 + 2x - 3)} \\ &= \lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{3x - 5}{x^3 - 3x^2 + 2x - 3} \end{aligned}$$

Después de cancelar el factor común al numerador y al denominador, el límite se puede calcular por evaluación

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{6x^2 - 7x - 5}{2x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x - 3} &= \lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{3x - 5}{x^3 - 3x^2 + 2x - 3} \\ &= \frac{3\left(-\frac{1}{2}\right) - 5}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 3} \\ &= \frac{-\frac{13}{2}}{-\frac{39}{8}} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Respuesta:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{6x^2 - 7x - 5}{2x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x - 3} = \frac{4}{3}$$

Ejemplo 6: Cálculo de límites con valor absoluto

Calcule el límite

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 + x + |x - 2| - 6}$$

Solución

Evaluando el límite del numerador se tiene

$$\lim_{x\to 2}(x-2) = 2-2 = 0$$

Evaluando el límite del denominador se tiene

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2 + x + |x-2| - 6\right) = 2^2 + 2 - |2-2| - 6 = 0$$

Como ambos límites son iguales a cero, el límite de la función tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$ y es necesario realizar operaciones algebraicas para calcular el límite.

Como en el límite que se va a calcular hay una expresión con valor absoluto, se puede redefinir la misma utilizando la definición de valor absoluto

$$|x-2| = \begin{cases} -(x-2) & \text{si} \quad x < 2 \\ x-2 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Como la función no es la misma para valores mayores que 2 que para valores menores que 2, es necesario calcular el límite por la izquierda y el límite por la derecha en $x = 2$

Para números mayores que 2 se tiene $|x-2| = x-2$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x^2 + x + |x-2| - 6} &= \lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x^2 + x + (x-2) - 6} \\
&= \lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x^2 + 2x - 8} \\
&= \lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{(x+4)(x-2)} \\
&= \lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x+4} \\
&= \frac{1}{2+4} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Para números menores que 2 se tiene que $|x-2| = -(x-2)$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{x^2 + x + |x-2| - 6} &= \lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{x^2 + x - (x-2) - 6} \\
&= \lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{x^2 - 4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{x^2 + x + |x-2| - 6} &= \lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)} \\
&= \lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x+2} \\
&= \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Respuesta:

Como el límite por la derecha y el límite por la izquierda son diferentes se concluye que

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2 + x + |x-2| - 6} \quad \text{no existe}$$

Ejemplo 7: Cálculo de límites en una función de varias fórmulas

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x < -2 \\ x^2+1 & \text{si} \quad -2 \le x \le 1 \\ 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a. Calcule $\lim_{x \to -2} f(x)$.

b. Calcule $\lim_{x \to 1} f(x)$

c. Dibuje la representación gráfica de la función y utilice la gráfica para verificar los resultados obtenidos analíticamente.

Solución

a. Para calcular $\lim_{x \to -2} f(x)$, es preciso observar que para valores de x a la izquierda de -2 ($x < -2$) la fórmula correspondiente es $x+2$; mientras que para valores ligeramente mayores que -2 ($x > -2$) la fórmula correspondiente es x^2+1. Cuando se tienen fórmulas diferentes, por la izquierda y por la derecha del valor en el cual se está calculando el límite, es necesario usar límites laterales.

Calculando el límite por la izquierda de $x = -2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2^-} f(x) &= \lim_{x \to -2^-} (x+2) \\ &= (-2)+2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Calculando el límite por la derecha de $x = -2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2^+} f(x) &= \lim_{x \to -2^+} (x^2+1) \\ &= (-2)^2+1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Como el límite por la izquierda es 0 y el límite por la derecha es 5 se concluye que

$$\lim_{x \to -2} f(x) \quad \text{no existe.}$$

b. Para calcular $\lim_{x \to 1} f(x)$ se procede de forma similar al inciso anterior ya que por la izquierda y por la derecha de $x = 1$ la función tiene fórmulas diferentes.

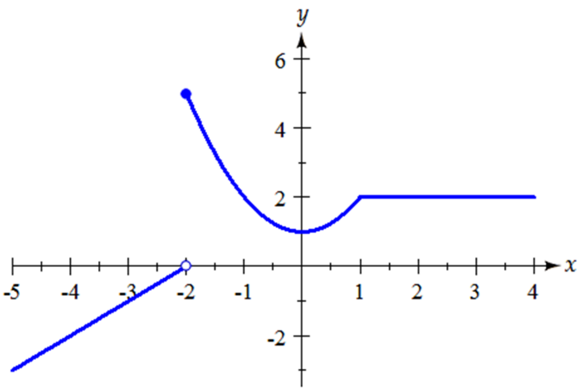
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2+1) = (1)^2+1 = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2) = 2$$

Como el límite por la izquierda es igual que el límite por la derecha se concluye que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

c. La figura 2 muestra la representación gráfica de la función. Observe que en $x = -2$ la gráfica tiene un salto, lo que nos indica que el límite ahí no existe, mientras que en $x = 1$ la gráfica es continua, lo que nos indica que el límite si existe.



Ejercicios de la sección 1.2

En los ejercicios 1 a 4 utilice las propiedades de los límites para calcular los límites siguientes:

1. $\lim_{x\to 3} \frac{4x-4}{5x-1}$

2. $\lim_{h\to 0} \frac{2h+1}{2h^2-3h+6}$

3. $\lim_{x\to -2} \sqrt{\frac{x^2+4}{2-x}}$

4. $\lim_{x\to 4} \sqrt{\frac{x^2+9}{x}}$

En los ejercicios 5 a 30 calcule el límite

5. $\lim_{x\to 0} \frac{4x^2-2x}{x}$

6. $\lim_{x\to 7} \frac{x^2-49}{x-7}$

7. $\lim_{x\to 1/3} \frac{3x-1}{9x^2-1}$

8. $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-x-12}{x-4}$

9. $\lim_{p\to -3} \frac{p^2+p-6}{p^2+7p+12}$

10. $\lim_{x\to 4} \frac{3x^2-8x-16}{2x^2-9x+4}$

11. $\lim_{h\to 0} \frac{2(3+h)^2-3(3+h)-9}{h}$

12. $\lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}$

13. $\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{6-x}-3}{x+3}$

14. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

15. $\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2+x+|x+2|+6}$

16. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x-8}{x^2+4x-|5x+2|}$

17. $\lim_{v\to 4} \frac{4-v}{|4-v|}$

18. $\lim_{x\to 0} \frac{|x+2|-|x-2|}{x}$

19. $\lim_{x\to 8} \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-2}$

20. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

21. $\lim_{x\to -6} \frac{2x+12}{|x+6|}$

22. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+cx}-1}{x}$

23. $\lim_{x\to 3} \frac{2x^3-7x^2-x+12}{x^4-2x^3-3x^2+x-3}$

24. $\lim_{x\to 0} \frac{|2x-1|-|2x+1|}{x}$

25. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3+\sqrt[3]{x}}-2}{x-1}$

26. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$

27. $\lim_{x\to 8} \frac{x^{1/3}-2}{x^{2/3}-4}$

28. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

29. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^2+5x-6}$

30. $\lim_{x\to 2}\dfrac{4x^2+x-18}{(4x)^{1/3}-2}$

En los ejercicios siguientes se da una función de dos o más fórmulas. Dibuje la gráfica de la función y calcule los límites indicados. Si el límite no existe explique por qué razón.

31. $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x<3\\ 10-x & \text{si } x\geq 3\end{cases}$,

Calcule: $\lim_{x\to 3^-} f(x)$, $\lim_{x\to 3^+} f(x)$, $\lim_{x\to 3} f(x)$

32. $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si } x<-1\\ x^2 & \text{si } -1\leq x\leq 1\\ 2-x & \text{si } x>1\end{cases}$

Calcule: $\lim_{x\to -1^-} f(x)$, $\lim_{x\to -1^+} f(x)$, $\lim_{x\to -1} f(x)$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$,

33. Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$ si la función *f* se define como

$$f(x)=\begin{cases}x^2+x & \text{si } x<1\\ 3-x & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

34. Calcule $\lim_{x\to -2} f(x)$ y $\lim_{x\to 3} f(x)$ si la función *f* está dada por

$$f(x)=\begin{cases}x+4 & \text{si } x<-2\\ x^2 & \text{si } -2\leq x\leq 3\\ 2x+1 & \text{si } x>3\end{cases}$$

35. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{si } x<1\\ 3 & \text{si } x=1\\ 2-x^2 & \text{si } 1<x\leq 2\\ x-3 & \text{si } x>2\end{cases}$$

a. Dibuje la representación gráfica de la función
b. Calcule lo que se indica usando la gráfica y en forma algebraica

$f(1)$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim_{x\to 1} f(x)$

$f(2)$, $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim_{x\to 2} f(x)$

36. Si $\lim_{x\to c} f(x)=3$ y $\lim_{x\to c} g(x)=2$, calcule el valor del límite $\lim_{x\to c}[f(x)g(x)]$

37. Determine los valores de a tal que el siguiente límite exista:

$$\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$$

38. Encontrar los valores de las constantes a y b, tales que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{3}}{x}=\sqrt{3}$$

39. Sea $P(5,-12)$ un punto sobre la circunferencia $x^2+y^2=169$

a. Encuentre la pendiente de la recta que une el punto *P* con el origen.

b. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en P.

c. Sea $Q(x,y)$ otro punto que se encuentra en el primer cuadrante y sobre la misma circunferencia. Calcule la pendiente $m(x)$ que une el punto *Q* con el punto *P* en términos de la variable *x*.

d. Calcule $\lim_{x\to 5} m(x)$. Como se relaciona el resultado con resultado del inciso (b).