Ecuaciones no Homogeneas

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

* Metodo de coeficientes indeterminados → Superposición / operador Anulador
* Variación de parametros.

Superposición

Solución. → $y = y_{complementaria} + y_{particular}$

$y_{complementaria}$: Solución de la Ec. Homogenea del lado izquierdo.

$y_{particular}$: se obtiene del lado derecho y depende de $g(x)$.

Soluciones Particulares

	$g(x)$	Forma de y_P
1	5	A
2	$2x+3$	$Ax+B$
3.	$2x^2+5x-1$	Ax^2+Bx+C
4	$x^5-3x^4+2x^2+1$	$Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F$
5	$\text{sen}\,4x$	$A\cos 4x + B\,\text{sen}\,4x$
6	$\cos 4x$	$A\cos 4x + B\,\text{sen}\,4x$
7	e^{4x}	Ae^{4x}
8	$(7x^2-2)e^{-2x}$	$(Ax^2+Bx+C)e^{-2x}$
9.	x^4e^{3x}	$(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E)e^{3x}$
10	$e^{3x}\,\text{sen}\,2x$	$Ae^{3x}\cos 2x + Be^{3x}\,\text{sen}\,2x$
11	$x^2e^{-x}\cos 3x$	$(Ax^2+Bx+C)e^{-x}\cos 3x + (Dx^2+Ex+F)e^{-x}\,\text{sen}\,3x$

* Determine los valores de las constantes $(A, B, C\dots)$

⇓

Derive según el orden de la ecuación y Sustituya cada derivada en la Ecuación diferencial e iguale los terminos que sean iguales a $g(x)$

* Plantear la solución final de la Ec. diferencial.

Ej. Resolver $y'' - 8y' + 20y = 100x^2 - 26xe^x$

$y = y_c + y_p$

$\underline{y_c}$

$y'' - 8y' + 20y = 0 \rightarrow m = \frac{+8 \pm \sqrt{64 - 4(1)(20)}}{2(1)}$

$m^2 - 8m + 20 = 0$

$m = 4 \pm \frac{4i}{2} = 4 \pm 2i$

$y_c = e^{4x}(C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x)$

$\underline{y_p}$

$g(x) = 100x^2 - 26xe^x$

$y_p = \underline{Ax^2 + Bx + C} + \underline{(Dx + E)e^x} = Ax^2 + Bx + C + Dxe^x + Ee^x$

$y' = 2xA + B + Dxe^x + De^x + Ee^x$

$y'' = 2A + Dxe^x + De^x + De^x + Ee^x$

$y'' - 8y' + 20y = 100x^2 - 26xe^x$

$2A + Dxe^x + 2De^x + Ee^x - 8(2xA + B + Dxe^x + De^x + Ee^x) + 20(Ax^2 + Bx + C$
$+ Dxe^x + Ee^x) = 100x^2 - 26xe^x$

$\cancel{2A} + \cancel{Dxe^x} + \cancel{2De^x} + \cancel{Ee^x} - \cancel{16xA} - \cancel{8B} - \cancel{8Dxe^x} - \cancel{8De^x} - \cancel{8Ee^x} + \cancel{20Ax^2} + \cancel{20Bx}$
$+ \cancel{20C} + \cancel{20Dxe^x} + \cancel{20Ee^x} = 100x^2 - 26xe^x$

$(2A - 8B + 20C) = 0$

$\cancel{xe^x}(D - 8D + 20D) = -26\cancel{xe^x}$

$e^x(\cancel{2D} + E - \cancel{8D} - 8E + 20E) = 0$

$x(-16A + 20B) = 0$

$\cancel{x^2}(20A) = 100\cancel{x^2} \rightarrow 20A = 100 \rightarrow A = \frac{100}{20} = 5$

$13D = -26 \rightarrow D = -\frac{26}{13} = -2$

$-16A + 20B = 0 \rightarrow B = \frac{16A}{20} = \frac{4}{\cancel{5}}(\cancel{5}) = 4$

$-6D + 13E = 0 \rightarrow 13E = 6D$

$E = \frac{6}{13}(-2) = \frac{-12}{13}$

$2A - 8B + 20C = 0$

$20C = 8B - 2A \rightarrow C = \frac{8B - 2A}{20} = \frac{8(4) - 2(5)}{20} = \frac{22}{20} = \frac{11}{10}$

$y = y_c + y_p$

$y = e^{4x}(C_1\cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x) + 5x^2 + 4x + \frac{11}{10} - 2xe^x - \frac{12}{13}e^x$

Ej. Resolver $y'' + 4y = 3 \operatorname{sen} 2x$

$y = y_c + y_p$

$\underline{y_c}$ $y'' + 4y = 0$

$m^2 + 4 = 0 \rightarrow \sqrt{m^2} = \sqrt{-4} \rightarrow m = \pm 2i$

$y_c = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x$

$+2i$

$-2i$

$\underline{y_p}$ $g(x) = 3 \operatorname{sen} 2x \rightarrow \beta = 2$

$y_p = Ax\cos 2x + Bx \operatorname{sen} 2x$

$y_p' = -2Ax \operatorname{sen} 2x + A\cos 2x + 2Bx\cos 2x + B \operatorname{sen} 2x$

$y_p'' = -4Ax\cos 2x - 2A\operatorname{sen} 2x - 2A\operatorname{sen} 2x - 4Bx\operatorname{sen} 2x + 2B\cos 2x$

$+2B\cos 2x$

$-4Ax\cos 2x - 4A\,\text{sen}\,2x - 4Bx\,\text{sen}\,2x + 4B\cos 2x \quad +$

$+4Ax\cos 2x \qquad\qquad +4Bx\,\text{sen}\,2x$

$-4A\,\text{sen}\,2x + 4B\cos 2x = 3\,\text{sen}\,2x$

$-4A\,\text{sen}\,2x = 3\,\text{sen}\,2x \rightarrow -4A = 3 \qquad A = -\frac{3}{4}$

$4B\cos 2x = 0 \rightarrow B = 0$

Sol

$y = y_c + y_p$

$y = C_1\cos 2x + C_2\,\text{sen}\,2x - \frac{3}{4}x\cos 2x$

Ej. Resolver $y''' - y'' - 4y' + 4y = 5 - e^x + e^{2x}$

$y = y_c + y_p$

y_c $\quad m^3 - m^2 - 4m + 4 = 0$

$m_1 = 1 \qquad m_2 = -2 \qquad m_3 = 2$

$y_c = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{2x}$

y_p $\quad g(x) = 5 - e^x + e^{2x}$

$A \qquad Be^x \qquad Ce^{2x}$

$y_p = A + Bxe^x + Cxe^{2x}$

$y' = Bxe^x + Be^x + 2Cxe^{2x} + Ce^{2x}$

$y'' = Bxe^x + Be^x + Be^x + 4Cxe^{2x} + 2Ce^{2x} + 2Ce^{2x}$

$y''' = Bxe^x + Be^x + 2Be^x + 8Cxe^{2x} + 4Ce^{2x} + 8Ce^{2x}$

$Bxe^x + 3Be^x + 8Cxe^{2x} + 12Ce^{2x}$

$-\; Bxe^x - 2Be^x - 4Cxe^{2x} - 4Ce^{2x} \qquad +$

$$-4\cancel{Bxe^{x}} - 4Be^{x} - \cancel{4Cxe^{2x}} - 4Ce^{2x}$$

$$4A + \cancel{4Bxe^{x}} + 4Cxe^{2x}$$

$$4A + 5Be^{x} + 4Cxe^{2x} - 4Ce^{2x} = 5 - e^{x} + e^{2x}$$

$$4A = 5 \rightarrow A = \frac{5}{4}$$

$$e^{x}(-3B) = -e^{x} \rightarrow -3B = -1 \rightarrow B = \frac{1}{3}$$

$$xe^{2x}(4C) = 0 \rightarrow C = 0$$

$$-4Ce^{2x} = e^{2x} \rightarrow -4C = 1 \rightarrow C = -\frac{1}{4}$$

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{2x} + \frac{5}{4} + \frac{1}{3}xe^{x} - \frac{1}{4}xe^{2x}$$