1) Aplique La definición de la Transformada de Laplace para:

$$f(t)=\cosh(kt)$$

Solución:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\lim_{b\to\infty}\left[\int_0^b e^{-st}\cosh(kt)dt\right]$$

- Primero Resolvemos la integral por partes, entonces tenemos:

$$u=\cosh(kt)\ ;\ dv=e^{-st}dt$$

$$du=k\sinh(kt)\,dt\ ;\ v=-\frac{e^{-st}}{s}$$

$$\int e^{-st}\cosh(kt)dt=-\frac{e^{-st}\cosh(kt)}{s}+\frac{k}{s}\int e^{-st}\sinh(kt)dt$$

- Ahora Resolvemos la nueva integral por partes, entonces tenemos:

$$u=\sinh(kt)\ ;\ dv=e^{-st}dt$$

$$du=k\cosh(kt)\,dt\ ;\ v=-\frac{e^{-st}}{s}$$

$$\int e^{-st}\cosh(kt)dt=-\frac{e^{-st}\cosh(kt)}{s}+\frac{k}{s}\left(-\frac{e^{-st}\sinh(kt)}{s}+\frac{k}{s}\int e^{-st}\cosh(kt)dt\right)$$

- Desarrollando El producto tenemos:

$$\int e^{-st}\cosh(kt)dt=-\frac{e^{-st}\cosh(kt)}{s}-\frac{k\,e^{-st}\sinh(kt)}{s^2}+\frac{k^2}{s^2}\int e^{-st}\cosh(kt)dt$$

- Trasladando $\frac{k^2}{s^2}\int e^{-st}\cosh(kt)dt$ hacia el otro lado de la igualdad tenemos:

$$\int e^{-st}\cosh(kt)dt-\frac{k^2}{s^2}\int e^{-st}\cosh(kt)dt=-\frac{e^{-st}\cosh(kt)}{s}-\frac{k\,e^{-st}\sinh(kt)}{s^2}$$

- Sacando factor común $\int e^{-st}\cosh(kt)dt$ y planteando el resultado de la integral tenemos:

$$\left(1-\frac{k^2}{s^2}\right)\int e^{-st}\cosh(kt)dt=-\frac{e^{-st}\cosh(kt)}{s}-\frac{k\,e^{-st}\sinh(kt)}{s^2}$$

$$\int e^{-st}\cosh(kt)dt=\left(\frac{1}{1-\frac{k^2}{s^2}}\right)\left(-\frac{e^{-st}\cosh(kt)}{s}-\frac{k\,e^{-st}\sinh(kt)}{s^2}\right)$$

$$\int e^{-st}\cosh(kt)dt=\left(\frac{s^2}{s^2-k^2}\right)\left(-\frac{e^{-st}\cosh(kt)}{s}-\frac{k\,e^{-st}\sinh(kt)}{s^2}\right)$$

- Desarrollando El producto tenemos el resultado de la integración:

$$\int e^{-st}\cosh(kt)dt=-\frac{s\,e^{-st}\cosh(kt)}{s^2-k^2}-\frac{k\,e^{-st}\sinh(kt)}{s^2-k^2}$$

- Evaluando los limites de integración, tenemos lo siguiente:

$$\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{s\,e^{-st}\cosh(kt)}{s^2-k^2}-\frac{k\,e^{-st}\sinh(kt)}{s^2-k^2}\Bigg|_0^b\right]$$

- Evaluando los limites cuando $t\to\infty$ tenemos:

$$\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{s\,e^{-st}\cosh(kt)}{s^2-k^2}\right]=0\ ;tambien\ \ se\ \ puede\ \ hacer\ \ la\ \ sustitucion$$

$$\cosh(kt)=\frac{e^{kt}+e^{-kt}}{2}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{k\,e^{-st}\sinh(kt)}{s^2-k^2}\right]=0\ ;tambien\ \ se\ \ puede\ \ hacer\ \ la\ \ sustitucion$$

$$\sinh(kt)=\frac{e^{kt}-e^{-kt}}{2}$$

Entonces cuando evaluamos $t\to\infty$ el resultado ***es cero***

Evaluando el valor de cero en el resultado de la integración tenemos:

$$-\frac{s\,e^{-s(0)}\cosh(k(0))}{s^2-k^2}-\frac{k\,e^{-s(0)}\sinh(k(0))}{s^2-k^2}=$$

$$-\frac{s}{s^2-k^2}$$

Entonces La Transformada de Laplace de $f(t)=\cosh(kt)$ es:

$$F(S)=\left(0-\left(-\frac{s}{s^2-k^2}\right)\right)$$

$$F(S)=\frac{s}{s^2-k^2}$$