Clase Física 1 06

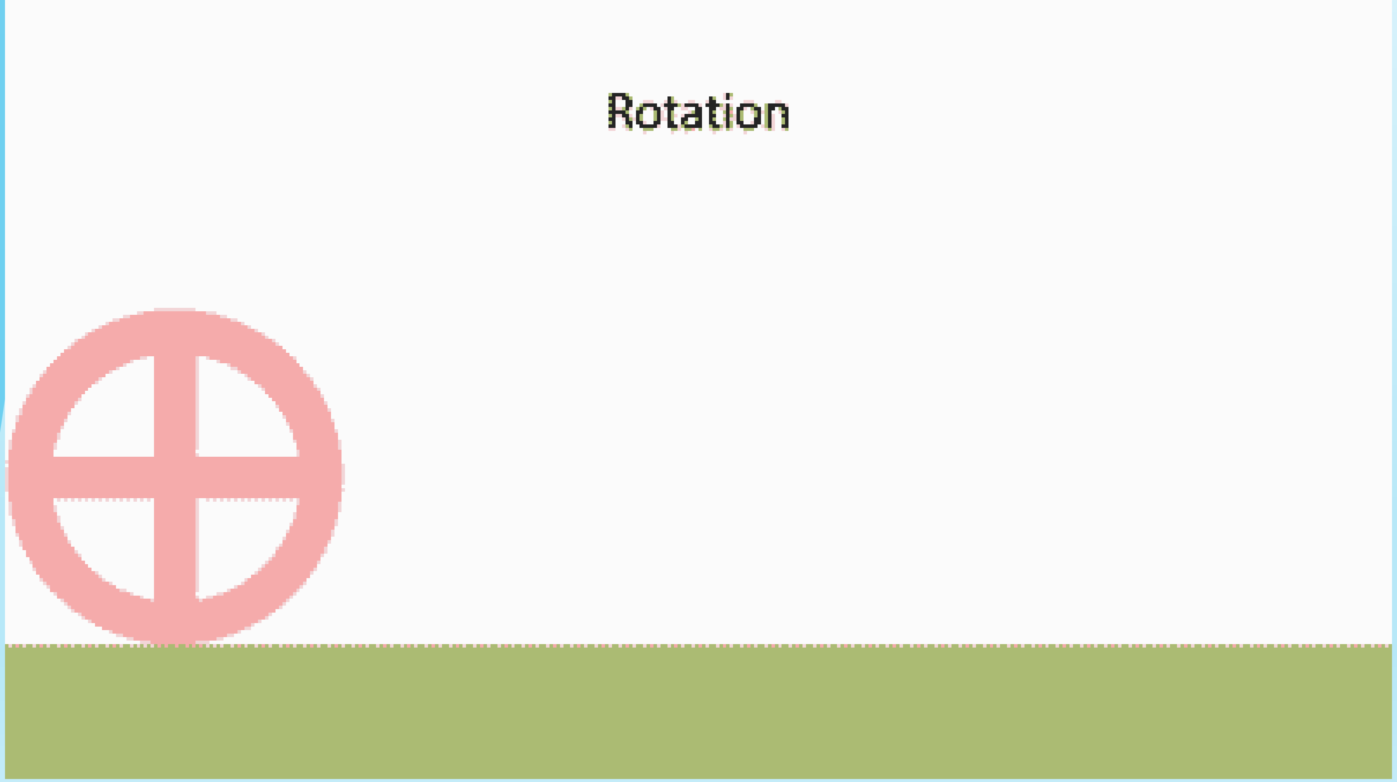
Rodadura

Trabajo y potencia del movimiento rotacional

Rotación de un Cuerpo Rígido en torno a un eje móvil

Definición: La **rodadura** es un tipo de movimiento que combina la rotación (comúnmente, de un objeto simétrico axialmente) y la traslación de ese objeto con respecto a una superficie y que implica que el cuerpo que rueda sobre la superficie lo hace sin resbalar o deslizarse con respecto a esta. Al no haber deslizamiento el punto o puntos del cuerpo que se hallan instantáneamente en contacto con la superficie se encuentran instantáneamente en reposo (velocidad nula con respecto a la superficie).

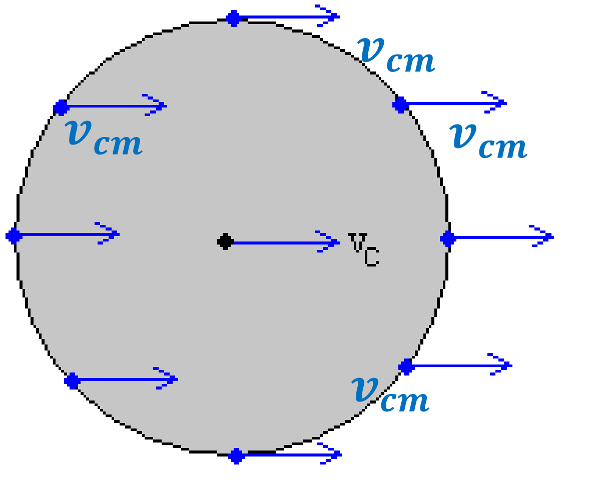
La rodadura o condición de "rotar" impone unas determinadas relaciones cinemáticas entre el movimiento lineal y el movimiento angular del móvil que rueda.



Descripción de un movimiento combinado partiendo de las ideas de la rotación pura y la traslación pura

Traslación pura: Es el movimiento de cinemática en el que un cuerpo se traslada de un punto a otro del plano.

Nota: en este movimiento todos los puntos experimentan el mismo valor de velocidad que tomamos como referencia al centro de masa del cuerpo rígido.



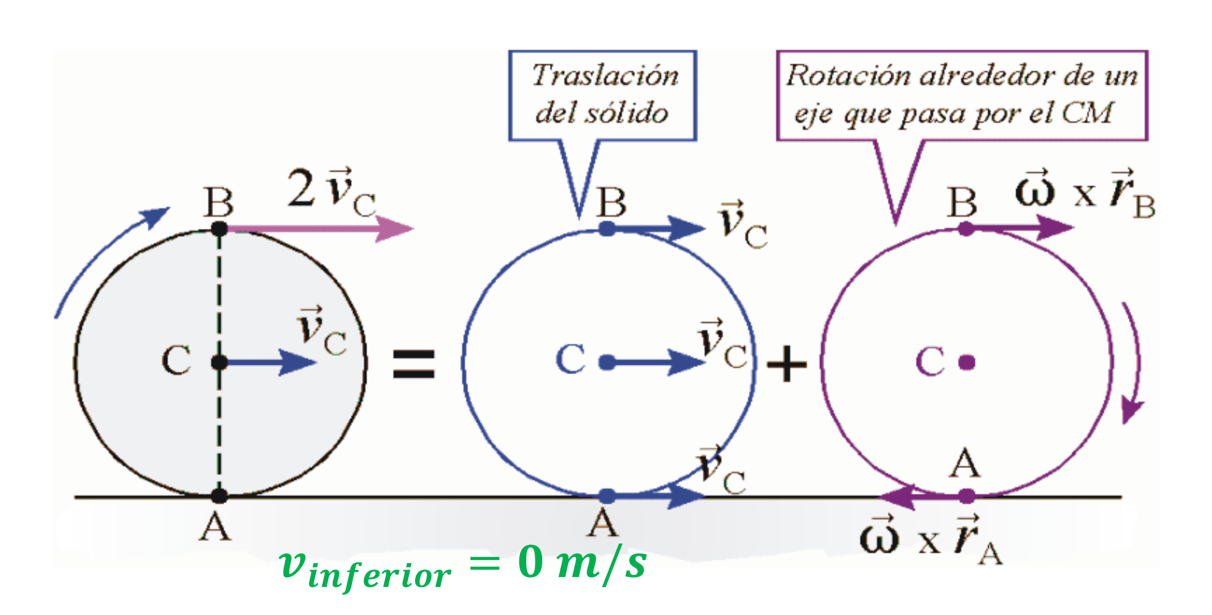
Traslación

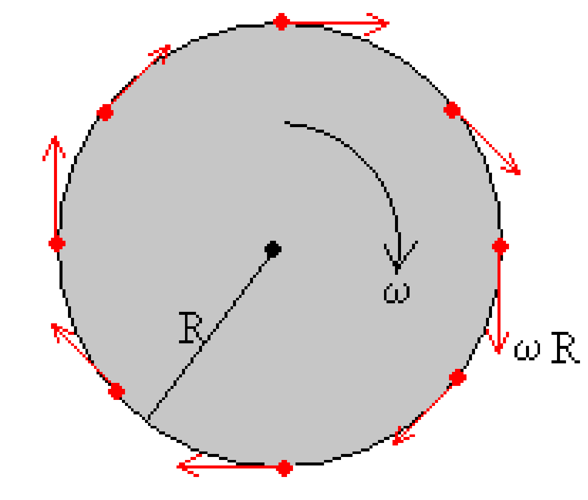
Rotación Pura: Es el movimiento anteriormente descrito en el curso rotación sobre su propio eje, es el movimiento que tiene las consideraciones lineales y angulares.

Nota: en este movimiento todos los puntos experimentan misma cantidad angular pero diferente relación lineal ya que este se basa en el radio de giro del cuerpo rígido.

Movimiento de rotación y traslación (movimiento combinado).

Este movimiento depende de la combinación de los dos movimientos anteriores pero se basa en la condición de rodar sin resbalar, de lo contrario se da una de las condiciones puras.

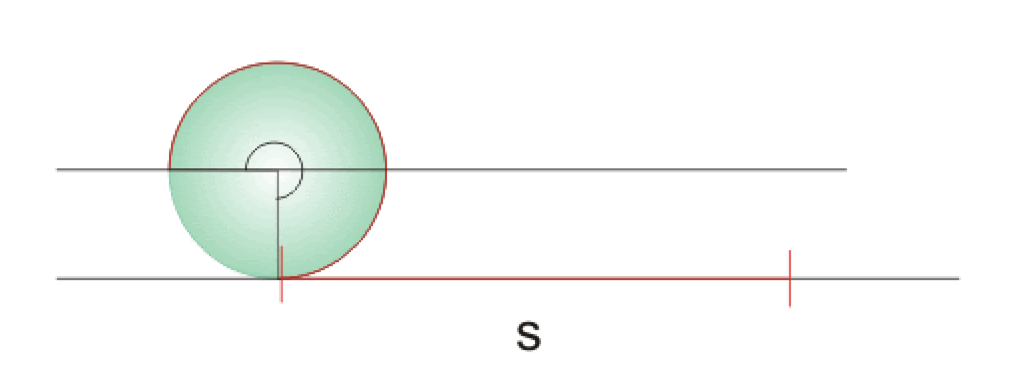




Rotación

Consideraciones el movimiento de rodadura y energía cinética del movimiento.

La condición para unir todo el movimiento es la de rodar sin resbalar que nos conduce a las siguientes ecuaciones:

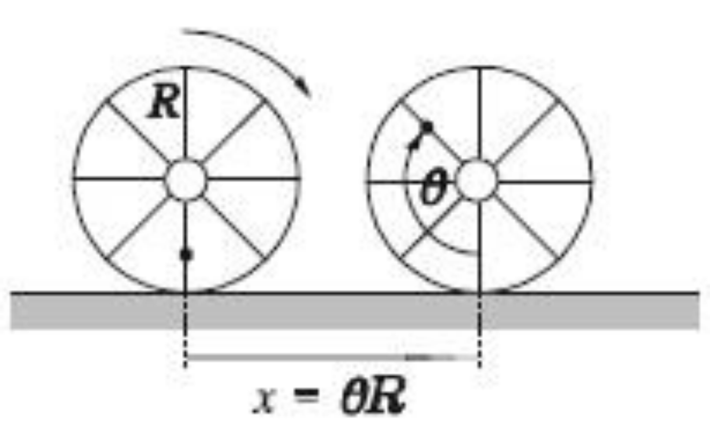


$$v_{cm} = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

$$\boldsymbol{v_{cm} = R\omega}$$

$$a_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

$$\boldsymbol{a_{cm} = R\alpha}$$



Energía cinética Total de un cuerpo rígido en rodadura

Es la suma de las energías cinética de rotación alrededor del centro de masa y de la energía del centro de masa pero en traslación.

$$\boldsymbol{K_{total} = K_{traslacional} + K_{rotacion}}$$

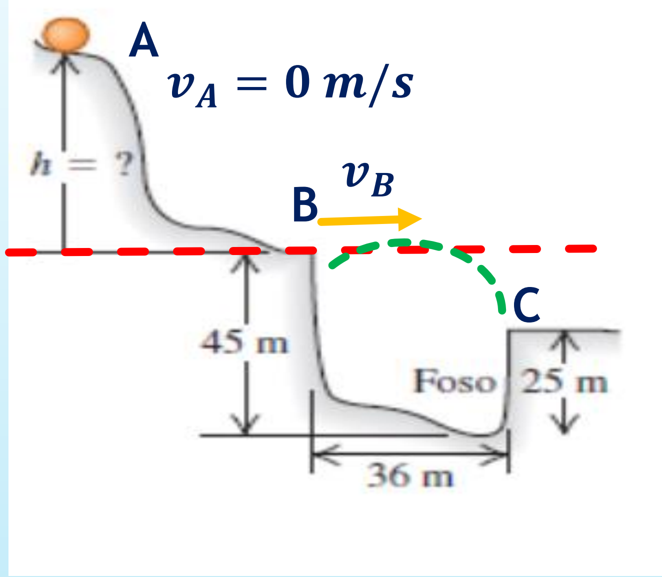
$$\boldsymbol{K_{total} = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2}$$

Nota: En este no existirá perdidas de energía por fricción cinética ya que esta al momento de existir altera la condición de rodar sin resbalar y crea cualquiera de los dos movimientos anteriores(traslación o rotación pura).

En el caso del estudio de la dinámica se empleara la fuerza de fricción estática siempre que este en contacto con una superficie. Cuando el objeto esta fuera de la superficie este movimiento no se da y se comporta como una partícula.

10.74. Una canica uniforme baja rodando sin resbalar por el trayecto de la figura 10.59, partiendo del reposo. Calcule la altura mínima h que evita que la canica caiga en el foso.

Figura 10.59 Problema 10.74.



Resolución se consideran los efectos en el tramo A-B para plantear el sistema de conservación de la energía del mismo y plantear si es posible su resolución en ese punto.

$\Delta E = 0 \quad debido\ a\ que\ no\ existe\ efectos\ de\ fuerzas\ externas$

$E_f = E_o \qquad \rightarrow \qquad E_A = E_B$

$U_{gA} + \cancel{K_{trasA}} + \cancel{K_{rotA}} = \cancel{U_{gB}} + K_{trasB} + K_{rotB}$

$U_{gA} = K_{trasB} + K_{rotB} \qquad \rightarrow \qquad mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega_B^2$

empleando la relación de rodar sin resbalar. $\omega_B = v_B/r$

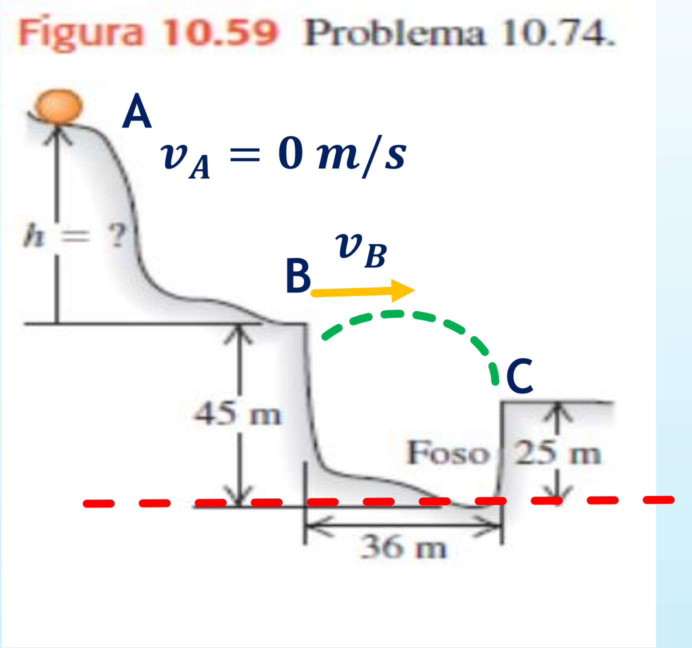
$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v_B^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\cancel{m}\cancel{r^2}\right)\left(\frac{v_B^2}{\cancel{r^2}}\right) \qquad \rightarrow \qquad gh = \frac{1}{2}v_B^2 + \frac{1}{5}v_B^2$

$$h = \frac{7v_B^2}{10g}$$

De esta expresión falta la rapidez del punto B por lo cual se analiza el siguiente tramo B-C en el cual se encuentra en un movimiento de tiro parabólico, partiendo de que en el punto B es horizontal en su salida la componente horizontal del movimiento es lo que se desea buscar.

Tramo B-C en este se busca que no pueda caer en la concavidad por lo cual el movimiento deseado es un tiro parabólico.

$$v_B = \frac{\Delta x}{t} = \frac{36m}{t}$$



para la parte vertical

$$y_f = y_o + \cancel{v_{oy}}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \sqrt[2]{\frac{2(y_f - y_o)}{-g}} = \sqrt[2]{\frac{2(25-45)}{-9.8}} = 2.02\ s$$

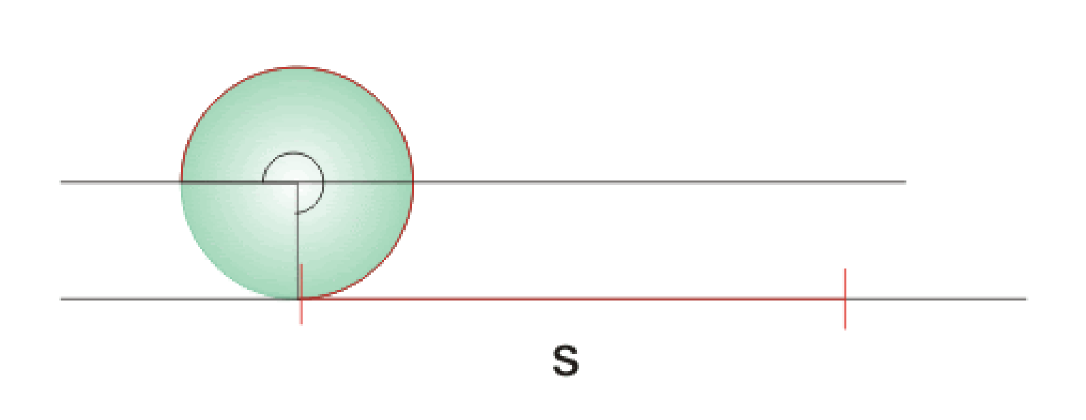
$$v_B = \frac{\Delta x}{t} = \frac{36m}{t} = \frac{36m}{2.02s} = 17.82\ m/s$$

sustituyendo en la expresión de la altura para que el objeto pueda llegar hasta el punto "C"

$$h = \frac{7v_B^2}{10g} = \frac{7(17.82)^2}{10(9.8)} = 22.68m$$

Trabajo y potencia del movimiento rotacional

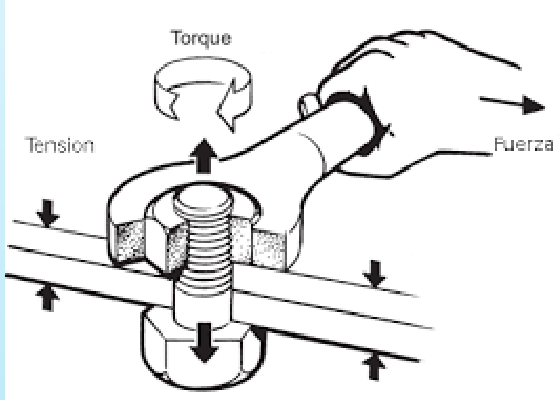
El trabajo que realiza una fuerza en el movimiento de rotación esta relacionada con el desplazamiento de arco que este permita realizar, sea en cualquier tipo de movimiento.



$$S = R\theta$$
$$ds = Rd\theta$$

Forma diferencial del trabajo $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$

pero para estos casos tomaremos que la fuerza es tangente en el proceso o actual lo mas cercano a este movimiento.



$$\tau = RFsen\beta$$

el torque es la relación angular de la fuerza por lo cual partiendo de las expresiones anteriores tendremos que

$$dW = \tau d\theta \quad \textit{este es el trabajo que se realiza en el movimiento de rotación.}$$

$$\boldsymbol{W = \tau\,\Delta\theta} \quad [\boldsymbol{J}]$$

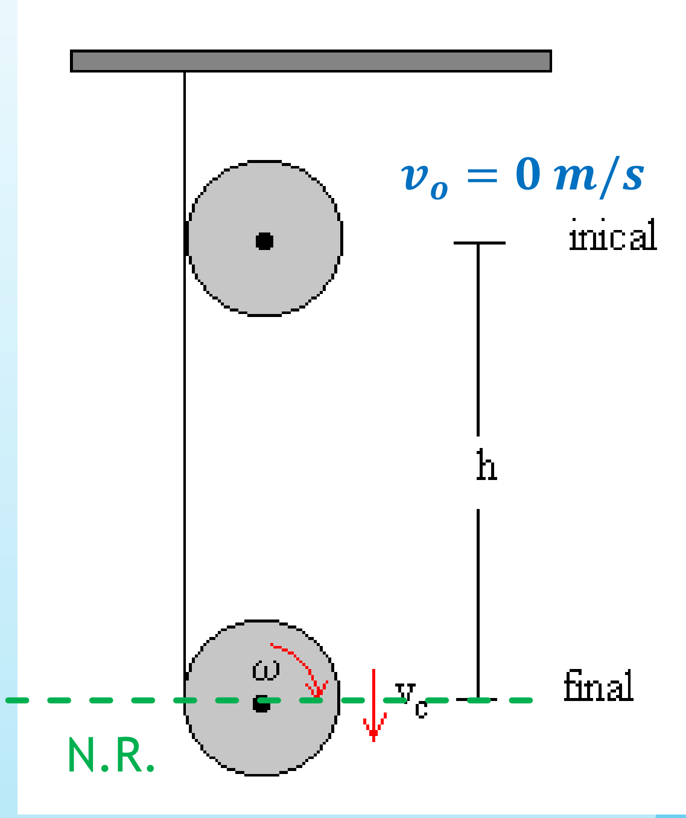
aunque también puede darse en términos de los cambios de energía cinética rotacional.

$$W = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_o \omega_o^2$$

La potencia es simplemente la relación del trabajo en el tiempo para este realizarse.

$$P_{inst} = \frac{dW}{dt} = \tau\omega \quad P_{media} = \frac{\Delta W}{\Delta t}\left[\frac{\boldsymbol{J}}{\boldsymbol{s}} \text{ ó } \boldsymbol{watts}\right]$$

Ejemplo: Se hace un yoyo enrollado un cordel varias veces, alrededor de un cilindro solido de masa "M" y radio "R". Se sostiene fijamente de un extremo del cordel y se suelta el cilindro del reposo, este gira y desciende. Por medio de las consideraciones energéticas calcule la rapidez del centro de masa del cilindro después de caer una altura h=50cm.



Resolución: En este caso el objeto realiza un movimiento de rodadura pero con respecto

a la cuerda , considerando los efectos de energía.

$\Delta E = 0 \quad debido\ a\ que\ no\ existe\ efectos\ de\ fuerzas\ externas$

$$E_f = E_o$$

$$U_{gf} + K_{trasf} + K_{rotf} = U_{go} + K_{traso} + K_{roto}$$

$$K_{trasf} + K_{rotf} = U_{go}$$

$$\frac{1}{2}Mv_f^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega_f^2 = Mgh$$

Empleando la relación de rodar sin resbalar. $\omega_f = v_f/R$

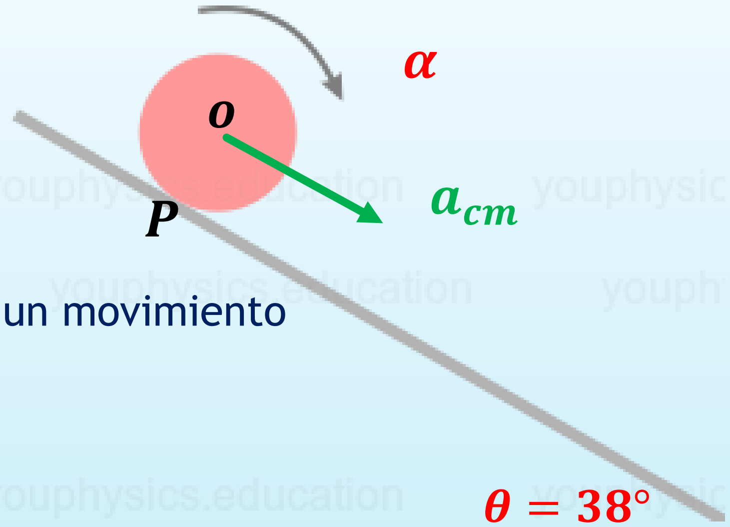
$$\frac{1}{2}Mv_f^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_f^2}{R^2}\right) = Mgh$$

$$\frac{1}{2}v_f^2 + \frac{1}{4}v_f^2 = gh$$

$$\frac{3}{4}v_f^2 = gh$$

$$v_f = \sqrt[2]{\frac{4gh}{3}} = \sqrt[2]{\frac{4(9.8)(0.5)}{3}} = \mathbf{2.56\ m/s}$$

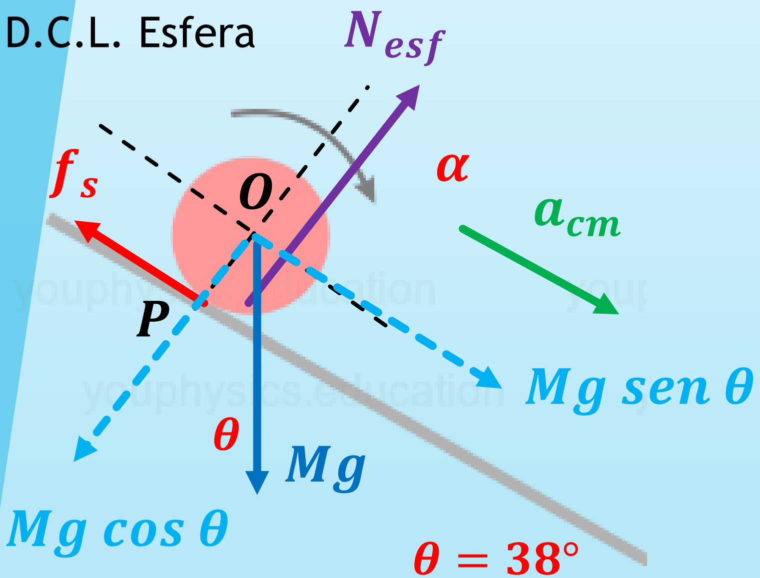
Ejemplo: 10.22. Un casco esférico hueco con masa de 2.00 kg rueda sin resbalar bajando una pendiente de 38.0°. a) Calcule: la aceleración, la fuerza de fricción y el coeficiente de fricción mínimo para que no resbale. b) ¿Cómo cambiarían sus respuestas al inciso a) si la masa se aumentara al doble (4.00 kg)?



Resolución en este caso de la rodadura se pueden realizar la sumatoria de torques en dos puntos particulares el punto "P" que es en el punto de contacto o en el punto "O" que es el centro de masa del objeto.

En esta condición la fricción que actúa es la fricción estática que su función es la detener un movimiento relativo que permita crear la rodadura.

D.C.L. Esfera



$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$N_{esf} - Mgcos\theta = 0$$

$$N_{esf} = Mgcos\theta$$

$$+\rightarrow \sum F_x = Ma_{cm}$$

$$Mgsen\ \theta - f_s = Ma_{cm} \quad ecuacion\ No.1$$

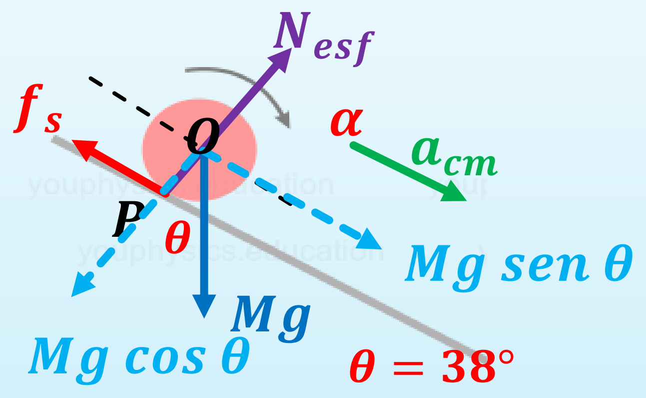
En este punto ocurre que las sumatorias de fuerzas horizontales o verticales no depende del punto de análisis "P" o "O" sino de las consideraciones del movimiento de las mismas en el plano rotado, por lo cual para resolver para el problema es necesario plantear la sumatoria de torques en cualquiera de estos dos puntos. Con la condición que el punto tomado afectara la resolución

En este punto se realizaran las dos resoluciones del momento de torque para que se pueda diferenciar la utilidad de los dos puntos.

Para lo anterior es recomendable que usted realice los cálculos de momento de inercia

por separado para que sea mas fácil para usted emplearlo en la sumatoria de torque

$I_o = \frac{2}{3}MR^2 \qquad I_P = \frac{2}{3}MR^2 + MR^2 = \frac{5}{3}MR^2$



Primera forma de resolución vista desde el punto “O”

$$\sum \tau = I_o\alpha \ \ positivo\ en\ sentido\ horario$$

$$f_s \cancel{R} sen 90° = \frac{2}{3}M\cancel{R^2}\left(\frac{a_{cm}}{\cancel{R}}\right)$$

$f_s = \frac{2}{3}Ma_{cm}$ *con esta expresión se puede sustituir en la ecuación No.1*

$$Mgsen\ \theta - f_s = Ma_{cm} \quad ecuacion\ No.1$$

$$Mgsen\ \theta - \frac{2}{3}Ma_{cm} = Ma_{cm}$$

$$Mgsen\ \theta = \frac{2}{3}Ma_{cm} + Ma_{cm}$$

$$\cancel{M}gsen\ \theta = \frac{5}{3}\cancel{M}a_{cm}$$

$a_{cm} = \frac{3}{5}g\ sen\theta = \frac{3}{5}(9.8)sen\ 38° = 3.62\ {}^{m}/_{s^2}$

Nota: en este y en el otro caso la masa solo influye en las fuerzas pero la forma si influye en la aceleración.

Se calcularan las fuerza y el coeficiente de fricción mínimo para el sistema.

$$f_s = \frac{2}{3}Ma_{cm} = \frac{2}{3}(2)(3.62) = 4.83\ N$$

coeficiente de fricción solo dependerá de la forma por lo cual no cambiara el resultado si cambia la masa $N_{esf} = Mgcos\theta$

$$f_s = \mu_s N_{esf}$$

$$\frac{2}{3}Ma_{cm} = \mu_s Mgcos\theta$$

$$\frac{2}{3}\cancel{M}a_{cm} = \mu_s \cancel{M}gcos\theta$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}\cancel{g}\ sen\theta\right) = \mu_s \cancel{g}cos\theta$$

$$\mu_s = \frac{2sen\theta}{5\cos\theta} = \frac{2}{5}tan\theta = \frac{2}{5}\tan 38° = 0.3125$$

Para el inciso b se considera que el único dato que cambia es la masa por lo cual la única respuesta seria la fuerza de fricción

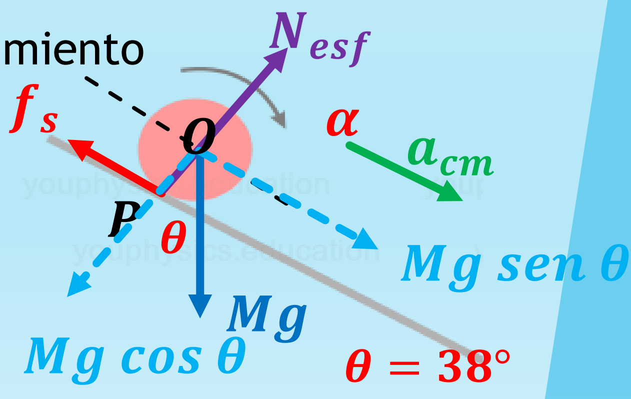
$$f_s = \frac{2}{3}Ma_{cm} = \frac{2}{3}(4)(3.62) = 9.65\ N$$

Solo realizaremos la sumatoria de torques en el punto “P” para hacer distinción de su procedimiento

$$\sum \tau = I_P\alpha \ \ positivo\ en\ sentido\ horario$$

$$\cancel{M}g\cancel{R}sen\theta = \frac{5}{3}\cancel{M}\cancel{R^2}\left(\frac{a_{cm}}{\cancel{R}}\right)$$

$a_{cm} = \frac{3}{5}gsen\theta$ *con esta expresión se puede sustituir en la ecuación No.1*

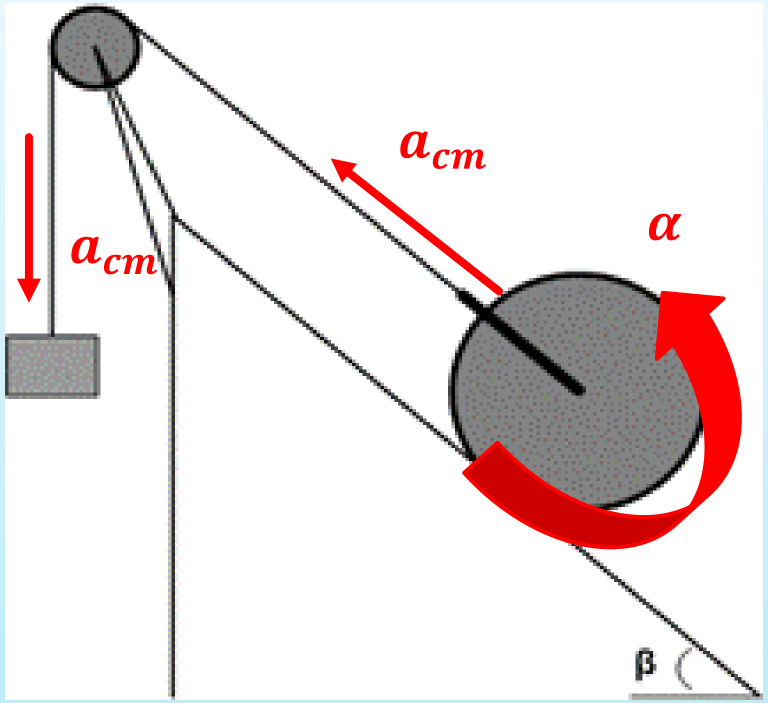


Ejemplo: Un cilindro sólido uniforme de 20.0 Kg de masa y 20.0 cm de radio, se coloca sobre un plano inclinado $\beta=30.0^0$, se ata una cuerda ligera mediante un yugo a un eje sin fricción que pasa por el centro del cilindro de modo que este puede girar sobre el eje, la cuerda pasa por una polea ideal que es libre de girar sin fricción; un bloque de 200 Kg se suspende del extremo libre del hilo, el sistema se suelta del reposo y el cilindro gira sin resbalar hacia arriba del plano.

La magnitud de la aceleración del bloque, en m/s^2

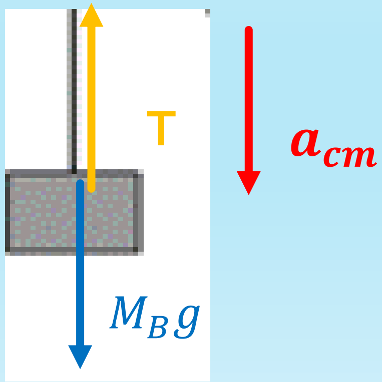
La magnitud de la tensión en la cuerda

La magnitud de la fuerza de fricción estática entre el cilindro y el plano inclinado, en N



Resolución en este caso la polea es ideal por lo cual las tensiones son iguales, el sistema se libera y se mueve hacia el bloque, se realiza los DCL de los dos objetos y posteriormente se resuelve el sistema tomando en consideración los efectos de los torques en los puntos de interés.

D.C.L. de los objetos. $R = 0.2m \quad M_c = 20.0kg \quad \beta = 30° \quad M_B = 200kg$



$$+\downarrow \sum F_y = M_B a_{cm}$$

$$M_B g - T = M_B a_{cm}$$

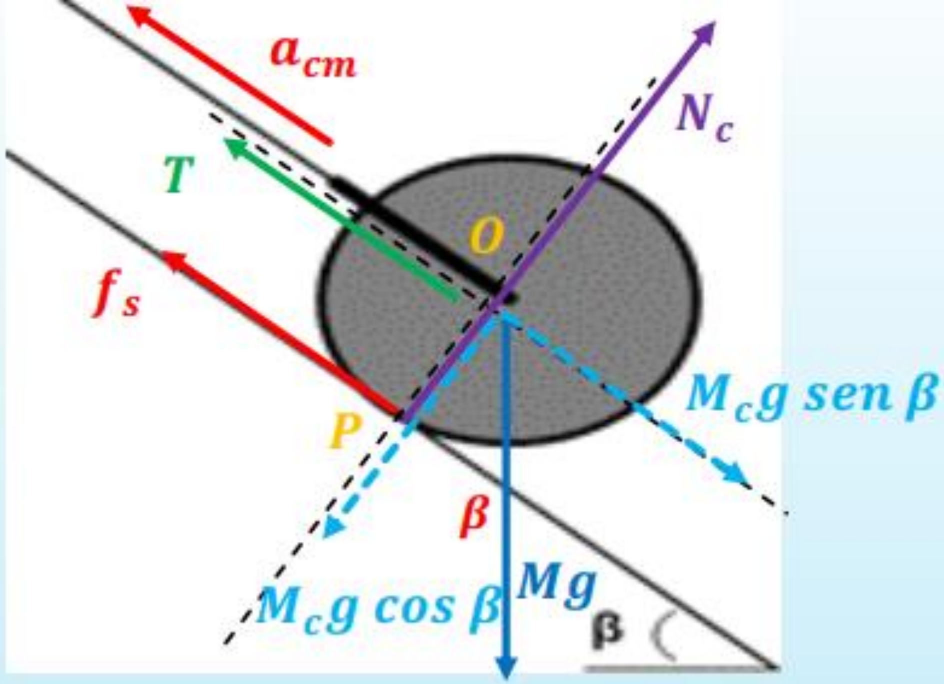
$$T = M_B g - M_B a_{cm} \quad \textit{Ecuación No. 1}$$

D.C.L. Cilindro

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$N_c - M_c g cos\beta = 0$$

$$N_c = M_c g cos\beta$$



$$+\leftarrow \sum F_x = M_c a_{cm}$$

$$\mathrm{T} + f_s - M_c g sen\,\beta = M_c a_{cm} \quad ecuacion\ No.2$$

En este punto se considera la mejor opción el punto "O" para el torque para encontrar una expresión para la fricción estática.

$$\sum \tau = I_o \alpha \ \ positivo\ en\ sentido\ antihorario$$

$$-f_s \cancel{R} sen90° = \frac{1}{2} M_c \cancel{R}^2 \left(\frac{a_{cm}}{\cancel{R}}\right)$$

$$f_s = -\frac{1}{2} M_c a_{cm} \quad con\ esta\ expresión\ se\ puede\ sustituir\ en\ la\ ecuación\ No.2$$

En este Caso se realizara la resolución del sistema sustituyendo las expresiones en la ecuación No. 2

$$R = 0.2m \quad M_c = 20.0kg \quad \beta = 30° \quad M_B = 200kg$$

$T = M_B g - M_B a_{cm}$ *Ecuación No. 1* $\quad f_s = -\frac{1}{2} M_c a_{cm}$ *expresión fricción*

$T + f_s - M_c g sen\,\beta = M_c a_{cm}$ *Ecuación No. 2*

Sustituciones en la ecuación y se resuelve el sistema.

$$M_B g - M_B a_{cm} - \frac{1}{2} M_c a_{cm} - M_c g sen\,\beta = M_c a_{cm}$$

$$M_B g - M_c g sen\,\beta = M_c a_{cm} + M_B a_{cm} + \frac{1}{2} M_c a_{cm}$$

$$a_{cm} = \frac{M_B g - M_c g sen\,\beta}{\frac{3}{2} M_c + M_B} = \frac{200(9.8) - 20(9.8) sen\,30°}{\frac{3}{2}(20) + 200} = \mathbf{8.1}\ {}^{\boldsymbol{m}}/_{\boldsymbol{s^2}}$$

$$T = M_B g - M_B a_{cm} = 200(9.8) - 200(8.1) = \mathbf{340N}$$

$$f_s = \frac{1}{2} M_c a_{cm} = \frac{1}{2}(20)(8.1) = \mathbf{81\ N}$$