Ecuación Diferencial

Es una ecuación que contiene derivadas

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x$$

Clasificación según el tipo

* Ecuación diferencial ordinaria
* Ecuación diferencial Parcial

EDO

Es aquella que tiene una sola variable independiente

EDP

Es aquella que tiene varias variables independientes

Ej. E.D.O

V.D.

$$\frac{dy}{dx} + y = \operatorname{sen} x \quad , \quad \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = 2x + y$$

Ej. E.D.P. (∂)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 3\frac{\partial u}{\partial t}$$

* Clasificación según el orden

Ecuaciones de primer orden, segundo orden, tercer orden, ..., n-orden.

orden: Es la máxima derivada de la Ec. diferencial.

3er orden $\frac{d^3y}{dx^3}$

5to Orden $\frac{d^5y}{dx^5}$

grado: Es la potencia que acompaña al orden de la ecuación diferencial.

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^4 - \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{dy}{dx} = 0$$

orden: 3
grado: 4

$$2\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)^1 - 4\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^3 + \frac{d^2y}{dx^2} - y = \operatorname{sen} x$$

orden: 5
grado: 1

Clasificación según linealidad

* Ec. lineales
* Ec. no Lineales.

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x)$$

Ecuación lineal.

* Ecuación diferencial es de grado 1.
* todos los coeficientes que acompañan a las derivadas y a la función $f(x)$ están en términos de la variable independiente x.

Ej. Ec. no lineales.

$y\frac{dy}{dx} + 2y = \operatorname{sen} x$ termino no lineal depende de la variable dependiente

$x\frac{dy}{dx}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + e^y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -e^y \rightarrow$$ función no lineal en terminos de y

$$\frac{d^5y}{dx^5} + \frac{d^4y}{dx^4} - \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{2} = e^x + 1$$

grado : 2

Solución de una ecuación diferencial

Cualquier función ϕ definida sobre un intervalo I que posee al menos n derivadas continuas sobre I, las cuales al ser sustituidas en una ecuación diferencial ordinaria de orden n, reduce la ecuación a una identidad.

Ej. Verificar si la función es solución de la Ec. dif.

$$y = 2x^2 - 1 + C_1e^{-2x^2} \rightarrow$$ si es solución

$$\frac{dy}{dx} + 4xy = 8x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 4xC_1e^{-2x^2}$$

$$4x - 4xC_1e^{-2x^2} + 4x(2x^2 - 1 + C_1e^{-2x^2}) = 8x^3$$

$$\cancel{4x} - \cancel{4xC_1e^{-2x^2}} + 8x^3 - \cancel{4x} + \cancel{4xC_1e^{-2x^2}} = 8x^3$$

$$8x^3 = 8x^3$$

Ej. Determine el valor de m para que la función $y = e^{mx}$ sea una solución de la Ec. dif

$$2y'' + 7y' - 4y = 0$$

$y = e^{mx}$

$y' = me^{mx}$ $\qquad y'' = m^2 e^{mx}$

$2m^2e^{mx} + 7me^{mx} - 4e^{mx} = 0$

$e^{mx}(2m^2 + 7m - 4) = 0$

$2m^2 + 7m - 4 = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} 2m & -1 \\ m & +4 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} 8m \\ -m \\ \hline 7m \end{array}$$

$(2m-1)(m+4) = 0 \rightarrow \quad 2m - 1 = 0 \rightarrow m = \frac{1}{2}$

$\qquad m + 4 = 0 \rightarrow m = -4$

$y = e^{-4x}$

$y = e^{1/2 x}$

$y' = -4e^{-4x}$ $\qquad y'' = 16e^{-4x}$

$2(16e^{-4x}) + 7(-4e^{-4x}) - 4(e^{-4x}) = 0$

$\cancel{32e^{-4x}} - \cancel{28e^{-4x}} - \cancel{4e^{-4x}} = 0$

$0 = 0$

Problema con valores iniciales

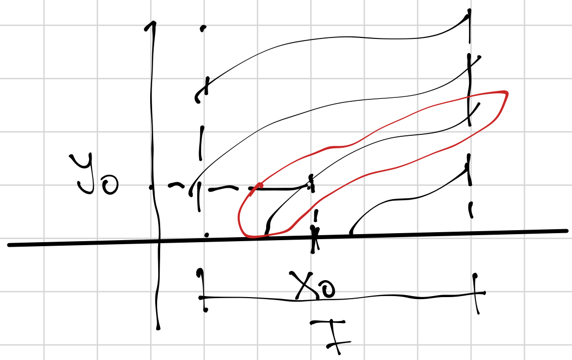
Resolver : $\dfrac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', y'', \ldots y^{n-1})$

Sujeta a : $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, $\ldots$, $y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$

Ecuación de primer orden

Resolver $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \rightarrow$ conjunto de familias

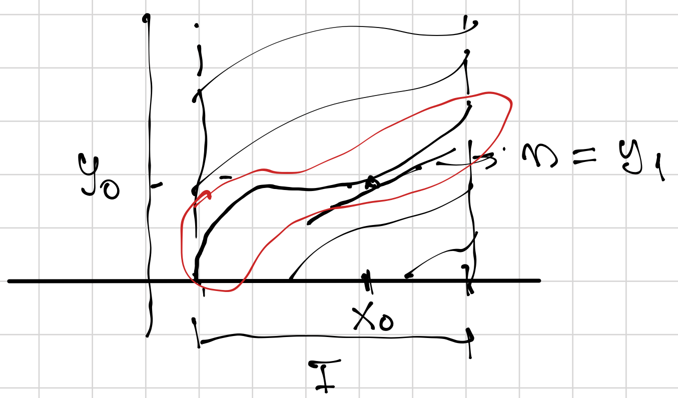
Sujeta a: $y(x_0) = y_0$



Ecuación de segundo orden

Resolver : $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y') \rightarrow$ conjunto de familias

Sujeta: $y(x_0) = y_0$ $\quad y'(x_0) = y_1$



Teorema: Existencia de una Solución única.

Sea R una región rectangular en el plano xy definida por $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ que contiene al punto (x_0, y_0) en su interior. Si $f(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en R, entonces existe un intervalo I_0 $(x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$ contenido en $[a, b]$ y una función única $y(x)$, definida en I, que es una solución del problema con valores iniciales.

Ej. Determine una región del plano xy para el que la ecuación tendría una solución única

$$(4-y^2)\frac{dy}{dx} = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad o$$

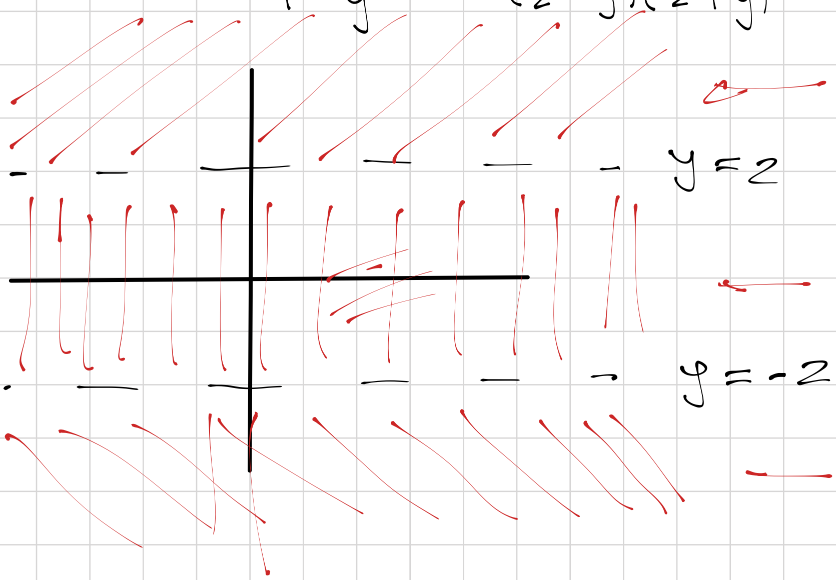
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{4-y^2}$$

Pts. de discontinuidad

$$f(x,y) = \frac{x^2}{4-y^2} = \frac{x^2}{(2-y)(2+y)}$$

$2-y=0 \rightarrow y=2$

$2+y=0 \rightarrow y=-2$



Semiplano $y>2$

Semiplano $-2<y<2$

Semiplano $y<-2$

Ej. Determine si el teorema de existencia de una solución garantiza que la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2-9}$$

tenga una solución única que pase por el punto

$P(-1,1)$ o $Q(1,4)$

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$f(x,y) = \sqrt{y^2-9} \rightarrow$ Continuo

$y^2 - 9 \geq 0$

$(y-3)(y+3) \geq 0$

$y - 3 = 0 \rightarrow y = 3$

$y + 3 = 0 \rightarrow y = -3$

$(-\infty, -3]$ $\quad$ $[-3, 3]$ $\quad$ $[3, \infty)$

-3 $\quad$ 3

	-4: $(-\infty, -3]$	0: $[-3, 3]$	4: $[3, \infty)$
$y-3$	$-$	$-$	$+$
$y+3$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

Sol $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

-3 $\quad$ -1 $\quad$ 3 $\quad$ 4 $\quad$ y

X

$P(-1, 1)$

$Q(1, 4) \rightarrow$ El teorema si garantiza que se tenga una solución que pase por el punto $(1,4)$

$f(x,y) = \sqrt{y^2-9}$

$\sqrt{1^2-9} = \sqrt{-8}$

$f(x,y) = \sqrt{4^2-9} = \sqrt{7}$