1.6 Tangentes, velocidad y razón de cambio

INTRODUCCIÓN

El concepto de límite, estudiado en la unidad anterior, es fundamental en el estudio del cálculo ya que permite resolver dos de los problemas clásicos del Cálculo: "*El problema de la recta tangente*" y "*El problema del área bajo una curva*". En esta sección se aborda el concepto de derivada de una función, su interpretación como la pendiente de la recta tangente a una curva, su interpretación como velocidad y su interpretación como razón de cambio.

OBJETIVOS

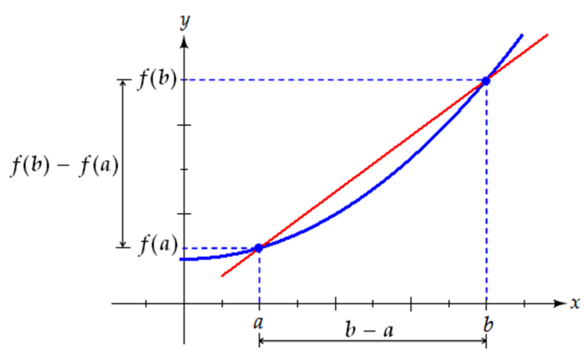
Al finalizar el estudio y desarrollar las actividades de esta unidad el estudiante estará en capacidad de

- Hallar la pendiente entre dos puntos de una función, e interpretarla como la razón de cambio promedio.
- Hallar la pendiente de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos utilizando el concepto de límite.
- Encontrar la velocidad de un objeto dada su ecuación de posición.
- Resolver problemas relacionados con las ciencias en donde la derivada es interpretada como una razón de cambio instantánea.

Pendiente de la recta tangente a una curva

Si $P(a, f(a))$ y $Q(b, f(b))$ son dos puntos que se encuentran en la gráfica de la función $y = f(x)$, entonces la pendiente de la recta secante que pasa por dichos puntos está dada por

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Si en la expresión de la pendiente entre dos puntos $m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ se reemplaza $h = b - a$, entonces se obtiene que $b = a + h$ y la pendiente puede expresarse como

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

La figura 2 muestra una función y tres rectas secantes para distintos valores de h. Observe que cuando h tiende a 0, la pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente en el punto $(a, f(a))$

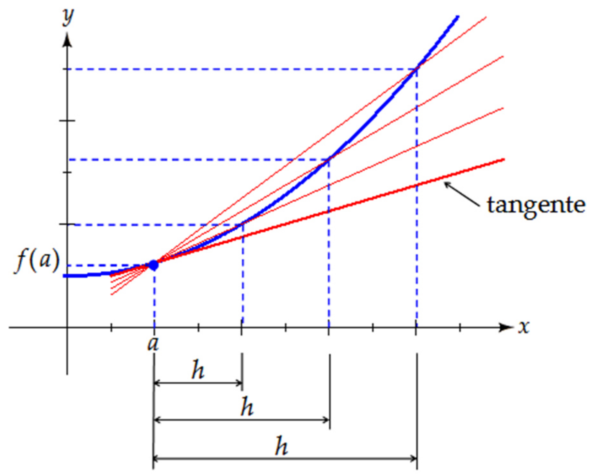


Figura 2

Del razonamiento anterior y usando el concepto de límite se obtiene que la pendiente de la recta tangente en $x = a$ está dada por

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

siempre y cuando este límite exista.

Ejemplo 1: Ecuación de una recta tangente

Dada la función $f(x) = -x^2 + 2x + 2$

a. Encontrar la pendiente de la recta secante para los intervalos de x indicados:

i. $[2,3]$, ii. $[2,2.5]$ y iii. $[2,2.1]$

b. Encontrar la pendiente de la recta tangente en $x = 2$.

c. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la función en $x = 2$.

d. Dibujar la gráfica de la función y la recta tangente en un mismo sistema de coordenadas rectangulares.

Solución

a. La pendiente de la recta secante que pasa por dos puntos de una curva se encuentra utilizando la fórmula de pendiente

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Para el intervalo $[2,3]$ se tiene

$$m = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{\left[-(3)^2 + 2(3) + 2\right] - \left[-(2)^2 + 2(2) + 2\right]}{1}$$

$$= \frac{(-1) - (2)}{1} = -3$$

Para el intervalo $[2,2.5]$ se tiene

$$m = \frac{f(2.5)-f(2)}{2.5-2} = \frac{\left[-(2.5)^2+2(2.5)+2\right]-\left[-(2)^2+2(2)+2\right]}{0.5}$$
$$= \frac{(0.75)-(2)}{0.5} = -2.5$$

Para el intervalo $[2,2.1]$ se tiene

$$m = \frac{f(2.1)-f(2)}{2.1-2} = \frac{\left[-(2.1)^2+2(2.1)+2\right]-\left[-(2)^2+2(2)+2\right]}{0.1}$$
$$= \frac{(1.79)-(2)}{0.1} = -2.1$$

Observe que los valores de la pendiente se están aproximando a -2 cuando se va reduciendo la longitud del intervalo.

b. Para calcular el valor exacto de la pendiente en $x = a$ se tiene que calcular el límite

$$m = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Donde la función es $f(x) = -x^2 + 2x + 2$

Para evaluar $f(a+h)$ se sustituye $a+h$ por x en la función, es decir

$$f(a+h) = -(a+h)^2 + 2(a+h) + 2$$

Reemplazando ésta expresión y desarrollando las operaciones algebraicas se tiene que la derivada está dada por el límite siguiente

$$m = \lim_{h\to 0}\frac{\left[-(a+h)^2+2(a+h)+2\right]-\left[-a^2+2a+2\right]}{h}$$

Ahora bien, el límite que resulta cuando se utiliza la definición de derivada siempre es da la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, razón por la cual es necesario efectuar operaciones algebraicas para poder calcularlo. En este caso se desarrollan los productos entre paréntesis y se suman términos semejantes

$$m(a) = \lim_{h\to 0}\frac{\left[-(a+h)^2+2(a+h)+2\right]-\left[-a^2+2a+2\right]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[-(a^2+2ah+h^2)+2a+2h+2\right]-\left[-a^2+2a+2\right]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{-a^2-2ah-h^2+2a+2h+2+a^2-2a-2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2ah-h^2+2h}{h}$$

Factorizando h en el numerador y simplificando se obtiene

$$m(a) = \lim_{h\to 0}\frac{h(-2a-h+2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(-2a-h+2)$$
$$= -2a-(0)+2$$
$$= -2a+2$$

De donde la pendiente de la recta tangente de la curva $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ en $x = a$ es $m = -2a + 2$

b. La pendiente de la recta tangente en $x = 2$ se obtiene evaluando $x = 2$ en la expresión para la pendiente

$$m = -2a + 2 = -2(2) + 2 = -2$$

c. Para obtener la ecuación de la recta tangente en $x = 2$, se necesita la pendiente y un punto, la pendiente es $m = -2$ y el punto se encuentra evaluando $x = 2$ en la función

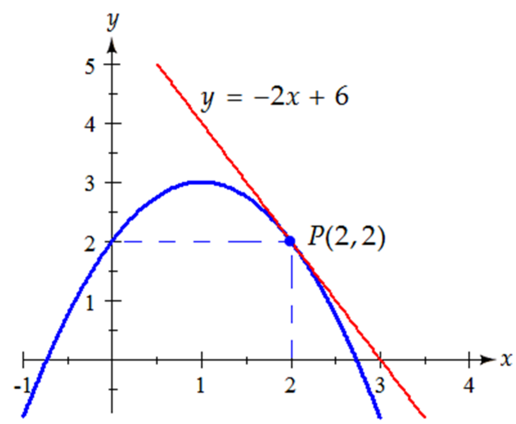
$$f(2) = -(2)^2 + 2(2) + 2 = 2$$

Entonces el punto de tangencia es $P = (2,2)$

Utilizando la fórmula punto pendiente para encontrar la ecuación se tiene

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 2 = -2(x - 2)$$
$$y - 2 = -2x + 4$$
$$y = -2x + 6$$

d. La figura 3 muestra la gráfica de la función y de la recta tangente en el punto $(2,2)$.



Velocidad

Si un objeto se mueve en una línea recta, de tal forma que su posición sobre la recta en cualquier instante esta dado por $s = f(t)$; entonces la velocidad promedio del objeto está dada por

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Al hacer un razonamiento similar al que se hizo con la pendiente de la recta tangente se tiene que a medida que Δt se aproxima a cero la velocidad promedio se aproxima a la velocidad instantánea. Entonces la velocidad instantánea en el instante $t = t_0$ está dada por

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

siempre y cuando este límite exista.

Ejemplo 2: Velocidad instantánea

Una pelota se lanza hacia arriba, con una velocidad inicial de 30 m/s. Al considerar que la fuerza de gravedad es negativa hacia abajo y que su valor es aproximadamente de $-10\ \text{m/seg}^2$, la ecuación de movimiento de la pelota está dada por

$$s(t) = -10t^2 + 30t$$

a. Encuentre la velocidad promedio de la pelota entre los segundos 0 y 2.

b. Encuentre una expresión para la velocidad instantánea de la pelota.

c. Encuentre la velocidad instantánea de la pelota a los 2 segundos de su lanzamiento.

Solución

a. La velocidad promedio está dada por

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{s(2) - s(0)}{3 - 0}$$

$$= \frac{\left[-10(2)^2 + 30(2)\right] - \left[-10(0)^2 + 30(0)\right]}{3}$$

$$= \frac{20}{3} \approx 6.67\text{m/seg}$$

b. Utilizando la definición para encontrar una expresión de la velocidad instantánea

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[-10(t + \Delta t)^2 + 30(t + \Delta t)\right] - \left[-10t^2 + 30t\right]}{\Delta t}$$

Este límite tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$, por lo que hay que realizar operaciones algebraicas para calcularlo. Desarrollando el binomio y simplificando se tiene

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-10(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) + 30t + 30\Delta t + 10t^2 - 30t}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-10t^2 - 20t\Delta t - 10\Delta t^2 + 30\Delta t + 10t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-20t\Delta t - 10\Delta t^2 + 30\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(-20t - 10\Delta t + 30)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} (-20t - 10\Delta t + 30)$$

$$v(t) = -20t + 30$$

Entonces la velocidad instantánea de la pelota en función del tiempo es

$$v(t) = -20t + 30$$

c. La velocidad instantánea a los 2 segundos es

$$v(2) = -20(2) + 30 = -10\ \text{m/s}$$

Observe que en este ejemplo la velocidad promedio y la velocidad instantánea son muy diferentes. Esto se debe a que a los dos segundos la pelota ya viene de regreso y la velocidad instantánea es negativa.

Razón de cambio instantánea

En forma más general, si y es una variable que depende de otra variable x y $y = f(x)$; entonces la razón de cambio promedio de la y con respecto a x está dada por

$$\text{Razon de cambio promedio} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Si Δx tiende a cero, la razón de cambio promedio se aproxima a la razón de cambio instantánea. Entonces la razón de cambio instantánea o simplemente razón de cambio está dada por

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ejemplo 3: Razón de cambio del ingreso respecto de la cantidad

El señor Arnulfo Vivar tiene un pequeño depósito en la terminal, en donde se dedica a la venta por mayor de platos desechables. La función de ingreso, en quetzales por la venta de su producto es

$$I(x) = 200x - 0.5x^2$$

donde x representa el número de unidades vendidas semanalmente. Cada unidad de platos desechables contiene 200 platos.

a. Calcular el ingreso si se venden 150 unidades del producto a la semana.

b. Calcular la razón de cambio promedio del ingreso cuando las ventas cambian de 150 a 200 unidades.

c. Calcular la razón de cambio promedio cuando las ventas cambian de 150 a 155 unidades.

d. Utilizar la definición de derivada para calcular la razón de cambio instantánea del ingreso con respecto a la cantidad.

e. Calcular la razón de cambio instantánea cuando se venden 150 unidades. ¿Cómo se interpreta este resultado?

f. Calcular la razón de cambio instantánea cuando se venden 250 unidades. ¿Cómo interpreta este resultado?

Solución

Recuerde que el ingreso en una empresa representa la cantidad de dinero que ingresa a la misma por la venta de un producto, por lo tanto, al sustituir un valor de x unidades en la función $I(x)$ se obtiene el ingreso por la venta de x número de unidades.

a. Si se venden 150 unidades, el ingreso se calcula evaluando 150 en la función de ingreso, es decir

$$I(150) = 200(150) - 0.5(150)^2 = 30{,}000 - 11{,}250 = 18{,}750$$

b. La razón de cambio promedio se puede calcular dividiendo el cambio en el ingreso entre el cambio en la cantidad, es decir

$$\text{Razón de cambio promedio} = \frac{\Delta I}{\Delta x} = \frac{I(x_2) - I(x_1)}{x_2 - x_1}$$

En este caso $x_2 = 200$ y $x_1 = 150$, entonces la razón de cambio del ingreso con respecto a la cantidad es

$$\frac{I(200)-I(150)}{200-150}=\frac{\left[200(200)-0.5(200)^2\right]-\left[200(150)-0.5(150)^2\right]}{50}$$
$$=\frac{20{,}000-18{,}750}{50}=25$$

El resultado nos indica que, al aumentar las ventas de 150 a 200 unidades, los ingresos aumentaron a una razón de cambio promedio de 25 quetzales por unidad.

c. Procediendo como en el inciso anterior, la razón de cambio promedio cuando x cambia de 150 a 155 unidades es

$$\frac{I(155)-I(150)}{155-150}=\frac{\left[200(155)-0.5(155)^2\right]-\left[200(150)-0.5(150)^2\right]}{5}$$
$$=\frac{18{,}987.5-18{,}750}{5}=47.5$$

Lo que indica que, al aumentar las ventas de 150 a 155 unidades, los ingresos están aumentando a una razón promedio de 47.5 quetzales por unidad.

d. La razón de cambio instantánea se obtiene calculando la derivada del ingreso con respecto a la cantidad x.

$$I'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{I(x+h)-I(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[200(x+h)-0.5(x+h)^2\right]-\left[200x-0.5x^2\right]}{h}$$

Cómo el límite anterior es de la forma $\frac{0}{0}$, se realizan operaciones algebraicas para poder calcularlo

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[200x+200h-0.5(x^2+2xh+h^2)\right]-\left[200x-0.5x^2\right]}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{200x+200h-0.5x^2-xh-0.5h^2-200x+0.5x^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{200h-xh-0.5h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(200-x-0.5h)}{h}$$

Cancelando el factor h y evaluando para obtener el límite

$$=\lim_{h\to 0}\left(200-x-0.5h^2\right)$$
$$=200-x-0.5(0)^2$$
$$=200-x$$

De donde la razón de cambio instantánea es $I'(x)=200-x$

e. Cuando se venden 150 unidades, la razón de cambio instantánea es

$$I'(150)=200-150=50$$

El resultado anterior significa que cuando se venden 150 unidades los ingresos están aumentando a una razón de cambio instantánea de 50 quetzales por unidad.

f. Cuando se venden 250 unidades, la razón de cambio instantánea es

$$I'(150)=200-250=-50$$

Lo que significa que al vender la unidad 250 los ingresos disminuyendo aproximadamente en Q50 por cada unidad.

Ejercicios sobre recta tangente y razón de cambio promedio

1. Si $f(x) = 10 - 3x$

a. Encuentre el punto en la gráfica cuando $x = 2$.

b. Encuentre la razón de cambio promedio cuando en los intervalos que se indican

i) $[2,3]$ ii) $[2,2.5]$ iii) $[2,2.1]$ $[2,2.01]$

c. Use la definición de derivada para encontrar la derivada de la función.

d. Encuentre la pendiente de la recta tangente en $x = 2$, compare el resultado los resultados del inciso b.

e. Encuentre la ecuación de la recta tangente en $x = 2$.

f. Dibuje la representación gráfica de la función y la de la recta tangente en $x = 2$.

2. Si $f(x) = 2x^2 + 5$

a. Calcule $f(2)$

b. Encuentre la razón de cambio promedio cuando x cambia de 1 a 1.5.

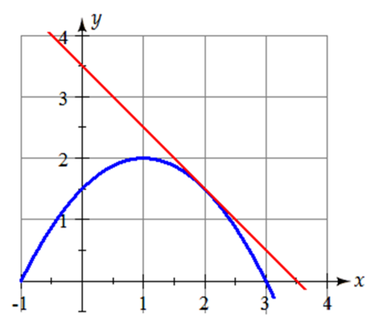
c. Use la definición de derivada para encontrar la derivada de la función.

d. Encuentre la pendiente de la recta tangente en $x = 1$, compare el resultado con el del inciso b.

e. Encuentre la ecuación de la recta tangente en $x = 1$.

f. Dibuje la representación gráfica de la función y la de la recta tangente en $x = 1$.

3. La figura muestra la gráfica de una función *f*.



Estime la pendiente de la recta tangente en $x = 2$, usando la escala en cuadros que se muestra.

4. Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - x$ en el punto $(-2,6)$

5. Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = \dfrac{1}{2x}$ en el punto donde $x = -2$

6. Obtenga la ecuación de la recta perpendicular a la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ en el punto donde donde $x = 2$.

7. Se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 50 pies/s. Después de transcurrir t segundos, la altura de la pelota expresada en pies está dada por

$$s(t) = 50t - 16t^2$$

a. Calcule la velocidad promedio en el intervalo $[1,2]$

b. Encuentre la velocidad instantánea cuando $t = 2$.

c. ¿En qué instante la velocidad de la pelota es igual a cero.

8. la ecuación de movimiento de un objeto que se mueve en línea recta está dada por

$$s(t) = 2t^2 + 5t - 10$$

Donde el tiempo está en segundos y s está en metros.

a. Calcule la velocidad promedio en los intervalo $[0,2]$, $[3,4]$ y $[3,3.2]$

b. Encuentre la velocidad instantánea cuando $t = 3$.

c. Grafique la función de movimiento, las rectas secantes en los intervalos dados y la recta tangente.

9. La función de costo total de la fábrica de amueblados de sala "La Oriental" está dada por

$$c(q) = 0.2q^3 - 4.8q^2 + 36q + 60{,}000$$

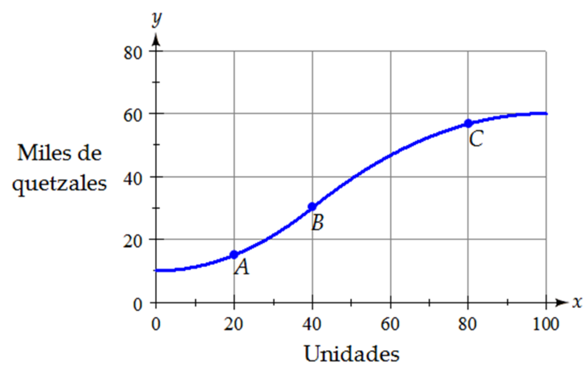
en donde c es el costo total en quetzales y q es el número de amueblados producidos mensualmente.

a. Calcule el costo total de la empresa cuando $q = 100$.

b. Calcule la tasa de cambio promedio de $c(q)$ para los siguientes intervalos de variación de q. Interprete los resultados. ¿A qué valor se aproxima la tasa de cambio promedio cuando se reduce la longitud del intervalo? Reflexione su respuesta.

i) $[100,150]$ **ii)** $[100,110]$ **iii)** $[100,101]$

10. Don Juan, un viejo agricultor dedicado al cultivo de café en su pequeña finca localizada en el departamento de San marcos; no ha tenido ninguna formación profesional. Sin embargo, por la experiencia acumulada por tantos años de dedicación al cultivo de café en su finca; ha recolectado alguna información que después de ser tabulada ha dado como resultado la siguiente gráfica de costo total en cada cosecha. En la gráfica en el eje x se representa el número quintales de café cosechados y en el eje y el costo total en miles de quetzales.



a. Use la gráfica para estimar la razón de cambio del costo con respecto a la cantidad entre los puntos indicados, explique su significado.

i) A y B **ii)** B y C **iii)** A y C.

b. Use la gráfica para estimar la razón de cambio instantánea del costo con respecto a la cantidad en los puntos A, B y C. Explique su significado.

c. En el punto B, ¿Qué se puede decir de razón de cambio instantánea sobre la función de costos? Reflexione su respuesta y explíquele a Don Juan que es lo que está sucediendo con sus costos.

11. La tabla siguiente muestra los precios promedio del quintal de café de exportación oro en dólares en los años indicados

Año	1,994	1,995	1,996	1,997	1,998
Precio en dólares	71.0	123.6	91.7	100.4	133.4

a. Encuentre la razón de cambio promedio entre los años 1996 y 1998.

b. Dibuje una gráfica a partir de los datos y estime la razón de cambio instantánea en 1996

12. La población P de una ciudad puede ser estimada utilizando el modelo

$$P = 30{,}000e^{0.025t}$$

donde el tiempo t se encuentra en años y $t = 0$ corresponde al año actual. Calcule la razón de cambio promedio de la población en los primeros 5 años.