Javier Andrés, Monges Solórzano
202100081 / 3020696740101

Segundo Examen Parcial

M. Intermedia 3
Sección B

1 | 1

Un plato de comida está a una temperatura de **100°F**, este se coloca dentro de una refrigeradora a una temperatura constante de **0°F**, después de **20 minutos** la temperatura del plato es de **50°F.**

a) Determine el tiempo necesario para que la temperatura del plato sea de 25°F.

b) La temperatura del plato de comida después de 10 minutos.

Datos

$T_0 = 100°F$

$T_f = 0°F$

$t = 20 min$

$T_F = 50°F$

Ley de enfriamiento de Newton

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_0) \qquad \frac{dT}{dt} = Kdt \rightarrow \int \frac{dT}{T - T_1} = K\int dT$$

$t = 0 \rightarrow T = T_0$

$t = t \rightarrow T = T_F$

$$\rightarrow \int_{T_0}^{T_F} \frac{d(T-T_1)}{T-T_1} = K\int_0^t dt \rightarrow \ln(T-T_1)\Big]_{T_0}^{T_F} = Kt\Big]_0^t$$

$$\ln(T_F - T_1) - \ln(T_0 - T_1) = Kt \rightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{T_F - T_1}{T_0 - T_1}\right)}{t} = \frac{\ln\left(\frac{50-0}{100-0}\right)}{20 min} \rightarrow K = -0.034657$$

a) $T_F = 25°F$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{25-0}{100-0}\right)}{-0.034657} = 40.00041438 \rightarrow t = 40 \text{ minutos}$$

b) $T_F = ?$; Si $t = 10 min$

$$\ln\left(\frac{T_F - 0}{100 - 0}\right) = (-0.034657 min)(10 min) \rightarrow \frac{T_F}{100} = e^{-0.034657} \rightarrow T_F = 70{,}71°F$$

Respuestas

a) 40 minutos

b) 70.71°F

5 | 2

Las raíces de una ecuación auxiliar cúbica con coeficientes reales son $-\frac{1}{2}+3i$, 1

$m_1 = -\frac{1}{2}+3i$ $\quad m_3 = 1$

$m_2 = -\frac{1}{2}-3i$

$$\rightarrow y = e^{mx} \rightarrow y(x) = C_1e^{x} + C_2e^{(-\frac{1}{2}+3i)x} + C_3^{(-\frac{1}{2}-3i)x} \text{ ; Pero } e^{(-\frac{1}{2}\pm 3i)x} = e^{-\frac{1}{2}x}[\cos(3x) \pm \operatorname{Sen}(3x)]$$

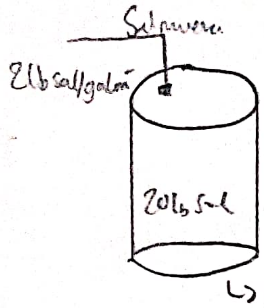
$$y(x) = C_1e^{x} + e^{-\frac{1}{2}x}[C_2\cos(3x) + C_3\operatorname{Sen}(3x)]$$

$$y(x) = C_1e^{x} + C_2e^{-\frac{1}{2}x}\cos(3x) + C_3e^{-\frac{1}{2}}\operatorname{Sen}(3x)$$

$$\boxed{y(x) = C_1e^{x} + C_2e^{-\frac{1}{2}x}\cos(3x) + C_3e^{-\frac{1}{2}x}\operatorname{Sen}(3x)}$$

#3	3

Un tanque en forma de cilindro está parcialmente lleno con 200 galones de agua en los cuales se disuelven 20 libras de sal. Una salmuera que contiene 2 libras de sal por galón, se bombea al tanque con una rapidez de 6 gal/min y la mezcla bien agitada sale de la misma tasa.
a) Determine el número de libras de sal en el tanque en cualquier tiempo.
b) ¿Cuánta sal está presente después de media hora?
c) ¿Cuánta sal estará presente después de un tiempo largo?



$V = 200 gal \rightarrow$ Por balance de masa

$m_{sal\,entra} - m_{sal\,sale} = m_{sal\,acumulada}$

Sea $\rightarrow x = m_{sal}$

$\dot{x}_e - \dot{x}_s = \frac{dx}{dt} \rightarrow \dot{x}_e = \frac{2 lb sal}{gal} \times \frac{6 gal}{min} = 12 lb sal/min$ (flujo másico de entrada)

$\rightarrow$ Como el tanque es cilíndrico

$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow m = \rho \cdot V;\ V = A_0;$ al $(\rho), \gamma_{V}$, obtenemos lo siguiente

$\frac{dx}{dt} + \frac{q_2}{V_0 + (q_1 - q_2)t}x = q_1 c_1 \rightarrow 12$ Como $q_1 = q_2 \rightarrow (q_1 - q_2)t = 0$

$\frac{dx}{dt} + \frac{q_2 x}{V_0} = 12 \rightarrow \frac{dx}{dt} + \frac{6}{200}x = 12 \rightarrow \frac{dx}{dt} + 0{,}03x = 12 \rightarrow \boxed{x' + 0{,}03x = 12}$

Ecuación lineal de orden 1 $\rightarrow y(x) = e^{\int P(x)dt}$; $P(x) = 0{,}03$

a) $\int 0.03 dt = 0.03t \rightarrow y(x) = e^{0.03t}$; luego $\rightarrow x(t)e^{0.03t} = \int e^{0.03t} \cdot 12 dt \rightarrow x(t) e^{0.03t}$

$\cancel{\frac{12}{0.03}}^{400} \int e^{0.03t}(0{,}03dt) \rightarrow x(t) \cdot e^{0.03t} = 400e^{0.03t} + C \rightarrow x(t) = \frac{400e^{0.03t}}{e^{0.03t}} + \frac{C}{e^{0.03t}}$

$x(t) = 400 + e^{-0.03t}C$; Si para $t = 0 \rightarrow x = 20 lb$

$20 = 400 + e^{-0.03(0)}C \rightarrow C = 20 - 400 - C = -380 \rightarrow x(t) = 400 - 380e^{-0.03t}$ opción 3

b) $t = 30$ minutos

$x(30) = 400 - 380e^{(-0.03)(30)} \rightarrow x(30) = 245.50 lb$

c) Si $t \rightarrow \infty$

$x(\infty) = \lim_{t \to \infty} 400 - 380e^{-0.03t} = 400 - 380 \lim_{t \to \infty} e^{-0.03t} = 400 - 380 \lim_{t \to \infty} \frac{1}{e^{0.03t}}$

$400 - 380 \cdot \frac{1}{e^{\infty}} = 400 - 380 \cancel{\frac{1}{\infty}}^{0} \rightarrow x = 400 lb sal$

Respuestas

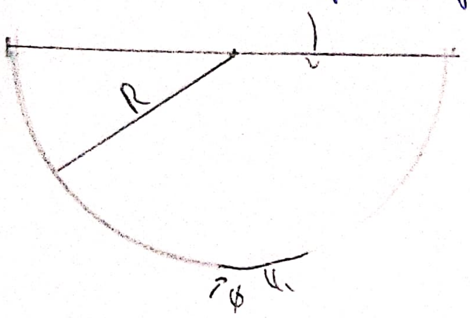
a) opción 3 $\rightarrow A(t) = 400 - 380e^{-0.03t}$

b) 245.50 lb

c) 400 lb sal

# 4	4

Un grifo cuenta con un tanque semiesférico de radio 2 pies que está lleno de alcohol al 70%. Cuando se abre un orificio con un diámetro de 1 pulgada en la parte inferior. ¿Cuánto tiempo se requerirá para que todo el alcohol al 70% salga del tanque?



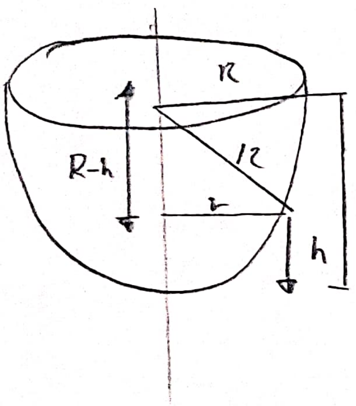
Formula general $= A(h)\frac{dh}{dt} = -k a\sqrt{2gh}$

$k = 1$ (coeficiente de fricción hidráulica)

$A(h)\frac{dh}{dt} = -a\sqrt{2gh}$; a = área del orificio

$a = \frac{\pi}{4}D^2$; $D = 1$ pulgada $= 0{,}0833$ pie

$a = \frac{\pi}{4}(0{,}0833\,pie)^2 = 0{,}00545\,pie^2$



$r^2 + (R-h)^2 = R^2 \rightarrow r^2 + \cancel{R^2} - 2Rh + h^2 = \cancel{R^2}$

$r^2 - 2Rh + h^2 = 0 \rightarrow r^2 = 2Rh - h^2$

$A = \pi r^2$ (circunferencia)

$A(h) = \pi(2Rh - h^2)$; sustituyendo

$\pi(2Rh - h^2)\frac{dh}{dt} = -0.00545\sqrt{2gh}$;

$576.44(2Rh - h^2)dh = -\sqrt{2gh}\,dt$

$g = 32\,pie/s^2$; $R = 2\,pie$

$576.44(4h - h^2)dh = -\sqrt{64h}\,dt \rightarrow \frac{576.44(4h-h^2)}{\sqrt{64h}}dh = -dt$

$-dt = 72.055\frac{(4h-h^2)}{h^{1/2}}dh \rightarrow dt = \frac{72.055(h^2-4h)}{h^{1/2}}dh \Rightarrow \int dt = 72.055\left[\int h^{3/2}dh - \int 4h^{1/2}dh\right]$

$t = 72.055\left[\frac{h^{5/2}}{5/2} - 4\frac{h^{3/2}}{3/2}\right] + C \rightarrow t = 0;\ h_0 = r = 2$

$t = 0 \rightarrow h = 2\,pie$

$t = t \quad h = 0$

$0 = (169.83 - 7.5425) + C \rightarrow C = -162.2875 \rightarrow$

$t = 72.055[0] - 72{,}055\left(\frac{2^{5/2}}{5/2} - \frac{4 \cdot 2^{3/2}}{3/2}\right] = -72.055(7{,}2623472 - 7.5424723)$

$t = 380.14$

$\boxed{t = 380.14}$