SOLUCIONES DE SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Dichos sistemas de ecuaciones diferenciales se resolverán por la regla de Cramer, que dice lo siguiente:

$$\begin{aligned} ax+by&=k_1\\ cx+dy&=k_2 \end{aligned}$$

Entonces la solución queda escrita como:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} k_1 & b\\ k_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b\\ c & d \end{vmatrix}} \quad , \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & k_1\\ c & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b\\ c & d \end{vmatrix}}$$

EJEMPLO 1:

Resolver $\left.\begin{aligned} x^{/}(t)+3x+y^{/}(t)&=1\\ x^{/}(t)-x+y^{/}(t)-y&=e^t \end{aligned}\right\}\ x(0)=0,\ y(0)=0$

1) Aplicando $\mathcal{L}\ \{\ \}$ ambos lados de las ecuaciones y sus condiciones iniciales:

$$\big(SX(s)-x(0)\big)+3X(S)+\big(SY(s)-y(0)\big)=\frac{1}{s}$$

$$\big(SX(s)-x(0)\big)-X(S)+\big(SY(s)-y(0)\big)-Y(S)=\frac{1}{s-1}$$

2) Agrupar términos de $X(S)\ y\ Y(S)$ en las dos ecuaciones:

$$X(S)[S+3]+SY(S)=\frac{1}{s} \qquad ,ec.1$$

$$X(s)[S-1]+Y(S)[S-1]=\frac{1}{S-1} \ \rightarrow\ X(s)+Y(S)=\frac{1}{(S-1)^2} \qquad ,ec.2$$

3) Ya que se aplicó transformada de Laplace y sus condiciones iniciales, empezamos la regla de Cramer:

$$[S+3]X(S)+SY(S)=\frac{1}{s}$$

$$X(s)+Y(S)=\frac{1}{(S-1)^2}$$

Para este sistema las variables serian $X(S)\ y\ Y(S)$, donde:

$a=[S+3]$, $\quad b=S$, $\quad c=1$, $\quad d=1$, $\quad k_1=\frac{1}{2}\ y\ k_2=\frac{1}{(S-1)^2}$

4) Aplicando la regla y resolviendo los determinantes, **tenemos:**

$$X(S)=\frac{\begin{vmatrix} k_1 & b\\ k_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b\\ c & d \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s} & s\\ \frac{1}{(S-1)^2} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S+3 & s\\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{\left(\frac{-(2s-1)}{s(S-1)^2}\right)}{3}$$

$$X(S)=\frac{-(2s-1)}{3s(S-1)^2}$$

Aplicando fracciones parciales para poder sacar transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$ tenemos:

$$X(S)=\frac{1/3}{s}-\frac{1/3}{s-1}-\frac{1/3}{(S-1)^2}$$

Aplicando transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$ a todos los términos tenemos:

$$x(t)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^t-\frac{1}{3}e^t\,t$$

Encontrando el valor de $y(t)$, tenemos:

$$Y(S)=\frac{\begin{vmatrix} a & k_1 \\ c & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} s+3 & \frac{1}{s} \\ 1 & \frac{1}{(S-1)^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S+3 & s \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{\left(\frac{5s-1}{s(S-1)^2}\right)}{3}$$

$$Y(S)=\frac{5s-1}{3s(S-1)^2}$$

Aplicando fracciones parciales para poder sacar transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$ tenemos:

$$Y(S)=-\frac{1/3}{s}+\frac{1/3}{s-1}+\frac{4/3}{(S-1)^2}$$

Aplicando transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$ a todos los términos tenemos:

$$y(t)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}e^t-\frac{4}{3}e^t\,t$$

EJEMPLO 2:

Resolver

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}&=t^2 \\ \frac{d^2x}{dt^2}-\frac{d^2y}{dt^2}&=4t \end{aligned}\right\}\ x(0)=8,\ x^{/}(0)=0,\ y(0)=y^{/}(0)=0$$

1) Aplicando la transformada $\mathcal{L}\{\,\}$ ambos lados de las ecuaciones y sus condiciones iniciales:

$$\left(S^2X(s)-Sx(0)-x^{/}(0)\right)+\left(S^2Y(s)-Sy(0)-y^{/}(0)\right)=\frac{2}{S^3}$$

$$\left(S^2X(s)-Sx(0)-x^{/}(0)\right)-\left(S^2Y(s)-Sy(0)-y^{/}(0)\right)=\frac{4}{S^2}$$

2) Agrupar términos de $X(S)$ y $Y(S)$ en las dos ecuaciones:

$$S^2X(S)+S^2Y(S)=\frac{2}{S^3}+8S\ \rightarrow\ X(S)+Y(S)=\frac{2}{S^5}+\frac{8}{S}\ ,ec.\ 1$$

$$S^2X(s)-S^2Y(S)=\frac{4}{S^2}+8S\ \rightarrow\ X(s)-Y(S)=\frac{4}{S^4}+\frac{8}{S}\ ,ec.2$$

3) Ya que se aplicó transformada de Laplace y sus condiciones iniciales, empezamos la regla de Cramer:

$$X(S)+Y(S)=\frac{2}{S^5}+\frac{8}{S}$$

$$X(s)-Y(S)=\frac{4}{S^4}+\frac{8}{S}$$

Para este sistema las variables serian $X(S)$ y $Y(S)$, donde:

$a=1$, $b=1$, $c=1$, $d=-1$, $k_1=\frac{2}{S^5}+\frac{8}{S}$ y $k_2=\frac{4}{S^4}+\frac{8}{S}$

1) Aplicando la regla y resolviendo los determinantes, **tenemos:**

$$X(S)=\frac{\begin{vmatrix} k_1 & b \\ k_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} \frac{2}{S^5}+\frac{8}{S} & 1 \\ \frac{4}{S^4}+\frac{8}{S} & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{\left(\frac{-2(8s^4+2s+1)}{s^5}\right)}{-2}$$

$$X(S)=-\frac{(8s^4+2s+1)}{s^5}$$

$$X(S)=\frac{8}{s}+\frac{2}{s^4}+\frac{1}{s^5}$$

Aplicando transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$ a todos los términos tenemos:

$$x(t)=8+\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{24}\ t^4$$

Encontrando el valor de $y(t)$, tenemos:

$$Y(S)=\frac{\begin{vmatrix} a & k_1 \\ c & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{S^5}+\frac{8}{S} \\ 1 & \frac{4}{S^4}+\frac{8}{S} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{\left(\frac{2(2s-1)}{s^5}\right)}{-2}$$

$$Y(S)=-\frac{(2s-1)}{s^5}=-\frac{2}{s^4}+\frac{1}{s^5}$$

Aplicando transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$ a todos los términos tenemos:

$$y(t)=-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{24}t^4$$

- **Método de la Trasformada de la Laplace:**

Se puede utilizar la transformada de Laplace para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Básicamente, es la misma técnica para resolver una sola ecuación que se empleó en la sección anterior; consiste, por lo tanto, en convertir el sistema diferencial en un sistema algebraico en el que las incógnitas son las transformadas de las funciones solución del sistema original. Una vez resuelto el sistema algebraico, las transformadas inversas proporcionan las soluciones buscadas. Se exponen a continuación algunos ejemplos.

EJEMPLO 1:

Resolver $\left.\begin{array}{l} x'(t)+3x+y'(t)=1 \\ x'(t)-x+y'(t)-y=e^t \end{array}\right\}$ $x(0)=0,\ y(0)=0$

4) Aplicando $\mathcal{L}\{\,\}$ ambos lados de las ecuaciones y sus condiciones iniciales:

$$\big(SX(s)-x(0)\big)+3X(S)+\big(SY(s)-y(0)\big)=\frac{1}{s}$$

$$\big(SX(s)-x(0)\big)-X(S)+\big(SY(s)-y(0)\big)-Y(S)=\frac{1}{s-1}$$

5) Agrupar términos de **X(S) y Y(S)** en las dos ecuaciones:

$$X(S)[S+3]+SY(S)=\frac{1}{s}\quad ,ec.1$$

$$X(s)[S-1]+Y(S)[S-1]=\frac{1}{S-1}\ \rightarrow\ X(s)+Y(S)=\frac{1}{(S-1)^2}\quad ,ec.2$$

6) Resolver ya sea Primero para **X(S) o Y(S)**; Resolvamos primero para **X(S)**, entonces Hay que Eliminar **Y(S)**, multiplicamos por $-S$ la Ec. 2 y sumamos las dos ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} X(S)[S+3]+SY(S)=\frac{1}{s}\quad ,ec.1 \\ -SX(s)-SY(S)=\frac{-S}{(S-1)^2}\quad ,ec.2 \end{array}\right\}(+)$$

$$3X(S)=\frac{1}{S}-\frac{S}{(S-1)^2}\ \rightarrow\ X(S)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{S}-\frac{S}{(S-1)^2}\right)$$

$$L^{-1}\{X(s)\}=\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{S}-\frac{S}{(S-1)^2}\right\}$$

$$L^{-1}\{X(s)\}=\frac{1}{3}\left[L^{-1}\left\{\frac{1}{S}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{(S-1)+1}{(S-1)^2}\right\}\right]$$

$$L^{-1}\{X(s)\}=\frac{1}{3}\left[L^{-1}\left\{\frac{1}{S}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{(S-1)}{(S-1)^2}\right\}_{s-1\to s}-L^{-1}\left\{\frac{1}{(S-1)^2}\right\}\right]$$

$$L^{-1}\{X(s)\}=\frac{1}{3}\left[L^{-1}\left\{\frac{1}{S}\right\}-e^tL^{-1}\left\{\frac{S}{S^2}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{(S-1)^2}\right\}\right]$$

$$L^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{3}\left[L^{-1}\left\{\frac{1}{S}\right\} - e^t L^{-1}\left\{\frac{1}{S}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{(S-1)^2}\right\}\right]$$

$$x(t) = \frac{1}{3}[1 - e^t - te^t]$$

7) Resolviendo para Y(S), hay que despejar Y(S) de cualquiera de las dos ecuaciones, despejemos de la Ec. 2,

$$X(s) + Y(S) = \frac{1}{(S-1)^2} \quad ,ec.2 \rightarrow \quad Y(S) = \frac{1}{(S-1)^2} - X(S);$$

aplicando L^{-1}

$$L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(S-1)^2}\right\} - L^{-1}\{X(S)\} \rightarrow \textit{pero} \quad X(S) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{S} - \frac{S}{(S-1)^2}\right)$$

$$\textit{y a } X(S) \textit{ ya conocemos } L^{-1}\{X(S)\},$$
$$\textit{solo hay que resolver } L^{-1}\left\{\frac{1}{(S-1)^2}\right\}$$

$$y(t) = te^t - x(t) \rightarrow \quad \textit{pero} \quad x(t) = \frac{1}{3}[1 - e^t - te^t]$$
$$\textit{la solucion es}: y(t) = te^t - \frac{1}{3}[1 - e^t - te^t]$$

$$y(t) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^t + \frac{4}{3}te^t$$

EJEMPLO 2:

Resolver

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} = t^2 \\ \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2y}{dt^2} = 4t\end{aligned}\right\} \; x(0) = 8,\; x'(0) = 0,\; y(0) = y'(0) = 0$$

8) Aplicando la transformada ambos lados de las ecuaciones y sus condiciones iniciales:

$$\left(S^2X(s) - Sx(0) - x'(0)\right) + \left(S^2Y(s) - Sy(0) - y'(0)\right) = \frac{2}{S^3}$$

$$\left(S^2X(s) - Sx(0) - x'(0)\right) - \left(S^2Y(s) - Sy(0) - y'(0)\right) = \frac{4}{S^2}$$

9) Agrupar términos de $X(S)$ ***y*** $Y(S)$ en las dos ecuaciones:

$$S^2X(S) + S^2Y(S) = \frac{2}{S^3} + 8S \quad \rightarrow \quad X(S) + Y(S) = \frac{2}{S^5} + \frac{8}{S} \;,ec.\; 1$$

$$S^2X(s) - S^2Y(S) = \frac{4}{S^2} + 8S \quad \rightarrow \quad X(s) - Y(S) = \frac{4}{S^4} + \frac{8}{S} \quad ,ec.2$$

10) Resolver ya sea Primero para $X(S)$ ***o*** $Y(S)$; Resolvamos primero para $X(S)$, entonces Hay que Eliminar $Y(S)$, únicamente hay que sumar las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}X(S) + Y(S) = \frac{2}{S^5} + \frac{8}{S} \\ X(s) - Y(S) = \frac{4}{S^4} + \frac{8}{S}\end{aligned}\right\}(+)$$

$$2X(S) = \frac{2}{S^5} + \frac{4}{S^4} + \frac{16}{S} \quad \rightarrow \quad X(S) = \frac{1}{S^5} + \frac{2}{S^4} + \frac{8}{S} \quad \rightarrow$$

$$L^{-1}\{X(S)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{S^5} + \frac{2}{S^4} + \frac{8}{S}\right\}$$

$$x(t) = \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + 8$$

11) Resolviendo para $Y(S)$, hay que despejar $Y(S)$ de cualquiera de las dos ecuaciones, despejemos de la Ec. 1:

$$X(S) + Y(S) = \frac{2}{S^5} + \frac{8}{S} \quad ec.1 \quad \rightarrow \quad Y(S) = \frac{2}{S^5} + \frac{8}{S} - X(S)\;;$$

aplicando L^{-1}

$$L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{S^5} + \frac{8}{S} - X(S)\right\};$$

$$a\ X(S)\ ya\ conocemos\ L^{-1}\{X(S)\},$$

$$solo\ hay\ que\ resolver\ L^{-1}\left\{\frac{2}{S^5} + \frac{8}{S}\right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{12}t^4 + 8 - x(t) \rightarrow pero \quad x(t) = \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + 8$$

$$la\ solucion \quad es:$$

$$y(t) = \frac{1}{12}t^4 + 8 - \left[\frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + 8\right]$$

$$y(t) = \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{3}t^3$$