Inga. G García Soria

Método de Newton

Es un método de aproximación utilizado para encontrar mediante iteraciones la solución de ecuaciones $f(x) = 0$, ya que las raíces de la ecuación corresponden a las intersecciones de la gráfica de $\boldsymbol{f}$ con el eje $\boldsymbol{X}$

Utiliza la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $\boldsymbol{f}$ en un punto $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}))$ **;**

$$\boldsymbol{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$$

cuando la recta corta al eje $\boldsymbol{X}$**,** la coordenada $\boldsymbol{y = 0}$**,** por lo que al despejar $\boldsymbol{x}$ de la ecuación anterior

$$\boldsymbol{x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}}$$

Siendo $\boldsymbol{x_1}$ la primera aproximación, que servirá para calcular en la siguiente iteración $\boldsymbol{x_2}$

$$\boldsymbol{x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}}$$

Y así sucesivamente hasta llegar a la n-ésima aproximación

$$\boxed{\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}}$$

OBSERVACIÓN

Hay funciones para las cuales el método de Newton no converge**.**

Por lo que, para utilizar el método de Newton se necesita:

- Escribir la función de la forma $\boldsymbol{f(x) = 0}$.
- Un valor inicial $\boldsymbol{x_0 = a}$ (se da como dato; en caso que no se dé esta información, valuar la función en un intervalo y localizar los valores de $\boldsymbol{x}$ donde haya un cambio de signo, lo que significa que entre esos números hay una raíz)
- Escribir la ecuación **(1)** con la función correspondiente y su derivada.
- Calcular la primera aproximación $\boldsymbol{x_1}$**.**
- Repetir el procedimiento hasta obtener la raíz de la ecuación con el número de cifras decimales requeridas en dos iteraciones seguidas.

EJEMPLOS

6/348 Utilice el método de Newton para encontrar la tercera iteración a la raíz de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$; $x_1 = -1$

- $2x^3 - 3x^2 + 2 = 0$
- $x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n{}^3 - 3x_n{}^2 + 2}{6x_n{}^2 - 6x_n}$

$$x_2 = -1 - \frac{2(-1)^3 - 3(-1)^2 + 2}{6(-1)^2 - 6(-1)} = -0.75$$

$$x_3 = -0.75 - \frac{2(-0.75)^3 - 3(-0.75)^2 + 2}{6(-0.75)^2 - 6(-0.75)} = -0.68254$$

El ejercicio le pide únicamente x_3**, con tres iteraciones más encuentra la raíz con 5 cifras decimales iguales, que sería la raíz de la ecuación (- 0.67765)**

COMO PUEDE HACERLO, SI SU CALCULADORA NO ES PROGRAMABLE

- **Coloque el valor inicial -1 y oprima =**
- **Luego escriba la ecuación general sustituyendo en** x_n **el valor guardado en la tecla Ans, luego solo oprime = y le darán todas las iteraciones.**
  -1 = luego Ans-((2*(Ans)³ – 3*(Ans)² +2) ÷ (6x(Ans)² – 6x(Ans)))

21/349 Encontrar la raíz de la ecuación con una aproximación a seis cifras decimales

$$\boldsymbol{cos\, x = \sqrt{x}}$$

1. **Escribir la ecuación f(x) = 0**
   $\boldsymbol{cos\, x - \sqrt{x} = 0}$
2. **Como no nos dan valor inicial,**
   - **valuar la función para valores de x; y donde haya cambio de signo nos indica que hay una raíz.**

   Interpretemos la ecuación original, es la igualdad de dos funciones; al igualarlas lo que estamos buscando es el punto de intersección de las dos funciones, por lo que al hacer la gráfica de las funciones en el mismo sistema, se observa que la solución estará entre $[\boldsymbol{0, \pi/2}]$
   $\boldsymbol{f(x) = cos\, x - \sqrt{x}}$

X	0	1	π/2
Y	1	-0.4597	-1.253

   Lo que significa que entre 0 y 1 hay una raíz
   Puede tomarse como valor inicial cualquiera de los dos

3. $$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{cos\,(x_n) - \sqrt{x_n}}{-sen(x_n) - \frac{1}{2\sqrt{x_n}}}}$$

   Cuidado!! Funciones trigonométricas modalidad RAD
   (Haga el algebra que considere..)

4. $\boldsymbol{x_1 = 1 \quad \rightarrow \quad x_2 = 1 - \frac{cos\,(1) - \sqrt{1}}{-sen(1) - \frac{1}{2\sqrt{1}}} = 0.657318}$

5. $\boldsymbol{x_3 = 0.641714}$
6. $\boldsymbol{x_3 = 0.641714}$