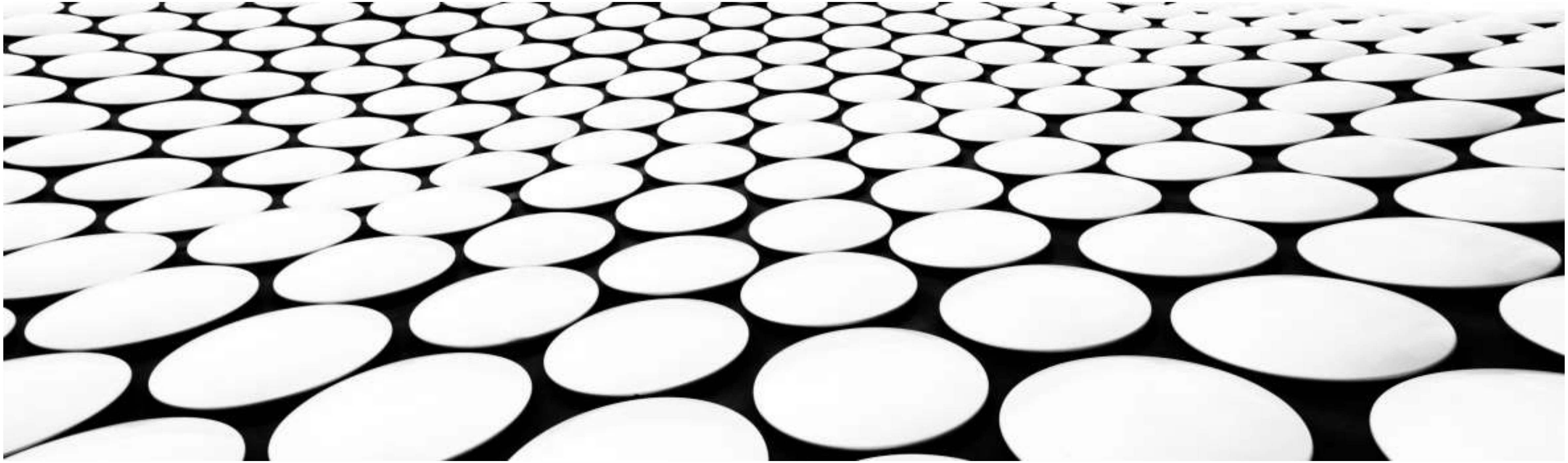
1RA. UNIDAD
MÉTODOS DE CONTEO
REGLAS DE LA SUMA Y DEL PRODUCTO

ING. MARIO LÓPEZ



REGLA DE LA SUMA

Si una primera tarea puede realizarse de m formas distintas, y
si una segunda tarea puede realizarse de n formas distintas, y
no es posible realizarlas **simultáneamente**, entonces,
para llevar acabo cualquiera de ellas se pueden usar

$$\boxed{m + n}$$

Formas distintas.

EJEMPLO NO. 1

En el restaurant "La Estancia":
Hay 5 carnes distintas.
Hay 4 platos de mariscos distintos.
Hay 6 pastas distintas.
¿En cuantas formas distintas se puede almorzar?

$$\#F = 5 + 4 + 6$$

$$\boxed{\#F = 15}$$

Formas distintas.

EJEMPLO NO. 2

Luisa desea prestar determinados pares de zapatos a sus amigas

María,	Ana,	Sonia
7	12	28
Pares distintos	Pares distintos	Pares distintos

$$n = Número\ de\ pares\ distintos\ que\ Luisa\ puede\ prestar$$

¿Determinar el dominio de n?

$$28 \leq n \leq (28 + 12 + 7)$$

$$28 \leq n \leq 47$$

REGLA DEL PRODUCTO

Si un procedimiento se descompone en 2 etapas secuenciales, y si existen m resultados **distintos** de la primera etapa, y para cada uno de estos resultados, existen n resultados **distintos** de la segundo etapa, entonces, el <u>procedimiento total</u> puede realizarse en el **orden dado** de

$$\boxed{mn}$$

Formas distintas.

1ra. Etapa	2da. Etapa
1	1 2 $\vdots$ n
2	1 2 $\vdots$ n
3	1 2 $\vdots$ n
$\vdots$	$\vdots$
m	1 2 $\vdots$ n

EJEMPLO NO. 1

El restaurant “San Martín” hace EMPANADAS con los siguientes ingredientes:
A. Margarina, mantequilla pura con sal, mantequilla pura sin sal y mantequilla lavada.
B. Harina blanca y harina integral.
C. Pollo, Pescado y carne de Res.
¿Cuántas empanadas distintas se pueden hacer?

$$\#F = (4)(2)(3)$$

$$\boxed{\#F = 24}$$

Empanadas distintas.

EJEMPLO NO. 2

En España las placas de los vehículos se forman de la siguiente manera:

$$XX\#\#\#\#XX$$

A. Determinar el número de placas distintas que se pueden formar si **no se pueden repetir dígitos ni letras.** Suponer 26 letras del alfabeto.

$$\#P = (26)(25)(10)(9)(8)(7)(24)(23)$$

$$\boxed{\#P = 1{,}808_1 352{,}000}$$

Placas distintas.

EJEMPLO NO. 2 CONTINUACIÓN…

En España las placas de los vehículos se forman de la siguiente manera:

$$XX\#\#\#\#XX$$

B. Determinar el número de placas distintas que se pueden formar si **se pueden repetir dígitos y letras.** Suponer 26 letras del alfabeto.

$$\#P = (26)(26)(10)(10)(10)(10)(26)(26)$$

$$\#P = (26)^4(10)^4$$

$$\boxed{\#P = 4{,}569_1 760{,}000}$$

Placas distintas.

EJEMPLO NO. 2 CONTINUACIÓN...

En España las placas de los vehículos se forman de la siguiente manera:

$$XX\#\#\#\#XX$$

C. Determinar el número de placas distintas que se pueden formar si **solo se usan número pares y vocales** y se pueden repetir los dígitos y las letras.

$$\#P = (5)(5)(5)(5)(5)(5)(5)(5)$$

$$\#P = (5)^4(5)^4$$

$$\boxed{\#P = 390{,}625}$$

Placas distintas.

Si no se pueden repetir letras y dígitos.

$$\#P = (5)(4)(5)(4)(3)(2)(3)(2)$$

$$\#P = (5)(4)(3)(2)(5)(4)(3)(2)$$

$$\#P = (5)^2(4)^2(3)^2\ (2)^2$$

$$\boxed{\#P = 14{,}400}$$

Placas distintas.

FACTORIAL

El factorial de un número n se escribe $n!$ y se define de la siguiente forma:

$$\boxed{n! = (1)(2)(3)\ldots(n-1)(n)}$$

Para

$$n \geq 1$$

Y por definición:

$$0! = 1$$

Ejemplo:

$$5! = (1)(2)(3)(4)(5) = 120$$

Permutaciones

Ing. Mario López

Permutaciones de objetos distintos

Si existen n objetos distintos denotados por:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

Y existe un entero r entre 0 y n

$$0 \leq r \leq n$$

Entonces por la regla del producto, el número de disposiciones lineales (permutaciones) de tamaño r, para los n objetos, es:

$$\boxed{P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

Nota:
1. Los objetos no se pueden repetir.
2. El orden importa.
3. Objetos distintos.

$$10 * 9 * 8 * 7$$

$$10 * 9 * 8 * 7 = \frac{10!}{6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}$$

$$10 * 9 * 8 * 7 = \frac{10!}{6!}$$

$$10 * 9 * 8 * 7 = \frac{10!}{(10-4)!}$$

$$n = 10 \quad \wedge \quad r = 4$$

Ejemplo No. 1

Hay tres profesionales:
Armando, Blanca, Camilo
Que van a ser entrevistados por el jefe de recursos humanos de Google.

A ¿En cuántas formas distintas pueden ser entrevistadas estas 3 personas?

1

$$\left.\begin{matrix} A & B & C \\ A & C & B \\ B & A & C \\ B & C & A \\ C & A & B \\ C & B & A \end{matrix}\right\}$$

6 formas

2 Regla del producto

$$F = (3)(2)(1) = 6$$

3 Permutaciones

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \rightarrow F = P(3,3) = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!} = \frac{3*2*1}{1} = 6$$

Ejemplo No. 1 continuación…

Hay tres profesionales:
Armando, Blanca, Camilo
Que van a ser entrevistados por el jefe de recursos humanos de Google, el cual hará solamente 2 entrevistas.

B ¿En cuántas formas distintas pueden hacerse estas dos entrevistas?

1

$$\left.\begin{matrix} A & B \\ B & A \\ A & C \\ C & A \\ B & C \\ C & B \end{matrix}\right\} \text{6 formas}$$

2 Regla del producto

$$F = (3)(2) = 6$$

3 Permutaciones

$$F = P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} = P(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 6$$

Ejemplo No. 2

En un partido de foot ball en la banca se encuentran 7 jugadores.
En el juego se permiten únicamente 3 cambios.
¿En cuántas formas distintas se pueden hacer estos cambios?

1 Regla del producto

$$F = (7)(6)(5) = 210$$

2 Permutaciones

$$F = P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} = P(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{(7)*(6)*(5)*(4!)}{4!} = (7)(6)(5) = 210$$

Muchas gracias

Ing. Mario López

Combinaciones

Ing. Mario López

Combinaciones de objetos distintos

Si hay n objetos distintos, el número de combinaciones, sin hacer referencia al orden, de r elementos, sin reemplazo, de dichos objetos es de:

$$\boxed{C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}}$$

$$\binom{3}{3} = \frac{P(3,3)}{3!} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\binom{3}{2} = \frac{P(3,2)}{2!} = \frac{6}{2} = 3$$

Nota:

1. Los objetos no se pueden repetir.
2. El orden no importa.
3. Objetos distintos.

Ejemplo No. 1

Burger King ofrece una hamburguesa especial con 8 ingredientes distintos.
Los clientes pueden elegir 0 ingredientes, 1 ingrediente, 2 ingredientes, etc. Pero **no** los pueden repetir y no pueden elegir más de 8 ingredientes.
¿Cuántas hamburguesas diferentes pueden ordenar los clientes?

1 Número de hamburguesas

$$\#H = \binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8}$$

$$\#H = \left(\frac{8!}{0!\,(8-0)!}\right) + \left(\frac{8!}{1!\,(8-1)!}\right) + \left(\frac{8!}{2!\,(8-2)!}\right) + \left(\frac{8!}{3!\,(8-3)!}\right) + \left(\frac{8!}{4!\,(8-4)!}\right) + \cdots$$

$$\ldots + \left(\frac{8!}{5!\,(8-5)!}\right) + \left(\frac{8!}{6!\,(8-6)!}\right) + \left(\frac{8!}{7!\,(8-7)!}\right) + \left(\frac{8!}{8!\,(8-8)!}\right)$$

$$\#H = 1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1$$

$$\boxed{\#H = 256}$$

Ejemplo No. 2

En una manada de lobos hay 30 niños y se desean formar seisenas (Grupos de 6 niños).
¿En cuántas formas distintas se pueden formar estas seisenas?

$$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,\ldots,30$$

$\boxed{1}$ Número de seisenas

$$\#S=\binom{30}{6}\binom{24}{6}\binom{18}{6}\binom{12}{6}\binom{6}{6}$$

$$\#S=\left(\frac{30!}{6!\,24!}\right)\left(\frac{24!}{6!\,18!}\right)\left(\frac{18!}{6!\,12!}\right)\left(\frac{12!}{6!\,6!}\right)\left(\frac{6!}{6!\,0!}\right)$$

$$\#S=\left(\frac{30!}{6!}\right)\left(\frac{1}{6!}\right)\left(\frac{1}{6!}\right)\left(\frac{1}{6!}\right)\left(\frac{1}{6!}\right)$$

$$\#S=\left(\frac{30!}{(6!)^5}\right)$$

$$\boxed{\#S=1.370874168*10^{18}}$$

Muchas gracias

Ing. Mario López

Permutaciones con repetición

ING. MARIO LÓPEZ

Permutaciones con repetición

Determinar las disposiciones lineales, de tamaño 4, de las cuatro letras de la palabra

ALMA

$$Disp.lin.C.R. = \frac{\#Permutaciones}{2!}$$

$$\boxed{Disp.lin.C.R. = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\ldots n_r!}}$$

Con: $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_r = n$

DISP. LIN. C. R.			
A	L	M	A
A	L	A	M
A	M	L	A
A	M	A	L
A	A	L	M
A	A	M	L
L	A	M	A
L	A	A	M
L	M	A	A
M	A	L	A
M	A	A	L
M	L	A	A

PERMUTACIONES								
A1	L	M	A2		A2	L	M	A1
A1	L	A2	M		A2	L	A1	M
A1	M	L	A2		A2	M	L	A1
A1	M	A2	L		A2	M	A1	L
A1	A2	L	M		A2	A1	L	M
A1	A2	M	L		A2	A1	M	L
L	A1	M	A2		L	A2	M	A1
L	A1	A2	M		L	A2	A1	M
L	M	A1	A2		L	M	A2	A1
M	A1	L	A2		M	A2	L	A1
M	A1	A2	L		M	A2	A1	L
M	L	A1	A2		M	L	A2	A1

Ejemplo No. 1

Determinar las disposiciones lineales, de tamaño 13, de las letras de la palabra

HUEHUETENANGO

Letras	Frecuencia
H	2
U	2
E	3
T	1
N	2
A	1
G	1
O	1
Sumatoria	13

$$\boxed{Disp.lin.C.R. = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\ldots n_r!}}$$

$$Disp.lin.C.R. = \frac{13!}{2!\,2!\,3!\,1!\,2!\,1!\,1!\,1!}$$

$$Disp.lin.C.R. = \frac{13!}{2!\,2!\,3!\;2!} = \frac{13!}{(2!)^3 3!}$$

$$\boxed{Disp.lin.C.R. = 129{,}729{,}600}$$

$$\boxed{Permutaciones\ C.R. = 129{,}729{,}600}$$

Ejemplo No. 2

Determinar las disposiciones lineales, de tamaño 10, de las letras de la palabra

MATEMATICA

Letras	Frecuencia
M	2
A	3
T	2
E	1
I	1
C	1
Sumatoria	10

$$\boxed{Disp.lin.C.R. = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\ldots n_r!}}$$

$$Disp.lin.C.R. = \frac{10!}{2!\,3!\,2!\,1!\,1!\,1!}$$

$$Disp.lin.C.R. = \frac{10!}{2!\,2!\,3!} = \frac{10!}{(2!)^2 3!}$$

$$\boxed{Disp.lin.C.R. = 151{,}200}$$

$$\boxed{Permutaciones\ C.R. = 151{,}200}$$

Permutaciones con repetición

Determinar las disposiciones lineales, de tamaño 2, de las cuatro letras de la palabra

ALMA

Suponiendo elementos distintos: A1, L, M, A2

$$P(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$$

$$\boxed{Disp.\,lin.\,C.\,R. = 1 + 4 + 2 = 7}$$

PERMUTACIONES			
A1	A2		
A2	A1		
A1	L		
A1	M		
L	A1		
M	A1		
A2	L		
A2	M		
L	A2		
M	A2		
L	M		
M	L		

De este resultado se toma solo 1.

$P(2,2) = 2$

Espacios

Se supone solo una A.

$\binom{2}{1} * P(1,1) * P(2,1)$

$2 * 1 * 2 = 4$

\# de símbolos a ser ubicados en los espacios.

Este resultado se toma completo.

$\binom{2}{1} * P(1,1) * P(2,1)$

$2 * 1 * 2 = 4$

Este resultado NO se toma.

$P(2,2) = 2$

Este resultado se toma completo.

DISP. LIN. C. R.			
A	A		
A	L		
A	M		
L	A		
M	A		
L	M		
M	L		

Permutaciones con repetición

Determinar las disposiciones lineales, de tamaño 2, de las cuatro letras de la LISTA

AMMA

Suponiendo elementos distintos: A1, M1, M2, A2

$$P(4,2)=\frac{4!}{(4-2)!}=\frac{4!}{2!}=\frac{24}{2}=12$$

$$\boxed{Disp.lin.C.R.=1+2+1=4}$$

PERMUTACIONES			
A1	A2		
A2	A1		
A1	M1		
M1	A1		
A1	M2		
M2	A1		
A2	M1		
M1	A2		
A2	M2		
M2	A2		
M1	M2		
M2	M1		

De este resultado se toma solo 1.

$P(2,2)=2$

$\binom{2}{1}*P(1,1)*P(1,1)$

$2*1*1=2$

Este resultado se toma completo.

$\binom{2}{1}*P(1,1)*P(1,1)$

$2*1*1=2$

Este resultado NO se toma.

$\binom{2}{1}*P(1,1)*P(1,1)$

$2*1*1=2$

Este resultado NO se toma.

$\binom{2}{1}*P(1,1)*P(1,1)$

$2*1*1=2$

Este resultado NO se toma.

$P(2,2)=2$

De este resultado se toma solo 1.

DISP. LIN. C. R.			
A	A		
A	M		
M	A		
M	M		

Permutaciones con repetición

Determinar las disposiciones lineales, de tamaño 2, de las cuatro letras de la LISTA

AMMM

Suponiendo elementos distintos: A, M1, M2, M3

$$P(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$$

$$\boxed{Disp. lin. C.R. = 2 + 1 = 3}$$

PERMUTACIONES			
M1	A		
A	M1		
M2	A		
A	M2		
M3	A		
A	M3		
M1	M2		
M1	M3		
M2	M1		
M2	M3		
M3	M1		
M3	M2		

$\binom{2}{1} * P(1,1) * P(1,1)$

$2 * 1 * 1 = 2$

$\binom{2}{1} * P(1,1) * P(1,1)$

$2 * 1 * 1 = 2$

$\binom{2}{1} * P(1,1) * P(1,1)$

$2 * 1 * 1 = 2$

$P(3,2) = 6$

De este resultado se toma solo 1.

DISP. LIN. C. R.			
M	A		
A	M		
M	M		

Este resultado se toma completo.

Este resultado NO se toma.

Este resultado NO se toma.

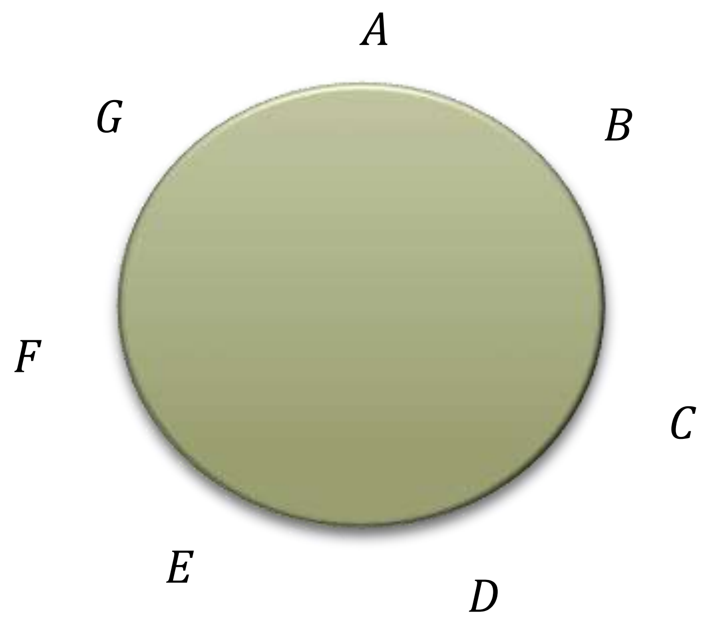
DISPOSICIONES NO LINEALES

ING. MARIO LÓPEZ

DISPOSICIONES NO LINEALES

Ejemplo No. 1

¿En cuántas formas distintas se pueden sentar 7 personas en torno a una mesa?



P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
A	B	C	D	E	F	G
G	A	B	C	D	E	F
F	G	A	B	C	D	E
E	F	G	A	B	C	D
D	E	F	G	A	B	C
C	D	E	F	G	A	B
B	C	D	E	F	G	A

Se consideran la misma disposición

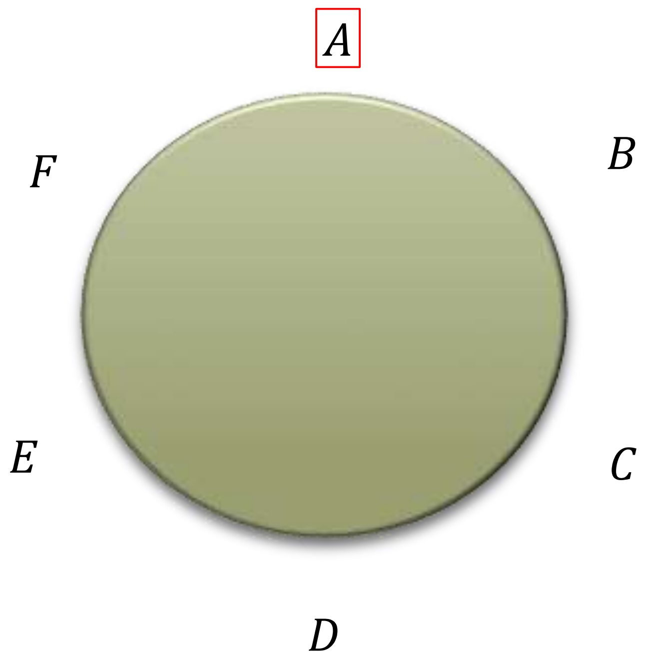
$$\begin{matrix} Disposiciones \\ no\ lineales \end{matrix} = \frac{{}_7P_7}{7} = \frac{7!}{7} = \frac{7 * 6!}{7} = 6! = 720$$

$$\boxed{\begin{matrix} Disposiciones \\ no\ lineales \end{matrix} = \frac{n!}{n} = (n-1)!}$$

Ejemplo No. 2

¿En cuántas formas distintas se pueden sentar 7 personas en torno a una mesa, si dos de ellas deben estar siempre juntas?

1 Suponer que las dos personas que se deben sentar juntas son una sola.

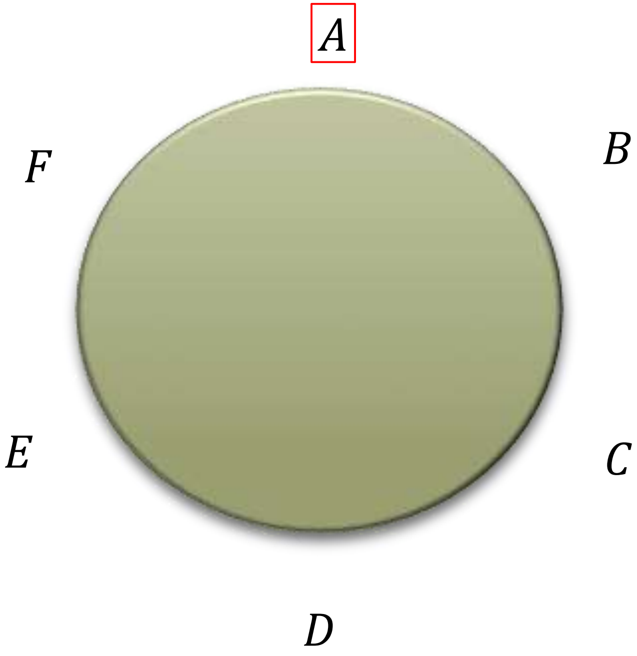


$$\begin{matrix} Disposiciones \\ no\ lineales \end{matrix} = \frac{6!}{6} = 5! = 120$$

Ejemplo No. 2 continuación…

¿En cuántas formas distintas se pueden sentar 7 personas en torno a una mesa, si dos de ellas deben estar siempre juntas?

$\boxed{2}$ Formas en las que se pueden sentar las 2 personas que van a estar juntas.

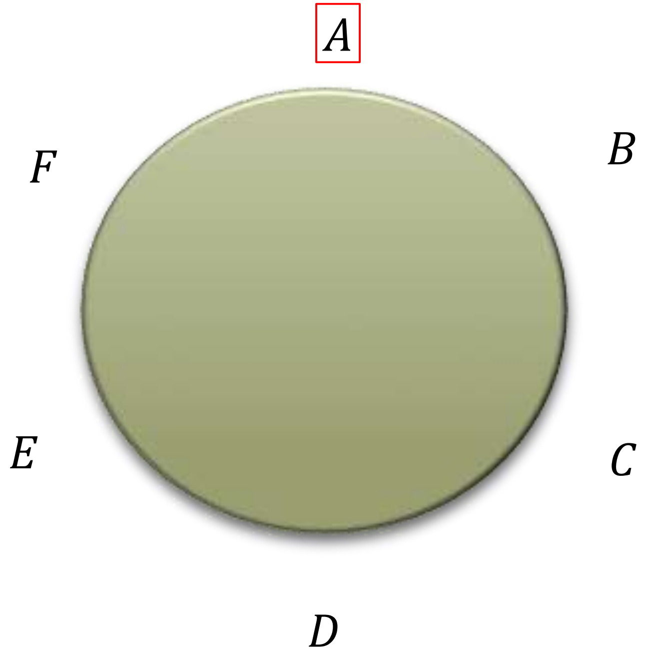


$$Formas\ para\ A \rightarrow \left\{ \begin{matrix} P_1, P_2 \\ \\ P_2, P_1 \end{matrix} \right\} \quad {}_2P_2 = 2! = 2$$

Ejemplo No. 2 continuación…

¿En cuántas formas distintas se pueden sentar 7 personas en torno a una mesa, si dos de ellas deben estar siempre juntas?

$\boxed{3}$ Formas totales, por la regla del producto.

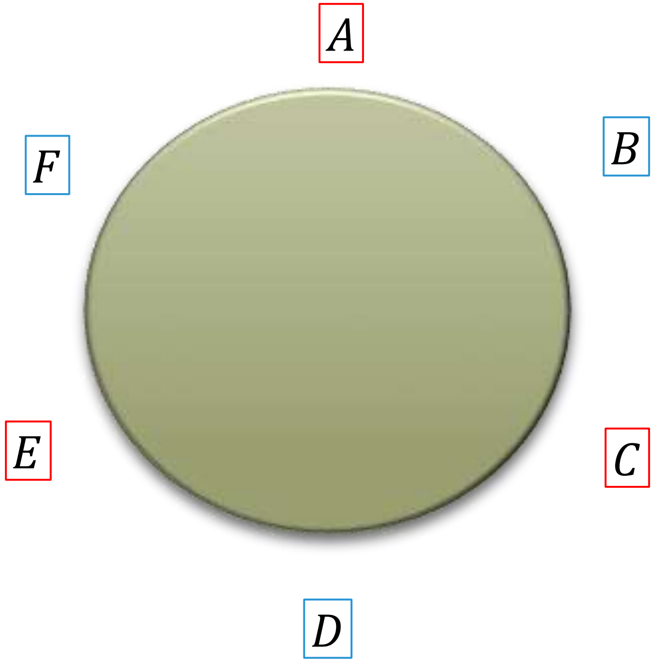


$$\#F = 120 * 2 = \boxed{240}$$

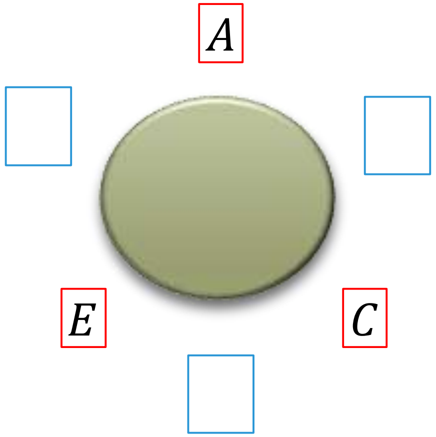
Ejemplo No. 3

¿En cuántas formas distintas se pueden sentar 2 equipos de ajedrez (de 3 personas cada equipo), en torno a una mesa, si no pueden quedar dos personas del mismo equipo en forma consecutiva?

Forma 1



1 Se aplican disposiciones no lineales al equipo rojo, y luego se multiplica por las disposiciones lineales del equipo celeste.



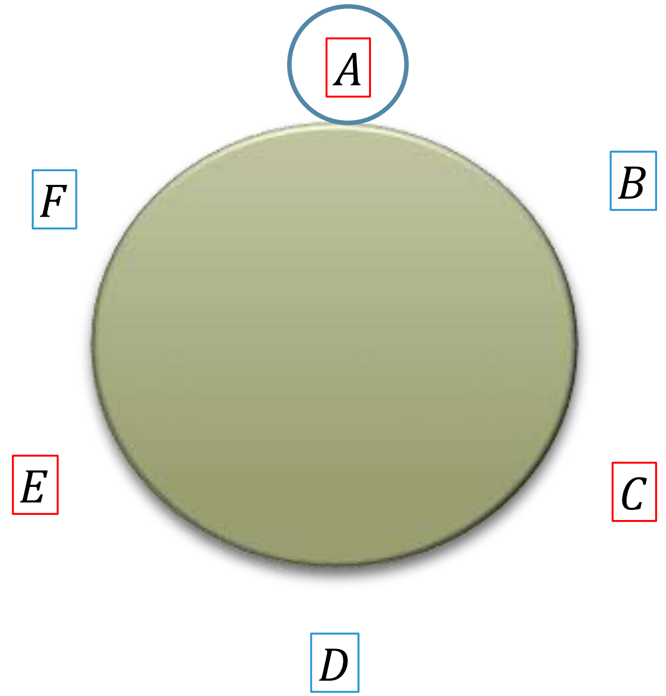
$$\#F = \frac{{}_3P_3}{3} * {}_3P_3$$

$$\#F = \frac{3!}{3} * 3! = 2! * 3! = \boxed{12}$$

Ejemplo No. 3 continuación…

¿En cuántas formas distintas se pueden sentar 2 equipos de ajedrez (de 3 personas cada equipo), en torno a una mesa, si no pueden quedar dos personas del mismo equipo en forma consecutiva?

Forma 2

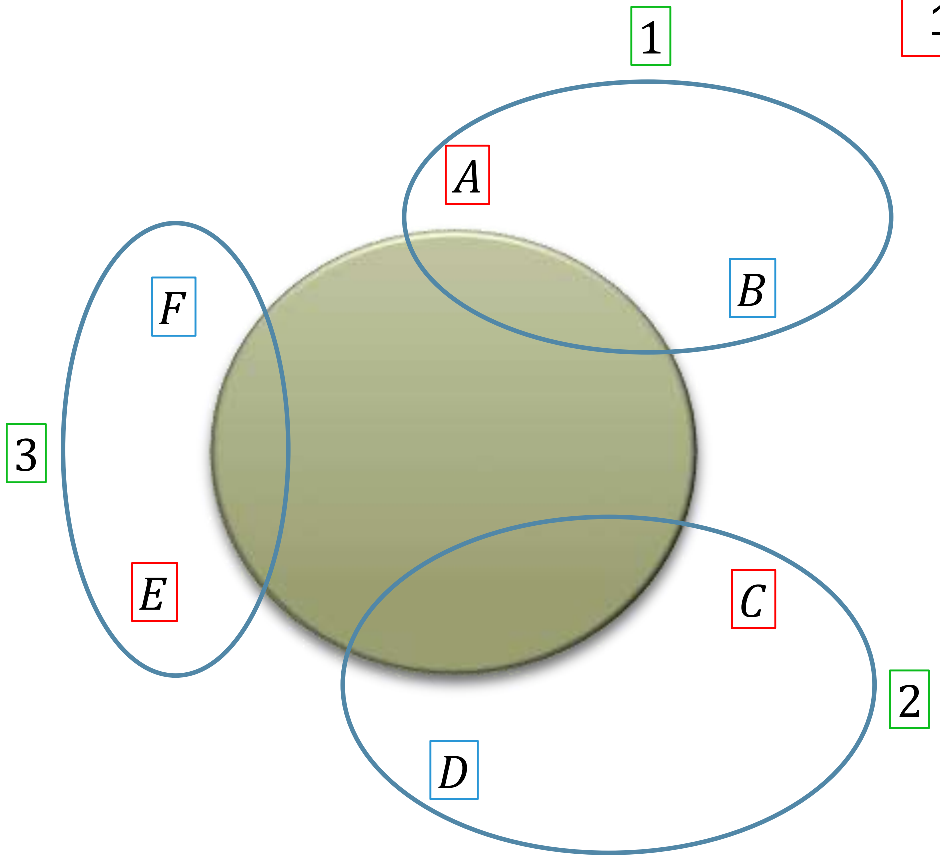


$\boxed{2}$ El elemento encerrado en el círculo se coloca, pero no se toma en cuenta. Luego se aplica la regla del producto, a los restantes elementos, como si se formaran disposiciones lineales de los mismos.

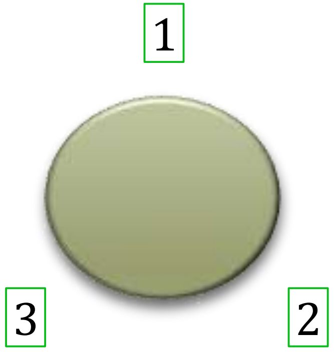
$$\#F = 3 * 2 * 2 * 1 * 1 = \boxed{12}$$

Ejemplo No. 4

¿En cuántas formas distintas se pueden sentar 3 parejas de novios, en torno a una mesa, si cada pareja debe sentarse siempre junta?



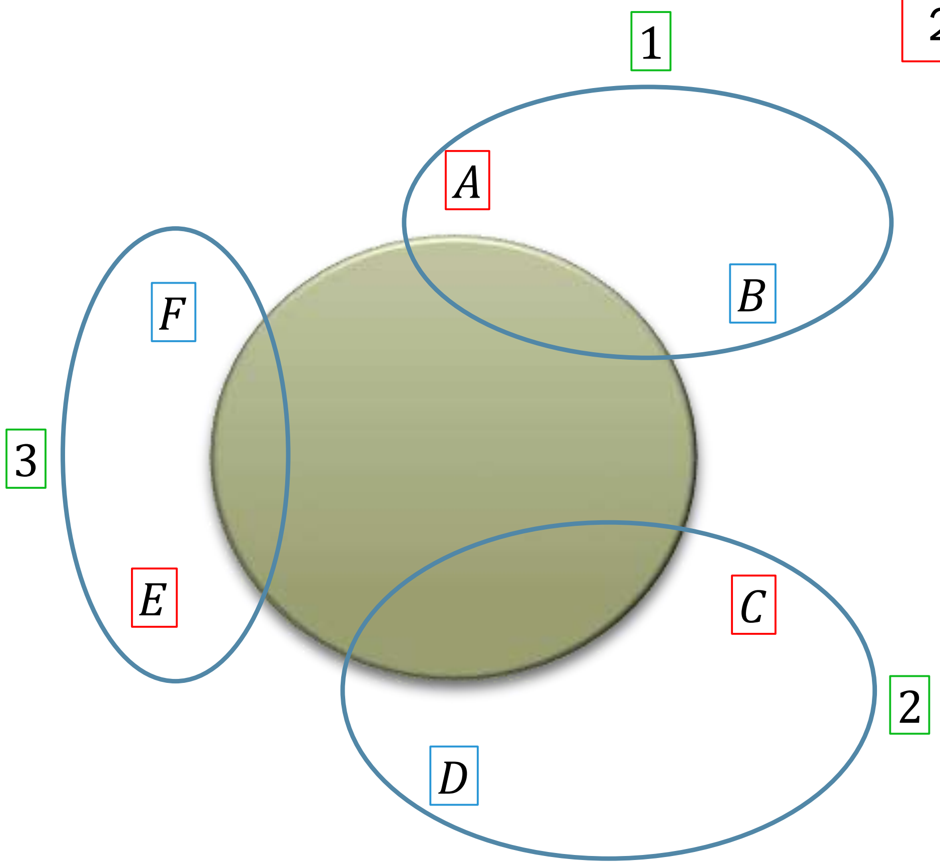
$\boxed{1}$ Se toma cada pareja como un solo elemento



$$\#F1 = \frac{3!}{3} = 2! = 2$$

Ejemplo No. 4 continuación...

¿En cuántas formas distintas se pueden sentar 3 parejas de novios, en torno a una mesa, si cada pareja debe sentarse siempre junta?



$\boxed{2}$

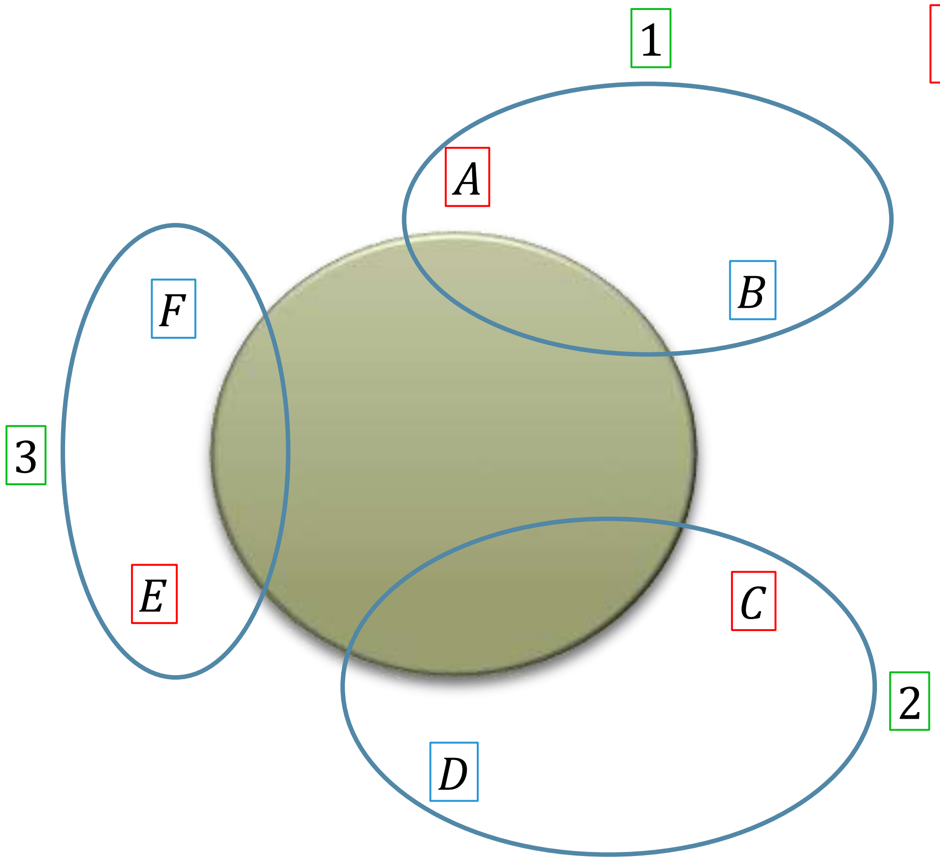
Para cada una de las formas calculadas en el inciso 1, por la regla del producto, se tiene:

$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$
${}_2P_2$	${}_2P_2$	${}_2P_2$
$2!$	$2!$	$2!$

$$\#F2 = 2 \quad * \quad 2 \quad * \quad 2 = 2^3 = 8$$

Ejemplo No. 4 continuación...

¿En cuántas formas distintas se pueden sentar 3 parejas de novios, en torno a una mesa, si cada pareja debe sentarse siempre junta?



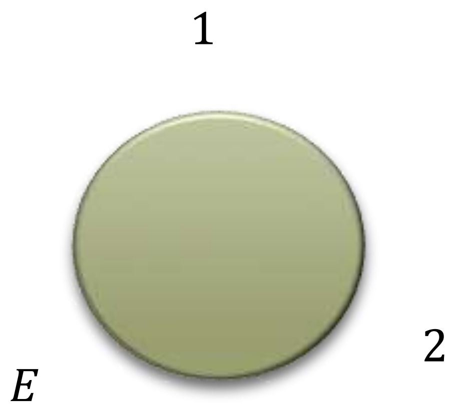
3 Por la regla del producto, se multiplican los resultados de los incisos 1 y 2:

$$\#F = 2 * 8$$

$$\boxed{\#F = 16}$$

DISPOSICIONES NO LINEALES

Ejemplo No. 5 ¿En cuántas formas distintas se pueden sentar 2 personas en torno a una mesa con 3 sillas?



S1	S2	S3
1	2	E
1	E	2
E	1	2
2	1	E
2	E	1
E	2	1

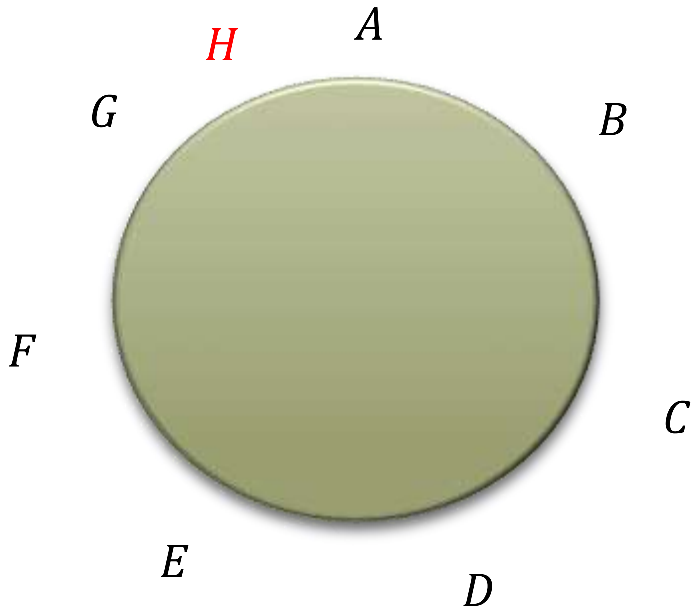
Se consideran la misma disposición

$$\begin{matrix} Disposiciones \\ no\ lineales \end{matrix} = \frac{{}_3P_3}{3} = \frac{3!}{3} = 2! = 2$$

DISPOSICIONES NO LINEALES

Ejemplo No. 6

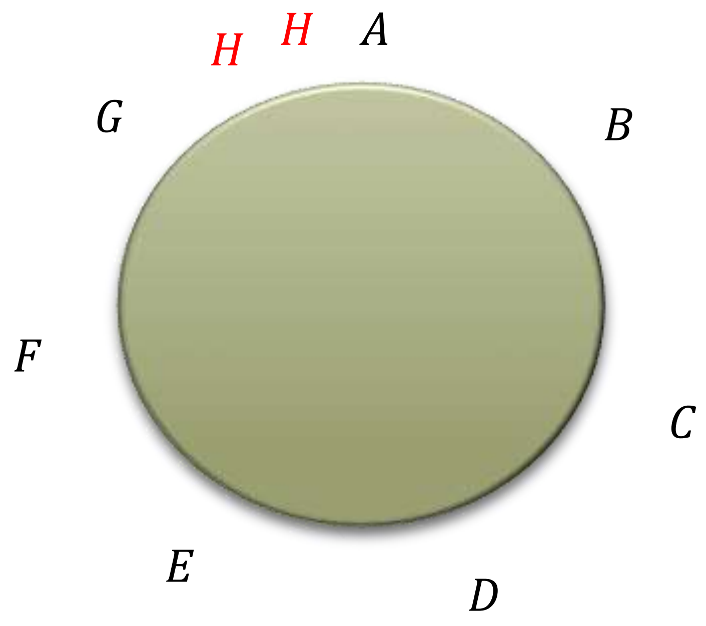
¿En cuántas formas distintas se pueden sentar 7 personas en torno a una mesa con una silla adicional?



$$\begin{matrix} Disposiciones \\ no\ lineales \end{matrix} = \frac{8!}{8} = 7! = 5{,}040$$

DISPOSICIONES NO LINEALES

Ejemplo No. 7 ¿En cuántas formas distintas se pueden sentar 7 personas en torno a una mesa con 2 silla adicional?



$$\begin{matrix} Disposiciones \\ no\ lineales \end{matrix} = \frac{Permutaciones\ con\ repetición}{Número\ de\ elementos}$$

$$\begin{matrix} Disposiciones \\ no\ lineales \end{matrix} = \frac{\left(\frac{9!}{2!}\right)}{9} =$$

$$\begin{matrix} Disposiciones \\ no\ lineales \end{matrix} = \frac{9*8*7*6*5*4*3}{9} =$$

$$\begin{matrix} Disposiciones \\ no\ lineales \end{matrix} = 8*7*6*5*4*3 = 20{,}160$$

TEOREMA DEL BINOMIO

ING. MARIO LÓPEZ

TEOREMA DEL BINOMIO

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}$$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^0 y^n + \binom{n}{1} x\, y^{n-1} + \binom{n}{2} x^2\, y^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y + \binom{n}{n} x^n y^0$$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} y^n + \binom{n}{1} x\, y^{n-1} + \binom{n}{2} x^2\, y^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y + \binom{n}{n} x^n$$

EJEMPLO 1

Determinar el coeficiente del término x^4y^3 de la operación $(x+y)^7$

Del teorema del binomio:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Se tiene para este caso particular que:

$$n = 7$$

$$k = 4$$

$$n - k = 3$$

Por lo que el coeficiente del término x^4y^3 será:

$$\binom{n}{k} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7*6*5*4!}{4!*3*2} = \boxed{35}$$

$$
\begin{array}{l}
(x+y) \\
(x+y) \\
(x+y) \\
* \quad (x+y) \\
(x+y) \\
(x+y) \\
(x+y) \\
\hline
\end{array}
$$

EJEMPLO 2

Determinar el coeficiente del término a^5b^2 de la operación $(2a-3b)^7$

Del teorema del binomio:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Se tiene para este caso particular que:

$$\begin{array}{c|c} n = 7 & x = 2a \\ k = 5 & y = -3b \end{array}$$

Por lo que el término de a^5b^2 será:

$$\binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \binom{7}{5} (2a)^5 (-3b)^2 = \binom{7}{5} (2)^5 a^5 (-3)^2 b^2 = \binom{7}{5} (2)^5 (-3)^2 a^5 b^2$$

Y el coeficiente del término a^5b^2 es:

$$= \binom{7}{5} (2)^5 (-3)^2 = \frac{7!}{5!\,2!} * 32 * 9 = \frac{7*6}{2} * 32 * 9 = \boxed{6048}$$

$$\begin{array}{c} (2a-3b) \\ (2a-3b) \\ (2a-3b) \\ * \quad (2a-3b) \\ (2a-3b) \\ (2a-3b) \\ (2a-3b) \\ \hline \end{array}$$

COROLARIO

Si en el teorema del binomio $x = y = 1$ se tiene:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^0 y^n + \binom{n}{1} x\, y^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y \; + \binom{n}{n} x^n y^0$$

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} 1^0 1^n + \binom{n}{1} 1 * \; 1^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} 1^{n-1} 1 \; + \binom{n}{n} 1^n 1^0$$

$$\boxed{2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}}$$

EJEMPLO NO. 3

Burger King ofrece una hamburguesa especial con 8 ingredientes distintos.
Los clientes pueden elegir 0 ingredientes, 1 ingrediente, 2 ingredientes, etc. Pero **no** los pueden repetir.
¿Cuántas hamburguesas diferentes pueden ordenar los clientes?

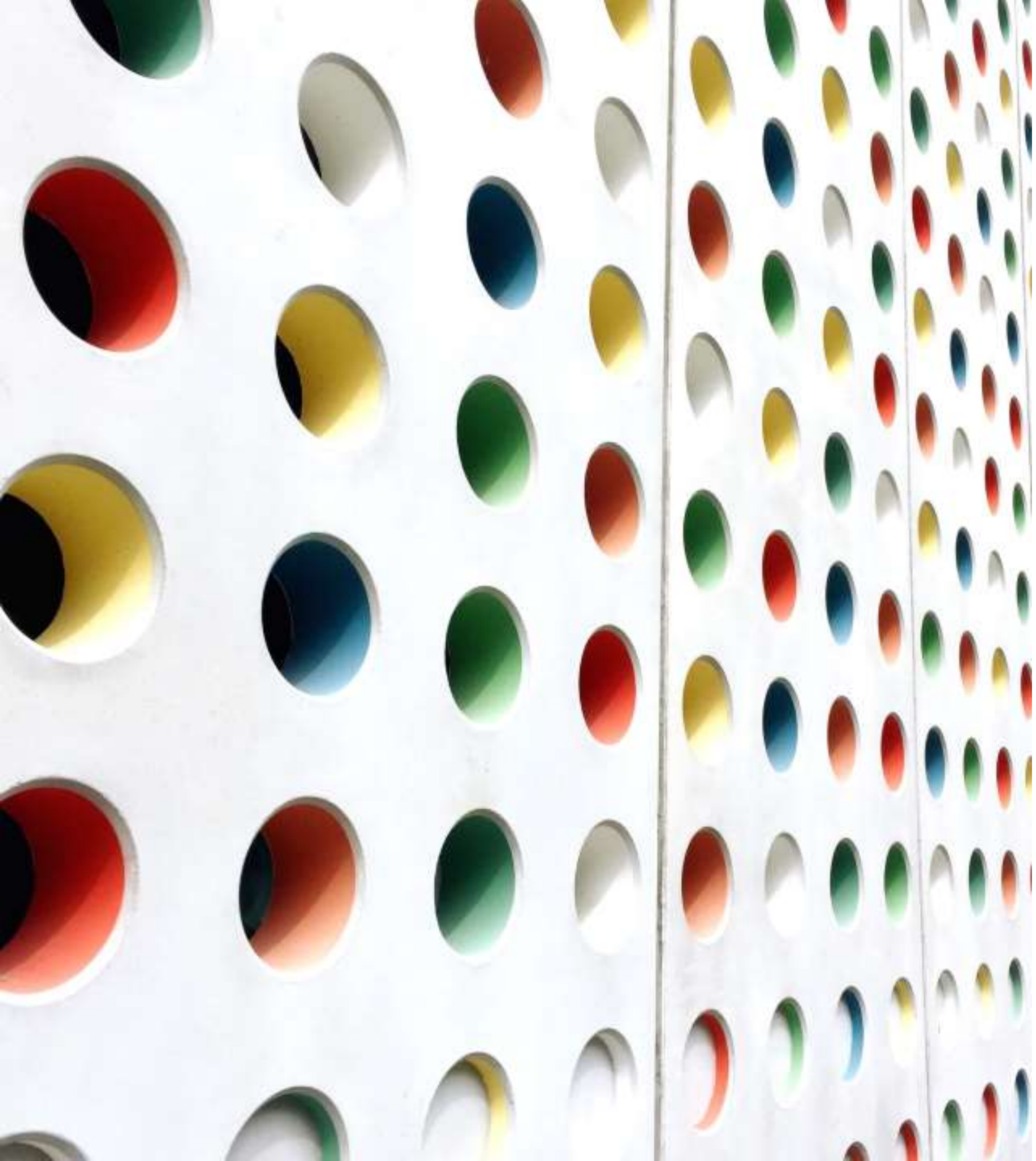
I Número de hamburguesas

$$\#H = \binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8}$$

$$\#H = 2^8$$

$$\boxed{\#H = 256}$$

Ingredientes →	1	2	3	4	5	6	7	8
No se pide →	0	0	0	0	0	0	0	0
Si se pide →	1	1	1	1	1	1	1	1



Combinaciones con repetición

ING. MARIO LÓPEZ

Combinaciones con repetición

Ejemplo No. 1

Un grupo de 7 amigos van a almorzar a “LA HACIENDA REAL” y pueden elegir entre los siguientes cuatro platos:

1. Carne asada
2. Pasta italiana
3. Queso fundido
4. Sopa de la casa

Análisis

Amigo 1	Amigo 2	Amigo 3	Amigo 4	Amigo 5	Amigo 6	Amigo 7
CA	CA	P	Q	Q	Q	S
CA	P	P	P	Q	S	S
P	P	P	P	S	S	S

Amigo 1	Amigo 2	Amigo 3	Amigo 4	Amigo 5	Amigo 6	Amigo 7
x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x

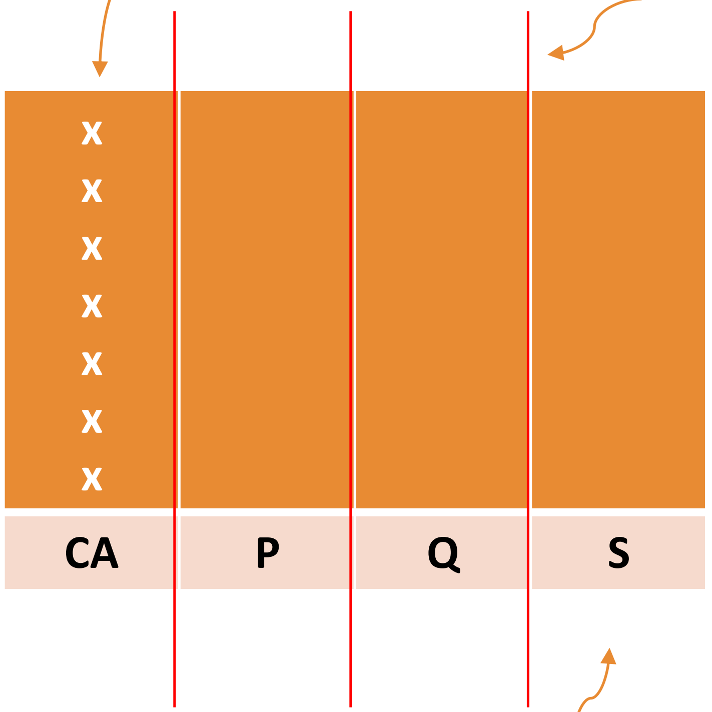
Entonces el problema se reduce a **permutar** 7x y 3 **con repetición**

$$\begin{matrix}\textit{Combinaciones}\\ \textit{con repetición}\end{matrix} = \frac{10!}{7! * 3!} = \boxed{120} = \frac{(r+n-1)!}{r!\,(n-1)!} = \binom{r+n-1}{r}$$

Modelo

$r = \textit{Número de amigos} = 7$

$n - 1\ \textit{Barras}$



$n = \textit{Número de platos} = 4$

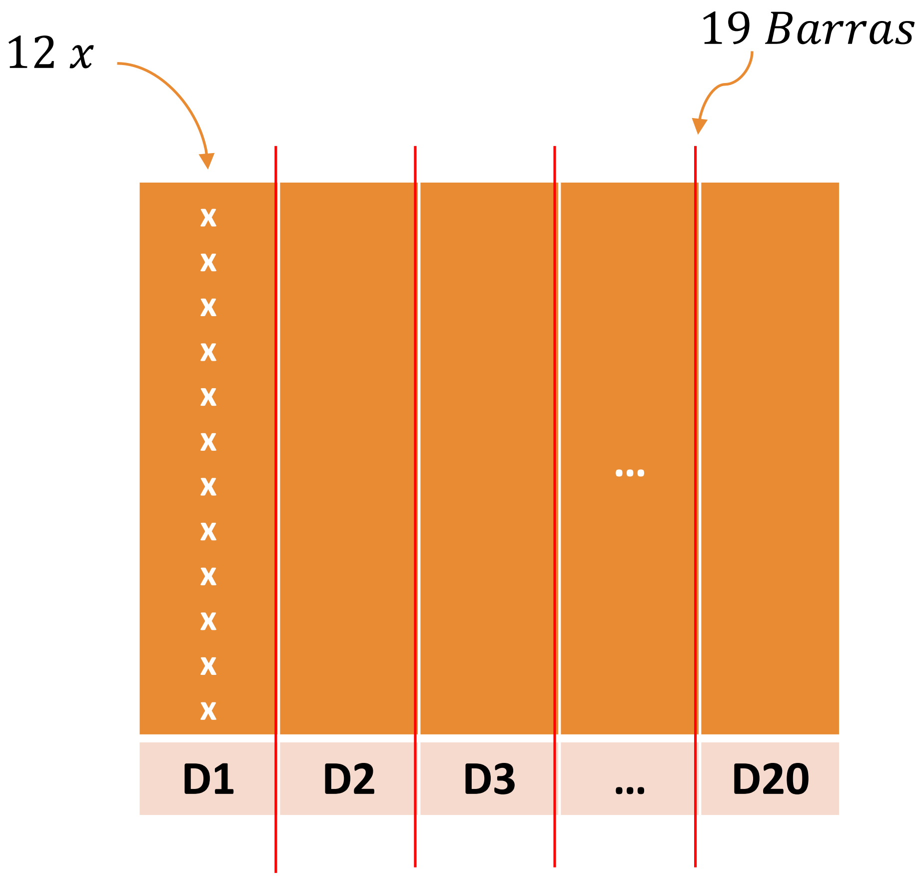
$$\begin{matrix}\textit{Combinaciones}\\ \textit{con repetición}\end{matrix} = \binom{n+r-1}{r}$$

Ejemplo No. 2

American Doughnuts ofrece 20 tipos distintos de donas.

Se debe comprar una docena.

¿En cuántas formas distintas se puede comprar esta docena de donas?



$$\#F = \frac{(12+19)!}{12! * 19!} = \boxed{141{,}120{,}525}$$

Ejemplo No. 3

Burger King ofrece una hamburguesa especial con 8 ingredientes distintos.
Los clientes pueden elegir 0 ingredientes, 1 ingrediente, 2 ingredientes, etc. **<u>Con repetición</u>**, siempre que no se excedan 8 ingredientes.
¿Cuántas hamburguesas diferentes pueden ordenar los clientes?

$\boxed{1}$ Analizando las 9 posibilidades

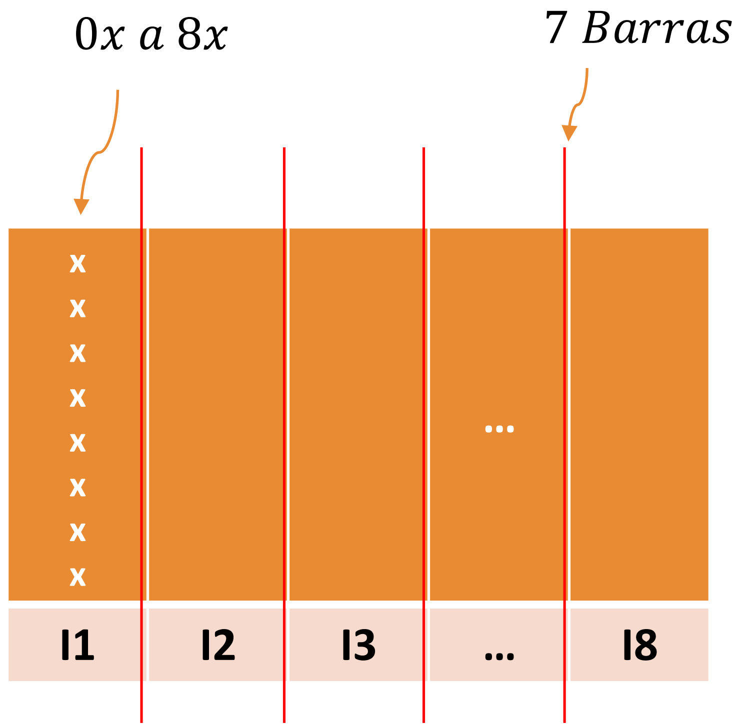
$7\ Barras$ $\quad 0x \quad 1x \quad 2x \quad 3x \quad 4x$

$$\#F = \frac{(7+0)!}{7!*0!} + \frac{(7+1)!}{7!*1!} + \frac{(7+2)!}{7!*2!} + \frac{(7+3)!}{7!*3!} + \frac{(7+4)!}{7!*4!} + \cdots$$

$$\ldots + \frac{(7+5)!}{7!*5!} + \frac{(7+6)!}{7!*6!} + \frac{(7+7)!}{7!*7!} + \frac{(7+8)!}{7!*8!}$$

$$\#F = 1 + 8 + 36 + 120 + 330 + 792 + 1716 + 3432 + 6435$$

$$\boxed{\#F = 12{,}870}$$



Muchas gracias

Ing. Mario López

APLICACIONES DEL CONTEO AL ANÁLISIS DE ALGORITMOS

ING. MARIO LÓPEZ

APLICACIONES DEL CONTEO AL ANÁLISIS DE ALGORITMOS

Dado el algoritmo:

```
For i = 1 to 20
    For j = 1 to i
        For k = 1 to j
            For m  = 1 to k
                Writeln (i*j)
            Endfor
        Endfor
    Endfor
Endfor
```

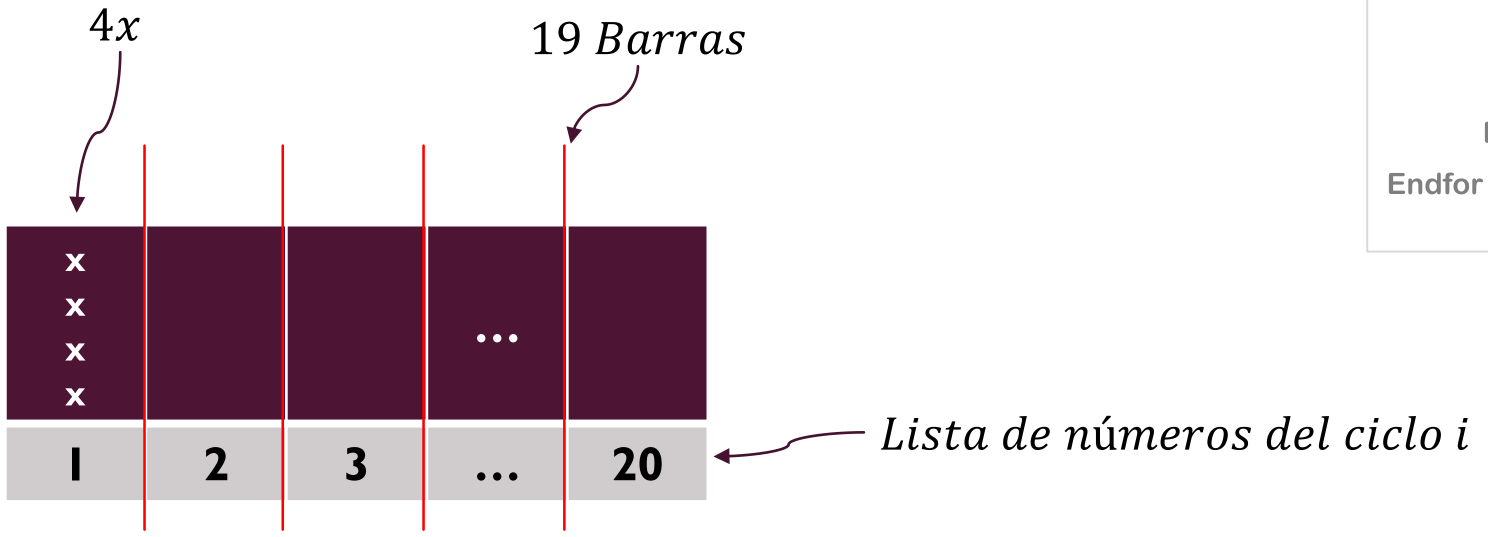
Determinar las veces que se ejecuta la instrucción Writeln.

I

Modelo a aplicar

```
For i = 1 to 20
    For j = 1 to i
        For k = 1 to j
            For m  = 1 to k
                Writeln (i*j)
            Endfor
        Endfor
    Endfor
Endfor
```

$$Número\ total\ de\ ciclos\ anidados\ más\ el\ principal$$

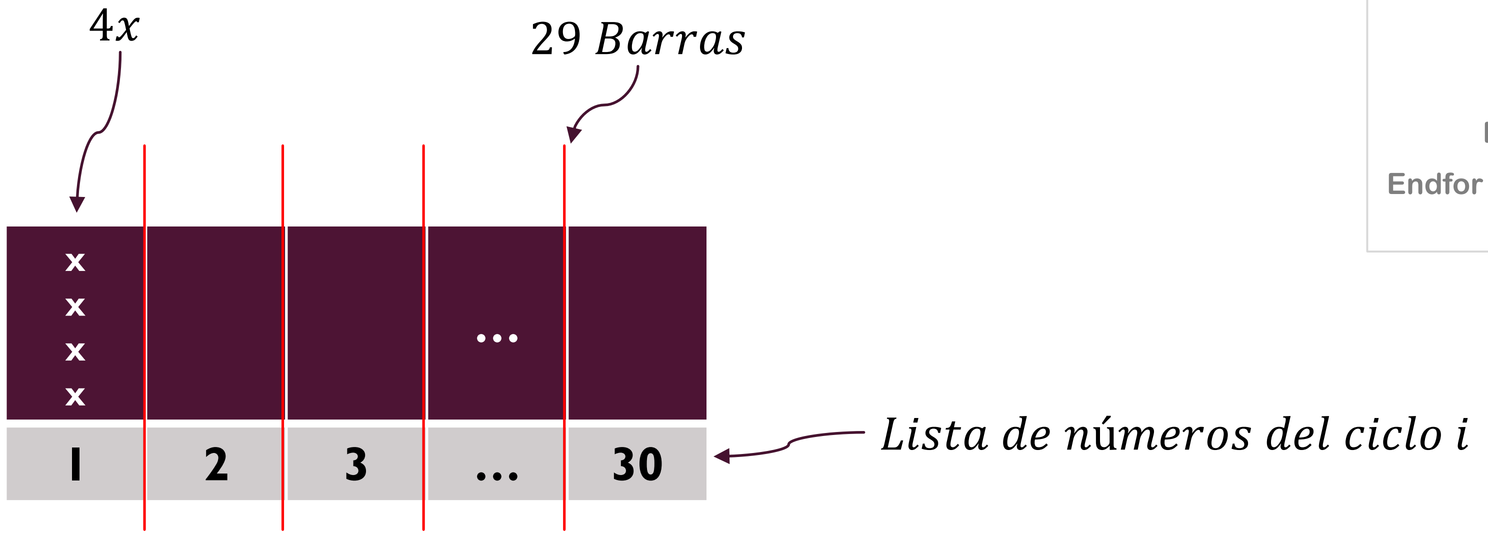


$$\#EW = \frac{(19+4)!}{19! * 4!} = \frac{23!}{19! * 4!} = \boxed{8,855}$$

2 Modelo a aplicar

```
For i = 1 to 30
        For j = 1 to i
                For k = 1 to j
                        For m  = 1 to k
                                Writeln (i*j)
                        Endfor
                Endfor
        Endfor
Endfor
```

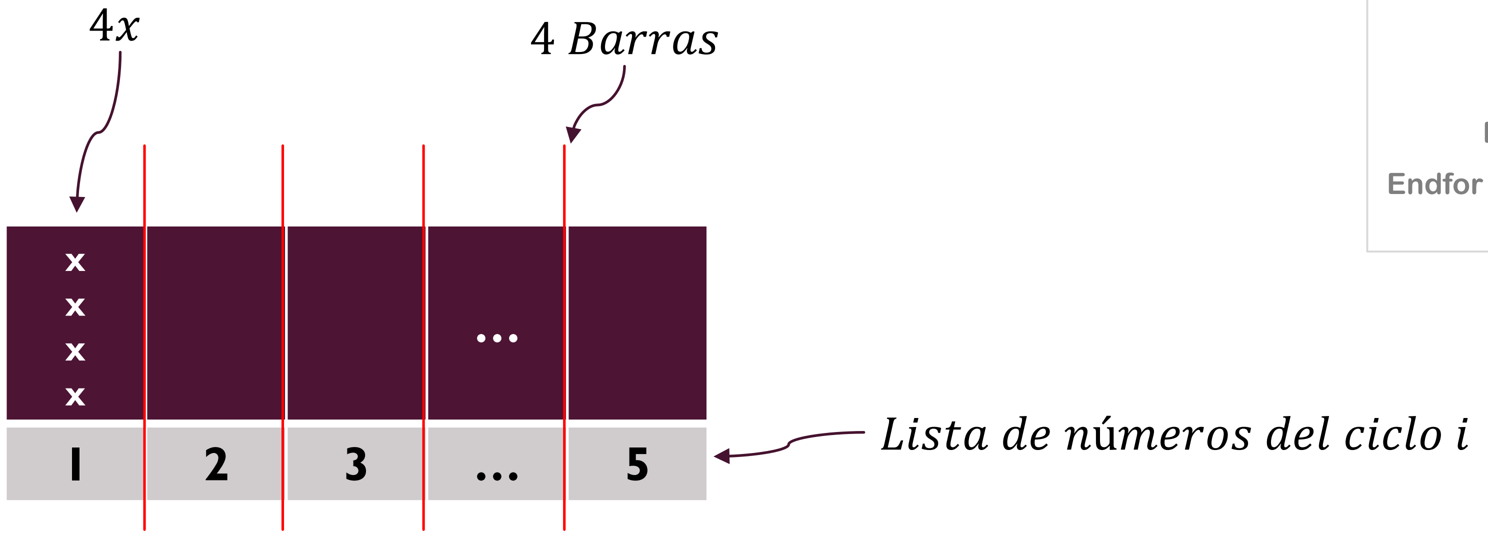
$Número\ total\ de\ ciclos\ anidados$



$$\#EW = \frac{(29+4)!}{29! * 4!} = \frac{33!}{29! * 4!} = \boxed{40{,}920}$$

$\boxed{3}$ Modelo a aplicar

$Número\ total\ de\ ciclos\ anidados$




```
For i = 1 to 5
        For j = 1 to i
                For k = 1 to j
                        For m  = 1 to k
                                Writeln (i*j)
                        Endfor
                Endfor
        Endfor
Endfor
```

$$\#EW = \frac{(4+4)!}{4! * 4!} = \frac{8!}{4! * 4!} = \boxed{70}$$

EJEMPLO 2

Dado el algoritmo:

```
For i = 1 to N
    For j = 1 to i
        Writeln (i*j)
    Endfor
Endfor
```

Determinar las veces que se ejecuta la instrucción Writeln de dos formas distintas para demostrar que:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}}$$

I

Tabla de ejecuciones

i	j	Ejecuciones del Writeln	Sub total
1	1	1	1
2	1	1	
	2	1	2
3	1	1	
	2	1	
	3	1	3
4	1	1	
	2	1	
	3	1	
	4	1	4
⋮	⋮	⋮	⋮
N	1	1	
	⋮	⋮	
	N	1	N
		$\sum$	$1+2+3+4+\cdots+N$

```
For i = 1 to N
      For j = 1 to i
            Writeln (i*j)
      Endfor
Endfor
```

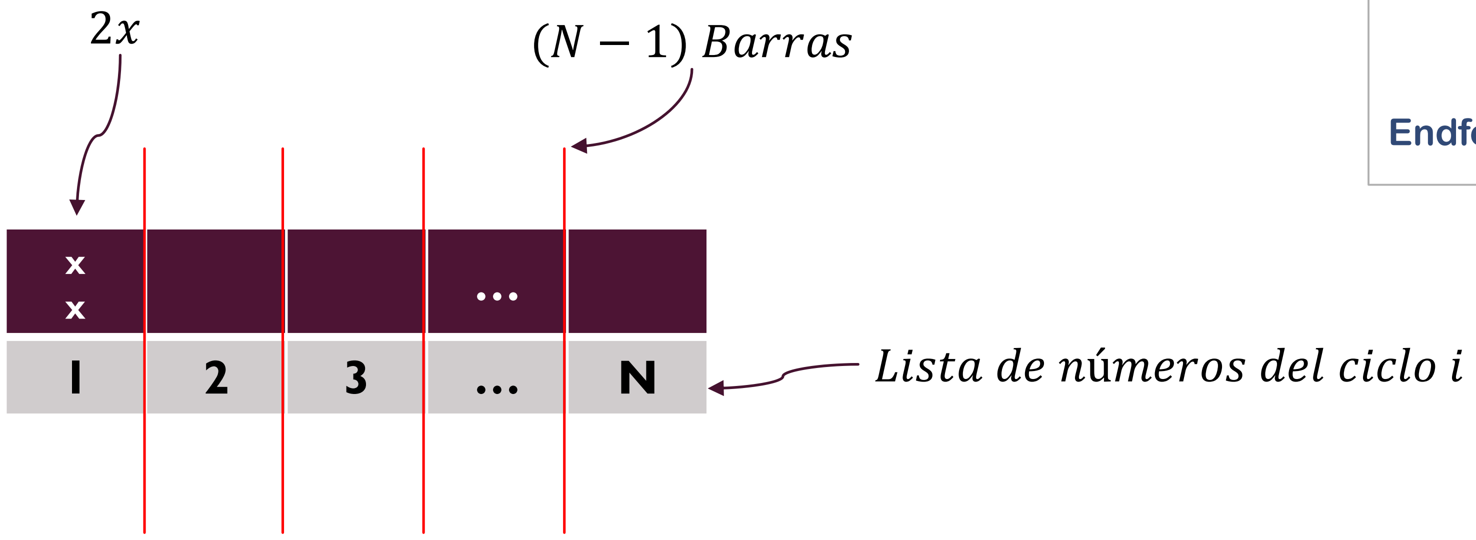
Número de ejecuciones de la instrucción Writeln

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + N} \quad [1]$$

2 Aplicando el modelo de conteo al algoritmo

```
For i = 1 to N
    For j = 1 to i
        Writeln (i*j)
    Endfor
Endfor
```

Número total de ciclos anidados



$$\#Ew = \frac{(N-1+2)!}{(N-1)! * 2!} = \frac{(N+1)!}{(N-1)! * 2} = \frac{(N+1) * N * \cancel{(N-1)!}}{\cancel{(N-1)!} * 2} = \boxed{\frac{N(N+1)}{2}} \quad [2]$$

$\boxed{3}$ Igualando ecuaciones [1] y [2]

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + N = \frac{N(N+1)}{2}} \qquad [3]$$

EJEMPLO 3

Dado el algoritmo:

```
For i = 1 to N
    For j = 1 to i
        For k = 1 to j
            Writeln (i*j)
        Endfor
    Endfor
Endfor
```

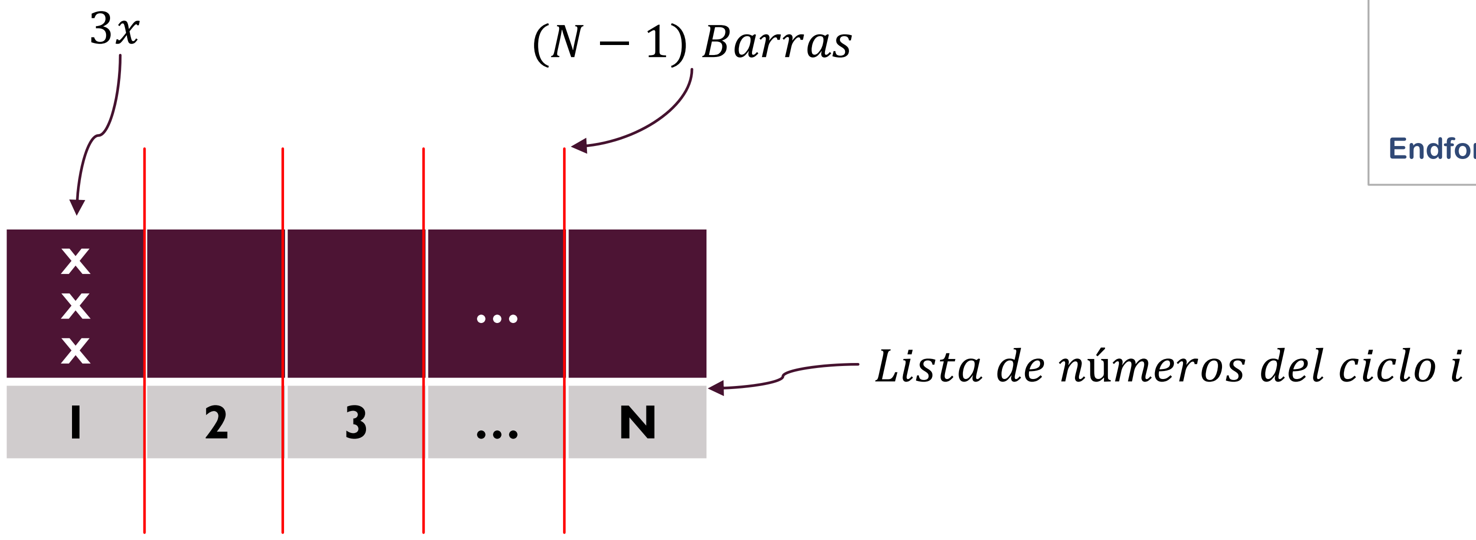
Determinar las veces que se ejecuta la instrucción Writeln de dos formas distintas.

I

Aplicando el modelo de conteo al algoritmo

```
For i = 1 to N
    For j = 1 to i
        For k = 1 to j
            Writeln (i*j)
        Endfor
    Endfor
Endfor
```

Número total de ciclos anidados



$$\#Ew = \frac{(N-1+3)!}{(N-1)!*3!} = \frac{(N+2)!}{(N-1)!*6} = \frac{(N+2)(N+1)*N*\cancel{(N-1)!}}{\cancel{(N-1)!}*6} = \boxed{\frac{N(N+1)(N+2)}{6}} \qquad [1]$$

2

Tabla de ejecuciones

i	j	k	Ejecuciones del Writeln	Sub total
1	1	1	1	1
2	1	1	1	
	2	1	1	
		2	1	1+2 = 3
3	1	1	1	
	2	1	1	
		2	1	
	3	1	1	
		2	1	
		3	1	1+2+3 = 6
⋮	⋮		⋮	⋮
N	1	1	1	
	⋮		⋮	
	N	1 a N	N	$1+2+3+4+\cdots+N$
			$\sum$	$\sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{m=1}^{k} m\right]$

```
For i = 1 to N
    For j = 1 to i
        For k = 1 to j
            Writeln (i*j)
        Endfor
    Endfor
Endfor
```

Número de ejecuciones de la instrucción Writeln

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{m=1}^{k} m\right]} \qquad [2]$$

3

Igualando ecuaciones [1] y [2]

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{m=1}^{k} m\right] = \frac{N(N+1)(N+2)}{6}} \qquad [3]$$

MUCHAS GRACIAS

ING. MARIO LÓPEZ