Clase Física Básica 03

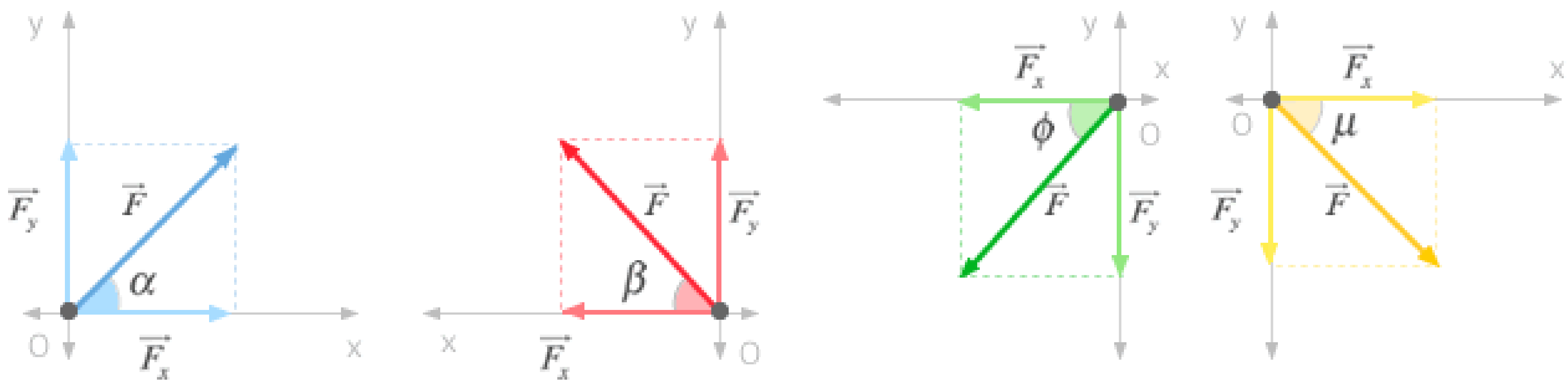
Operaciones vectoriales ejemplos

Producto Punto

Producto Cruz

Signos en el calculo de componentes

- Debido a que en el uso de la calculadora esta toma como referencia el eje “X” se debe de establecer signos a las componentes si el ángulo no parte de ese punto.



$$F_x = F \cdot \cos\alpha \qquad F_y = F \cdot \sin\alpha$$

$$F_x = -F \cdot \cos\beta \qquad F_y = F \cdot \sin\beta$$

$$F_x = -F \cdot \cos\phi \qquad F_y = -F \cdot \sin\phi$$

$$F_x = F \cdot \cos\mu \qquad F_y = -F \cdot \sin\mu$$

Vectores en Coordenadas Norte, Este , Oeste y Sur

Es simplemente una forma empleada para poder describir un vector pero basando todo en los puntos cardinales.

Nota: Para establecer las coordenas debe de recordar

Que un vector puede expresarse también en forma de

Enunciado con esto es mas fácil como aplicación

Ej: caminar 25m al norte

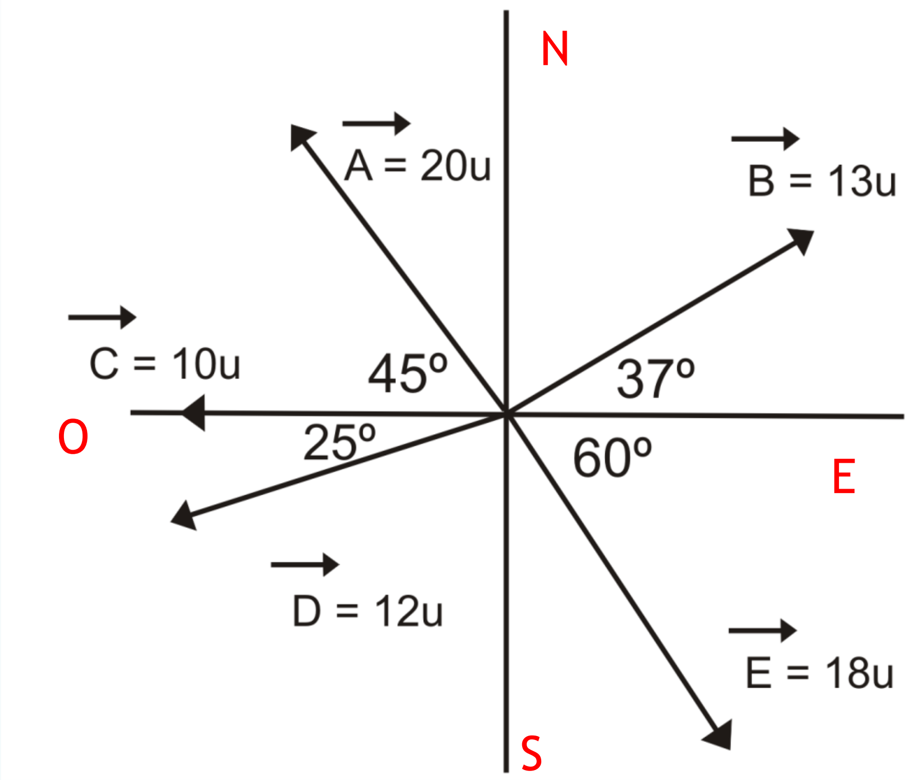
correr a 25 m/s al sureste

Desplazarse 100m al norte del este

Trotar 25m al oeste del sur

Ejemplos vectores por puntos cardinales

- Estime los vectores a continuación
- Vector A es de 20 u al noroeste
- Vector B es de 13u a 37° al norte del este
- Vector C es de 10u al oeste
- Vector D es de 12 u a 25° al sur del oeste
- Vector E es de 18u a 60° al sur del este



- Nota: Si se establecen las direcciones noroeste, Noreste, suroeste o sureste. Pero sin ángulo se Puede asumir que es de 45 °

Nota : En los términos al coordenada 1 del coordenada 2

Su forma de interpretar seria “se dirige el vector desde la coordenada 2 a la coordenada 1” para establecer la apertura del ángulo.

Ejemplos de cálculos con vectores

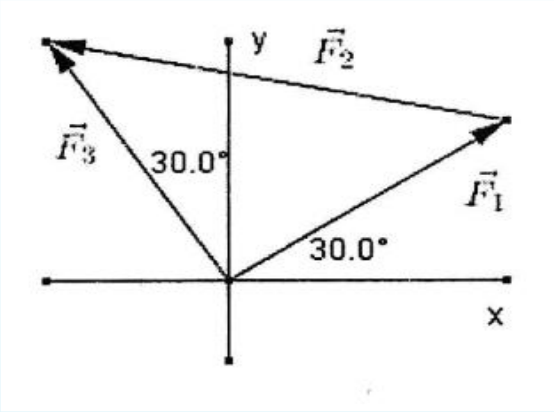
- **Ejercicio 1.**
- 1.1. Dados los siguientes datos $\vec{A} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$, $\vec{B} = 8\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$, determine la magnitud de $\vec{A} - 2\vec{B}$?:
- A) 21.5 B) 13.0 C) 15.5 D) 14.3 E) NEC
- 1.2. Con los datos del problema 1 determine la magnitud de un vector $\vec{C}$ tal que $\vec{A} + \vec{B} + 2\vec{C} = 0$?:
- A) 4.28 B) 6.26 C) 5.11 D) 2.31 E) NEC
- **Pregunta 1.1**
- $\boldsymbol{\vec{A} - 2\vec{B} = -13\hat{\imath} - 6\hat{\jmath}}$
- $\boldsymbol{|\vec{A} - 2\vec{B}| = \sqrt[2]{(-13)^2 + (-6)^2} = 14.31}$

X	Y
3	2
-16	-8
-13	-6

- **Pregunta 1.2**
- $\vec{A} + \vec{B} + 2\vec{C} = 0$ $\quad$ $\vec{A} + \vec{B} = -2\vec{C}$ $\quad$ $\frac{\vec{A}+\vec{B}}{-2} = \vec{C}$
- $\vec{C} = -\frac{11}{2}\hat{\imath} - \frac{6}{2}\hat{\jmath} = -\frac{11}{2}\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$
- $\boldsymbol{|\vec{C}| = \sqrt[2]{(-11/2)^2 + (-3)^2} = 6.26}$

X	Y
3	2
8	4
11	6

- **Ejercicio 2.** En la figura se observan tres vectores de fuerza. Los vectores $\overrightarrow{F_1}$ y $\overrightarrow{F_3}$
- tiene una magnitud 20.0 libras cada uno. Determine $\overrightarrow{F_2}$ en libras:



- $\overrightarrow{F_1} = 20\ cos30°\ \hat{\imath} + 20\ sen30°\hat{\jmath}$ $\quad$ $\overrightarrow{F_1} = (17.32\hat{\imath} + 10\hat{\jmath})lb$
- $\overrightarrow{F_3} = -20\ sen30°\ \hat{\imath} + 20\ cos30°\hat{\jmath}$ $\quad$ $\overrightarrow{F_3} = (-10\hat{\imath} + 17.32\hat{\jmath})lb$

- Para el calculo de $\overrightarrow{F_2}$ es necesario realizar una operación vectorial que es :
- Resta de vectores $\overrightarrow{\boldsymbol{F_2}}$= $\overrightarrow{\boldsymbol{F_3}}$ - $\overrightarrow{\boldsymbol{F_1}}$

X	Y
-10	17.32
-17.32	-10
-27.32	7.32

- $\overrightarrow{\boldsymbol{F_2}} = (-\boldsymbol{27.32\hat{\imath}} + \boldsymbol{7.32\hat{\jmath}})\boldsymbol{lb}$

- **Ejercicio 3.** Una persona realiza tres desplazamientos, primero 10.4m hacia el oeste, luego 5.67m a 55° al norte del oeste y finalmente 11.8m hacia el sur. Considere el eje "x" positivo hacia el este y el eje "y" positivo hacia el norte y determine el desplazamiento total de la persona.

- Resolución

- Trabajar por medio de componentes cada vector

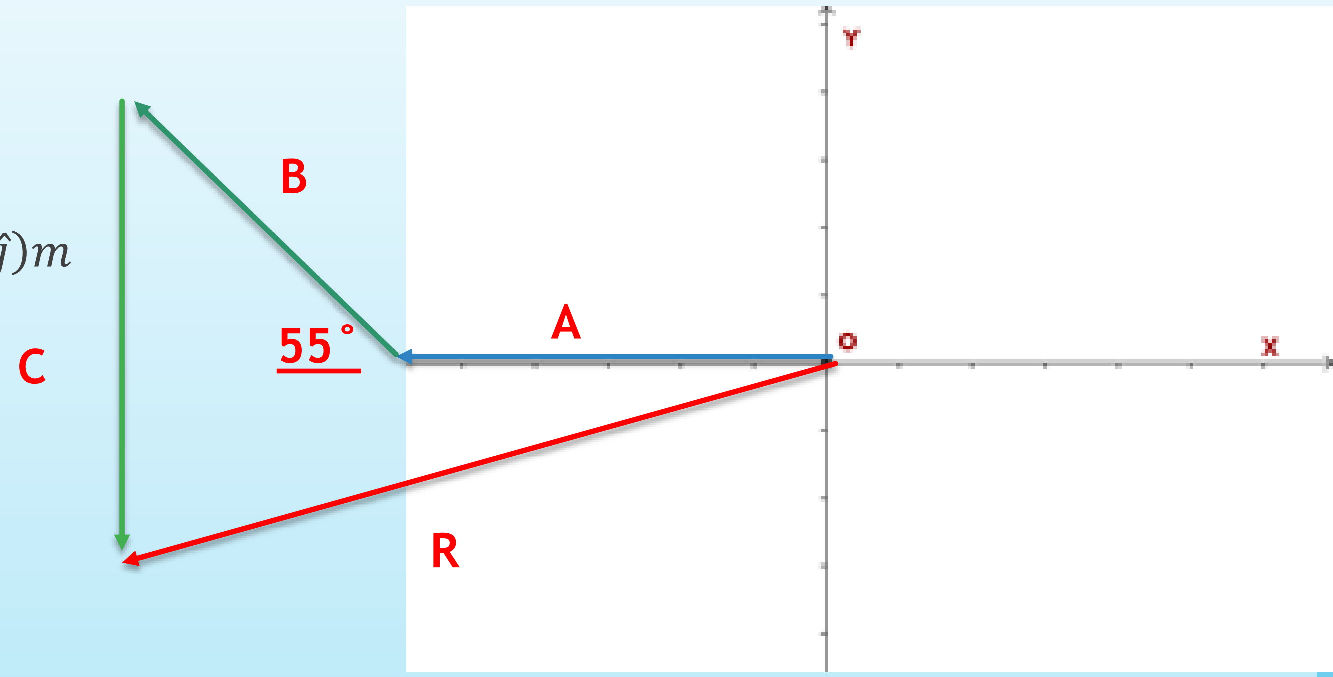
$\vec{B} = -5.67\ cos55°\ \hat{\imath} + 5.67\ sen55°\hat{\jmath}\ \ \vec{B} = (-3.25\hat{\imath} + 4.64\hat{\jmath})m$

$\vec{A} = (-10.4\hat{\imath})m$

$\vec{C} = (-11.8\hat{\jmath})m$

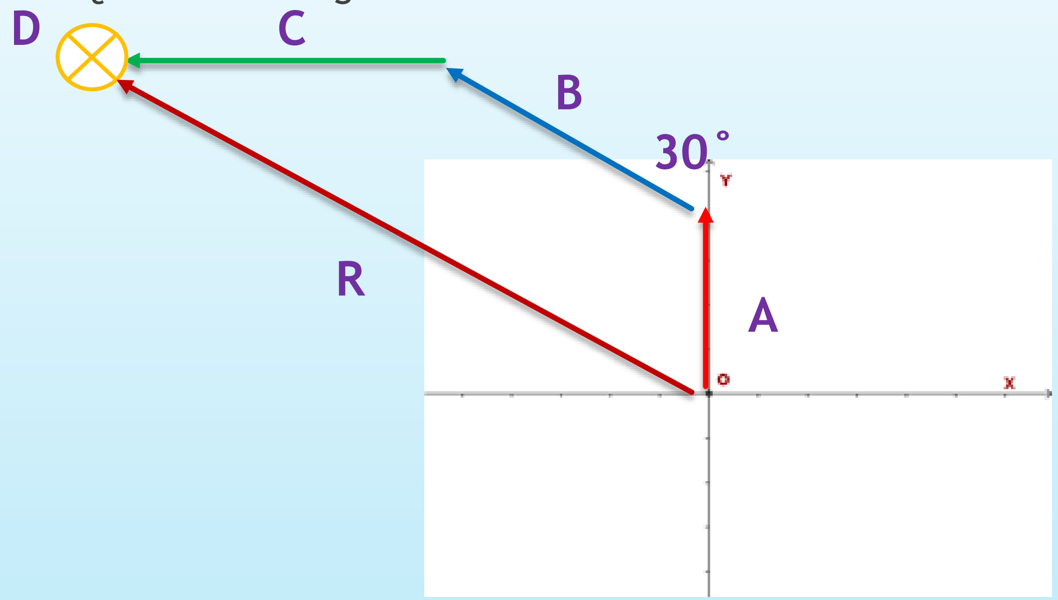
$\boldsymbol{\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}}$

- $\boldsymbol{\vec{R} = (-13.65\hat{\imath} - 7.16\hat{\jmath})m}$



X	Y
-10.4	0
0	-11.8
-3.25	+4.64
-13.65	-7.16

Ejercicio 4. La ubicación de un tesoro enterrado de acuerdo a un mapa, dice que éste se encuentra a 20 pasos al norte de un viejo roble y luego 30 pasos con un ángulo de $30°$ al oeste del norte en donde se encuentra con un poste de hierro. Después de encontrar un poste de hierro se debe caminar 12 pasos al oeste y posteriormente cavar hacia abajo 2 pasos a la caja del tesoro. Si usted se encuentra en el viejo roble y considerando que se mueve a $0.5m/s$ y que en cada paso recorre 0.75m y que cava a una rapidez de $0.5m/min$. Determine: ¿Cuál es el vector, expresado en m, que apunta de la base del viejo roble a la caja del tesoro? ¿Cuál es su magnitud?



Se trabajaran pasos para las componentes y el resultado

Final se va a convertir a m esto no es de importancia .

$\vec{B} = -30\ sen30°\ \hat{\imath} + 30\ cos30°\hat{\jmath}$ $\vec{B} = (-15\hat{\imath} + 25.98\hat{\jmath})pasos$

$\vec{C} = (-12\hat{\imath})pasos$

$\vec{A} = (+20\hat{\jmath})pasos$

$\vec{D} = (-2\hat{k})pasos$

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$

a)

$\vec{R} = (-27\hat{\imath} + 45.98\hat{\jmath} - 2\hat{k})pasos$

$\vec{R} = (-20.25\hat{\imath} + 34.48\hat{\jmath} - 1.5\hat{k})m$

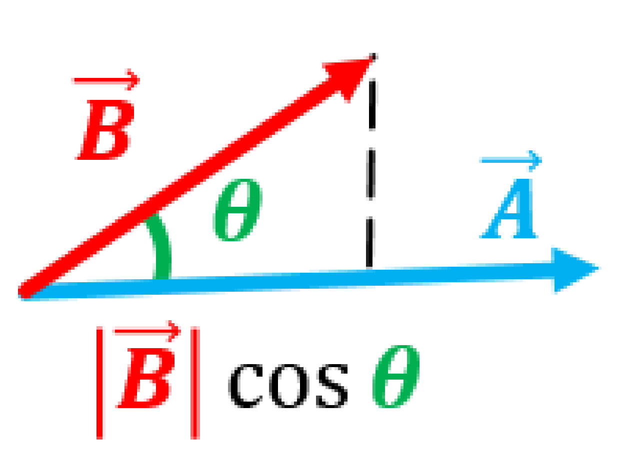
b) $|\vec{R}| = \sqrt[2]{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$

$|\vec{R}| = \sqrt[2]{(-20.25)^2 + 34.48^2 + (-1.5)^2} = 40.01m$

X	Y	Z
0	20	0
-15	25.98	0
-12	0	0
0	0	-2
-27	45.98	-2

Producto Punto(Producto escalar)

- El **producto escalar**, también conocido como **producto interno**, **producto interior** o **producto punto**, es una operación algebraica que toma dos secuencias de números de igual longitud (usualmente en la forma de vectores) y retorna un único número.
- Algebraicamente, el producto punto es la suma de los productos de las correspondientes entradas en dos secuencias de número. Geométricamente, es el producto de dos magnitudes euclidianas de los dos vectores y el coseno del ángulo entre ellos. El nombre del producto punto se deriva del símbolo que se utiliza para denotar esta operación (« • »).



- $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|cos\theta$
- $\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x, A_y, A_z) \cdot (B_x, B_y, B_z)$
- $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$
- **Ej: el trabajo** $W = \vec{F} \cdot \vec{S}$

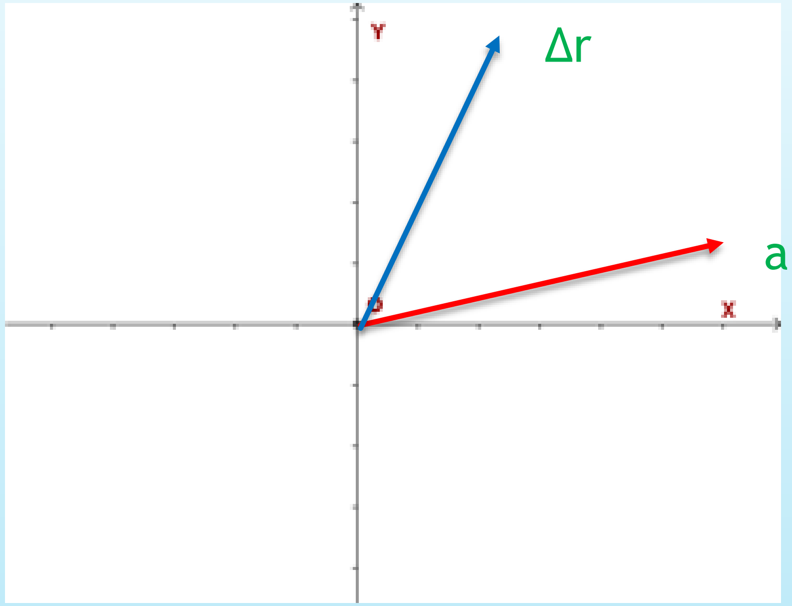
Ejercicio 5. La aceleración y desplazamiento de una partícula en el intervalo Δt son a(4.00m/s^2 , 30°) y Δr =(+6.928, +8.00) m

¿el valor de producto punto entre el valor de a y Δr en el sistema SI, es?

A) $24.0\hat{\imath} + 16.0\hat{\jmath}$ B) $16.0\hat{\imath} + 24.0\hat{\jmath}$ C) 42.3 D) 40.0 E) NEC

¿el ángulo en grados, entre la aceleración y el desplazamiento, es?

A) 20.1 B) 19.1 C) 18.1 D) 30.0 E) NEC



5.1

$\vec{a} = 4\,cos30°\,\hat{\imath} + 4\,sen30°\hat{\jmath}$ $\vec{a} = (3.46\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})\,{}^{m}/_{s^2}$

$\overrightarrow{\Delta r} = (+6.928\hat{\imath} + 8\hat{\jmath})m$

$\vec{a} \cdot \overrightarrow{\Delta r} = a_x\Delta r_x + a_y\Delta r_y + a_z\Delta r_z$

$\vec{a} \cdot \overrightarrow{\Delta r} = 3.46(6.928) + (2)(8) \approx 39.97\,{}^{m^2}/_{s^2} = 40\,{}^{m^2}/_{s^2}$

5.2 **se busca el ángulo entre los vectores no entre el vector y el plano**

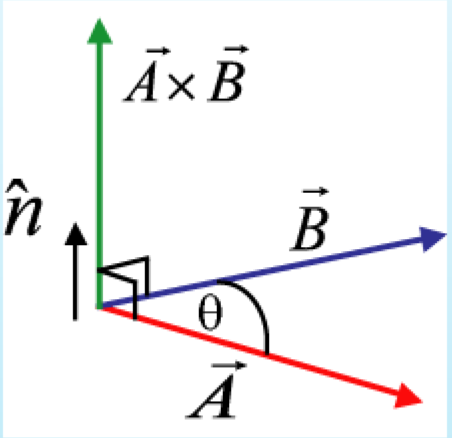
$|\overrightarrow{\Delta r}| = \sqrt[2]{6.928^2 + 8^2} = 10.58m$

$\vec{a} \cdot \overrightarrow{\Delta r} = |\vec{a}||\overrightarrow{\Delta r}|cos\theta$

$\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{\Delta r}}{|\vec{a}||\overrightarrow{\Delta r}|} = \cos^{-1}\frac{40}{4(10.58)} = 19.05°$

Producto Vectorial(Producto Cruz)

El producto vectorial de Gibbs o **producto cruz** es una operación binaria entre dos vectores en un espacio tridimensional. El resultado es un vector perpendicular a los vectores que se multiplican, y por lo tanto normal al plano que los contiene. Debido a su capacidad de obtener un vector perpendicular a otros dos vectores, cuyo sentido varía de acuerdo al ángulo formado entre estos dos vectores, esta operación es aplicada con frecuencia para resolver problemas matemáticos, físicos o de ingeniería.



$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

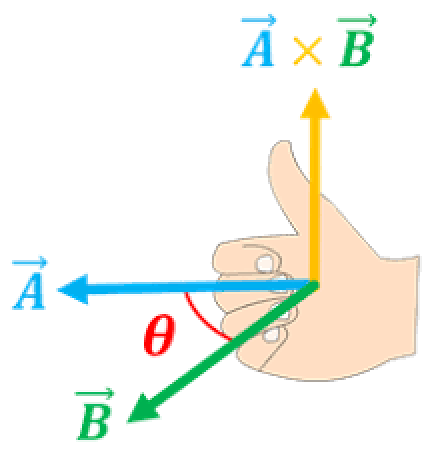
$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_yB_z - B_yA_z)\hat{i} - (A_xB_z - B_xA_z)\hat{j} + (A_xB_y - B_xA_y)\hat{k}$$

Tomando la magnitud del producto vectorial podemos encontrar el ángulo entre los vectores.

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = AB \operatorname{sen}\theta \qquad 0\le\theta\le\pi$$

$$\Rightarrow \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|}{AB}$$: ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

Regla de la mano derecha para dirección

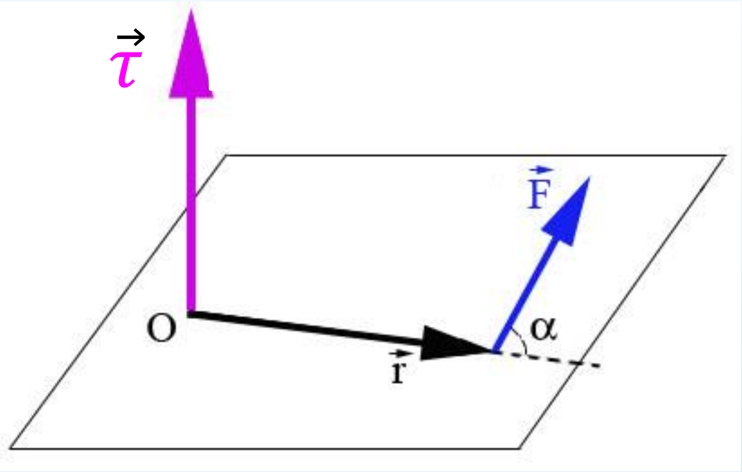


Ejemplo una partícula de masa de 0.5Kg de masa se encuentra en la posición r= (4,-5,-3)m y se le aplica una fuerza F= (-5,8,0)N determine el torque que produce la fuerza sobre el y el ángulo que se forma entre ellos.

Resolución: se determinara el torque que sufre la partícula por medio del calculo

De determinantes de la matriz y posteriormente con ese vector se calcula el ángulo

Entre los vectores.



$$|\vec{r}| = \sqrt[2]{4^2 + (-5)^2 + (-3)^2} = 7.071m$$

$$\left|\vec{F}\right| = \sqrt[2]{(-5)^2 + 8^2 + (0)^2} = 9.43N$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 4 & -5 & -3 \\ -5 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \big(-5(0) - (8)(-3)\big)\hat{\imath} - \big((4)(0) - (-5)(-3)\big)\hat{\jmath} + (4(8) - (-5)(-5))\hat{k}$$

$$\boldsymbol{\vec{\tau} = \left(+24\hat{\imath} + 15\hat{\jmath} + 7\hat{k}\right)N * m}$$

Para el calculo del ángulo se emplea el resultado del producto cruz

$$|\vec{\tau}| = \sqrt[2]{24^2 + 15^2 + 7^2} = 29.15\ N * m$$

Se emplea la formula de la magnitud del torque $|\vec{\tau}| = |\vec{r}|\left|\vec{F}\right| \sin\alpha$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{|\vec{\tau}|}{|\vec{r}|\left|\vec{F}\right|}\right) = \sin^{-1}\frac{29.15\ N * m}{(7.071m)(9.43N)} = 25.92°$$