Crecimiento exponencial

$$\frac{dP}{dt} \propto P$$

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

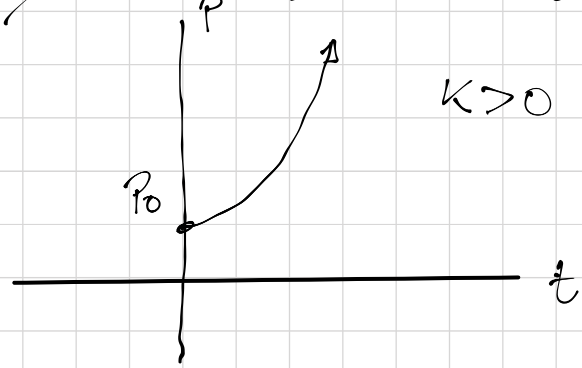
$$\int \frac{dP}{P} = \int k\,dt$$

$$e^{\ln P} = e^{kt+C} \to P = e^{kt+C} = e^{kt}\cdot \cancel{e^{C}}$$

$$\boxed{P = Ce^{kt}} \to P(0) = P_0$$

$$P_0 = Ce^{\cancel{k(0)}} \to C = P_0$$

$$\boxed{P = P_0e^{kt}}$$



$k > 0$

Ej. Se sabe que la población de una comunidad crece con una rapidez proporcional al número de personas presentes en el tiempo t. Si la población inicial P_0 se duplica en 5 años, en cuánto tiempo se triplicará la población?

t	P
0	P_0
5	$2P_0$
?	$3P_0$

$$P = P_0e^{kt}$$

$t = 5$ años $\quad P = 2P_0$

$$2\cancel{P_0} = \cancel{P_0}e^{k(5)} \to \ln 2 = \cancel{\ln} e^{5k}$$

$$5k = \ln 2 \to k = \frac{\ln 2}{5} = 0.13862$$

$$P = P_0e^{0.13862t}$$

$t = ?$ $\quad P = 3P_0$

$$3\cancel{P_0} = \cancel{P_0}e^{0.13862t}$$

$\ln 3 = \cancel{\ln e}^{0.13862t}$

$0.13862t = \ln 3 \rightarrow t = \dfrac{\ln 3}{0.13862} = 7.9253$ años

Ej. La población de un pueblo crece con una rapidez proporcional a la población en el tiempo t. La población inicial de 500 aumenta 15% en 10 años. ¿Cual será la población pasados 30 años? ¿Que tan rapido está creciendo la población en $t = 30$ años.

t	P
0	500 ✓
10	575 ✓
30	?

$P = P_0 e^{kt}$

$t = 0 \quad P = 500$

$500 = P_0 \cancel{e^{k(0)}}^{1} \rightarrow P_0 = 500$

$P = 500e^{kt}$

Para $t = 10 \quad P = 575$

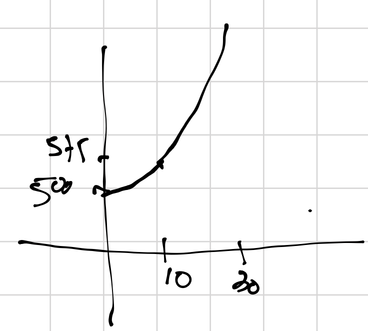
$575 = 500e^{k(10)} \rightarrow \ln \dfrac{575}{500} = \cancel{\ln e}^{10k}$

$10k = \ln {}^{575}/_{500} \rightarrow k = \dfrac{\ln {}^{575}/_{500}}{10} = \dfrac{0.13976}{10}$

$k = 0.013976 \rightarrow P = 500e^{0.013976t}$

$P = ?$ $\quad t = 30$ años

$P = 500e^{(0.013976)(30)} = 760.43$



¿Que tan rapido? $\quad t = 30$ años

$\dfrac{dP}{dt} = ?$ $\quad P = 500e^{0.013976t}$

$\dfrac{dP}{dt} = (500)(0.013976)e^{0.013976t}$

$\dfrac{dP}{dt} = (500)(0.013976)e^{0.013976(30)} = 10.62 \simeq 11$

Ej. La población de bacterias en un cultivo crece con una rapidez proporcional a la cantidad de bacterias presentes en el tiempo t. Después de 3 horas se observa que hay 400 bacterias presentes, Despues de 10 horas hay 2000 backrias presentes. ¿Cual era la cantidad inicial de bacterias?

t	P
0	P_0
3	400
10	2000

$$P = P_0 e^{kt}$$

Para $t = 3$ $\quad P = 400$

$$400 = P_0 e^{k(3)} \rightarrow P_0 = \frac{400}{e^{3k}} \quad (1)$$

Para $t = 10\ h$ $\quad P = 2000$

$$2000 = P_0 e^{10k} \rightarrow P_0 = \frac{2000}{e^{10k}} \quad (2)$$

$(1) = (2)$

$$P_0 = P_0$$

$$\frac{400}{e^{3k}} = \frac{2000}{e^{10k}}$$

$$\frac{e^{10k}}{e^{3k}} = \frac{20\cancel{00}}{4\cancel{00}} \rightarrow e^{10k} \cdot e^{-3k} = 5$$

$$\ln e^{7k} = \ln 5$$

$$7k = \ln 5$$

$$k = \ln 5 / 7 = 0.22991$$

$$P_0 = \frac{400}{e^{3(0.22991)}} = \frac{400}{e^{0.68973}} = 200.68 \simeq 201$$

Decaimiento exponencial

desintegración radiactiva

Isotopos $\rightarrow$ elementos químicos que se desintegran a medida que pasa el tiempo.

$$\frac{dN}{dt} \propto N \rightarrow \frac{dN}{dt} = kN$$

$$\int \frac{dN}{N} = \int K\,dt$$

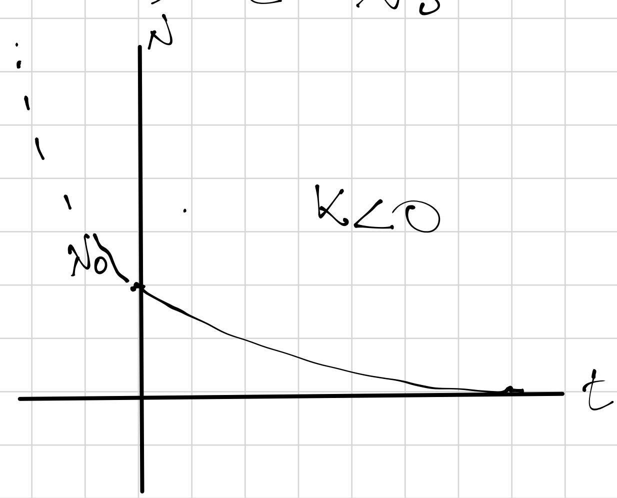
$$e^{\ln N} = e^{Kt + C}$$

$$N = e^{Kt+C} = e^{Kt} \cdot e^{C}$$

$$\boxed{N = Ce^{Kt}} \rightarrow \quad N(0) = N_0$$

$$N_0 = Ce^{K(0)} \rightarrow \quad C = N_0$$

$$\boxed{N = N_0 e^{Kt}}$$



tiempo de la vida media

tiempo necesario para que se desintegre la mitad de la cantidad inicial del isotopo

$t_0 \rightarrow \quad N_0$

$t_{vr} \Rightarrow \quad \frac{1}{2} N_0$

Ej El isotopo radiactivo del plomo Pb-209 decae con una razón proporcional a la cantidad presente en el tiempo t, y tiene una vida media de 3.3 horas. Si al principio había 1 gramo de plomo, ¿cuanto tiempo debe transcurrir para que decaiga el 90 %.

t	N gr	
→ 0	1 (N_0)	
3.3	0.5	$0.5N_0$
?	0.1	$0.1N_0$

$$\rightarrow N = N_0 e^{Kt}$$

$$\rightarrow N = 1e^{Kt}$$

$t = 3.3\ h \qquad N = 0.5$

$$\ln 0.5 = \ln 1e^{K(3.3)}$$

$$\ln 0.5 = 3.3k$$

$$k = \frac{\ln 0.5}{3.3} = -0.21004$$

$$N = e^{-0.21004t}$$

$t = ?$ $\quad N = 0.1$

$$\ln 0.1 = \cancel{\ln} e^{-0.21004t}$$

$$-0.21004t = \ln 0.1$$

$$t = \frac{\ln 0.1}{-0.21004} = 10.96 \text{ horas.}$$

Ej. El carbono obtenido de un antiguo craneo contiene solamente la sexta parte de carbono 14 respecto del carbono obtenido de un hueso actual. Si se sabe que la vida media del carbono 14 es de 5730 años, ¿que tan antiguo es el craneo?

t	N
0	N_0
5730	$\frac{1}{2}N_0$
$?$	$\frac{1}{6}N_0$

$$N = N_0 e^{kt}$$

Para $t = 5730$ $\quad N = \frac{1}{2}N_0$

$$\frac{1}{2}\cancel{N_0} = \cancel{N_0} e^{k(5730)}$$

$$\ln\frac{1}{2} = \cancel{\ln} e^{k(5730)}$$

$$5730k = \ln 1/2 \rightarrow k = \frac{\ln 1/2}{5730} = -1.20968\times10^{-4}$$

$$N = N_0 e^{-1.20968\times10^{-4}t}$$

$t = ?$ $\quad N = \frac{1}{6}N_0$

$$\ln \frac{1}{6}\cancel{N_0} = \cancel{N_0} \cancel{\ln} e^{-1.20968\times10^{-4}t}$$

$$-1.20968\times10^{-4}t = \ln 1/6 \rightarrow t = \frac{\ln 1/6}{-1.20968\times10^{-4}}$$

$t = 14811.85$ años

Ej. Suponga que el Pentabarbitol de sodio se usa para anesteciar a un perro. Éste queda anesteciado cuando su torrente sanguíneo, contiene al menos 45 miligramos de pentobarbitol de sodio por Kg de peso. Suponga también que esta sustancia se elimina exponencialmente del torrente sanguíneo del animal con una vida media de 5 horas. ¿ que dosis se le debe administrar a un perro de 50 kg de peso para anesteciarlo durante 1 hora.

$$50\,\cancel{Kg} * \frac{45\,mg}{\cancel{Kg}\ Peso} = 2{,}250 \to 1\ hora.$$

t	N
0	N_0
5	$\frac{1}{2}N_0$
1	2250

$$N = N_0 e^{kt}$$

$t = 5h \qquad N = \frac{1}{2}N_0$

$$\frac{1}{2}\cancel{N_0} = \cancel{N_0}e^{k(5)}$$

$$\ln\frac{1}{2} = \cancel{\ln} e^{5k} \to 5k = \ln 1/2$$

$$k = \ln 1/2 / 5 = -0.13862$$

$$N = N_0 e^{-0.13862t}$$

$t = 1 \qquad N = 2250$

$$2250 = N_0 e^{-0.1382(1)}$$

$$N_0 = \frac{2250}{e^{-0.1382}} = 2583.46$$

Ej. La vida media del cobalto radiactivo es de 5.27 años. Suponga que un accidente nuclear ha dejado en cierta región un nivel de radiación de cobalto de 100 veces por encima del nivel aceptable para ser habitada por seres humanos, ¿ Cuánto tiempo tendrá que pasar para que sea habitable nuevamente?

t	N
0	N_o
5.27	$\frac{1}{2}N_o$
$?$	$\frac{N_o}{100}$

apto para vivir

$N_o \longrightarrow 100 N_o = M$

t

$\frac{N_o}{100} = M$

$N = N_o e^{kt}$

Para $t = 5.27$ $\quad N = \frac{1}{2}N_o$

$\frac{1}{2}\cancel{N_o} = \cancel{N_o}e^{k(5.27)}$

$\ln\frac{1}{2} = \cancel{\ln e}^{5.27k}$

$5.27k = \ln 1/2$ $\qquad k = \frac{\ln 1/2}{5.27} = -0.13152$

$$\boxed{N = N_o e^{-0.13152t}}$$

$t = ?$ $\quad N = \frac{N_o}{100}$

$\ln\frac{\cancel{N_o}}{100} = \cancel{\ln}\,\cancel{N_o}\cancel{e}^{-0.13152t}$

$-0.1315t = \ln 1/100 \rightarrow t = \frac{\ln 1/100}{-0.13152}$

$t = 35.03$ años