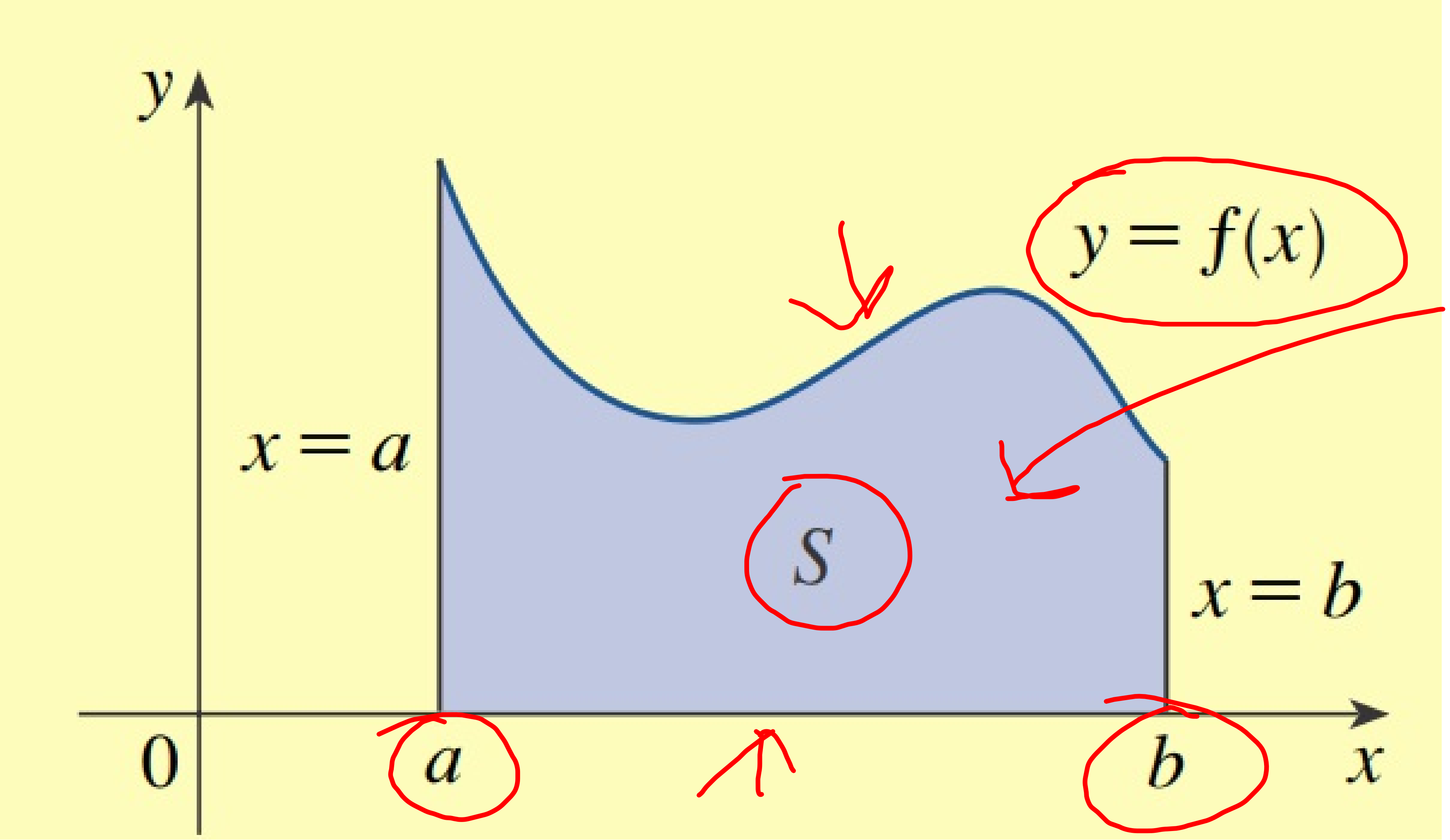
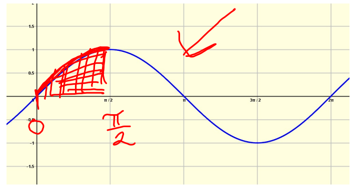
Integrales

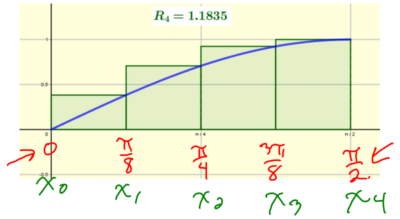
El problema del área



(a) Estime el área bajo la gráfica de $f(x) = \text{sen}\, x$ de $x = 0$ a $x = \pi/2$ usando cuatro rectángulos de aproximación y puntos finales derechos. Trace la gráfica y los rectángulos. ¿Su estimación es una sobrestimación o una subestimación?

(b) Repita el inciso (a), con los puntos finales izquierdos.





$\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$\Delta x = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{4} = \frac{\pi}{8}$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots$

$x_i = a + i\Delta x$

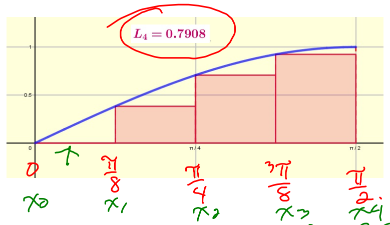
$R_4 = [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)]\Delta x$

$R_4 = [f(\frac{\pi}{8}) + f(\frac{\pi}{4}) + f(\frac{3\pi}{8}) + f(\frac{\pi}{2})]\frac{\pi}{8}$

$R_4 = [\text{SEN}(\frac{\pi}{8}) + \text{SEN}(\frac{\pi}{4}) + \text{SEN}(\frac{3\pi}{8}) + \text{SEN}(\frac{\pi}{2})]\frac{\pi}{8}$

$R_4 = 1.1835 \approx A, \quad A < R_4$

SOBRE



$L_4 = [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)]\Delta x$

$L_4 = [f(0) + f(\frac{\pi}{8}) + f(\frac{\pi}{4}) + f(\frac{3\pi}{8})]\frac{\pi}{8}$

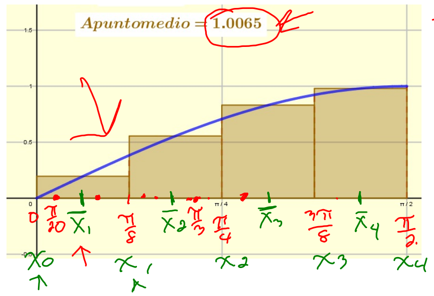
$L_4 = [\text{SEN}(0) + \text{SEN}(\frac{\pi}{8}) + \text{SEN}(\frac{\pi}{4}) + \text{SEN}(\frac{3\pi}{8})]\frac{\pi}{8}$

$L_4 = 0.7908 \qquad A > 0.7908$

SUB

$L_4 < X < R_4$

c) PUNTO MEDIO



$\bar{x}_1 = \frac{0 + \frac{\pi}{8}}{2} = \frac{\pi}{16}$

$\bar{x}_2 = \frac{\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{3\pi}{16}$

$\bar{x}_3 = \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{8}}{2} = \frac{5\pi}{16}$

$\bar{x}_4 = \frac{\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{7\pi}{16}$

Δx

$M_4 = [f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + f(\bar{x}_3) + f(\bar{x}_4)]\Delta x$

$M_4 = [\text{SEN}(\frac{\pi}{16}) + \text{SEN}(\frac{3\pi}{16}) + \text{SEN}(\frac{5\pi}{16}) + \text{SEN}(\frac{7\pi}{16})]\frac{\pi}{8} = 1.0065 \approx A$

En la tabla se proporcionan las lecturas del velocímetro de una motocicleta a intervalos de 12 segundos.

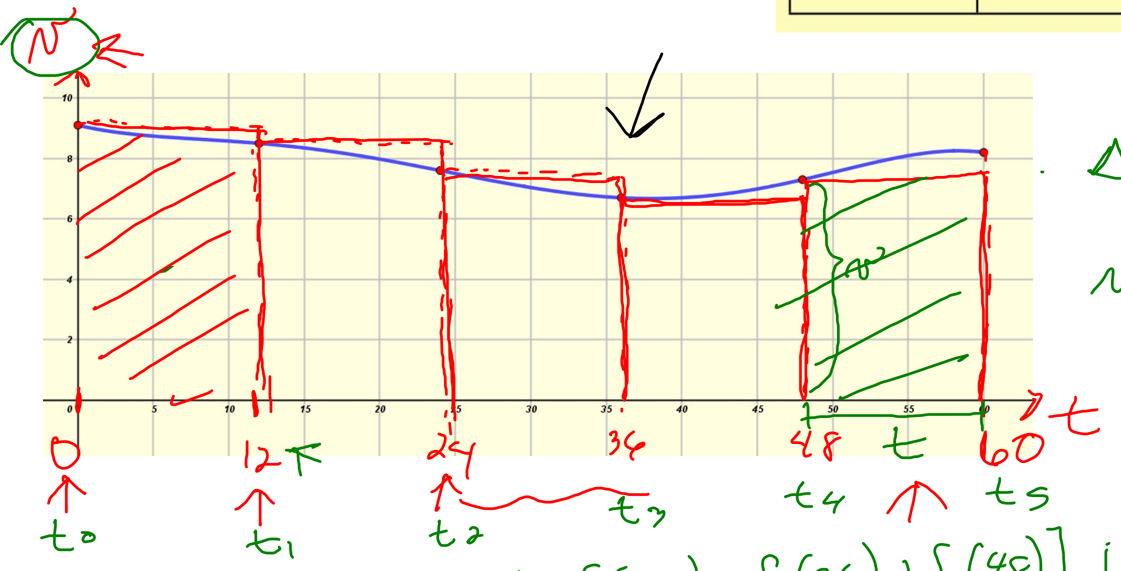
(a) Estime la distancia recorrida por la motocicleta durante este período usando las velocidades al principio de los intervalos.

(b) Dé otra estimación usando las velocidades al final de los períodos. RS TAREA

(c) ¿Sus estimaciones de los incisos (a) y (b) son estimaciones superiores e inferiores? Explique su respuesta.

Tiempo (s) (t)	Velocidad (m/s) (v)
0	9.1
12	8.5
24	7.6
36	6.7
48	7.3
60	8.2

12, Δx



$\Delta t = 12$

$v \cdot t = d$

$L_5 = [f(0) + f(12) + f(24) + f(36) + f(48)]\,12$

t_0, v, t_4, tiempo

$L_5 = [9.1 + 8.5 + 7.6 + 6.7 + 7.3]\,12$

$L_5 = 470.4\ \text{m}$. ESTIMACIÓN DISTANCIA RECORRIDA 0 a 60 seg.

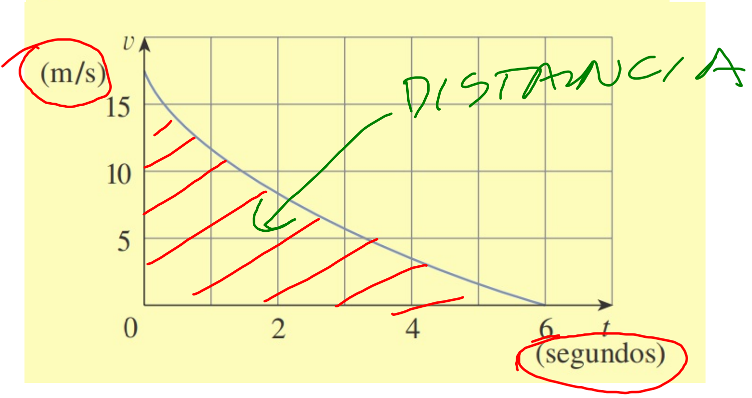
b) TAREA

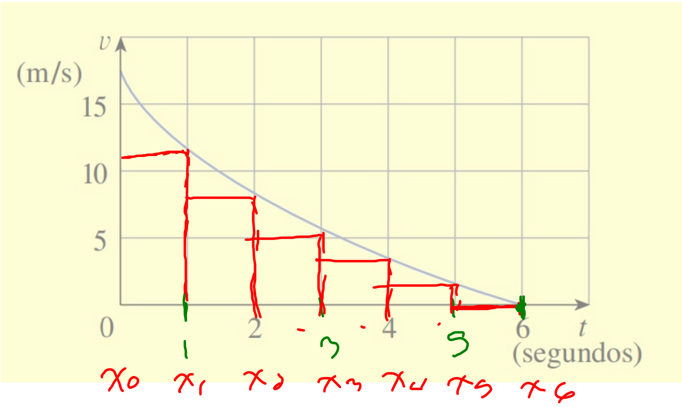
c) L_5, R_5, $\to L_5 < d < R_5$

$\to R_5 < d < L_5$

SUB SOBRE

Se muestra la gráfica de la velocidad de un automóvil al frenar. Úsela para estimar la distancia que recorre mientras se aplican los frenos.





$\Delta t = 1$

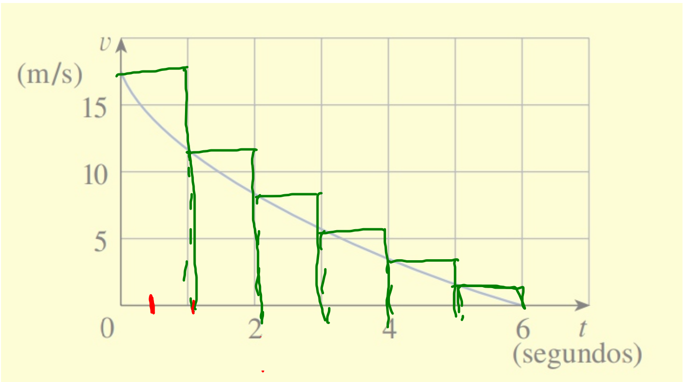
$n = 6$

$$R_6 = [\underbrace{f(1)}_{x_1} + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + \underbrace{f(6)}_{x_n}] \cdot 1$$

$$R_6 = [12 + 8 + 6 + 4 + 2 + 0] \cdot 1$$

$$\underbrace{R_6}_{\text{SUB}} = 32 \text{ m} \approx \text{DISTANCIA FRENADO}$$ //

R//

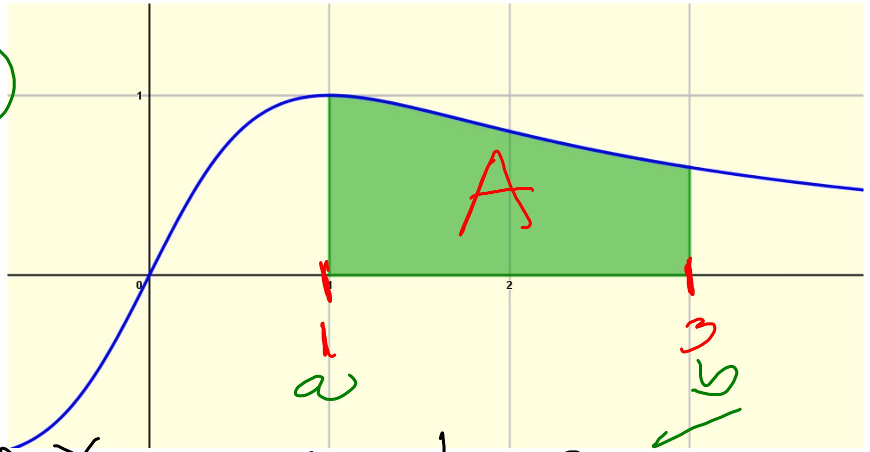


$\underbrace{L_6}_{\text{SOBRE}} = ?$

$$L_6 = [\underbrace{f(0)}_{x_0} + f(1) + f(2) + f(3)\ f(4) + \underbrace{f(x_5)}_{x_{n-1}}] \cdot 1$$

21–23 Utilice la definición 2 para encontrar una expresión para el área bajo la gráfica de f como un límite. No evalúe el límite.

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3$$



$$A = \lim_{n\to\infty} R_n$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x, \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$x_i = a + i\,\Delta x$$

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3$$

$$\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_i = 1 + i\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$x_i = 1 + \frac{2i}{n}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2x_i}{x_i^2+1}\right)\frac{2}{n}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2\left(1+\frac{2i}{n}\right)}{\left(1+\frac{2i}{n}\right)^2+1}\right)\frac{2}{n}$$

CALCULAR ÁREA POR DEFINICIÓN

(a) Exprese el área bajo la curva $y = x^5$ de 0 a 2 como un límite.

(b) Utilice un sistema algebraico computacional para encontrar la suma de su expresión del inciso (a).

(c) Evalúe el límite del inciso (a).

a) $f(x) = x^5$, $a = 0$, $b = 2$.

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_i = 0 + i\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$x_i = \frac{2i}{n}$$

$f(x_i) = x_i^5$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n}\right)^5 \cdot \frac{2}{n}$$

b) $$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n}\right)^5 \frac{2}{n} = \frac{16(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{3n^4}$$

c) $$A = \lim_{n\to\infty} \frac{16(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{3n^4} = \frac{32}{3}$$

$A = \frac{32}{3}$ (VALOR EXACTO)