1. Aplique La definición de la Transformada de Laplace para La siguiente Función por Partes:

Solución:

Formulando La Función por Partes: En El primer tramo tenemos que La función ES continua de (0,0) a (2,2), por lo tanto tenemos una recta a 45 grados $f(t)=t$; en el siguiente tramo de $2\le t\le 3$tenemos una recta horizontal de magnitud 1y en el último tramo de $3\le t\le\infty$ tenemos una recta horizontal de magnitud 3, Entonces la función por partes la podemos escribir como:

$$f(t)=\begin{cases} t & si \quad 0\le t<2 \\ 1 & si \quad 2\le t<3 \\ 3 & si \quad t\ge 3 \end{cases}$$

Aplicando la definición de la transformada tenemos:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}= \lim_{b\to\infty}\left[\int_0^2 e^{-st}\, t\,dt+\int_2^3 e^{-st}\,(1)dt+\int_3^b e^{-st}\,(3)dt\right]$$

- Primero Resolvemos la integral por partes $\int_0^2 e^{-st}\, t\,dt$, entonces tenemos:

$$u=t \;\; ; \; dv= e^{-st}dt \qquad du=dt \; ; \; v=-\frac{e^{-st}}{s} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \int_0^2 e^{-st}\, t\,dt=-\frac{e^{-st}\,t}{s}+\frac{1}{s}\int e^{-st}\,dt \\ \int_0^2 e^{-st}\, t\,dt=-\frac{e^{-st}\,t}{s}-\left.\frac{e^{-st}}{s^2}\right|_0^2 = \\ \int_0^2 e^{-st}\, t\,dt=-\frac{2e^{-2s}}{s}-\frac{e^{-2s}}{s^2}+\frac{1}{s^2} \end{cases}$$

- Ahora Resolvemos la integral $\int_2^3 e^{-st}\,dt$, entonces tenemos:

$$\int_2^3 e^{-st}\,dt=-\left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_2^3=-\frac{e^{-3s}}{s}+\frac{e^{-2s}}{s}$$

- Ahora Resolvemos la integral $\int_3^b e^{-st}\,3dt$, entonces tenemos:

$$\lim_{b\to\infty}\left[\int_3^b e^{-st}\,3dt\right]=\lim_{b\to\infty}\left[-\left.\frac{3e^{-st}}{s}\right|_3^b\right]=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{3}{se^{bs}}+\frac{3e^{-3s}}{s}\right]=\frac{3e^{-3s}}{s}$$

Entonces La solucion ES La suma de lãs soluciones de lãs 3 integrales:

$$F(S)=-\frac{2e^{-2s}}{s}-\frac{e^{-2s}}{s^2}+\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-3s}}{s}+\frac{e^{-2s}}{s}+\frac{3e^{-3s}}{s}$$

$$F(S)=-\frac{e^{-2s}}{s}-\frac{e^{-2s}}{s^2}+\frac{1}{s^2}+\frac{2e^{-3s}}{s}$$