$\boxed{1}$ **Definición intuitiva de un límite** Suponga que $f(x)$ está definida cuando x está cerca del número a. (Esto significa que f está definida en algún intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en a misma.) Entonces se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$y = f(x)$

$x \to a$

$f(x) \to L$

y se dice que "el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a, es igual a L"

si se puede hacer que los valores de $f(x)$ estén arbitrariamente cercanos a L (tan cercanos a L como se quiera), tomando valores de x suficientemente cerca de a (por ambos lados de a), pero no iguales a a.

2 **Definición de límites unilaterales** Cuando se escribe

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

$f(x) \to ?$

$x \to a^+, a^-$

se expresa que el **límite por la izquierda de $f(x)$ cuando x se aproxima a a** [o el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la izquierda**] es igual a L si se puede hacer que los valores de $f(x)$ se acerquen arbitrariamente a L, tanto como se quiera, tomando x suficientemente cercanos a a, pero *menores que a*.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{si y solo si} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

4 **Definición intuitiva de un límite infinito** Sea f una función definida por ambos lados de a, excepto posiblemente en la misma a. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

$x \to a$
$f(x) \to +\infty$

significa que los valores de $f(x)$ pueden hacerse arbitrariamente grandes (tan grandes como se quiera), tomando x suficientemente cerca de a, pero no igual a a.

5 **Definición** Sea f definida por ambos lados de a, excepto posiblemente en a misma. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

$x \to a$
$f(x) \to -\infty$

significa que los valores de $f(x)$ pueden ser negativos arbitrariamente grandes, tomando x suficientemente cerca de a, pero no igual a a.

$\boxed{6}$ **Definición** La recta $x = a$ se llama **asíntota vertical** de la curva $y = f(x)$ si al menos uno de los enunciados siguientes son verdaderos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

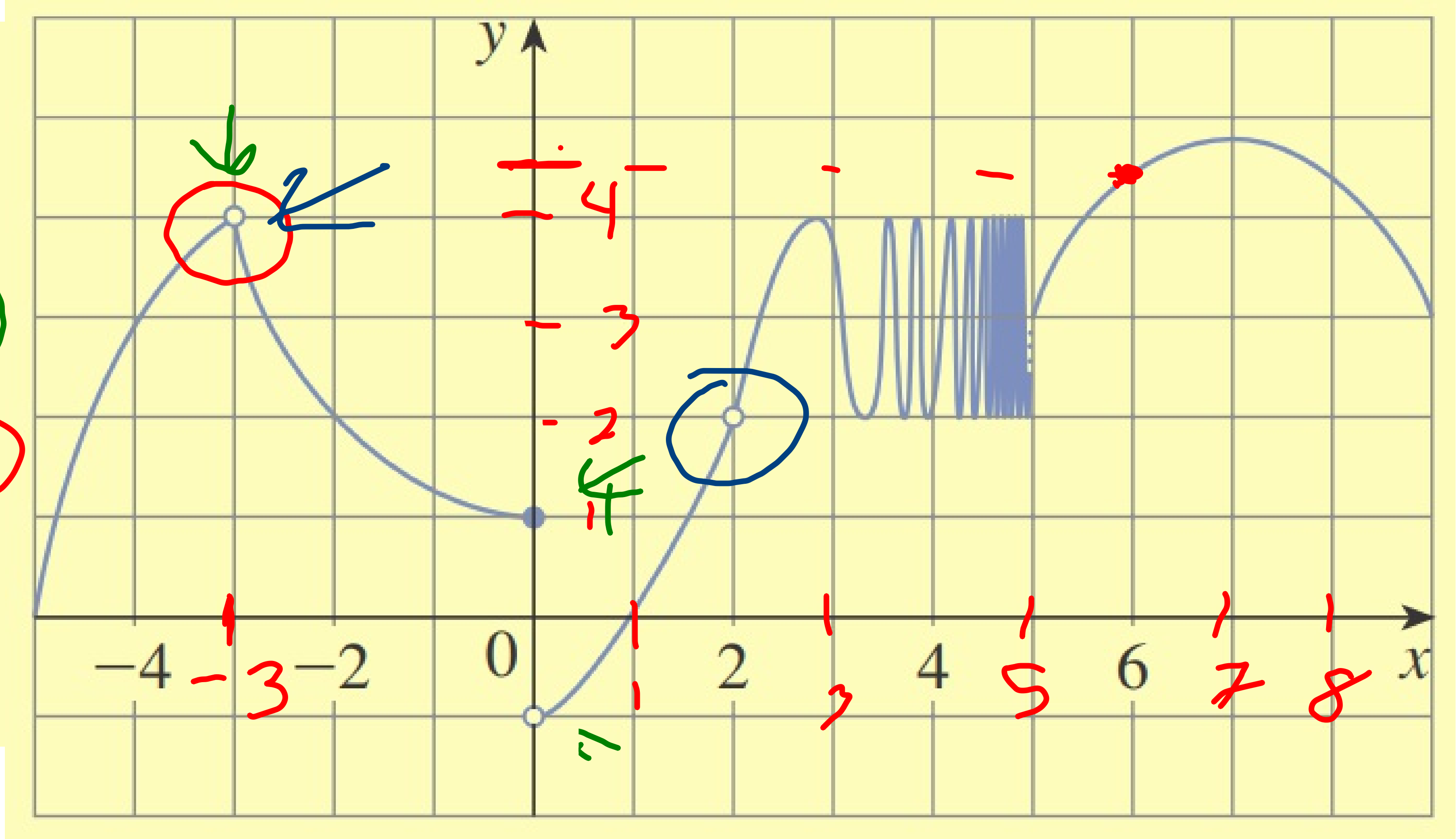
Para la función h cuya gráfica está dada, establezca el valor de cada una de las cantidades siguientes. Si no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{x \to -3^-} h(x)$ (b) $\lim_{x \to -3^+} h(x)$ (c) $\lim_{x \to -3} h(x)$

(d) $h(-3)$ (e) $\lim_{x \to 0^-} h(x)$ (f) $\lim_{x \to 0^+} h(x)$

(g) $\lim_{x \to 0} h(x)$ (h) $h(0)$ (i) $\lim_{x \to 2} h(x)$

(j) $h(2)$ (k) $\lim_{x \to 5^+} h(x)$ (l) $\lim_{x \to 5^-} h(x)$



a) 4 b) 4 c) 4

$h(-3)$ NO DEFINIDA

d) NO EXISTE e) 1

f) −1 g) NO EXISTE. h) $h(0) = 1$

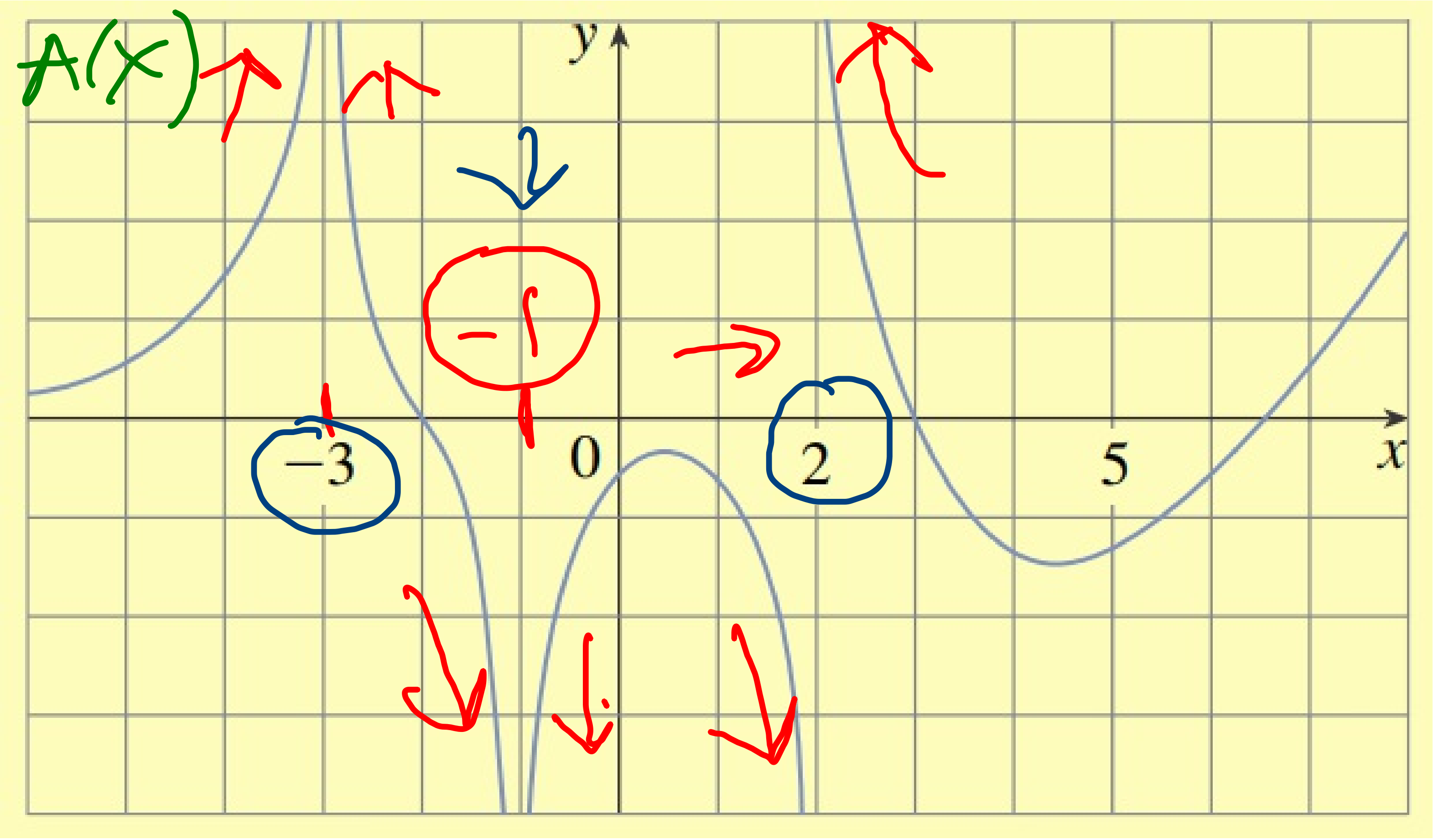
i) 2. j) NO EXISTE. k) 3 l) NO EXISTE

Para la función A cuya gráfica se muestra, establezca lo siguiente.

(a) $\lim_{x \to -3} A(x)$ (b) $\lim_{x \to 2^-} A(x)$

(c) $\lim_{x \to 2^+} A(x)$ (d) $\lim_{x \to -1} A(x)$

(e) Las ecuaciones de las asíntotas verticales.



a) $\lim_{x \to 3^+} = \infty$

$\lim_{x \to -3^-} = \infty$

∞

b) $-\infty$

c) $+\infty$

$\lim_{x \to 2}$ NO EXISTE.

d) $-\infty$

e) $x = -3, \quad x = -1$

$x = 2$

Las leyes de los límites

Leyes de los límites Suponga que c es una constante y que los límites

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x)$$

existen. Entonces

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

2. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

3. $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$

4. $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

5. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

Propiedad de sustitución directa Si f es una función polinomial o una función racional y a está en el dominio de f, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Evalúe

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^3-27}$$

¿SUSTITUCIÓN DIRECTA?

NO $x = 3$ NO PERTENECE AL DOMINIO

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$x^3 - 3^3 =$$

$x = a$

$3 = b$

· ALGEBRA

$$\lim_{x \to 3} \frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+3^2)}$$

$$x - 3 \neq 0$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{x^2+3x+9} = \frac{1}{9+9+9} = \frac{1}{27}$$

Evalúe

$$\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$$

• ALGEBRA

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(3+h)} - \frac{1}{3}}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{3-(3+h)}{3(3+h)}}{\frac{h}{1}}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{3-(3+h)}{h\,3(3+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{3}-\cancel{3}-\cancel{h}}{3\cancel{h}(3+h)}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-1}{3(3+h)} = -\frac{1}{9}$$

Sea $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}$.

(a) Encuentre

(i) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ (ii) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$

(b) ¿Existe $\lim_{x \to 2} g(x)$?

(c) Trace la gráfica de g.

i) $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 + x - 6}{|x-2|} = \lim_{x \to 2^+} \dfrac{\overbrace{x^2+x-6}^{(x+3)\cancel{(x-2)}}}{\cancel{x-2}} = 5$

$+$

ii) $\lim_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 + x - 6}{|x-2|} = \lim_{x \to 2^-} \dfrac{\overbrace{x^2+x-6}^{(x+3)\cancel{(x-2)}}}{-\cancel{(x-2)}} = -5$

$-$

iii) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2+x-6}{|x-2|}$ NO EXISTE

Encuentre el valor de k de tal manera que el límte tenga el valor indicado

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{kx+8}-2}{x}=\frac{1}{2}$$

$k = ?$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{kx+8}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt[3]{kx+8}+2}{\sqrt[3]{kx+8}+2}$$

NO

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a=\sqrt[3]{kx+8} \qquad b=2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{kx+8}-2}{x}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{kx+8}\right)^2+\sqrt[3]{kx+8}\cdot 2+2^2}{\left(\sqrt[3]{kx+8}\right)^2+\sqrt[3]{kx+8}\cdot 2+2^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{kx+8}\right)^3-2^3}{x\left(\left(\sqrt[3]{kx+8}\right)^2+2\sqrt[3]{kx+8}+4\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{kx+\cancel{8}-\cancel{8}}{x\left(\left(\sqrt[3]{kx+8}\right)^2+2\sqrt[3]{kx+8}+4\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{k}{\left(\sqrt[3]{kx+8}\right)^2+2\sqrt[3]{kx+8}+4}=\frac{k}{2^2+2\cdot 2+4}$$

$x=0$ $x=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{kx+8}-2}{x}=\boxed{\frac{k}{12}}=\boxed{\frac{1}{2}}\to k=\cancel{6}$$

Encuentre el valor de k de tal manera que el límte tenga el valor indicado

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 - \sqrt[3]{kx+8}}{x} = \frac{1}{3}$$

Resp. k=- 4

TAREA

Si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 5$ encuentre cada uno de los límites siguientes.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} \cdot x^2 = \underbrace{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2}} \cdot \underbrace{\lim\limits_{x\to 0} x^2}$

$5 \cdot 0 = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)\, x}{x \cdot x} = \underbrace{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2}}_{5} \cdot \underbrace{\lim\limits_{x\to 0} x}_{0} = 0$