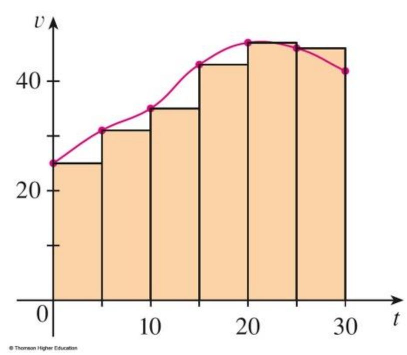
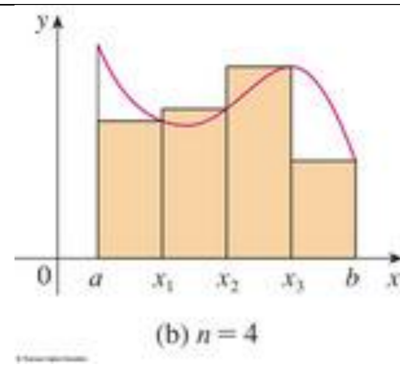
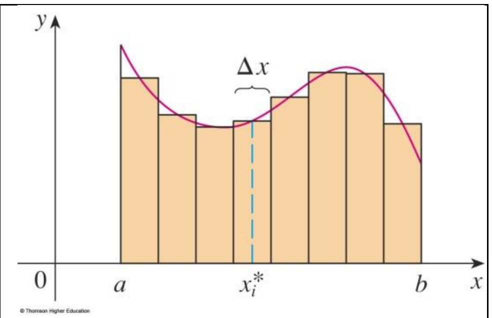
Area bajo curvas

Si una función $\boldsymbol{f}$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y la función es mayor o igual a cero en dicho intervalo. El área bajo la curva se puede aproximar utilizando la suma de Riemann

$$\boldsymbol{A} \approx \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{f(x_i)}\ \Delta x$$

Donde: $\boldsymbol{f(x_i)} = \boldsymbol{altura\ del\ rectángulo}$ $\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{ancho\ de\ la\ base\ del\ rectángulo}$

		
Punto muestra: E xtremo Izquierdo	Punto Muestra Extremo Derecho	Punto Muestra. Punto Medio

DEFINICIÓN

El área A de la región que se encuentra bajo la gráfica de la función continua $\boldsymbol{f}$ en el intervalo $[a, b]$ es el límite de las áreas de los rectángulos de aproximación.

$$\boldsymbol{A} = \lim_{\boldsymbol{n\to\infty}} \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{f(x_i)}\ \Delta \boldsymbol{x}$$

Donde $\Delta \boldsymbol{x} = \dfrac{\boldsymbol{b-a}}{\boldsymbol{n}}$ $\boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{i}\Delta \boldsymbol{x}$

Propiedades de las sumatorias

Si n es cualquier número entero positivo y c es una constante, entonces

1. $\sum_{i=1}^{n} cf(i) = c\sum_{i=1}^{n} f(i)$

2. $\sum_{i=1}^{n} [f(i) + g(i)] = \sum_{i=1}^{n} f(i) + \sum_{i=1}^{n} g(i)$

3. $\sum_{i=1}^{n} [f(i) - g(i)] = \sum_{i=1}^{n} f(i) - \sum_{i=1}^{n} g(i)$

4. $\sum_{i=1}^{n} [f(i) - f(i-1)] = f(n) - f(0)$

Fórmulas para calcular sumatorias

Si n es cualquier número entero positivo y c es una constante, entonces

1. $\sum_{i=1}^{n} c = cn$

2. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$

3. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$

4. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$

5. $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

<u>EJEMPLO 1</u>

Dada la función

$$f(x) = x^2 - x + 2$$

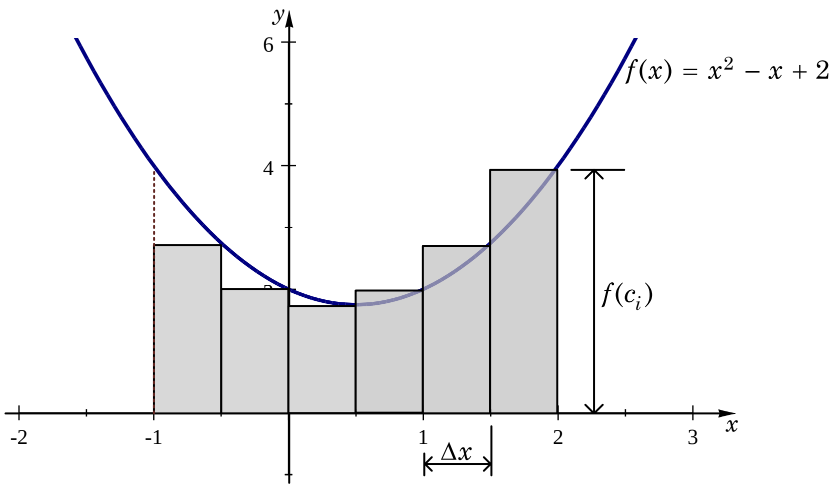
a. Aproxime el área bajo la curva en el intervalo $[-1,2]$, utilizando sumas de Riemann con $n = 6$ y el extremo derecho.

b. Aproxime el área bajo la curva en el intervalo $[-1,2]$, utilizando sumas de Riemann con $n = 6$ y el extremo izquierdo.

c. Utilice el límite de una suma de Riemann para calcular el valor exacto del área bajo la curva en el intervalo $[-1,2]$

Solución

a. La figura muestra la gráfica de le función, así como los 6 rectángulos, cada uno de ellos con altura en el extremo derecho de la función.



La suma de Riemann establece que

$$\boldsymbol{A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ \Delta x}$$

Para $n = 6$ la suma queda expresada como

$$\boldsymbol{A \approx \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\ \Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + f(x_3)\,\Delta x + f(x_4)\,\Delta x + f(x_5)\,\Delta x + f(x_6)\,\Delta x}$$

$$\boldsymbol{= \Delta x\ [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6)]}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-(-1)}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Cuando se utiliza el extremo derecho de cada rectángulo para calcular la altura, se tiene

$$\boldsymbol{x_i = a + i\Delta x = -1 + i\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + \frac{i}{2}}$$

Al sustituir $\boldsymbol{\Delta x}$**,** $\boldsymbol{x_i}$ y realizar los cálculos resultantes, se obtiene el valor aproximado del área bajo la curva usando extremo derecho con $n = 6$

$$\boldsymbol{A \approx \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\ \Delta x = \Delta x\ [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6)]}$$

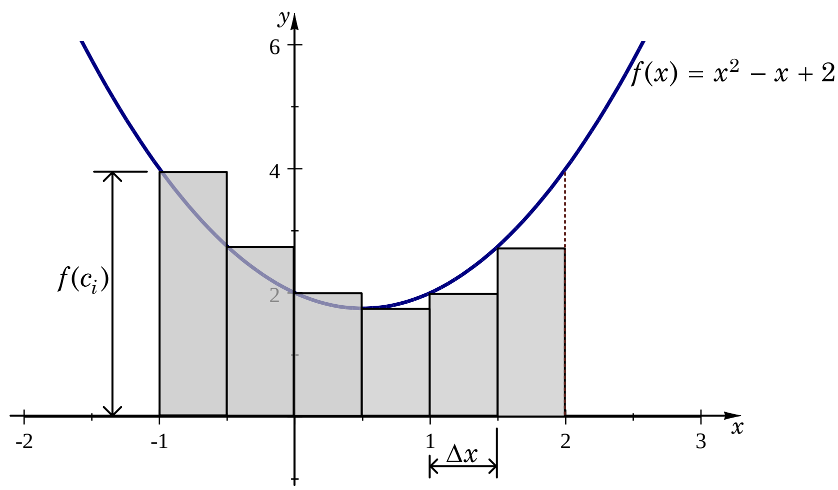
$$\boldsymbol{x_1 = -1 + -\frac{1}{2};\ \ x_2 = -1 + 2\left(\frac{1}{2}\right);\ \ x_3 = -1 + 3\left(\frac{1}{2}\right);\ \ x_4 = -1 + 4\left(\frac{1}{2}\right);\ x_5 = -1 + 5\left(\frac{1}{2}\right);\ x_6 = -1 + 6\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$A \approx \frac{1}{2}\left[f\left(-\frac{1}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2)\right]$$

$$A \approx \frac{1}{2}\left[\frac{11}{4} + 2 + \frac{7}{4} + 2 + \frac{11}{4} + 4\right]$$

$$A \approx \frac{1}{2}\left[\frac{61}{4}\right] = \frac{61}{8} \quad u^2$$

b. Al utilizar el extremo izquierdo, la diferencia es que la altura de cada rectángulo se calcula utilizando el lado izquierdo del mismo, como se muestra en la figura siguiente



$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-(-1)}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$x_i = a + (i-1)\Delta x = -1 + (i-1)\cdot\frac{1}{2}$$

Al sustituir Δx, x_i y realizar los cálculos resultantes, se obtiene el valor aproximado del área bajo la curva usando extremo izquierdo con $n = 6$

$$A \approx \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\,\Delta x = \Delta x\ [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6)]$$

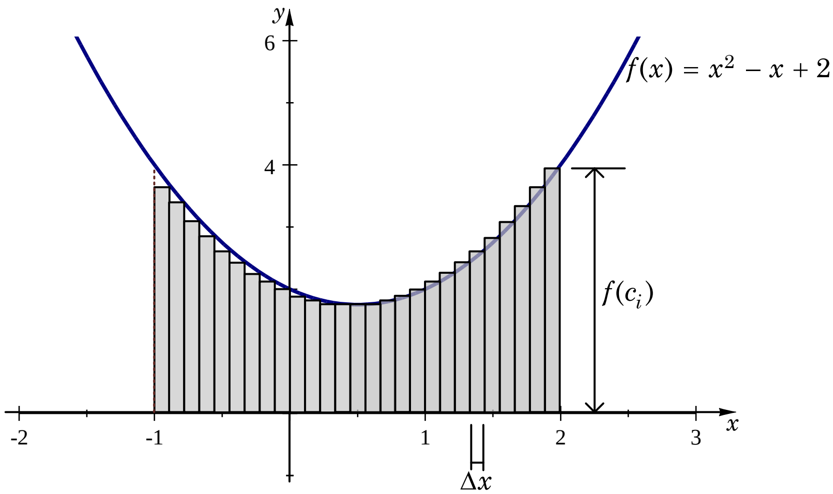
$x_1 = -1$; $x_2 = -1 + 1\left(\frac{1}{2}\right)$; $x_3 = -1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)$; $x_4 = -1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)$; $x_5 = -1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)$; $x_6 = -1 + 5\left(\frac{1}{2}\right)$

$$A \approx \frac{1}{2}\left[f(-1) + f\left(-\frac{1}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right)\right]$$

$$A \approx \frac{1}{2}\left[4 + \frac{11}{4} + 2 + \frac{7}{4} + 2 + \frac{11}{4}\right]$$

$$A \approx \frac{1}{2}\left[\frac{61}{4}\right] = \frac{61}{8} \quad u^2$$

c. Para calcular el valor exacto del área bajo la curva, utilizando límites y sumas de Riemann se recomienda utilizar extremo derecho para que los cálculos sean más simples. La figura siguiente muestra como el área se aproxima al área real al aumentar el número de rectángulos



En este caso el área exacta e

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\mathrm{x}_i)\Delta x$$

Donde

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-(-1)}{n} = \frac{3}{n}$$

$$\mathrm{x}_i = a + i\Delta x = -1 + i \cdot \frac{3}{n} = -1 + \frac{3}{n} i$$

Al sustituir en la expresión para el área se obtiene

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\mathrm{x}_i)\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(-1 + \frac{3}{n}\, i\right)\frac{3}{n}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(-1 + \frac{3}{n}\, i\right)^2 - \left(-1 + \frac{3}{n}\, i\right) + 2\right]\frac{3}{n}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[4 - \frac{9}{n}\, i + \frac{9}{n^2}\, i^2\right]\frac{3}{n}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{12}{n} - \frac{27}{n^2}\ i + \frac{27}{n^3}\ i^2 \right]$$

Ahora se utilizan las propiedades de las sumatorias

$$A = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{12}{n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{27}{n^2}\ i\ + \sum_{i=1}^{n} \frac{27}{n^3}\ i^2 \right)$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{12}{n} - \frac{27}{n^2} \sum_{i=1}^{n}\ i\ + \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^{n}\ i^2 \right)$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{12}{n}\ .n\ - \frac{27}{n^2} . \frac{n(n+1)}{2}\ + \frac{27}{n^3} . \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

Solo hace falta simplificar la expresión en términos de n y calcular el límite

$$A = \lim_{n\to\infty} \left(12\ - \frac{27(n+1)}{2n} + \frac{9(2n^2\ +\ 3n\ +1)}{2n^2} \right)$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \left(12 - \frac{27}{2} - \frac{27}{2n} + 9\ +\ \frac{27}{2n}\ +\ \frac{9}{2n^2} \right)$$

$$A = \left(12 - \frac{27}{2} - 0 + 9\ +\ 0\ +\ 0 \right)$$

$$A = \frac{15}{2} \quad \mathrm{u}^2$$

INTEGRAL DEFINIDA

Si $\boldsymbol{f}$ es una función definida en el intervalo cerrado $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$. Entonces la integral definida $\boldsymbol{f}$ de $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$, está dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ \Delta x$$

Donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ $\qquad x_i = a + i\Delta x$

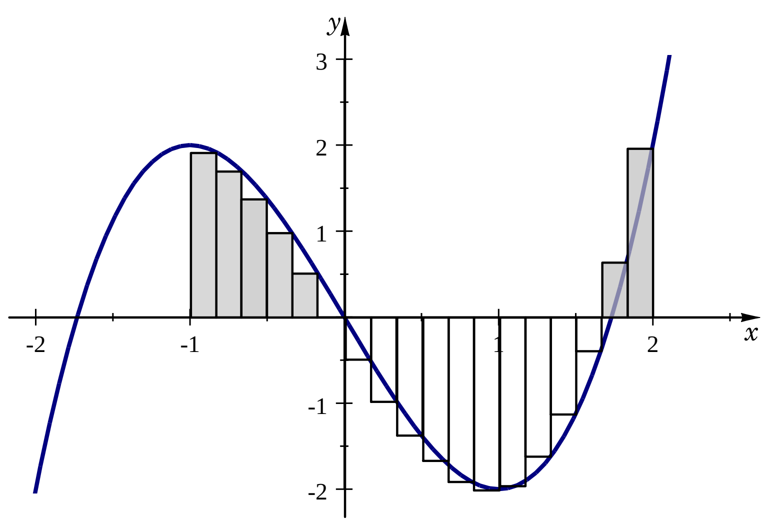
Ejemplo 2

Utilice la definición de integral definida para calcular la integral

$$\int_{-1}^{2}(x^3 - 2x)dx$$

Solución

a. La figura muestra la gráfica de le función. En el intervalo $[-1,2]$ se han dibujado en color gris los rectángulos cundo la función es positiva y en color blanco los rectángulos cuando la función es negativa.



Si la partición es regular, es decir que todos los rectángulos tienen el mismo ancho Δx. La integral anterior es equivalente a

$$\int_{-1}^{2}(x^3 - 2x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Donde

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-(-1)}{n} = \frac{3}{n} \qquad x_i = a + i\Delta x = -1 + i\cdot\frac{3}{n} = -1 + \frac{3}{n}i$$

Al sustituir en la expresión para calcular la integral se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2}(x^3-2x)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(-1+\frac{3}{n}i\right)\frac{3}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(-1+\frac{3}{n}i\right)^3-2\left(-1+\frac{3}{n}i\right)\right]\frac{3}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[-1+3\left(\frac{3}{n}i\right)-3\left(\frac{3}{n}i\right)^2+\left(\frac{3}{n}i\right)^3+2-2\left(\frac{3}{n}i\right)\right]\frac{3}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[-1+\frac{9}{n}i-\frac{27}{n^2}i^2+\frac{27}{n^3}i^3+2-\frac{6}{n}i\right]\frac{3}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{3}{n}+\frac{27}{n^2}i-\frac{81}{n^3}i^2+\frac{81}{n^4}i^3+\frac{6}{n}-\frac{18}{n^2}i\right) \\
& \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}i-\frac{81}{n^3}i^2+\frac{81}{n^4}i^3\right)
\end{aligned}$$

Ahora se utilizan las propiedades de las sumatorias

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2}(x^3-2x)dx &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{9}{n^2}i-\sum_{i=1}^{n}\frac{81}{n^3}i^2+\sum_{i=1}^{n}\frac{81}{n^4}i^3\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i-\frac{81}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{81}{n^4}\sum_{i=1}^{n}i^3\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\cdot n+\frac{9}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{81}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{81}{n^4}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right)
\end{aligned}$$

Solo hace falta simplificar la expresión en términos de n y calcular el límite

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2}(x^3-2x)dx &= \lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{9}{2n}\cdot(n+1)-\frac{27}{2n^2}\cdot(2n^2+3n+1)+\frac{81}{4n^2}\cdot(n^2+2n+1)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{9}{2}+\frac{9}{2n}-27-\frac{81}{2n}-\frac{27}{2n^2}+\frac{81}{4}+\frac{81}{2n}+\frac{81}{4n^2}\right) \\
&= 3+\frac{9}{2}-27+\frac{81}{4} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$