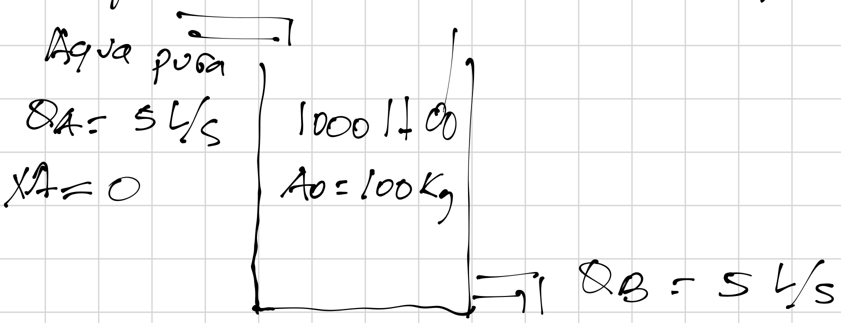
Ej. Un tanque contiene 1000 litros de una solución compuesta de 100 kg de sal disuelta en agua. Se bombea agua pura dentro del tanque a una razón de 5 L/s y la mezcla que se conserva uniforme por agitación, se bombea hacia afuera en la misma proporción ¿cuanto tiempo pasará para que queden solamente 10 kg de sal en el tanque?



$$X_B = \frac{A}{V_0} = \frac{A}{1000}$$

$$\frac{dA}{dt} = R_1 - R_2 = X_A Q_A - Q_B X_B$$

$$\frac{dA}{dt} = (0)(5) - 5\left(\frac{A}{1000}\right)_{200}$$

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{A}{200}$$

$$\int \frac{dA}{A} = -\int \frac{1}{200}\, dt$$

$$e^{\ln A} = e^{-\frac{1}{200}t + C} = e^{-1/200\, t} \cdot e^{C}$$

$$A = C e^{-1/200\, t}$$

$A(0) = 100$ kg.

$$100 = C e^{-1/200(0)} \rightarrow C = 100$$

$$\boxed{A = 100 e^{-1/200\, t}}$$

$$10 = 100 e^{-1/200\, t} \rightarrow \ln \frac{10}{100} = \ln e^{-1/200\, t}$$

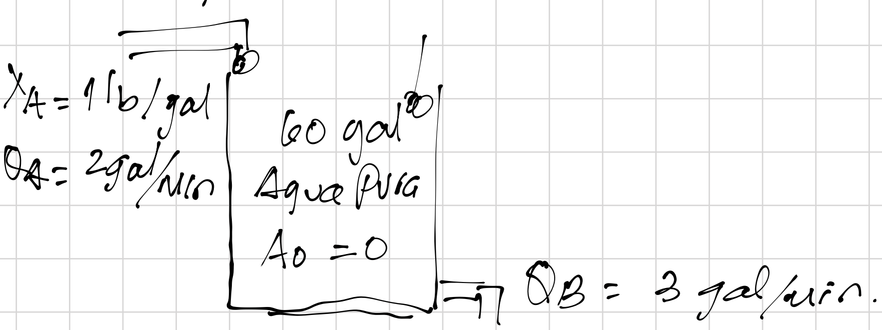
$$-\frac{1}{200} t = \ln \frac{10}{100}$$

$$t = (-200) \ln \left(\frac{10}{100}\right) = 460.51 \text{ segundos}$$

Ej. Un tanque contiene inicialmente 60 gal de agua pura. Salmuera, que contiene 1 lb de sal/gal entra al tanque a razón de 2 gal/min, la solución perfectamente mezclada sale del recipiente a razón de 3 gal/min; en estas condiciones el tanque se vacía exactamente después de 1 hora.

a) Encuentre la cantidad de sal en el tanque después de t minutos.

b) ¿Cuál es la máxima cantidad de sal dentro del tanque.



$$X_B = \frac{A}{V_0 + (Q_A - Q_B)t}$$

$$X_B = \frac{A}{60 + (2-3)t}$$

$$X_B = \frac{A}{60 - t}$$

$$\frac{dA}{dt} = R_1 - R_2 = X_A Q_A - X_B Q_B$$

$$\frac{dA}{dt} = (1)(2) - 3\left(\frac{A}{60-t}\right)$$

$$\frac{dA}{dt} + \frac{3A}{60-t} = 2$$

$$u = 60 - t$$
$$du = -dt$$

$$F.I. = e^{\int \frac{3}{60-t} dt} = e^{-3\int \frac{du}{u}} = e^{-3\ln u} = e^{\ln u^{-3}}$$

$$F.I. = u^{-3} = (60-t)^{-3}$$

$$\frac{d}{dt}\left[(60-t)^{-3} A\right] = 2(60-t)^{-3}$$

$$u = 60 - t$$
$$du = -dt$$

$$2\int u^{-3}(-dt)$$

$$\int d\left[(60-t)^{-3}A\right] = \int 2(60-t)^{-3}\,dt$$

$$(60-t)^{-3}A = (-2)\int u^{-3}\,du = -2\frac{u^{-2}}{-2} + c$$

$$(60-t)^{-3}A = (60-t)^{-2} + c \qquad (60-t)^{-2}(60-t)^{3}$$

$$A = \frac{(60-t)^{-2} + C}{(60-t)^{-3}} = \frac{(60-t)^{-2}}{(60-t)^{-3}} + \frac{C}{(60-t)^{-3}}$$

$$A(t) = (60-t) + C(60-t)^3$$

$A(0) = 0$

$$0 = (60-0) + C(60-0)^3$$

$$-60 = C\,60^3$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{-\cancel{60}}{60^{\cancel{3}}} = -\frac{1}{60^2} = \frac{-1}{3600}$$

a)
Sol.

$$A(t) = (60-t) - \frac{1}{3600}(60-t)^3$$

b) maxima cantidad de sal.

Puntos criticos

$A'(t) = 0$

$$-1 - \frac{1}{3600}\,3(60-t)^2(-1) = 0$$

$$\frac{\cancel{3}^{\,1}}{3600}(60-t)^2 = 1$$

1200

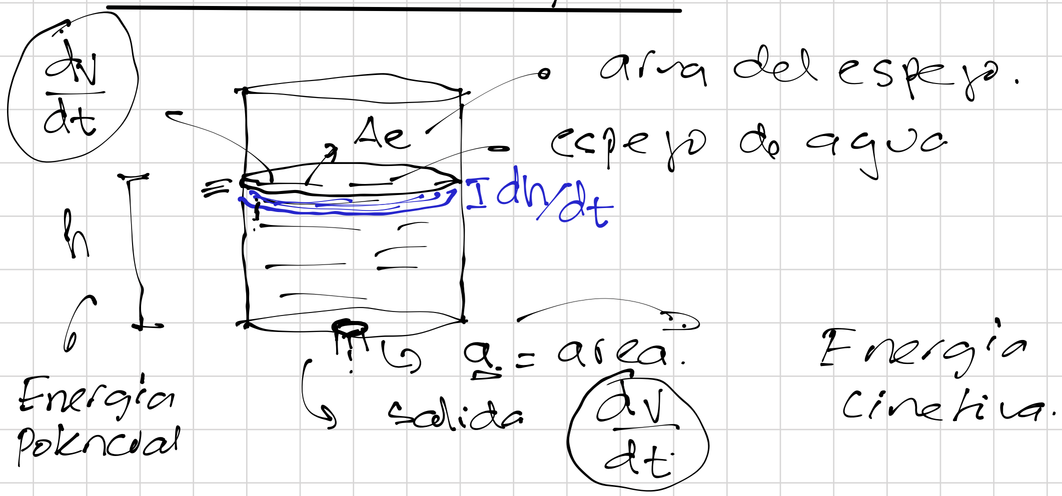
$$\sqrt{(60-t)^{\cancel{2}}} = \sqrt{1200}$$

$$60 - t = \sqrt{1200} \qquad t = 60 - \sqrt{1200}$$

$$t = 25.35$$

$$A(25.35) = (60-25.35) - \frac{1}{3600}(60-25.35)^3 =$$

Vaciado de Tanques



Conservación de la energía.

$$E_p - E_c = 0$$

$$mgh - \frac{1}{2}mv^2 = 0$$

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{2gh} \rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

$\Downarrow$

ley de toricelli

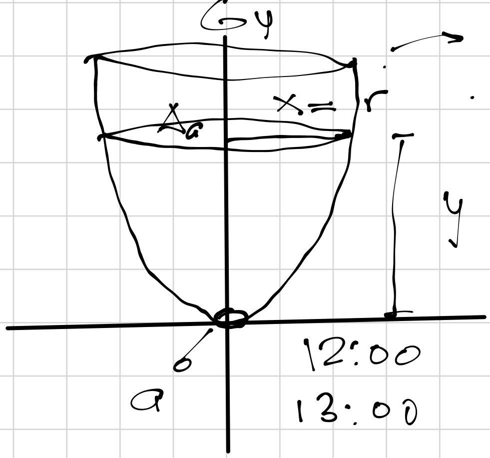
dentro tanque — salida tanque.

$$-\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dt}$$

$$-A_e\frac{dh}{dt} = av = a\sqrt{2gh}$$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = -\frac{a}{A_e}\sqrt{2gh}}$$

Ej. Un tanque de agua tiene la forma obtenida al girar la curva $y = x^{4/3}$ alrededor del eje y. Se quita el tapón del fondo a las 12 del día cuando la profundidad del agua en el tanque es de 12 pies. A la 1 P.M. la profundidad del agua es de 6 pies. ¿Cuándo estará vacío el tanque?.



$y = x^{4/3}$

12:00 $h = 12$ p.

13:00 $h = 6$ p

$A_e = \pi r^2 = \pi x^2$

$(y)^{3/2} = (x^{4/3})^{3/2}$

$y^{3/2} = x^2$

$A_e = \pi y^{3/2}$

$g = 32$ p/s^2

$\frac{dy}{dt} = -\frac{a}{A_e}\sqrt{2gy}$

$\frac{dy}{dt} = -\frac{a}{\pi y^{3/2}}\sqrt{2(32)y} = \frac{-8a}{\pi y^{3/2}}\sqrt{y}$

64 $\quad y^{1/2}$

$b = \frac{-8a}{\pi}$

$y^{3/2} \cdot y^{-1/2}$

$\frac{dy}{dt} = b\frac{y^{1/2}}{y^{3/2}}$

$\frac{y^{3/2}}{y^{1/2}}\,dy = b\,dt \rightarrow \int y\,dy = \int b\,dt$

$\frac{1}{2}y^2 = bt + C$

12:00 → $t = 0$ $\quad y = 12$ p

13:00 → $t = 1h$ $\quad y = 6$ p.

$\frac{1}{2}(12)^2 = b(0) + C \Rightarrow C = 72$

$\frac{1}{2}y^2 = bt + 72$

$t = 1h \quad h = 6$ p

$\frac{1}{2}(6)^2 = b(1) + 72 \rightarrow 18 = b + 72$

$b = 18 - 72 = -54$

$$\boxed{\frac{1}{2}y^2 = -54t + 72}$$

$t = ?$ $\qquad y = 0$

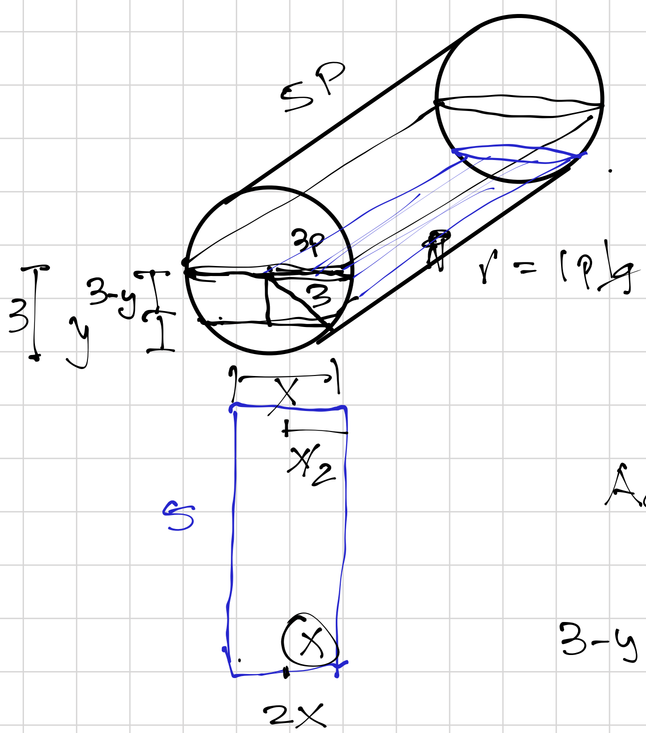
$$\frac{1}{2}(0)^2 = -54t + 72$$

$$54t = 72 \rightarrow t = \frac{72}{54} = 1.33 \text{ horas.}$$

$$0.33\,h * \frac{60\,min}{1h} = 19.8\ min.$$

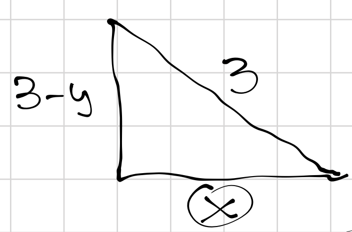
el tanque se vacia 13 horas con 19 minutos

Ej. Un tanque cilíndrico con longitud de 5 pies y radio de 3 pies se coloca sobre su eje horizontal. Si se abre un orificio circular en el fondo con un radio de 1 pulgada y el tanque esta inicialmente lleno hasta la mitad con xileno, ¿cuanto tiempo le tomará al liquido drenarse completamente.



$$r = 1plg. * \frac{1 pie}{12 plg} = \frac{1}{12} \text{ pie}$$

$$A_e = 5.(2x) = 10x$$



Por pit.

$$(3-y)^2 + x^2 = 9$$

$$(3-y)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 9$$

$$\cancel{9} - 6y + y^2 + x^2 = \cancel{9}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{6y - y^2} \rightarrow x = \sqrt{6y - y^2}$$

$$A_e = 10\sqrt{6y - y^2}$$

$$a = \pi r^2 = \pi\left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{\pi}{144}$$

$$\sqrt{2g\,y} = \sqrt{2(32)\,y}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\pi/144}{10\sqrt{6y-y^2}}\sqrt{\cancel{2(32)}^{\,64}\,y} = \frac{-8/144}{10\sqrt{6y-y^2}}\sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{180}\pi\,\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{6y-y^2}}$$

$$\int \frac{\sqrt{6y-y^2}}{\sqrt{y}}\,dy = \int -\frac{\pi}{180}\,dt$$

$$\int \sqrt{\frac{6y-y^2}{y}}\,dy = \int -\frac{\pi}{180}\,dt$$

$$u = 6 - y$$
$$du = -dy$$

$$\int \sqrt{6-y}\,dy = \int -\frac{\pi}{180}\,dt$$

$$-\int u^{1/2}\,du = \int -\frac{\pi}{180}\,dt$$

$$-\frac{u^{3/2}}{3/2} = -\frac{\pi}{180}t + C$$

$$-\frac{2}{3}(6-y)^{3/2} = -\frac{\pi}{180}t + C$$

$$y(0) = 3$$

$$-\frac{2}{3}(6-3)^{3/2} = -\frac{\pi}{180}(0) + C$$

$$C = -\frac{2}{3}(3)^{3/2}$$

$$\left[-\frac{2}{3}(6-y)^{3/2} = -\frac{\pi}{180}t - \frac{2}{3}(3)^{3/2}\right] * -1$$

$$\frac{2}{3}(6-y)^{3/2} = \frac{\pi}{180} t + \frac{2}{3}(3)^{3/2}$$

$t = ?$ $\quad y = 0$

$$\frac{2}{3}(6)^{3/2} = \frac{\pi}{180} t + \frac{2}{3}(3)^{3/2}$$

$$\frac{\pi}{180} t = \frac{2}{3}(6)^{3/2} - \frac{2}{3}(3)^{3/2}$$

$$t = \frac{180}{\pi}\left[\frac{2}{3}(6)^{3/2} - \frac{2}{3}(3)^{3/2}\right] =$$