TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

El teorema fundamental del cálculo relaciona el cálculo diferencial con el cálculo integral. Este teorema consta de dos partes

Teorema Fundamental del Cálculo Parte 1:

Si $\boldsymbol{f}$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la función $\boldsymbol{g}$ definida por

$$\boldsymbol{g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad\qquad a \leq x \leq b}$$

Es continua en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ y derivable en $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, y $\boldsymbol{g'(x) = f(x)}$

Es decir,

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)}$$

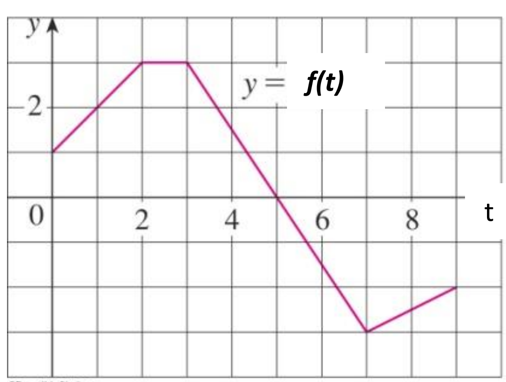
La parte 1 del teorema fundamental es válida solamente si el límite inferior es una constante y el límite superior es $\boldsymbol{x}$. En cualquier otro caso será necesario realizar una sustitución y utilizar la regla de la cadena.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\boldsymbol{g(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$**,** donde $\boldsymbol{f}$ es la función cuya gráfica se muestra.

a. Evalúe $\boldsymbol{g(0), g(2), g(3), g(5), g(7), g(9)}$
b. ¿En qué intervalo $\boldsymbol{g}$ es creciente?
c. ¿Dónde $\boldsymbol{g}$ tiene un valor máximo?



$$\boldsymbol{g(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0}$$

$$\boldsymbol{g(2) = \int_0^2 f(t)\,dt \; = \frac{(1+3)}{2}(2) = 4}$$

$$\boldsymbol{g(3) = \int_0^3 f(t)\,dt \; = \int_0^2 f(t)\,dt + \int_2^3 f(t)\,dt = 4 + (1)(3) = 7}$$

$$\boldsymbol{g(5) = \int_0^5 f(t)\,dt \; = \int_0^2 f(t)\,dt + \int_2^3 f(t)\,dt + \int_3^5 f(t)\,dt}$$

$$\boldsymbol{g(5) = \int_0^5 f(t)\,dt \; = \frac{(1+3)}{2}(2) + (1)(3) + \frac{1}{2}(2)(3) = 10}$$

$$\boldsymbol{g(7) = \int_0^7 f(t)\,dt \; = \int_0^2 f(t)\,dt + \int_2^3 f(t)\,dt + \int_3^5 f(t)\,dt + \int_5^7 f(t)\,dt}$$

$$\boldsymbol{g(7) = \int_0^7 f(t)\,dt \; = \frac{(1+3)}{2}(2) + (1)(3) + \frac{1}{2}(2)(3) - \frac{1}{2}(2)(3) = 7}$$

$$\boldsymbol{g(9) = \int_0^9 \mathrm{f(t)\,dt} \; = \frac{(1+3)}{2}(2) + (1)(3) + \frac{1}{2}(2)(3) - \frac{1}{2}(2)(3) - \frac{1}{2}(2)(1) - (2)(2) = 2}$$

b. Intervalos donde ***g*** es creciente: ***(0, 5)***

c. ***g*** tiene un máximo en ***t=5***. ***g(5)=10***

d. Para hacer la gráfica colocar los puntos calculados
$\boldsymbol{g(0), g(2), g(3), g(5), g(7), g(9)}$ en el inciso **(a).**

Ejemplo 2

Utilice la parte 1 del teorema fundamental del cálculo para calcular

a. $\frac{d}{dx}\left[\int_1^x \left(\sqrt{t^2+4}\right) dt\right]$ **b.** $\frac{d}{dx}\left[\int_3^{ln\,x} \left(\sqrt{t^2+4}\right) dt\right]$

c. $\frac{d}{dx}\left[\int_{3x+1}^{cos\,x} sen^{-1}\, t\, dt\right]$

Solución

a. Calcule

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x \left(\sqrt{t^2+4}\right) dt\right]$$

Como el límite inferior es una constante y el límite superior es x, se aplica directamente la parte 2 del teorema fundamental del cálculo

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x \left(\sqrt{t^2+4}\right) dt\right] = \sqrt{x^2+4}$$

b. Calcule

$$\frac{d}{dx}\left[\int_3^{ln\,x} \left(\sqrt{t^2+4}\right) dt\right]$$

Como el límite superior es una función, es necesario utilizar la regla de la cadena para calcular la derivada. La regla de la cadena en su forma diferencial es la siguiente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Haciendo la sustitución

$$u = ln\,x$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

Al aplicar la regla de la cadena en este problema se tiene

$$\frac{d}{dx}\left[\int_3^{ln\,x} \left(\sqrt{t^2+4}\right) dt\right] = \frac{d}{du}\left[\int_3^{u} \left(\sqrt{t^2+4}\right) dt\right] \cdot \frac{du}{dx}$$

Ahora la integral tiene como límite superior a la variable u y satisface las condiciones del teorema

$$\frac{d}{dx}\left[\int_3^{ln\,x} \left(\sqrt{t^2+4}\right) dt\right] = \sqrt{u^2+4} \cdot \frac{du}{dx}$$

La respuesta se debe expresar en términos de x

$$\frac{d}{dx}\left[\int_3^{ln\,x} \left(\sqrt{t^2+4}\right) dt\right] = \sqrt{(ln\,x)^2+4} \cdot \frac{1}{x}$$

c. Calcule

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{3x+1}^{\cos x} sen^{-1}\, t\, dt\right]$$

Observe que el límite inferior y el límite superior son funciones, para utilizar el teorema fundamental, es necesario dividir la integral en dos integrales

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{3x+1}^{\cos x} sen^{-1}\, t\, dt\right] = \frac{d}{dx}\left[\int_{3x+1}^{0} sen^{-1}\, t\, dt + \int_{0}^{\cos x} sen^{-1}\, t\, dt\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\int_{3x+1}^{0} sen^{-1}\, t\, dt\right] + \frac{d}{dx}\left[\int_{0}^{\cos x} sen^{-1}\, t\, dt\right]$$

Cada una de las derivadas se calcula por separado.

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{3x+1}^{0} sen^{-1}\, t\, dt\right] = \frac{d}{dx}\left[-\int_{0}^{3x+1} sen^{-1}\, t\, dt\right]$$

$$= -sen^{-1}(3x+1)\,.\frac{d}{dx}(3x+1)$$

$$= -sen^{-1}(3x+1)\;(3) = -3\, sen^{-1}(3x+1)$$

En la segunda integral se procede de forma similar

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{0}^{\cos x} sen^{-1}\, t\, dt\right] = sen^{-1}(\cos x)\,.\frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= sen^{-1}(\cos x)\,.(-sen\, x)$$

$$= -sen\, x.\, sen^{-1}(\cos x)$$

Al combinar las dos derivadas se obtiene la respuesta del problema

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{3x+1}^{\cos x} sen^{-1}\, t\, dt\right] = -3\, sen^{-1}(3x+1) - sen\, x \cdot sen^{-1}(\cos x)$$

Teorema Fundamental del Cálculo Parte 2:

Si una función $\boldsymbol{f}$ es continua en el intervalo cerrado $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, entonces

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Donde $\boldsymbol{F}$ es una antiderivada de $\boldsymbol{f}$ sobre ese intervalo, es decir, una función tal que $\boldsymbol{F' = f}$

Nota

- Para calcular una integral definida primero calcule la antiderivada $\boldsymbol{F}$
- Después de calcular la antiderivada, evalúe $\boldsymbol{F(b) - F(a)}$**.**
- Si al calcular la antiderivada, se hace alguna sustitución. Se pueden cambiar los límites de integración en términos de la nueva variable y evaluar la integral en términos de la nueva variable.

EJEMPLO 1

Calcule la integral definida

$$\int_{-1}^{2} x\sqrt{x+2}\, dx$$

Solución

Primero se calcula la antiderivada

$$\int x\sqrt{x+2}\, dx$$

Haciendo la sustitución adecuada

$$u = x + 2 \quad \rightarrow \quad u - 2 = x$$
$$du = dx$$

La antiderivada en términos de u queda como

$$\int x\sqrt{x+2}\, dx = \int (u-2)\sqrt{u}\, du$$

Desarrollando productos y calculando la antiderivada

$$\int x\sqrt{x+2}\, dx = \int \left(u^{3/2} - 2u^{1/2}\right) du$$
$$= \frac{2}{5}u^{5/2} - 2\left(\frac{2}{3}\right)u^{3/2}$$

La antiderivada o integral indefinida en términos de x es

$$\int_{-1}^{2} x\sqrt{x+2}\,dx = \frac{2(x+2)^{5/2}}{5} - \frac{4(x+2)^{3/2}}{3}\Bigg|_{-1}^{2}$$

Una vez calculada la integral indefinida, se utiliza el teorema fundamental del cálculo para evaluar la integral definida

$$\int_{-1}^{2} x\sqrt{x+2}\,dx = \frac{2(x+2)^{5/2}}{5} - \frac{4(x+2)^{3/2}}{3}\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$= \left[\frac{2(2+2)^{5/2}}{5} - \frac{4(2+2)^{3/2}}{3}\right] - \left[\frac{2(-1+2)^{5/2}}{5} - \frac{4(-1+2)^{3/2}}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{2(4)^{5/2}}{5} - \frac{4(4)^{3/2}}{3}\right] - \left[\frac{2(1)^{5/2}}{5} - \frac{4(1)^{3/2}}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{2(32)}{5} - \frac{4(8)}{3}\right] - \left[\frac{2(1)}{5} - \frac{4(1)}{3}\right]$$

$$= \left(\frac{32}{15}\right) - \left(-\frac{14}{15}\right) = \frac{46}{15}$$

Otra alternativa para calcular una integral definida cuando se hace una sustitución, consiste en cambiar los límites de integración al hacer el cambio de variable

$$\int_{-1}^{2} x\sqrt{x+2}\,dx$$

Al hacer la sustitución

$$u = x + 2 \quad \rightarrow \quad u - 2 = x$$
$$du = dx$$

Cambiando los límites de integración

Cuando $x = -1$ se tiene que $u = x + 2 = -1 + 2 = 1$

Cuando $x = 2$ se tiene que $u = x + 2 = 2 + 2 = 4$

Ahora la integral definida queda expresada como

$$\int_{-1}^{2} x\sqrt{x+2}\,dx = \int_{1}^{4} (u-2)u^{1/2}du$$

Se calcula la integral y se evalúa para u

$$\int_{-1}^{2} x\sqrt{x+2}\,dx = \int_{1}^{4} (u-2)\sqrt{u}\,du$$

$$= \left[\frac{2}{5}u^{5/2} - 2\left(\frac{2}{3}\right)u^{3/2}\right]_1^4$$

$$= \left[\frac{2}{5}\ (4)^{5/2} - \left(\frac{4}{3}\right)(4)^{3/2}\right] - \left[\frac{2}{5}\ (1)^{5/2} - \left(\frac{4}{3}\right)(1)^{3/2}\right]$$

$$= \left[\frac{2(32)}{5} - \frac{4(8)}{3}\right] - \left[\frac{2(1)}{5} - \frac{4(1)}{3}\right]$$

$$= \left(\frac{32}{15}\right) - \left(-\frac{14}{15}\right) = \frac{46}{15}$$