Clase Física 2 04

Ejemplos:

Distribuciones de carga para campo eléctrico en condiciones uniformes

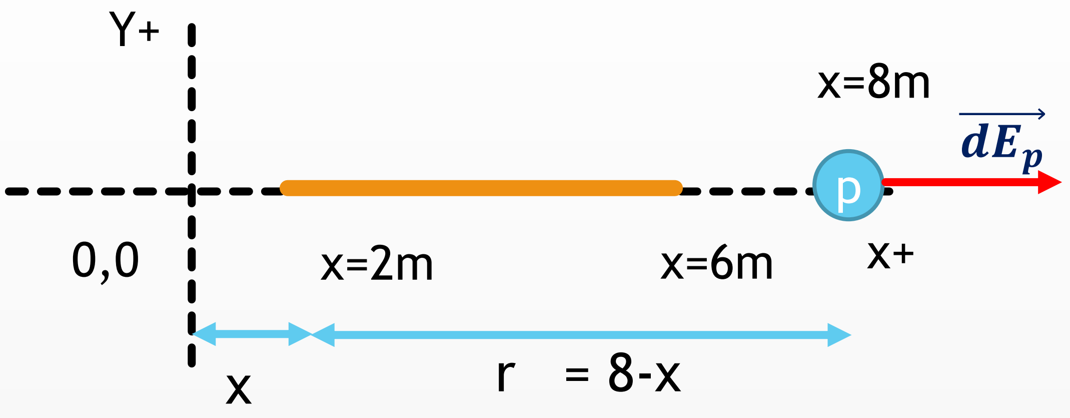
Efectos de fuerzas sobre partículas en campos eléctricos

Movimiento de partículas en campo eléctricos uniformes

Dipolo Eléctrico

Ejemplo 1. Una carga de 24nC esta distribuida uniformemente sobre el eje "x", desde x= +2m hasta x= +6m. Determine el campo eléctrico(N/C) en un punto situado en x=+8m

Resolución en este caso se establece la dirección del campo eléctrico así como la forma en la que varia la carga atreves de la distribución, por lo tanto r se estima como la distancia de los fragmentos de la carga al punto donde se estimara el campo eléctrico.



Se establece que la distribución de la carga es lineal por lo tanto $\lambda = \frac{Q}{L}$ esta es la forma de distribución de la carga por lo cual podremos estimar a partir de la longitud de la varilla y la carga que posee.

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{24nC}{4m} = 6\, nC/m$$

Para el calculo del campo se estima un diferencial de carga que esta marcado por la forma de la distribución

$$\lambda = \frac{Q}{L} \qquad donde\ L = x\ por\ la\ forma\ en\ la\ que\ se\ distribuye \quad \lambda = \frac{dq}{dx}$$

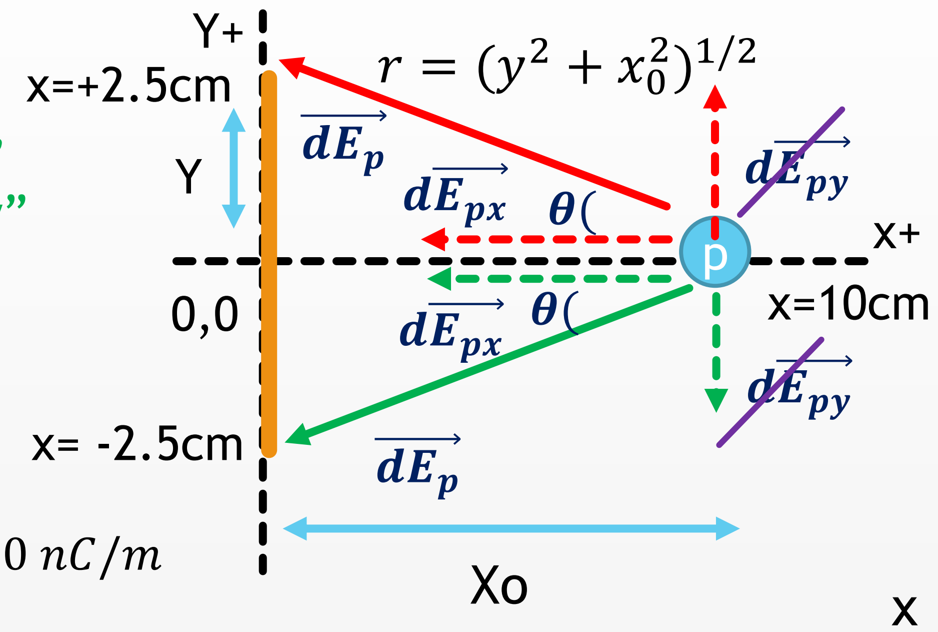
$$dq = \lambda dx$$

$$dE = \frac{kdq}{r^2} = \frac{k\lambda dx}{(8-x)^2}$$

$$\vec{E}_p = \int_2^6 \frac{k\lambda dx}{(8-x)^2}\hat{\imath} = k\lambda \int_2^6 \frac{dx}{(8-x)^2}\hat{\imath} = 18\frac{N}{C}\hat{\imath}$$

Ejemplo 2. Una línea cargada uniformemente como muestra la figura se extiende de y= -2.5 cm a y= +2.5cm. La carga total de la distribución es de -9nC. Halle el campo eléctrico sobre el eje de las x en el punto x= +10cm.

Resolución en este caso la forma de distribución se dará por componentes para el campo eléctrico en el punto indicado, esto dará como resultado la eliminación de las componentes "y" por simetría mientras que en la parte horizontal genera dos condiciones para su resolución.



En este caso se plantea la distribución de carga tipo lineal

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{9nC}{0.05m} = 180\ nC/m$$

Para el calculo del diferencial de carga solo nos basaremos en el eje que la carga este distribuida, para este curso apelamos mucho a la simetría para nuestros cálculos.

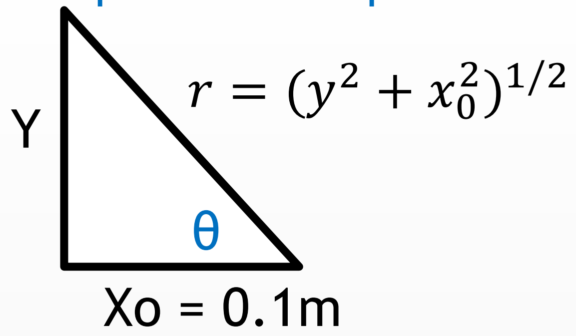
$$\lambda = \frac{Q}{L} \qquad donde\ L = Y\ por\ la\ forma\ en\ la\ que\ se\ distribuye \quad \lambda = \frac{dq}{dy}$$

Para el diferencial de carga se toma en cuenta la forma que toma r para llegar desde la carga al punto del campo eléctrico, formando así un triangulo rectángulo con la hipotenusa del mismo como el valor de r para nuestro problema. Esto genera

$$dq = \lambda dy$$

$$dE = \frac{kdq}{r^2} = \frac{k\lambda dy}{r^2}$$

Ya teniendo la forma diferencial de campo eléctrico procedemos al planteamiento del campo eléctrico pero en este caso será en componentes teniendo únicamente en el eje “x”



$$\lambda = 180\, nC/m \qquad dE = \frac{kdq}{r^2} = \frac{k\lambda dy}{r^2}$$

$$dE_x = -\frac{kdq}{r^2} cos\theta\hat{\imath} = -\frac{k\lambda dy}{r^2}\cos\theta\,\hat{\imath} = -\frac{k\lambda dy}{((y^2 + x_0^2)^{1/2})^2}\cos\theta\,\hat{\imath} = -\frac{k\lambda dy}{y^2 + x_0^2}\cos\theta\,\hat{\imath}$$

En este caso para no realizar dos procesos de integración ya que el ángulo esta cambiando durante los planteamientos deberos de dejar expresado el ángulo en términos de los catetos y hipotenusa del triangulo del campo eléctrico.

$$\cos\theta = \frac{Catero\ adyancente}{Hipotenusa} = \frac{x_0}{(y^2 + x_0^2)^{1/2}}$$

Ya con esta expresión para la componente cosθ se procede a sustituir y plantear la integral.

$$dE_x = -\frac{k\lambda dy}{y^2 + x_0^2}\cos\theta\,\hat{\imath} = -\frac{k\lambda dy}{y^2 + x_0^2} * \frac{x_0}{(y^2 + x_0^2)^{1/2}}\hat{\imath} = -\frac{k\lambda x_o dy}{(y^2 + x_0^2)^{3/2}}\hat{\imath}$$

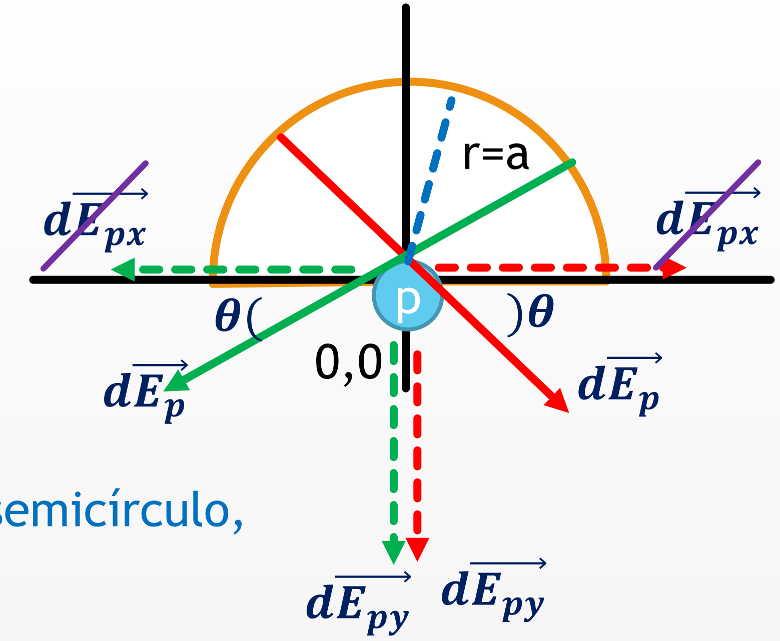
En este punto se puede tomar varias formas de la integral por sus rangos de integración por la simetría.

$$\vec{E}_p = \int_{-0.025}^{0.025} dE_x = \int_0^{0.025} 2dE_x$$

Se tomara la que considera la mitad por simetría, la resolución puede emplear el método que considere.

$$\vec{E}_p = \int_0^{0.025} 2dE_x = \int_0^{0.025} -\frac{2k\lambda x_o dy}{(y^2 + x_0^2)^{3/2}}\hat{\imath} = -\frac{2k\lambda}{x_0} * \frac{y}{(y^2 + x_0^2)^{1/2})}\Bigg|_0^{0.025} = \mathbf{-7858.2\frac{N}{C}\hat{\imath}}$$

Ejemplo 3. la carga positiva **Q** esta distribuida uniformemente alrededor de un semicírculo de radio **a**. halle el campo eléctrico en el centro de la curvatura.



Resolución en este caso se estimara el campo en el origen de la figura tomar en cuenta que existe simetría por la figura generando así la eliminaciones de algunas componentes del campo eléctrico.

En este caso podemos dejar eliminadas las componentes horizontales dejando así solo la parte vertical para el calculo del campo

La distribución de la carga es lineal pero tomando la circunferencia del semicírculo, esto seria el segmento de arco $s = R\theta$

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{Q}{s} = \frac{Q}{R\theta} = \frac{Q}{a\pi}$$

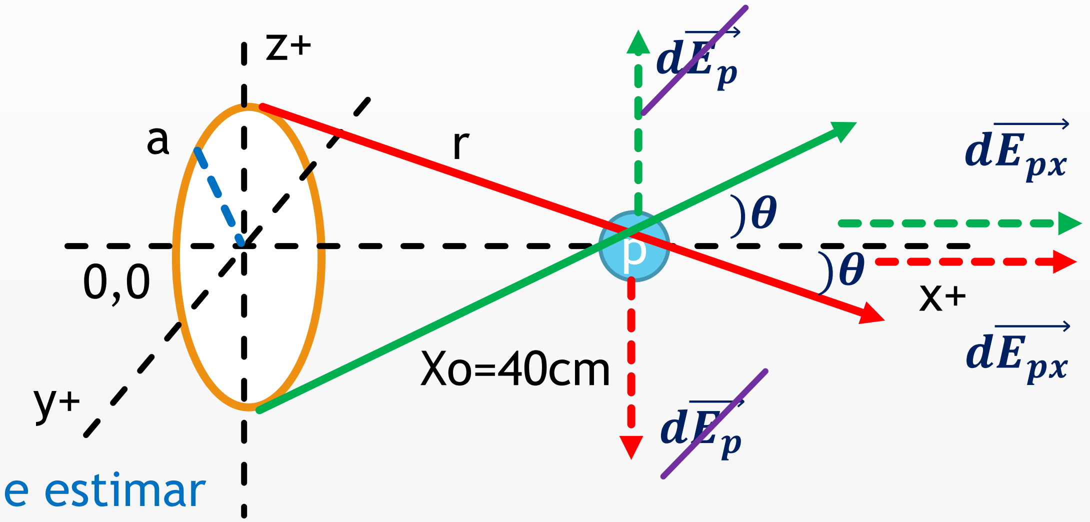
$$\lambda = \frac{Q}{L} \qquad donde\ L = s = R\theta\ por\ la\ forma\ en\ la\ que\ se\ distribuye \quad \lambda = \frac{dq}{Rd\theta} = \frac{dq}{ad\theta}$$

Se plantea el diferencial de campo eléctrico para el segmento pero en este caso lo único variable seria el ángulo θ por lo tanto se puede trabajar en forma radianes para la integración.

$$dE_y = -\frac{kdq}{r^2}sin\theta\hat{\jmath} = -\frac{k\lambda ds}{a^2}sin\theta\hat{\jmath} = -\frac{k\lambda a d\theta}{a^2}\ sin\theta\ \hat{\jmath} = -\frac{k\lambda d\theta}{a}\ sin\theta\ \hat{\jmath}$$

$$\vec{E}_p = \int_0^{\pi} dE_y = \int_0^{\pi} -\frac{k\lambda d\theta}{a}\ sin\theta\ \hat{\jmath} = -\frac{\mathbf{2kQ}}{\boldsymbol{\pi a^2}}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Ejemplo 4. Un conductor de forma anular con radio a= 2.5cm tiene una carga positiva total de Q= +0.125nC como se muestra en la figura y se encuentra en el plano YZ. El centro del anillo se localiza en el origen de coordenadas del plano. a). determine la densidad de carga de la distribución en C/m. b). cual es el campo eléctrico en un punto sobre el eje de las "x" en la posición x= 40cm. c). Determinar la fuerza eléctrica que experimenta una partícula en x= 40cm si tiene una carga de $q_0 = -7.5\mu C$.

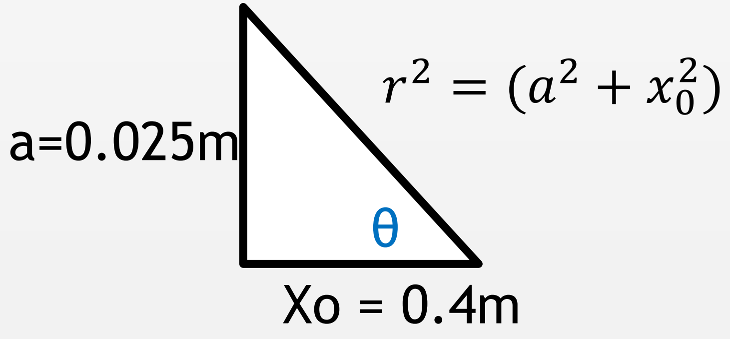


Resolución en este sistema por simetría las componentes del plano YZ se eliminan dejando únicamente las del eje "x".

a. Se estimara la densidad de carga de la distribución en

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{Q}{s} = \frac{Q}{2\pi a} = \frac{0.125x10^{-9}C}{2\pi(0.025)m} = 0.79577x10^{-9}C/m$$

En el caso del campo eléctrico que se puede calcular se puede estimar que "r" de la distribución al punto del campo eléctrico es constante. por lo tanto es solamente plantear la integración para llegar al valor estimado.



$$\lambda = \frac{Q}{L} \qquad donde\ L = s\ \ por\ la\ forma\ en\ la\ que\ se\ distribuye \quad dq = \lambda ds$$

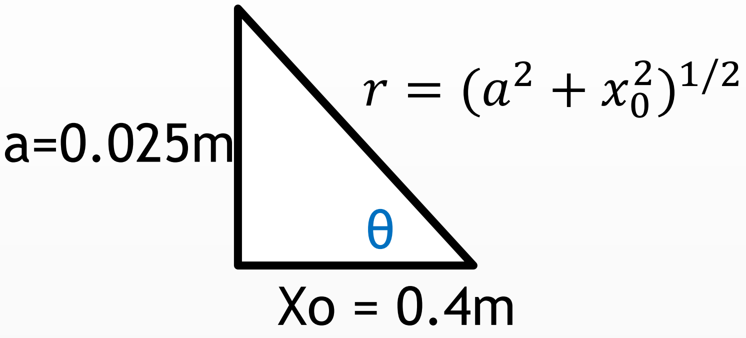
$$dE_x = \frac{kdq}{r^2}cos\theta\hat{\imath} = \frac{k\lambda ds}{(a^2 + x_0^2)}cos\theta\hat{\imath}$$

Con el diferencial de campo eléctrico estimado se observa que hay que usar identidades trigonométricas para dejar la componente del campo en termino de los valores que se posee.

$\lambda = 0.79577x10^{-9}C/m$

$$dE_x = \frac{k\lambda ds}{(a^2 + x_0^2)} cos\theta \hat{\imath}$$

$$\cos\theta = \frac{Catero\ adyancente}{Hipotenusa} = \frac{x_0}{(a^2 + x_0^2)^{1/2}}$$



Teniendo la forma de plantear la integración utilizando los datos ofrecidos se plantea la misma con su resolución.

$$\vec{E}_p = \int dE_x \hat{\imath} = \int \frac{k\lambda ds}{(a^2 + x_0^2)} cos\theta \hat{\imath} = \int_0^{2\pi a} \frac{k\lambda ds}{(a^2 + x_0^2)} * \frac{x_0}{(a^2 + x_0^2)^{1/2}} \hat{\imath} = \int_0^{2\pi a} \frac{k x_0 \lambda ds}{(a^2 + x_0^2)^{3/2}} \hat{\imath}$$

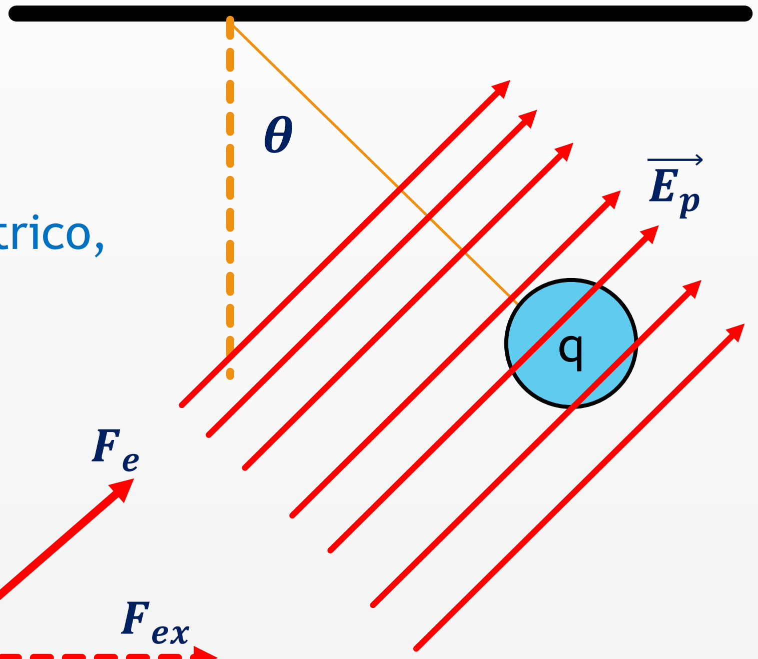
$$\vec{E}_p = \frac{2\pi a k x_0 \lambda}{(a^2 + x_0^2)^{3/2}} \hat{\imath} = \mathbf{6.99 \frac{N}{C} \hat{\imath}}$$

Con el valor del campo eléctrico obtenido se puede estimar la fuerza eléctrica producida sobre una partícula cargada en el punto x= 0.4m $q_0 = -7.5\mu C$

$$\vec{F}_e = q_0 \vec{E}_p = -(7.5x10^{-6})(6.99)\hat{\imath} = \mathbf{-52.42x10^{-6} N \hat{\imath}}$$

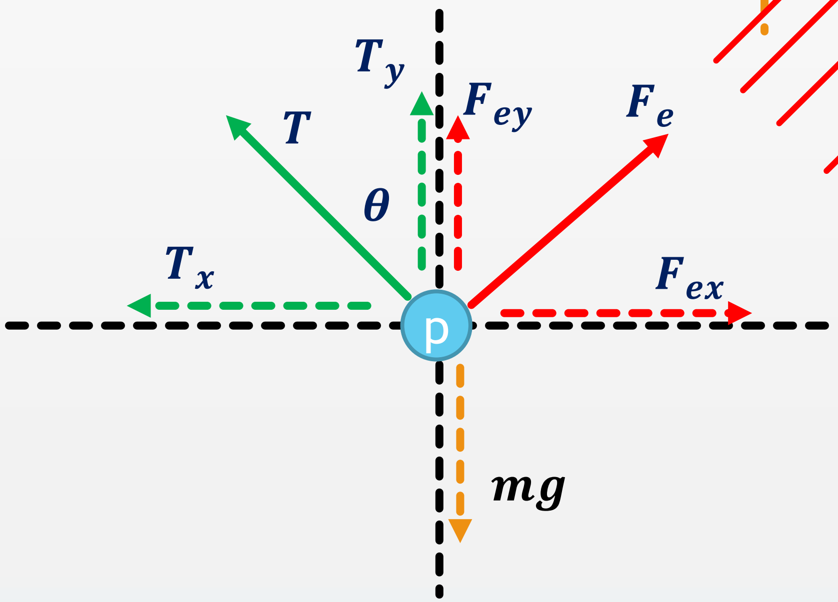
Efectos de fuerzas sobre objetos en campos eléctrico.

Ejemplo 5. Una pelota de corcho cargada con 1.0g de masa, esta suspendida de un hilo muy ligero en un campo eléctrico uniforme como se muestra en la figura. Cuando $\vec{E} = (3.0\hat{\imath} + 5.0\hat{\jmath})x10^5 N/C$ la pelota esta en equilibrio en $\theta = 37°$. Determine la carga sobre la pelota y la tensión del hilo.



Resolución en estos escenarios podemos determinar las fuerzas que actúan en un objeto estando en condiciones estáticas o dinámicas.

En el caso se estima que la fuerza eléctrica generada por el campo eléctrico, hay que considerar que estamos en primer ley de newton, para estimar la carga de la pelota.



$\vec{F_e} = q\vec{E} = qE_x\hat{\imath} + qE_y\hat{\jmath}$

$m = 0.001kg$

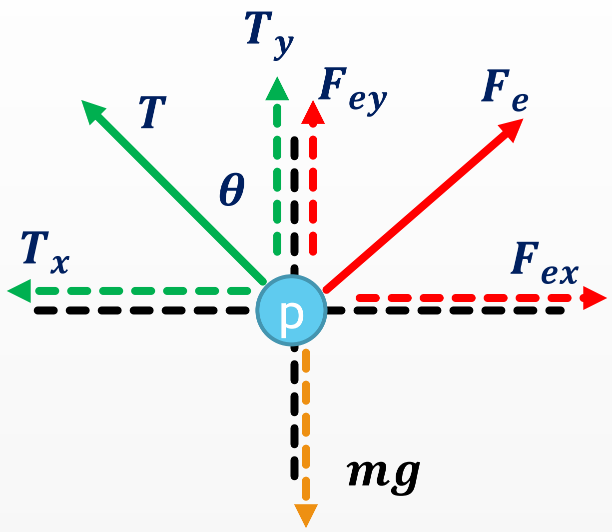
$$\sum \vec{F_x} = 0$$

$$\sum \vec{F_y} = 0$$

Se plantea las dos ecuaciones para crear el sistema para poder encontrar la carga "q" y la Tensión del sistema.

$\vec{E} = (3.0\hat{\imath} + 5.0\hat{\jmath})x10^5 N/C$

$$+\rightarrow \sum \vec{F}_x = 0$$
$$F_{ex} - T_x = 0$$
$$qE_x - T sin\theta = 0$$
$$T sin\theta = qE_x$$
$$T = \frac{qE_x}{sin\theta}$$
$$+\uparrow \sum \vec{F}_y = 0$$
$$F_{ey} + T_y - mg = 0$$
$$qE_y + T cos\theta = mg$$



se puede sustituir el valor de T en la expresión de la sumatoria

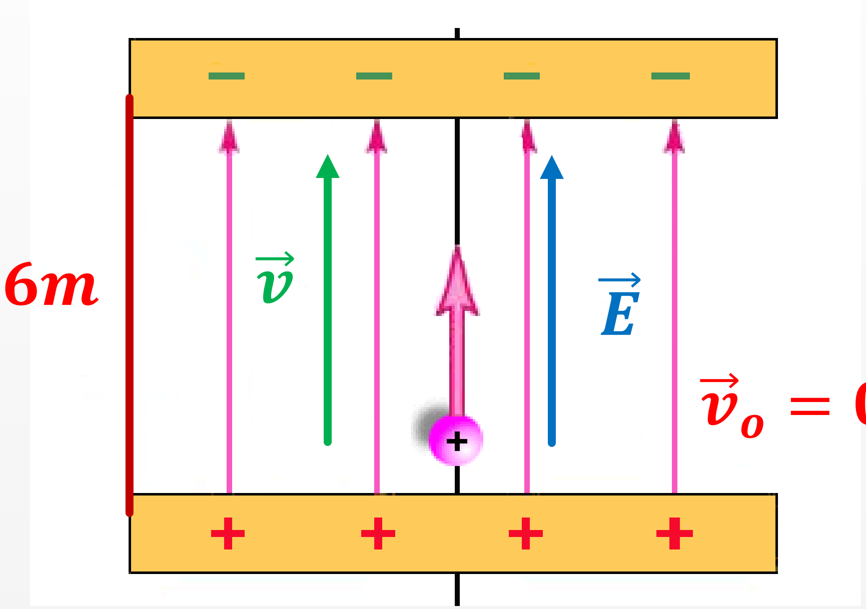
$$qE_y + \frac{qE_x}{sin\theta} cos\theta = mg$$
$$qE_y + \frac{qE_y}{tan\theta} = mg$$
$$q(E_y + \frac{E_y}{tan\theta}) = mg$$
$$q = \frac{mg}{(E_y + \frac{E_y}{tan\theta})} = \frac{0.001(9.8)}{3x10^5 + \frac{5x10^5}{tan37°}} = \mathbf{10.17x10^{-9}C \approx 10.17nC}$$
$$T = \frac{qE_x}{sin\theta} = \frac{(10.17x10^{-9})(3x10^5)}{sin37°} = \mathbf{5.07x10^{-3}N \approx 5.07mN}$$

Ejemplo 6. Hay un campo eléctrico uniforme en la región comprendida entre dos placas planas paralelas con carga opuesta . Se deja libre un protón inicialmente en reposo en la superficie de carga positiva, el cual golpea la placa opuesta distante 1.60cm de la primera al cabo de $1.5x10^{-6}s$. a). Halle la magnitud del campo eléctrico entre las placas. b) Determinar la rapidez del protón cuando incide en la placa negativa.

Resolución en estos casos se puede estimar que la partícula se comportara en un movimiento de cinemática dentro del campo eléctrico. por lo cual dependiendo de la interacción que le permita generar el campo será su movimiento a evaluar.

Teniendo un movimiento desde la placa positiva por repulsión hasta llegar a la placa negativa por atracción genera únicamente movimiento sobre el eje vertical

$\boldsymbol{d = 0.016m}$



$\boldsymbol{\vec{v}_o = 0m/s}$

$\Delta y = d = 0.016m \qquad t = 1.5x10^{-6}s$

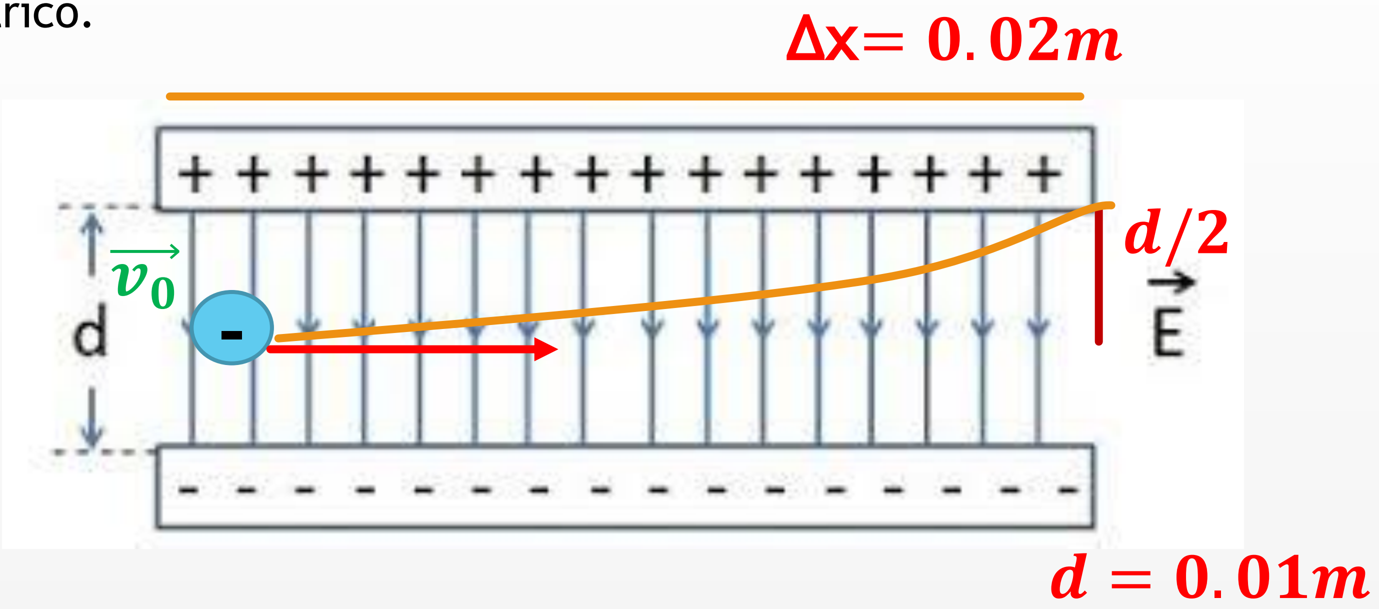
$$y_f = y_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2 \quad \rightarrow \quad \Delta y = \cancel{v_o} t + \frac{1}{2}at^2 \quad \rightarrow \quad a = \frac{2\Delta y}{t^2} = \frac{2(0.016)}{(1.5x10^{-6})^2} = 14.22x10^9\, {}^{m}/{}_{s^2}$$

$$+\uparrow \sum F_y = m_{proton}a \quad \rightarrow \quad q_{proton}E = m_{Proton}a \quad \rightarrow \quad E = \frac{m_{proton}a}{q_{proton}} = \frac{(1.67x10^{-27})(14.22x10^9)}{1.6x10^{-19}} = \boldsymbol{148.44\frac{N}{C}\hat{j}}$$

$$v_f = v_o + at = 0 + (14.22x10^9)(1.5x10^{-6}) = \boldsymbol{21,333\frac{m}{s}\hat{j}}$$

Ejemplo 7. se proyecta un electrón con una rapidez inicial de $v_o = 1.6x10^6\ m/s$ en el interior de un campo eléctrico uniforme de placas paralelas. el campo eléctrico tiene dirección vertical descendente y afuera de las placas el campo es cero. El electrón entra en las placas en un punto equidistante entre las dos. si el electrón al salir sale casi rozando la parte superior, determine la magnitud del campo eléctrico.

En este caso el escenario es la descripción de un movimiento de tiro parabólico en el cual se puede estimar la aceleración y el campo con los datos del movimiento sobre el eje horizontal.



$$v_o = \frac{\Delta x}{t} \quad \rightarrow \quad t = \frac{\Delta x}{v_o} = \frac{0.02}{1.6x10^6} = 12.5x10^{-9}s$$

En este punto el calculo de la aceleración del sistema lo marcara el movimiento en "y", el movimiento del electrón esta iniciando su ingreso al campo eléctrico de forma horizontal por lo cual no hay velocidad al inicio en "y".

$$y_f = y_o + \cancel{v_o t} + \frac{1}{2}at^2 \quad \rightarrow \quad \Delta y = \frac{1}{2}at^2 \quad \rightarrow \quad a = \frac{2\Delta y}{t^2} = \frac{2(d/2)}{t^2} = \frac{2(0.005)}{(12.5x10^{-9})^2} = 64x10^{12}\ m/s^2$$

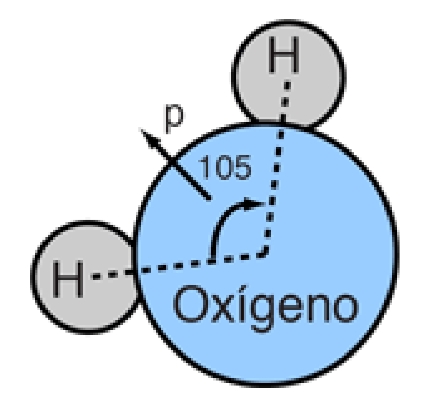
Para el calculo del campo se estima por parte de la fuerza eléctrica que el campo genera sobre el electrón.
Escriba aquí la ecuación.

$$+\uparrow \sum F_y = m_{electrón}a \quad \rightarrow \quad q_{electrón}E = m_{electrón}a \quad \rightarrow \quad E = \frac{m_{electrón}a}{q_{electrón}} = \frac{(9.1x10^{-31})(64x10^{12})}{1.6x10^{-19}} = 364.0\frac{N}{C}$$

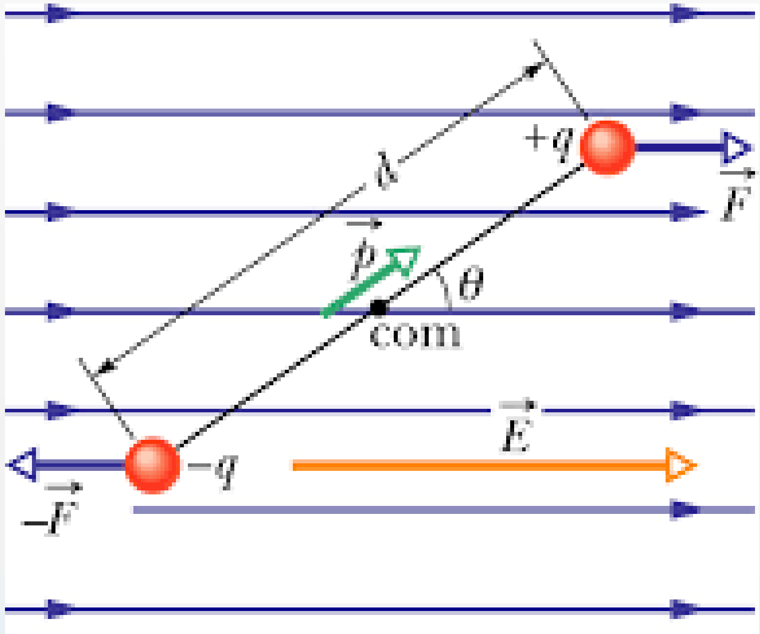
Dipolo Eléctrico

Un dipolo es un par de cargas de igual magnitud y signos opuestos separadas una distancia “d”.

La molécula de agua eléctricamente neutra, pero los enlaces químicos formados por esta molécula ocasionan un desplazamiento de carga; el resultado de tal proceso es que la carga neta negativa en el extremo del oxigeno y la carga neta positiva en el extremo del hidrogeno, formando así un dipolo eléctrico que permite la configuración de la forma geométrica particular de esta molécula.



Fuerza y torque sobre un dipolo



$$\vec{F}_{total} = qE\hat{\imath} - qE\hat{\imath} = 0$$

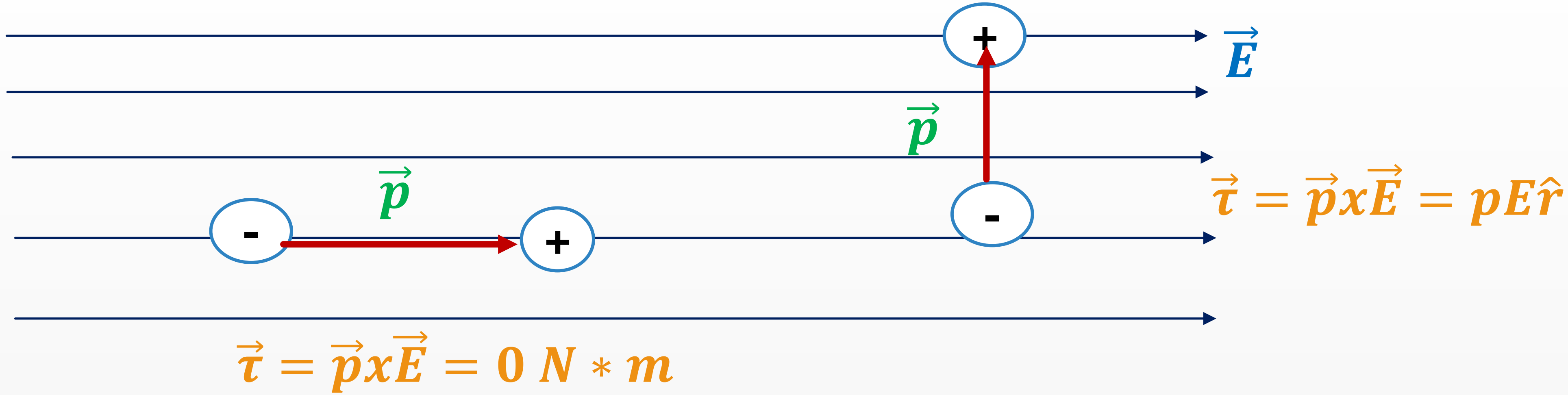
por lo tanto la fuerza del campo sobre el sistema del dipolo se cancela por estar actuando tanto en la carga positiva como en la carga negativa.

$$\tau_{total} = -\frac{d}{2}F_e sin\theta\hat{k} - \frac{d}{2}F_e sin\theta\hat{k}$$

$$\boldsymbol{\tau_{total} = -dqEsin\theta\hat{k} = \vec{p}x\vec{E}}$$

donde $\vec{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{qd}$ es el momento dipolar eléctrico (C*m), este siempre se dirige desde la carga negativa hacia la carga positiva del dipolo eléctrico.

Condiciones en las cuales el torque del dipolo eléctrico toma su máximo valor y mínimo



En estos dos casos por base del operador de producto cruz los máximos se darán a 90° y los mínimos o cero se darán a los 0°.

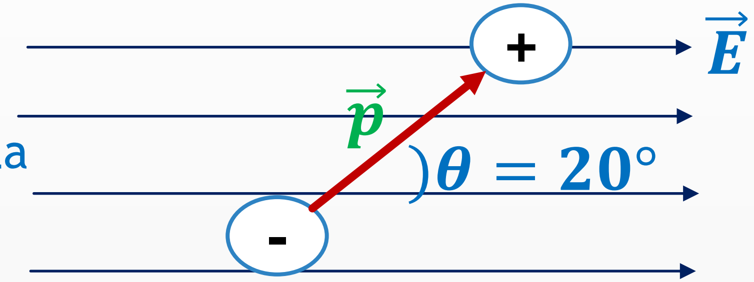
Energía potencial de un dipolo eléctrico

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pEcos\theta$$

Trabajo realizado por un agente externo $W = +\Delta U$

Trabajo realizado por la torca del campo eléctrico sobre el dipolo $W = -\Delta U$

Ejemplo 8. Un dipolo Eléctrico se coloca dentro de un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = 2450\ ^{N}/_{C}\,\hat{\imath}$, la magnitud de las caras es de 90mC y su separación es de 1.70m. a) Cuales son las componentes x,y del momento dipolar eléctrico. b) Cual es el momento de torsión que experimenta el dipolo eléctrico. c) Calcular la energía potencial eléctrica asociada al dipolo eléctrico.



Resolución en este caso se tiene todo para los cálculos

a. el momento dipolar es una característica vectorial que depende de la dirección de la carga negativa a la positiva, según el diagrama esto va con respecto al primer cuadrante.

$$p = qd = (90x10^{-3})(1.7) = 0.153C * m$$
$$\vec{p} = qdcos\theta\hat{\imath} + qdsin\theta\hat{\jmath} = 0.153cos20°\hat{\imath} + 0.153sin20°\hat{\jmath}$$
$$\boldsymbol{\vec{p} = 0.14377C * m\ \hat{\imath} + 0.052329\ C * m\ \hat{\jmath}}$$

b. Teniendo el momento dipolar y el valor del campo procedemos a determinar el valor del torque.

$$\tau = \ \vec{p}x\vec{E} = pEsin\theta = 0.153(2450)sin20° = \boldsymbol{128.21N * m}$$

c. solo se necesita calcular el valor de la energía potencial del dipolo para la configuración indicada.

$$U = -p \cdot E = -pEcos\theta = -(0.153)(2450)cos20° = \boldsymbol{-352.24J}$$

Ejemplo 9. Un dipolo consta de cargas de $+1.5\mu C$ y $-1.5\mu C$ separadas una distancia de "d". se encuentran en un campo externo de magnitud de $\frac{3x10^6\,N}{C}$. Si la magnitud del momento de torsión máximo del dipolo es de 0.1575N*m. a) cual es la distancia de separación "d" del dipolo eléctrico. b). si el dipolo se rota desde la posición paralela al campo hasta la posición θ y se requiere para rotarlo un trabajo de $73x10^{-3}J$. Determine el ángulo θ en el cual se realiza este trabajo, considere el momento dipolar de $2.79x10^{-9}\ C*m$.

Resolución en este caso se sabe las condiciones del torque máximo del dipolo eléctrico por lo cual trabajando la magnitud por parte del producto cruz se puede estimar el valor de separación del dipolo.

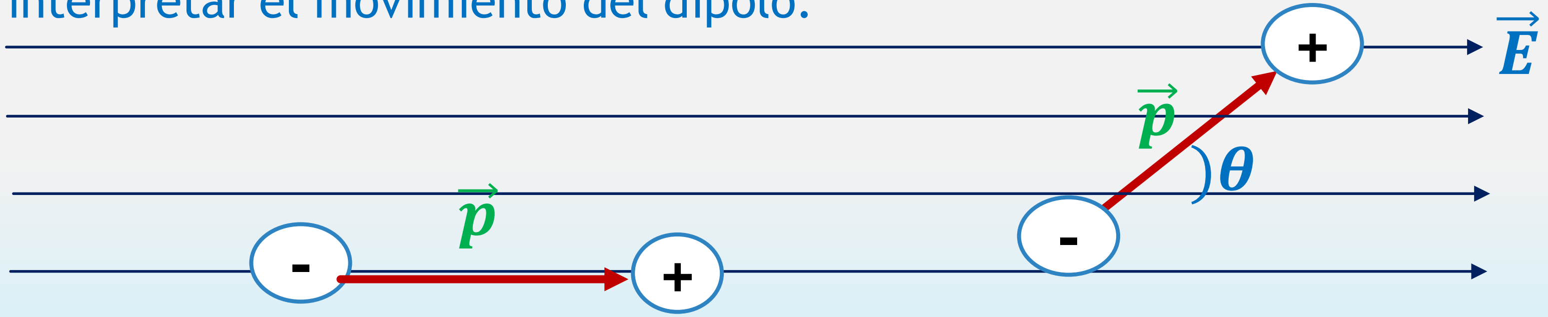
$$\tau = pEsin90°$$

$$p = \frac{\tau}{E}$$

pero sabemos que el momento dipolar es igual a $p = qd$ con esto podremos despejar el valor de "d".

$$qd = \frac{\tau}{E} \qquad \rightarrow \qquad d = \frac{\tau}{qE} = \frac{0.1575}{(1.5x10^{-6})(3x10^6)} = \mathbf{0.035m}$$

Para el segundo caso lo que necesitamos determinar es el ángulo que deberemos de tener en la configuración entre el campo y el momento dipolar para que se genere el trabajo indicado por el agente externo, esto indica que debemos de interpretar el movimiento del dipolo.



Se sabe que en este caso tenemos dos energías del dipolo generadas que serian cuando se encuentra paralelas dando un ángulo 0° y la condición final que es la que buscamos.

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pEcos\theta$$

$$U_o = -pEcos\theta = -(2.079x10^{-9})(3x10^{6})cos0° = -6.237x10^{-3}J$$

Ahora quedando únicamente variable el ángulo de la condición final del dipolo eléctrico.

$$W_{Ext} = \Delta U = 73x10^{-3}J$$

$$W_{ext} = U_f - U_o$$

$$U_f = W_{ext} + U_o$$

$$-pEcos\theta = W_{ext} + U_o$$

$$cos\theta = \frac{W_{ext} + U_o}{-pE}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{W_{ext} + U_o}{-pE} = \cos^{-1}\frac{73x10^{-4} - 6.237x10^{-3}}{-(2.079x10^{-9})(3x10^{6})} = \mathbf{27.99° \approx 28°}$$