Ejercicio calificado #1

Sección 2.8 Ejercicio 28

Instrucciones

Encuentre la derivada de cada una de las funciones siguientes usando la definición de derivada. Indique los dominios de la función y de su derivada

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x - 3}$$

Solución

Tenemos que la derivada por definición se determina con la formula siguiente:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$

sustituyendo nuestra ecuación en la fórmula anterior obtenemos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0}\left[\frac{\left(\frac{(x+h)^2-1}{2(x+h)-3}\right) - \left(\frac{x^2-1}{2x-3}\right)}{h}\right]$$

Aplicando algebra, primero se resuelve el binomio al cuadrado y la multiplicación del denominador de la primera fracción:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0}\left[\frac{\left(\frac{x^2+2xh+h^2-1}{2x+2h-3}\right) - \left(\frac{x^2-1}{2x-3}\right)}{h}\right]$$

Se resuelve la suma de fracciones:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0}\left[\frac{\frac{(2x-3)(x^2+2xh+h^2-1)-(2x+2h-3)(x^2-1)}{(2x+2h-3)(2x-3)}}{h}\right]$$

Resolviendo productos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{(2x^3+4x^2h+2xh^2-2x-3x^2-6xh-3h^2+3)-(2x^3-2x+2x^2h-2h-3x^2+3)}{h(2x+2h-3)(2x-3)}\right]$$

Simplificando el numerador

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{2x^2h+2xh^2-6xh-3h^2+2h}{h(2x+2h-3)(2x-3)}\right]$$

Factorizamos h del numerador

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{h(2x^2+2xh-6x-3h+2)}{h(2x+2h-3)(2x-3)}\right]$$

De esta manera al eliminar h del numerador con h del denominador se elimina la forma indeterminada del límite y nos queda valuar el límite:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{(2x^2+2xh-6x-3h+2)}{(2x+2h-3)(2x-3)}\right]$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{(2x^2+2x(0)-6x-3(0)+2)}{(2x+2(0)-3)(2x-3)}\right]$$

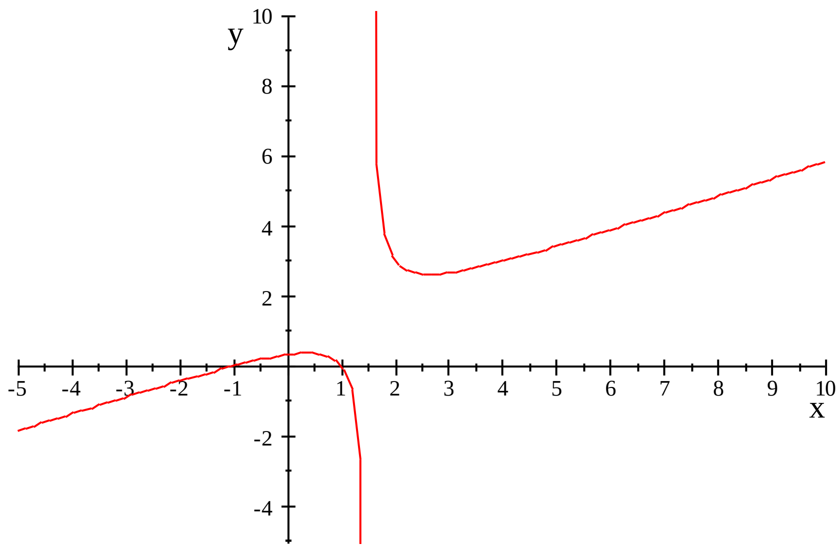
$$f'(x) = \frac{2x^2-6x+2}{(2x-3)(2x-3)}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x^2-6x+2}{(2x-3)^2}}$$

Ahora solo queda definir los dominios de estos:

-Grafiquemos ambos para así determinar sus dominios

$f(x) = \frac{x^2-1}{2x-3}$



Se observa que *f(x)* cuenta con una asintonta vertical en x=1.5, es cuando el denominador se iguala a cero
Asíntota Vertical

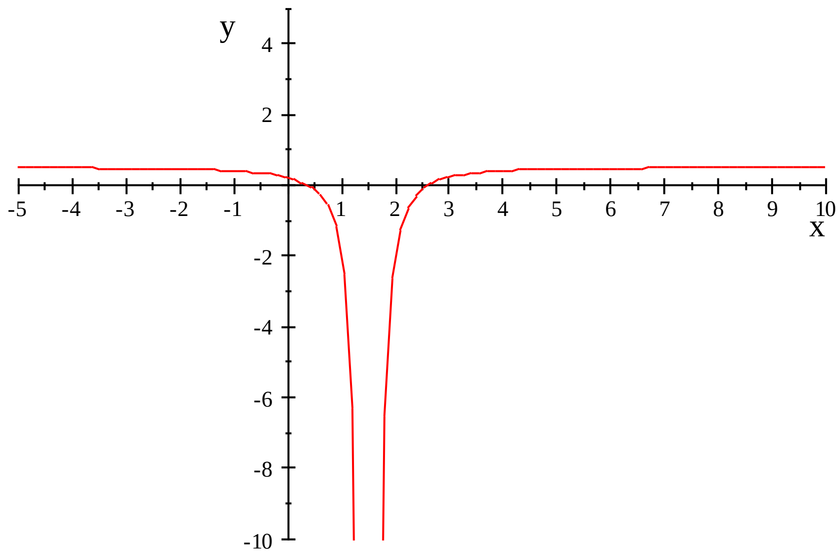
$$2x - 3 = 0$$
$$2x = 3$$
$$x = \frac{3}{2}$$
$$x = 1.5$$

Por lo que el dominio de *f(x)* es:

$$\boxed{D\left\{x/x \in (-\infty, \tfrac{3}{2}) \cup (\tfrac{3}{2}, \infty)\right\}}$$

Ahora para *f '(x)* tenemos su gráfica:

$$f'(x) = \frac{2x^2-6x+2}{(2x-3)^2}$$



Se logra observar que cuenta con el mismo dominio que *f(x)*

Ejercicio calificado #2

Sección 3.4 Ejercicio 78

Instrucciones

Encuentre la derivada mil de:

$$f(x) = xe^{-x}$$

Solución

Como primer paso tenemos la multiplicación de una multiplicación por lo que al calcularla tenemos:

Primera Derivada

$$f'(x) = -xe^{-x} + 1e^{-x}$$

Ahora se tienen 2 términos, el primer es f(x), pero negativo, y un segundo término, derivemos por 2da vez:

Segunda Derivada

$$f''(x) = -(-xe^{-x} + 1e^{-x}) - e^{-x}$$

Simplificando

$$f''(x) = xe^{-x} - 2e^{-x}$$

Siguen existiendo 2 términos, ahora en el 1er término se tiene a f(x) nueva mente y en el 2do término aumentó una unidad y cambió de signo, derivemos una tercera vez:

Tercera Derivada

$$f^{(3)}(x) = (-xe^{-x} + 1e^{-x}) + 2e^{-x}$$

Simplificando

$$f^{(3)}(x) = -xe^{-x} + 3e^{-x}$$

Nuevamente hay 2 términos, nuevamente en el 1er término se tiene a f(x) negativo, y el 2do término incrementó otra unidad y cambió de signo, derivemos una 4ta y última vez para crear un patrón y así determinar la n-ésima derivada:

Cuarta Derivada

$$f^{(4)}(x) = -(-xe^{-x} + 1e^{-x}) - 3e^{-x}$$

Simplificando

$$f^{(4)}(x) = -xe^{-x} - 4e^{-x}$$

Ya luego de derivar unas cuantas veces, vemos que el primer término solo alterna de signo, y el segundo término alterna de signo y la constante que lo acompaña es igual al número de derivada que se está valuando.

Creando la fórmula para la n-ésima derivada de f(x) dada, sería la siguiente

$$\boxed{f^{(n)}(x) = (-1)^n * xe^{-x} - (-1)^n * ne^{-x}}$$

Se usa el término de $(-1)^n$ para crear que se alterne el signo a como lo deseamos, en el segundo se tiene el mismo término acompañado de un signo negativo ya que este siempre es opuesto al signo del primer término, y se multiplica a valor n ya que siempre va multiplicado por la constante igual al número de derivada que se efectúa.

Por último, determinemos la derivada mil:

Para n=1000

$$f^{(1000)}(x) = (-1)^{(1000)} * xe^{-x} - (-1)^{(1000)} * (1000)e^{-x}$$

Simplificando

$$f^{(1000)}(x) = (1) * xe^{-x} - (1)(1000)e^{-x}$$

$$f^{(1000)}(x) = xe^{-x} - 1000e^{-x}$$

$$\boxed{f^{(1000)}(x) = (x - 1000)e^{-x}}$$