PROBLEMA RESUELTO 2

Dada la función

$$f(x) = \sqrt{5-4x}$$

a. Utilice la definición de derivada para encontrar la derivada de la función.

b. Obtenga la ecuación de la recta tangente en $x = -1$.

c. Dibuje la gráfica de la función y la recta tangente.

Solución

a. Para calcular la derivada utilizando la definición se tiene

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

El cálculo de $f(x+h)$ requiere sustituir $x + h$ por x en la función $f(x) = \sqrt{5-4x}$, al hacer esto se obtiene $f(x+h) = \sqrt{5-4(x+h)}$.

Ahora se sustituyen las expresiones de $f(x+h)$ y $f(x)$ en la definición de derivada y se calcula el límite, el cual es de la forma $\frac{0}{0}$ y por lo tanto es necesario efectuar algunas operaciones algebraicas para obtenerlo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5-4(x+h)} - \sqrt{5-4x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5-4x-4h} - \sqrt{5-4x}}{h} \end{aligned}$$

Multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del numerador y desarrollando el producto resultante se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5-4x-4h} - \sqrt{5-4x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{5-4x-4h} + \sqrt{5-4x}}{\sqrt{5-4x-4h} + \sqrt{5-4x}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{5-4x-4h}\right)^2 - \left(\sqrt{5-4x}\right)^2}{h\left(\sqrt{5-4x-4h} + \sqrt{5-4x}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(5-4x-4h) - (5-4x)}{h\left(\sqrt{5-4x-4h} + \sqrt{5-4x}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-4h}{h\left(\sqrt{5-4x-4h} + \sqrt{5-4x}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-4}{\sqrt{5-4x-4h} + \sqrt{5-4x}} \end{aligned}$$

El límite anterior ya no tiene forma indeterminada y se puede calcular por evaluación, para obtener la derivada buscada

$$f'(x) = \frac{-4}{\sqrt{5-4x-4(0)}+\sqrt{5-4x}}$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{5-4x}+\sqrt{5-4x}}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{5-4x}}$$

b. Para obtener la ecuación de la recta tangente se necesita un punto en la curva y la pendiente. La coordenada *y* de punto la obtenemos al evaluar en la función $x = -1$

$f(-1) = \sqrt{5-4(-1)} = \sqrt{9} = 3$, por lo que el punto de tangencia es $(-1,3)$

La pendiente de la recta tangente se obtiene evaluando la derivada en $x = -1$

$$f'(-1) = \frac{-2}{\sqrt{5-4(-1)}} = \frac{-2}{\sqrt{9}} = -\frac{2}{3}$$

Utilizando la fórmula punto pendiente para la ecuación de la recta se tiene

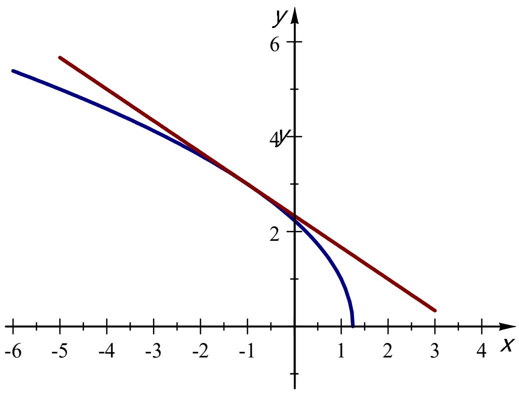
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 3 = -\frac{2}{3}(x+1)$$

$$3y - 9 = -2x - 2$$

$$2x + 3y - 7 = 0$$

La figura siguiente muestra la gráfica de la función en color azul, la recta tangente en color rojo.



PROBLEMA RESUELTO 3

Dada la función

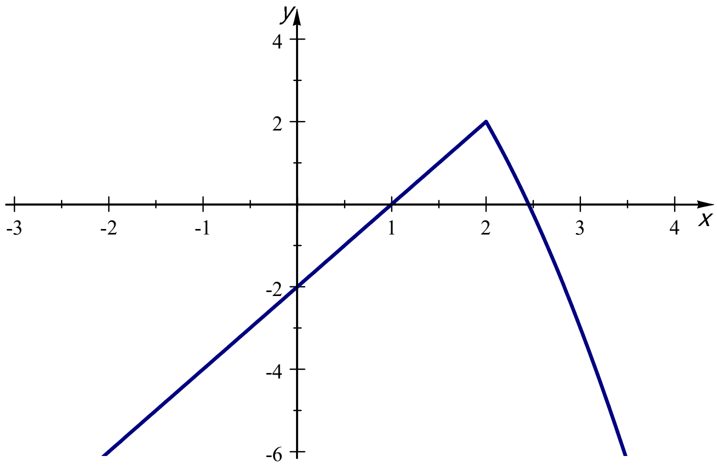
$$f(x) = \begin{cases} 2x-2 & si \quad x \le 2 \\ 6-x^2 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

a. Dibuje la gráfica de la función.

b. Utilice la definición de derivada para determinar si la función es derivable en $x = 2$

Solución

a. La gráfica de la función se muestra en la siguiente figura, se puede ver claramente que la función es continua en $x = 2$. Observe que la función tiene un pico en $x = 2$



b. para establecer si la función es derivable en $x = 2$, se debe calcular la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en 2.

Calculando la derivada por la izquierda

$$f'_{-}(2) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

Para evaluar este límite observe que h tiende a cero con valores negativos, por lo que $2 + h$ es un número menor que 2 y la función se debe evaluar en la expresión $2x - 2$

$$\begin{aligned} f'_{-}(2) &= \lim_{h \to 0^-} \frac{\left[2(2+h) - 2\right] - 2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^-} \frac{4 + 2h - 2 - 2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^-} \frac{2h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^-} (2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

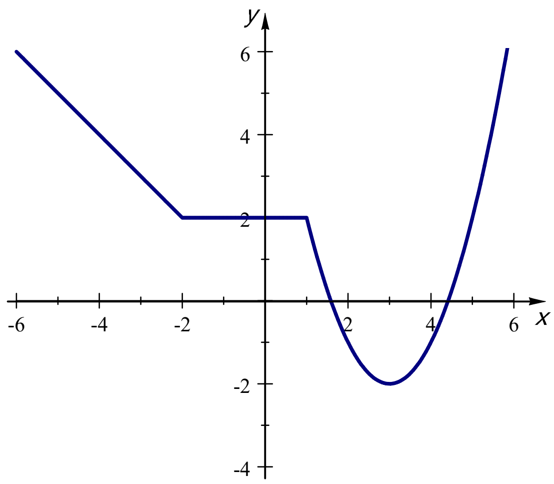
La derivada por la derecha en se calcula de forma similar, con la observación que $2 + h$ ahora es un número mayor que 2 y por lo tanto se debe evaluar en la expresión $6 - x^2$

$$\begin{aligned} f'_+(2) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\left[6-(2+h)^2\right]-(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{(6-4-4h-h^2)-(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{-4h-h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{-h(4+h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} -(4+h) \\ &= -4 \end{aligned}$$

Como la derivada por la izquierda no es igual a la derivada por la derecha se concluye que el límite no existe y por lo tanto la función no es derivable en $x = 2$

PROBLEMA RESUELTO 4

La siguiente figura muestra la gráfica de una función $y = f(x)$. Utilice esta gráfica para dibujar en forma aproximada la gráfica de la derivada $y = f'(x)$



Solución

Para dibujar la gráfica de la derivada de una función, a partir de la gráfica de la función, se debe estimar los valores de la pendiente en la función para varios puntos representativos. Los valores estimados de $f'(x)$ se dibujan como puntos en la gráfica de la derivada. Al unir todos estos puntos por medio de un trazo adecuado, obtendremos la gráfica de la derivada.

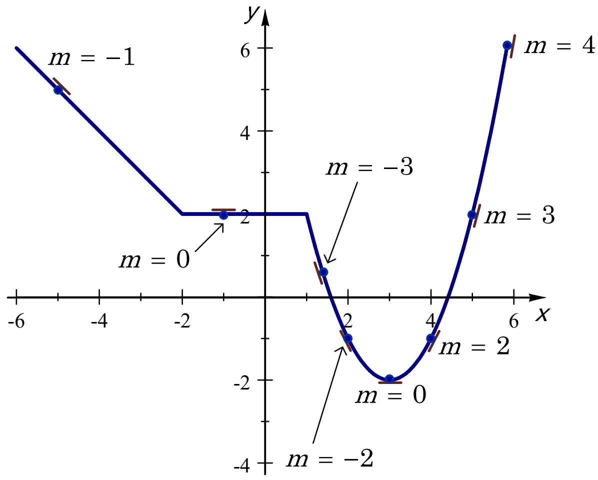
Se comenzará con el intervalo $(-\infty,-2)$, la gráfica de la función es una recta que tiene pendiente $m = -1$, es decir que para este intervalo la derivada tiene un valor constante $f'(x) = -1$.

En $x = -2$ la gráfica de la función tiene un pico, por lo que la derivada no existe en ese punto, es decir $f'(-2)\ \nexists$.

En el intervalo $(-1,1)$ la gráfica de la función es constante, la pendiente de una función constante es igual a cero. Por lo tanto, en el intervalo $(-1,1)$ la derivada es $f'(x)=0$.

En $x = 1$, nuevamente la función tiene un pico, entonces $f'(1)\ \nexists$

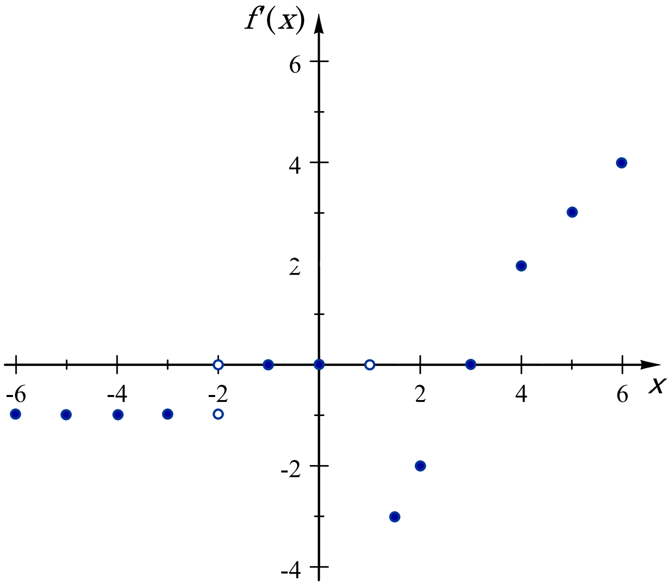
Finalmente, en el intervalo $(1,+\infty)$, la pendiente de la gráfica cambia con cada valor de *x*. En la gráfica siguiente se muestran los valores estimados de la pendiente para distintos valores de *x*.



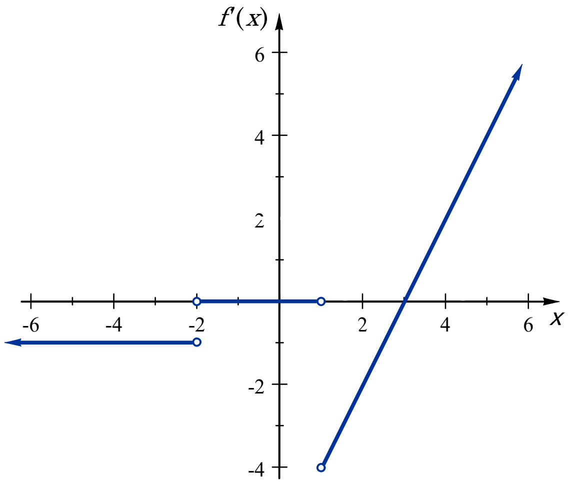
Para hacer más fácil el trazo de la gráfica de la derivada de la función, se construirá una tabla de valores, en donde se coloca en valor de $f'(x)$ para *x* variando entre -6 y 6

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	1.5	2	3	4	5	6
$f'(x)$	-1	-1	-1	-1	$\nexists$	0	0	$\nexists$	-3	-2	0	2	3	4

En la siguiente gráfica se dibujan los puntos de la tabla anterior. Estos puntos representan la pendiente en la gráfica de la función, pero representan puntos en la gráfica de la derivada



Finalmente, al trazar la gráfica que une los puntos de la figura anterior se obtendrá la aproximación de la gráfica de la derivada.



Observe que la gráfica de la derivada no está definida en $x=-2$ y en $x=1$, y además es discontinua en esos puntos. Esto es consistente con el hecho de que la derivada en esos números no exista. Como la función tiene puntos agudos en esos puntos la pendiente cambia bruscamente al pasar por ellos, provocando un salto en la gráfica de la derivada.