Multiplicadores de Lagrange

función objetivo: $z = f(x, y)$

función restricción $g(x, y) = c$

Si f y g tienen primeras derivadas parciales continuas en un conjunto abierto que contiene a las gráficas de la ecuación restricción y $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$. entonces existe un número real λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

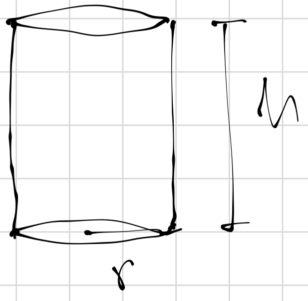
$$\nabla [f(x, y) = \lambda g(x, y)]$$

$$f_x(x_0, y_0) = \lambda g_x(x_0, y_0)$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lambda g_y(x_0, y_0)$$

$$g(x, y) = 0$$

Ej. un cilindro circular recto cerrado tendrá un volumen de $1000\ p^3$. La parte superior y el fondo del cilindro se construirán con metal que cuesta $\$2/pie^2$. El costado se formará con metal que cuesta $\$2.50/pie^2$. Determine el costo mínimo de fabricación.



$$V = 1000 = \pi r^2 h \rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

$$Costo = C_b + C_T + C_l$$

$$C = 2 * \pi r^2 + 2\pi r^2 + 2.5\,(2\pi r h)$$

$$C = 4\pi r^2 + 5\pi r h$$

función objetivo.

función restricci: $\rightarrow \pi r^2 h - 1000 = g(r, h)$

$$\nabla[4\pi r^2 + 5\pi r h = \lambda(\pi r^2 h - 1000)]$$

$$\nabla r: \quad 8\pi r + 5\pi h = \lambda(2\pi r h) \quad ①$$

$$\nabla h: \quad 5\cancel{\pi r} = \lambda(\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}) \quad ②$$

$$\nabla \lambda: \quad 0 = \pi r^2 h - 1000 \quad \to \quad \pi r^2 h = 1000 \quad ③$$

$$\Downarrow$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

② $5 = \lambda r \qquad \lambda = \frac{5}{r}$

① $8\pi r + 5\pi h = \frac{5}{\cancel{r}}(2\pi \cancel{r} h)$

$$8\pi r + 5\pi h = 10\pi h$$

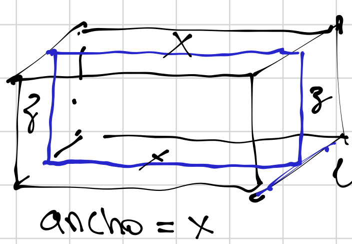
$$8\cancel{\pi} r = 5\cancel{\pi} h \quad \to \quad 8r = 5h$$

$$8r = 5\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) \qquad \sqrt[3]{r^3} = \sqrt[3]{\frac{5000}{8\pi}}$$

$$r = 5.84 \qquad h = \frac{1000}{\pi(5.84)^2} = 9.33$$

$$C = 4\pi(5.84)^2 + 5\pi(5.84)(9.33) = \$1284.47$$

Ej. un paquete en forma de una caja rectangular puede enviarse por servicio postal si la suma de su longitud y circunferencia (el perímetro de una sección transversal perpendicular a la longitud) es a lo suma de 108 pulgadas. Halle las dimensiones del paquete con el mayor volumen que es posible enviar.



altura = z

longitud = y

ancho = x

Suma = longitud + perímetro sección transversal = 108

$$\text{Suma} = y + x + z + x + z$$

$$\text{Suma} = y + 2x + 2z = 108 \quad \to \quad \text{función restricción}$$

función objetivo → volumen del paquete.

$$V = xyz$$

Mult. Lagrange.

$$\nabla [xyz = \lambda(y + 2x + 2z - 108)]$$

∇x: $yz = \lambda(2)$ ①

∇y: $xz = \lambda(1)$ ②

∇z: $xy = \lambda(2)$ ③

$\nabla \lambda$: $0 = y + 2x + 2z - 108 \rightarrow y + 2x + 2z = 108$ ④

① $\lambda = \frac{yz}{2}$ ② $\lambda = xz$ ③ $\lambda = \frac{xy}{2}$

① = ②
$\lambda = \lambda$
$\frac{y\cancel{z}}{2} = x\cancel{z}$
$\boxed{y = 2x}$

② = ③
$\lambda = \lambda$
$\cancel{x}z = \frac{\cancel{x}y}{2}$
$\boxed{y = 2z}$

① = ③
$\lambda = \lambda$
$\frac{\cancel{y}z}{\cancel{2}} = \frac{x\cancel{y}}{\cancel{2}}$
$\boxed{z = x}$

④ $2x + 2x + 2x = 108$
$6x = 108$ $x = \frac{108}{6} = 18$

$z = x \rightarrow z = 18$

$y = 2x = 2(18)$ $y = 36$
$x = 18$

Integrales multiples

deriv.
$f(x,y) = x^3y^4 + 5$
$f_x = 3x^2y^4$
$f_{xy} = 12x^2y^3$

$\int 3x^2y^4 dx = x^3y^4 + C$

$\int 12x^2y^3 dy = \frac{12}{4}x^2y^4 = 3x^2y^4$

Integrales iteradas

$$\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f_x(x,y)\,dx = f(x,y)\Big|_{h_1(y)}^{h_2(y)} = f(h_2(y)) - f(h_1(y))$$

⇓ respecto de x.

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f_y(x,y)\,dy = f(x,y)\Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} = f(x, g_2(x)) - f(x, g_1(x))$$

⇓

respecto de y.

$$\int_1^x (2x^2 y^{-2} + 2y)\,dy \qquad \frac{2x^2}{x}$$

$$-2x^2 y^{-1} + y^2\Big|_1^x = (-2x^2 x^{-1} + x^2) - (-2x^2 (1)^{-1} + (1)^2)$$

$$-2x + x^2 + 2x^2 - 1$$

$$= 3x^2 - 2x - 1$$

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$$

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right] dy.$$

Ej. Evaluar $\int_0^1 \int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dy\,dx$

$$\int_0^1 y\sqrt{1-x^2}\Big|_0^x dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx \qquad u = 1-x^2, \quad -\frac{du}{2} = x\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 u^{1/2}\,du = -\frac{1}{2}\,\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\Big|_0^1$$

$$-\frac{1}{3}\left[(1-1^2)^{3/2} - (1-0^2)^{3/2}\right] = \frac{1}{3}$$

Ej Evaluar $\int_0^1 \int_y^{2y} (1+2x^2+2y^2)\,dx\,dy$

$$\int_0^1 x+\frac{2}{3}x^3+2xy^2\Big|_y^{2y} dy \qquad \frac{2}{3}+2$$

$$\int_0^1 \left[\left(2y+\frac{2}{3}(2y)^3+2(2y)y^2\right)-\left(y+\frac{2}{3}y^3+2y\cdot y^2\right)\right]dy$$

$$\int_0^1 \left[2y+\frac{16}{3}y^3+4y^3-y-\frac{8}{3}y^3\right. \qquad \frac{8}{3}+4 \qquad \frac{20}{3}$$

$$\int_0^1 \left(y+\frac{20}{3}y^3\right)dy$$

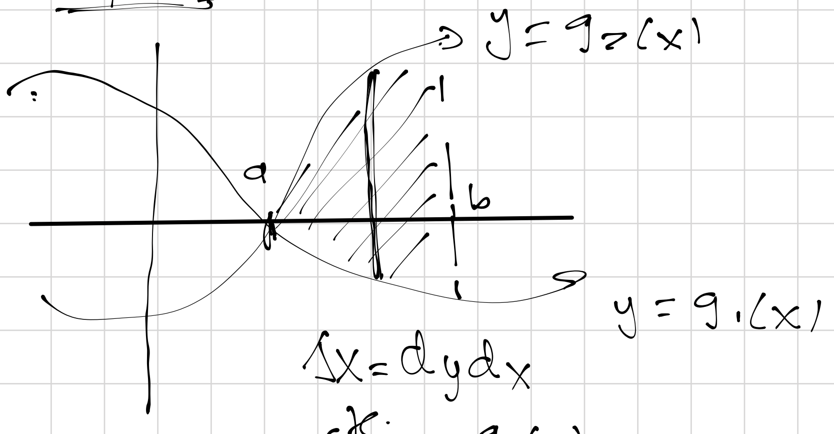
$$\frac{1}{2}y^2+\frac{5}{3}y^4\Big|_0^1$$

$$\left[\frac{1}{2}(1)^2+\frac{5}{3}(1)^4\right]-\cancel{\left[\frac{1}{2}(0)^2+\frac{4}{3}(0)^4\right]}\to 0$$

$$\frac{1}{2}+\frac{5}{3}=\frac{3+10}{6}=\frac{13}{6}$$

Regiones generales por medio de integrales dobles

Tipo I

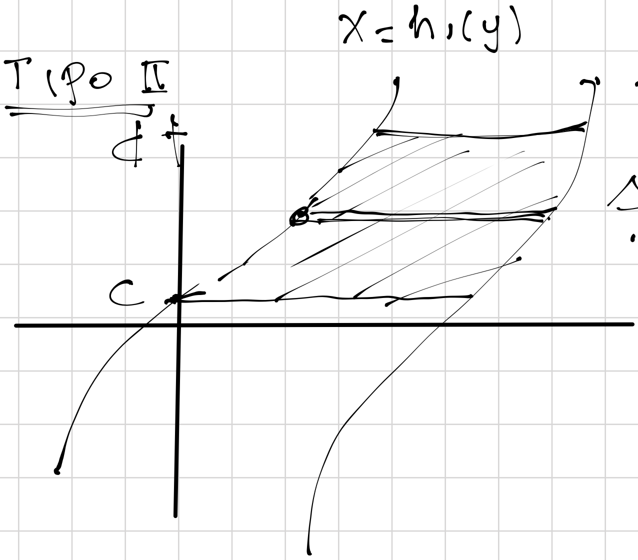


$\Delta x = dy\,dx$

c.t.

$$A=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\,dx$$

Tipo II



$\Delta y = dx\,dy$

de.

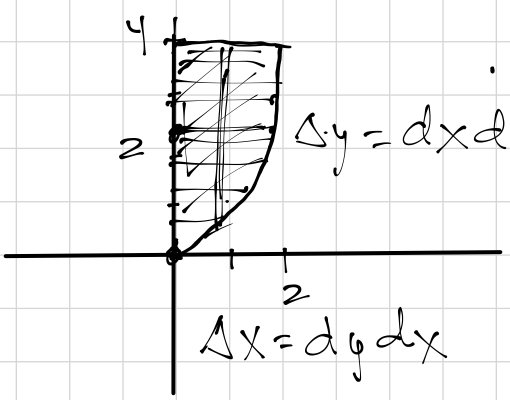
$$A = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx\,dy$$

Ej. trace la región de integración y cambie el orden de integración

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{4} f(x,y)\,dy\,dx \quad \to \Delta x \to \parallel$$

Para y: $y = 4$ $\quad y = x^2$

Para x: $x = 0$ $\quad x = 2$



$\sqrt{y} = \sqrt{x^2}$

$x = \sqrt{y}$

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

Ej. Dibuje la región R cuya área representa la integral iterada.

$$\int_0^2 \int_0^{x} dy\,dx + \int_2^4 \int_0^{4-x} dy\,dx \qquad \Delta x \to \parallel$$

R_1 $\qquad R_2$

R1

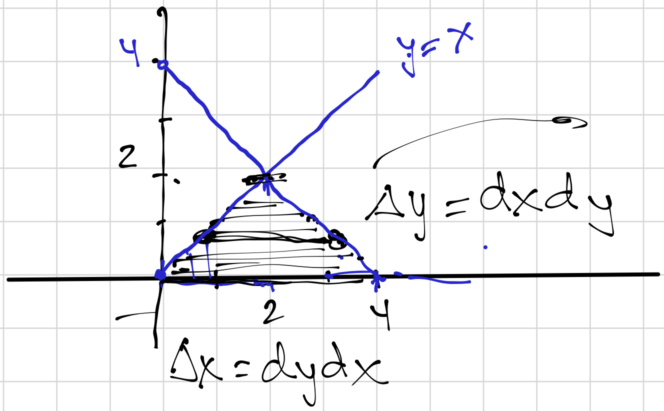
Para y: $y = 0$ $\quad y = x$

Para x: $x = 0$ $\quad x = 2$

R2

Para y: $y = 0$ $\quad y = 4 - x$

Para x: $x = 2$ $\quad x = 4$



$y = 4 - x$

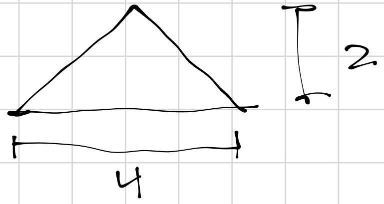
$x = 4 - y$

$$A = \int_0^2 \int_y^{4-y} dx\,dy.$$

$$= \int_0^2 x\Big|_y^{4-y} = \int_0^2 (4-y) - (y) = \int_0^2 (4 - 2y)\,dy$$

$$4y - y^2\Big|_0^2 = 4(2) - (2)^2 = 8 - 4$$

$$A = 4\ u^2$$



$$A = \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2}(4)(2) = 4\ u^2$$