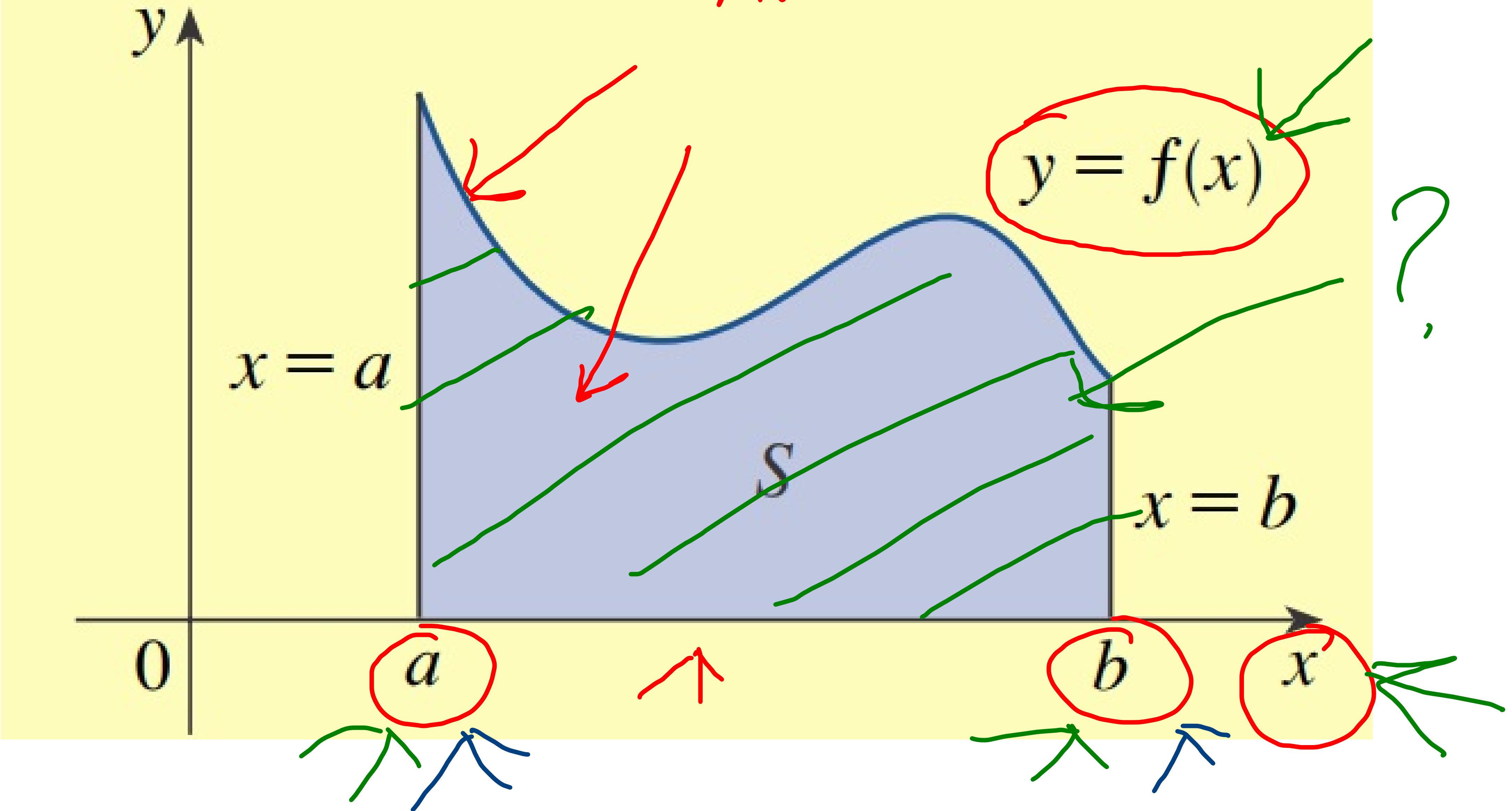
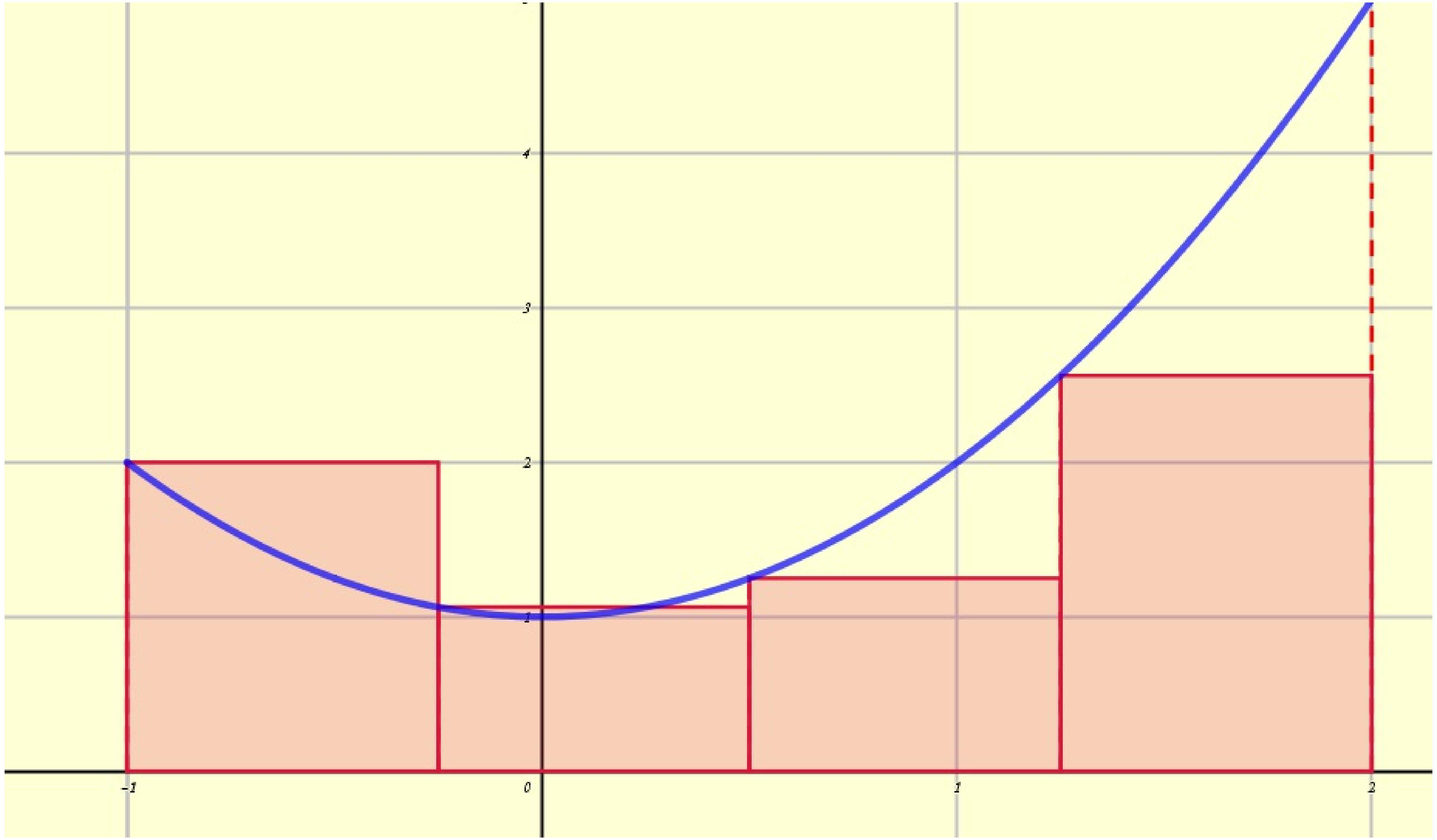
Integrales

El problema del área

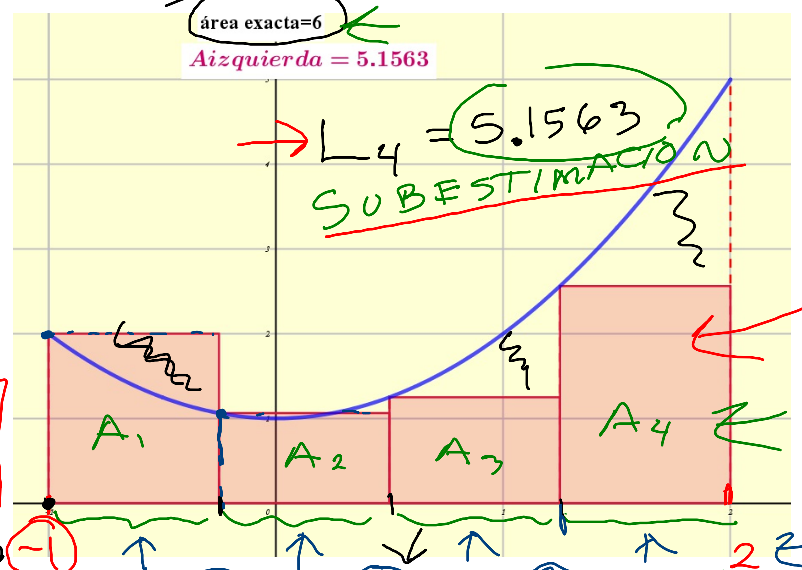
ÁREA BAJO LA CURVA





4
3
2
1
-1
0
1
2

Usando los puntos finales izquierdos



$n = 4$

$a = -1$

$b = 2$

$b - a$

$2 - (-1) = 3$

$\boxed{\Delta x = \frac{3}{4}}$

$A_1 = f(x_0)\Delta x$

$A_2 = f(x_1)\Delta x$

$A_3 = f(x_2)\Delta x$

$A_4 = f(x_3)\Delta x$

$A_n = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x$

$A_n = [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)]\Delta x$

$A \approx A_n \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}$

$x_0 + \Delta x = x_1$

$x_0 + 2\Delta x = x_2$

$x_0 + 3\Delta x = x_3$

n CUALQUIERA (L = LEFT, EXTREMO IZQ)

$L_n = [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})]\Delta x$

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$A = \lim_{n\to\infty} L_n$

$A = \lim_{n\to\infty} [f(x_0) + f(x_1) + \dots f(x_{n-1})]\Delta x$

SI EXISTE

$$A = \lim_{n \to \infty} L_n = \lim_{n \to \infty} [f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x]$$

$$x_0 = a$$

$$x_1 = a + \Delta x,$$

$$x_2 = a + 2\,\Delta x,$$

$$x_3 = a + 3\,\Delta x,$$

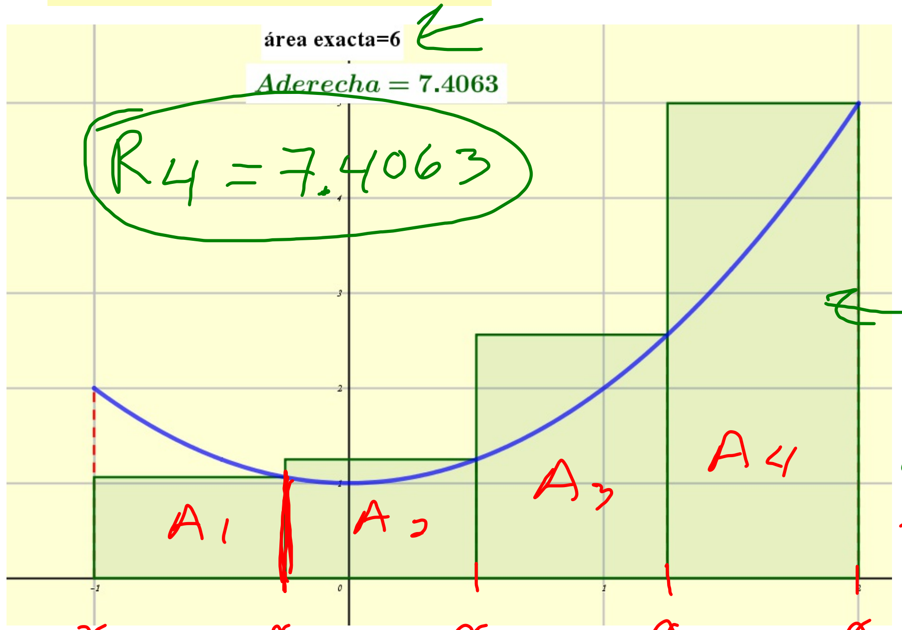
$$\vdots$$

$$x_n = b$$

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Usando los puntos finales derechos

EXTREMOS



$R_4 = 7.4063$

SOBRE ESTIMACIÓN

$L_4 < A < R_4$

$n = 4$

A_1 A_2 A_3 A_4

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4

$A_1 = f(x_1)\Delta x$ $\qquad A_3 = f(x_3)\Delta x$

$A_2 = f(x_2)\Delta x$ $\qquad A_4 = f(x_4)\Delta x$

$$A_n = [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)]\Delta x$$

n CUALQUIERA (R = RIGHT, EXTREMO DERECHO)

$$R_n = [f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)]\Delta x$$

$$A = \lim_{n \to \infty} R_n$$

$$A = \lim_{n \to \infty} [f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)]\Delta x$$

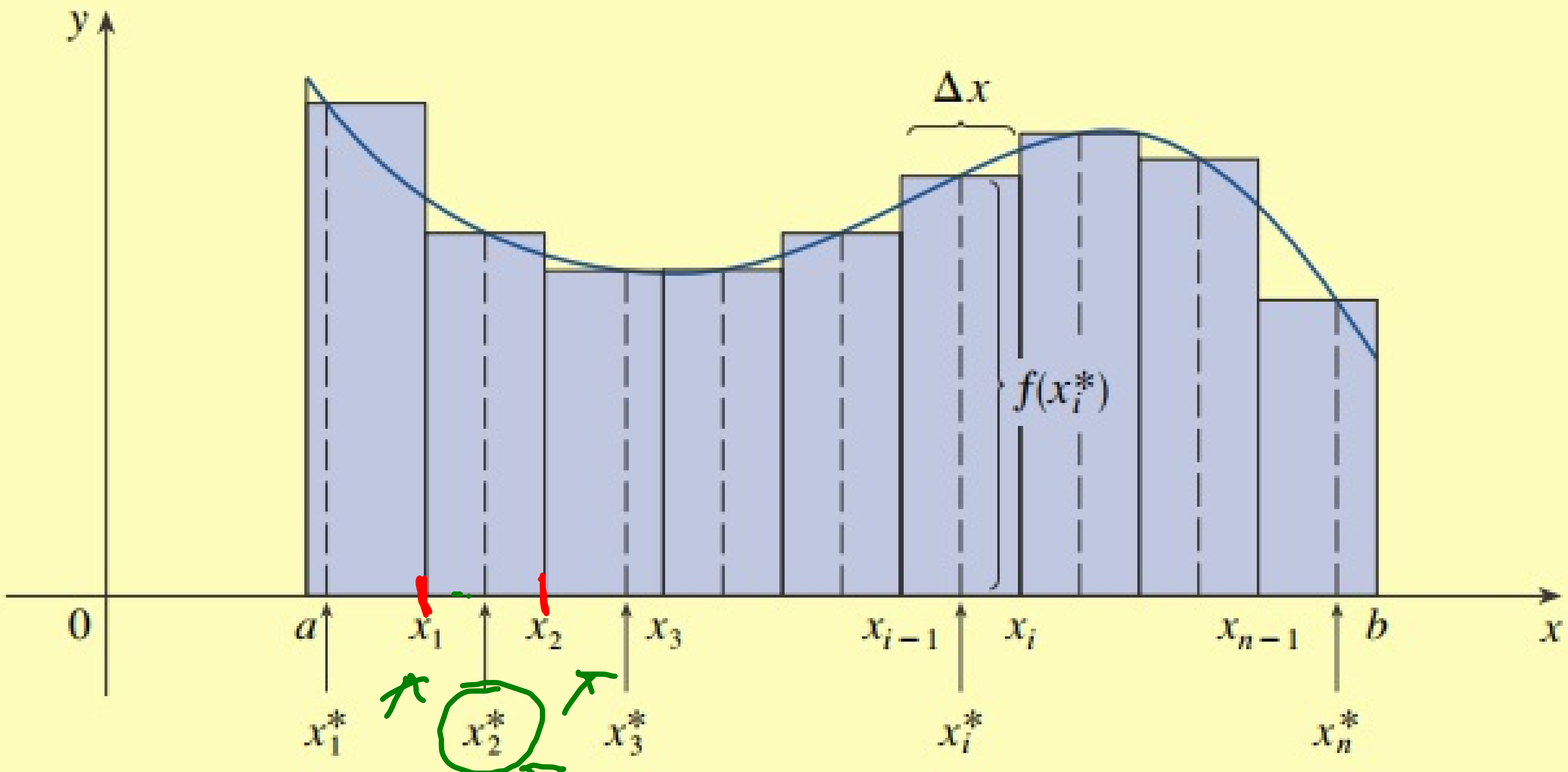
$$A = \lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} [f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x]$$

$$\begin{aligned}
x_0 &= a \\
x_1 &= a + \Delta x, \\
x_2 &= a + 2\,\Delta x, \\
x_3 &= a + 3\,\Delta x, \\
&\vdots \\
x_n &= b
\end{aligned}$$

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

De hecho, en lugar de usar los puntos finales izquierdos o los derechos, podría tomarse la altura del i-ésimo rectángulo como el valor de f en *cualquier* número x_i^*, en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. A estos números $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ se les llama **puntos muestra**. En la figura 13 se presentan los rectángulos de aproximación cuando se eligen puntos muestra diferentes de los puntos finales. Así, una expresión más general para el área de S es

$$\boxed{4} \qquad A = \lim_{n\to\infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$



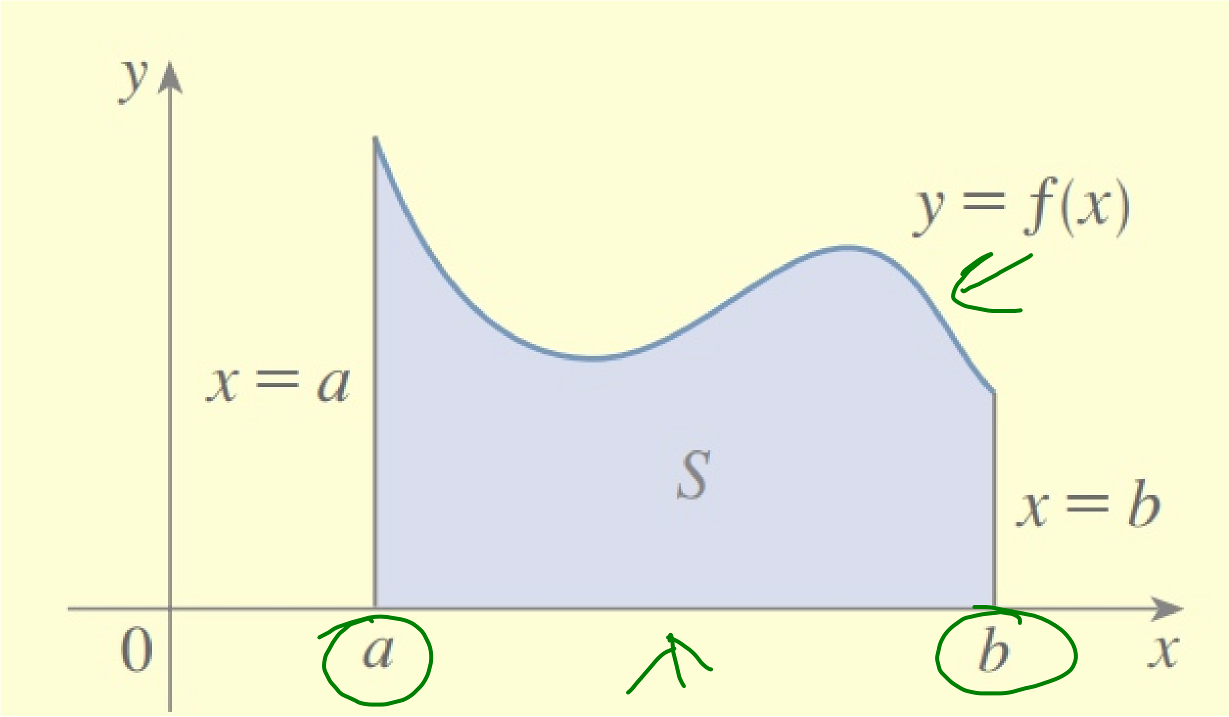
2 Definición El **área** A de la región S que se encuentra bajo la gráfica de la función continua f es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x]$$

SUMA ÁREA RECTÁNGULOS

$$x_0 = a$$
$$x_1 = a + \Delta x,$$
$$x_2 = a + 2\,\Delta x,$$
$$x_3 = a + 3\,\Delta x,$$
$$\vdots$$
$$x_n = b$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$



Notación Sigma Σ

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

Esto indica que hay que terminar con $i = n$.

Esto indica que hay que sumar.

Esto indica que hay que empezar con $i = m$.

$$\sum_{i=m}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x]$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x]$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

$$\left\{\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_1 &= a + 1\Delta x, \\ x_2 &= a + 2\Delta x, \\ x_3 &= a + 3\Delta x, \\ &\vdots \\ x_n &= b \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{x_i = a + i\Delta x}$$

(a) A partir de la lectura de los valores de la gráfica dada de f, use cinco rectángulos para encontrar una estimación inferior y una superior para el área bajo esa gráfica dada de f, de $x = 0$ a $x = 10$. En cada caso, dibuje los rectángulos que use.

(b) Encuentre nuevas estimaciones usando diez rectángulos en cada caso. $\rightarrow \Delta x = \frac{10-0}{10} = 1$

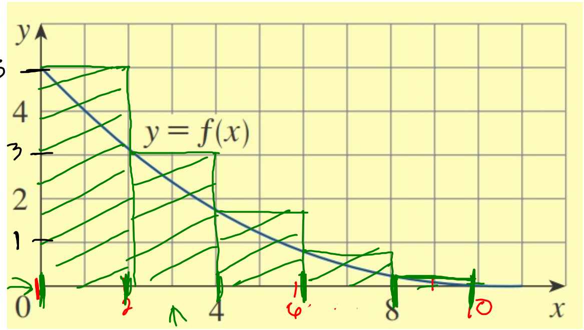
$n = 5$

$a = 0$

$b = 10$

$\Delta x = \frac{10-0}{5}$

$\Delta x = 2$



$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5$

$L_5 = [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)]\Delta x$

$L_5 = [f(0) + f(2) + f(4) + f(6) + f(8)]\, 2.$

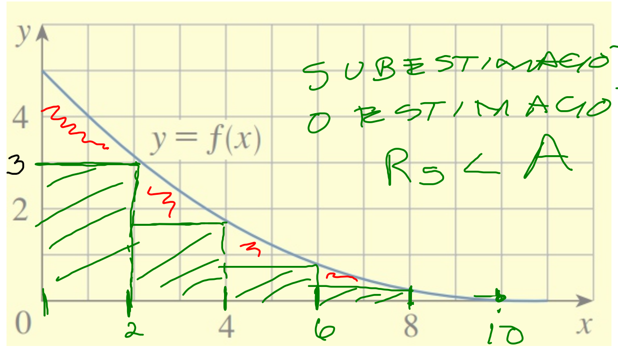
$L_5 = [5 + 3 + 1.7 + 0.8 + 0.4]\, 2$

$L_5 = \frac{109}{5} \approx 21.8$ $\quad$ $A \approx 21.8$

SOBREESTIMACIÓN O ESTIMACIÓN SUPERIOR

$A < 21.8$ SUPERIOR

$A < L_5$



SUBESTIMACIÓN O ESTIMACIÓN INFERIOR

$R_5 < A$

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5$

$R_5 = [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)]\Delta x$

$R_5 = [f(2) + f(4) + f(6) + f(8) + f(10)]\, 2.$

$R_5 = [3 + 1.7 + 0.8 + 0.4 + 0]\, 2.$

$R_5 = 11.8$ INFERIOR $11.8 < A$

$\underset{R_5}{11.8} < A < \underset{L_5}{21.8}$