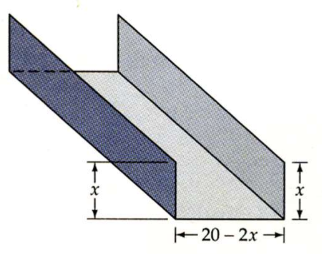
PROBLEMA RESUELTO 1

Una lámina metálica de 20 pulgadas de ancho y 12 pies de largo será utilizada para construir un canal rectangular de 12 pies de largo, como se muestra en la figura. Determine el valor de *x* de tal forma que el canal tenga una capacidad máxima.



Solución

El canal tendrá una capacidad máxima cuando el área de la sección transversal sea máxima, es decir cuando el área del rectángulo que tiene como base $20-2x$ y altura *x* alcance su valor máximo.

El área del rectángulo es

$$A = \text{base} \times \text{Altura} = (20-2x)(x)$$

$$A(x) = -2x^2 + 20x$$

El dominio de esta función está determinado por todos los valores que puede tomar *x* en el contexto del problema, dado que el ancho de la lámina es de 20 pulgadas, el valor de *x* debe ser mayor o igual a cero y menor o igual a 10, pues se doblan hacia arriba dos lados de largo *x*. Observe también que, cualquier otro valor de *x* al evaluarlo en la función da como resultado un área negativa, lo cual no es posible ya que se trata del área de un rectángulo. Por lo tanto, el dominio de la función es el intervalo $\left[0,10\right]$.

Derivando la función

$$A'(x) = D_x\left(-2x^2 + 20x\right) = -4x + 20$$

Igualando a cero para obtener los valores críticos

$$-4x + 20 = 0$$

$$-4x = -20$$

$$x = 5$$

Como el dominio de la función es un intervalo cerrado, se utilizará el teorema del valor extremo para establecer el valor máximo de la función en ese intervalo. Evaluando la función en los extremos del intervalo y en los valores críticos, para obtener el área máxima en el intervalo cerrado

$$A(0) = -2(0)^2 + 20(0) = 0$$

$$A(5) = -2(5)^2 + 20(5) = 50$$

$$A(10) = -2(10)^2 + 20(10) = 0$$

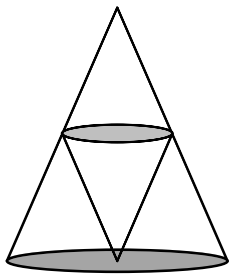
Por lo tanto, el área del canal es máxima cuando su altura *x* es de 5 pulgadas y la base es de 10 pulgadas.

PROBLEMA RESUELTO 2

En un cono circular recto de 3 pies de radio y 10 pies de altura se inscribe otro cono circular recto invertido, de tal forma que el vértice coincide con el centro de la base del cono grande. Determine las dimensiones del cono inscrito, de tal manera que su volumen sea máximo.

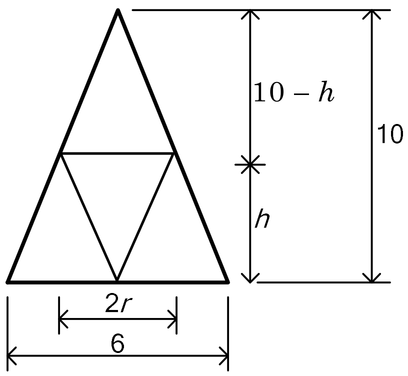
Solución

La siguiente figura ilustra la disposición de los conos descrita en el problema



El volumen del cono inscrito es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Utilizando semejanza de triángulos para expresar una variable en términos de otra se tiene



$$\frac{10}{6} = \frac{10-h}{2r}$$

$$20r = 60 - 6h$$

$$h = \frac{60-20r}{6}$$

$$h = \frac{10}{3}(3-r)$$

Sustituyendo en la fórmula del volumen del cono

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{10}{3}(3-r)$$

$$= \frac{10}{9}\pi r^2 (3-r)$$

El dominio de esta función es el intervalo cerrado $\left[0,3\right]$ ya que el radio del cono inscrito no puede ser mayor que el radio del cono que lo contiene

Calculando la primera derivada e igualando a cero para obtener valores críticos

$$\begin{aligned} V'(r) &= D_r\left[\frac{10}{9}\pi r^2\left(3-r\right)\right] = D_r\left[\frac{10}{3}\pi r^2 - \frac{10}{9}\pi r^3\right] \\ &= \frac{20}{3}\pi r - \frac{10}{3}\pi r^2 \\ &= \frac{10}{3}\pi r\left(2-r\right) \end{aligned}$$

Los valores críticos son $r = 0$ y $r = 2$

Como el dominio de la función es un intervalo cerrado, se utilizará el teorema del valor extremo para encontrar el volumen máximo. Evaluando en los valores críticos y en los extremos del intervalo se tiene

$$V(0) = \frac{10}{9}\pi\left(0\right)^2\left(3-0\right) = 0$$

$$V(3) = \frac{10}{9}\pi\left(3\right)^2\left(3-3\right) = 0$$

$$V(2) = \frac{10}{9}\pi\left(2\right)^2\left(3-2\right) = \frac{40}{9}\pi$$

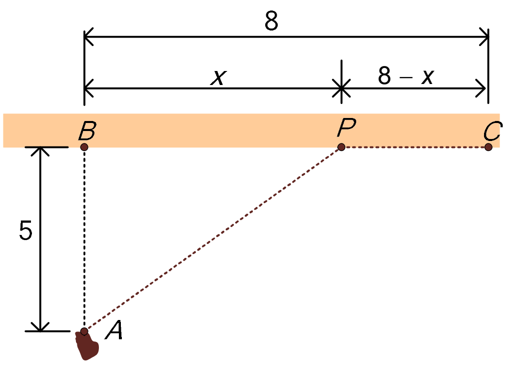
De donde el volumen máximo del cono es $\frac{40}{9}\pi$ cuando $r = 2$ y $h = \frac{10}{3}$

PROBLEMA RESUELTO 3

Una isla está ubicada en el punto *A*, a 5 km de distancia de una playa recta. Un lanchero en la isla quiere ir a un punto *C*, a 8 km del punto *B* sobre la playa. El lanchero puede remar a un punto *P* entre *B* y *C* a una rapidez de 3 km/h y después caminar en forma recta de *P* a *C* a 5 km/h. Calcule la distancia de *B* a *P* de tal forma que el recorrido se haga en el menor tiempo posible.

Solución

La siguiente figura muestra la isla y la disposición de los puntos sobre la playa recta, donde *x* es la distancia entre el punto *B* y el punto *C*



Utilizando el teorema de Pitágoras se calcula la distancia recorrida en lancha del punto A al punto *P*

$$d_1 = \sqrt{x^2 + 25}$$

Mientras que la distancia que recorre caminando del punto *P* al punto *C* es

$$d_2 = 8 - x$$

El tiempo total utilizado al trasladarse del punto A al punto C es la suma de los tiempos de los dos recorridos. Como la velocidad es constante se utiliza la fórmula del movimiento rectilíneo uniforma

$$D = vt$$

$$t = \frac{d}{v}$$

La función que expresa el tiempo total del recorrido en términos de la distancia *x* es

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{3} + \frac{8 - x}{5}$$

El dominio de esta función es el intervalo cerrado $\left[0,8\right]$ ya que la distancia entre *B* y *P* no puede ser mayor que 8.

Calculando la primera derivada

$$T'(x) = D_x\left(\frac{\sqrt{x^2 + 25}}{3} + \frac{8 - x}{5}\right)$$

$$T'(x) = \frac{1}{6}\left(x^2 + 25\right)^{-1/2}(2x) - \frac{1}{5}$$
$$= \frac{x}{3\sqrt{x^2 + 25}} - \frac{1}{5}$$
$$= \frac{5x - 3\sqrt{x^2 + 25}}{15\sqrt{x^2 + 25}}$$

Igualando la primera derivada a cero y despejando *x* para obtener los valores críticos

$$5x - 3\sqrt{x^2 + 25} = 0$$
$$5x = 3\sqrt{x^2 + 25}$$
$$25x^2 = 9(x^2 + 25)$$
$$16x^2 = 225$$
$$x = \sqrt{\frac{225}{16}} = \frac{15}{4} =$$
$$x = 3.75 \text{ km}$$

El único valor crítico es $x = 3.75$

Evaluando la función en los extremos del intervalo y en el valor crítico

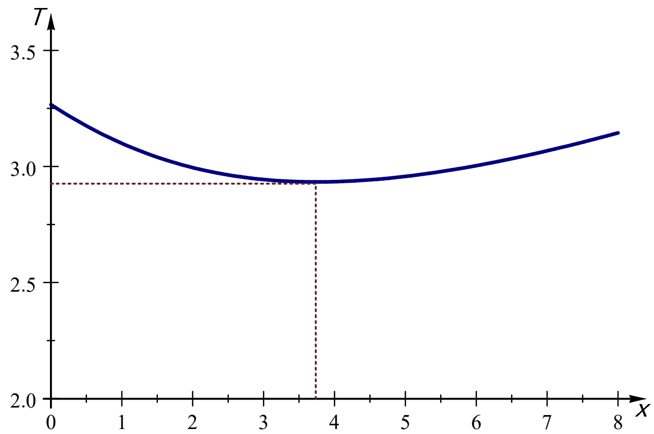
$$T(0) = \frac{\sqrt{0^2 + 25}}{3} + \frac{8 - 0}{5} = \frac{5}{3} + \frac{8}{5} \approx 3.27 \text{ horas}$$

$$T(8) = \frac{\sqrt{8^2 + 25}}{3} + \frac{8 - 8}{5} = \frac{\sqrt{89}}{3} \approx 3.14 \text{ horas}$$

$$T(3.75) = \frac{\sqrt{(3.75)^2 + 25}}{3} + \frac{8 - 3.75}{5} = \frac{\sqrt{89}}{3} \approx 2.93 \text{ horas}$$

Es decir que el lanchero debe remar a un punto *P* que se localiza a 3.75 km del punto *B* para que el tiempo total del recorrido sea mínimo.

La siguiente figura muestra la gráfica de la función en el intervalo $\left[0,8\right]$, que verifica la solución analítica, el mínimo está en el punto $(3.75, 2.93)$

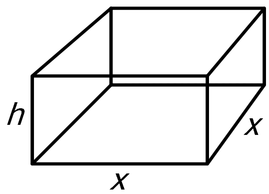


PROBLEMA RESUELTO 4

Un depósito en forma de caja rectangular abierta tiene un volumen de 250 centímetros cúbicos tiene una base cuadrada. El costo del material para la base es de Q6 por centímetro cuadrado y el del material para los lados es de Q2 por centímetro cuadrado. Determine las dimensiones del depósito del tal manera que, el costo del material utilizado en su fabricación sea mínimo.

Solución

La siguiente figura muestra una caja rectangular abierta con volumen de 250 centímetros cúbicos, en donde *x* el lado de la base cuadrada y *h* es la altura de la caja



El costo del material es la suma del costo de la base y del costo de las 4 paredes. El costo de cada pared se encuentra multiplicando el área de la pared por el costo del material,

$$\begin{aligned} C &= 6(x^2) + 2(4xh) \\ &= 6x^2 + 8xh \end{aligned}$$

Como el volumen de la caja es 250 se tiene que

$$\begin{aligned} x^2 h &= 250 \\ h &= \frac{250}{x^2} \end{aligned}$$

Sustituyendo *h* en la expresión para el costo

$$\begin{aligned} C(x) &= 6x^2 + 8x\left(\frac{250}{x^2}\right) \\ &= 6x^2 + \frac{2000}{x} \\ &= \frac{6x^3 + 2000}{x} \end{aligned}$$

Para establecer el dominio de esta función observe *x* debe ser mayor que cero, no puede ser cero pues la función no está definida cuando $x = 0$. Por otro lado, el valor de *x* puede crecer sin límite pues no hay ninguna condición que restrinja su crecimiento, por lo tanto, el dominio de la función es

$$(0, +\infty)$$

Calculando la primera derivada

$$C'(x) = D_x\left(\frac{6x^3 + 2000}{x}\right)$$

$$C'(x) = \frac{x(18x^2) - (6x^3 + 2000)(1)}{x^2}$$
$$= \frac{18x^3 - 6x^3 - 2000}{x^2}$$
$$= \frac{12x^3 - 2000}{x^2}$$

Igualando la primera derivada a cero y despejando x para obtener los valores críticos

$$\frac{12x^3 - 2000}{x^2} = 0$$
$$12x^3 - 2000 = 0$$
$$x^3 = \frac{2000}{12}$$
$$x = \sqrt[3]{\frac{500}{3}} = 5\sqrt[3]{\frac{4}{3}} \approx 5.50$$

Como el dominio de la función es un intervalo abierto, se utilizará el criterio de la primera derivada para establecer si en el valor crítico la función tiene un mínimo.

Intervalo	$C(x)$	$C'(x)$	Conclusión
$(0, 5.50)$		-	Decreciente
$x = 5.50$	545.14	0	Mínimo relativo
$(5.50, +\infty)$		+	Creciente

Por lo tanto, el costo mínimo de la caja es Q545.14, cuando las dimensiones de la caja son aproximadamente

$$x = 5.50\text{ cm} \quad \text{y} \quad h = \frac{250}{x^2} = \frac{250}{(5.50)^2} = 8.26\text{ cm}$$

La figura siguiente muestra la gráfica de la función en donde se puede verificar los cálculos realizados