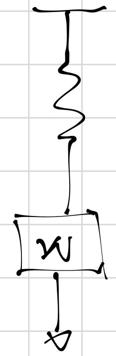
Movimiento libre no Amortiguado



→ la posición del cuerpo en cualquier instante

Fuerza del resorte

||

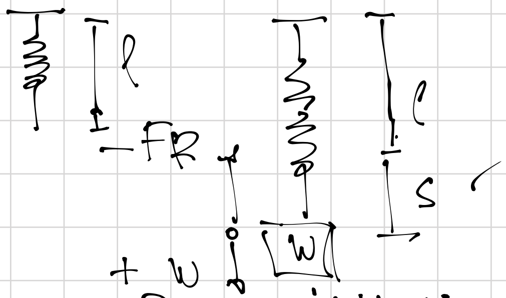
Ley de Hooke

$$F = Kx$$

$$W = mg$$

m = masa

g = gravedad = $32\ \text{ft}/s^2$

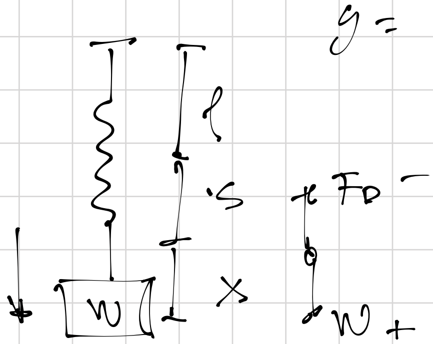


En equilibrio

$$\Sigma F_y = 0$$

$$W - Fe = 0$$

$$mg - Ks = 0$$



En movimiento.

Segunda Ley de Newton → $\Sigma F = ma$.

$$W - K(s+x) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\overset{0}{\cancel{(mg - Ks)}} - Kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-Kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\left[m\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0\right] * \frac{1}{m} \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0$$

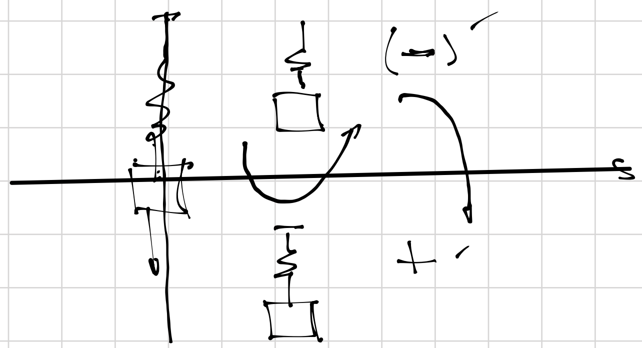
$$\omega^2 = \frac{K}{m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2 x = 0$$

$$m^2 + w^2 = 0 \rightarrow \sqrt{m^2} = \sqrt{-w^2} \rightarrow m = \pm wi$$

$$x(t) = \underline{C_1 \cos wt + C_2 \operatorname{sen} wt}$$

$$x(0) = x_0 \qquad x'(0) = v_0$$



Posición de Equilibrio

Forma alternativa para x(t)

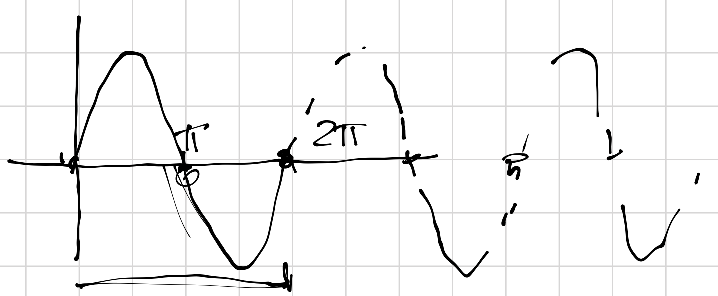
$$x(t) = A \operatorname{sen}(wt + \phi)$$

A = amplitud → donde empieza la gráfica.

ϕ = ángulo de desface.

$$wt + \phi = 0$$

$$t = -\frac{\phi}{w}$$



donde termina la gráfica.

$$wt + \phi = 2\pi$$

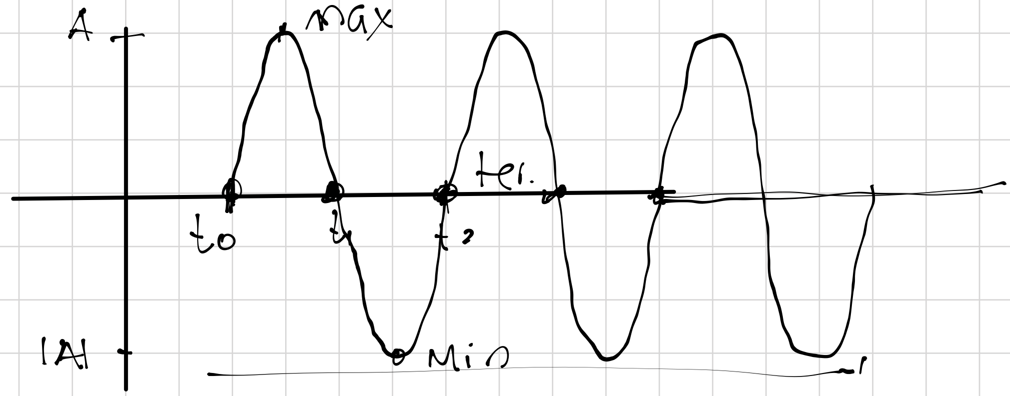
Periodo → representa el tiempo (medido en segundos) que tarda la masa en ejecutar un ciclo de movimiento

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \qquad T = \frac{2\pi}{w}$$

$$\phi = tg^{-1} \frac{C_1}{C_2}$$

Frecuencia: es el número de ciclos completados cada segundo.

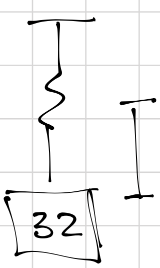
$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ $\qquad$ $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$



$$\omega t + \phi = n\pi$$

$$\#\text{ciclos} = \frac{\text{tiempo}}{\text{Periodo}}$$

Ej. una masa que pesa 32 libras alarga 2 pies un resorte. Determine la amplitud y el periodo de movimiento si la masa se libera desde un punto situado 1 pie arriba de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 2 pies/s. ¿Cuantos ciclos enteros habrá completado la masa al final de 4π segundos?



x = pies.

$x(0) = -1$ pie

$x'(0) = -2$ p/s.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$W = mg \rightarrow 32 = m(32) \rightarrow m = \frac{32}{32} = 1$ slug.

ley de Hooke $\rightarrow F = W = kx$

$32 = (2)k \rightarrow k = \frac{32}{2} = 16$ lb/pie

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{16}{1}x = 0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0$$

$$m^2 + 16 = 0$$

$$\sqrt{m^2} = \sqrt{-16} \rightarrow m = \pm 4i$$

$$x(t) = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t$$

$x(0) = -1 \qquad x'(0) = -2$

$$x' = -4c_1 \operatorname{sen} 4t + 4c_2 \cos 4t$$

$x(0) = -1$

$$-1 = c_1 \cos 4(0) + c_2 \operatorname{sen} 4(0)$$

$$\boxed{c_1 = -1}$$

$$-2 = -4c_1 \operatorname{sen} 4(0) + 4c_2 \cos 4(0)$$

$$-2 = 4c_2 \to c_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x(t) = -\cos 4t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4t$$

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-\tfrac{1}{2})^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\phi = tg^{-1}\frac{c_1}{c_2} = tg^{-1}\frac{-1}{-\frac{1}{2}} = tg^{-1} 2 = 1.1071$$

$$x(t) = \frac{\sqrt{5}}{2}\operatorname{sen}(4t + 1.1071)$$

$$\#\text{ciclos} = \frac{\text{tiempo}}{\text{Periodo}} = \frac{4\pi}{\frac{\pi}{2}} = 8$$

grafica → donde empieza

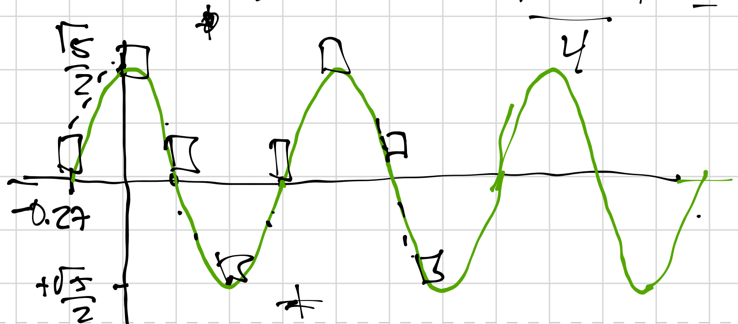
$$4t + 1.1071 = 0$$

$$t = \frac{-1.1071}{4} = -0.2767$$

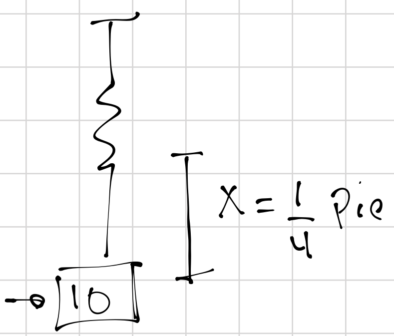
donde termina

$$4t + 1.1071 = 2\pi$$

$$t = 1.2940$$



Ej. Una masa que pesa 10 libras alarga un resorte $\frac{1}{4}$ pie. Esta masa se retira y se coloca una de 1.6 slug, que se libera desde un punto situado a $\frac{1}{3}$ pie arriba de la posición de equilibrio, con una velocidad descendente de 5/4 p/s. Encuentre la Ecuación del movimiento, y en que tiempo la masa logra un desplazamiento debajo de la posición de equilibrio numéricamente igual a ½ de la amplitud.



$\boxed{m = 1.6 \text{ slug.}}$

$F = W = Kx$

$10 = K\left(\frac{1}{4}\right)$

$\boxed{K = 40}$

$x(0) = -\frac{1}{3}$ pie.

$x'(0) = +\frac{5}{4}$ p/s.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{40}{1.6}x = 0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 25x = 0$$

$$m^2 + 25 = 0 \rightarrow \sqrt{m^2} = \sqrt{-25} \rightarrow m = \pm 5i$$

$$x(t) = C_1 \cos 5t + C_2 \operatorname{sen} 5t$$

$x(0) = -\frac{1}{3}$ pie

$$-\frac{1}{3} = C_1 \overset{1}{\cancel{\cos 5(0)}} + C_2 \overset{0}{\cancel{\operatorname{sen} 5(0)}}$$

$$\boxed{C_1 = -\frac{1}{3}}$$

$$x'(t) = -5C_1 \operatorname{sen} 5t + 5C_2 \cos 5t.$$

$x'(0) = \frac{5}{4}$

$$\frac{5}{4} = -5C_1 \cancel{\operatorname{sen} 5(0)}^{0} + 5C_2 \cancel{\cos 5(0)}^{1}$$

$$\frac{\cancel{5}}{4} = \cancel{5} C_2 \rightarrow \boxed{C_2 = \frac{1}{4}}$$

$$X(t) = -\frac{1}{3}\cos 5t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 5t$$

Forma alternativa $X(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{16+9}{144}} = \frac{5}{12}$$

$$\phi = tg^{-1}\frac{C_1}{C_2} = tg^{-1}\frac{-1/3}{1/4} = tg^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right) = -0.9272$$

$$X(t) = \frac{5}{12}\operatorname{sen}(5t - 0.9272)$$

donde empiezo

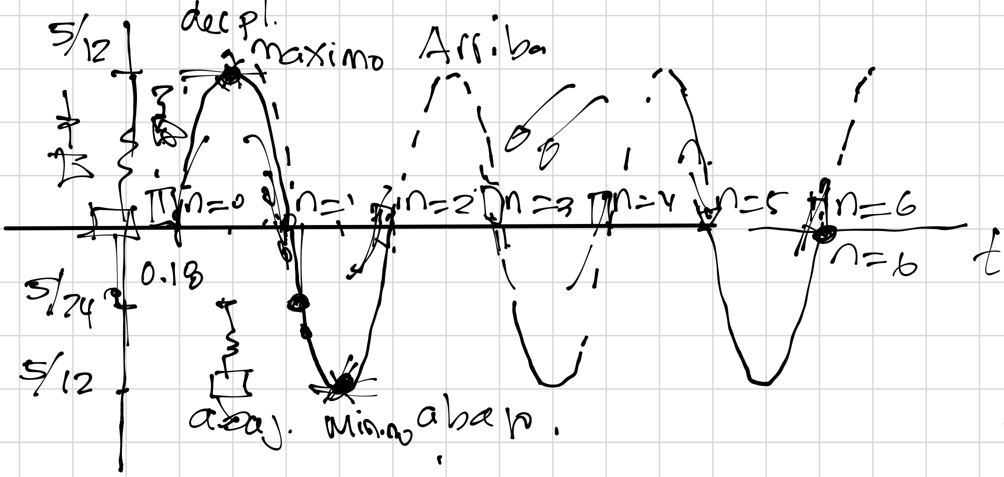
$5t - 0.9272 = 0$

$t = 0.185$

donde termina

$5t - 0.9272 = 2\pi$

$t = 1.44$



$$X = \frac{5}{24}$$

$$\frac{\cancel{5}}{24} = \frac{\cancel{5}}{12}\operatorname{sen}(5t - 0.9272)$$

$$\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2} = \cancel{\operatorname{sen}}(5t - 0.9272)$$

sen^{-1}

$$0.5235 = 5t - 0.9272$$

$$t = 0.2901$$

momento en que el cuerpo pasa por tercera vez hacia arriba de la posicion de equilibrio.

$$\boxed{\omega t + \phi = n\pi} \qquad n = 6$$

$$5t - 0.9272 = 6\pi$$

$$t = \frac{6\pi + 0.9272}{5} = 3.9553$$

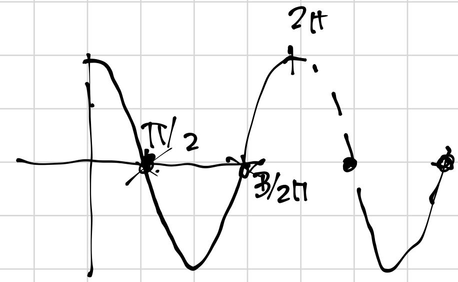
momento en que el cuerpo alcanza desplazamiento maximo y minimo.

$$x(t) = \frac{5}{12}\,\text{sen}(5t - 0.9272)$$

$$\frac{25}{2}$$

$$x' = \frac{5}{2}\cdot 5\cos(5t - 0.9272) = 0$$

$$\cos(5t - 0.9272) = 0 \qquad \cos^{-1} = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$$



$$5t - 0.9272 = \pi/2 \quad \to \text{max.}$$

$$\to t = \frac{\pi/2 + 0.9272}{5}$$

$$5t - 0.9272 = \frac{3}{2}\pi$$

$$\to t = \frac{\frac{3}{2}\pi + 0.9272}{5} = \quad \text{min.}$$