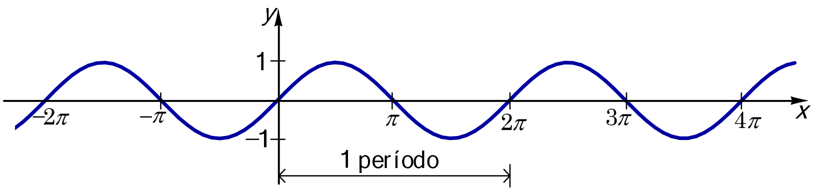
2.6 Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

OBJETIVOS

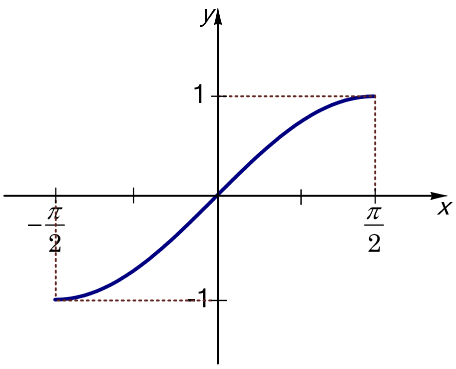
- Dibujar las gráficas de las funciones trigonométricas inversas.
- Calcular derivadas de funciones que involucran funciones trigonométricas inversas.
- Resolver problemas de rectas tangentes y razones de cambio en donde se involucran funciones trigonométricas inversas.

Función seno inverso

La función $f(x) = \operatorname{sen} x$, tiene dominio $(-\infty, \infty)$, el rango de la función es el intervalo $[-1,1]$ y el período de la función es 2π. Su gráfica se muestra en la siguiente figura



Claramente la función no es uno a uno, para definir su función inversa es necesario hacer una restricción al dominio de tal forma que la función sea uno a uno. Hay muchas restricciones posibles pero la mas apropiada consiste en restringir el dominio al intervalo cerrado $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Al hacer la restricción la función queda como se muestra en la figura siguiente



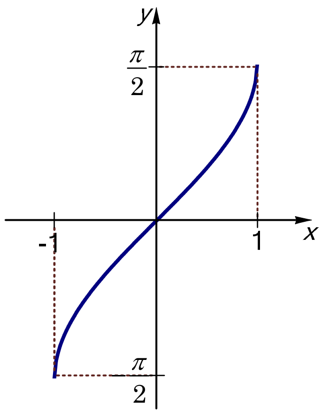
En estas condiciones la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ tiene una función inversa que se representa como

$$f^{-1}(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$$

El dominio de la función seno inverso es el intervalo $[-1,1]$ y su rango es $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Por la definición de función inversa, se tiene la siguiente propiedad

$$\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x) = x \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1} x\right) = x$$

La gráfica de la función $f^{-1}(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$ se muestra en la figura siguiente



Derivada de la función seno inverso

Para obtener una fórmula para la derivada de la función $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ se utiliza la propiedad enunciada arriba y derivación implícita como se muestra a continuación

$$y = \operatorname{sen}^{-1} x$$

$$\operatorname{sen} y = \operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1} x\right)$$

$$\operatorname{sen} y = x$$

Derivando ambos lados con respecto a x

$$D_x(\operatorname{sen} y) = D_x x$$

$$\cos y \cdot D_x y = 1$$

$$D_x y = \frac{1}{\cos y}$$

En ésta última expresión se debe recordar que y está en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Ahora, de la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$, se tiene que

$$\cos^2 y = 1 - \operatorname{sen}^2 y$$

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}$$

Observe que solo se toma el valor positivo de la raíz ya que en intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ el coseno siempre es positivo, entonces

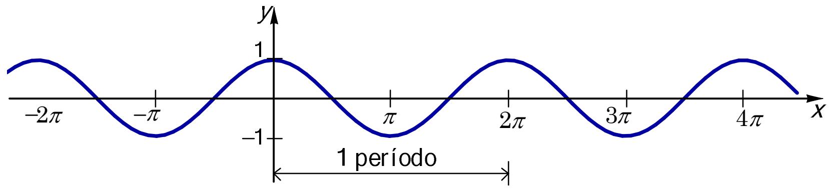
$$D_x y = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}}$$

Finalmente observe que se puede sustituir $\operatorname{sen} y = x$, para obtener la fórmula buscada.

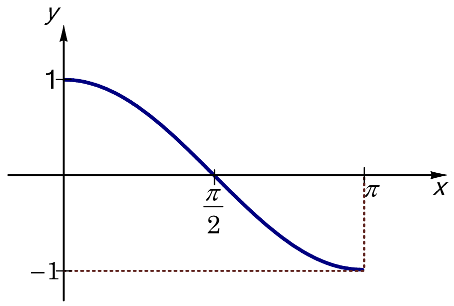
$$D_x(\operatorname{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

La función coseno inverso

La función $f(x) = \cos x$, tiene dominio $(-\infty,\infty)$, el rango de la función es el intervalo $[-1,1]$ y el período de la función es 2π. Su gráfica se muestra en la siguiente figura



La función no es uno a uno, para definir su función inversa es necesario hacer una restricción al dominio de tal forma que la función sea uno a uno. Hay muchas restricciones posibles pero la mas apropiada consiste en restringir el dominio al intervalo cerrado $[0,\pi]$. Al hacer la restricción la función queda como se muestra en la figura siguiente



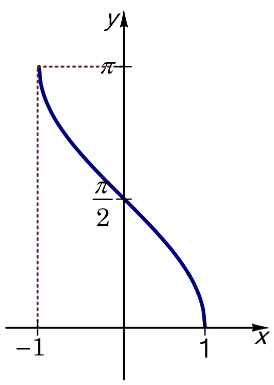
En estas condiciones la función $f(x) = \cos x$ tiene una función inversa que se representa como

$$f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$$

El dominio de la función seno inverso es el intervalo $[-1,1]$ y su rango es $[0,\pi]$. Por la definición de función inversa, se tiene la siguiente propiedad

$$\cos^{-1}(\cos x) = x \qquad \text{y} \qquad \cos\left(\cos^{-1} x\right) = x$$

La gráfica de la función $f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$ se muestra en la figura siguiente



Derivada de la función coseno inverso

Para obtener una fórmula para la derivada de la función $y = \cos^{-1} x$ se utiliza el mismo procedimiento que se uso para la función seno inverso

$$y = \cos^{-1} x$$
$$\cos y = \cos\left(\cos^{-1} x\right)$$
$$\cos y = x$$

Derivando ambos lados con respecto a x

$$D_x(\cos y) = D_x x$$
$$-\operatorname{sen} y \cdot D_x y = 1$$
$$D_x y = \frac{1}{-\operatorname{sen} y}$$

En ésta última expresión se debe recordar que y está en el intervalo $[0, \pi]$

Ahora, de la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$, se tiene que

$$\operatorname{sen}^2 y = 1 - \cos^2 y$$
$$\operatorname{sen} y = \sqrt{1 - \cos^2 y}$$

Observe que solo se toma el valor positivo de la raíz ya que en intervalo $[0, \pi]$ el seno siempre es positivo, entonces

$$D_x y = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}}$$

Finalmente observe que se puede sustituir $\cos y = x$, para obtener la fórmula buscada.

$$D_x(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

La función tangente inversa

Siguiendo un procedimiento similar, la función tangente inversa se define como

$$y = \tan^{-1} x \text{ si y solo si } \tan y = x$$

El dominio de la función tangente inversa es $(-\infty, \infty)$ y el rango es $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Para obtener una fórmula para la derivada se procede de forma similar a las funciones seno y coseno

$$D_x(\tan y) = D_x x$$
$$\sec^2 y \cdot D_x y = 1$$
$$D_x y = \frac{1}{\sec^2 y}$$

Utilizando la identidad trigonométrica $1 + \tan^2 y = \sec^2 y$ y luego expresando la derivada en términos de x

$$D_x y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y}$$

Como $\tan y = x$

$$D_x(y) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$D_x(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

La función secante inversa

Siguiendo un procedimiento similar, la función tangente inversa se define como

$$y = \sec^{-1} x \text{ si y solo si } \sec y = x$$

El dominio de la función secante inversa es $(-\infty,1) \cup (1,\infty)$ y el rango es $\left[0,\frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$. Para obtener una fórmula para la derivada se procede de forma similar a las funciones seno y coseno

$$D_x(\sec y) = D_x x$$

$$\sec y \cdot \tan y \cdot D_x y = 1$$

$$D_x y = \frac{1}{\sec y \cdot \tan y}$$

Utilizando la identidad trigonométrica $1 + \tan^2 y = \sec^2 y$ se tiene que $\tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1}$. Se toma solo raíz positiva ya que la tangente es positiva en el primero y cuarto cuadrante (dominio de la función secante). Al sustutiur se obtiene

$$D_x y = \frac{1}{\sec y \cdot \tan y} = \frac{1}{\sec y \cdot \sqrt{\sec^2 y - 1}}$$

Como $\sec y = x$

$$D_x(y) = \frac{1}{x\sqrt{x^1 - 1}}$$

$$D_x(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^1 - 1}}$$

Al expresar la derivada de las seis funciones trigonométricas inversas en términos de u, donde $u = g(x)$ se obtienen las fórmulas generales

$$D_x(\text{sen}^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u \qquad D_x(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2} D_x u \qquad D_x(\sec^{-1} u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} D_x u$$

$$D_x(\cos^{-1} u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u \qquad D_x(\cot^{-1} u) = \frac{-1}{1+u^2} D_x u \qquad D_x(\csc^{-1} u) = \frac{-1}{u\sqrt{u^2 - 1}} D_x u$$

Ejemplo 1: Derivación de trigonométricas inversas

Calcule la derivada de la función

$$f(x) = \cos^{-1} x + x\sqrt{1-x^2}$$

Solución

Observe que el segundo término es un producto, entonces

$$f'(x) = D_x\left(\cos^{-1} x\right) + D_x\left(x\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + x \cdot D_x\left(\sqrt{1-x^2}\right) + \sqrt{1-x^2} \cdot (1)$$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + x \cdot \frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-1/2}(-2x) + \sqrt{1-x^2}$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}$$

La derivada ya está calculada, solo hace falta simplificar la respuesta, para ello se obtendrá el mínimo común múltiplo

$$f'(x) = \frac{-1-x^2+\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ejemplo 2: Derivación de trigonométricas inversas

Calcule la derivada de la función

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + \sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Solución

Aplicando las reglas para derivar una función logarítmica y una tangente inversa se tiene

$$f'(x) = D_x\left[\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)\right] + D_x\left[\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\frac{x-2}{x+2}} D_x\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + \sqrt{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} D_x\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \frac{x+2}{x-2}\cdot\frac{(x+2)(1)-(x-2)(1)}{(x+2)^2} + \frac{\sqrt{2}}{1+\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Observe que en este punto ya se ha concluido con las reglas de derivación, lo que hace falta es simplificar la expresión realizando operaciones algebraicas.

$$f'(x) = \frac{x+2}{x-2}\cdot\frac{x+2-x+2}{(x+2)^2} + \frac{2}{2+x^2}$$
$$= \frac{4}{(x-2)(x+2)} + \frac{2}{2+x^2}$$
$$= \frac{4\left(2+x^2\right)+2\left(x^2-4\right)}{(x-2)(x+2)\left(2+x^2\right)}$$
$$= \frac{8+4x^2+2x^2-8}{(x-2)(x+2)\left(2+x^2\right)}$$
$$= \frac{6x^2}{(x^2-4)\left(2+x^2\right)}$$

Ejemplo 2: Derivación implícita de trigonométricas inversas

Calcule y'

$$x\tan^{-1} y + \operatorname{sen}^{-1}(x+y) = 1$$

Solución

Derivando ambos lados con respecto a x

$$D_x\left(x\tan^{-1} y + \operatorname{sen}^{-1}(x+y)\right) = D_x(1)$$

$$x \cdot \frac{1}{1+y^2} \cdot D_x y + \tan^{-1} y \cdot (1) + \frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}} \cdot D_x(x+y) = 0$$

$$\frac{x}{1+y^2} \cdot D_x y + \tan^{-1} y + \frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}} \cdot (1 + d_x y) = 0$$

Ahora que ya se terminó el proceso de derivación, hay que despejar $d_x y$. Para ello debemos desarrollar el producto y dejar en el lado izquierdo solo los términos que contienen la derivada

$$D_x\left(x\tan^{-1} y + \operatorname{sen}^{-1}(x+y)\right) = D_x(1)$$

$$\frac{x}{1+y^2} \cdot D_x y + \tan^{-1} y + \frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}} + \frac{D_x y}{\sqrt{1-(x+y)^2}} = 0$$

$$\frac{x}{1+y^2} \cdot D_x y + \frac{D_x y}{\sqrt{1-(x+y)^2}} = -\tan^{-1} y - \frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}$$

$$D_x y\left(\frac{x}{1+y^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}\right) = -\tan^{-1} y - \frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}$$

Ahora se pasa a dividir la expresión que multiplica a la derivada. Si es posible se simplificará un poco más el resultado

$$D_x y = \frac{-\tan^{-1} y - \dfrac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}}{\dfrac{x}{1+y^2} + \dfrac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}}$$

$$= \frac{\dfrac{-\tan^{-1} y \cdot \sqrt{1-(x+y)^2} - 1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}}{\dfrac{x\sqrt{1-(x+y)^2} + \left(1+y^2\right)}{\left(1+y^2\right)\sqrt{1-(x+y)^2}}}$$

$$= \frac{\left(-\tan^{-1} y \cdot \sqrt{1-(x+y)^2} - 1\right) \cdot \left(1+y^2\right)\sqrt{1-(x+y)^2}}{\sqrt{1-(x+y)^2}\left(x\sqrt{1-(x+y)^2} + \left(1+y^2\right)\right)}$$

$$= \frac{\left(-\tan^{-1} y \cdot \sqrt{1-(x+y)^2} - 1\right) \cdot \left(1+y^2\right)}{x\sqrt{1-(x+y)^2} + 1 + y^2}$$

Ejercicios derivadas trigonométricas inversas

En los ejercicios 1 a 19 encuentre la primera derivada de la función.

1. $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(2x)$

2. $y = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

3. $f(x) = \operatorname{sen}(2x) \cdot \operatorname{sen}^{-1}(2x)$

4. $f(x) = \left(\tan^{-1} x\right)^{-1}$

5. $y = \tan^{-1}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$

6. $f(x) = x^2 \tan^{-1}\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)$

7. $f(x) = 2\cos^{-1} x + 2x\sqrt{1 - x^2}$

8. $f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1 - x^2}\right)$

9. $f(x) = \sec^{-1}\left(\sqrt{x^2 + 9}\right)$

10. $f(x) = \csc^{-1}\left(2e^{3x}\right)$

11. $f(x) = 4\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}x\right) + x\sqrt{4 - x^2}$

12. $f(x) = x\tan^{-1} x - \ln\sqrt{1 - x^2}$

13. $f(x) = \tan^{-1}\left(x^3\right) - 3\ln\left[x + \operatorname{sen}(e^x)\right]$

14. $f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{3}{2}\ln\left(x^2 + 16\right)$

15. $f(x) = \sec^{-1}\left(\sqrt{x}\right)$

16. $f(x) = x\operatorname{sen}^{-1} x + x\cos^{-1} x$

17. $y = \dfrac{x \tan^{-1}\sqrt{x}}{\operatorname{sen}^{-1}\left(x^2\right)}$

18. $y = \dfrac{\tan^{-1}\left(x^2\right)}{x\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x}}$

19. $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - 1}} - \dfrac{2}{\sqrt{a^2 - 1}}\tan^{-1}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{a + \sqrt{a^2 - 1} + \cos x}\right)$

En los ejercicios 21 a 24 utilice derivación implícita para calcular la primera derivada

21. $\tan^{-1} y + e^x = \ln(xy)$

22. $\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} y = xy$

23. $\operatorname{sen}^{-1}(xy) = \cos^{-1}(x + y)$

24. $\cot^{-1} x + e^y = \ln(xy)$

25. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \tan^{-1} x$ en $x = 0$.

26. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ que es paralela a la recta cuya ecuación es $y - 2x = 5$.

27. Encuentre los puntos de la curva $y = \tan^{-1} x$ en donde la recta tangente es horizontal.