# 1.3 Continuidad

## INTRODUCCIÓN

Uno de los conceptos fundamentales del cálculo es el de continuidad en un punto. De manera informal se puede decir que una función es continua en $x = c$, si su gráfica no tiene agujeros o saltos al pasar por $c$.

Si bien el análisis de la continuidad en un punto es muy teórico, el concepto de continuidad es simple. Es preciso que el estudiante distinga cuando una función es continua en un punto y cuando no lo es ya que muchas de las definiciones y teoremas del cálculo son aplicables sólo a funciones continuas.

## OBJETIVOS

Al finalizar el estudio y desarrollar las actividades de ésta sección el estudiante estará en capacidad de

- Determinar si una función es continua en un punto usando la definición de continuidad.
- Usar la gráfica de una función para determinar si es continua en un punto.
- Determinar si una función es continua en un intervalo.

## Continuidad en un punto

Una función $f$ es continua en $x = c$ si satisface las condiciones siguientes

1. $f(c)$ está definida.
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

La figura 1 muestra la gráfica de una función que es continua en todos los puntos de su dominio

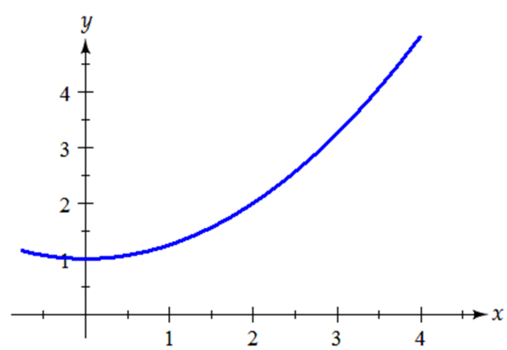



**Figura 1**

Cuando una función no satisface alguna de las 3 condiciones de la definición de continuidad se dice que es discontinua en ese punto.

En la figura 2 se muestra la gráfica de una función discontinua en $x = 2$ ya que no satisface la primera condición de la definición

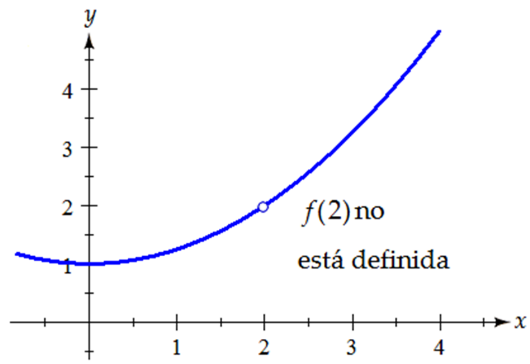



**Figura 2**

En la figura 3 se muestra la gráfica de una función que no es continua en $x = 2$ pues no satisface la segunda, condición de la definición

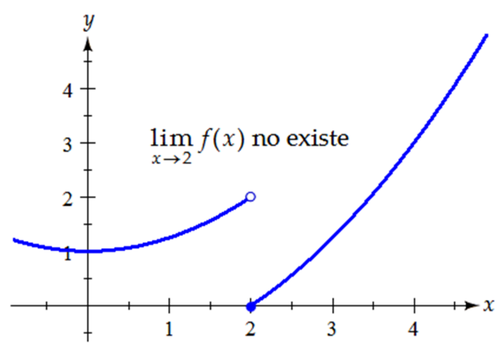



**Figura 3**

En la figura 4 se muestra la gráfica de una función que satisface las primeras dos condiciones de la definición en $x = 2$ pero que es discontinua pues no satisface la tercera condición.

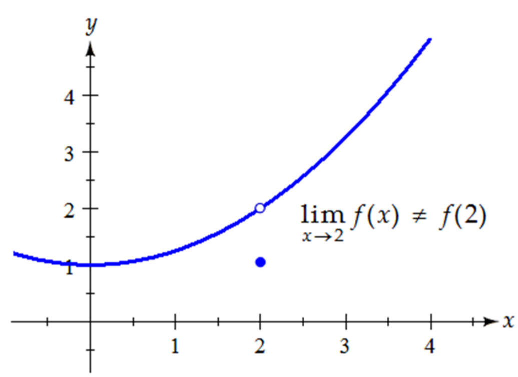



**Figura 4**

Cuando una función es discontinua en $x = c$, pero el límite $\lim_{x \to c} f(x)$ existe, se dice que la función tiene una discontinuidad removible en $c$ ya que es posible redefinir la función de tal manera que sea continua en todo su dominio.

Cuando una función es discontinua en $x = c$, pero el límite $\lim_{x \to c} f(x)$ no existe, se dice que la función tiene una discontinuidad no removible en $c$ ya que no es posible redefinir la función de tal manera que sea continua en todo su dominio.

## **Ejemplo 1:** Continuidad en una función por partes

Si la función $f$ está definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1 \le x \le 1 \\ 4 - x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

**a.** Analice si la función es continua en $x = -1$.

**b.** Analice si la función es continua en $x = 1$.

**c.** Dibuje la representación gráfica de la función para confirmar sus resultados analíticos.

## Solución

**a.** La función es continua en $x = -1$ si satisface las 3 condiciones de la definición de continuidad en ese punto.

**i.** La primera condición establece que $f(-1)$ esté definida

$f(-1) = (-1)^2 = 1$, por lo que si está definida.

**ii.** La segunda condición es que el límite exista. Para calcular el límite en una función de varias fórmulas se usan límites laterales.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^2) = (-1)^2 = 1$$

Como el límite $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ se tiene que el límite si existe.

**iii.** Finalmente la tercera condición establece que el límite debe ser igual a la imagen. En este caso se tiene

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 1$ y $f(-1) = 1$. Por lo tanto se cumple la tercera condición y se concluye que la función es continua en $x = -1$

**b.** La continuidad en $x = 1$ se analiza de la misma forma que en el inciso anterior

$f(1) = (1)^2 = 1$, si está definida.

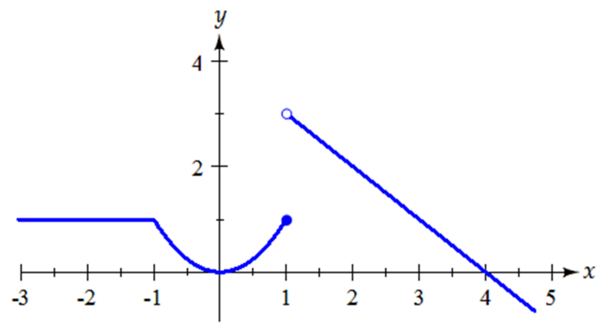
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2) = (1)^2 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (4 - x) = (4 - 1) = 3$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \ne \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, se concluye que el límite no existe.

Por lo tanto la función no es continua en $x = 1$.

**c.** La figura 5 muestra la gráfica de la función, en donde se pueden verificar los resultados obtenidos analíticamente.




## Ejemplo 2: Continuidad en una función racional

Dada la función

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{2 - x}$$

**a.** Analice la continuidad de la función en $x = 2$.

**b.** Si la función es discontinua removible, redefina la función de tal forma que sea continua en todo número.

## Solución

**a.** Al utilizar la definición de continuidad en $x = 2$ se tiene:

Calculando $f(2)$

$$f(2) = \frac{(2)^3 - 8}{2 - (2)} = \frac{0}{0}$$

Como $f(2)$ no está definida, se tiene que la función es discontinua en 2.

**b.** Para establecer si es discontinua removible o no removible se debe calcular el límite.

Calculando $\lim_{x \to 2} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{2 - x} &= \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{-(x - 2)} \\ &= \lim_{x \to 2} -(x^2 + 2x + 4) \\ &= -(4 + 4 + 4) \\ &= -12 \end{aligned}$$

Como el límite existe, se tiene que la función es discontinua removible en 2. La función será continua si se satisface la tercera condición

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$$

Como $f(2)$ no está definida per el límite si existe, será suficiente con definir $f(2)$ con el mismo valor que el límite, por lo tanto, la función será continua si se redefine como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{2 - x} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ -12 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$$

## Continuidad en un intervalo abierto

Una función es continua en un intervalo abierto $(a, b)$, si es continua en todos los números del intervalo.

Es claro que no se puede hacer un análisis de continuidad en cada punto de un intervalo abierto. La continuidad en un intervalo abierto se analiza utilizando el conocimiento que ya se tiene de la continuidad de ciertas funciones; por ejemplo, las funciones polinomiales son continuas en todos los reales, por lo tanto son continuas en cualquier intervalo abierto. Las funciones racionales son continuas en todo su dominio.

## Continuidad en un intervalo cerrado

Una función es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ si satisface las condiciones siguientes:

**1.** Es continua en el intervalo abierto $(a, b)$

**2.** Es continua por el lado derecho de $a$, es decir que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

**3.** Es continua por el lado izquierdo de $b$, es decir que $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

La definición de continuidad en un intervalo cerrado puede aplicarse a intervalos cerrados unicamente por la derecha $(a, b]$ o a intervalos cerrados por la izquierda $[a, b)$. En cualquiera de los dos casos solo se utiliza el inciso 2 o el inciso 3, según corresponda.

## Sugerencias para el estudiante

Para analizar la continuidad de una función $x = c$ siga el procedimiento siguiente

**1.** Calcule $f(c)$. Si $f(c)$ no está definida la función es discontinua en $c$. Si desea establecer si la discontinuidad es removible o no removible continúe con el paso 2.

**2.** Calcule $\lim\limits_{x \to c} f(x)$. Si el límite no existe, es decir que no es un número real. La función es discontinua no removible. Si el límite existe, hay que continuar con el paso 3.

**3.** Verifique que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$. Esto significa que el límite y la imagen deben tener el mismo valor en $x = c$ y este valor debe ser un número real. Si ésta última condición se cumple entonces la función es continua en $c$. Si Esta última condición no se cumple, pero el límite existe, la función es discontinua removible en $c$.

Para analizar la continuidad en un intervalo, primero se debe establecer si la función es continua en el intervalo abierto correspondiente haciendo uso del de la continuidad de las diferentes funciones ya conocidas. Luego se debe analizar la continuidad de la función en el extremo del intervalo utilizando la definición de continuidad en un intervalo cerrado.

## Ejemplo 3: Usando continuidad para calcular constantes

Determine los valores de $a$ y $b$ de tal forma que la función dada sea continua en todos los reales. Dibuje la gráfica de la función resultante

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 6a & \text{si} \quad x < -2 \\ 3ax - 7b & \text{si} \quad -2 \le x \le 3 \\ x - 12b & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

## Solución

Para que la función sea continua en -2, el límite por la izquierda y el límite por la derecha deben ser iguales

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x)$$

Al calcular los límites y simplificar se obtiene

$$\lim_{x \to -2^-} (3x + 6a) = \lim_{x \to -2^+} (3ax - 7b)$$

$$3(-2) + 6a = 3a(-2) - 7b$$

$$12a + 7b = 6$$

$$7b = 6 - 12a$$

$$b = \frac{6 - 12a}{7}$$

De la misma forma, para que la función sea continua en 3, el límite por la izquierda y el límite por la derecha deben ser iguales

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x)$$

Al calcular los límites y simplificar se obtiene

$$\lim_{x \to 3^-} (3ax + 7b) = \lim_{x \to 3^+} (x - 12b)$$

$$3a(3) - 7b = (3) - 12b$$

$$9a + 5b = 3$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtendrán los valores de $a$ y $b$. Despejando $b$ en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda se tiene

$$7b = 6 - 12a$$

$$b = \frac{6 - 12a}{7}$$

$$9a + 5b = 3$$

$$9a + 5\left(\frac{6 - 12a}{7}\right) = 3$$

$$63a + 30 - 60a = 21$$

$$3a = -9$$

$$a = -3$$

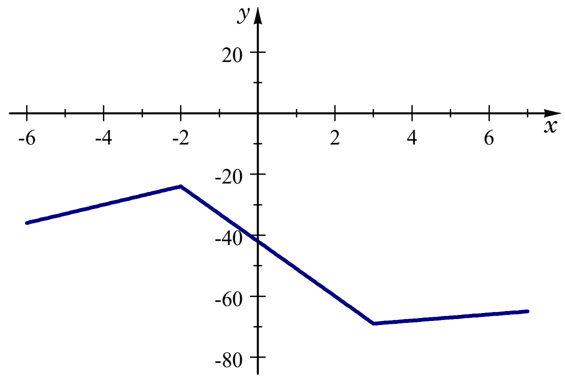
$$b = \frac{6 - 12a}{7} = \frac{6 - 12(-3)}{7} = \frac{42}{7} = 6$$

Entonces los valores que hacen que la función sea continua son $a = -3$ y $b = 6$

La función queda de la siguiente forma

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 18 & \text{si} \quad x < -2 \\ -9x - 42 & \text{si} \quad -2 \le x \le 3 \\ x - 72 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

La siguiente figura muestra la gráfica resultante, donde se ve claramente que es continua en todo número




## Ejercicios sobre continuidad

En los ejercicios 1 a 16 analice la continuidad de la función en el número dado, determine si la discontinuidad es removible o no removible. Si la discontinuidad es removible, redefina la función para que se continua en todo número.

**1.** $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}$, $a = -3$

**2.** $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x + 3}$, $a = -3$

**3.** $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}$, $a = -2$

**4.** $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 - 9}$, $a = 3$

**5.** $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^4 - 16}$, $a = 2$

**6.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - 2x^2 - 11x + 12}$, $c = 2$

**7.** $f(x) = \dfrac{x}{3 - \sqrt{x + 9}}$, $c = 0$

**8.** $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1 + x} - 1}{x}$, $c = 0$

**9.** $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 3}{x - 27}$, $c = 27$

**10.** $f(x) = \dfrac{x + 5}{5 - |x|}$, $c = -5$

**11.** $f(x) = \dfrac{x + 4}{|x + 1| - 3}$, $c = -4$

**12.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \end{cases}$, $a = 2$

**13.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, $c = 0$

**14.** $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 2 \\ 4 - x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

**15.** $f(x) = \begin{cases} (x - 2)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, $a = 1$

**16.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$, $c = 0$

En los ejercicios 17 a 22 utilice la definición de continuidad en un intervalo para establecer si la función es continua en el intervalo dado.

**17.** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$, $[-2, \infty)$

**18.** $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 8}$, $(-\infty, \infty)$

**19.** $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $[-2, 2]$

**20.** $f(x) = |x - 5|$, $(-\infty, \infty)$

**21.** $f(x) = \dfrac{x}{|x-5|}, \quad [5,+\infty)$

**22.** $f(x) = \begin{cases} 3x - \sqrt{x} & \text{si} \quad x \le 1 \\ x\sqrt{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}, \quad [1,+\infty)$

En los ejercicios 23 a 30 determine los intervalos donde la función dada es continua, justifique sus respuestas basándolas en la definición de continuidad en un intervalo.

**23.** $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$

**24.** $f(x) = \dfrac{x-1}{3x+7}$

**25.** $f(x) = \dfrac{x-1}{3x^2-4x-4}$

**26.** $f(x) = \sqrt{5+x}$

**27.** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{x}}$

**28.** $f(x) = \sqrt{x^2-9}$

**29.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{x}{x-2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

**30.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-3} & \text{si} \quad x \le 2 \\ \dfrac{1}{x-4} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

En los 31 a 44 determine los valores de las constantes, de tal forma que la función sea continua en todo número real.

**31.** $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x \le 2 \\ ax^2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

**32.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-a^2}{x-a} & \text{si} \quad x \ne a \\ ax^2 & \text{si} \quad x = a \end{cases}$

**33.** $f(x) = \begin{cases} x+3 & si \quad x \le 2 \\ cx+6 & si \quad x > 2 \end{cases}$

**34.** $f(x) = \begin{cases} cx^2+3x & \text{si} \quad x < 5 \\ x^3 - cx & \text{si} \quad x \ge 5 \end{cases}$

**35.** $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < -1 \\ ax+b & \text{si} \quad -1 \le x \le 3 \\ -2 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

**36.** $f(x) = \begin{cases} x+2a & \text{si} \quad x < -2 \\ 3ax+b & \text{si} \quad -2 \le x \le 1 \\ 3x-2b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

**37.** $f(x) = \begin{cases} x+2c & \text{si} \quad x < -2 \\ 3cx+k & \text{si} \quad -2 \le x \le 1 \\ 3x-2k & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

**38.** $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \le 1 \\ cx+k & \text{si} \quad 1 < x < 4 \\ -2x & \text{si} \quad x \ge 4 \end{cases}$

**39.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{7}{16}(x+3)^2 - 6 & \text{si} \quad x \le 1 \\ cx+k & \text{si} \quad 1 < x < 4 \\ -\dfrac{1}{2}x - 6 & \text{si} \quad x \ge 4 \end{cases}$

**40.** $f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si} \quad x \le -2 \\ ax^2 - b & \text{si} \quad -2 < x \le 1 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

**41.** $f(x) = \begin{cases} x^2+7k & \text{si} \quad x < k \\ (x+k)^3 & \text{si} \quad x \ge k \end{cases}$

**42.** $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad 1 < x < 3 \\ x^2+bx+c & \text{si} \quad |x-2| \ge 1 \end{cases}$

**43.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si} \quad x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{si} \quad 2 \le x < 3 \\ 2x+b & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$

**44.** $f(x) = \begin{cases} x-a & si \quad x < a \\ x^2+2a & si \quad a \le x \le b \\ \sqrt{bx} - 2 & si \quad x > b \end{cases}$