Integrales

La Integral definida

2 Definición de la integral definida Si f es una función continua definida para $a \leqslant x \leqslant b$, divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Sean x_0 $(= a)$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(= b)$ los puntos finales de estos subintervalos y sean $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ los **puntos muestra** en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la **integral definida de f, de a a b**, es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

EX. 129

EX PER

PUNTO MEDIO

siempre que este límite exista y dé el mismo valor para todas las posibles elecciones de los puntos muestra. Si existe, se dice que f es **integrable** en $[a, b]$.

La suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

que aparece en la definición 2 se llama **suma de Riemann**

Evaluación de integrales

a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

1) $\sum_{i=1}^{n} c = nc$

2) $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$

3) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

4) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\dots+n =$$

$$\sum_{i=1}^{100} i = 1+2+3+\dots+100 = \frac{100(101)}{2} = 5050$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = S$$

$n-2 \quad n-1$

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$
$$S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1$$

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)$$

$$2S = n(n+1)$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n} i$$

4 **Teorema** Si f es integrable en $[a, b]$, entonces

(EX DER)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

donde
$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad x_i = a + i\,\Delta x$$

Regla del punto medio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \Delta x\,[f(\bar{x}_1) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$

donde $$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

y $$\bar{x}_i = \tfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = \text{punto medio de } [x_{i-1}, x_i]$$

Propiedades de la integral definida

$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ $\qquad$ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

$-\int_b^a f(x)\,dx$

$\int_a^b f(x)\,dx$

1. $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, donde c es cualquier constante

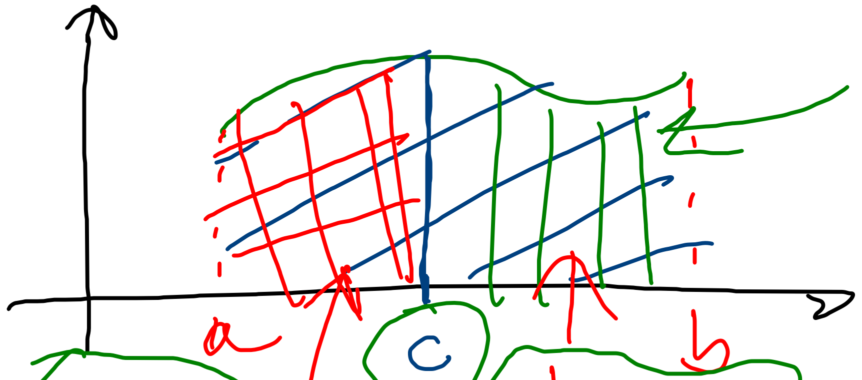
2. $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3. $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, donde c es cualquier constante

4. $\displaystyle\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

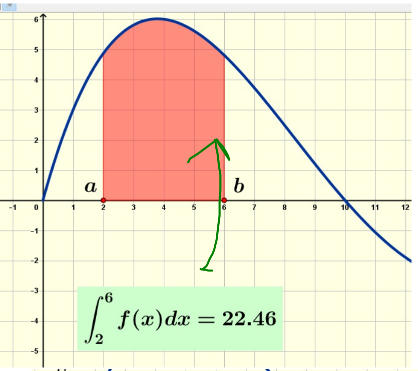
$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

$\int_a^b f(x)\,dx$

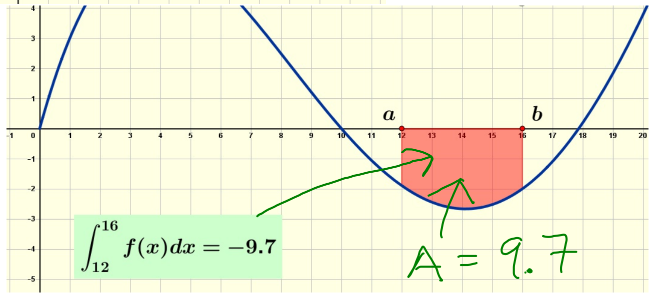


$\int_a^c f(x) + \int_c^b f(x) = \int_a^b f(x)\,dx$

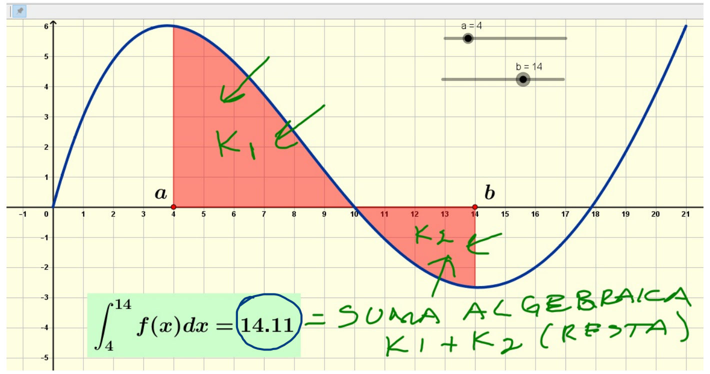
$[a,b]$ $\qquad$ $a<c<b$



$f(x)$ $[2,6]$

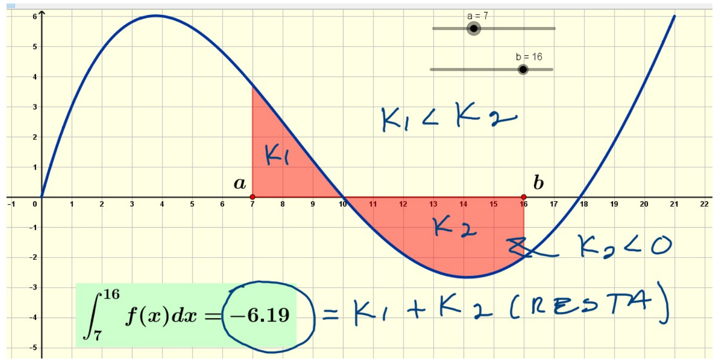


$f(x) < 0$
$[12,16]$

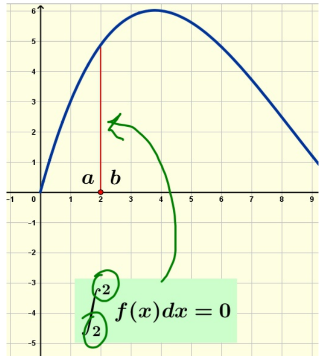


$\int_4^{14} f(x)dx > 0$

$K_1 > K_2$



$[7,16]$



Propiedades de comparación de la integral

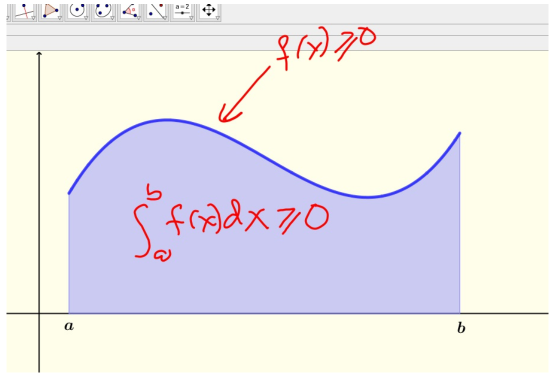
6. Si $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

7. Si $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

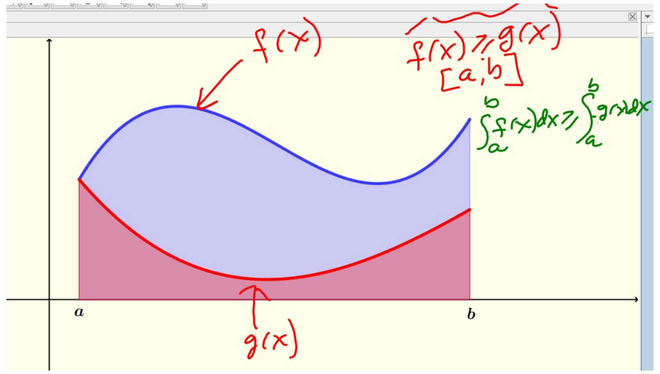
8. Si $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

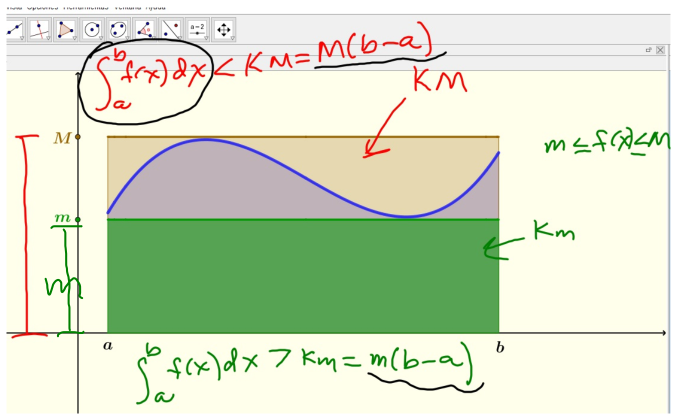
6)



7)



8)



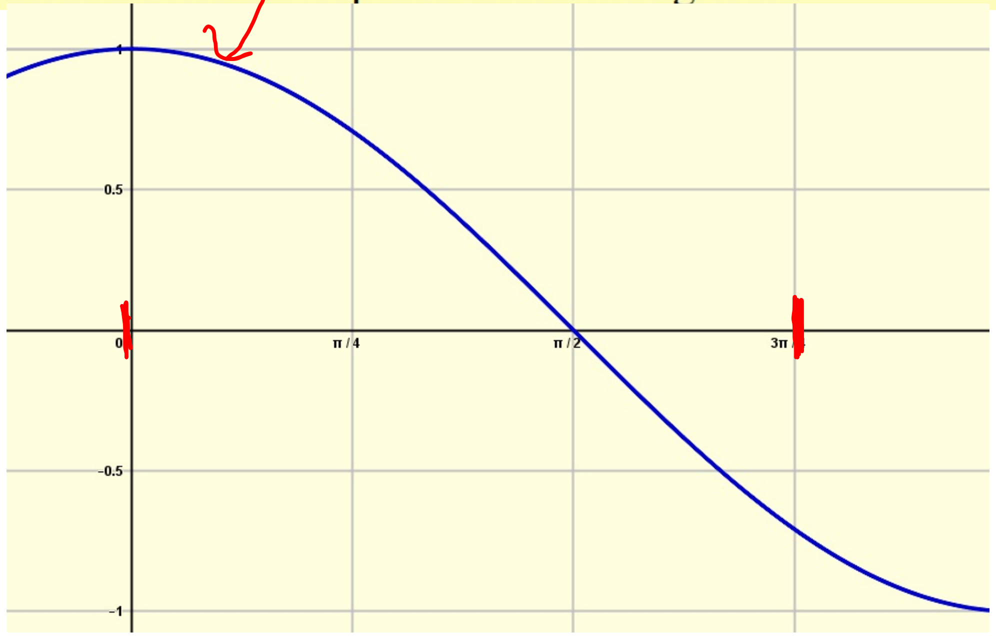
$$K_m \leq \int_a^b f(x)dx \leq K_M.$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Si

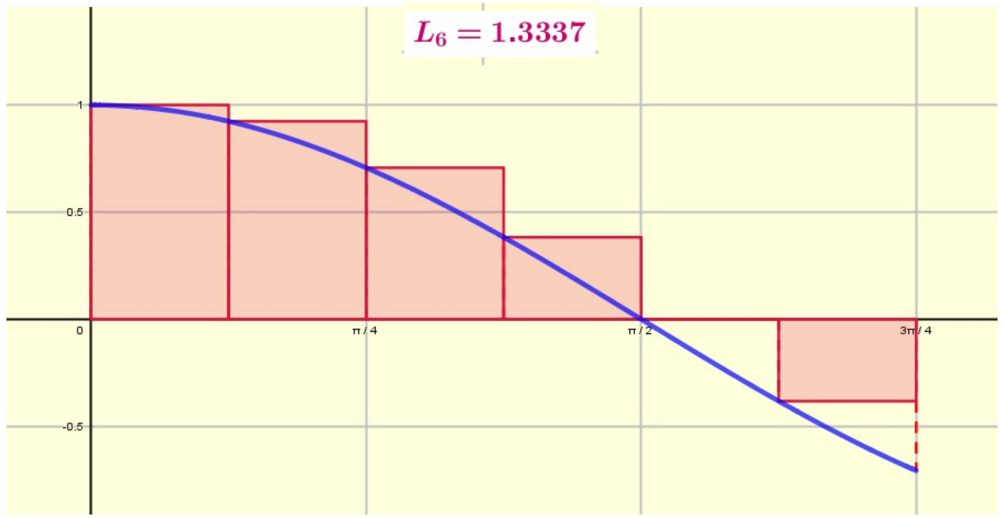
$$f(x) = \cos x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 3\pi/4$$

evalúe la suma de Riemann con $n = 6$ tomando los puntos finales izquierdos como los puntos muestra (Dé su respuesta redondeada a seis decimales). ¿Qué representa la suma de Riemann? Ilustre su respuesta con un diagrama.



$n = 6$

$\sum_{i=0}^{5} f(x_i)\Delta x = L_6$



SUMA RIEMANN:

$\sum_{i=0}^{5} \cos(x_i)\Delta x$

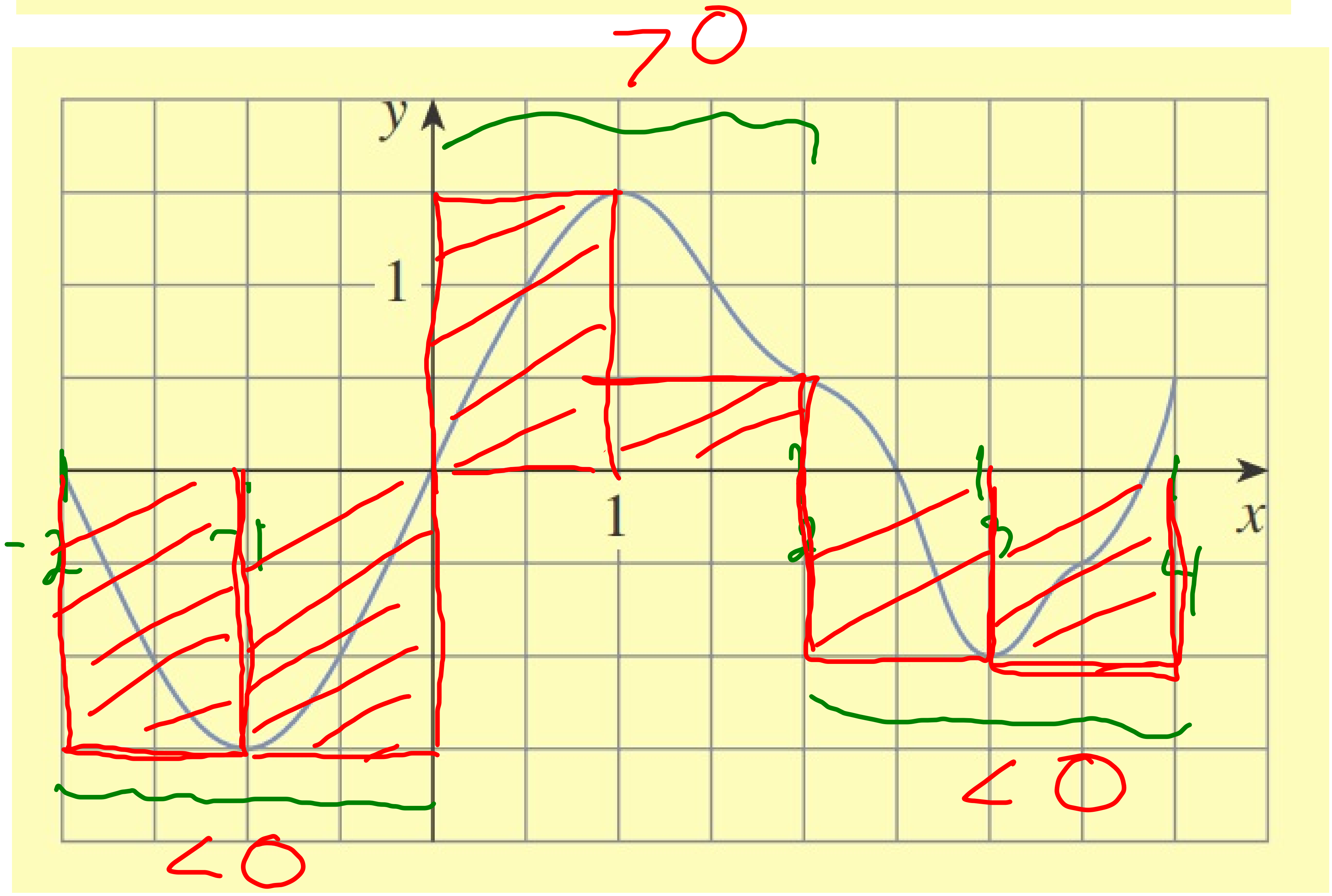
SUMA ÁREA RECTÁNGULOS

LA SUMA DE "RIEMANN" REPRESENTA "ÁREA NETA"

Se muestra la gráfica de g. Estime $\int_{-2}^{4} g(x)\,dx$ con seis subintervalos usando (a) los puntos finales derechos, (b) los puntos finales izquierdos y (c) los puntos medios.

$a = -2$

$b = 4$



R_6, $\Delta x = \dfrac{4-(-2)}{6} = 1$

$\int_{-2}^{4} g(x)\,dx < 0$

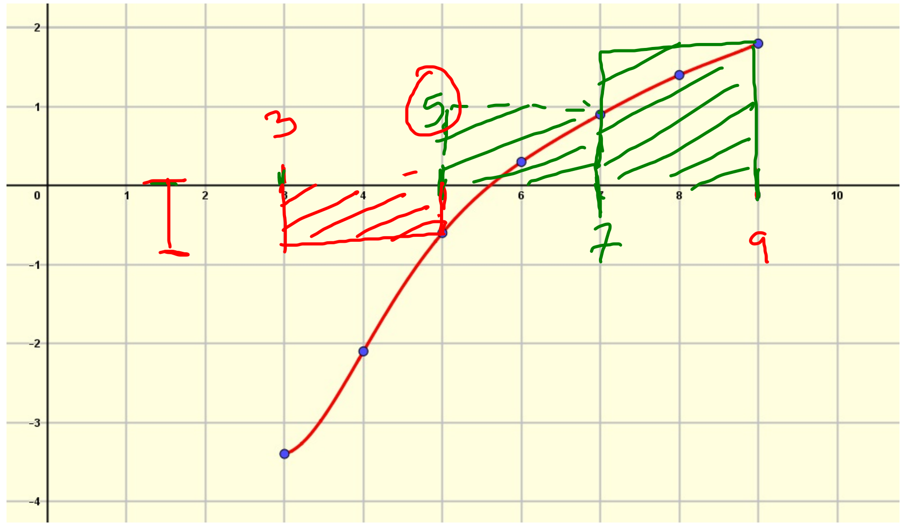
En la tabla se dan los valores de una función obtenida a partir de un experimento. Con ellos estime $\int_3^9 f(x)\,dx$ usando tres subintervalos iguales con (a) los puntos finales derechos, (b) los puntos finales izquierdos y (c) los puntos medios. Si se sabe que la función es decreciente, ¿puede decir si sus estimaciones son menores o mayores que el valor exacto de la integral?

x	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	−3.4	−2.1	−0.6	0.3	0.9	1.4	1.8

$n = 3$

$\Delta x = \frac{9-3}{3} = 2$

R_3



$$\int_3^9 f(x)\,dx \approx f(5)\cdot 2 + f(7)2 + f(9)2$$

$$\approx -0.6(2) + 0.9(2) + 1.8\cdot 2$$

$$\int_3^9 f(x)\,dx \approx \underbrace{-1.2}_{\text{DEBAJO EJE X}} + \underbrace{1.8 + 3.6}_{\text{SOBRE EJE X}} = 4.2$$

ÁREA NETA

$L_3 = ?$ $M_3 = ?$

17–20 Exprese cada uno de los límites siguientes como una integral definida sobre el intervalo dado.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i\sqrt{1 + x_i^3}\,\Delta x, \quad [2, 5]$$

a b

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$f(x) = x\sqrt{1+x^3}$$

$$f(x_i)$$

$$\int_2^5 x\sqrt{1+x^3}\,dx$$