2.5 Derivación de funciones exponenciales y logarítmicas

INTRODUCCIÓN

En esta sección se estudian las reglas de derivación para las funciones exponenciales y logarítmicas. También se estudia la derivación logarítmica, la cual permite calcular la derivada de funciones en las que tienen varios productos, cocientes y potencias; aprovechando las propiedades de los logaritmos.

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio y desarrollar las actividades de esta unidad el estudiante estará en capacidad de

- Calcular la derivada de funciones compuestas que contienen funciones exponenciales y logarítmicas usando las reglas de derivación.
- Calcular la derivada en expresiones que contienen productos, cocientes y potencias usando derivación logarítmica.

Derivada de la función exponencial natural

La derivada de la función exponencial natural $y = e^x$, está dada por

$$D_x\left[e^x\right] = e^x$$

En forma general, si u es una función de x y usando la regla de la cadena se tiene que

$$D_x\left[e^u\right] = e^u \cdot D_x u$$

Derivada de la función logaritmo natural

La derivada de la función logaritmo natural $y = \ln x$, está dada por

$$D_x[\ln x] = \frac{1}{x}$$

En forma general, si u es una función de x y usando la regla de la cadena se tiene que

$$D_x[\ln u] = \frac{1}{u} \cdot D_x u$$

La demostración de está fórmula se hace pasando la función log

Derivada de la función exponencial de base *a*

La derivada de la función exponencial de base a, $y = a^x$, está dada por

$$D_x\left[a^x\right] = a^x \cdot \ln a$$

En forma general, si u es una función de x y usando la regla de la cadena se tiene que

$$D_x\left[a^u\right] = a^u \cdot \ln a \cdot D_x u$$

Derivada de la función logaritmo de base *a*

La derivada de la función logarítmica de base a $y = \log_a x$, está dada por

$$D_x[\log_a x] = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$$

En forma general, si u es una función de x y usando la regla de la cadena se tiene que

$$D_x[\log_a u] = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{\ln a} \cdot D_x u$$

Ejemplo 1: Derivación de funciones exponenciales y logarítmicas de base *e*

calcular las derivadas de las funciones dadas

a. $y = \ln(x^2 - x)$ **b.** $f(x) = x^2 \ln(4 - x)$ **c.** $g(x) = e^{3-x^2}$

d. $y = \dfrac{e^{-3x}}{\ln(4x + 1)}$ **e.** $y = \ln\left(\dfrac{x - 3}{x^2 + 1}\right)^3$

Solución

a. Para calcular la derivada de la función se usa la regla de la cadena

$$\begin{aligned} D_x y &= D_x\left[\ln(x^2 - x)\right] \\ &= \frac{1}{x^2 - x} \cdot D_x\left(x^2 - x\right) \\ &= \frac{1}{x^2 - x} \cdot (2x - 1) \end{aligned}$$

Una vez calculada la derivada se procede a simplificar la respuesta

$$D_x y = \frac{2x - 1}{x^2 - x}$$

b. Para derivar la función $f(x) = x^2 \ln(4 - x)$ primero se utiliza la regla del producto

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x\left(x^2 \ln(4 - x)\right) \\ &= x^2 D_x[\ln(4 - x)] + \ln(4 - x) D_x(x^2) \end{aligned}$$

Ahora se utiliza la derivada del logaritmo natural con la regla de la cadena para el primer término y la regla de la potencia en el segundo término

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 \cdot \frac{1}{4 - x} D_x(4 - x) + \ln(4 - x)(2x) \\ &= x^2 \cdot \frac{1}{4 - x}(-1) + \ln(4 - x)(2x) \end{aligned}$$

Finalmente se simplifica la respuesta

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-x^2}{4 - x} + 2x \ln(4 - x) \\ &= \frac{-x^2 + 2x(4 - x)\ln(4 - x)}{4 - x} \end{aligned}$$

c. En este caso se utiliza la fórmula $D_x\left[e^u\right] = e^u \cdot D_x u$ para derivar una función exponencial compuesta

$$\begin{aligned} g'(x) &= D_x\left(e^{3-x^2}\right) \\ &= e^{3-x^2} \cdot D_x\left(3 - x^2\right) \\ &= e^{3-x^2} \cdot (-2x) \\ &= -2xe^{3-x^2} \end{aligned}$$

d. Para resolver este problema primero se usa la regla del cociente

$$\begin{aligned} y' &= D_x\left[\frac{e^{-3x}}{\ln(4x+1)}\right] \\ &= \frac{\ln(4x+1)D_x(e^{-3x}) - e^{-3x}D_x(\ln(4x+1))}{[\ln(4x+1)]^2} \end{aligned}$$

Ahora se utilizan las fórmulas de la función exponencial natural y la función logaritmo natural conjuntamente con la regla de la cadena

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\ln(4x+1)(e^{-3x})D_x(-3x) - e^{-3x} \cdot \dfrac{1}{4x+1}D_x(4x+1)}{[\ln(4x+1)]^2} \\ &= \frac{\ln(4x+1)(e^{-3x})(-3) - e^{-3x} \cdot \dfrac{1}{4x+1}(4)}{[\ln(4x+1)]^2} \end{aligned}$$

Ordenando la expresión resultante y simplificando se tiene

$$y' = \frac{-3e^{-3x}\ln(4x+1) - \dfrac{4e^{-3x}}{4x+1}}{[\ln(4x+1)]^2} = \frac{\dfrac{-3e^{-3x}(4x+1)\ln(4x+1) - 4e^{-3x}}{4x+1}}{\dfrac{[\ln(4x+1)]^2}{1}}$$

Multiplicando extremos y medios

$$y' = \frac{-3e^{-3x}(4x+1)\ln(4x+1) - 4e^{-3x}}{(4x+1)[\ln(4x+1)]^2}$$

e. Este problema se resolverá de dos formas, la primera de ellas muy similar a la mostrada en los incisos anteriores; derivando primero la función logarítmica y utilizando la regla de la cadena

$$\begin{aligned} y' &= D_x\left[\ln\left(\frac{x-3}{x^2+1}\right)^3\right] \\ &= \frac{1}{\left(\dfrac{x-3}{x^2+1}\right)^3} \cdot D_x\left(\frac{x-3}{x^2+1}\right)^3 = \frac{1}{\left(\dfrac{x-3}{x^2+1}\right)^3} \cdot 3\left(\frac{x-3}{x^2+1}\right)^2 D_x\left(\frac{x-3}{x^2+1}\right) \\ &= \frac{1}{\left(\dfrac{x-3}{x^2+1}\right)^3} \cdot 3\left(\frac{x-3}{x^2+1}\right)^2 \cdot \frac{(x^2+1)(1) - (x-3)(2x)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Aunque ya se calculó la derivada, es necesario simplificar la respuesta, que en muchos casos es un proceso más complicado que el cálculo de la derivada.

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{\dfrac{(x-3)^3}{(x^2+1)^3}} \cdot 3\frac{(x-3)^2}{(x^2+1)^2} \cdot \frac{x^2+1-2x^2+6x}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{(x^2+1)^3}{(x-3)^3} \cdot \frac{3(x-3)^2}{(x^2+1)^2} \cdot \frac{-x^2+6x+1}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{3(-x^2+6x+1)}{(x-3)(x^2+1)}
\end{aligned}
$$

Otra forma de resolver este problema consiste en utilizar las propiedades de los logaritmos para expresar la función como una suma de logaritmos y luego calcular la derivada. Este procedimiento se muestra a continuación

$$
\begin{aligned}
y &= \ln\left(\frac{x-3}{x^2+1}\right)^3 \\
&= 3\ln\left(\frac{x-3}{x^2+1}\right) \\
&= 3\ln(x-3) - 3\ln(x^2+1)
\end{aligned}
$$

Ahora se calcula la derivada de una suma y no la derivada de un cociente como en el procedimiento anterior

$$
\begin{aligned}
y' &= D_x\left[3\ln(x-3) - 3\ln(x^2+1)\right] \\
&= \frac{3}{x-3} \cdot D_x(x-3) - \frac{3}{x^2+1} \cdot D_x(x^2+1) \\
&= \frac{3}{x-3} \cdot (1) - \frac{3}{x^2+1} \cdot (2x)
\end{aligned}
$$

La simplificación ahora se reduce a una simple suma de fracciones

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{3}{x-3} - \frac{6x}{x^2+1} \\
&= \frac{3(x^2+1) - 6x(x-3)}{(x-3)(x^2+1)} = \frac{3x^2+3-6x^2+18x}{(x-3)(x^2+1)} \\
&= \frac{-3x^2+18x+3}{(x-3)(x^2+1)}
\end{aligned}
$$

Que es la misma respuesta obtenida anteriormente

Ejemplo 2: Derivación de funciones exponenciales

Calcule la derivada de la función

$$
f(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}
$$

Solución

Derivando aplicando la regla del cociente se tiene

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= D_x\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}\right)\\
&= \frac{\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)D_x\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)-\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)D_x\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)}{\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)^2}
\end{aligned}
$$

Ahora se derivan las sumas y restas de funciones exponenciales, sin olvidar la regla de la cadena ya la función exponencial esta compuesta

$$
f'(x) = \frac{\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)\left(e^{2x}(2)-e^{-2x}(-2)\right)-\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)\left(e^{2x}(2)+e^{-2x}(-2)\right)}{\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)^2}
$$

Una vez concluido el proceso de derivación se debe simplificar la respuesta. Como siempre parece mas complicada la simplificación que el cálculo de la derivada

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)\left(2e^{2x}+2e^{-2x}\right)-\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)\left(2e^{2x}-2e^{-2x}\right)}{\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)^2}\\
&= \frac{2\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)^2-2\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)^2}{\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)^2}\\
&= \frac{2e^{4x}+4e^{2x}e^{-2x}+2e^{-4x}-2e^{4x}+4e^{2x}e^{-2x}-2e^{-4x}}{\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)^2}\\
&= \frac{8e^{2x}e^{-2x}}{\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)^2}\\
&= \frac{8e^{0}}{\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)^2}
\end{aligned}
$$

Finalmente, la derivada en su forma más simple es

$$
f'(x) = \frac{8}{\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)^2}
$$

Ejemplo 3: Derivación de funciones exponenciales

Calcule la derivada de la función utilizando derivación implícita

$$
e^{x+y} = x^5\ln(x-y)
$$

Solución

Derivando ambos lados de la ecuación

$$
\begin{aligned}
D_x\left[e^{x+y}\right] &= D_x\left[x^5\ln(x-y)\right]\\
e^{x+y}\cdot D_x(x+y) &= x^5\cdot D_x\left[\ln(x-y)\right]+\ln(x-y)\cdot D_x(x^5)\\
e^{x+y}\cdot(1+D_xy) &= x^5\cdot\left[\frac{1}{x-y}D_x(x-y)\right]+\ln(x-y)\cdot(5x^4)\\
e^{x+y}\cdot(1+D_xy) &= x^5\cdot\left[\frac{1}{x-y}(1-D_xy)\right]+\ln(x-y)\cdot(5x^4)
\end{aligned}
$$

Desarrollando productos, trasladando al lado izquierdo los términos que contienen la derivada y despejando la derivada

$$
\begin{aligned}
e^{x+y} + e^{x+y} \cdot D_x y &= \frac{x^5}{x-y} - \frac{x^5 \cdot D_x y}{x-y} + \ln(x-y)\cdot(5x^4) \\
e^{x+y} \cdot D_x y + \frac{x^5 \cdot D_x y}{x-y} &= \frac{x^5}{x-y} + 5x^4 \ln(x-y) - e^{x+y} \\
D_x y\left(e^{x+y} + \frac{x^5}{x-y}\right) &= \frac{x^5}{x-y} + 5x^4 \ln(x-y) - e^{x+y} \\
D_x y &= \frac{\dfrac{x^5}{x-y} + 5x^4 \ln(x-y) - e^{x+y}}{e^{x+y} + \dfrac{x^5}{x-y}}
\end{aligned}
$$

Ahora solo falta simplificar la respuesta

$$
\begin{aligned}
D_x y &= \frac{\dfrac{x^5 + 5(x-y)x^4 \ln(x-y) - (x-y)e^{x+y}}{x-y}}{\dfrac{(x-y)e^{x+y} + x^5}{x-y}} \\
D_x y &= \frac{x^5 + 5(x-y)x^4 \ln(x-y) - (x-y)e^{x+y}}{(x-y)e^{x+y} + x^5}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4: Derivación de funciones logarítmicas y exponenciales de otras bases

calcular la derivada de las funciones exponenciales y logarítmicas cuya base es distinta de e, que se indican a continuación.

a. $y = 4^{4-3x}$ **b.** $f(x) = \log_2(x^2 - 3x)$ **c.** $g(x) = 2^{3x}\log(5x)$

Solución

a. Para calcular esta derivada se procede de forma similar a como se hizo con la función exponencial natural, pues la fórmula a utilizar es muy parecida.

$$
\begin{aligned}
y' &= D_x\left(4^{4-3x}\right) \\
&= 4^{4-3x} \cdot \ln 4 \cdot D_x(4-3x) \\
&= 4^{4-3x} \cdot \ln 4 \cdot (-3) \\
&= -3\ln 4 \cdot 4^{4-3x}
\end{aligned}
$$

b. Como la función $f(x) = \log_2(x^2 - 3x)$ contiene logaritmos de base 2, hay que tener el cuidado de utilizar la fórmula para derivar logaritmos de cualquier base

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x\left[\log_2(x^2 - 3x)\right] \\ &= \frac{1}{x^2 - 3x} \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot D_x(x^2 - 3x) \\ &= \frac{1}{x^2 - 3x} \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot (2x - 3) \\ &= \frac{2x - 3}{\ln 2 \cdot (x^2 - 3x)} \end{aligned}$$

c. Para calcular la derivada de $g(x) = 2^{3x}\log(5x)$ se utiliza la regla del producto en combinación con las fórmulas para derivar funciones exponenciales y logarítmicas de cualquier base

$$\begin{aligned} g'(x) &= D_x\left[2^{3x}\log(5x)\right] \\ &= 2^{3x} D_x\left(\log(5x)\right) + \log(5x) D_x\left(2^{3x}\right) \\ &= 2^{3x} \cdot \frac{1}{5x} \cdot \frac{1}{\ln 5} \cdot D_x(5x) + \log(5x) \cdot 2^{3x} \cdot \ln 2 \cdot D_x(3x) \\ &= 2^{3x} \cdot \frac{1}{5x} \cdot \frac{1}{\ln 5} \cdot (5) + \log(5x) \cdot 2^{3x} \cdot \ln 2 \cdot (3) \\ &= \frac{5 \cdot 2^{3x}}{5x\ln 5} + 3\ln 2 \cdot 2^{3x}\log(5x) \end{aligned}$$

La respuesta anterior ya es aceptable, pero aún se puede sacar factor común 2^{3x} y obtener una respuesta más simple

$$g'(x) = 2^{3x}\left(\frac{5}{5x\ln 5} + 3\ln 2 \cdot \log(5x)\right)$$

Derivación logarítmica

Se llama derivación logarítmica al procedimiento por medio del cual se puede obtener la derivada de una función que contiene productos, cocientes y potencias. Este procedimiento puede facilitar el calculo de la derivada ya que al utilizar las leyes de los logaritmos un producto se transforma en una suma de logaritmos, un cociente en una diferencia de logaritmos y una potencia en el producto de la potencia por el logaritmo de la base. El procedimiento es el siguiente

1. Para calcular la derivada de la función $y = f(x)$, aplique logaritmos naturales a ambos lados de la función

$$\ln y = \ln\left(f(x)\right)$$

2. Utilice las propiedades de los logaritmos para expresar el lado derecho como sumas y restas de logaritmos.

3. Derive ambos lados de la ecuación utilizando derivación implícita

$$D_x[\ln y] = D_x[\ln(f(x))]$$

4. Finalmente despeje $D_x y$ pasando a multiplicar y al lado derecho de la ecuación y sustituya y por $f(x)$

Ejemplo 5: Derivación logarítmica

Calcule la derivada de las funciones dadas utilizando derivación logarítmica

a. $y = \dfrac{(2x-1)^5}{\sqrt{4-x^2}}$ **b.** $y = \left(\sqrt{x}\right)^{\cos x}$

Solución

a. Aplicando logaritmos naturales a ambos lados de la función

$$\ln y = \ln\left(\frac{(2x-1)^5}{\sqrt{4-x^2}}\right)$$

Utilizando las propiedades de los logaritmos en el lado derecho

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln(2x-1)^5 - \ln\sqrt{4-x^2}\\ &= 5\ln(2x-1) - \frac{1}{2}\ln(4-x^2)\end{aligned}$$

Derivando con respecto a x ambos lados

$$\begin{aligned}D_x[\ln y] &= D_x\left[5\ln(2x-1) - \frac{1}{2}\ln(4-x^2)\right]\\ \frac{1}{y}D_x y &= \frac{5}{2x-1}D_x(2x-1) - \frac{1}{2}\frac{1}{4-x^2}D_x(4-x^2)\\ &= \frac{5}{2x-1}(2) - \frac{1}{2}\frac{1}{4-x^2}(-2x)\\ &= \frac{10}{2x-1} + \frac{x}{4-x^2}\end{aligned}$$

Pasando y a multiplicar al lado derecho para despejar la derivada

$$\begin{aligned}D_x y &= \left(\frac{10}{2x-1} + \frac{x}{4-x^2}\right)y\\ &= \left(\frac{10}{2x-1} + \frac{x}{4-x^2}\right)\frac{(2x-1)^5}{\sqrt{4-x^2}}\end{aligned}$$

La expresión anterior se puede simplificar aun más si se desarrolla la suma de fracciones entre paréntesis

$$\begin{aligned}D_x y &= \left(\frac{10(4-x^2) + x(2x-1)}{(2x-1)(4-x^2)}\right)\frac{(2x-1)^5}{\sqrt{4-x^2}}\\ &= \left(\frac{40 - 10x^2 + 2x^2 - x}{(2x-1)(4-x^2)}\right)\frac{(2x-1)^5}{\sqrt{4-x^2}}\\ &= \left(\frac{-8x^2 - x + 40}{(2x-1)(4-x^2)}\right)\frac{(2x-1)^5}{\sqrt{4-x^2}}\\ &= \frac{(-8x^2 - x + 40)(2x-1)^4}{\left(4-x^2\right)^{3/2}}\end{aligned}$$

b. Aplicando logaritmos naturales a ambos lados de la función

$$\ln y = \ln\left[\left(\sqrt{x}\right)^{\cos x}\right]$$

Utilizando las propiedades de los logaritmos en el lado derecho

$$\ln y = \cos x \cdot \ln\sqrt{x}$$

$$\ln y = \cos x \cdot \frac{1}{2}\ln x$$

Derivando con respecto a x ambos lados

$$D_x[\ln y] = D_x\left[\cos x \cdot \frac{1}{2}\ln x\right]$$

$$\frac{1}{y}D_x y = \cos x \cdot D_x\left(\frac{1}{2}\ln x\right) + \frac{1}{2}\ln x \cdot D_x(\cos x)$$

$$= \cos x \cdot \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}\ln x \cdot (-\sin x)$$

$$= \frac{\cos x - x\,\mathrm{sen}\,x \cdot \ln x}{2x}$$

Pasando y a multiplicar al lado derecho para despejar la derivada

$$D_x y = \left(\frac{\cos x - x\,\mathrm{sen}\,x \cdot \ln x}{2x}\right)y$$

$$= \left(\frac{\cos x - x\,\mathrm{sen}\,x \cdot \ln x}{2x}\right)\left(\sqrt{x}\right)^{\cos x}$$

Ejemplo 6: Derivación logarítmica

Calcule la derivada de la función utilizando derivación logarítmica

$$y = \frac{(x^2+4)^5}{x^7 \cdot \sqrt[3]{4-x^2}}$$

Solución

Aplicando logaritmos naturales y sus propiedades a ambos lados de la ecuación

$$\ln y = \ln\left[\frac{(x^2+4)^5}{x^7 \cdot \sqrt[3]{4-x^2}}\right]$$

$$\ln y = \ln(x^2+4)^5 - \ln\left(x^7\right) - \ln\left(\sqrt[3]{4-x^2}\right)$$

$$\ln y = 5\ln(x^2+4) - 7\ln x - \frac{1}{3}\ln(4-x^2)$$

Ahora se deriva implícitamente la ecuación anterior

$$D_x[\ln y] = D_x\left[5\ln(x^2+4) - 7\ln x - \frac{1}{3}\ln(4-x^2)\right]$$

$$\frac{1}{y}D_x y = \frac{5}{x^2+4} \cdot D_x(x^2+4) - \frac{7}{x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4-x^2} \cdot D_x(4-x^2)$$

$$\frac{1}{y}D_x y = \frac{5}{x^2+4} \cdot (2x) - \frac{7}{x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4-x^2} \cdot (2x)$$

Ordenando el lado derecho y trasladando y a multiplicar se obtiene la derivada

$$\frac{1}{y}D_x y = \frac{10x}{x^2+4} - \frac{7}{x} - \frac{2x}{3(4-x^2)}$$

$$D_x y = \left(\frac{10x}{x^2+4} - \frac{7}{x} - \frac{2x}{3(4-x^2)}\right)\cdot y$$

$$D_x y = \left(\frac{10x}{x^2+4} - \frac{7}{x} - \frac{2x}{3(4-x^2)}\right)\frac{(x^2+4)^5}{x^7\cdot\sqrt[3]{4-x^2}}$$

Para simplificar aún mas la respuesta será necesario desarrollar la suma de fracciones que se encuentra entre paréntesis, que es un trabajo de álgebra elemental

$$D_x y = \left(\frac{10x(3x)(4-x^2) - 21(x^2+4)(4-x^2) - 2x(x)(x^2+4)}{3x(x^2+4)(4-x^2)}\right)\frac{(x^2+4)^5}{x^7\cdot\sqrt[3]{4-x^2}}$$

$$= \left(\frac{10x(3x)(4-x^2) - 21(x^2+4)(4-x^2) - 2x(x)(x^2+4)}{3x(x^2+4)(4-x^2)}\right)\frac{(x^2+4)^5}{x^7\cdot\sqrt[3]{4-x^2}}$$

$$= \left(\frac{120x^2 - 30x^4 + 21x^4 - 168x^2 + 336 - 2x^4 - 8x^2}{3x(x^2+4)(4-x^2)}\right)\frac{(x^2+4)^5}{x^7\cdot\sqrt[3]{4-x^2}}$$

$$= \frac{\left(-11x^4 - 56x^2 + 336\right)(x^2+4)^4}{3x^8\left(4-x^2\right)^{4/3}}$$

Ejemplo 7: Derivación logarítmica

Utilice derivación logarítmica para calcular $\dfrac{dy}{dx}$

$$xy = \left(\cos(x^4)\right)^{\tan x}$$

Solución

Aplicando logaritmos naturales a ambos lados de la ecuación se obtiene

$$\ln(xy) = \ln\left[\left(\cos(x^4)\right)^{\tan x}\right]$$

$$\ln x + \ln y = \tan x \cdot \ln\left(\cos(x^4)\right)$$

Derivando ambos lados con respecto a x se tiene

$$D_x\left(\ln x + \ln y\right) = D_x\left(\tan x \cdot \ln\left(\cos(x^4)\right)\right)$$

Observe que en el dado derecho se debe utilizar la derivada del producto

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}y' = \tan x \cdot \frac{1}{\cos(x^4)}(-\operatorname{sen}(x^4)(4x^3) + \ln\left(\cos(x^4)\right)\cdot \sec^2 x$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{-4x^3\tan x \cdot \operatorname{sen}(x^4)}{\cos(x^4)} + \ln\left(\cos(x^4)\right)\cdot\sec^2 x + \frac{1}{x}$$

$$y' = \left(-4x^3\tan x\cdot\tan(x^4) + \ln\left(\cos(x^4)\right)\cdot\sec^2 x - \frac{1}{x}\right)y$$

$$= \left(-4x^3\tan x\cdot\tan(x^4) + \ln\left(\cos(x^4)\right)\cdot\sec^2 x - \frac{1}{x}\right)\frac{\left(\cos(x^4)\right)^{\tan x}}{x}$$

Ejercicios derivadas exponenciales y logarítmicas

En los ejercicios 1 a 16 encuentre la primera derivada de la función dada.

1. $f(x) = \dfrac{\ln x}{4 + \ln x}$

2. $y = \ln(\ln(\ln x))$

3. $y = \ln\left(\dfrac{x^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$

4. $f(\theta) = \ln(\sec\theta + \tan\theta)$

5. $y = e^x(\operatorname{sen} 2x - \cos 2x)$

6. $y = e^{-2x}(x^2 - 3x + 9)$

7. $y = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

8. $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

9. $y = e^{\cos t}\left(\ln t^2 + 1\right)$

10. $f(t) = \ln\left(\dfrac{2e^{-3t}}{\operatorname{sen} 3t}\right)$

11. $f(x) = \cos\left(\sqrt[4]{\tan x}\right) + e^{x \operatorname{sen} x}$

12. $y = e^{\sec 3x^2} \csc(x^2 - x^{3/2} + 4)$

13. $y = \sqrt{x} \cdot (x + 1)^{2/3} \cdot e^{x^2 - x}$

14. $y = \log_5 \sqrt{\left(\dfrac{7x}{3x + 3}\right)^{\ln 5}}$

15. $y = \log_2\left(\dfrac{\operatorname{sen} x \cos x}{e^x 2^x}\right)$

16. $y = 2^x \cdot \log_3\left(e^{(\operatorname{sen} x)(\ln x)}\right)$

En los ejercicios 17 a 24 utilice derivación implícita para calcular la primera derivada

17. $\tan(x + y) - x = xe^y + y$

18. $\tan y + e^x = \ln(xy)$

19. $e^{x+y} = x^5 e^{x-y}$

20. $e^y \cos x = 1 + \operatorname{sen}(xy)$

21. $\ln(xy) = e^y \operatorname{sen} x$

22. $e^{xy} = \cos^2(x - 3y)$

23. $\sec(xy) = e^x - e^y + \ln(xy)$

24. $\cos(x + y) = \dfrac{x^2 + y^2}{\ln(x + y)}$

En los ejercicios 25 a 36 utilice derivación logarítmica para calcular y'

25. $y = \dfrac{\left(x^3 - 1\right)^5 \left(x^4 + 3x^3\right)^4}{(7x + 5)^9}$

26. $y = \dfrac{x\sqrt{x^4 + 4}}{(x + 1)^5}$

27. $y = \sqrt{\dfrac{(x + 2)^{10}}{(1 - 2x)^5}}$

28. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x + 1)(x + 2)}{(x^2 + 1)(2x + 3)}}$

29. $y = (\tan x)^{\operatorname{sen} x}$

30. $y = \left(x^2 + 1\right)^{x^2 + 1}$

31. $x^y = y^x$

32. $y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$

33. $y = (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$

34. $y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$

35. $y = (\tan x)^{1/x}$

36. $xy = (x - 1)^x$

37. En que punto de la curva $y = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$ la recta tangente tiene pendiente 10. Encuentre la ecuación de la recta tangente.

38. Un cable del tendido eléctrico cuelga entre dos postes en forma de una curva llamada catenaria. Para dos postes que se encuentran separados 50 metros, donde el origen se encuentra en el suelo y al centro entre los dos postes, la ecuación de la catenaria es

$$y = 10(e^{x/20} + e^{-x/20})$$

a. Encuentre la pendiente de la catenaria en el poste derecho.

b. Encuentre el ángulo entre el poste y el cable.