UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MATEMÁTICA INTERMEDIA 2

MI2B

TAREA No. _#2__

DESCRIPCIÓN DE CALIFICACIÓN		CALIFICACIÓN
Presentación		
Ejercicios resueltos		
Ejercicio calificado 1	#	
Ejercicio calificado 2	#	
CALIFICACIÓN TOTAL		

Nombre: JAVIER ANDRÉS MONJES SOLÓRZANO

Carné: 202100081

Profesor: Ingeniero Benjamín Piedrasanta

Fecha: __22_ / ___12__ / 2022

14.6 EJERCICIOS

# 1	P957	Ej 8

8. $f(x, y) = x^2 \ln y, \quad P(3, 1), \quad \mathbf{u} = -\frac{5}{13}\,\mathbf{i} + \frac{12}{13}\,\mathbf{j}$

$f(x,y) = x^2 \ln y \rightarrow$ a) $\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j = 2x \ln y \, i + \left(\frac{x^2}{y}\right) j$

b) $f(3,1) = 0i + \left(\frac{9}{1}\right) j = 9j$

c) $D_u f(3,1) = \nabla f \cdot (3,1) \cdot u = 9j \cdot \left(-\frac{5}{13} i + \frac{12}{13} j\right) = 0 + \frac{108}{13} = \frac{108}{13}$

Respuestas

a $2x \ln y \, i + \left(\frac{x^2}{y}\right) j$

b) $9j$

c) $\frac{108}{13} \approx 8.31$

R/

# 2	P.957	Ej. 12

12. $g(r, s) = \tan^{-1}(rs), \quad (1, 2), \quad \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$

$u = \frac{2}{\sqrt{5}} i - \frac{1}{\sqrt{5}} j \rightarrow g(r,s) = -\tan(rs) i + \frac{r}{2}(rs)^{-1/2} j$

$g(1,2) = r_1 i + 2 j$

$D_u f(1,2) = \left(\tan(rs) i + \frac{r}{5}(rs)^{1/2} j\right)(5i + 2j)$

$\frac{d}{dr}(f(r)\, g(r)) = f(r) \frac{d}{dr}(g) + g(r) \frac{d}{dr}(f \cdot r)$

$\frac{r^2 s^2}{2} + s \tan(rs) + (rs + 2(\sec^2(rs) + 5$

$3 \tan(1) + \frac{3}{2}$

$(1,2) = 2.55.2\ 36519$

$\boxed{D_u f(1,2) = 1.55}$ R/

# 3	P.957	Ej. 16

16. $f(x, y, z) = xy^2 \tan^{-1} z, \quad (2, 1, 1), \quad \mathbf{v} = \langle 1, 1, 1 \rangle$

$u = \frac{1}{\sqrt{3}} i + \frac{1}{\sqrt{3}} j + \frac{1}{\sqrt{3}} j$

$\nabla f(x,y,z) = y^2 \tan^{-1}(z)\,\hat{i} + 2xy + \tan^{-1}(z)\,\hat{j} + xy^2 \frac{1}{1+(1)^2}\,\hat{k}$

$f(2,1,1) = \frac{\pi}{4}\hat{i} + \pi\hat{j} + 1\hat{k} \to D_u f(2,1,1)\left(\frac{\pi}{4}\hat{i} + \pi\hat{j} + 1\hat{k}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i}, \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j}, \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}\right)$

$= \frac{\pi}{1\sqrt{3}} + \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} = 2.8446$

$\boxed{D_u f(2,1,1) = 2.8446}$

23. $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy), \quad (1, 0)$

\#4 | P.957 | Ej. 23

$f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)\ (1,0) \to \nabla f(1,0) = \cos(xy)y\ ;\ \cos(xy)x$

$= 0, 1$

$|\nabla f(0,1)| = \sqrt{0+1} = 1$

máximo → 1
dirección → (0,1)

\#5 | P.957 | Ej. 31

31. La temperatura T en una pelota de metal es inversamente proporcional a la distancia desde el centro de la pelota, que se toma como el origen. La temperatura en el punto (1, 2, 2) es de 120°.

(a) Determine la razón de cambio de T en (1, 2, 2) en dirección al punto (2, 1, 3).

(b) Demuestre que en cualquier punto en la pelota la dirección de mayor incremento en temperatura está dada por un vector que apunta al origen.

$T = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\quad 120 = T(1,2,2) \to 120 = \frac{k}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} \to 120 \cdot 3 = k$

$360 = k$

a) $P(1,2,3) - P(1,2,3) - (1,-1,1)$

$U = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \to$

$\nabla T(1,2,2) = \frac{-360x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{360y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{-360z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

$= -\frac{360}{27}, -\frac{720}{27}, -\frac{720}{27}$

$D_u T(1,2,2) = \left(-\frac{40}{3}, -\frac{80}{3}, -\frac{80}{3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$= \frac{-40}{3\sqrt{3}} + \frac{80}{3\sqrt{3}} - \frac{80}{3\sqrt{3}} = \frac{-40}{3\sqrt{3}} \approx -7.698 \to -7.70$

b) $\nabla T(x,y,z) = \frac{-360x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{360y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{360z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \to U = (0,0,0) - (x,y,z)$ origen

$U = (-x,-y,-z)$

$D_u T(x,y,z) = \frac{-360x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{360y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{360z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,(-x,-y,-z)$

a) $D_u T(1,2,2) = \frac{-40}{3\sqrt{3}}$ $\quad$ b) Punto $= (-x,-y,-z)$

Vector $= \frac{360}{(x^2+y^2+z^2)^{2}}$

#6 | P. 457 | Ej. 34

34. Suponga que sube una colina cuya forma está dada por la ecuación $z = 1\,000 - 0.005x^2 - 0.01y^2$, donde x, y y z se miden en metros, y que usted se encuentra en un punto con coordenadas (60, 40, 966). El eje x positivo apunta al este y el eje y positivo al norte.

(a) Si camina hacia el sur, ¿empezará a ascender o a descender? ¿A qué razón?

(b) Si camina al noreste, ¿comenzará a ascender o a descender? ¿A qué razón?

(c) ¿En qué dirección la pendiente es mayor? ¿Cuál es la razón de ascenso en esa dirección? ¿A qué ángulo sobre la horizontal comienza la trayectoria en esa dirección?

$$z = 1000 - 0.005x^2 - 0.01y^2$$

$$\nabla f(x,y) = \langle -0.01x, -0.02y \rangle$$

$$\nabla f(60,40) = \langle -0.6, -0.8 \rangle$$

a) $\rightarrow u = -j$

$$D_u f(60,40) = \nabla f(60,40) \langle 0,-1 \rangle$$

$$\nabla f \langle -0.6, -0.8 \rangle \langle 0,-1 \rangle$$

$$\nabla f = 0.8$$

b) $u = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -1, 1 \rangle$

$$D_u f(60,40) = \nabla f(60,40) \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -1, 1 \rangle$$

$$\langle -0.6, -0.8 \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -1, 1 \rangle$$

$$-\frac{0.2}{\sqrt{2}} \approx -0.14 \rightarrow (60,40,966) \rightarrow 0.14$$

c) $\nabla f(60,40) = \langle -0.6, -0.8 \rangle$

$$|\nabla f(60,40)| = \sqrt{(-0.6)^2 + (-0.8)^2}$$

$$|\nabla f(60,40)| = 1$$

$$\tan\theta = 1$$

$$\theta = 45^\circ$$

Respuestas

a) Ascenderá a 0.8 metros verticales por metro horizontal

b) Descenderá a 0.14 metros verticales · metros horizontal

c) El ángulo sobre la horizontal es de 45° desde que comienza el camino

A 7 | P. 958 | G. 35

35. Sea f una función de dos variables que tiene derivadas parciales continuas y considere los puntos $A(1, 3)$, $B(3, 3)$, $C(1, 7)$ y $D(6, 15)$. La derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AB}$ es 3 y la derivada direccional en A en la dirección de $\overrightarrow{AC}$ es 26. Determine la derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AB}\ i \ ; \ \overrightarrow{AC}\ j \to D_{\overrightarrow{AB}} f(1,3) = f_x(1,3) = 3$

$D_{\overrightarrow{AC}} f(1,3)\ f_y(1,3) = 26 \to \nabla f(1,3) = \langle f_x(1,3), f_y(1,3)\rangle$

$\langle 3, 26\rangle$

$D_{\overrightarrow{AD}} f(1,3) = \nabla f \cdot u \to \overrightarrow{AD} \Rightarrow \langle \frac{5}{13}, \frac{12}{13}\rangle$

$D_{\overrightarrow{AD}} f(1,3) = \langle 3, 26\rangle \langle \frac{5}{13}, \frac{12}{13}\rangle$

$D_{\overrightarrow{AD}} f(1,3)\ 3\frac{5}{13} + 26\frac{12}{13}$

$D_{\overrightarrow{AD}} f(1,3) = \frac{327}{13}$

$\boxed{D_{\overrightarrow{AD}} f(1,3) = \frac{327}{13} \approx 25.15}$

14.7 EJERCICIOS

A 8 | P. 968 | G. 7

5-20 Determine los valores máximos y mínimos locales y el punto o puntos silla de la función. Si tiene software de graficación tridimensional, grafique la función con un dominio y punto de vista que revelen todos los aspectos importantes de la función.

7. $f(x, y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$

$f(x,y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$

$f_x = 0 + 3\cdot 2xy - 6\cdot 2x - 0 + 0$

$f_x = 6xy - 12x$

$6xy - 12x = 0$

$y = \frac{12x}{6x}$

$y = 2$

$6xy - 12x = 0$

$x(6y - 12) = 0$

$x = 0$

$y = 2$

$f_y = 3y^2 + 3x^2 - 0 - 6(2)y + 0$

$f_y = 3y^2 + 3x^2 - 12y$

$3y^2 + 3x^2 - 12y = 0$

$3\cdot 2^2 + 3x^2 - 12(2) = 0$

$3x^2 = 12$

$x = \sqrt{4}$

$x = \pm 2$

$3y^2 + 3(0) - 12y$

$3y^2 - 12y = 0$

$3y(y - 4) = 0$

$3y(y-4) = 0$

$3y = 0 \quad y - 4 = 0$

$y = 0 \quad y = 4$

$f_{xx} = 6y - 12 \quad f_{yy} = 6y - 12 \quad f_{xy} = 6x$

Punto Crítico

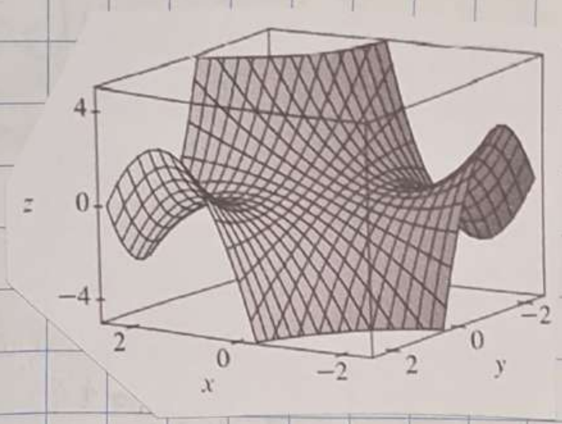
$(2,2)\ (-2,2)$

$(0,0)\ (0,4)$

$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = (6y - 12)(6y - 12) - (6x)^2$

$36y^2 - 144y + 144 - 36x^2$

	Pts	f_{xx}	f_{yy}	D
Silla	(2,2)	0 0	0=0	-144<0
Máx	(0,0)	-12<0	-12<0	144>0
Silla	(-2, 2)	0=0	0=0	-144<0
Mín	(0, 4)	12>0	12>0	144>0



Punto máx (0, 0)   Puntos de silla
Punto mín (0, 4)   (2, 2)(-2, 2)

# 9	P. 968	Ej. 12

12. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9x$

$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9x$

$f_x = 3x^2 - 6x - 9$; $f_y = 3y^2 - 6y$, $f_{xx} = 6x - 6$; $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 6y - 6$

$f_x = 0 \to 3(x+1)(x-3) = 0$ $f_y = 0$ $3y(y-2) = 0$

$x = -1$; $x = 3$ $y = 0$; $y = 2$

$D(3,0) = 12(-6) - 0^2$; $(-1,2)(3,0)$

$-72 < 0$ $D(-1,0) = -12(-6) - 0^2$

$72 > 0$

$f_{xx}(-1,0) = -12 < 0$; $f(-1,0) = 5 \to$ local máx

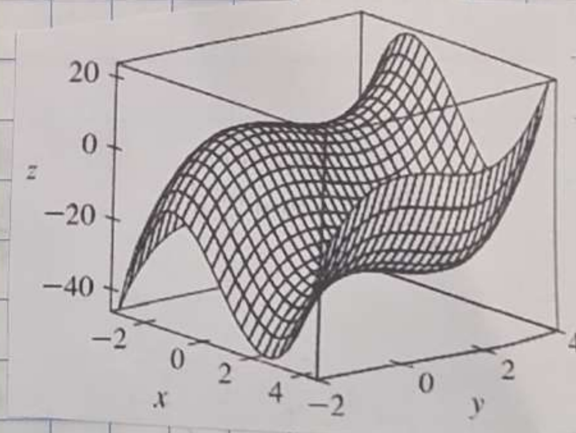
$D(3,2) = 12(6) - 0^2 = 72 > 0$

$f_{xx}(3,2) = 12 > 0$, $f(3,2) = -31$

$f_y (1, -3)$; $f_x (1, -12)$

$(3, y^3 - 3y^2 - 27)$ Mínimo Local

$(-1, y^3 - 3y^2 + 5)$ Máximo Local



16. $f(x, y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}$

# 10	P. 968	Ej. 16

$f(x,y) = xy e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$

$f_x = xy\, e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}(-x) + e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}\, y$

$y(1-x^2)\, e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$

$f_y = xy\, e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}(-y) + e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} \cdot x$

$x(1-y^2)\, e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$

$f_{xx} = (1-x^2)\left[ye^{-(x^2+y^2)/2}(-x) + e^{-(x^2+y^2)/2}(-2x)\right] = xy(x^2-3)e^{-(x^2+y^2)/2}$

$f_{xy} = (1-x^2)\left[ye^{-(x^2+y^2)/2}(-y) + e^{-(x^2+y^2)/2}(1)\right] = (1-x^2)(1-y^2)e^{-(x^2+y^2)/2}$

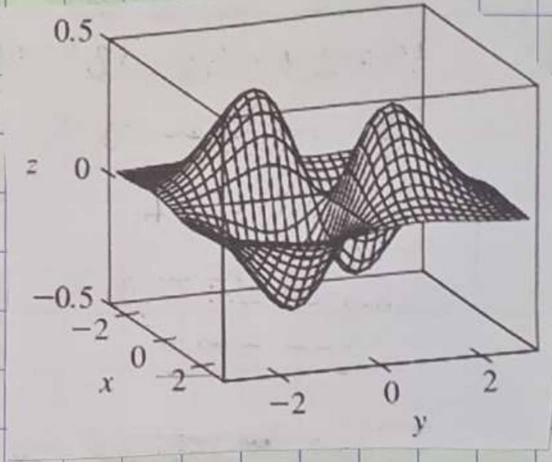
$f_{yy} = x\left[(1-y^2)e^{-(x^2+y^2)/2}(-y) + e^{-(x^2+y^2)/2}(-2y)\right] = xy(y^2-3)e^{-(x^2+y^2)/2}$

$f_x = 0$; $y(1-x^2) = 0$; $y = 0$; $x = \pm 1$; $y \neq 0$

$f_y = 0$; $xe^{-x^2/2} = 0 \to x = 0$; $x = \pm 1$

$f_y = 0$; $\pm(1-y^2)e^{-(1+y^2)/2} = 0$; $y = \pm 1$

Puntos → $(0,0)$, $(-1,\pm 1)$, $(1,\pm 1)$



$D(0,0) = (0)(0) - (1)^2 = -1 < 0$; $(0,0)$ es punto de silla

$D(1,1) = D(-1,-1) = (-2e^{-1})(-2e^{-1}) - (0)^2 = 4e^{-2} > 0$

$f_{xx}(1,1) = f_{xx}(-1,-1) = -2e^{-1} < 0$; $f(1,1) = f(-1,-1) = e^{-1}$ máx

$D(1,-1) = D(-1,1) = (2e^{-1})(2e^{-1}) - (0)^2 = 4e^{-2} > 0$

$f_{xx}(1,-1) = f_{xx}(-1,1) = 2e^{-1} > 0$; $f(1,-1) = f(-1,1) = -e^{-1}$

Punto de silla $(0,0)$; Máximo local (e^{-1}) ; Mínimo $(-e^{-1})$

11 | P. 969 | Ej. 43

43. Encuentre los puntos en el cono $z^2 = x^2 + y^2$ más cercanos al punto $(4, 2, 0)$.

$z^2 = x^2 + y^2 \to d = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$

$d^2 = (x-4)^2 + (y-2)^2 + z^2$

$d^2 = (x-4)^2 + (y-2)^2 + (x^2+y^2)$

$f_x(x,y) = 2(x-4) + 2x$ $f_y(x,y) = 2(y-2) + 2y$

$4x - 8 = 0$ $4y - 4 = 0$

$x = 2$ $y = 1$

$z = \sqrt{x^2+y^2}$

$z = \pm\sqrt{5}$

punto $(2, 1, \pm\sqrt{5})$

#72 | P.969 | Ej.49

49. Encuentre el volumen de la caja rectangular más grande en el primer octante con tres caras en los planos de coordenadas y un vértice en el plano $x + 2y + 3z = 6$.

$x = 6 - 2y - 3z$

$V = (6 - 2y - 3z)yz = 6yz - 2y^2z - 3yz^2$

$V_y = 6z - 4yz - 3z^2 = \qquad V_z = 6y - 2y^2 - 6yz$

$6z - 4yz - 3z^2 = 0 \qquad 6y - 2y^2 - 6yz = 0$

$6z - 3z^2 = 4yz \qquad 6y - 2y^2 - 6y\left(2 - \frac{4}{3}y\right) = 0$

$3z(2 - z) = 4yz \qquad 6y - 2y^2 - 12y + 8y^2 = 0$

$2 - z = \frac{4yz}{3z} \qquad 6y^2 - 6y = 0$

$6y(y - 1) = 0$

$z = \frac{-4y}{3} + 2 \qquad y - 1 = 0$

$y = 1$

$z = 2 - \frac{4(1)}{3}$

$x = 6 - 2(1) - 3\left(\frac{2}{3}\right) \rightarrow V = (2)(1)\left(\frac{2}{3}\right)$

$z = \frac{2}{3} \qquad x = 2 \qquad V = \frac{4}{3}$

$\boxed{V = \frac{4}{3} \text{ unidades}^3}$

#73 | P.969 | Ej.52

52. La base de una pecera con volumen dado *V* está hecha de pizarra y los lados están hechos de vidrio. Si la pizarra cuesta cinco veces más (por unidad de área) que el vidrio, encuentre las dimensiones de la pecera que minimicen el costo de los materiales.

$5xy + 2(xz + yz)$; $xyz = V$;

$C(x,y) = 5xy + 2V\left(\frac{x+y}{xy}\right) \rightarrow C_x = 5y - 2Vx^{-2}$

$5xy + 2V(x^{-1} + y^{-1}) \qquad C_y = 5x - 2Vy^{-2}$

$C_x = 0 \rightarrow 2V/(5x^2)$

$C_y = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{2}{5}V} = y$

$x = y = \sqrt[3]{\frac{2}{5}V}$ unidades

$z = V^{1/3}\left(\frac{5}{2}\right)^{2/3}$

$\boxed{x = y = \sqrt[3]{\frac{2}{5}V} \text{ unidades},\ z = V^{1/3}\left(\frac{5}{2}\right)^{2/3}}$

14.8 EJERCICIOS

#14 P.977 Ej. 7

7. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2; \quad x + y + z = 12$

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \; ; \; x+y+z = 12$

$f_x = 2x \qquad g_x = 1$

$f_y = 2y \qquad g_y = 1$

$f_z = 2z \qquad g_z = 1$

$2x = \lambda(1) \quad 2y = \lambda(1) \quad 2z = \lambda(1)$

$x = \frac{\lambda}{2} \quad y = \frac{\lambda}{2} \quad z = \frac{\lambda}{2}$

$x = \frac{8}{2} \quad y = 8/2 \quad z = 8/2$

$\lambda = 4 \quad y = 4 \quad z = 4$

$g(x,y,z) = \left(\frac{\lambda}{2}\right) + \left(\frac{\lambda}{2}\right) + \left(\frac{\lambda}{2}\right) = 12$

$\frac{3x}{2} = 12 \rightarrow \lambda = \frac{12(2)}{3} \rightarrow x = 8$

$f(4,4,4) = (4)^2 + (4)^2 + (4)^2 \rightarrow \lambda = 8$

$\boxed{\text{mínimo } (4,4,4) \quad 48}$

#16 P.978 Ej. 31

31-43 Use multiplicadores de Lagrange para dar una solución alterna al ejercicio indicado de la sección 14.7.

31. Ejercicio 41

41. Encuentre la distancia más corta del punto (2, 0, –3) al plano $x + y + z = 1$.

$x+y+z = 1 \quad (2, 0, -3)$

$f_x = 2(x-2) = 2x-4 \qquad g_x = 1$

$f_y = 2y = 2y \qquad g_y = 1$

$f_z = 2(z+3) = 2z+6 \qquad g_z = 1$

$2x - 4 = \lambda \quad 2y = \lambda \quad 2z + 6 = \lambda$

$x = \frac{\lambda}{2} + 2 \quad y = \frac{\lambda}{2} \quad z = \frac{\lambda}{2} - 3$

$x = \frac{8}{3} \; ; \; y = \frac{2}{3} \; ; \; z = \frac{-7}{3}$

$g(x,y,z) = \frac{\lambda+4}{2} + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda-6}{2} = 1$

$\frac{3\lambda - 2}{2} = 1 \rightarrow 3\lambda - 2 = 2 \rightarrow \lambda = \frac{4}{3}$

$d = \sqrt{\left(\frac{8}{3}-2\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-7}{3}+3\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = d = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\boxed{d = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$

#17 P.978 Ej. 36

36. Ejercicio 46

46. Encuentre tres números positivos cuya suma sea 12 y la suma de cuyos cuadrados sea lo más reducida posible.

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \; ; \; g(x,y,z) = x+y+z = 12$

$x > 0, \; y > 0, \; z > 0 \rightarrow \nabla f = \lambda \nabla g \rightarrow$

$\langle 2x, 2y, 2z \rangle = \lambda(1, 1, 1)$

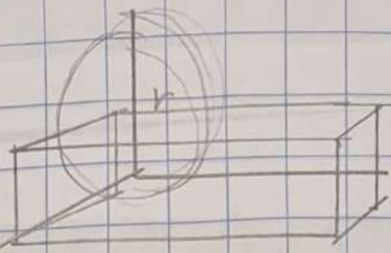
$2x = \lambda \; ; \; 2y = \lambda \; ; \; 2z = \lambda$

$x = y = z \; ; \quad x+y+z = 12 \rightarrow 3x = 12 \; ; \; x = 4 = y = z$

$\langle 4, 4, 4 \rangle$

$\boxed{(4, 4, 4)}$

#78 | P. 978 | Ej. 37



37. Ejercicio 47

47. Encuentre el volumen máximo de una caja rectangular inscrita en una esfera de radio r.

$V = 8xyz$ $\quad \frac{x^2}{9^2} + \frac{y^2}{8^2} + \frac{z^2}{6^2} = 1$

$f_x = 8yz \quad g_x = \frac{2x}{81} \quad 8yz = \lambda \frac{2y}{64} \quad 8xyz = \lambda \frac{2x^2}{81}$

$f_y = 8xz \quad g_x = \lambda \frac{2y}{64} \quad 8xz = \lambda \frac{2y}{64} \quad 8xyz = \lambda \frac{2y^2}{64}$

$f_z = 8xy \quad g_x = \frac{2z}{36} \quad 8xy = \lambda \frac{2z}{36} \quad 8xyz = \lambda \frac{2z^2}{36}$

$\frac{\lambda 2x^2}{81} = \frac{\lambda 2z^2}{36} \quad \frac{\lambda 2x^2}{81} = \frac{\lambda 2y^2}{64} \quad z = \frac{6x}{9} \quad \frac{x^2}{9^2} + \frac{\frac{64x^2}{81}}{8^2} + \frac{\frac{36x^2}{81}}{6^2} = 1$

$\frac{x}{9} = \frac{z}{6} \quad \frac{x^2}{81} = \frac{y^2}{64} \quad \frac{x}{9} = \frac{y}{8}$

$\frac{x^2}{81} + \frac{x^2}{81} + \frac{x^2}{81} = 1$

$y = \frac{8x}{9} = \frac{8\sqrt{3}}{3}; \quad z = \frac{6x}{9} = 2\sqrt{3}$ $\quad \frac{3x^2}{81} = 1 \to 3x^2 = 81$

$x^2 = \frac{81}{3}; \quad x = \sqrt{27}$

$V = 8(xyz) = 665.4$ $\quad \boxed{V = 8(xyz) = 665.11}$

15.1 EJERCICIOS

#79 | P. 999 | Ej. 13

13-14 Determine $\int_0^2 f(x, y)\, dx$ y $\int_0^3 f(x, y)\, dy$

13. $f(x, y) = x + 3x^2y^2$

$$\int_0^2 (x + 3x^2y^2)\,dx \to \left[\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^3}{3}y^2\right]_{x=0}^{x=2} = \left[\frac{1}{2}x^2 + x^3y^2\right]_{x=0}^{x=2} = \left[\frac{1}{2}(2)^2 + (2)^3y^2\right] - \left[\frac{1}{2}(0)^2 + (0)^3y^2\right]$$

$$2 + 8y^2$$

$$\int_0^3 (x + 3x^2y^2)\,dy = \left[xy + 3x^2\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=3} = \left[xy + x^2y^3\right]_{y=0}^{y=3} = \left[x(3) + x^2(3)^3\right] - \left[x(0) + x^2(0)^3\right]$$

$$3x + 27x^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} \int_0^2 (x + 3x^2y^2)\,dx &= 2 + 8y^2 \\ \int_0^3 (x + 3x^2y^2)\,dy &= 3x + 27x^2 \end{aligned}}$$

#20 | P.999 | Ej.15

15-26 Calcule la integral iterada.

15. $\int_1^4 \int_0^2 (6x^2y - 2x)\,dy\,dx$

$\int_1^4 \int_0^2 \frac{6x^2y}{2} - 2xy \Big|_0^2 dx \rightarrow \int_1^4 [3x^2(2)^2 - 2x(2)] - [3x(0) - 2x(0)]\,dx$

$\int_1^4 12x^2 - 4x\,dx \rightarrow \frac{12x^3}{2} - \frac{4x^2}{2}\Big|_1^4 \rightarrow [4(4)^3 - 2(4)^2] - [4-2] = 222$

$$\boxed{\int_1^4 \int_0^2 (6x^2y - 2x)\,dy\,dx = 222}$$

#21 | P.1000 | Ej.19

19. $\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} y\,dy\,dx$

$\int_0^2 x \operatorname{sen} y\,dy\,dx \rightarrow \int_0^2 -x\cos y \Big|_0^{\pi/2} dx \rightarrow \int_0^2 -x\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-x\cos(0))\,dx$

$\int_0^2 x\,dx \rightarrow \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 \rightarrow 2$

$$\boxed{\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} y\,dy\,dx = 2u^2}$$

#22 | P.1000 | Ej.20

20. $\int_1^3 \int_1^5 \frac{\ln y}{xy}\,dy\,dx$

$\int_1^3 \int_1^5 \frac{\ln y}{xy}\,dy\,dx \rightarrow \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx \int_1^5 \frac{\ln y}{y}\,dy$

$u = \ln y \;;\; du = \left(\frac{1}{y}\right)dy$

$[\ln(x)]_1^3 \left[\frac{1}{2}(\ln y)^2\right]_1^5$

$= (\ln 3 - 0)\,\frac{1}{2}\left[(\ln 5)^2 - 0\right] = \frac{1}{2}(\ln 3)(\ln 5)^2$

$$\boxed{\int_1^3 \int_1^5 \frac{\ln y}{xy}\,dy\,dx = \frac{1}{2}(\ln 3)(\ln 5) \simeq 1.42}$$

#23 | P.1000 | Ej.21

21. $\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dy\,dx$

$\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dy\,dx = \int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dy\,dx$

$\int_1^4 x\ln y + \frac{y^2}{2x}\Big|_1^2 dx \rightarrow \int_1^4 x\ln(2) + \frac{3}{2x}\,dx \rightarrow \frac{x^2\ln(2)}{2} + \frac{3}{2}\ln(x)\Big|_1^4 \rightarrow \frac{15}{2}\ln(2) + \frac{3}{2}(\ln(4))$

$\frac{21}{2}\ln(2)$

$$\boxed{\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dy\,dx = \frac{21}{2}\ln(2) \simeq 7.28}$$

\#24 | P. 1000 | G. 25

25. $\int_0^2 \int_0^\pi r\,\text{sen}^2\theta\, d\theta\, dr$

$\int_0^2\int_0^\pi \text{sen}^2\theta\, d\theta\, dr \quad \int_0^\pi \text{sen}^2\theta\, d\theta = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{1\theta}{2} - \frac{1}{4}\text{sen}\,2\theta \Big|_0^\pi$

$\int_0^2 r\frac{\pi}{2}\, dr \to \frac{\pi}{2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2 = \pi$

$$\boxed{\int_0^2\int_0^\pi r\,\text{sen}^2\theta\, d\theta\, dr = \pi}$$

27-34 Calcule la integral doble. \#25 | P. 1000 | G. 27

27. $\iint_R x\sec^2 y\, dA, \quad R = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \pi/4\}$

$\iint_R x\sec^2 y\, dA = \int_0^2\int_0^{\pi/4} x\sec^2 y\, dy\, dx = \int_0^2 x\, dx \int_0^{\pi/4} \sec^2 y\, dy = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 \left[\tan y\right]_0^{\pi/4}$

$(2-0)(\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0) = 2(1-0) = 2$

$$\boxed{\iint_R x\sec^2 y\, dA = 2}$$

\#26 | P. 1000 | G. 30

30. $\iint_R \frac{\tan\theta}{\sqrt{1-t^2}}\, dA, \quad R = \{(\theta, t) \mid 0 \leq \theta \leq \pi/3, 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\}$

$\iint_R \frac{\tan\theta}{\sqrt{1-t^2}}\, dA \to \int_0^{1/2}\int_0^{\pi/3} \frac{\tan\theta}{\sqrt{1-t^2}}\, d\theta\, dt = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \int_0^{\pi/3} \tan\theta\, d\theta$

$\left[\text{sen}^{-1} t\right]_0^{1/2} \left[\ln(\sec\theta)\right]_0^{\pi/3} \to \left(\text{sen}^{-1}\frac{1}{2} - \text{sen}^{-1} 0\right)\left(\ln|\sec\frac{\pi}{3}| - \ln|\sec 0|\right)$

$= \left(\frac{\pi}{6} - 0\right)(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi}{2}\ln 2$

$$\boxed{\iint_R \frac{\tan\theta}{\sqrt{1-t^2}}\, dA = \frac{\pi}{2}\ln 2}$$

\#27 | P. 1000 | G. 31

$u = x \qquad dv = \text{sen}(x+y)\, dx$

$du = dx \qquad v = -\cos(x+y)$

31. $\iint_R x\,\text{sen}(x+y)\, dA, \quad R = [0, \pi/6] \times [0, \pi/3]$

$\iint_D x\,\text{sen}(x+y)\, dA \to \int_0^{\pi/3}\int_0^{\pi/6} x\,\text{sen}(x+y)\, dA \to \int_0^{\pi/3} \left[-x\cos(x+y) + \text{sen}(x+y)\right]_0^{\pi/6} dy$

$\int_0^{\pi/3} \left(-\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}+y\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}+y\right)\right) - (\text{sen}\, y)\, dy \to -\frac{\pi}{6}\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}+y\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}+y\right) + \cos y \Big|_0^{\pi/3} \to \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\iint_R x\,\text{sen}(x+y)\, dA = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\pi}{2}}$$

#28 | P. 1000 | Gj. 32

32. $\displaystyle\iint_R \frac{1 + x^2}{1 + y^2}\, dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

$$\iint_R \frac{1+x^2}{1+y^2}\, dA = \int_0^1\int_0^1 \frac{x}{1+xy}\, dy\, dx = \int_0^1 \left[\ln(1+xy)\right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \left[\ln(1+x) - \ln 1\right] dx$$

$$\int_0^1 \ln(1+x)\, dx = \left[(1+x)\ln(1+x) - x\right]_0^1 = (2\ln 2 - 1) - (\ln 1 - 0) = 2\ln 2 - 1$$

$$\boxed{\iint_R \frac{1+x^2}{1+y^2}\, dA = 2\ln 2 - 1}$$

#29 | P. 1000 | Gj. 43

43. Determine el volumen del sólido encerrado por la superficie $z = x\sec^2 y$ y los planos $z = 0$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ y $y = \pi/4$.

$z = x\sec^2 y$; $z = 0$; $x = 0$; $x = 2$; $y = 0$; $y = \frac{\pi}{4}$

$z = 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 4$; $z = 2 + x^2 + (y-2)^2$

$R = [-1,1][0,4]$ si $\rightarrow z = 1$

$$V = \int_0^4\int_{-1}^1 [2 + x^2 + (y-2)^2]\, dx\, dy - \int_0^4\int_{-1}^1 (1)\, dx\, dy$$

$$V = \int_0^4 \left[2x + \tfrac{1}{3}x^3 + x(y-2)^2\right]_{x=-1}^{x=1} dy - \int_{-1}^1 dx \int_0^4 dy$$

$$V = \int_0^4 \left[\left(2 + \tfrac{1}{3} + (y-2)^2\right) - \left(-2 - \tfrac{1}{3} - (y-2)^2\right)\right] dy - [x]_{-1}^1 [y]_0^4$$

$$V = \int_0^4 \left[\tfrac{14}{3} + 2(y-2)^2\right] dy - [1 - (-1)][4 - 0] \rightarrow \left[\tfrac{14}{3}y + \tfrac{2}{3}(y-2)^3\right]_0^4 - (2)(4)$$

$$V = \left[\left(\tfrac{56}{3} + \tfrac{16}{3}\right) - \left(0 - \tfrac{16}{3}\right)\right] - 8 = \tfrac{88}{3} - 8 = \tfrac{64}{3}$$

$$\boxed{\tfrac{64}{3} \approx 21.33}$$

#30 | P. 1000 | Gj. 47

47-48 Determine el valor promedio de f en el rectángulo dado.

47. $f(x, y) = x^2y$, R tiene vértices $(-1, 0)$, $(-1, 5)$, $(1, 5)$, $(1, 0)$

$R \rightarrow [-1, 1][0, 5]$

$A(R) = 2(5) = 10$

$$f_{ave} = \frac{1}{A(R)}\iint_R f(x,y)\, dA \rightarrow \frac{1}{10}\int_0^5\int_{-1}^1 x^2y\, dx\, dy = \frac{1}{10}\int_0^5 \left[\tfrac{1}{3}x^3 y\right]_{-1}^1 dy$$

$$\frac{1}{10}\int_0^5 \tfrac{2}{3}y\, dy = \frac{1}{10}\left[\tfrac{1}{3}y^2\right]_0^5 = \frac{5}{6} \rightarrow \boxed{f_{ave} = \frac{1}{A(R)}\iint_R f(x,y)\, dA = \frac{5}{6}}$$

#31 | P. 1000 | Ej. 49

49-50 Use simetría para evaluar la integral doble.

49. $\displaystyle\iint_R \frac{xy}{1+x^4}\,dA, \quad R = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

$$\iint_R \frac{xy}{1+x^4}\,dA \rightarrow \int_{-1}^{1}\int_0^1 \frac{xy}{1+x^4}\,dy\,dx \rightarrow \iint_R g(x)h(y)\,dA = \int_a^b g(x)\,dx \int_c^d h(y)\,dy$$

$$\int_{-1}^{1}\int_0^1 \frac{xy}{1+x^4}\,dy\,dx = \int_0^1 y\,dy \int_{-1}^{1} \frac{x}{1+x^4}\,dx \quad f = \frac{1}{1+x^4}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{1+x^4}\,dx = 0 \rightarrow \int_0^1 y\,dy \int_{-1}^{1} \frac{x}{1+x^4}\,dx = \int_0^1 y\,dy\,(0) = 0$$

$$\boxed{\iint_R \frac{xy}{1+x^4}\,dA = 0}$$

#32 | P. 1000 | Ej. 51

SAC **51.** Use un SAC para calcular las integrales iteradas

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\,dy$$

¿Las respuestas contradicen el teorema de Fubini? Explique lo que sucede.

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\,dy = -\frac{1}{2}$$

La función $f(x,y) = \frac{(x-y)}{(x+y)^3}$ no es limite en $(0,1]\,[0,1]$, por lo tanto no sabes hace el teorema de Fubini's. Ya que en ambas integrales iteradas, estas implican integrales impropias que divergen en sus límites inferiores de integración.

15.2 EJERCICIOS

# 33	P. 1008	Ej. 3

1-6 Evalúe la integral iterada.

3. $\int_0^1 \int_0^y xe^{y^3}\, dx\, dy$

$$\int_0^1\int_0^y xe^{y^3}dx\,dy \to \int_0^1 \frac{x^2}{2}e^{y^3}\Big|_0^y dy = \int_0^1 \frac{y^2}{2}e^{y^3}dy$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}e^{y^3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(e^1-e^0) = \frac{1}{6}(e-1)$$

$$\boxed{\int_0^1\int_0^y xe^{y^3}dx\,dy = \frac{1}{6}(e-1)}$$

# 34	P. 1008	Ej. 6

6. $\int_0^1 \int_0^v \sqrt{1 - v^2}\, du\, dv$

$$\int_0^1\int_0^v \sqrt{1-v^2}\,du\,dv \to \int_0^1 \left[v\sqrt{1+e^v}\right]_{v=0}^{v=e^v} dv = \int_0^1 e^v\sqrt{1+e^v}\,dv = \frac{2}{3}(1+e^v)^{3/2}\Big]_0^1$$

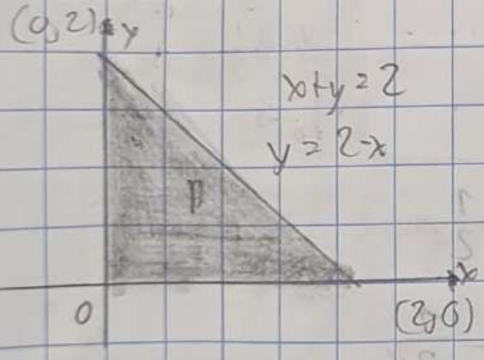
$$\frac{2}{3}(1+e)^{3/2} - \frac{2}{3}(1+1)^{3/2} = \frac{2}{3}(1+e)^{3/2} - \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

$$\boxed{\int_0^1\int_0^1 \sqrt{1-v^2}\,du\,dv = \frac{2}{3}(1+e)^{3/2} - \frac{4}{3}\sqrt{2}}$$

# 35	P. 1008	Ej. 26

23-32 Halle el volumen del sólido dado.

26. Encerrado por el paraboloide $z = x^2 + y^2 + 1$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y = 2$



$$V = \int_0^2\int_0^{2-x}(x^2+y^2+1) = \int_0^2\left[x^2y + \frac{1}{3}y^3 + y\right]_{y=0}^{y=2-x}dx$$

$$= \int_0^2\left[x^2(2-x) + \frac{1}{3}(2-x)^3 + (2-x) - 0\right]dx$$

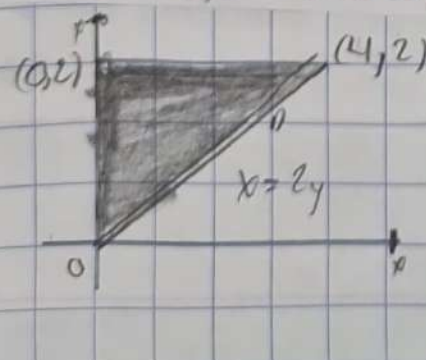
$$= \int_0^2\left(-\frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - 5x + \frac{14}{3}\right)dx = \left[-\frac{1}{3}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{14}{3}x\right]_0^2$$

$$= -\frac{16}{3} + \frac{32}{3} - 10 + \frac{28}{3} - 0 = \frac{14}{3}$$

$$\boxed{V = \int_0^2\int_0^{2-x}(x^2+y^2+1) = \frac{14}{3} \approx 4.67}$$

# 36	P. 1008	Ej. 30

30. Acotado por el cilindro $y^2 + z^2 = 4$ y los planos $x = 2y$, $x = 0$, $z = 0$ en el primer octante



$$V = \int_0^2\int_0^{2y}\sqrt{4-y^2}\,dx\,dy = \int_0^2\left[x\sqrt{4-y^2}\right]_{x=0}^{x=2y}dy$$

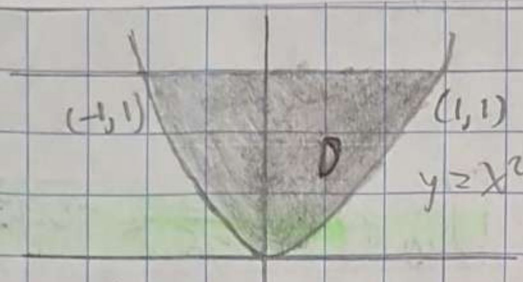
$$\int_0^2 2y\sqrt{4-y^2}\,dy = \left[-\frac{2}{3}(4-y^2)^{3/2}\right]_0^2 = 0 + \frac{16}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\boxed{V = \int_0^2\int_0^{2y}\sqrt{4-y^2}\,dx\,dy = \frac{16}{3} \approx 5.33}$$

#37 | P. 1009 | Gj. 36

35-38 Determine el volumen del sólido restando dos volúmenes.

36. El sólido encerrado por el cilindro parabólico $y = x^2$ y los planos $z = 3y$, $z = 2 + y$



$y = 1$ $\quad y = 1 \to 2 + y \geq 3 \; ; \; 0 \leq y \leq 1$

$z = 3$ $\quad z = 2 + y \; ; \; z = 3y$

$$V = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} (2+y)\,dy\,dx - \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} (3y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} (2+y-3y)\,dy\,dx \to \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} (2-2y)\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} \left[2y - y^2\right]_{y=x^2}^{y=1} dx$$

$$\int_{-1}^{1} (1-2x^2+x^4)\,dx = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \Big]_{-1}^{1} = \frac{16}{15}$$

$$\boxed{V = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} (2+y)\,dy\,dx = \frac{16}{15} \approx 1.07}$$

#38 | P. 1009 | Gj. 52

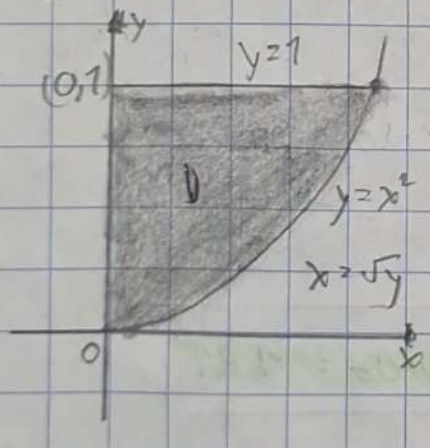
51-56 Evalúe la integral invirtiendo el orden de integración.

52. $\int_0^1 \int_{x^2}^1 \sqrt{y}\, \operatorname{sen} y \, dy \, dx$ $\to \int_0^1\int_{x^2}^1 \sqrt{y}\operatorname{sen} y\,dy\,dx \to \int_0^1\int_0^{\sqrt{y}} \sqrt{y}\operatorname{sen} y\,dx\,dy = \int_0^1 \sqrt{y}\operatorname{sen} y\,[x]_{x=0}^{x=\sqrt{y}}\,dy$

$$= \int_0^1 (\sqrt{y}\operatorname{sen} y)(\sqrt{y}-0)\,dy = \int_0^1 y\operatorname{sen} y\,dy = -y\cos]_0^1 + \int_0^1 \cos y\,dy$$

$$(-y\cos(y) + \operatorname{sen}(y)) \to (-y\cos y + \operatorname{sen} y]_0^1 \to$$

$$-1\cos(1) + \operatorname{sen}(1) - (0\cos(0) + \operatorname{sen}(0)) \to -\cos(1) + \operatorname{sen}(1)$$



$$\boxed{\int_0^1\int_{x^2}^1 \sqrt{y}\operatorname{sen} y\,dy\,dx = \operatorname{sen} 1 - \cos 1}$$

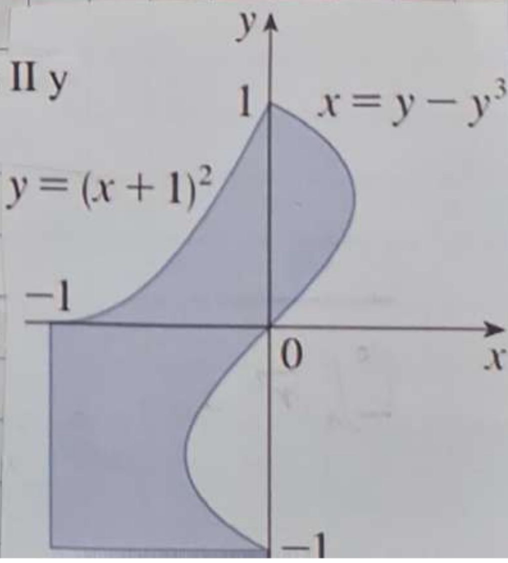
#39 | P. 1009 | Gj. 58

57-58 Exprese D como una unión de regiones de tipo I o tipo II y evalúe la integral.

58. $\iint_D y \, dA$

$D = \{(x,y) = | -1 \leq y \leq 0 \; ; \; -1 \leq x \leq y - y^3\}$

$\{(x,y) = 0 \leq y \leq 1 \; ; \; \sqrt{y} - 1 \leq x \leq y - y^3\}$ tipo II



$$\iint_D y\,dA = \int_{-1}^{0}\int_{-1}^{y-y^2} y\,dx\,dy + \int_0^1 \int_{\sqrt{y}-1}^{y-y^2} y\,dx\,dy$$

$$\int_{-1}^{0} [xy]_{x=-1}^{x=y-y^3}\, dy + \int_0^1 [xy]_{x=\sqrt{y-1}}^{x=y-y^3}\, dy$$

$$\int_{-1}^{0} (y^2 - y^4 + y)\, dy + \int_0^1 (y^2 - y^4 - y^{3/2} + y)\, dy$$

$$= \left[\tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{5}y^5 + \tfrac{1}{2}y^2\right]_{-1}^{0} + \left[\tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{5}y^5 - \tfrac{2}{5}y^{5/2} + \tfrac{1}{2}y^2\right]_0^1$$

$$= \left(0 - \tfrac{11}{30}\right) + \left(\tfrac{7}{30} - 0\right) = -\tfrac{2}{15}$$

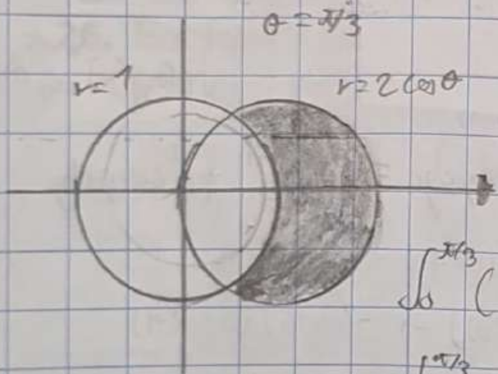
$$\boxed{\iint_D y\, dA = -\frac{2}{15} \approx -0.13}$$

15.3 EJERCICIOS

| #40 | P.1015 | Ej.17 |

15-18 Use una integral doble para hallar el área de la región.

17. La región dentro del círculo $(x-1)^2 + y^2 = 1$ y fuera del círculo $x^2 + y^2 = 1$



$(x-1)^2 + y^2 = 1 \to x^2 + y^2 = 2x$; $r^2 = 2r\cos\theta \to r = 2\cos\theta$

$x^2 + y^2 = 1$; $r = 1$; $2\cos\theta = 1 \to \cos\theta = \frac{1}{2} \to \theta = \frac{\pi}{3}$

$D = \{(r,\theta) \mid 1 \le r \le 2\cos\theta \,;\, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}\}$

$$2A(D) = 2\iint_D dA = 2\int_0^{\pi/3}\int_1^{2\cos\theta} r\,dr\,d\theta = 2\int_0^{\pi/3} \left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_{r=1}^{r=2\cos\theta} d\theta$$

$$\int_0^{\pi/3} (4\cos^2 - 1)\, d\theta = \int_0^{\pi/3} \left[4\cdot\tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta) - 1\right] d\theta$$

$$\int_0^{\pi/3} (1 + 2\cos 2\theta)\, d\theta = [\theta + \operatorname{sen} 2\theta]_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1.91$$

$$\boxed{\int_0^{\pi/3}\int_1^{2\cos\theta} r\,dr\,d\theta = 1.91}$$

| #41 | P.1015 | Ej.20 |

19-27 Use coordenadas polares para determinar el volumen del sólido dado.

20. Bajo el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y sobre el anillo $1 \le x^2 + y^2 \le 4$

$$V = \iint_{1 \le x^2 + y^2 \le 4} \sqrt{x^2 + y^2}\, dA$$

$$\int_0^{2\pi}\int_1^2 \sqrt{r^2}\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^2\, dr = [\theta]_0^{2\pi} \left[\tfrac{1}{3}r^3\right]_1^2 = 2\pi\left(\tfrac{8}{3} - \tfrac{1}{3}\right) = \frac{14}{3}\pi \approx 14.66$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\int_1^2 \sqrt{r^2}\, r\,dr\,d\theta = \frac{14}{3}\pi \approx 14.66}$$

#41 | P.1015 | Ej.25

$z=\sqrt{x^2+y}$; $x^2+y^2+z^2=1$

$x^2+y^2+(\sqrt{x^2+y^2})^2=1 \therefore x^2+y^2=\frac{1}{2}$

25. Sobre el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y bajo la esfera $x^2+y^2+z^2=1$

- $V=\iint_{x^2+y^2\leq\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right)dA=\int_0^{2\pi}\int_0^{1/\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-r^2}-r\right)r\,dr\,d\theta$

$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{1/\sqrt{2}}\left(r\sqrt{1-r^2}-r^2\right)dr=\left[\theta\right]_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2}-\frac{1}{3}r^3\right]_0^{1/\sqrt{2}}=2\pi\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)$

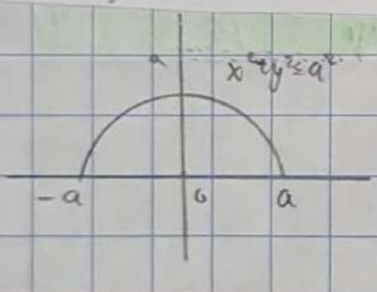
$=\frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})\simeq 0.61$

$$\boxed{\iint_{x^2+y^2\leq\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right)dA=\frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})\simeq 0.61}$$

#42 | P.1015 | Ej.30

29-32 Evalúe la integral iterada convirtiendo a coordenadas polares.

30. $\int_0^a\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}(2x+y)\,dx\,dy$

- 

$\int_0^a\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}(2x+y)\,dx\,dy\Rightarrow\int_0^{\pi}\int_0^a(2r\cos\theta+r\,\text{sen}\,\theta)r\,dr\,d\theta$

$=\int_0^{\pi}(2\cos\theta+\text{sen}\,\theta)d\theta\int_0^a r^2dr\Rightarrow\left[2\,\text{sen}\,\theta-\cos\theta\right]_0^{\pi}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^a$

$\left[(0+1)-(0-1)\right]\frac{1}{3}(a^3-0)=\frac{2}{3}a^3$

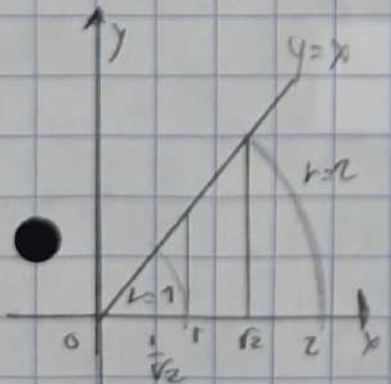
$$\boxed{\int_0^a\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}(2x+y)\,dx\,dy=\frac{2}{3}a^3}$$

#43 | P.1015 | Ej.39

39. Use coordenadas polares para combinar la suma

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x}xy\,dy\,dx+\int_1^{\sqrt{2}}\int_0^x xy\,dy\,dx+\int_{\sqrt{2}}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}}xy\,dy\,dx$$

en una integral doble. Evalúe después la integral doble.

- 

$\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x}xy\,dy+\int_1^{\sqrt{2}}\int_0^x xy\,dy\,dx+\int_{\sqrt{2}}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}}xy\,dy\,dx$

$\int_0^{\pi/4}\int_1^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi/4}\left[\frac{r^4}{4}\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\right]_{r=1}^{r=2}d\theta$

$=\frac{15}{4}\int_0^{\pi/4}\text{sen}\,\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{15}{4}\left[\frac{\text{sen}^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4}=\frac{15}{16}\simeq 0.94$

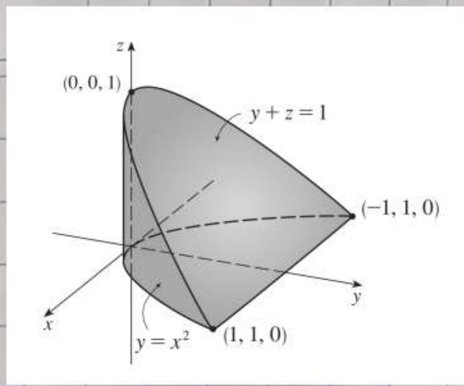
$$\boxed{\int_0^{\pi/4}\int_1^2 r^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\,dr\,d\theta=\frac{15}{16}\simeq 0.94}$$

15.6 EJERCICIOS

A44 | P. 1038 | Ej. 21

19-22 Use una integral triple para hallar el volumen del sólido dado.

21. El sólido encerrado por el cilindro $y = x^2$ y los planos $z = 0$ y $y + z = 1$



$y = x^2 \rightarrow y + z = 1 \; , \; y = 1$

$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - y\}$

$V = \iiint_E dV = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} dz\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}(1-y)\,dy\,dx$

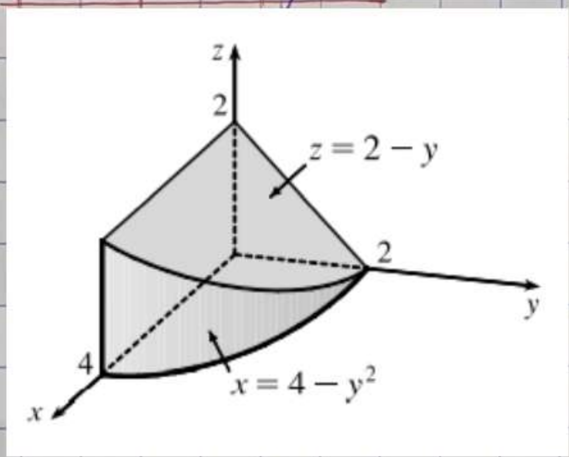
$\int_{-1}^{1}\left[y - \frac{1}{2}y^2\right]_{y=x^2}^{y=1} dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2} - x^2 + \frac{1}{2}x^4\right) dx$

$\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{8}{18}$

$\boxed{\iiint_E dV = \frac{8}{18} \approx 0.44}$

A45 | P. 1038 | Ej. 28

28. $\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{4-y^2} dx\,dz\,dy$



Ver gráfica

A46 | P. 1038 | Ej. 36

35-36 Escriba otras cinco integrales iteradas iguales a la integral iterada dada.

36. $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^z f(x, y, z)\,dx\,dz\,dy$

15.7 EJERCICIOS