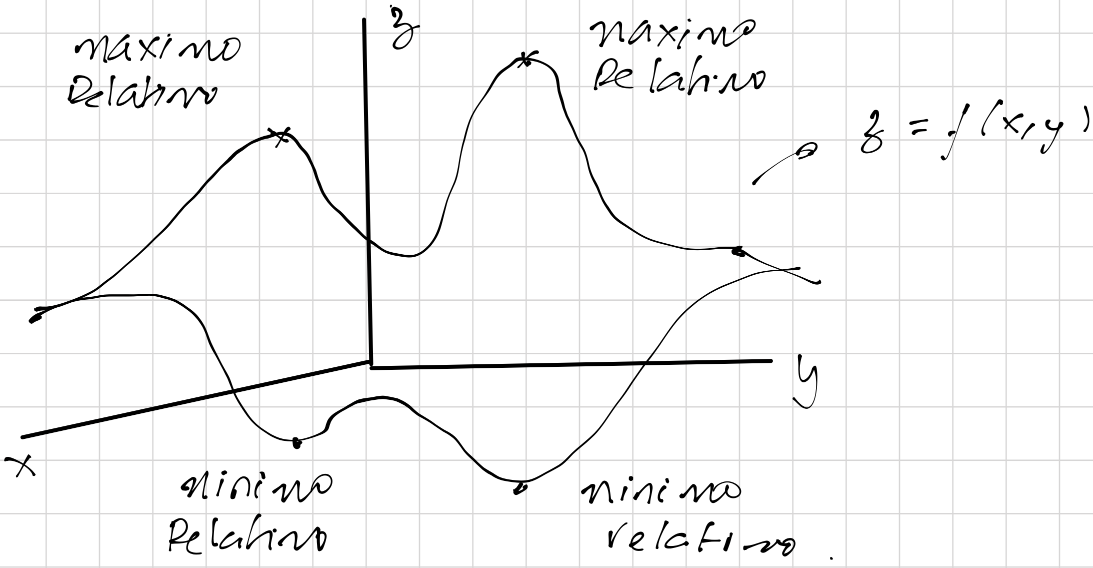
Valores maximos y minimos de funciones multivariables



Extremos relativos

a) Un número $f(a,b)$ es un maximo relativo de una función $z=f(x,y)$ si $f(x,y) \leq f(a,b)$ para todo (x,y) en algún disco abierto que contenga a (a,b).

b) un número $f(a,b)$ es un minimo relativo de una función $z=f(x,y)$ si $f(x,y) \geq f(a,b)$ para todo (x,y) en algún disco abierto que contenga a (a,b)

Punto critico

un punto critico de una función $z=f(x,y)$ es un punto (a,b) en el dominio de f para el cual

$$f_x(a,b) = 0 \quad y \quad f_y(a,b) = 0$$

o si una de sus derivadas parciales no existe en el punto.

Prueba de la segunda derivada

sean (a,b) un punto critico de $z=f(x,y)$ y suponga que f_{xx}, f_{yy} y f_{xy} son continuas en un disco centrado en (a,b), considere que

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y)\cdot f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2$$

1) Si $D(a,b) > 0$ y $f_{xx}(a,b) > 0$, entonces $f(a,b)$ es un

mínimo relativo

2) Si $D(a,b) > 0$ y $f_{xx}(a,b) < 0$, entonces $f(a,b)$ es un máximo relativo.

3) Si $D(a,b) < 0$, entonces $(a, b, f(a,b))$ no es un extremo relativo, es un punto silla.

4) Si $D(a,b) = 0$ entonces la prueba no es concluyente.

Ej. Determine los valores máximos y mínimos.

$$f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$$

Pts. críticos.

$f_x = 0$ y $f_y = 0$

$\rightarrow f_x = -2 - 2x = 0 \qquad -2x = 2 \qquad x = \frac{2}{-2} \rightarrow x = -1$

$f_y = 4 - 8y = 0 \qquad -8y = -4 \qquad y = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$

$P(-1, 1/2)$

Prueba de la segunda derivada

$D = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2$

$f_{xx} = -2 \qquad f_{yy} = -8 \qquad f_{xy} = 0$

$D = (-2)(-8) - 0^2 = 16 \rightarrow \begin{matrix} D > 0 \\ f_{xx} < 0 \end{matrix} \rightarrow$ máximo relativo.

$f(-1, 1/2) = 9 - 2(-1) + 4(\frac{1}{2}) - (-1)^2 - 4(\frac{1}{2})^2$

$= 9 + 2 + \cancel{2} - \cancel{1} - 1 = 11$

Ej. Determine los valores máximos y mínimos.

$$f(x,y) = xy - \frac{2}{x} - \frac{4}{y} + 8 \rightarrow \begin{matrix} -2x^{-1} \\ -4y^{-1} \end{matrix}$$

Pts. críticos.

$f_x = y + 2x^{-2} = 0 \rightarrow (y)^2 = \left(-\frac{2}{x^2}\right)^2$

$f_y = x + 4y^{-2} = 0 \rightarrow (x)^2 = \left(-\frac{4}{y^2}\right)$

$y^2 = \frac{4}{x^4}$

$x(x^3+1) = 0 \rightarrow \cdot\, x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$

$x^3 - \cancel{x^2} + \cancel{x} + x^2 - \cancel{x} + 1$

$x(x+1)(x^2 - x + 1) = 0 \rightarrow x = 0$

$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

$y = -\frac{2}{x^2}$ $\qquad (x)^2 = \left(-\frac{4}{y^2}\right)^2$

$x^2 = \frac{16}{y^4}$

$y = -\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{16}\,8}{y^4}} \rightarrow y = -\frac{y^4}{8} \rightarrow 8y = -y^4$

$y^4 + 8y = 0 \qquad y(y^3 + 8) = 0$

$y^3 + 8 = (y+2)(y^2 - 2y + 4) = 0$

$y(y+2)(y^2 - 2y + 4) = 0 \rightarrow y = 0$

$y + 2 = 0 \qquad y = -2$

$x = 0 \quad x = -1 \quad y = 0 \quad y = -2$

$P_1(0,0) \quad P_2(0,-2) \quad P_3(-1,0), \quad P_4(-1,-2)$

Prueba de la segunda derivada

$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$

$f_x = y + 2x^{-2} \qquad f_y = x + 4y^{-2}$

$f_{xx} = -4x^{-3} \qquad f_{yy} = -8y^{-3} \qquad f_{xy} = 1$

$P(0,0)$

$$D = -4(0)\cdot(-8)(0^{-3}) - 1^2 = -1 \rightarrow \text{no es max. ni min.}$$

Punto silla

$P(0,-2)$

$$D = -4(0)\cdot\cancel{(-8)(-2)^{-3}} - 1 = -1 \rightarrow \text{Punto silla}$$

$$P(-1,0) = -4(-1)^{-3}\cdot\cancel{(-8)(0^{-3})} - 1 = -1 \rightarrow \text{Punto silla.}$$

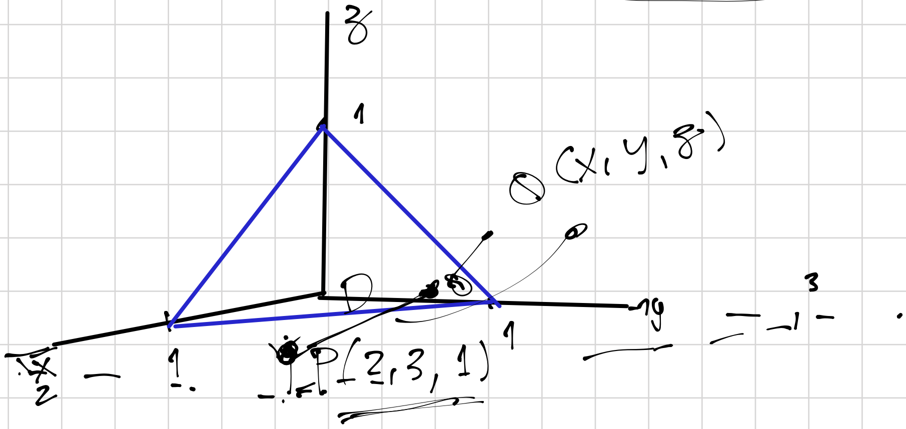
$P(-1,-2)$

$$(-4)\left(\frac{1}{(-1)^3}\right) \qquad (-8)\left(\frac{-1}{2^3}\right) = (-8)\left(\frac{-1}{8}\right)$$

$$D = -4(-1)^{-3}\cdot(-8)(-2)^{-3} - 1^2 = (4)(1) - 1 = 3$$

$D > 0 \quad f_{xx} > 0 \rightarrow$ mínimo relativo.

Ej. Encuentre la distancia mínima en el punto $P(2,3,1)$ y el plano $x+y+z=1$



función objetivo → distancia entre dos puntos.

$$L = \overline{PQ} = D = \left[\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}\right]^2 \qquad x+y+z=1$$

$$L = D^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 \qquad z = 1-x-y$$

L_x: $\quad L_y$: $\quad L_z$:

L_x: $2(x-2)^1(1) = 0 \rightarrow x = 2$

L_y: $2(y-3)^1(1) = 0 \rightarrow y = 3$

L_z: $2(z-1) = 0 \qquad z = 1$

$L = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (1-x-y-1)^2$

$L_x = 0 \rightarrow 2(x-2)(1) + 2(-x-y)(-1) = 0$

$2x - 4 + 2x + 2y = 0$

$[4x + 2y = 4] * \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{2x + y = 2}$ ①

$L_y = 0$

$2(y-3)(1) + 2(-x-y)(-1) = 0$

$2y - 6 + 2x + 2y = 0$

$[2x + 4y = 6] \times \frac{1}{2}$ $\boxed{x + 2y = 3}$ ②

$2x + y = 2$
$x + 2y = 3$ $* -2$

$\cancel{2x} + y = 2$
$\cancel{-2x} - 4y = -6$

$-3y = -4$ $\boxed{y = \frac{4}{3}}$

$x = 3 - 2y$

$x = 3 - 2\left(\frac{4}{3}\right) = 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$ $\boxed{x = \frac{1}{3}}$

$z = 1 - x - y$

$z = 1 - \left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{4}{3}\right) = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$

$D = L_{xx} L_{yy} - L_{xy}$

$L_{xx} = 4$ $L_{yy} = 4$ $L_{xy} = 2$

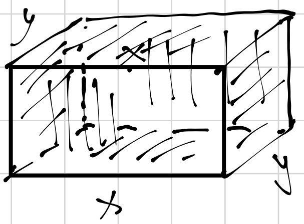
$D = (4)(4) - 2^2 = 16 - 4 = 12$

$D > 0$ $L_{xx} > 0$ $\rightarrow$ distancia minima

$L = \sqrt{D^2} = \sqrt{\ }$

$D = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 3\right)^2 + \left(-\frac{2}{3} - 1\right)^2}$

Ej. Encuentre las dimensiones de la caja rectangular con volumen de 1000 cm^3 que tiene una area mínima.



$V = xyz = 1000$

función objetivo: Area mínima.

$A_c = A_b + A_t + A_f + A_{tr} + A_{li} + A_{ld}$

$A_c = xy + xy + xz + xz + yz + yz$

$A_c = 2xy + 2xz + 2yz$

$V = xyz = 1000 \rightarrow z = \frac{1000}{xy}$

$A = 2xy + 2\cancel{x}\left(\frac{1000}{\cancel{x}y}\right) + 2\cancel{y}\left(\frac{1000}{x\cancel{y}}\right)$

$A = 2xy + \frac{2000}{y} + \frac{2000}{x}$

Pts. críticos

$A_x = 0 \qquad 2y - \frac{2000}{x^2} = 0 \rightarrow \cancel{2}y = \frac{\overset{1000}{\cancel{2000}}}{x^2} \rightarrow y = \frac{1000}{x^2}$ (1)

$A_y = 0 \qquad 2x - \frac{2000}{y^2} = 0 \rightarrow \cancel{2}x = \frac{\cancel{2000}}{y^2} \rightarrow x = \frac{1000}{y^2}$ (2)

(1) $\quad y^2 = \left(\frac{1000}{x^2}\right)^2 = \frac{1000^2}{x^4}$

$x = \frac{\cancel{1000}}{\frac{\cancel{1000^2}}{x^4}} = x = \frac{x^4}{1000} \rightarrow 1000x = x^4$

$x^4 - 1000x = 0 \rightarrow x(x^3 - 1000) = 0$

$$\underline{x}(x-10)(x^2+10x+100)=0 \quad \rightarrow \quad x=0$$

$$\boxed{x=10}$$

$$x^2=\frac{(1000)^2}{y^4}$$

$$y=\frac{\cancel{1000}}{\frac{1000^{\cancel{2}}}{y^4}}=\frac{y^4}{1000}$$

$$1000y=y^4 \qquad y^4-1000y=0$$

$$y(y^3-1000)=0$$

$$y(y-10)(y^2+10y+100)=0 \qquad y=0$$

$$\boxed{y=10}$$

$$z=\frac{1000}{xy}=\frac{10\cancel{00}}{(1\cancel{0})(1\cancel{0})}$$

$$\boxed{z=10}$$