Clase Física 1 05

Leyes del movimiento para la rotación

Aplicaciones en sistemas de un eje de rotación.

Torque total y segunda ley de newton

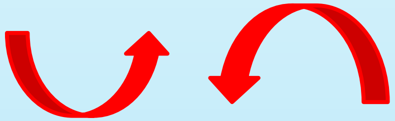
Torque total o neto: Es la sumatoria de los de torque que actúan sobre un sistema partiendo del eje de rotación del sistema. En este caso se tomara “+” o “-” para cada torque considerando el movimiento del sistema.

$$\boldsymbol{\tau_{total} = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 + \ldots\ldots.}$$

Segunda ley de newton aplicada al movimiento rotacional.

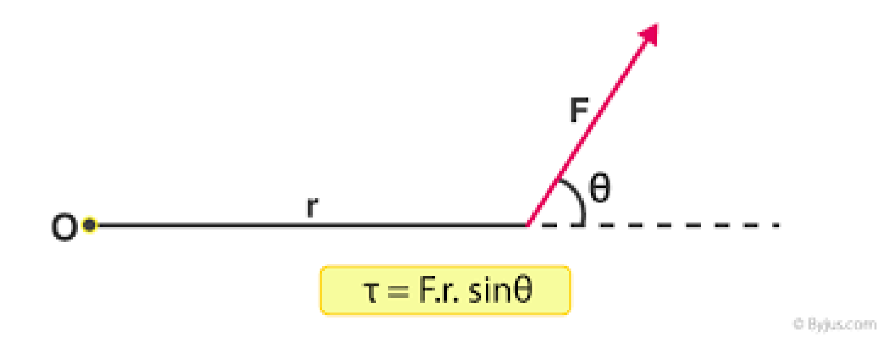
$$\boldsymbol{\tau_{total} = \sum \tau_i}$$

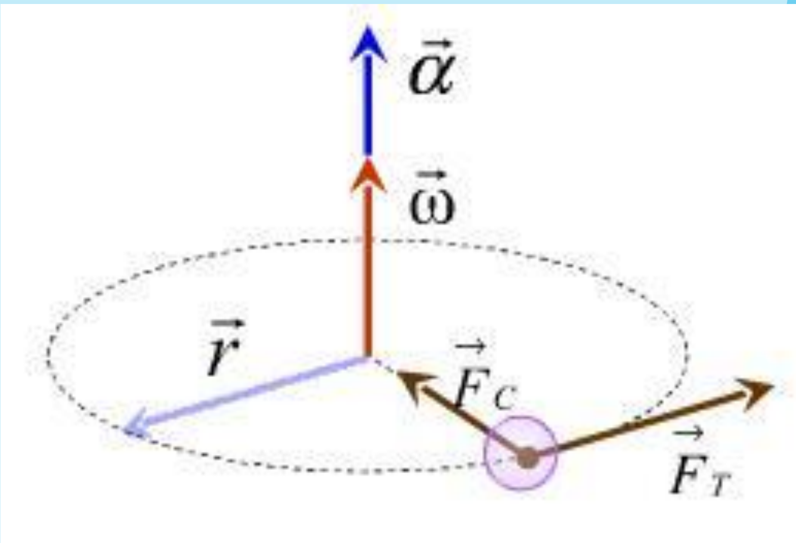
$$\boldsymbol{\sum \tau_i = I_o \alpha}$$



Donde la inercia es del objeto o sistema en rotación, desde el eje de rotación.

Se considera positivo o negativo dependiendo hacia donde se desea hacer rotar al sistema.

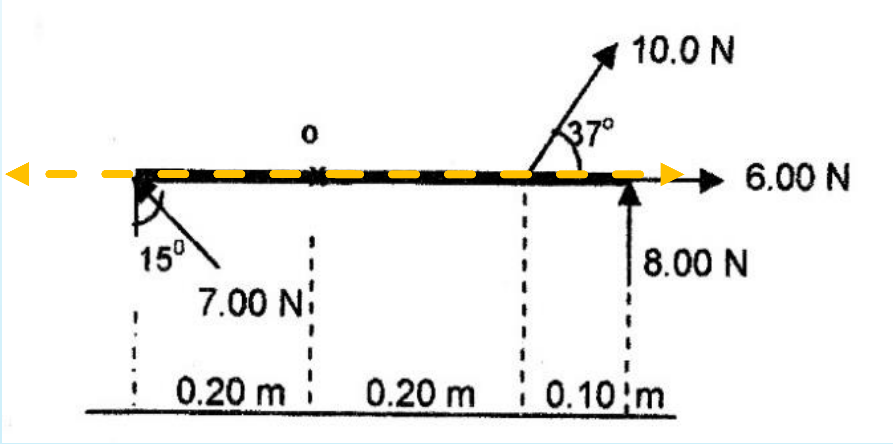




1.¿Una barra de longitud 0.500m esta pivoteada a 0.200m de un extremo. Se somete a la acción de cuatro fuerzas como indica la figura, cual es la magnitud de la torca o momento de torsión resultante, en N m? A) 2.25 B) 5.80 C) 4.96 D) 0.834 E) 0.156

2. ¿Del problema 10 calcule la inercia del sistema en Kg*m^2 el punto O si el sistema tiene una aceleración angular de 1.25 rad/s^2?

A) 0.1248 B)4.64 C) 1.8 D) 3.968 E) 0.6672



Resolución se calculan los torques individuales de cada fuerza y con los resultados

Se suman dependiendo su dirección de la rotación

$\tau_a = r\,F\,sen\,\theta = (0.20m)(7N)sen\,75°$

$\tau_a = 1.35\ N * m\ \ horario$

$\tau_b = r\,F\,sen\,\theta = (0.20m)(10N)sen\,37°$

$\tau_b = 1.20\ N * m\ \ antihorario$

$\tau_c = r\,F\,sen\,\theta = (0.30m)(6N)sen\,0°$

$\tau_c = 0\ N * m$

$\tau_d = r\,F\,sen\,\theta = (0.30m)(8N)sen\,90°$

$\tau_d = 2.4\ N * m\ \ antihorario$

Para el torque total se tomara el torque total en sentido antihorario. $\boldsymbol{\tau_{total} = \tau_a + \tau_b + \tau_c + \tau_d}$

$\boldsymbol{\tau_{total} = \tau_a + \tau_b + \tau_c + \tau_d = -1.35 + 1.20 + 0 + 2.4 = +2.25\ N * m}$

Para el calculo del momento de inercia se estima por medio de la sumatoria de troques $\tau_{total} = I_o\alpha$

$$\tau_{total} = I_o\alpha \quad \rightarrow \quad I_o = \frac{\tau_{total}}{\alpha} = \frac{2.25}{1.25} = \boldsymbol{1.8\ Kg * m^2}$$

Una varilla delgada de 5.00 Kg de masa mide L=2.00 m de longitud y es libre de girar en el plano vertical pivotando sin fricción alrededor de un clavo horizontal colocado a L/4 de uno de sus extremos, la varilla se coloca en posición horizontal y se suelta desde el reposo.

a)La rapidez angular de la varilla cuando pasa por su posición de equilibrio, en rad/s

b)La rapidez tangencial del extremo más lejano del eje cuando la varilla pasa por su posición de equilibrio, en m/s

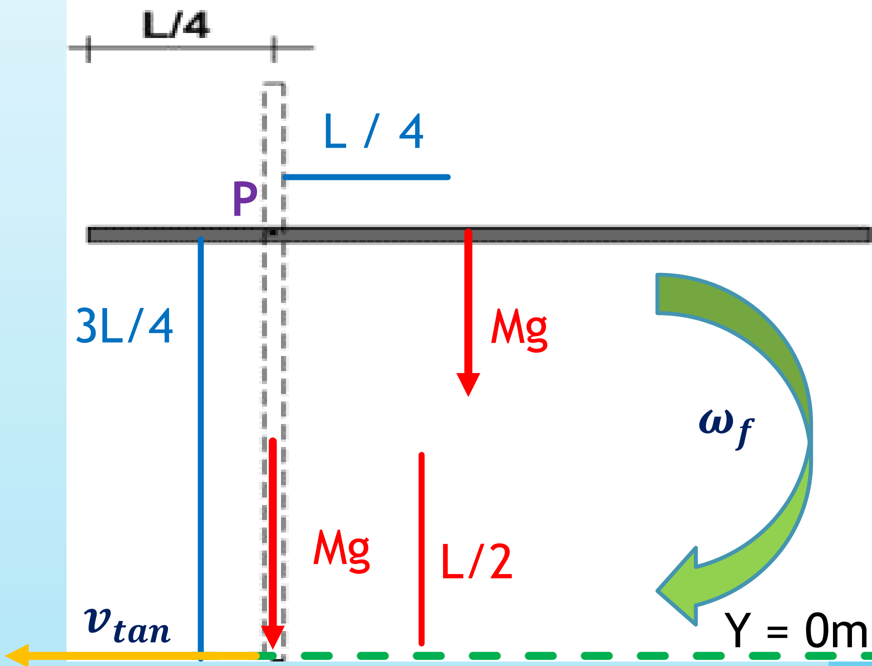
c)La magnitud de la aceleración angular con la que la varilla empieza a girar, en rad/s2

d)La magnitud de la aceleración tangencial del extremo más lejano al eje, cuando la varilla empieza a girar en m/s^2

El cálculo del momento de inercia del sistema desde el eje de rotación "p"

$$I_p = I_{cm} + Md^2$$

$$I_p = \frac{ML^2}{12} + M(L/4)^2 = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{16} = \frac{7ML^2}{48}$$



El sistema se encuentra sin efectos de fuerzas externas por lo cual es conservativo.

$$\Delta E = 0 \qquad E_f = E_o$$

$$U_{gf} + K_{rotf} = U_{go} + \cancel{K_{roto}}$$

$$Mg\left(\frac{L}{2}\right) + \frac{1}{2} I_p \omega_f^2 = Mg(3L/4)$$

Se despejara para la velocidad angular en el punto de equilibrio y se utiliza su relación angular para la rapidez tangencial.

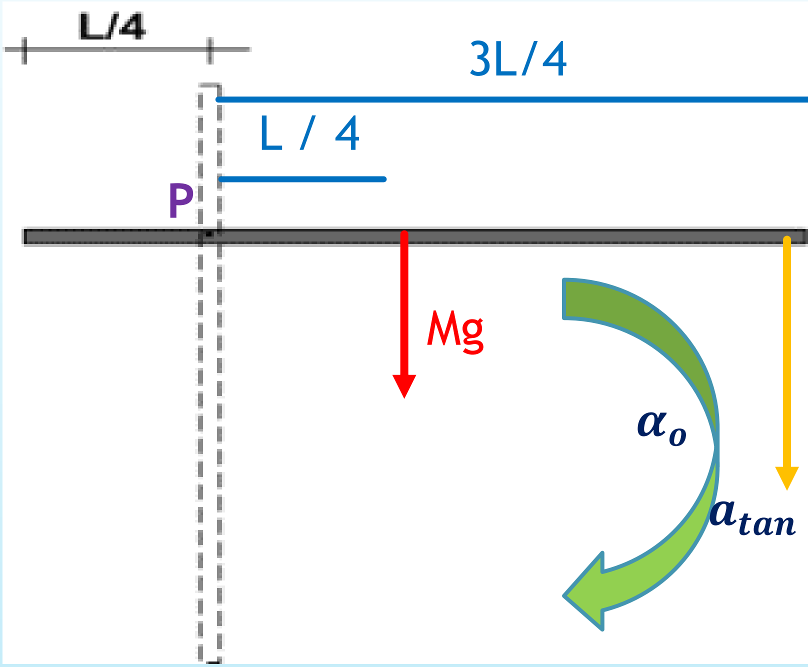
$$\frac{1}{2} I_p \omega_f^2 = mg\left(\frac{3L}{4} - \frac{L}{2}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\frac{7\cancel{M}L^{\cancel{2}}}{48}\right)\omega_f^2 = \frac{\cancel{M}g\cancel{L}}{4} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{7\cancel{L}}{48}\right)\omega_f^2 = \frac{g}{2}$$

$$\omega_f = \sqrt[2]{\frac{48\,g}{14L}} = \sqrt[2]{\frac{24\,g}{7\,L}} = \sqrt[2]{\frac{24(9.8)}{7\,(2)}} = \mathbf{4.0987\ \frac{rad}{s}}$$

$$v_{tan} = \omega_f\left(\frac{3L}{4}\right) = 4.0987\,(0.75(2)) = \mathbf{6.14\ m/s}$$

c)La magnitud de la aceleración angular con la que la varilla empieza a girar, en rad/s2

d)La magnitud de la aceleración tangencial del extremo más lejano al eje, cuando la varilla empieza a girar en m/s^2



El cálculo del momento de inercia del sistema desde el eje de rotación "p"

$$I_p = I_{cm} + Md^2$$

$$I_p = \frac{ML^2}{12} + M(L/4)^2 = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{16} = \frac{7ML^2}{48}$$

Se calcula la aceleración angular partiendo de la sumatoria de torques en el punto "P" considerando

Únicamente la parte al inicio, ya que posterior a el sistema es variable lo cual complica la resolución

$$\sum \tau = I_p \, \alpha_o \quad se\ tomara\ sentido\ horario\ positivo$$

La única fuerza que realiza un torque es el peso de la varilla.

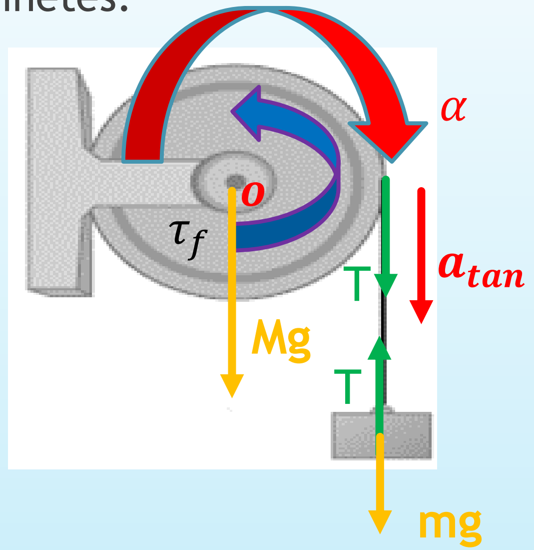
$$Mg(L/4)\ sen\ 90° = I_p\ \alpha_o$$

$$\alpha_o = \frac{Mg\ (L/4)}{I_p} = \frac{\cancel{M}g\ (L/4)}{\frac{7\cancel{M}L^2}{48}} = \frac{48\ g\cancel{L}}{28\ \cancel{L^2}} = \frac{12\ g}{7\ L}$$

$$\alpha_o = \frac{12\ g}{7\ L} = \frac{12(9.8)}{7(2)} = \mathbf{8.4\ \frac{rad}{s^2}}$$

$$a_{tan} = \alpha_o\left(\frac{3L}{4}\right) = 8.4\ \big(0.75(2)\big) = \mathbf{12.6\ \frac{m}{s^2}}$$

Ejemplo: Una polea tiene la forma de un disco sólido uniforme de 100 Kg de masa y 30.0 cm de radio. Un bloque de 50.0 Kg se sujeta a un alambre muy ligero que se enrolla alrededor del borde de la polea y el sistema se libera del reposo, mientras el bloque desciende, actúa una torca por fricción constante de 10.0 N*m entre el eje de la polea y sus cojinetes.



a) La magnitud de la aceleración del bloque, en m/s^2

b)La magnitud de la tensión en la cuerda mientras el bloque desciende, en N

c)La magnitud de la toca que la cuerda hace sobre la polea, en N*m

Resolución se realiza las ilustraciones que afectan a los dos objetos y se procede a plantear sumatoria de torques para la polea y sumatoria de fuerzas para el bloque, con esto se puede realizar relaciones lineales para combinar.

Sumatoria de fuerzas para el bloque:

$$+\downarrow \sum F_y = m\, a_{tan}$$

$$mg - T = m\, a_{tan} \quad \rightarrow \quad T = mg - ma_{tan} \quad ec.1$$

Sumatoria de torques en el centro de la polea:

$$\sum \tau = I_o \alpha \ \ positivo\ en\ sentido\ horario \quad \rightarrow \quad TR\ sen90° - \tau_f = I_o \alpha \ ec.2$$

Se procede a sustituir la expresión de la tensión de la ec.1 en la ec. 2. y recordar la inercia de la polea como la del cilindro.

$$(mg - ma_{tan})\mathrm{R} - \tau_f = I_o \alpha$$

$$mgR - mRa_{tan} - \tau_f = \frac{1}{2} MR^2 \alpha$$

Se realiza la relación lineal y angular para la aceleración para tener una ecuación con todos los términos de la ecuación iguales.

$$mgR - mRa_{tan} - \tau_f = \frac{1}{2}MR^{\cancel{2}}\left(\frac{a_{tan}}{\cancel{R}}\right)$$

$$mgR - mRa_{tan} - \tau_f = \frac{1}{2}MRa_{tan}$$

se despeja para la expresión de la aceleración tangencial del sistema.

$$mgR - \tau_f = \frac{1}{2}MRa_{tan} + mRa_{tan}$$

$$a_{tan} = \frac{mgR - \tau_f}{\frac{1}{2}MR + mR} = \frac{50(9.8)(0.30) - 10}{0.5(100)(0.30) + 50(0.30)} = 4.56667 \approx \mathbf{4.57\ \frac{m}{s^2}}$$

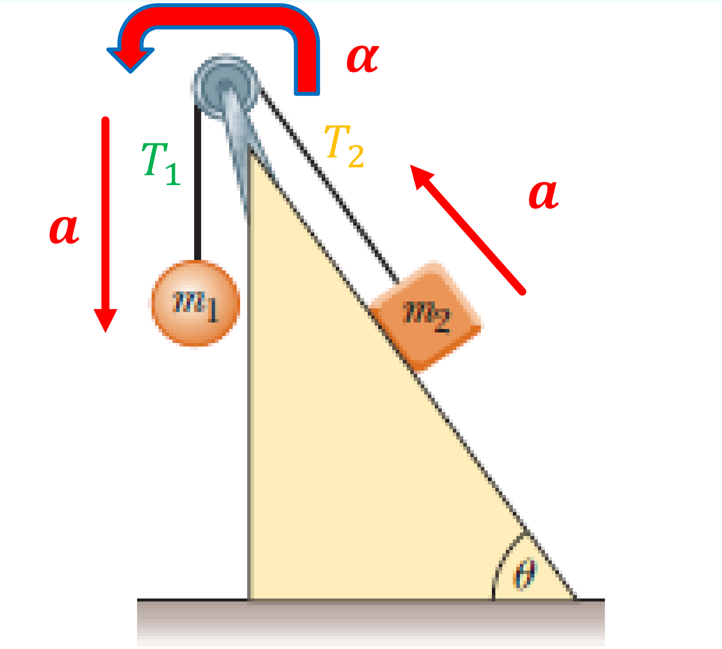
calcular la tensión de la cuerda a partir de la ec. 1

$T = mg - ma_{tan} = 50(9.8) - 50(4.57) = \mathbf{261.5\ N}$

El momento de torque de la fuerza de tensión se calcula de la expresión siguiente.

$$\tau_T = TR\ sen90° = (261.5)(0.30)sen\ 90° = \mathbf{78.45\ N * m\ en\ sentido\ horario}$$

Se muestra un sistema de polea que se libera del reposo de un plano inclinado θ=55° con fricciones 0.15 y 0.25 respectivamente, se tiene que la m_1= 20kg, m_2=10kg; la polea no es ideal teniendo una masa de 5kg con un radio de 0.25m, Calcule:



Las tensiones del sistema

La aceleración a y α del sistema

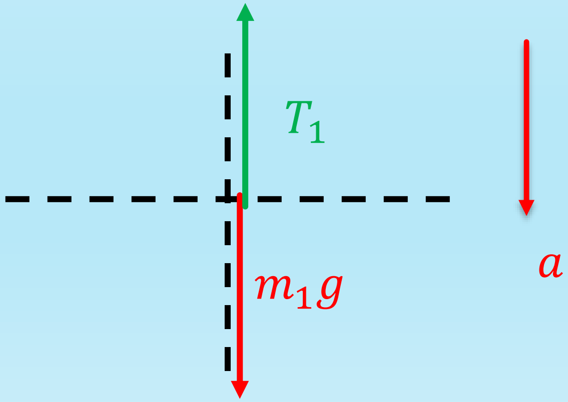
Resolución en estos casos se realiza un supuesto del movimiento en el cual se usara para establecer las direcciones de la aceleración lineal y angular.

Se orienta para la masa m1 ya que es la mayor pero si en este caso el resultado de la aceleración toma signo negativo se tendrá que realizar de nuevo el problema ya que esta involucrado la fricción

$\mu_k = 0.15 \quad \mu_s = 0.25 \quad m_1 = 20\ Kg \quad m_2 = 10Kg \quad m_p = 5Kg \quad R = 0.25m \quad \theta = 55°$

Se realizan los diagramas de cuerpo libre de cada uno de los objetos considerar que ahora la polea genera dos tensiones por no ser ideal.

D. C. L. Masa 1



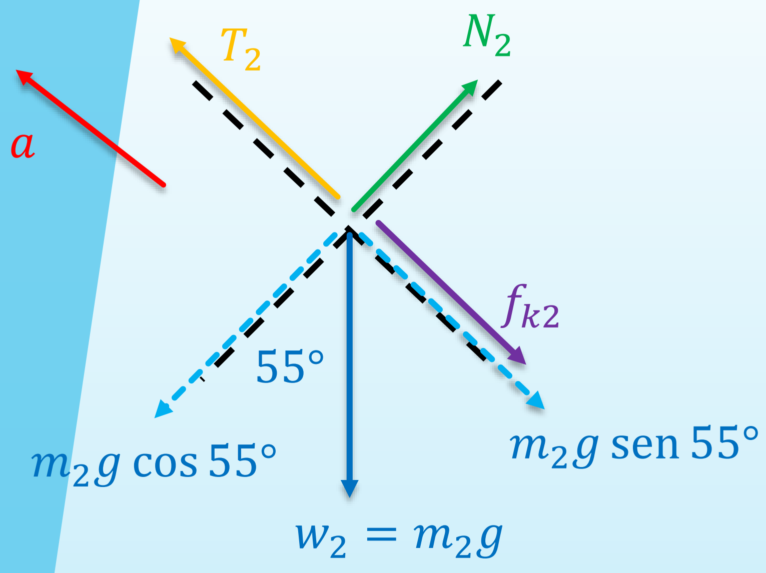
$$+\downarrow \sum F_y = m_1 a$$

$$m_1 g - T_1 = m_1 a$$

Se despeja para la tensión por ser el termino que estará involucrado para resolver el sistema ya que la polea esta incluida ahora

$$T_1 = m_1 g - m_1 a \quad ecuación\ No.1$$

D.C. L. Masa 2



$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$N_2 - m_2 g cos 55° = 0$$

$$N_2 = (10)(9.8)\ cos 55° \ = 56.21N$$

$$f_{k2} = \mu_k N_2 = (0.15)(56.21) = 8.43N$$

Se plantea la otra ecuación en este caso con las componentes horizontales

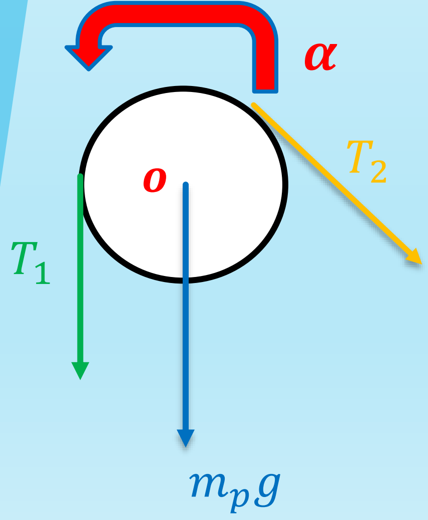
$$+\leftarrow \sum F_x = m_2 a$$

$$T_2 - \ m_2 g sen\ 55° - f_{k2} = m_2 a$$

Se despejara al igual que en caso anterior pero en este caso para la tensión del cable para posterior combinar las ecuaciones.

$$T_2 = \ m_2 g sen\ 55° + f_{k2} + m_2 a \quad ecuación\ No. 2$$

D.C.L. Polea



Sumatoria de torques en el centro de la polea:

$$\sum \tau \ = \ I_o \alpha \ \ positivo\ en\ sentido\ antihorario$$

$$T_1 R\ sen 90° - \ T_2 R sen\ 90° = \ I_o \alpha$$

$$T_1 \cancel{R} \ - \ T_2 \cancel{R} = \frac{1}{2} m_p \cancel{R^2} \left(\frac{a}{\cancel{R}}\right)$$

$$T_1 \ - \ T_2 \ = \frac{1}{2} m_p a \quad ecuacion\ No. 3$$

$T_1 = m_1 g - m_1 a$ $\quad ecuación\ No.1 \quad$ $T_2 = m_2 g sen\, 55° + f_{k2} + m_2 a$ $\quad ecuación\ No.2$

$T_1 - T_2 = \frac{1}{2} m_p a \quad ecuacion\ No.3$

Se sustituye las ec. 1 y ec. 2 en la expresión de la ecuación 3 para resolver para la aceleración lineal del sistema de bloques. $\mu_k = 0.15 \quad \mu_s = 0.25 \quad m_1 = 20\ Kg \quad m_2 = 10Kg \quad m_p = 5Kg \quad R = 0.25m \quad \theta = 55° \quad f_{k2} = 8.43N$

$$m_1 g - m_1 a - (m_2 g sen\, 55° + f_{k2} + m_2 a) = \frac{1}{2} m_p a$$

$$m_1 g - m_1 a - m_2 g sen\, 55° - f_{k2} - m_2 a = \frac{1}{2} m_p a$$

$$m_1 g - m_2 g sen\, 55° - f_{k2} = \frac{1}{2} m_p a + m_2 a + m_1 a$$

$$a = \frac{m_1 g - m_2 g sen\, 55° - f_{k2}}{\frac{1}{2} m_p + m_2 + m_1} = \frac{20(9.8) - 10(9.8) sen\, 55° - 8.43}{0.5(5) + 10 + 20} = 3.30\ m/s^2$$

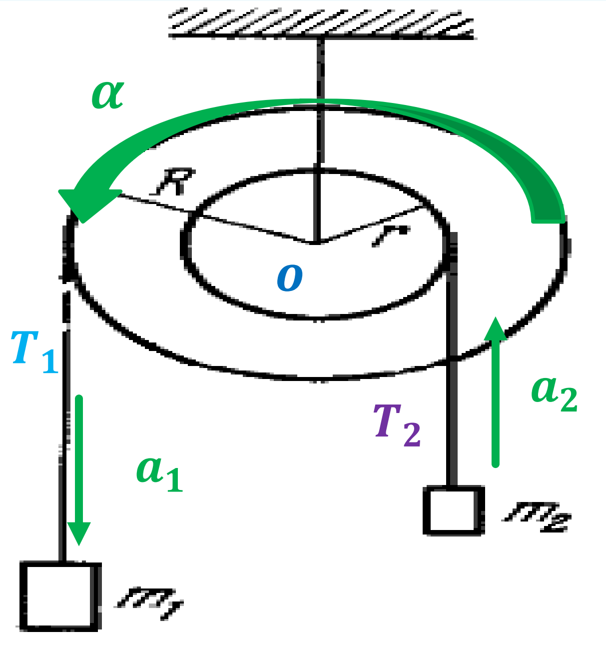
$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{3.30}{0.25} = 13.20\ rad/s^2$$

Calculo de tensiones

$$T_1 = m_1 g - m_1 a = 20(9.8) - 20(3.3) = 130\ N$$

$$T_2 = m_2 g sen\, 55° + f_{k2} + m_2 a = 10(9.8) sen 55° + 8.43 + 10(3.3) = 121.71N$$

Se tiene el diseño de una máquina de atwood como muestra la figura, la polea es un sistema de dos discos unidos de diferente radio, estos se mueven juntos con una inercia de 2.5kg*m^2, en cada disco se cuelgan masas m_1= 60kg y m_2 = 5kg respectivamente el sistema se libera del reposo; R=0.5m, r=0.25m:



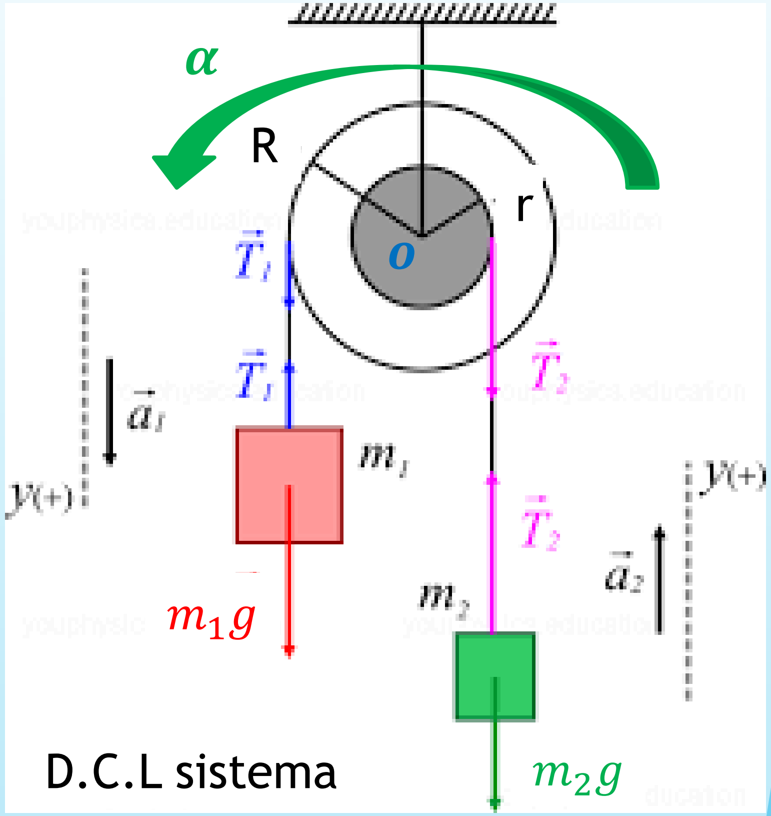
Calcule las tensiones del sistema

Calcule las aceleraciones de cada masa colgante

Calcule la aceleración angular del sistema.

$m_1 = 60kg \;\; m_2 = 5\,kg \;\;\; I_o = 2.5\,kg * m^2$

$R = 0.5m \; r = 0.25m$



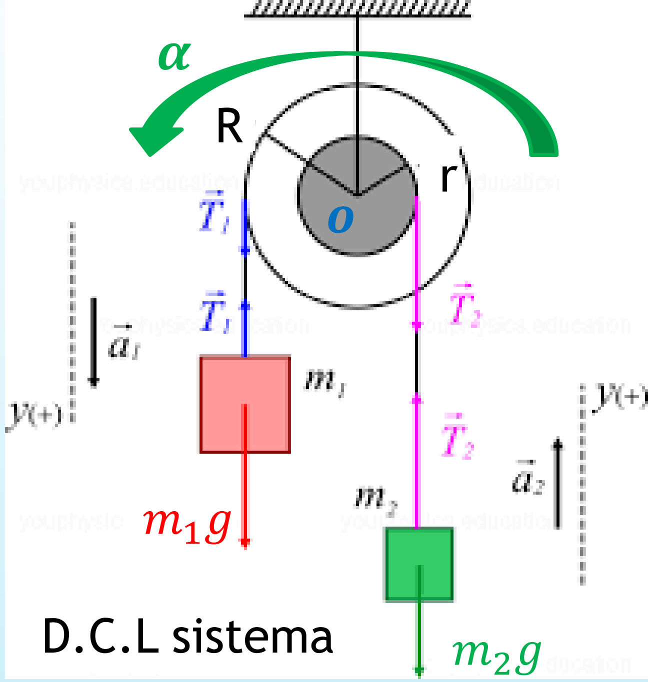
Resolución se consideran los efectos de las masas y la polea de lo cual se estima

existirá relaciones lineales para cada masa por lo que en este caso se busca unificarlos

en su relación angular. $\boldsymbol{a_1 = R\alpha} \quad \boldsymbol{a_2 = r\,\alpha}$

Nota: aunque es un sistema con 5 incógnitas se puede usar las relaciones lineales para resolverlo de una manera que solo se tendrán 3 incógnitas pero no importa la dirección del movimiento, ya que no incluyen los efectos de fuerzas de fricción su resolución parte de esta idea, agregado la inercia del disco compuesto es conocida pero de lo contrario se calcula.

Partiendo de los planteamientos anteriores de D.C.L. tenemos



Masa m1

$$+\downarrow \sum F_y = m_1a_1$$

$$m_1g - T_1 = m_1a_1$$

se sustituye la expresión $\boldsymbol{a_1 = R\alpha}$ para que el sistema este en la misma variable

$$T_1 = m_1g - m_1R\alpha \quad \text{ecuación No. 1}$$

Masa m2

$$+\uparrow \sum F_y = m_2a_2$$

$$T_2 - m_2g = m_2a_2$$

se sustituye la expresión $\boldsymbol{a_2 = r\alpha}$ para que el sistema este en la misma variable

$$T_2 = m_2r\alpha + m_2g \quad \text{ecuación No. 2}$$

Polea

$$\sum \tau = I_o\alpha \ \textit{positivo en sentido antihorario}$$

$$T_1R\,sen90° - T_2r\,sen\,90° = I_o\alpha$$

$$T_1R - T_2r = I_o\alpha \quad \text{ecuación No. 3}$$

Se procede a sustituir las expresiones de las ecuaciones No. 1 y No. 2 en la ecuación No.3 y se despeja para la aceleración

$$(m_1g - m_1R\alpha)R - (m_2r\alpha + m_2g)r = I_o\alpha$$

$$m_1gR - m_1R^2\alpha - m_2r^2\alpha - m_2gr = I_o\alpha$$

$$m_1gR - m_2gr = I_o\alpha + m_1R^2\alpha + m_2r^2\alpha$$

$m_1 = 60kg\ \ m_2 = 5\ kg\ \ \ I_o = 2.5\ kg * m^2\ \ \ R = 0.5m\ r = 0.25m$

$\boldsymbol{a_1 = R\alpha}\qquad \boldsymbol{a_2 = r\ \alpha}$

$$m_1 gR - m_2 gr = I_o\alpha + m_1 R^2\alpha + m_2 r^2\alpha$$

$$\alpha = \frac{m_1 gR - m_2 gr}{I_o + m_1 R^2 + m_2 r^2} = \frac{60(9.8)(0.5) - 5(9.8)(0.25)}{2.5 + 60(0.5)^2 + 5(0.25)^2} = \frac{281.75}{17.81} = 15.82\ rad/s^2$$

$$a_1 = R\alpha = 0.5(15.82) = 7.91\frac{m}{s^2}\qquad a_2 = r\ \alpha = 0.25(15.82) = 3.96\ m/s^2$$

Calculo de tensiones

$$T_1 = m_1 g - m_1 R\alpha = 60(9.8) - 60(0.5)15.82 = 113.4N$$

$$T_2 = m_2 r\alpha + m_2 g = 5(0.25)(15.82) + 5(9.8) = 68.78N$$