UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MATEMÁTICA INTERMEDIA 3

MI3B

TAREA No. __3_

DESCRIPCIÓN DE CALIFICACIÓN		CALIFICACIÓN
Presentación		
Ejercicios resueltos		
Ejercicio calificado 1	#	
Ejercicio calificado 2	#	
CALIFICACIÓN TOTAL		

Nombre: Javier Andrés Monjes Solórzano____________

Carné:202100081________________________________

Profesor: Ingeniero Benjamín Piedrasanta

Fecha:__28__/ __12___/ 2022

EJERCICIOS 4.4

Javier Monjes

En los problemas 1-26 resuelva la ecuación diferencial dada usando coeficientes indeterminados.

# 1	P. 150	Ej. 8

8. $4y'' - 4y' - 3y = \cos 2x$

$4y'' - 4y' - 3y = \cos 2x$ → O.D.E $4y'' - 4y - 3y = \cos 2x$ →

$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = g(x)$

$y = y_h + y_p$

$4((e^{\gamma x})'' - 4((e^{\gamma x}))' - 3e^{\gamma x} = 0$

$y_1 = \frac{3}{2}$; $y_2 = -\frac{1}{2}$

$e^{\gamma x}(4\gamma^2 - 4\gamma - 3) = 0$ →

$y_1 \neq y_2 \to y = C_1e^{y_1 x} + C_2e^{y_2 x}$

$C_1e^{\frac{3}{2}x} + C_2e^{-1/2x}$

$y = C_1e^{\frac{3x}{2}} + C_2e^{-\frac{x}{2}}$ → encontrar $y_p = 4y'' - 4y' - 3y = \cos 2x$

$y_p \Rightarrow y = -\frac{8}{425}\operatorname{sen} 2x - \frac{19}{425}\cos 2x$

$y = y_h + y_p$

$y = C_1e^{3x/2} + C_2e^{-x/2} - \frac{8}{425}\operatorname{sen} 2x - \frac{19}{425}\cos 2x$

$$\boxed{y = C_1e^{3x/2} + C_2e^{-x/2} - \frac{19}{425}\cos 2x - \frac{8}{425}\operatorname{sen} 2x}$$

# 2	P. 150	Ej. 10

10. $y'' + 2y' = 2x + 5 - e^{-2x}$

$y'' + 2y' = 2x + 5 - e^{-2x}$

$y'' + 2y' = 2x + 5 - e^{-2x}$ → O.D.E. → $ay'' + by' + cy = g(y)$

$y_{p1}(t)$ → $y'' + p(t)y' + q(t)y = g_1(t)$

$y'' + 2y' = 0$ → $ay'' + by' + cy = 0$

$((a_0x^2 + a_1x))'' + 2((a_0x^2 + a_1x))' = 2x + 5$

$((e^{\gamma x}))'' + 2((e^{\gamma x}))' = 0$

$2a_0 + 2((a_0x^2 + a_1x))' = 2x + 5$

$y_{p2} \to y'' + 2y' = -e^{-2x}$

$2a_0 + 2(2a_0x + a_1) = 2x + 5$

$y'' + 2y' = 2x + 5 - e^{-x}$

$e^{\gamma x}(\gamma^2 + 2\gamma) = 0 \to \gamma = 0$; $\gamma = 2$

$a_0 = \frac{1}{2}$; $a_1 = 2$

$y = \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{e^{-2x}}{2}$

$y_h + y_{p1} + y_{p2}$

$y = C_1^{-2x} + C_2$

$y_1 = \frac{1}{2}x^2 + 2x$; $y_1 = \frac{x^2}{2} + 2x$

$y = \frac{1}{2}xe^{-2x}$

$$\boxed{y = C_1e^{-2x} + C_2 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{2}xe^{-2x}}$$

# 3	P. 150	Ej. 13

13. $y'' + 4y = 3 \operatorname{sen} 2x$

$y'' + 4y = 3\operatorname{sen} 2x$ → E.D.O. → $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = g(x)$

$y = y_h + y_p$ → $y_1 = y_2$ → $e^0(C_1\cos 2x + C_2\operatorname{sen} 2x)$ → $y = C_1\cos 2x + C_2\operatorname{sen} 2x$

$y_h = y'' + 4y = 0$

$((e^{\gamma x}))'' + 4e^{\gamma x} = 0$

$((a_0x\operatorname{sen} 2x + a_1x\cos 2x))'' + 4(a_0x\operatorname{sen} 2x + a_1\cos 2x) = 3\operatorname{sen} 2x$

$e^{\gamma x}(\gamma^2 + 4) = 0$

$((a_0x\operatorname{sen} 2x + a_1x\cos 2x))'' + 4(a_0x\operatorname{sen} 2x + a_1\cos 2x) = 3\operatorname{sen} 2x$

$\gamma^2 + 4 = 0$

$4a_0\cos 2x - 4a_1\operatorname{sen} 2x = 3\operatorname{sen} 2x \to a_0 = 0$; $a_1 \to -\frac{3}{4}$

$\gamma^2 = -4 \to \gamma = \pm\sqrt{-4} \Rightarrow \gamma_1 = -2i$, $\gamma_2 = 2i$

$y = 0x\operatorname{sen} 2x + (-\frac{3}{4})x\cos 2x$

$y = y_h + y_p \Rightarrow$ $\boxed{y = C_1\cos 2x + C_2\operatorname{sen} 2x - \frac{3}{4}x\cos 2x}$

22. $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 6xe^{2x}$ | #4 | P.150 | Ej.22 |

$y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 6xe^{2x} \rightarrow$ E.D.O

$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y + a_0 y = g(x)$

$((e^{\gamma x}))''' - 2((e^{\gamma x}))'' - 4((e^{\gamma x}))' + 8e^{\gamma x} = 0$

$e^{\gamma x}(\gamma^3 2\gamma^2 4\gamma + 8) = 0 \rightarrow \gamma = -2$

multiplicidad $\rightarrow 2$

$C_1e^{2x} + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x}$

$y_p = y'' - 2y'' \rightarrow g(x) = 6xe^2$

$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3$

$y_h = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$

$y_p = (Ax^3 + Bx^2)e^{2x}$

$24A = 6 \rightarrow 6A + 8B = 0$

$A = \frac{1}{4}$; $B = -\frac{3}{16}$; $y_p = \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^2\right)e^{2x}$

$$\boxed{y = C_1e^{2x} + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x} + \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^2\right)e^{2x}}$$

| #5 | P.151 | Ej.27 |

En los problemas 27-36 resuelva el problema con valores iniciales dado.

27. $y'' + 4y = -2, \quad y\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}, y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2$ $\quad y'' + 4y = -2$

tenemos $\rightarrow y = C_1\cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}$; Asumimos $\rightarrow y_p = A$

$A = -\frac{1}{2} \rightarrow y = C_1\cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}$

$C_1 = \sqrt{2}$; $C_2 = \sqrt{2}$; $y = \sqrt{2}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}$

$$\boxed{y = \sqrt{2}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}}$$

| #6 | P.151 | Ej.34 |

34. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \cos \gamma t, \quad x(0) = 0, x'(0) = 0$

$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \cos \gamma t$ $\quad x(0) = 0$; $x'(0) = 0$ $\rightarrow$ $x_c = C_1\cos\omega t + C_2 \operatorname{sen}\omega t$

$x_p = A\cos\gamma t + B\operatorname{sen}\gamma t \quad \gamma \neq \omega$

$A = \frac{A}{\omega^2 - \gamma^2}$; $B = 0 \rightarrow x = C_1\cos\omega t + C_2\operatorname{sen}\omega t + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}\cos\gamma t$

$C_1 = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}$; $C_2 = 0 \rightarrow x = -\frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}\cos\omega t + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}\cos\gamma t$

$$\boxed{x = -\frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}\cos\omega t + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}\cos\gamma t}$$

| #7 | P.151 | Ej.37 |

En los problemas 37-40 resuelva el problema con valores en la frontera dado.

37. $y'' + y = x^2 + 1, \quad y(0) = 5, y(1) = 0$

$y_c = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x$; $y_p = Ax^2 + Bx + C$

$A = 1$; $B = 0$; $C = -1$

$y = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x + x^2 - 1$

$y(0) = $; $y(1) \rightarrow C_1 - 1 = 5$

$(\cos 1)C_1 + (\operatorname{sen} 1)C_2 = 0$ $\quad y = 6\cos x - 6(\cot 1)\operatorname{sen} x + x^2 - 1$

$C_1 = 6$; $C_2 = -6\cot 1$ $\rightarrow$

$$\boxed{y = 6\cos x - 6(\cot 1)\operatorname{sen} x + x^2 - 1}$$

EJERCICIOS 4.5

Javier Monjes

#8	P. 159	Ej. 15

En los problemas 15-26 determine el operador diferencial lineal que anula la función dada.

15. $1 + 6x - 2x^3$ $\rightarrow D^4$

$\boxed{D^4 \text{ porque } x^3}$

23. $e^{-x} + 2xe^x - x^2e^x$

#9	P. 159	Ej. 23

$e^{-x} + 2xe^x - x^2e^x \rightarrow (D+1)(D-1)^3$

$\boxed{(D+1)(D-1)^3 \text{ Porque } e^{-x} \text{ y } x^2e^x}$

26. $e^{-x}\operatorname{sen} x - e^{2x}\cos x$

#10	P. 159	Ej. 26

$e^{-x}\operatorname{sen}x - e^{2x}\cos x \rightarrow (D^2+2D+2)(D^2-4D+5)$

$\boxed{(D^2+2D+2)(D^2-4D+5) \text{ Porque } e^{-x}\operatorname{sen}x \;\; e^{2x}\cos x}$

#11	P. 159	Ej. 41

En los problemas 35-64 resuelva la ecuación diferencial dada usando coeficientes indeterminados.

41. $y''' + y'' = 8x^2$

$y_p = Ax^4 + Bx^3 + Cx$

$\rightarrow D^3(D^3+D^2)y = D^5(D+1)y = 0$

$y''' + y'' = 8x \rightarrow D^3$

$y = \underbrace{C_1 + C_2x + C_3e^{-x}}_{y_c} + C_4x^4 + C_5x^3 + C_6x^2$

$y = 12Ax^2 + (24A+6B)x + (6B+2C) = 8x^2$

$12A = 8 \rightarrow A = \frac{2}{3}$

$24A + 6B = 0 \rightarrow B = \frac{-8}{3}$

$6B + 2C = 0 \rightarrow C = 8$

$y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + \frac{2}{3}x^4 + \frac{8}{3}x^3 + 8x^2$

$\boxed{y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + \frac{2}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 8x^2}$

44. $y'' + 2y' + 2y = 5e^{6x}$

$\boxed{\#12 \mid P.159 \mid Ej.44}$

Javier Monjes

$y''+2y'+2y=5e^{6x} \rightarrow D-6 \quad \rightarrow (D-6)(D^2+2D+2)y=0 \quad y_p=Ae^{6x}$

$y=\underbrace{e^{-x}(C_1\cos x+C_2\operatorname{Sen}x)}_{y_c}+C_3e^{6x}$

$50Ae^{6x}=5e^{6x} \rightarrow; A=\frac{1}{10} \rightarrow y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\operatorname{Sen}x)+\frac{1}{10}e^{6x}$

$$\boxed{y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\operatorname{Sen}x)+\frac{1}{10}e^{6x}}$$

45. $y'' - 2y' - 3y = 4e^x - 9$

$\boxed{\#13 \mid P.159 \mid Ej.45}$

$y''-2y'-3y=4e^x-9 \rightarrow D(D-1) \quad D(D-1)(D^2-2D-3)y=D(D-1)(D+1)(D-3)y=0$

$y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}+C_3e^x+C_4 \quad y_p=Ae^x+B \rightarrow -4Ae^x-3B=4$

$A=-1;\ B=3 \rightarrow y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}-e^x+3$

$$\boxed{y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}-e^x+3}$$

$\boxed{\#14 \mid P.159 \mid Ej.}$

50. $y'' + 3y' - 10y = x(e^x + 1)$

$y''+3y'-10y=x(e^x+1) \rightarrow D^2(D-1)^2 \rightarrow D^2(D-1)^2(D^2+3D-10)y=D^2(D-1)^2(D-2)(D+5)y=0$

$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-5x}+C_3xe^x+C_4e^x+C_5x+C_6$

$y_p=Axe^x+Be^x+Cx+E \rightarrow -6Axe^x+(5A-6B)e^x-10Cx+(3C-10E)=xe^x+x$

$-6A=1 \rightarrow -\frac{1}{6}$

$5A-6B=0 \rightarrow -\frac{5}{36} \quad \rightarrow y=C_1e^{2x}+C_2e^{-5x}-\frac{1}{6}xe^x-\frac{5}{36}e^x-\frac{1}{10}x-\frac{3}{100}$

$-10C=1 \rightarrow -\frac{1}{10}$

$3C-10E=0 \rightarrow -\frac{3}{100}$

$$\boxed{y=C_1e^{2x}+C_2e^{-5x}-\frac{1}{6}xe^x-\frac{5}{36}e^x-\frac{1}{10}x-\frac{3}{100}}$$

$\boxed{\#15 \mid P.159 \mid Ej.67}$

En los problemas 65-72 resuelva el problema con valores iniciales.

67. $y'' - 5y' = x - 2, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2$

$y''-5y'=x-2 \ ;\ y(0)=0\ y'(0)=2$

$y_c=C_1+C_2e^{5x} \rightarrow D^2 \rightarrow x-2$

$y_p=Ax-B \rightarrow (-5A+2B)-10Bx=-2+x$

$A=\frac{9}{25};\ B=-\frac{1}{10}$

$y=C_1+C_2e^{5x}+\frac{9}{25}x-\frac{1}{10}x^2$

$y'=5C_2e^{5x}+\frac{9}{25}-\frac{1}{5}x \rightarrow C_1+C_2=0$

$C_2=\frac{41}{125} \rightarrow y=\frac{-41}{125}+\frac{41}{125}e^{5x}+\frac{9}{25}x-\frac{1}{10}x^2$

$C_1=\frac{-41}{125};\ C_2=\frac{41}{125}$

$$\boxed{y=-\frac{41}{125}+\frac{41}{125}e^{5x}+\frac{9}{25}x-\frac{1}{10}x^2}$$

Javier Monjes

#16 | P. 154 | Ej. 69

69. $y'' + y = 8\cos 2x - 4\,\text{sen}\,x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$y'' + y = 8\cos 2x - 4\,\text{sen}\,x \rightarrow y_c = C_1\cos x + C_2\,\text{sen}\,x \rightarrow (D^2+1)(D^2+4)\,;\ 8\cos 2x - 4\,\text{sen}\,x$

$y_p = A x\cos x + B x\,\text{sen}\,x + C\cos 2x + E\,\text{sen}\,2x$

$A = 2$ $\quad 2B\cos x - 3C\cos 2x - 2A\,\text{sen}\,x - 3E\,\text{sen}\,2x = 8\cos 2x - 4\,\text{sen}\,x$

$B = 0$ $\quad \rightarrow y = C_1\cos x + C_2\,\text{sen}\,x + 2x\cos x - \frac{8}{3}\cos 2x$

$C = -8/3$

$E = 0$ $\quad y' = -C_1\,\text{sen}\,x + C_2\cos x + 2\cos x - 2x\,\text{sen}\,x + \frac{16}{3}\,\text{sen}\,2x$

$C_2 + \frac{8}{3} = -1 \rightarrow y = -\pi\cos x - \frac{11}{3}\,\text{sen}\,x + 2x\cos x - \frac{8}{3}\cos 2x$

$-C_1 - \pi = 0$

$$\boxed{y = -\pi\cos x - \frac{11}{3}\,\text{sen}\,x + 2x\cos x - \frac{8}{3}\cos 2x}$$

EJERCICIOS 4.6

#17 | P. 165 | Ej. 5

En los problemas 1-18 resuelva cada ecuación diferencial por medio de variación de parámetros.

$y_c = C_1\cos x + C_2\,\text{sen}\,x$

5. $y'' + y = \cos^2 x$

$y'' + y = \cos^2 x \rightarrow m^2 + 1 = 0 \rightarrow W = \begin{vmatrix} \cos x & \text{sen}\,x \\ -\text{sen}\,x & \cos x \end{vmatrix} = 1$

Obteniendo $\rightarrow f(x) = \cos^2 \rightarrow u_1' = -\text{sen}\,x\cos^2 x$

$u_2' = \cos^3 x = \cos x(1 - \text{sen}^2 x)$

$u_1 = \frac{1}{3}\cos^3 x;\ u_2 = \text{sen}\,x - \frac{1}{3}\text{sen}^3 x$

$y = C_1\cos x + C_2\,\text{sen}\,x + \frac{1}{3}\cos^4 x + \text{sen}^2 x - \frac{1}{3}\text{sen}^4 x$

$= C_1\cos x + C_2\,\text{sen}\,x + \frac{1}{3}(\cos^2 x + \text{sen}^2 x)(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) + \text{sen}^2 x$

$C_1\cos x + C_2\,\text{sen}\,x + \frac{1}{3}\cos^2 x + \frac{2}{3}\text{sen}^2 x$

$C_1\cos x + C_2\,\text{sen}\,x + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\text{sen}^2 x$

$$\boxed{C_1\cos x + C_2\,\text{sen}\,x + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\text{sen}^2 x}$$

#18 | P.165 | Ej. 12

12. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$

$y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1+x^2} \rightarrow m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 = 0;\quad y_c = C_1e^x + C_2xe^x$

obteniendo → $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+x^2)}$ $\qquad W = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & xe^x + e^x \end{vmatrix} = e^{2x}$

$u_1' = -\dfrac{xe^x e^x}{e^{2x}(1+x^2)} = -\dfrac{x}{1+x^2}$ $\qquad u_1 = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

$u_2' = \dfrac{e^x e^x}{e^{2x}(1+x^2)} = \dfrac{1}{1+x^2} \rightarrow u_2 = \tan^{-1}x$

$y = C_1e^x + C_2xe^x - \frac{1}{2}e^x\ln(1+x^2) + xe^x\tan^{-1}x$

$$\boxed{y = C_1e^x + C_2xe^x - \frac{1}{2}e^x\ln(1+x^2) + xe^x\tan^{-1}x}$$

#19 | P.165 | Ej. 17

17. $3y'' - 6y' + 6y = e^x \sec x$

$3y'' - 6y' + 6y \Rightarrow 3y^2 - 6y + 6 = 0 \rightarrow y_c = e^x(C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x)$

$W = \begin{bmatrix} e^x\cos x & e^x\operatorname{sen} x \\ e^x\cos x - e^x\operatorname{sen} x & e^x\cos x + e^x\operatorname{sen} x \end{bmatrix} = e^{2x}$

obteniendo → $f(x) = \frac{1}{3}e^x\sec x$

$u_1' = \dfrac{(e^x\operatorname{sen} x)\left(\frac{e^x\sec x}{3}\right)}{e^{2x}} = -\frac{1}{3}\tan x$

$u_2' = \dfrac{(e^x\cos x)\left(\frac{e^x\sec x}{3}\right)}{e^{2x}} = \frac{1}{3}$

Como: $u_1 = \frac{1}{2}\ln(\cos x)$; $u_2 = \frac{1}{2}x$

$y = C_1e^x\cos x + C_2e^x\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\ln(\cos x)e^x\cos x + \frac{1}{3}xe^x\operatorname{sen} x$

$$\boxed{y = C_1e^x\cos x + C_2e^x\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\ln(\cos x)e^x\cos x + \frac{1}{3}xe^x\operatorname{sen} x}$$

#20 | P.165 | Ej. 21

En los problemas 19-22 resuelva cada ecuación diferencial mediante variación de parámetros, sujeta a las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

21. $y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x}$ $\qquad y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x}$

$\rightarrow y_c = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x}$

$W = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-4x} \\ 2e^{2x} & -4e^{-4x} \end{vmatrix} = -6e^{-2x}$

obteniendo → $f(x) = 2e^{-2x} - e^{-x} \rightarrow u_1' = \frac{1}{3}e^{-4x} - \frac{1}{6}e^{-3x} \rightarrow u_1 = -\frac{1}{12}e^{-4x} + \frac{1}{18}e^{-3x}$

$u_2' = \frac{1}{6}e^{3x} - \frac{1}{3}e^{2x} \rightarrow u_2 = \frac{1}{18}e^{3x} - \frac{1}{6}e^{2x}$

$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x} - \frac{1}{12}e^{-2x} + \frac{1}{18}e^{-x} + \frac{1}{18}e^{-x} - \frac{1}{6}e^{-2x} \rightarrow C_1e^{2x} + C_2e^{-4x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{9}e^{-x}$

$y' = 2C_1e^{2x} - 4C_2e^{-4x} + \frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{1}{9}e^{-x}$; $C_1 + C_2 - \frac{5}{36} = 1$; $2C_1 - 4C_2 + \frac{7}{18} = 0$

$C_1 = \frac{25}{36}$; $C_2 = \frac{4}{9}$

$= y = \frac{25}{36}e^{2x} + \frac{4}{9}e^{-4x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{9}e^{-x}$

$$\boxed{y = \frac{25}{36}e^{2x} + \frac{4}{9}e^{-4x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{9}e^{-x}}$$

#21	P. 165	Ej. 31

En los problemas 29-32 resuelva la ecuación diferencial de tercer orden usando variación de parámetros.

31. $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{4x}$

$y_p(x) = U_1(x)y_1(x) + U_2(x)y_2(x)$

$x_0 = I$ $\quad y_p(x) = y_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{-y_2 t f t}{W t}dt + y_2 x\int_{x_0}^{x} \frac{y_1 t f t}{W t}dt$

$= \int_{x_0}^{x} \frac{-y_1 x\, y_2 t\, f t}{W t}dt + \int_{x_0}^{x} \frac{y_1 t\, y_2 x\, f t}{W t}dt \rightarrow \int_{x_0}^{x}\left[\frac{y_1 t\, y_2 x\, f t}{W t} + \frac{-y_1 x\, y_2 t\, f t}{W t}\right]dt$

$\int_{x_0}^{x} \frac{y_1 t\, y_2 x\, f t - y_1 x\, y_2 t\, f t}{W t}dt \rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{y_1 t\, y_2 x - y_1 x\, y_2 t}{W t} f t\, dt \rightarrow = \int_{x_0}^{x} G(x,t) f(t)\, dt$

$$\boxed{\int_{x_0}^{x} G(x,t) f(t)\, dt}$$

EJERCICIOS 4.9

#22	P. 187	Ej. 3

En los problemas 1-20 resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales dado por eliminación sistemática.

3. $\frac{dx}{dt} = -y + t$

$\frac{dy}{dt} = x - t$

$U = y'$; $U' = y'$ $\rightarrow$ $U' = -U^2 - 1 \rightarrow \frac{dU}{dU^2+1} = -dx \rightarrow \tan^{-1} U = x + C_1$

$y' = \tan(C_1 - x)$

$y = \ln[\cos(C_1 - x)] + C_2$

$$\boxed{y = \ln[\cos(C_1 - x)] + C_2}$$

#23	P. 187	Ej. 7

7. $\frac{d^2x}{dt^2} = 4y + e^t \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 4x - e^t$

$U = y'$; $y'' = U\frac{dU}{dy}$ $\rightarrow$ $\frac{U\,dU}{dy + 2yU^3} = 0$ operando $\int \rightarrow \frac{dU}{U^2} + 2y\,dy = 0 \rightarrow -\frac{1}{U} + y^2 = C_1 \rightarrow U = \frac{1}{y^2 - C_1} \rightarrow y' = \frac{1}{y^2 - C_1}$

$(y^2 - C_1)dy = dx = \frac{1}{3}y^3 - C_1 y = x + C_2$

$$\boxed{\frac{1}{3}y^3 - C_1 y = x + C_2}$$

15. $(D-1)x + (D^2+1)y = 1$
$(D^2-1)x + (D+1)y = 2$

#24 | P. 187 | Ej. 15

Javier Monjes

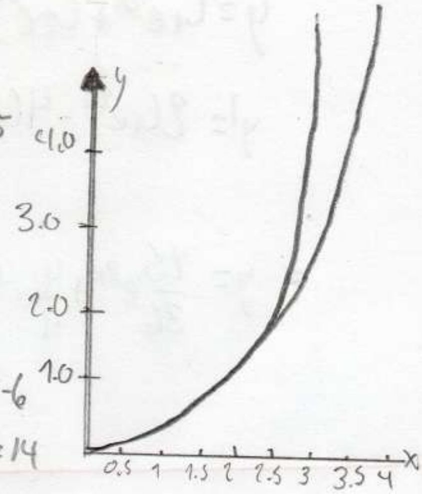
$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{1}{2!}y''(0)x^2 + \frac{1}{3!}y'''(0)x^3 + \frac{1}{4!}y^{(4)}(0)x^4 + \frac{1}{5!}y^{(5)}(0)x^5$

$y''(x) = x^2 + y^2 - 2y' \rightarrow y'''(x) = 2x + 2yy' - 2y''$

$y^{(4)}(x) = 2 + 2(y')^2 + 2yy'' - 2y'''$ $\qquad y(0) = 1;\ y'(0) = 1$

$y^{(5)}(x) = 6y'y'' + 2yy''' - 2y^{(4)}$ $\rightarrow$ $y''(0) = -1;\ y'''(0) = 4;\ y^{(4)}(0) = -6$

$y^{(5)}(0) = 14$



$y(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{66}x^5$

$$\boxed{y(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{60}x^5}$$

EJERCICIOS 5.1

#25 | P. 209 | Ej. 3

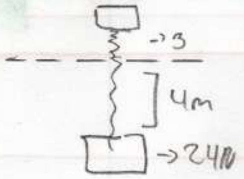
3. Una masa que pesa 24 N, unida al extremo de un resorte, lo alarga 4 m. Al inicio, la masa se libera desde el reposo en un punto 3 m arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la ecuación de movimiento.

$mx'' = -K\left(\frac{mg}{K} + x\right) + mg$

$mg = Ks \rightarrow s = \frac{mg}{K};\quad mx'' = -mg + Kx + mg$

$mx'' + Kx = 0$

ahora $\rightarrow W = 24N;\ S_1 = 4m;\ S_2 = 3m$



$\frac{m\,d^2x}{dt^2} = -K(s+x) + mg$; Se sabe que $\rightarrow W = mg \rightarrow m = \frac{W}{g} \rightarrow \frac{24N}{10m/s} = 2,4kg$

$F = Ks \rightarrow 24N = K(3m)$. Sabemos

$K = 8N/m$) $mx'' + Kx = 0$

$2,4x'' + 8x = 0$ $\rightarrow$ Para $x(0) = 3$

Para $x'(0) = 0$

$x = C_1 \operatorname{sen}(1,826t) + C_2\cos(1,826t)$

$x_0 = -3$; $= 3 = C_1\operatorname{sen}(1,826(0)) + C_2\cos(1,826(0))$; $2,4m^2 + 8 = 0 \rightarrow m^2 = \frac{-8}{2,4} \rightarrow m = 1.826$

$-3 = C_2$

$\alpha = 0;\ \beta = 1,826$

Derivando

$x'(0) = 0$

$x' = 1,826C_1\cos(1,826t) - 1,826C_2\operatorname{sen}(1,826t)$ $\rightarrow$ concluimos

$0 = 4\sqrt{6}C_1\cos(1,826(0)) - 1,826C_2\operatorname{sen}(1,826(0))$ $\qquad x = -3\cos(1.826t)$

$0 = C$

$$\boxed{x = -3\cos(1.826t)}$$

Javier Monjes

Otro resorte cuya constante es 20 N/m se suspende del mismo soporte, pero paralelo al sistema resorte/masa del problema 6. Al segundo resorte se le coloca una masa de 20 kilogramos y ambas masas se liberan al inicio desde la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 10 m/s.

a) ¿Cuál masa presenta la mayor amplitud de movimiento?

b) ¿Cuál masa se mueve más rápido en $t = \pi/4$ s? ¿En $\pi/2$ s?

c) ¿En qué instantes las dos masas están en la misma posición? ¿Dónde están las masas en estos instantes? ¿En qué direcciones se están moviendo las masas?

#26	P.204	Ej. 7

$\rightarrow 20\ N/m$ $\quad 20x'' + 20x = 0\ ;\ x'(0) = -10$

$20kg$ $\quad x = -10\,\text{sen}\,t\ ;\ x' = -10\cos t$

$V_a = 10m/s$ $\quad$ a) Amplitud de 20kg

b) 20kg ; $x'(\frac{\pi}{4}) = -5\sqrt{2}\ m/s$; $x'(\frac{\pi}{2}) = 0\ m/s$; 50kg ; $x'(\frac{\pi}{4}) = 0\ m/s$

c) Si $\rightarrow -5\,\text{sen}\,2t = -10\,\text{sen}\,t \rightarrow \text{sen}\,t(\cos t - 1) = 0\ ;\ t = n\pi\ ;\ n = 0, 1, 2, \ldots,$ $\quad x' = -10\cos t$

50kg → hacia arriba

20kg → hacia arriba cuando n es par y hacia abajo cuando n es impar

a) 20kg amplitud movimiento

b) 20kg → cuando $\pi/4$

50kg → cuando $\pi/2$

c) 50kg hacia arriba

20kg hacia arriba cuando n es par y hacia abajo cuando n es impar

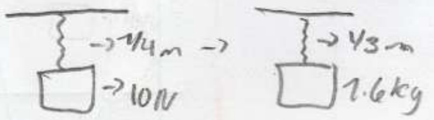
0. Una masa que pesa 10 N alarga un resorte $\frac{1}{4}$ m. Esta masa se retira y se coloca una de 1.6 kg, que se libera desde un punto situado a $\frac{1}{3}$ m arriba de la posición de equilibrio, con una velocidad descendente de $\frac{5}{4}$ m/s.

a) Exprese la ecuación de movimiento en la forma dada en (6).

b) Exprese la ecuación de movimiento en la forma dada en (6´).

c) Utilice los resultados de a) y b) para ver en qué tiempos la masa logra un desplazamiento debajo de la posición de equi librio numéricamente igual a $\frac{1}{2}$ de la amplitud de movimiento.

#27	P.210	Ej.20



$1.6x'' + 40x = 0\ ;\ x(0) = -\frac{1}{3}\ ;\ x'(0) = \frac{5}{4}$

a) $x = -\frac{1}{3}\cos 5t + \frac{1}{4}\text{sen}\,5t = \frac{5}{12}\text{sen}(5t - 0.927)$

b) $\frac{5}{12}\text{sen}(5t - 0.927) \rightarrow \frac{d}{dx}\left[x = -\frac{\cos 5t}{3} + \frac{\text{sen}\,5t}{4} = \frac{5\,\text{sen}\,5t - 0.927}{12}\right]$

c) Si $\rightarrow x = \frac{5}{24}$; entonces $t = \frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{6} + 0.927 + 2n\pi\right)$

$t = \frac{1}{5}\left(\frac{5\pi}{6} + 0.927 + 2n\pi\right) \rightarrow n = 0, 1, 2 \ldots$

a) $x = -\frac{1}{3}\cos 5t + \frac{1}{4}\text{sen}\,5t = \frac{5}{12}\text{sen}(5t - 0.927)$

b) $x = -\frac{1}{3}\cos 5t + \frac{1}{4}\text{sen}\,5t = \frac{5}{12}\text{sen}(5t - 0.927)$

c) $0.29019975 + 2n\pi/5$

$0.70899877 + \frac{2n\pi}{5}$

5. Una masa que pesa 4 N se une a un resorte cuya constante es 2 N/m. El medio ofrece una fuerza de amortiguamiento que es numéricamente igual a la velocidad instantánea. La masa se libera desde un punto situado 1 m arriba de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 8 m/s. Determine el tiempo en el que la masa pasa por la posición de equilibrio. Encuentre el tiempo en el que la masa alcanza su desplazamiento extremo desde la posición de equilibrio. ¿Cuál es la posición de la masa en este instante?

#28	P.211	Ej.25

$K\Delta x = mg$

masa = 4N $\quad \sum F = ma$

$K = 2N/m$ $\quad mg - K(\Delta x + x) - bx' = ma$

$h_i = 1m$ $\quad mg - k\Delta x - kx - bx' = mx''$

$V_d = 8m/s$

$mx'' + 2x' + kx = 0$

$x(0) = -1\ ;\ x'(0) = 0$

a) $0.1x'' + 0.4x' + 2x = 0$

$x = e^{-t}\left[-\cos 4t - \frac{1}{2}\text{sen}\,x\right]$

Javier Monjes

b) $x = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-2t} \operatorname{sen}(4t + 4.25)$

c) $S_0 \to x = 0$; $4t + 4.25 = 2\pi$; 3π, 4π ...

La primera vez que se dirige hacia arriba es:

$t = 1.294$ segundos

$\boxed{\text{a) } x = e^{-2t}\left[-\cos 4t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x\right]}$

b) $x = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-2t} \operatorname{sen}(4t + 4.25)$

c) t 1.294 segundos empieza a dirigirse hacia arriba

#29	P. 211	Ej. 30

→ a) $x'' + 2x' + 5x = 12\cos 2t + 3\operatorname{sen} 2t$

30. Después de que una masa de 10 N se sujeta a un resorte de 5 m, éste llega a medir 7 m. Se retira la masa y se sustituye con una de 8 N. Luego se coloca al sistema en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a la velocidad instantánea.

a) Encuentre la ecuación de movimiento si la masa se libera inicialmente desde el reposo de un punto situado 1/2 m arriba de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 1 m/s.

b) Exprese la ecuación de movimiento en la forma dada en (23).

c) Calcule los tiempos en los que la masa pasa por la posición de equilibrio con dirección hacia abajo.

d) Trace la gráfica de la ecuación de movimiento.

7m → 5m → 10N → 7m 8N

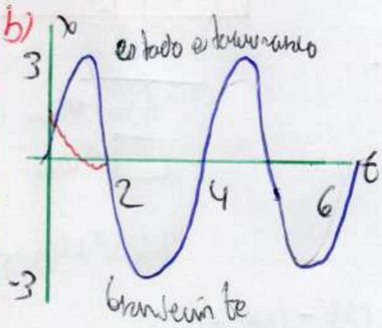
$x(0) = 1$; $x'(0) = 5$

$x_c = e^{-t}(c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t)$

$x_p = 3\operatorname{sen} 2t$ → $x = e^{-t}\cos 2t + 3\operatorname{sen} 2t$

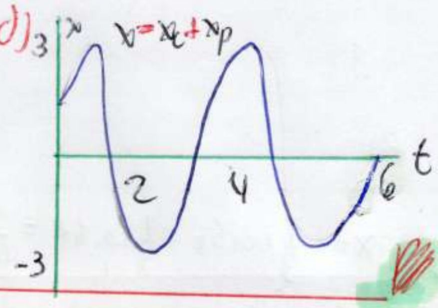
a) $x = e^{-t}\cos 2t + 3\operatorname{sen} 2t$

b)



c) $x = x_c + x_p$

d)



33. Una masa que pesa 16 N alarga $\frac{8}{3}$ m un resorte. La masa se libera inicialmente desde el reposo desde un punto 2 m abajo de la posición de equilibrio y el movimiento posterior ocurre en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a $\frac{1}{2}$ de la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación de movimiento si se aplica a la masa una fuerza externa igual a $f(t) = 10 \cos 3t$.

#30	P. 211	Ej. 33

$f(t) = 10\cos 3t$; $t \to \infty$; $x \to 0$

→ 8/3 m, → $v_0 = 2$m, 16N

$v_i = \frac{1}{2}$; $2x'' + 32x = 68e^{-2t}\cos 4t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$

$x_c = c_1\cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t$

$x_p = \frac{1}{2}e^{-2t}\cos 4t - 2e^{-2t}\operatorname{sen} 4t$

$x = -\frac{1}{2}\cos 4t + \frac{9}{4}\operatorname{sen} 4t + \frac{1}{2}e^{-2t}\cos 4t - 2e^{-2t}\operatorname{sen} 4t$

$$\boxed{x = -\frac{1}{2}\cos 4t + \frac{9}{4}\operatorname{sen} 4t + \frac{1}{2}e^{-2t}\cos 4t - 2e^{-2t}\operatorname{sen} 4t}$$

7. Cuando una masa de 2 kilogramos se une a un resorte cuya constante es 32 N/m, éste llega al reposo en la posición de equilibrio.

Comenzando en $t = 0$, una fuerza igual a $f(t) = 68e^{-2t} \cos 4t$ se aplica al sistema. Determine la ecuación de movimiento en ausencia de amortiguamiento.

#31	P. 211	Ej. 37

$x(0) = -1$; $x'(0) = 1$

→ $x'' + 4x = -5\operatorname{sen} 2t + 3\cos 2t$;

$x_c = c_1\cos 2t + c_2 = \frac{3}{4}t\operatorname{sen} 2t + \frac{5}{4}t\cos 2t$

$x = -\cos 2t - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 2t + \frac{3}{4}t\operatorname{sen} 2t + \frac{5}{4}t\cos 2t$

→ 32 N/m, 2 kg

$t = 0$; $f(t) = 68e^{-2t}\cos 4t$

$x'' + 4x = -5\operatorname{sen} 2t + 3\cos 2t$

$$\boxed{x = -\cos 2t - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 2t + \frac{3}{4}t\operatorname{sen} 2t + \frac{5}{4}t\cos 2t}$$

Encuentre la carga y la corriente de estado estable en un circuito *LRC* en serie cuando $L = 1$ H, $R = 2\ \Omega$, $C = 0.25$ F y $E(t) = 50$ cos tV.

32 | P213 | Ej 53

$L = 1H$
$R = 2\Omega$
$C = 0.25F$
$E(t) = 50\cos t V$

$q = ?$ Circuito

$$L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t)$$

$$1\frac{d^2q}{dt^2} + 2\frac{dq}{dt} + 4q = 50\cos t v$$

$$\frac{1}{2}q'' + 10q' + 100q = 150$$

$$q(t) = e^{-10t}(C_1\cos 10t + C_2\sin 2t)$$

$q(0) = 1$; $q'(0) = 0$

$C_1 = C_2 = -\frac{1}{2}$

$$q(t) = -\frac{1}{2}e^{-10t}(\cos 10t + \sin 10t$$

$t \to \infty, q(t) \to \frac{3}{2}$

$$\boxed{q(t) = -\frac{1}{2}e^{-10t}(\cos 10t + \sin 10t) + \frac{3}{2} \quad t \to \infty \quad q(t) \to \frac{3}{2}}$$

Encuentre la corriente de estado estable en un circuito *LRC* cuando $L = \frac{1}{2}$ H, $R = 20\ \Omega$, $C = 0.001$ F y $E(t) = 100$ sen $60t$ + 200 cos $40t$ V.

33 | P.213 | Ej.56

LRC

$= ?$ $L = \frac{1}{2}H$
$R = 20\Omega$
$C = 0.001F$
$E(t) = 100\sin 60t + 200\cos 40t V$

$$0.1q'' + 10q = 100\sin \alpha t$$

$$q(t) = C_1\cos 10t + C_2\sin 10t + q_p(t)$$

$q_p(t) = A\sin \gamma t + B\cos \gamma t$ donde $\to q_p(t)$

$$(100-\gamma^2)A\sin \gamma t + (100-\gamma^2)B\cos \gamma t = 100\sin t$$

coeficientes $\to A = \frac{100}{(100-\gamma^2)}$; $B = 0 \to q_p(t) = \frac{100}{100-\gamma^2}\sin \gamma t$

Condiciones iniciales $\to q(0) = q'(0) = 0$; $C_1 = 0$; $C_2 = \frac{-10\gamma}{(100-\gamma^2)}$

$$q(t) = \frac{10}{100-\gamma^2}(10\sin \gamma t - \gamma\sin t)$$

$$i(t) = \frac{100\gamma}{100-\gamma^2}(\cos \gamma t - \cos 10t)$$

$$\boxed{q(t) = \frac{10}{100-\gamma^2}(10\sin \gamma t - \gamma\sin t) \quad i(t) = \frac{100\gamma}{100-\gamma^2}(\cos \gamma t - \cos 10t)}$$