Límites Infinitos

- Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ tiene forma $\frac{\boldsymbol{L}}{\mathbf{0}}$, este límite tiende a ∞ y no existe, pero para saber el comportamiento de la función habrá que analizar si tiende a $+\infty$ o a $-\infty$.
  - Si $\lim_{x \to a} f(x) = L > 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ a través de valores positivos, entonces $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$
  - Si $\lim_{x \to a} f(x) = L < 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ a través de valores positivos, entonces $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$
  - Si $\lim_{x \to a} f(x) = L > 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ a través de valores negativos, entonces $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$
  - Si $\lim_{x \to a} f(x) = L < 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ a través de valores negativos, entonces $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

Ejemplos

a. $\lim_{x \to 0} \frac{2-4x^3}{5x^2+3x^3}$ b. $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-9}}{3-x}$ c. $\lim_{x \to -4^-} \left(\frac{2}{x^2+3x-4} + \frac{3}{x+4}\right)$

Límites al Infinito

Teorema: Si $r > 0$ es un número racional, entonces $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

Si $r > 0$ es un número racional tal que x^r está definido ∀ x, → $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

Procedimiento

Para calcular los límites al infinito, tomar en cuenta

- Si la función es racional $\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}}$, dividir entre la potencia de grado mayor para llegar al teorema $\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^r} = 0}$

- Si la función es racional $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, dividir entre la potencia de grado mayor para llegar al teorema $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$ (cuidado con las funciones que contengan radicales de índice impar)

Ejemplos: Evalúe los siguientes límites

a. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2-3x}{2x^2+12}$ **b.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-3x}{2x^2-4x^3}$ **c.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-3x}{4-5x}$

d. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x-\sqrt{4x^2+9}}{2-5x}$ e. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{9x^2+ax}-3x\right)$ f. $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{x^2-1}{8-x^3}\right)$

Límites Infinitos al Infinito

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Límites de Funciones Trigonométricas

Cuando se analizan los límites de las funciones trigonométricas, debemos tener en cuenta el dominio de cada función.

Si se tiene una forma indeterminada $\frac{0}{0}$ aplicar dos límites especiales

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

x	-0.5	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1	0.5
$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$	0.9589	0.9983	0.99998		0.99998	0.9983	0.9583

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

x	-0.5	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1	0.5
$\frac{\cos x - 1}{x}$	0.2448	0.04996	0.005		-0.005	-0.04996	-0.2448

RESUMEN

Los límites pueden calcularse

- numéricamente (mediante una tabla de valores),
- gráficamente (analizando la gráfica e interpretando el comportamiento de la misma)
- analíticamente (usando leyes o propiedades de límites)

Para el cálculo analítico de límites usando leyes o propiedades de los límites

1. Dado $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

   - Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$, puede usar propiedad de sustitución directa

   - Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, investigue el numerador
     - Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ tiene forma indeterminada $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$. Utilice algebra, trigonometría para obtener una expresión equivalente que no sea forma indeterminada
     - Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ tiene forma $\frac{\boldsymbol{L}}{\mathbf{0}}$, este límite tiende a ∞ y no existe, pero para saber el comportamiento de la función habrá que analizar si tiende a $+\infty$ o a $-\infty$.
       - Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L > 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ a través de valores positivos, entonces $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$
       - Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L < 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ a través de valores positivos, entonces $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$
       - Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L > 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ a través de valores negativos, entonces $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$
       - Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L < 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ a través de valores negativos, entonces $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

   Cuando se tenga un límite donde el denominador es cero, analizar límites laterales izquierda y derecha de ***a***

2. Si ***f(x)*** es una función definida con más de una ley de correspondencia, es decir definida por partes entonces para calcular $\lim_{x \to a} f(x)$ calcular límites laterales si ***a*** es el número donde cambia la ley de correspondencia, recordando que $\boldsymbol{\lim_{x \to a} f(x)}$ existe ssi $\boldsymbol{\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L}$

3. Si ***f(x)*** es una función especial, es decir con un dominio conocido tomarlo en cuenta para el cálculo del límite.

4. Para calcular los límites al infinito, tomar en cuenta
   - Si la función es racional $\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}}$ **,** dividir entre la potencia de grado mayor para llegar al teorema $\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^r} = 0}$
   - Si la función es racional $\boldsymbol{\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}}$, dividir entre la potencia de grado mayor para llegar al teorema $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$,