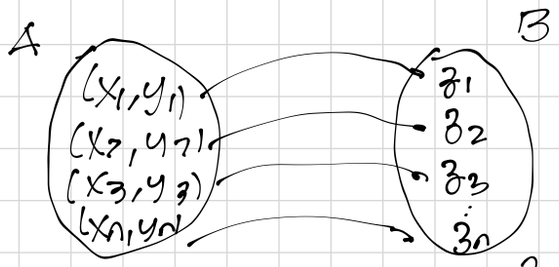
Funciones de Varias Variables

Una función de dos variables es una regla de correspondencia que asigna a cada par ordenado de números reales (x, y) en el subconjunto del plano xy uno y solo uno un número z en el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales.



$$z = f(x, y)$$

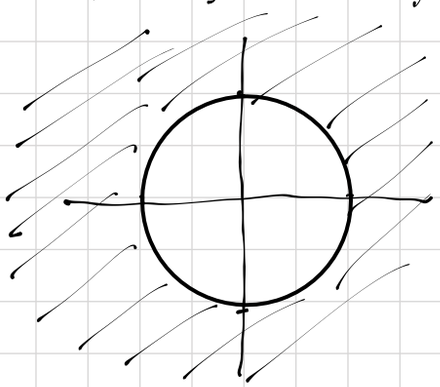
Ej. Determine y trace el dominio de la función.

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9} \qquad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 9 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 \geq 9 \qquad \text{Circunferencia.}$$

Dominio

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 9\}$$



Ej. Determine y trace el dominio de la función

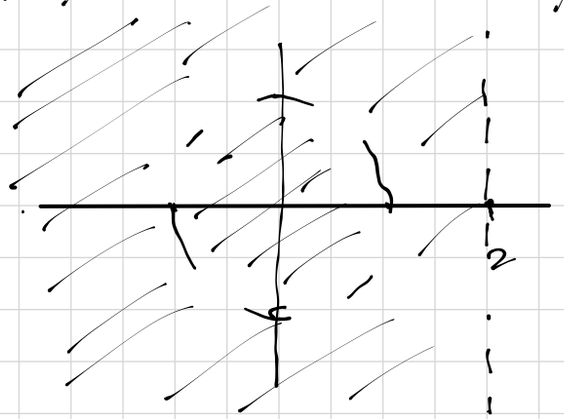
$$f(x, y) = \frac{\ln(2 - x)}{1 - x^2 - y^2}$$

$$2 - x > 0 \quad \rightarrow \quad (-x > -2)\ast -1 \quad \boxed{x < 2}$$

$$1 - x^2 - y^2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \text{Circunferencia.}$$

Dominio.

$$\{(x,y) / x \leq 2 \ \wedge \ x^2 + y^2 \neq 1\}$$



Ej. Determine el dominio y trace el mismo.

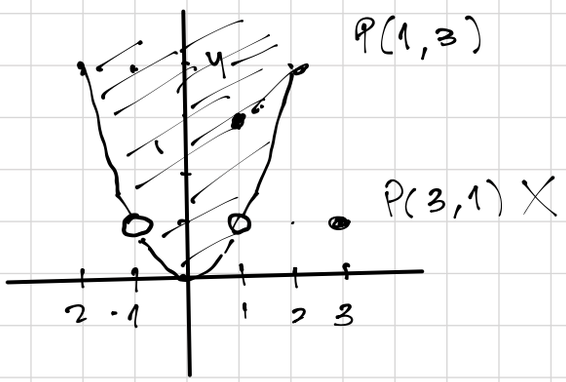
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$$

$y - x^2 \geq 0 \rightarrow \boxed{y \geq x^2}$ $\quad \nearrow \ y = x^2$

$1 - x^2 \neq 0 \rightarrow (1-x)(1+x) \neq 0$ $\quad \nearrow \ 1 - x = 0 \rightarrow x = 1$ $\quad \searrow \ 1 + x = 0 \rightarrow x = -1$

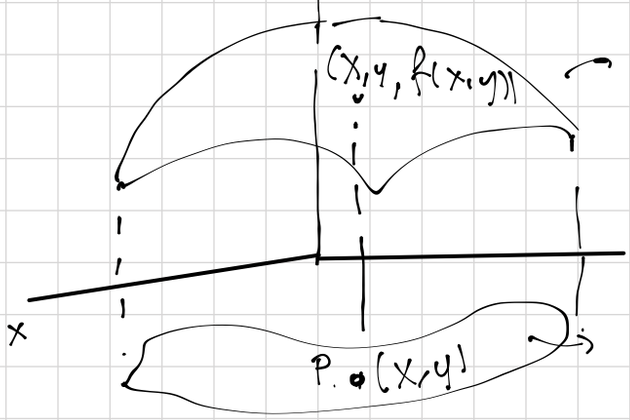
Dominio:

$$\{(x,y) / x \neq 1, \ x \neq -1 \ \wedge \ y \geq x^2\}$$



Gráficas de funciones de varias variables

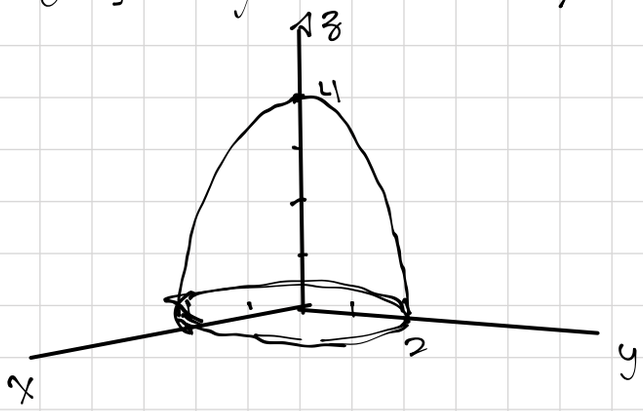
Si f es una función de variables con dominio D, la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x,y,z) en $\mathbb{R}^3$ tales que $z = f(x,y)$ esté en D.



Ej. Trazar la gráfica de la función

$$f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$$

$z = f(x,y) = 4 - x^2 - y^2 \rightarrow$ Paraboloide



$z = 4 - x^2 - y^2$

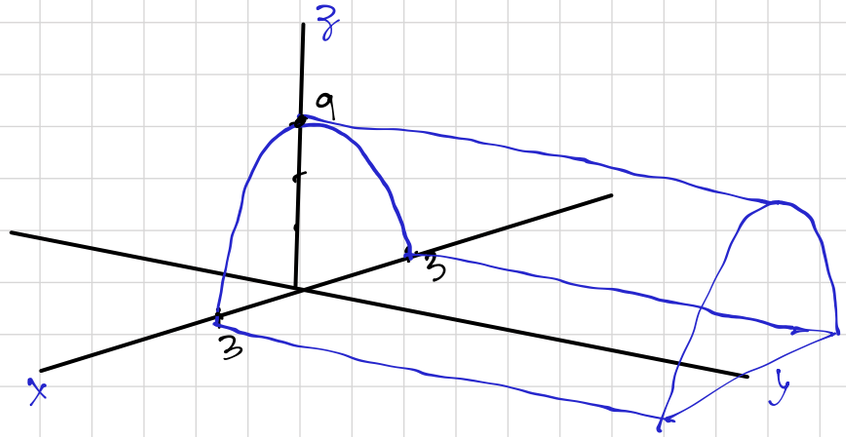
$z = 0$

$0 = 4 - x^2 - y^2$

$x^2 + y^2 = 4$

Ej. Trazar la gráfica de la función

$z = f(x,y) = 9 - x^2 \rightarrow$ Cilindro parabólico paralelo al eje y



$z = 9 - x^2$

$z = 0$

$9 - x^2 = 0$

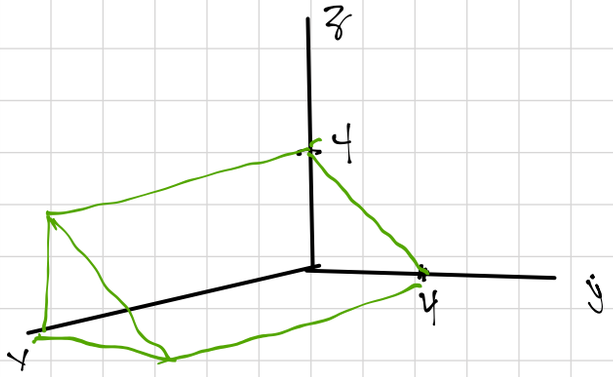
$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$

$x = \pm 3$

Ej. Trazar la gráfica de la función

$f(x,y) = 4 - y$ $\qquad z = 4 - y$

$y + z = 4$



$y = 0$

$z = 4$

$z = 0$ $\quad y = 4$

Ej. trace la grafica

$$f(x,y) = \text{sen}^{-1}(x+y)$$

$$f(x,y) = tg^{-1}(x-y)$$

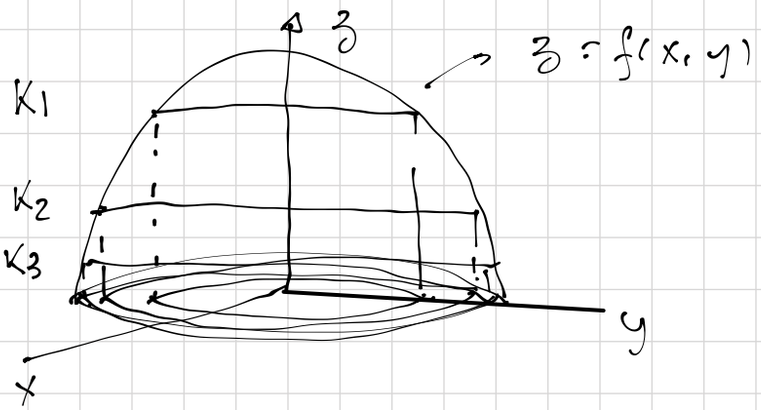
$\Downarrow$

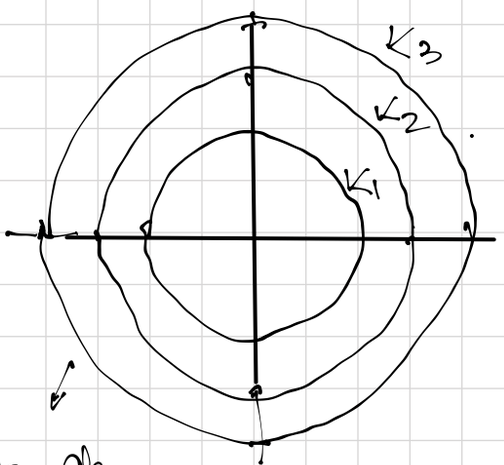
Curvas de nivel

Las curvas de nivel de una función f de dos variables son las curvas con ecuación $f(x,y) = k$ donde k es una constante.

$z = f(x,y)$

$K \rightarrow$ planos horizontales que cortan a la superficie.





Mapa de contorno.

Ej. Dibuje un mapa de contorno que muestre varias curvas de nivel.

$$f(x,y) = (y - 2x)^2$$

$z = f(x,y) = K$

$$\sqrt{(y-2x)^2} = \sqrt{k}$$

$$y - 2x = \sqrt{k}$$

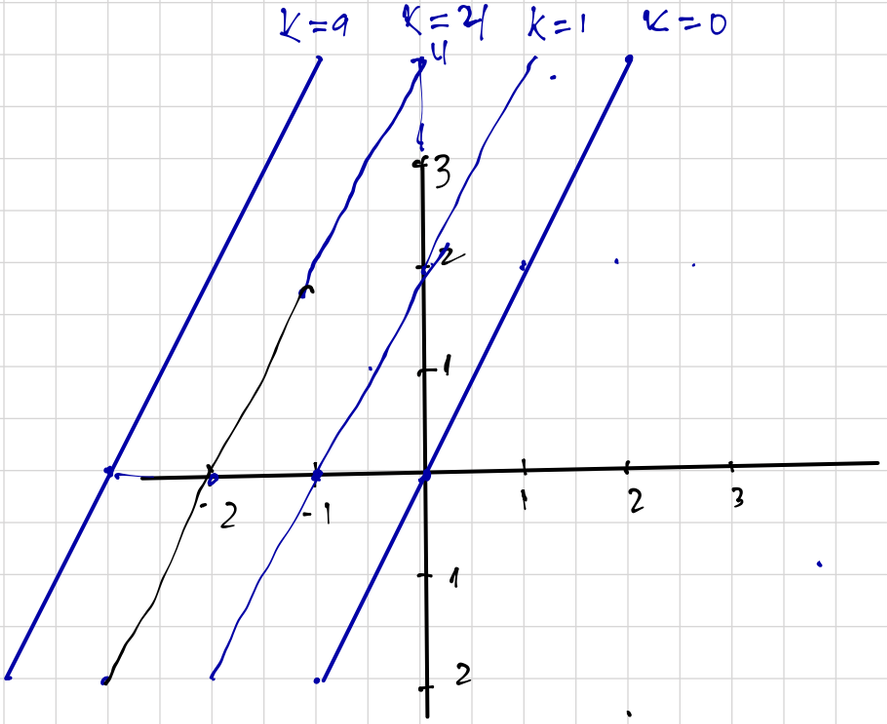
$$y = 2x + \sqrt{k}$$

$k=0 \rightarrow y = 2x$

$k=1 \rightarrow y = 2x + 1$

$k=4 \rightarrow y = 2x + 2$

$k=9 \rightarrow y = 2x + 3$



Ej. Dibuje algunas curvas de nivel

$$f(x,y) = tg^{-1}(y-x)$$

$$f(x,y) = k$$

$$tg\left(tg^{-1}(y-x)\right) = tg\,k$$

$$y - x = tg\,k$$

$$\boxed{y = tg\,k + x}$$

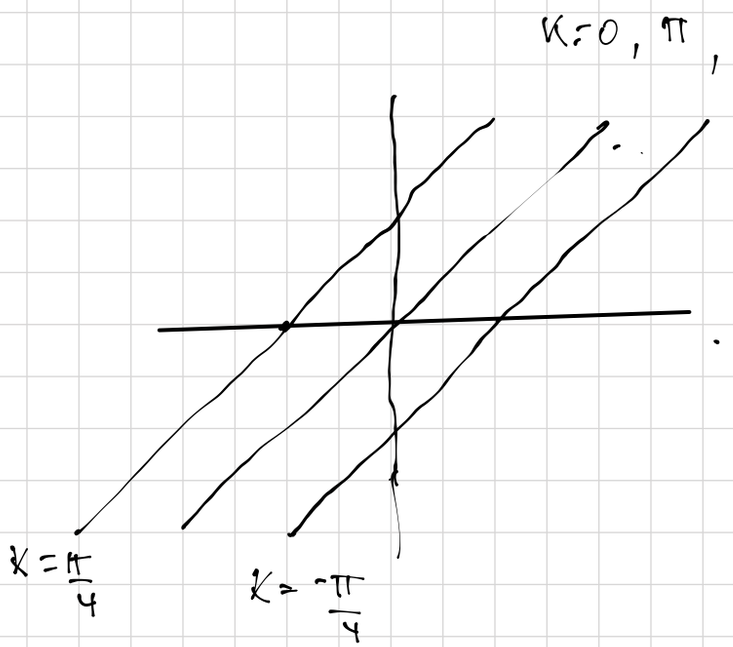
$k=0 \quad y = x$

$k = \frac{\pi}{4} \quad y = 1 + x$

$k = \pi \quad y = x$

$k = 2\pi \quad y = x$

$k = \frac{-\pi}{4} \quad y = x - 1$



Ej. Trace las curvas de nivel

$$f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$f(x,y) = k \rightarrow \frac{y}{x^2+y^2} = k$

$y = k(x^2+y^2) = kx^2 + ky^2$

$0 = kx^2 + ky^2 - y$

$kx^2 + k\left(y^2 - \frac{1}{k}y\right) = 0 \rightarrow kx^2 + k\left(y^2 - \frac{1}{k}y + \frac{1}{4k^2}\right) = \frac{1}{4k}$

$\left[kx^2 + k\left(y - \frac{1}{2k}\right)^2 = \frac{1}{4k}\right] * \frac{1}{k}$

$x^2 + \left(y - \frac{1}{2k}\right)^2 = \frac{1}{4k^2} \rightarrow$ Circunferencia
Centro $\left(0, \frac{1}{2k}\right)$
radio $\frac{1}{2k}$

$k=1$
$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

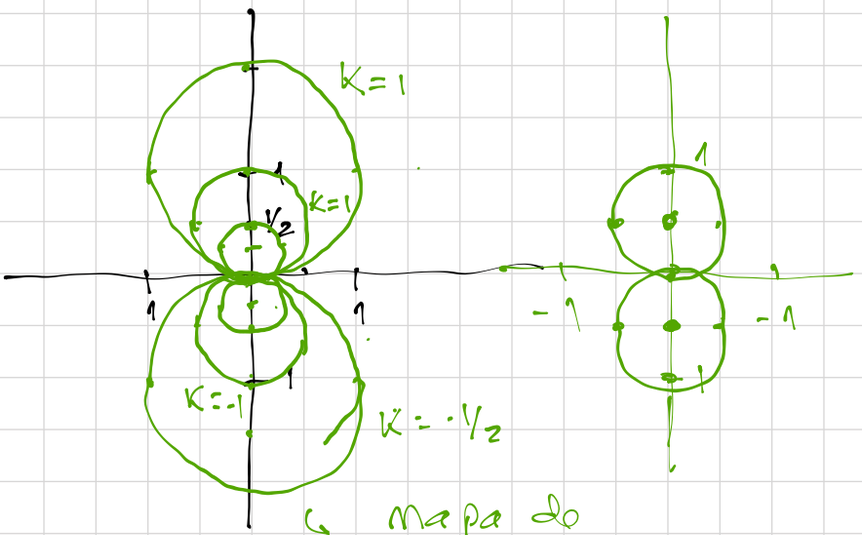
$k=-1$
$x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$k=\frac{1}{2}$
$x^2 + (y-1)^2 = 1$

$k=-\frac{1}{2}$
$x^2 + (y+1)^2 = 1$

$k=2$
$x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

$k=-2$
$x^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$



↳ mapa de contorno.

Derivadas parciales

Si $z = f(x,y)$ es una función de dos variables entonces la derivada parcial con respecto a x en un punto (x,y) es:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h}$$

y la derivada parcial con respecto a y es

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x,y)}{h}$$

Siempre que exista el límite.

Reglas para calcular las derivadas parciales

1. Para calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$, emplee las leyes de la diferenciación ordinaria mientras trata a y como una constante.

2. Para calcular $\frac{\partial z}{\partial y}$, emplee las leyes de la diferenciación ordinaria mientras trata a x como una constante.

Formas alternativas de expresar derivadas parciales.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = z_x = f_x = f_1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = z_y = f_y = f_2$$