1. Integrales Eulerianas.

1.1. Función Gamma:

Se llama función Gamma Γ , o función euleriana de 2ª especie a la integral generalizada (o impropia):

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1}\, e^{-x}\, dx \qquad \forall\, p \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Caso particular: $p = 1$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} x^0\, e^{-x}\, dx = \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx$$

$$\Gamma(1) = -\left[e^{-x}\right]_0^{\infty} = -\left[0 - 1\right] = 1$$

Otro caso interesante se obtiene realizando el cambio
$x = u^2 \rightarrow dx = 2\, u\, du$

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} u^{2(p-1)}\, e^{-u^2}\, 2\, u\, du = 2\int_0^{\infty} u^{2p-1}\, e^{-u^2} du$$

Dándole a p el valor 1/2: $p = \frac{1}{2}$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\infty} u^0\, e^{-u^2} du$$

Obteniendo la Integral de la Probabilidad en la Distribución Normal.

$$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-u^2} du$$

Cálculo recurrente de la función Gamma:

$$\Gamma(p) \quad = \quad \int_0^{\infty} x^{p-1}\, e^{-x}\, dx$$

Integrando por partes:

$$\begin{array}{cc} u = x^{p-1} & du = (p-1)\, x^{(p-2)}\, dx \\ dv = e^{-x} dx & v = -e^{-x} \end{array}$$

Por tanto

$$\Gamma(p) \quad = \quad -\left[e^{-x} x^{p-1}\right]_0^{\infty} + (p-1) \int_0^{\infty} x^{p-2}\, e^{-x}\, dx =$$

$$= -\left[0-0\right]_0^{\infty} + (p-1) \int_0^{\infty} x^{p-2}\, e^{-x}\, dx$$

Obteniendo la fórmula de recurrencia:

$$\Gamma(p) \quad = \quad (p-1) \cdot \Gamma(p-1) \qquad p \in \mathbb{R}^{+} - \{0\}$$

a) Si $\quad p \in \mathbb{Z}^+$

$$\left.\begin{array}{ccc} \Gamma(p) & = & (p-1)\cdot\Gamma(p-1) \\ \Gamma(p-1) & = & (p-2)\cdot\Gamma(p-2) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Gamma(2) & = & 1\,\Gamma(1) \\ \Gamma(1) & = & 1 \end{array}\right\}$$

Multiplicando miembro a miembro:

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(p-1)\cdots\Gamma(2)\cdot\Gamma(1) =$$
$$= (p-1)\cdot\Gamma(p-1)\cdot(p-2)\cdot\Gamma(p-2)\cdots\Gamma(2)\cdot\Gamma(1)$$

Simplificando los comunes a ambos lados de la igualdad queda:

$$\Gamma(p) = (p-1)!$$

b) Si $\quad p \notin \mathbb{Z}^+ \quad$ siendo $\quad p = n + r$

n : parte entera, y $r > 0$: parte decimal.

$$\left.\begin{array}{ccc} \Gamma(p) = \Gamma(n+r) & = & (n-1+r)\cdot\Gamma(n-1+r) \\ \Gamma(n-1+r) & = & (n-2+r)\cdot\Gamma(n-2+r) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Gamma(n-(n-1)+r) & = & (n-n+r)\cdot\Gamma(r) = r\cdot\Gamma(r) \end{array}\right\}$$

Sustituyendo recurrentemente miembro a miembro:

$$\Gamma(p) = \Gamma(n+r) = (n-1+r)\cdot(n-2+r)\cdots r\cdot\Gamma(r)$$

$$\Gamma(p) = (p-1)\cdot(p-2)\cdot\cdots r\cdot\Gamma(r)$$

1.2. Función Beta:

Se llama función Beta $\beta(p,q)$ o función euleriana de 1ª especie a la integral binomia:

$$\beta\left(p,q\right)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad con\; p,q>0$$

Propiedades:

a) Caso particular $\quad q=1$

$$\beta\left(p,1\right)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^0dx=\int_0^1 x^{p-1}dx=\left[\frac{x^p}{p}\right]_0^1=\frac{1}{p}$$

b) Simetría respecto a los parámetros.
Realizando el cambio $\quad 1-x=u \qquad dx=-du$
los límites cambiarán $\quad x=1\rightarrow u=0$
$\qquad x=0\rightarrow u=1$

$$\beta\left(p,q\right)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_1^0 (1-u)^{p-1}u^{q-1}(-du)=$$

$$=\int_0^1 u^{q-1}(1-u)^{p-1}du=\beta\left(q,p\right)$$

$$\beta\left(p,q\right)=\beta\left(q,p\right)$$

c) Reducción. Fórmula de recurrencia.
Integrando por partes $\int x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$:

$$\begin{array}{ll} u=(1-x)^{q-1} & du=-(q-1)\cdot(1-x)^{q-2}\,dx \\ dv=x^{p-1}dx & v=\frac{x^p}{p} \end{array}$$

$$\beta\left(p,q\right)=\left[\frac{x^p(1-x)^{q-1}}{p}\right]_0^1+\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}dx=$$

$$=0+\frac{q-1}{p}\beta\left(p+1,q-1\right)$$

Y por simetría, también sería:

$$\beta\left(p,q\right)=\frac{q-1}{p}\beta\left(q+1,p-1\right)$$

Tenemos que (con $q\in\mathbb{Z}^+$) si seguimos integrando:

$$\left.\begin{array}{ccc} \beta\left(p+1,q-1\right) & = & \frac{q-2}{p}\beta\left(q+2,p-2\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta\left(p+q-2,2\right) & = & \frac{1}{p+q-2}\beta\left(p+q-1,1\right) \\ \beta\left(p+q-1,1\right) & = & \frac{1}{p+q-1} \end{array}\right\}$$

Multiplicando miembro a miembro y simplificando:

$$\beta\left(p,q\right)=\frac{(q-1)(q-2)\cdots 1}{(p+q-1)(p+q-2)\cdots(p+1)p}$$

Multiplicando por $(p-1)!$

$$\beta\left(p,q\right)=\frac{(q-1)!\cdot(p-1)!}{(p+q-1)\cdots p\cdot(p-1)!}=\frac{(q-1)!\cdot(p-1)!}{(p+q-1)!}$$

Obteniendo la relación entre β y Γ, valida para valores enteros $(\mathbb{Z})$

$$\beta\left(p,q\right)=\frac{\Gamma\left(q\right)\cdot\Gamma\left(p\right)}{\Gamma\left(p+q\right)}$$

1.3. Cálculo de Γ y β para valores $n+\frac{1}{2}$

$$\beta\left(p,q\right)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

Realizando el cambio $x=\operatorname{sen}^2\theta\rightarrow dx=2\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta\,d\theta$, los límites de integración variarán: $x=0\rightarrow\theta=0$, y $x=1\rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$

$$\beta\left(p,q\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^{2(p-1)}\theta\left(1-\operatorname{sen}^2\theta\right)^{q-1}2\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta\,d\theta$$

Aplicando propiedades trigonométricas, obtenemos:

$$\beta\left(p,q\right)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^{2p-1}\theta\,\cos^{2q-1}\theta\,d\theta$$

Obteniendo una ecuación útil para resolver integrales trigonométricas de la forma:

$$\frac{1}{2}\beta\left(p,q\right)\quad=\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^{2p-1}\theta\,\cos^{2q-1}\theta\,d\theta$$

Si $p=q=\frac{1}{2}$:

$$\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\pi$$

Relacionándolo con Γ :

$$\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{2}}{\Gamma\left(1\right)}=\pi$$

De donde:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

Lo cual permite resolver las integrales planteadas:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-1+\frac{1}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\beta\left(n+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}\right)(n+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2})=\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\ \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+m+1\right)}$$

2. Ejercicios Funciones Gamma y Beta

2.1. Calcular $\frac{\Gamma(6)}{2\,\Gamma(3)}$

Puesto que $\quad \Gamma(p) = (p-1!) \qquad p \in \mathbb{Z}^+$:

$$\frac{\Gamma(6)}{2\,\Gamma(3)} = \frac{5!}{2\,2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 2\cdot 1} = 30$$

2.2. Calcular $\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}$

Siendo $\quad \Gamma(n+\frac{1}{2}) = \left(n-1+\frac{1}{2}\right)\cdots\Gamma(\frac{1}{2})$

$$\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(2+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{(2-1+\frac{1}{2})\cdot(1-1+\frac{1}{2})\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} =$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{3}{4}$$

2.3. Calcular $\int_0^\infty x^3\,e^{-x}\,dx$

Partiendo de la definición de

$$\Gamma\left(p\right) = \int_0^\infty x^{p-1}\,e^{-x}\,dx \qquad \forall\, p \in \mathbb{R}-\{0\}$$

entonces $\quad p-1=3 \to p=4$

$$\int_0^\infty x^3\,e^{-x}\,dx = \Gamma(4) = 3! = 6$$

2.4. Calcular $\int_0^\infty x^6\, e^{-2x}\, dx$

Haciendo el cambio de variable $\quad t = 2x \longrightarrow dt = 2dx$
siendo sus límites: $\quad x = 0 \to t = 0$
y $\qquad x = \infty \to t = \infty$

$$\int_0^\infty x^6\, e^{-2x}\, dx = \int_0^\infty \frac{t^6}{2^6}\, e^{-t}\, \frac{dt}{2} = \frac{1}{2^7} \int_0^\infty t^6\, e^{-t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2^7} \Gamma(7) = \frac{6!}{2^7} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^7} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 3}{2^3} = \frac{45}{8}$$

2.5. Calcular $\int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-x^3}\, dx$

Haciendo el cambio de variable $\quad x = t^{1/3} \longrightarrow dx = \frac{1}{3} t^{-2/3} dt$
siendo sus límites: $\quad x = 0 \to t = 0$
y $\qquad x = \infty \to t = \infty$

$$\int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-x^3}\, dx = \int_0^\infty t^{1/6}\, e^{-t}\, \frac{1}{3} t^{-2/3} dt = \frac{1}{3} \int_0^\infty t^{-1/2}\, e^{-t}\, dt$$

Siendo $\qquad p - 1 = -\frac{1}{2} \to p = \frac{1}{2}$

y recordando que $\quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$$\int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-x^3}\, dx = \frac{1}{3}\, \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

2.6. Calcular $\int_0^1 x^m (\ln x)^n \, dx$

Con el cambio $\quad \ln x = t \to x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$
siendo los límites de integración: $\quad x = 0 \to t = -\infty$
y $\quad x = 1 \to t = 0$

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n \, dx = \int_{-\infty}^0 e^{m\,t} \, t^n \, e^t dt = \int_{-\infty}^0 t^n \, e^{(m+1)\,t} \, dt$$

Realizando el cambio $-u = (m+1)\,t + 1 \to -du = (m+1)\,dt$
entonces $\quad t = \frac{-u}{m+1}$
y $\quad dt = \frac{-du}{m+1}$

quedando los límites de integración: $\quad t = 0 \to u = 0$
y $\quad t = -\infty \to u = \infty$

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n \, dx = \int_\infty^0 \frac{(-u)^n}{(m+1)^n} \, e^u \, \frac{-du}{(m+1)}$$

Cambiar el límite superior por el inferior, y viceversa, equivale a multiplicar por (-1); por lo que sacando fuera las constantes, queda:

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n \, dx = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^\infty u^n \, e^{-u} \, du$$

Siendo $\quad p - 1 = n \to p = n + 1$
debiendo ser $\quad m + 1 \neq 0$

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n \, dx = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \Gamma(n+1)$$

Donde $\quad \Gamma(n+1) = n! \quad$ si $\quad n \in \mathbb{Z}$

2.7. Calcular $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\cdot\beta\left[\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right]$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\cdot\beta\left[\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right]=\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+\frac{7}{2}\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\left[\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\right]^2}{\Gamma\left(6\right)}$$

Siendo:

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\left(3-1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(3-2+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(6\right)=5!$$

Quedando:

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\cdot\beta\left[\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right]=\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\left[\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right]^2}{5!}$$

2.8. Calcular $\int_0^1 x^4(1-x)^3dx$

Al ser $\quad \beta\,(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad con\; p,q>0$
tenemos que $\quad p-1=4 \longrightarrow p=5$
y $\qquad q-1=3 \rightarrow q=4$
con $\qquad p,q>0$

$$\int_0^1 x^4(1-x)^3dx = \beta\,(5,4) = \frac{\Gamma\,(5)\cdot\Gamma\,(4)}{\Gamma\,(5+4)} = \frac{4!\cdot 3!}{8!}$$

2.9. Calcular $\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}}$

$$\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}} = \int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^2 x^2\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$

Realizando el cambio de variable $\quad \frac{x}{2}=t \longrightarrow \frac{dx}{2}=dt$
siendo los límites de integración $\quad x=0 \rightarrow t=0$
y $\qquad x=2 \longrightarrow t=1$

$$\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}} = \sqrt{2}\int_0^1 2^2t^2\,(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt = 4\sqrt{2}\int_0^1 t^2\,(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt$$

Al ser $\quad \beta\,(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad con\; p,q>0$
tenemos que $\quad p-1=2 \rightarrow p=3$
y $\qquad q-1=-\frac{1}{2} \rightarrow q=\frac{1}{2}$
con $\qquad p,q>0$

$$\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}} = 4\sqrt{2}\,\beta\left(3\,,\,\frac{1}{2}\right) = 4\sqrt{2}\cdot\frac{\Gamma\,(3)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)}$$

2.10. Calcular $\int_0^a y^4\sqrt{a^2-y^2}dy$

$$\int_0^a y^4\sqrt{a^2-y^2}dy=\int_0^a y^4\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}a\,dy$$

Realizando el cambio $\frac{y^2}{a^2}=t\rightarrow\frac{2y}{a^2}dy=dt$
Los límites de integración serán: $y=0\rightarrow t=0$
y cuando $y=a\rightarrow t=1$
Teniendo en cuenta que $y=a\sqrt{t}$
y también que $y\,dy=\frac{a}{2}^2dt$
Convertimos el término $y^4dy=y^3ydy=a^3t^{\frac{3}{2}}\frac{a^2}{2}dt=\frac{a^5}{2}t^{\frac{3}{2}}dt$
Pudiendo escribir la integral como:

$$\int_0^a y^4\sqrt{a^2-y^2}dy=\frac{a^6}{2}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}\left(1-t\right)^{-\frac{1}{2}}dt$$

Donde tenemos $p-1=\frac{3}{2}\rightarrow p=\frac{5}{2}$
y $q-1=\frac{-1}{2}\rightarrow q=\frac{1}{2}$
con $p,q>0$

$$\int_0^a y^4\sqrt{a^2-y^2}dy=\frac{a^6}{2}\,\beta\left(\frac{5}{2},\,\frac{1}{2}\right)=\frac{a^6}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(3\right)}$$

2.11. Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^6 \theta \, d\theta$

Recordando que :

$$\frac{1}{2}\,\beta\,(p,q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2p-1}\theta\ \cos^{2q-1}\theta\, d\theta$$

Siendo $\quad 2p-1=6 \to p=\frac{7}{2}$
y $\quad 2q-1=0 \to q=\frac{1}{2}$
con $\quad p,q>0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^6\theta\, d\theta = 2\,\beta\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right) \quad = \quad 2\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\,(4)}$$

2.12. Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \theta\ \cos^5\theta \, d\theta$

Donde $\quad 2p-1=4 \to p=\frac{5}{2}$
y $\quad 2q-1=5 \to q=3$
con $\quad p,q>0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4\theta\ \cos^5\theta\, d\theta = 2\,\beta\left(\frac{5}{2},3\right) = 2\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\Gamma\,(3)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}$$