

---

PROYECTO GLOBAL INTEGRADOR:  
CONTROL DE ACCIONAMIENTO DE CA  
CON MOTOR SÍNCRONO DE IMANES  
PERMANENTES

---

Universidad Nacional de Cuyo  
Carrera: Ingeniería Mecatrónica  
Cátedra: Automática y Máquinas Eléctricas  
Docente: Julián Gabriel  
Alumno: Llano López Javier Alejandro  
Alumno: Salazar García Rafael David

Índice

1. Resumen	2
2. Introducción	2
3. Desarrollo	2
3.1. Primera parte: Modelado, Análisis y Simulación dinámica del SISTEMA FÍSICO a “Lazo Abierto” (Sin Controlador externo de Movimiento)	2
3.1.1. Modelo matemático equivalente	2
3.1.2. Modelo dinámico del sistema	5
a) Modelo global no lineal	8
b) Modelo global linealizado con parámetros variables	11
c) Modelo simplificado lineal invariante (LTI) equivalente	14
d) Comparación del modelo dinámico global LPV vs el modelo dinámico LTI equivalente aumentado	18
e) Funciones de Transferencia para el modelo LTI equivalente aumentado	19
3.1.3. Análisis de Estabilidad a lazo abierto para el modelo LTI equivalente aumentado	19
a) Determinación de polos y ceros, cálculo de frecuencias naturales y amortiguamiento	19
b) Evaluar estabilidad parcial y completa, y dinámica de los ceros	21
3.1.4. Análisis de Observabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado	21
3.1.5. Análisis de Controlabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado	23
3.1.6. Simulación dinámica	24
3.2. Segunda parte: Diseño, Análisis y Simulación con CONTROLADOR de Movimiento en Cascada con Modulador de Torque equivalente (Control Vectorial)	31
3.2.1. Modulador de Torque equivalente (Controlador interno vectorial de corriente/torque)	31
a) “Desacoplamiento” o Compensación de todas las realimentaciones físicas naturales de estado hacia la entrada.	31
b) Diseño de lazos de control de corrientes $i_{qd0s}^r(t)$	32
c) Incorporación adecuada de consigna de torque	33
d) “Desacoplamiento” o Compensación del Torque de carga por gravedad	34
3.2.2. Controlador externo de movimientos	35
3.2.3. Observador de Estado de orden reducido	38
3.2.4. Simulación en tiempo continuo	39
3.2.5. Verificación de desempeño y/o mejoras	43
3.2.6. Versión final	67
4. Conclusiones	70
Referencias bibliográficas	71

## 1. Resumen

En el presente proyecto se lleva a cabo el modelado, simulación, diseño y análisis de desempeño de un sistema de control automático de posición y movimiento para la articulación de un brazo manipulador robótico elemental de un grado de libertad en plano vertical (péndulo rígido actuado), utilizando un motor síncrono de corriente alterna trifásico con una caja reductora como actuador final.

Se inicia con un análisis a lazo abierto para evaluar el modelo propuesto. Posteriormente, se aplica un sistema de control adecuado y se estudian las respuestas no ideales de los componentes del sistema, considerando modelos de degradaciones que podrían presentarse en una situación real. Se resuelven estos errores empleando consignas realizables y algoritmos diseñados para mejorar el desempeño. El resultado es un sistema de control robusto con un buen seguimiento de las consignas de posición proporcionadas por el usuario, destacando la importancia de seleccionar correctamente los elementos y desarrollar algoritmos adecuados para una implementación real.

## 2. Introducción

El proyecto tiene una finalidad didáctica y se enfoca en el modelado, simulación, diseño y análisis de desempeño de un sistema de control automático de posición y movimiento para el accionamiento electromecánico de un robot manipulador elemental de un grado de libertad en plano vertical (péndulo rígido actuado). En lugar de estudiar la dinámica no lineal (NL) acoplada a la carga mecánica del robot, se ha optado por aproximar su comportamiento no lineal mediante un modelo linealizado que considera parámetros equivalentes variables según sea la carga útil transportada en el extremo. El sistema de accionamiento incluye un motor eléctrico de corriente alterna (CA) trifásico sincrónico con excitación por imanes permanentes (PMSM), alimentado por un inversor trifásico desde una fuente ideal de corriente continua (CC); un reductor de velocidad de engranajes planetarios; y retroalimentación mediante un sensor de posición (encoder) en el eje del motor, tres sensores de corriente instantánea de fases en la salida del inversor al estator, y un sensor de temperatura del bobinado del estator.

El objetivo es manipular correctamente la frecuencia y tensión trifásica de línea a través del inversor para que el motor convierta energía eléctrica en energía mecánica, logrando así la posición angular deseada del péndulo en todo momento. Esto debe alcanzarse para cualquier valor de torque externo de carga mecánica y temperatura ambiente, de manera segura, midiendo la posición del motor, las corrientes de fase estáticas y la temperatura del estator.

## 3. Desarrollo

El desarrollo del proyecto se divide en dos partes principales:

La primera parte consiste en el modelado, análisis y simulación dinámica a lazo abierto, donde no se utiliza el controlador de movimiento, pero se comienzan a analizar las leyes básicas de control no lineal.

La segunda parte se centra en el diseño, análisis y simulación del controlador de movimiento a lazo cerrado, profundizando en las leyes de control necesarias para plantear el modulador de torque equivalente completo en cascada. Además, se realiza una simulación con perfiles de movimiento a seguir, permitiendo realizar mejoras según lo observado. Finalmente, se analiza la degradación del sistema cuando los sensores y el inversor tienen un ancho de banda limitado y cuando el inversor presenta saturación.

### 3.1. Primera parte: Modelado, Análisis y Simulación dinámica del SISTEMA FÍSICO a “Lazo Abierto” (Sin Controlador externo de Movimiento)

#### 3.1.1. Modelo matemático equivalente

Nuestro modelo matemático consta de 3 partes:

**La carga mecánica** a controlar corresponde a la articulación de un brazo manipulador robótico elemental de un grado de libertad rotacional, con un eje horizontal sometido a la acción de la gravedad (péndulo rígido actuado). En lugar de abordar la complejidad de estudiar la dinámica no lineal acoplada del robot, se opta por aproximar su comportamiento no lineal mediante un modelo linealizado.

El **Modelo simplificado equivalente (No Lineal con parámetros variables)**, referido al eje de salida del tren de transmisión, está definido por la ecuación:

$$J_l \cdot \frac{d\omega_l}{dt}(t) = T_q(t) - b_l \cdot \omega_l(t) - T_l(t) \quad (1a)$$

$$\frac{d\theta_l}{dt}(t) = \omega_l(t) \quad (1b)$$

$$\text{donde: } T_l(t) = k_l \cdot \text{seno}(\theta_l(t)) + T_p(t) \quad (1c)$$

Donde:

$q(t) \equiv \theta_l(t)$ : Coordenada articular de eje de la articulación referida a la vertical hacia abajo, positiva en sentido antihorario.

$\tau \equiv T_q(t)$ : Torque impulsor.

**Parámetros equivalentes variables** (valor nominal  $\pm$  variación máx.):

- Coef. de fricción viscosa en articulación:  $b_l \approx (0,1 \pm 0,03) \frac{N \cdot m}{rad/s}$  (incertidumbre)
- Aceleración de gravedad:  $g = 9,80665 m/s^2$
- Masa del brazo manipulador:  $m = 1,0 kg$
- Longitud e Inercia equivalente (centro masa):  $l_{cm} = 0,25 m$ ;  $J_{cm} = 0,0208 kg \cdot m^2$
- Longitud total (extremo):  $l_l = 0,5 m$
- Masa de Carga útil en extremo (variable):  $m_l = [0..,1,5] kg$
- Momento de inercia total (a eje de rotación):  $J_l = (m \cdot l_{cm}^2 + J_{cm}) + m_l \cdot l_l^2 = 0,0833 + [0..,0,375] kg \cdot m^2$
- Coeficiente de Torque recuperador gravitacional:  $k_l = m \cdot g \cdot l_{cm} + m_l \cdot g \cdot l_l = 2,452 + [0..,7,355] N \cdot m$

**Especificaciones de operación** (carga o perturbación, valor límite):

- Torque de perturbación externo  $T_d(t) \approx (0 \pm 5,0) N \cdot m$  (asumir función escalón)

**El tren de transmisión** se compone de una caja reductora reversible con sistema de engranajes planetarios, asumiendo acoplamiento rígido (sin elasticidad torsional y sin juego, holgura o “backlash”); momento de inercia equivalente y pérdidas de energía por fricción interna, reflejados al eje de entrada y considerados junto con el motor.

Su respectivo modelo equivalente está dado por:

$$\omega_l(t) = \frac{1}{r} \cdot \omega_m(t); \quad (2a)$$

$$T_q(t) = r \cdot T_d(t) \quad (2b)$$

**Parámetro** (constante):

- Relación de reducción total:  $r = 120,0 : 1$

**Especificaciones de operación** (valores límite, no sobrepasar):

- Velocidad nominal (salida):  $n_{l_{nom}} = 60 rpm$  ( $\omega_{l_{nom}} = 6,28 \frac{rad}{s}$ )
- Torque nominal (salida):  $T_{q_{nom}} = 17,0 N \cdot m$  (régimen continuo o rms)
- Torque pico (salida):  $T_{q_{max}} = 45,0 N \cdot m$  (corta duración, aceleración)

**La máquina eléctrica** corresponde a un motor de CA síncrono con excitación por imanes permanentes (PMSM) y estator conectado en estrella (simétrico y equilibrado) accesible en bornes de fases abc, con centro de estrella (punto “neutro”) flotante (no accesible). El modelo equivalente del rotor referido al estator, el cual es un sistema inercial de referencia, está dado por:

$$J_m \cdot \frac{d\omega_m}{dt}(t) = T_m(t) - b_m \cdot \omega_m(t) - T_d(t) \quad (3a)$$

$$\frac{d\theta_m}{dt}(t) = \omega_m(t) \quad (3b)$$

A partir de los tres modelos equivalentes, se puede realizar una simplificación o compactación de los mismos para obtener un único modelo matemático equivalente del subsistema mecánico completo, el cual posee 1 grado de libertad.

Subsistema mecánico completo = Carga mecánica + Tren de transmisión + Máquina eléctrica

### Subsistema mecánico completo

Despejando  $T_d$  en (3a):

$$T_d(t) = -J_m \cdot \frac{d^2\theta_m}{dt^2}(t) + T_m(t) - b_m \cdot \frac{d\theta_m}{dt}(t) \quad (4)$$

Reemplazando  $T_d$  de (2b) en (1a), se despeja:

$$T_d(t) = \frac{J_l}{r} \cdot \frac{d^2\theta_l}{dt^2}(t) + \frac{b_l}{r} \cdot \frac{d\theta_l}{dt}(t) + \frac{T_l(t)}{r} \quad (5)$$

Reemplazando (1b) y (2b) en (5):

$$T_d(t) = \frac{J_l}{r^2} \cdot \frac{d^2\theta_m}{dt^2}(t) + \frac{b_l}{r^2} \cdot \frac{d\theta_m}{dt}(t) + \frac{T_l(t)}{r} \quad (6)$$

Igualando (6) con (4):

$$(J_m + \frac{J_l}{r^2}) \cdot \frac{d^2\theta_m}{dt^2}(t) + (b_m + \frac{b_l}{r^2}) \cdot \frac{d\theta_m}{dt}(t) + \frac{T_l(t)}{r} - T_m(t) = 0 \quad (7)$$

Los parámetros equivalentes son:

$$J_{eq} = J_m + \frac{J_l}{r^2} \quad b_{eq} = b_m + \frac{b_l}{r^2} \quad T_{leq}(t) = \frac{T_l}{r} \quad (8a)$$

Resultando en:

$$J_{eq} \cdot \frac{d^2\theta_m}{dt^2}(t) + b_{eq} \cdot \frac{d\theta_m}{dt}(t) + T_{leq}(t) - T_m(t) = 0 \quad (9)$$

De (9) se obtienen las ecuaciones de estado:

$$\begin{cases} \frac{d\theta_m}{dt}(t) = \omega_m(t) \\ \frac{d\omega_m}{dt}(t) = \frac{T_m(t) - T_{leq}(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t)}{J_{eq}} \end{cases} \quad (10)$$

En forma matricial obtenemos:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \cdot x(t) \end{cases} \quad (11)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} T_m(t) \\ T_l(t) \end{bmatrix} \quad y(t) = \theta_l(t) \quad (12)$$

Esta compactación del subsistema mecánico la podemos obtener dado que se considera el tren de transmisión rígido. Si no fuera el caso, habría que considerar que el sistema tiene tres grados de libertad y no uno.

A continuación se muestra el diagrama en bloques. (Imagen del diagrama en bloques del subsistema mecánico completo)

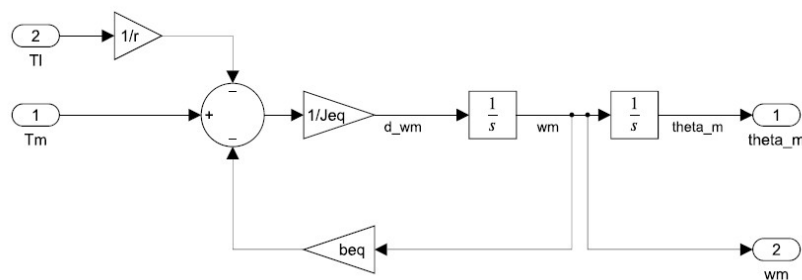


Figura 1: Diagrama de bloques del subsistema mecánico completo.

### 3.1.2. Modelo dinámico del sistema

En este caso se acoplaron los subsistemas electromagnético y térmico:

Modelo Dinámico = Subsistema mecánico completo+Subsistema electromagnético+Subsistema térmico

**El Subsistema electromagnético** se expresa en coordenadas eléctricas  $qd0$ , las cuales están fijas a la posición eléctrica del rotor y se derivan de las coordenadas  $abc$  mediante la transformación de Park.

Las coordenadas eléctricas  $qd0$ , a diferencia de las coordenadas  $abc$  que están referenciadas a los bornes a, b y c de las tres fases fijas al estator, constituyen un sistema de referencia que se mueve con el campo magnético del rotor a la velocidad angular eléctrica  $\omega_r(t)$ . Este enfoque facilita el modelado electromagnético de la máquina síncrona de CA, simplificando las operaciones matemáticas y permitiendo asemejar su comportamiento al de una máquina de CC. El sistema de coordenadas  $qd0$  se define mediante tres ejes:

- Eje q (quadrature): En cuadratura con el campo rodante del estator, desfasado  $90^\circ$  eléctricos.
- Eje d (direct): Directamente alineado con el campo rodante del estator, en fase con dicho campo.
- Eje 0: Ortonormal a los ejes q y d, coincidente con el eje geométrico de rotación del motor.

En un sistema trifásico equilibrado, el valor del eje 0 es siempre cero, siempre que el sistema no pierda su equilibrio. Las transformaciones de Park, tanto directa como inversa, son las herramientas matemáticas que permiten convertir coordenadas entre los sistemas  $abc$  y  $qd0$  y viceversa.

El uso del sistema de coordenadas  $qd0$  ofrece dos ventajas principales que simplifican el modelado:

1. Reduce el número de ejes de tres (a, b y c) a dos (q y d), ya que el eje 0 coincide con el eje de rotación del rotor y no depende de la variable  $\theta_r(t)$ .
2. Transforma las inductancias  $L_a$ ,  $L_b$  y  $L_c$ , y los flujos dependientes de  $\theta_r(t)$  y, por lo tanto, del tiempo, en inductancias  $L_d$  y  $L_q$  y flujos independientes de  $\theta_r(t)$ , constantes en el tiempo, dado que los ejes q y d giran solidariamente con el rotor.

Las coordenadas del entrehierro  $qd0$  fijas a rotor son:

$$\frac{d\theta_r}{dt}(t) = \omega_r(t) \quad \theta_r(t) = \int_0^t \omega_r(\xi) d\xi + \theta_r(0) \quad (13a)$$

$$\theta_r(t) = P_p \cdot \theta_m(t) \therefore \omega_r(t) = P_p \cdot \omega_m(t) \quad (13b)$$

Donde:

$\theta_r(t)$ : Posición angular eléctrica del rotor. Es el ángulo entre el eje a y el eje q.

$\omega_r(t)$ : Velocidad angular eléctrica del rotor.

$P_p$  Pares de polos magnéticos del estator.

El torque electromagnético se expresa como:

$$T_m(t) = \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^r(t) \quad (14)$$

Donde:

$i_{qs}^r(t)$ : Corriente de fase de eje en cuadratura.

$i_{ds}^r(t)$ : Corriente de fase de eje directo.

$L_q$ : Inductancia de estator (eje en cuadratura).

$L_d$ : Inductancia de estator (eje directo).

$\lambda_m^r$ : Flujo magnético equivalente de imanes concatenado por espiras del bobinado de estator.

El balance de tensiones eléctricas equivalentes de estator es:

$$v_{qs}^r(t) = R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) + L_q \cdot \frac{di_{qs}^r}{dt}(t) + [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot \omega_r(t) \quad (15a)$$

$$v_{ds}^r(t) = R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + L_d \cdot \frac{di_{ds}^r}{dt}(t) - L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot \omega_r(t) \quad (15b)$$

$$v_{0s}^r(t) = R_s(t) \cdot i_{0s}^r(t) + L_{ls} \cdot \frac{di_{0s}^r}{dt}(t) \quad (15c)$$

Donde:

$v_{qs}^r(t)$ : Tensión de fase de eje en cuadratura.

$v_{ds}^r(t)$ : Tensión de fase de eje directo.

$v_{0s}^r(t)$ : Tensión de fase de eje cero.  
 $i_{qs}^r(t)$ : Corriente de fase de eje en cuadratura.  
 $i_{ds}^r(t)$ : Corriente de fase de eje directo.  
 $i_{0s}^r(t)$ : Corriente de fase de eje cero.  
 $L_{ls}$ : Inductancia de dispersión referida al estator.  
 $R_s(t)$ : Resistencia de estator, por fase.

En las ecuaciones (15a), (15b) y (15c), los primeros términos en el lado derecho representan las caídas óhmicas del estator referidas al rotor, donde cada fase del estator tiene la misma resistencia  $R_s(t)$ , debido a la consideración de un sistema equilibrado. Los segundos términos corresponden a las caídas de tensión inducidas en cada eje, debido a los bobinados. Estas ecuaciones también son no lineales, ya que en el primer término se produce el producto de dos variables dependientes del tiempo; aunque  $R_s(t)$  varía lentamente con la temperatura, se considera que cambia.

Además, en los terceros términos de (15a) y (15b), se observa que la caída de tensión en el eje de cuadratura depende de variables de estado del eje directo, y viceversa, lo que significa que están cruzadas.

**Parámetros eléctricos** (valores nominales medidos, tolerancia error +/- 1 %):

- Momento de inercia (motor y caja):  $J_m \approx 1,410^5 kg \cdot m^2$
- Coef. de fricción viscosa (motor y caja):  $b_m \approx 1,510^5 N \cdot m \cdot \frac{rad}{s}$
- Pares de Polos magnéticos:  $P_p = 3$  pares (i.e. 6 polos)
- Flujo magnético equivalente de imanes concatenado por espiras del bobinado de estator:  $\lambda_m'^r \approx 0,016 - t$ , ó  $(\frac{V}{rad/s})$
- Inductancia de estator (eje en cuadratura):  $L_q \approx 5,8mH$
- Inductancia de estator (eje directo):  $L_d \approx 6,6mH$
- Inductancia de dispersión de estator:  $L_{ls} \approx 0,8mH$
- Resistencia de estator, por fase:  $R_s \approx 1,02\Omega(@40^\circ C) \omega 1,32\Omega(@115^\circ C)$

**Especificaciones eléctricas de operación**, en bornes de fases abc de estator (valores límite):

- Velocidad nominal rotor:  $n_{m_{nom}} = 6600rpm (\omega_{m_{nom}} = 691,15 \frac{rad}{s})$
- Tensión nominal de línea:  $V_{sl_{nom}} = 24V_{ca_{rms}}$  (tensión nominal de fase:  $V_{sf_{nom}} = \frac{V_{sl_{nom}}}{\sqrt{3}}$ )
- Corriente nominal:  $I_{s_{nom}} = 0,4A_{ca_{rms}}$  (régimen continuo)
- Corriente máxima:  $I_{s_{max}} = 2,0A_{ca_{rms}}$  (corta duración, aceleración)

Despejando las derivadas de las corrientes en (15a), (15b) y (15c), podemos obtener las ecuaciones para realizar el diagrama de bloques del subsistema electromagnético:

$$\frac{di_{qs}^r}{dt}(t) = \frac{v_{qs}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) - [\lambda_m'^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot \omega_r(t)}{L_q} \quad (16a)$$

$$\frac{di_{ds}^r}{dt}(t) = \frac{v_{ds}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot \omega_r(t)}{L_d} \quad (16b)$$

$$\frac{di_{0s}^r}{dt}(t) = \frac{v_{0s}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{0s}^r(t)}{L_{ls}} \quad (16c)$$

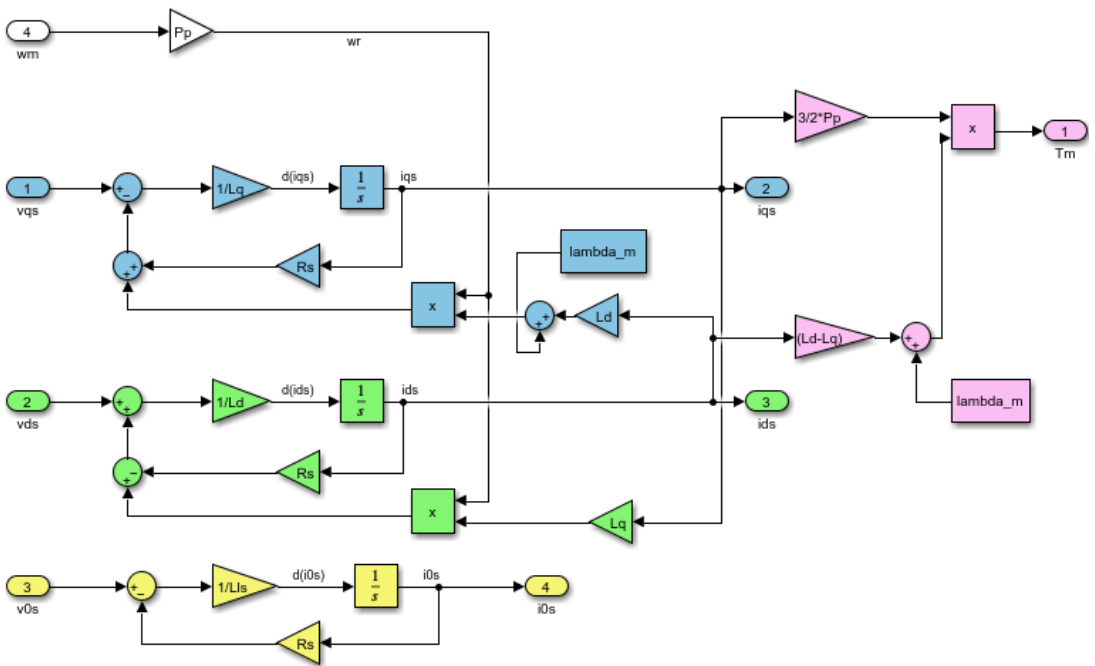


Figura 2: Diagrama de bloques del subsistema electromagnético.

Subsistema térmico

En el **subsistema térmico**, solo se consideran las pérdidas eléctricas resistivas por efecto Joule en los bobinados del estator, no se consideran las pérdidas por transferencia de calor por conducción ni por convección natural. Este es un modelo muy simplificado, ya que se ignoran las pérdidas magnéticas en el núcleo, se asume una temperatura uniforme en todo el bobinado del estator (aunque en realidad hay puntos más calientes que otros) y no se considera la ventilación forzada en la transferencia de calor.

Primero, se supone que cada bobinado del estator está hecho de cobre, ya que es lo más común. Debido a que cada uno es un conductor eléctrico, cada uno tiene una resistencia eléctrica  $R_s(t)$  que se calienta por efecto Joule, causando una pérdida de energía. Este calentamiento produce un aumento de temperatura, lo que a su vez incrementa el valor de cada resistencia  $R_s(t)$ .

La variación de la resistencia del bobinado estatórico con la temperatura se expresa como un sistema de primer orden mediante:

$$R_s(t) = R_{sREF} \cdot (1 + \alpha_{Cu} \cdot (T_s^\circ(t) - T_{sREF}^\circ)) \tag{17}$$

- Donde:
- $\alpha_{Cu}$ : Coeficiente de aumento de  $R_s(t)$  con  $T_s^\circ(t)$  para el cobre.
  - $R_{sREF}$ : Resistencia de referencia a una determinada temperatura  $T_{sREF}^\circ$ .
  - $T_{sREF}^\circ$ : Temperatura correspondiente al valor de la  $R_{sREF}$ .
  - $T_s^\circ(t)$ : Temperatura del bobinado estatórico.

La ecuación (17) es un desarrollo en serie de Taylor de la función de aumento de la resistencia en función de la temperatura, en donde se han despreciado todos los términos de orden superior, con lo que se asume que se tiene un comportamiento lineal de la resistencia con la temperatura. Es decir, solo se ha tomado la primer aproximación; como resultado se obtiene la ecuación de una recta, donde  $R_s(t)$  y  $T_s^\circ(t)$  son los valores instantáneos, mientras que  $R_{sREF}$  y  $T_{sREF}^\circ$  corresponden a un punto cualquiera sobre dicha recta de la resistencia en función de la temperatura.

La potencia de pérdidas calóricas puede ser expresada como:

$$P_{s\ perd} = R_s(t) \cdot (i_{as}^2(t) + i_{bs}^2(t) + i_{cs}^2(t)) = \frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot (i_{qs}^{r\ 2}(t) + i_{ds}^{r\ 2}(t) + 2 \cdot i_{0s}^{r\ 2}(t)) \tag{18}$$

- Donde:
- $P_{s\ perd}(t)$ : Potencia de pérdidas calóricas en el estator.
  - $i_{as}(t)$ : Corriente de fase a.
  - $i_{bs}(t)$ : Corriente de fase b.
  - $i_{cs}(t)$ : Corriente de fase c.



El balance térmico del estator está dado por:

$$P_{s \text{ perd}} = C_{ts} \cdot \frac{dT_s^\circ}{dt}(t) + \frac{1}{R_{ts-amb}} \cdot (T_s^\circ(t) - T_{amb}^\circ(t)) \quad (19)$$

**Parámetros térmicos** (valores nominales medidos, tolerancia error +/- 1 %):

- Coef. aumento de  $R_s$  con  $T_s^\circ(t)$ :  $\alpha_{Cu} = 3,9 \cdot 10^3 \frac{1}{^\circ C}$
  - Capacitancia térmica de estator:  $C_{ts} \approx 0,818 \frac{\omega}{^\circ C/s}$  ( $\rightarrow$  almacenamiento interno)
  - Resistencia térmica estator-ambiente:  $R_{ts-amb} \approx 146,7^\circ C/\omega$  ( $\rightarrow$  disipación al ambiente)
- Nota: Constante de tiempo térmica:  $\tau_{ts-amb} = R_{ts-amb} \cdot C_{ts} \approx 120 \text{ s}$

**Especificaciones térmicas de operación** (valores límite):

- Temperatura máxima de bobinado estator:  $T_{s_{max}}^\circ = 115^\circ C$
- Rango de Temperatura ambiente de Operación:  $15^\circ \leq T_{s_{amb}}^\circ \leq 40^\circ C$

Por lo tanto para obtener el diagrama de bloques del subsistema térmico, se igualan (18) y (19):

$$\frac{dT_s^\circ}{dt}(t) = \frac{\frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot (i_{qs}^2(t) + i_{ds}^2(t) + 2 \cdot i_{0s}^2(t)) - \frac{T_s^\circ(t) - T_{amb}^\circ(t)}{R_{ts-amb}}}{C_{ts}} \quad (20a)$$

$$\frac{dT_s^\circ}{dt}(t) = \frac{\frac{3}{2} \cdot R_{s\_REF} \cdot (1 + \alpha_{Cu} \cdot (T_s^\circ(t) - T_{s\_REF}^\circ)) \cdot (i_{qs}^2(t) + i_{ds}^2(t) + 2 \cdot i_{0s}^2(t)) - \frac{T_s^\circ(t) - T_{amb}^\circ(t)}{R_{ts-amb}}}{C_{ts}} \quad (20b)$$

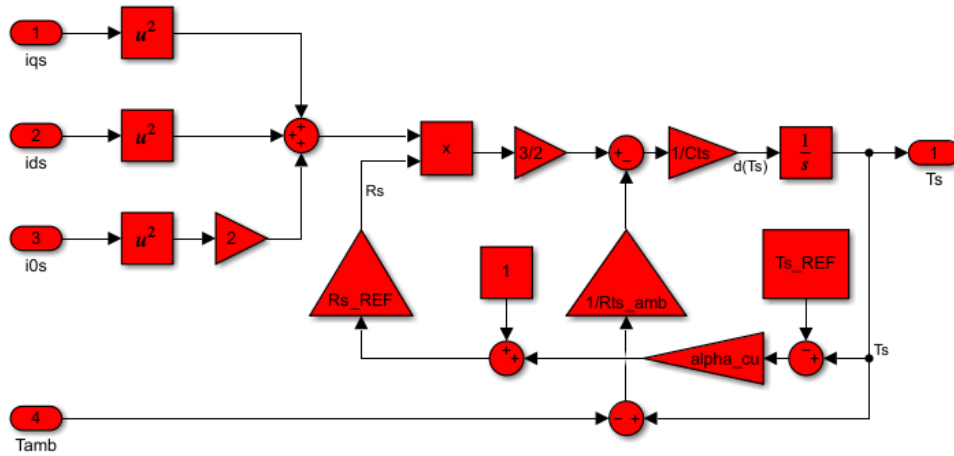


Figura 3: Diagrama de bloques del subsistema térmico.

#### a) Modelo global no lineal

El modelo global se construye integrando todos los submodelos previamente desarrollados. Dado que tanto el submodelo electromagnético como el térmico son no lineales, el modelo global también exhibe un comportamiento no lineal.

Las variables de estado del modelo global se determinan según la cantidad de elementos que almacenan energía en el sistema:

- Considerando un acoplamiento rígido entre el motor y la carga mecánica, podemos referenciar la posición del brazo robótico a la variable de estado  $\theta_m(t)$  que es la posición mecánica del rotor.
- Los momentos de inercia combinados del rotor del motor, de los engranajes planetarios y de la articulación del robot almacenan energía cinética, que depende de  $\omega_m(t)$  (o de  $\omega_l(t)$ ), siendo esta una de las variables de estado del modelo global.

- Los bobinados del estator, al ser inductores, almacenan energía electromagnética, por lo que las corrientes  $i_{qs}^r(t)$ ,  $i_{ds}^r(t)$  y  $i_{0s}^r(t)$  (o también expresadas en coordenadas abc) son otras tres variables de estado del sistema.
- La masa física del estator, al elevar su temperatura, almacena energía térmica, por lo que  $T_s^\circ(t)$  también es una variable de estado del modelo global.

### I) Ecuaciones vectoriales NL de estado y de salida

Para obtener el modelo matemático global, primero se procede a acoplar el subsistema electromagnético al subsistema mecánico. Se reemplaza  $T_m$  de (10) por (14):

$$\frac{d\omega_m}{dt}(t) = \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^r(t) - T_{leq}(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t)}{J_{eq}} \quad (21)$$

También se reemplaza  $\omega_r$  en (16a) y (16b) por (13b):

$$\frac{di_{qs}^r}{dt}(t) = \frac{v_{qs}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) - [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot P_p \cdot \omega_m(t)}{L_q} \quad (22a)$$

$$\frac{di_{ds}^r}{dt}(t) = \frac{v_{ds}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t)}{L_d} \quad (22b)$$

$$\frac{di_{0s}^r}{dt}(t) = \frac{v_{0s}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{0s}^r(t)}{L_{ls}} \quad (22c)$$

$$(22d)$$

El modelo global queda expresado por (3b), (21), (22a), (22d), (16c) y (20b):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\theta_m}{dt}(t) = \omega_m(t) \\ \frac{d\omega_m}{dt}(t) = \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^r(t) - T_{leq}(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t)}{J_{eq}} \\ \frac{di_{qs}^r}{dt}(t) = \frac{v_{qs}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) - [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot P_p \cdot \omega_m(t)}{L_q} \\ \frac{di_{ds}^r}{dt}(t) = \frac{v_{ds}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t)}{L_d} \\ \frac{di_{0s}^r}{dt}(t) = \frac{v_{0s}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{0s}^r(t)}{L_{ls}} \\ \frac{dT_s^\circ}{dt}(t) = \frac{\frac{3}{2} \cdot R_s \cdot (i_{qs}^r)^2(t) + i_{ds}^r{}^2(t) + i_{0s}^r{}^2(t) - \frac{T_s^\circ(t) - T_{amb}^\circ(t)}{R_{ts-amb}}}{C_{ts}} \end{array} \right. \quad (23a)$$

La salida es:

$$y(t) = \theta_l(t) \quad (23b)$$

En forma matricial y considerando la no linealidad de  $T_l$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{d\theta_m}{dt}(t) \\ \frac{d\omega_m}{dt}(t) \\ \frac{di_{qs}^r}{dt}(t) \\ \frac{di_{ds}^r}{dt}(t) \\ \frac{di_{0s}^r}{dt}(t) \\ \frac{dT_s^\circ}{dt}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r}{J_{eq}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{P_p \cdot \lambda_m^r}{L_q} & -\frac{R_s(t)}{L_q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{R_s(t)}{L_d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_s(t)}{L_{ls}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_{ts-amb} \cdot C_{ts}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ i_{ds}^r(t) \\ i_{0s}^r(t) \\ T_s^\circ(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t) \cdot i_{qs}^r(t)}{J_{eq}} \\ -\frac{L_d \cdot i_{ds}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t)}{L_q} \\ \frac{L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t)}{L_d} \\ 0 \\ \frac{\frac{3}{2} \cdot R_s \cdot (i_{qs}^r)^2(t) + i_{ds}^r{}^2(t) + i_{0s}^r{}^2(t)}{C_{ts}} \end{bmatrix} \quad (23c)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_q} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_d} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{0s}^r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{r \cdot J_{eq}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_{ts-amb} \cdot C_{ts}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_l(t) \\ T_{amb}(t) \end{bmatrix}$$

La salida queda:

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ i_{ds}^r(t) \\ i_{0s}^r(t) \\ T_s^o(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

En la matriz de estado se han separado las no linealidades por el producto de variables de estado. Además, las variables de entrada están separadas en variables manipuladas y variables de perturbación, ya que con el controlador solo se puede influir en las variables manipuladas y no en las de perturbación.

## II) Diagrama de bloques de estado

El diagrama de bloques del modelo global, resulta de la unión de los diagramas de bloques de los subsistemas trabajados. Debido al gran tamaño del mismo, se recurre a encapsular los subsistemas. Y, además, se incorporan las transformaciones de Park virtuales para acceso físico en bornes a las tensiones y corrientes de fase reales de estator (coordenadas abcs).

```

1 function [fa,fb,fc] = TI_Park(fq,fd,f0,theta_r)
2 f = [ cos(theta_r)           sin(theta_r)           1;
3 cos(theta_r - (2*pi)/3) sin(theta_r - (2*pi)/3)    1;
4 cos(theta_r + (2*pi)/3) sin(theta_r + (2*pi)/3)    1];
5
6 resultados = f*[fq;fd;f0];
7 fa = resultados(1);
8 fb = resultados(2);
9 fc = resultados(3);

```

Código de la Transformación de Park directa.

```

1 function [fa,fb,fc] = TI_Park(fq,fd,f0,theta)
2 f = [           cos(theta)           sin(theta)           1;
3       cos(theta - (2*pi)/3) sin(theta - (2*pi)/3)    1;
4       cos(theta + (2*pi)/3) sin(theta + (2*pi)/3)    1];
5
6 resultados = f*[fq;fd;f0];
7 fa = resultados(1);
8 fb = resultados(2);
9 fc = resultados(3);

```

Código de la Transformación de Park inversa.

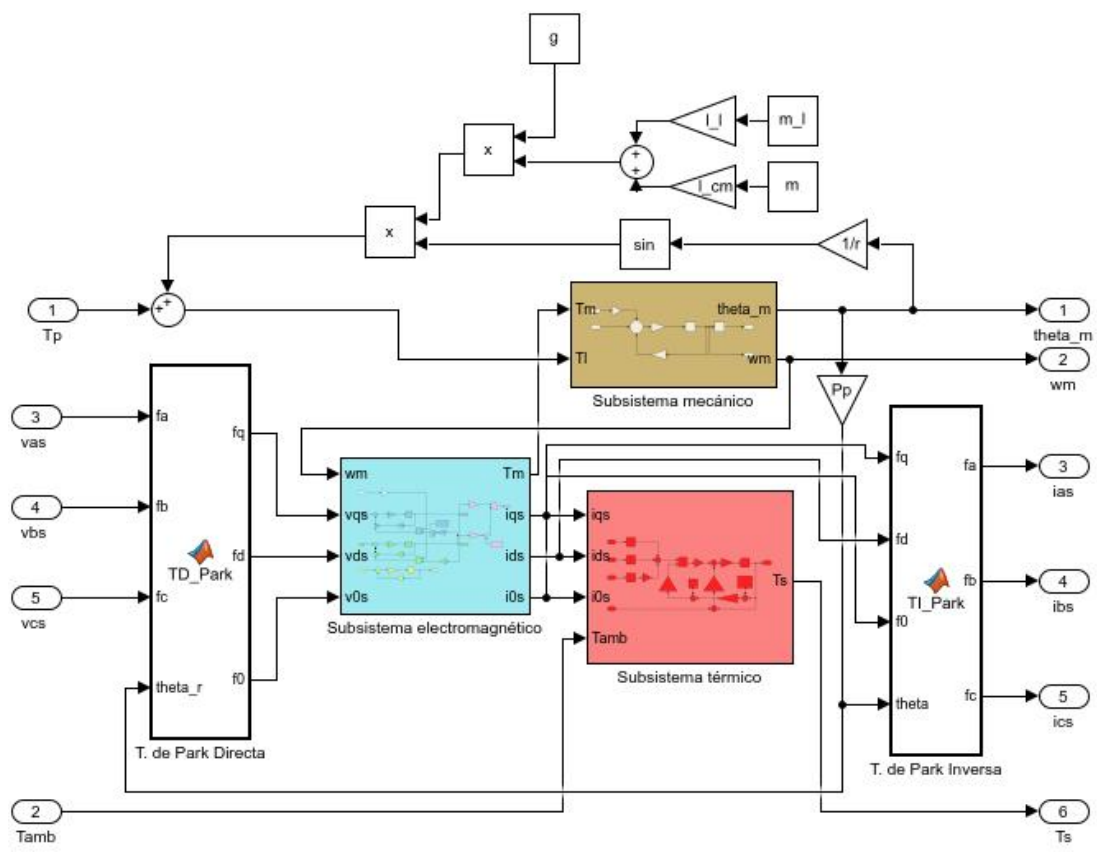


Figura 4: Diagrama de bloques del modelo global NL.

**b) Modelo global linealizado con parámetros variables**

Hasta ahora hemos representado al modelo global con campos vectoriales no lineales, dependientes del vector de estados y de las entradas manipulables y perturbadoras de nuestro sistema. Ahora procederemos a representar al sistema con un modelo global linealizado de parámetros variables, que nos va a llevar a simplificar el control. Para esto utilizaremos la Linealización Jacobiana. Es importante destacar que vamos a asumir pequeñas desviaciones alrededor de los puntos de operación, por lo que podemos hacer una aproximación lineal con serie de Taylor truncada al primer orden.

Comenzamos por definir los puntos de equilibrio de nuestro sistema no lineal. Para un sistema lineal tendremos un único punto de equilibrio en el origen del espacio de estados, pero en nuestro caso, al ser no lineal, tendremos varios. Entonces si nuestro sistema global no lineal está definido de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C \cdot x(t) \end{cases} \tag{24}$$

Donde  $f(x(t), u(t), t)$  es un campo vectorial no lineal.

Los puntos de equilibrio del sistema no lineal quedan definidos por ecuaciones algebraicas dadas por un vector  $\dot{x}(t) = cte$ . Podríamos hacer  $\dot{x}(t) = 0$ , pero nos interesa más el caso más general en el que tenemos equilibrio con velocidad constante de rotación del eje motor.

**I) Espacio de operación global NL (cuasi-estacionario)**

No nos interesa trabajar únicamente alrededor de un punto de operación, sino en un espacio de puntos de operación con pequeñas variaciones alrededor de cada uno. Por esta razón haremos una descomposición del vector de estados, que va a estar dado por la suma de un vector del conjunto de puntos de operación y otro vector que representa la variabilidad alrededor de ese punto de operación. Consideramos que el vector correspondiente al conjunto de puntos de operación varía relativamente lento, de ahí que podamos hacer las siguientes aproximaciones para describir a su derivada:

$$\left\{ \begin{array}{l} cte \approx \frac{d\theta_{mo}}{dt} = \omega_{mo} \\ 0 \approx \frac{d\omega_{mo}}{dt} = \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m'^r + (L_d - L_q) \cdot i_{dso}^r] \cdot i_{qso}^r - T_{leqo} - b_{eq} \cdot \omega_{mo}}{J_{eq}} \\ 0 \approx \frac{di_{qso}^r}{dt} = \frac{v_{qso}^r - R_{so} \cdot i_{qso}^r - [\lambda_m'^r + L_d \cdot i_{dso}^r] \cdot P_p \cdot \omega_{mo}}{L_q} \\ 0 \approx \frac{di_{dso}^r}{dt} = \frac{v_{dso}^r - R_{so} \cdot i_{dso}^r + L_q \cdot P_p \cdot \omega_{mo} \cdot i_{qso}^r}{L_d} \\ 0 \approx \frac{di_{oso}}{dt} = \frac{v_{oso} - R_{so} \cdot i_{oso}}{L_{ls}} \\ 0 \approx \frac{dT_{so}^\circ}{dt} = \frac{\frac{3}{2} \cdot R_{so} \cdot (i_{qso}^r)^2 + i_{dso}^r{}^2 + i_{oso}^r{}^2) - \frac{T_{so}^\circ - T_{amb}^\circ}{R_{ts-amb}}}{C_{ts}} \end{array} \right. \quad (25)$$

Las aproximaciones descritas anteriormente son expresiones algebraicas. El vector que representa el conjunto de puntos de operación tiene condiciones iniciales genéricas dadas por  $X_o(0) = x_o$ .

## II) Modelo dinámico LPV (pequeñas variaciones locales)

Para facilitar nuestro entendimiento de la solución que encontraremos representaremos a la entrada conocida  $T_{leq}(t)$  en su forma desagregada  $T_{leq}(t) = \frac{k_l}{r} \cdot \sin(\frac{\theta_m(t)}{r}) + \frac{T_d(t)}{r}$ . Esta perturbación depende entonces de la variable de estado  $\theta_m(t)$  y de la entrada con forma de escalón  $T_d(t)$ , es importante tener esto en cuenta en el momento de hacer las derivadas parciales del campo vectorial no lineal  $f$ . Las pequeñas variaciones locales más rápidas alrededor del punto de operación se consiguen mediante la expresión:

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} \approx \left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_o (t) \cdot \Delta x(t) + \left. \frac{\delta f}{\delta u} \right|_o (t) \cdot \Delta u(t) \quad (26)$$

A continuación se presentan el sistema de ecuaciones del modelo LPV y la forma matricial de este con orientación horizontal para que los elementos se visualicen correctamente.

Las ecuaciones que definen el modelo dinámico lineal de parámetros variables, que va a ser un conjunto de modelos LTI, son:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\Delta\theta_m}{dt} &= \Delta\omega_m(t) \\ \frac{d\Delta\omega_m}{dt} &= \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [(\lambda_m' \cdot i_{ds}^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r) \Delta i_{qs}^r(t) + (L_d - L_q) \cdot i_{qs}^r \cdot \Delta i_{ds}^r(t)] - \frac{\Delta T_d(t)}{r} - b_{eq} \cdot \Delta\omega_m(t) - \frac{k_i}{r^2} \cdot \cos\left(\frac{\theta_{m\alpha}}{r}\right) \cdot \Delta\theta_m(t)}{J_{eq}} \\ \frac{d\Delta i_{qs}^r}{dt} &= \frac{\Delta v_{qs}^r(t) - R_s(t_o) \cdot \Delta i_{qs}^r(t) - P_p \cdot [\Delta\omega_m(t) \cdot (L_d \cdot i_{ds}^r + \lambda_m' \cdot i_{qs}^r) + L_d \cdot \omega_{mo} \cdot \Delta i_{ds}^r(t)] - R_{sref} \cdot \alpha_{cu} \cdot \Delta T_s^o(t) \cdot i_{ds}^r}{L_q} \\ \frac{d\Delta i_{ds}^r}{dt} &= \frac{\Delta v_{ds}^r(t) - R_s(t_o) \cdot \Delta i_{ds}^r(t) + L_q \cdot P_p \cdot [\omega_{mo} \cdot \Delta i_{qs}^r(t) + \Delta\omega_m(t) \cdot i_{qs}^r] - R_{sref} \cdot \alpha_{cu} \cdot \Delta T_s^o(t) \cdot i_{ds}^r}{L_d} \\ \frac{d\Delta i_{os}^r}{dt} &= \frac{\Delta v_{os}^r(t) - R_s(t_o) \cdot \Delta i_{os}^r(t) - R_{sref} \cdot \Delta T_s^o(t) \cdot \alpha_{cu}}{L_{ls}} \\ \frac{d\Delta T_s^o}{dt} &= \frac{\frac{3}{2} \cdot R_s(t_o) \cdot (2 \cdot i_{qso}^r \Delta i_{qs}^r + 2 \cdot i_{ds}^r \Delta i_{ds}^r + 2 \cdot \Delta i_{os}^r) - \frac{\Delta T_s^o(t_o) - \Delta T_{amb}^o(t)}{R_{ts-amb}} + \frac{3}{2} \cdot R_{sref} \cdot \Delta T_s^o(t_o) \cdot \alpha_{cu} \cdot [i_{qso}^r \cdot i_{ds}^r + 2 \cdot i_{os}^r]}{C_{ts}} \end{aligned} \right. \quad (27)$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\Delta\theta_m}{dt} \\ \frac{d\Delta\omega_m}{dt} \\ \frac{d\Delta i_{qs}^r}{dt} \\ \frac{d\Delta i_{ds}^r}{dt} \\ \frac{d\Delta i_{os}^r}{dt} \\ \frac{d\Delta T_s^o}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_i}{r^2} \cos\left(\frac{\theta_{m\alpha}}{r}\right) & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3}{2} P_p (\lambda_m' + (L_d - L_q) i_{ds}^r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{J_{eq}}{L_q (L_d i_{qso}^r + \lambda_m' i_{qs}^r)} & -\frac{R_s(t_o)}{L_q} & \frac{3}{2} P_p (L_d - L_q) i_{qs}^r & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_q P_p i_{qso}^r}{L_d} & \frac{L_q P_p \omega_{mo}}{L_d} & -\frac{L_q}{L_d} \frac{P_p \omega_{mo}}{L_q} & 0 & -\frac{R_{sref} \alpha_{cu} i_{ds}^r}{L_q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_s(t_o)}{L_{ls}} & -\frac{R_{sref} \alpha_{cu}}{L_{ls}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \frac{R_s(t_o) 2 i_{qso}^r}{C_{ts}} & \frac{3}{2} \frac{R_s(t_o) 2 i_{ds}^r}{C_{ts}} & \frac{3 R_s(t_o)}{C_{ts}} & -\frac{1}{R_{ts-amb}} + \frac{3}{2} \frac{R_{sref} \alpha_{cu} (i_{qso}^r i_{ds}^r + 2 i_{os}^r)}{C_{ts}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_m(t) \\ \Delta\omega_m(t) \\ \Delta i_{qs}^r(t) \\ \Delta i_{ds}^r(t) \\ \Delta i_{os}^r(t) \\ \Delta T_s^o(t) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_d} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_{ts-amb} \cdot C_{ts}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta v_{qs}^r(t) \\ \Delta v_{ds}^r(t) \\ \Delta v_{os}^r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta T_d(t) \\ \Delta T_{amb}^o(t) \end{bmatrix}$$

### c) Modelo simplificado lineal invariante (LTI) equivalente

A continuación, se procede a linearizar el sistema a partir del modelo original no lineal, utilizando la metodología de linealización por realimentación no lineal. Esta técnica de control para sistemas no lineales tiene como objetivos principales dos cosas para la máquina síncrona de imanes permanentes: la linearización del sistema y el desacoplamiento de los ejes q y d. Esta técnica nos permitirá obtener un Modelo Lineal Invariante en el Tiempo (LTI) equivalente, lo cual facilitará el control de la máquina síncrona de imanes permanentes de manera similar a una máquina de corriente continua.

Para simplificar el modelo, no se considerará el acoplamiento no lineal con el subsistema térmico. En su lugar, solo se tomará en cuenta la dinámica lineal de dicho subsistema.

Se impone la siguiente simplificación:

$$i_{ds}^r(t) = 0 \therefore \frac{di_{ds}^r}{dt}(t) = 0 \quad (28a)$$

$$i_n(t) = i_{as}(t) + i_{bs}(t) + i_{cs}(t) = 0 \quad \text{por estar conectado en estrella} \quad (28b)$$

$$i_{0s}(t) = \frac{i_{as}(t) + i_{bs}(t) + i_{cs}(t)}{3} = 0 \therefore \frac{di_{0s}^r}{dt}(t) = 0 \quad (28c)$$

$$v_{as}(t) + v_{bs}(t) + v_{cs}(t) = 0 \quad \text{por ser sistema trifásico simétrico} \quad (28d)$$

$$\text{Por ende: } v_{0s}(t) = \frac{v_{as}(t) + v_{bs}(t) + v_{cs}(t)}{3} = 0 \quad (28e)$$

$$R_s = cte \quad (28f)$$

Esta imposición, elimina los acoplamientos cruzados con el eje d, y elimina el producto de variables de estado entre sí, por lo que el modelo global se linealiza. Así se pueden obtener las matrices A de estado, B de entrada, y C de salida, independientes de las variables de estado; o sea, invariantes en el tiempo, ya que sus elementos se conformarán solamente por constantes del sistema.

### I) Ecuaciones vectoriales/matriciales LTI de estado y de salida

Teniendo en cuenta lo anterior:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\theta_m}{dt}(t) = \omega_m(t) \\ \frac{d\omega_m}{dt}(t) = \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m'^r \cdot i_{qs}^r(t) - T_{leq}(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t)}{J_{eq}} \\ \frac{di_{qs}^r}{dt}(t) = \frac{v_{qs}^r(t) - R_s \cdot i_{qs}^r(t) - \lambda_m'^r \cdot P_p \cdot \omega_m(t)}{L_q} \\ \frac{di_{ds}^r}{dt}(t) = 0 = \frac{v_{ds}^r(t) - R_s \cdot 0 + L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t)}{L_d} \\ \frac{di_{0s}^r}{dt}(t) = 0 \\ \frac{dT_s^\circ}{dt}(t) = \frac{\frac{3}{2} \cdot R_s \cdot i_{qs}^r{}^2(t) - \frac{T_s^\circ(t) - T_{amb}^\circ(t)}{R_{ts-amb}}}{C_{ts}} \end{array} \right. \quad (29a)$$

O bien:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\theta_m}{dt}(t) = \omega_m(t) \\ \frac{d\omega_m}{dt}(t) = \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m'^r \cdot i_{qs}^r(t) - T_{leq}(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t)}{J_{eq}} \\ \frac{di_{qs}^r}{dt}(t) = \frac{v_{qs}^r(t) - R_s \cdot i_{qs}^r(t) - \lambda_m'^r \cdot P_p \cdot \omega_m(t)}{L_q} \\ \frac{dT_s^\circ}{dt}(t) = \frac{P_{sperd}^*(t) - \frac{T_s^\circ(t) - T_{amb}^\circ(t)}{R_{ts-amb}}}{C_{ts}} \end{array} \right. \quad (29b)$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\theta_m}{dt}(t) \\ \frac{d\omega_m}{dt}(t) \\ \frac{di_{qs}^r}{dt}(t) \\ \frac{dT_s^\circ}{dt}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m'^r}{2 \cdot J_{eq}} & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda_m'^r \cdot P_p}{L_q} & -\frac{R_s(t)}{L_q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_{ts-amb} \cdot C_{ts}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ T_s^\circ(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_q} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot v_{qs}^r(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r \cdot J_{eq}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_{ts-amb}} & \frac{1}{C_{ts}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ T_l(t) \\ T_{amb}^\circ(t) \\ P_{sperd}^*(t) \end{bmatrix} \quad (29c)$$

La salida queda:

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ T_s^o(t) \end{bmatrix} \quad (29d)$$

En donde, cabe destacar que  $P_{sperd}^*(t)$  es una no linealidad, debido a que depende del cuadrado de la corriente  $i_{qs}^r(t)$ . Por tanto, a fin de poder incluir el subsistema térmico en el modelo LTI, además lo que se hace es considerar a  $P_{sperd}^*(t)$  como otra perturbación; obteniendo así la dinámica lineal del sistema térmico.

## II) Diagrama de bloques de estado

A continuación, se muestra el diagrama de bloques de estado (en forma desagregada) del modelo simplificado LTI equivalente, construido a partir de las expresiones de (29b):

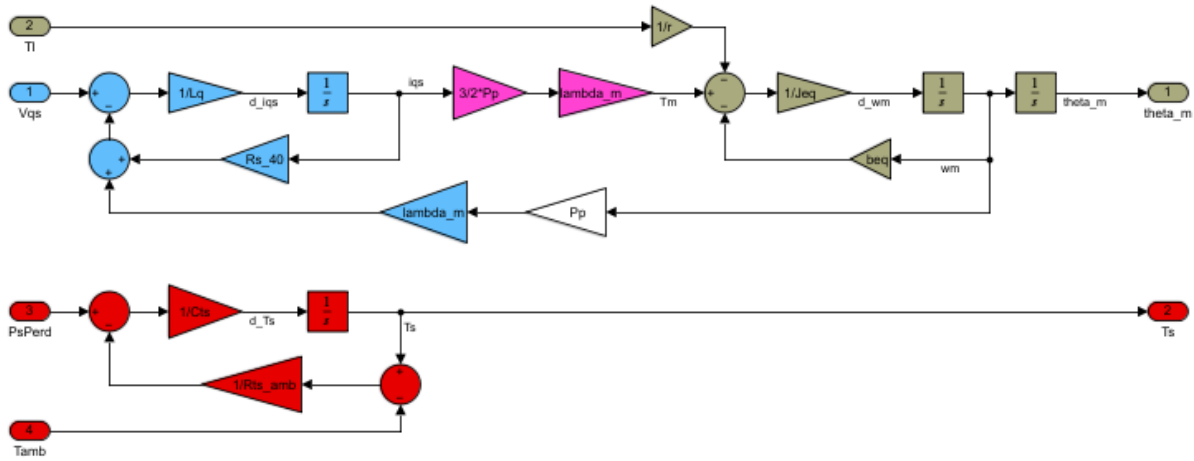


Figura 5: Diagrama de bloques del Modelo simplificado LTI equivalente.

## III) Determinación de la Restricción o Ley de Control mínima

Al especificar  $i_{ds}^r(t) = 0$  (con  $i_{ds}^r(0) = 0$ ), obtenemos de (15b):

$$v_{ds}^r(t) = -P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t) \quad (30a)$$

Es decir, se debe lograr que como señal de control  $v_{ds}^r(t)$ , el controlador brinde a cada instante el valor correspondiente a esta expresión (30a). El signo de la ley de control mínima debe ser negativo, logrando así compensar la no linealidad del producto  $\omega_m(t) \cdot i_{qs}^r(t)$ , y logrando eliminar el acoplamiento cruzado del eje d con el eje q.

Y, para cumplir con dicha expresión (restricción o ley de control mínima), es necesario medir las variables de estado  $\omega_m(t)$  e  $i_{qs}^r(t)$  para poder realimentarlas en el sistema. Cabe mencionar que dicha realimentación es no lineal ya que consiste en el producto de ambas variables de estado, y por ello el nombre de la técnica de linealización (no lineal) utilizada. Además, la señal de control  $v_{ds}^r(t)$  se transmite desde el controlador al sistema físico mediante la transformación inversa y directa de Park.

Aplicando la transformada inversa de Park se contempla que los valores de tensiones y corrientes en coordenadas abc serán:

$$\begin{bmatrix} v_{as}(t) \\ v_{bs}(t) \\ v_{cs}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \cdot \cos(\theta) + (-P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot \sin(\theta)) \\ v_{qs}^r(t) \cdot \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) + (-P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot \sin(\theta - \frac{2\pi}{3})) \\ v_{qs}^r(t) \cdot \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) + (-P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot \sin(\theta + \frac{2\pi}{3})) \end{bmatrix} \quad (30b)$$

$$\begin{bmatrix} i_{as}(t) \\ i_{bs}(t) \\ i_{cs}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{qs}^r(t) \cdot \cos(\theta) \\ i_{qs}^r(t) \cdot \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ i_{qs}^r(t) \cdot \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \quad (30c)$$



#### IV) Implementación en el modelo global NL completo

Para que la ley de control previamente mencionada sea eficiente, se debe poder actuar sobre el sistema sin ningún tipo de acoplamiento que interfiera en el control. En este caso se considera el desacoplamiento y linealización por realimentación directa no lineal de estado parcial. El sistema completo se puede modelar como se muestra en la Figura 6.

Se puede diferenciar el sistema físico (planta) del controlador, ya que el sistema físico está integrado en un subsistema (de color verde en la figura). El desacoplamiento está identificado con un área de color gris en el diagrama de bloques.

Los límites entre el sistema físico y el sistema de control están definidos por el inversor (modulador de tensión) y los sensores. Este modulador de tensión trifásico se representa en el esquema como una ganancia unitaria por cada fase, ya que se considera ideal. Los sensores de realimentación de variables de estado (de posición, corrientes y temperatura) se toman como ganancias unitarias, considerando que son sensores ideales, es decir, con ancho de banda infinito.

Es importante señalar que las dos transformaciones de Park son reales respecto a las otras dos transformaciones de Park del sistema físico, que son virtuales. Las transformadas de Park del sistema de control son reales, ya que el control se implementa actuando sobre  $i_{qd0s}^r(t)$ , pero los valores reales (medidos en bornes) son los valores de las fases a, b y c.

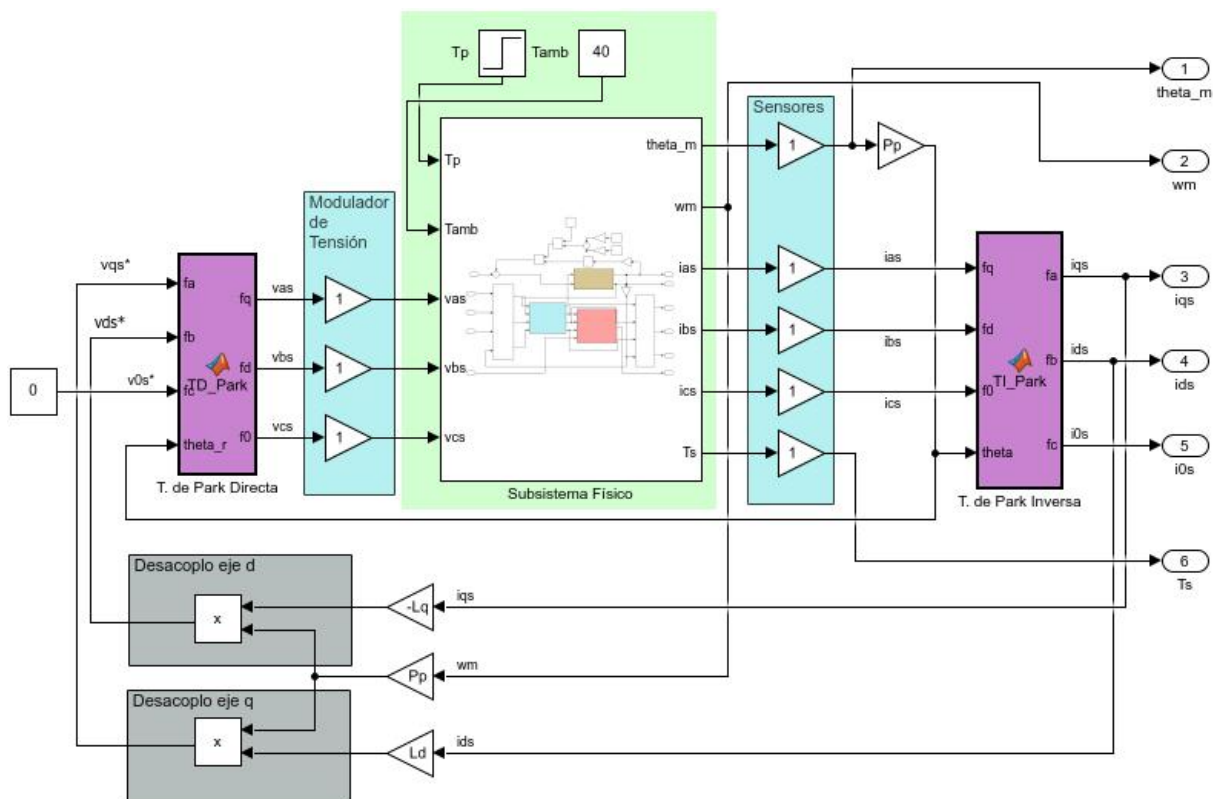


Figura 6: Modelo NL global con desacoplamiento y linealización por realimentación directa no lineal de estado parcial.

#### V) Modelo de la dinámica residual equivalente

Al aplicar la ley de control mínima a la tensión  $v_{ds}^r(t)$  dada por la ecuación (15b), tenemos como resultado la siguiente ecuación diferencial homogénea de primer orden:

$$0 = R_s \cdot i_{ds}^r(t) + L_d \cdot \frac{di_{ds}^r}{dt}(t) \quad (31)$$

Pasamos al dominio de la frecuencia para encontrar el polo:

$$0 = R_s \cdot I_{ds}^r(s) + L_d \cdot s \cdot I_{ds}^r(s) \quad (32)$$

$$0 = I_{ds}^r(s) \cdot (R_s + L_d \cdot s) \quad (33)$$

El polo resulta:

$$s = -\frac{R_s}{L_d} \quad (34)$$

Se puede observar que el polo, al tener una componente real negativa, indica que el sistema es estable. Esta estabilidad se debe a la naturaleza disipativa de  $R_s$ . Además, dado que  $R_s$  y  $L_d$  son parámetros del sistema físico, este polo permanece fijo.

Por lo tanto, si se tuviera un estado inicial de  $i_{ds}^r(0) \neq 0$ , al ser el sistema estable y autónomo (es decir, sin una entrada de excitación forzada),  $i_{ds}^r(0)$  disminuirá a cero con una tasa de decaimiento que depende de la constante de tiempo dada por (34). Esto significa que cuanto mayor sea  $R_s$ , más rápido será el decaimiento. Esto se debe a que, cuanto más lejos están los polos del origen, menor es la constante de tiempo y, por lo tanto, el sistema responde más rápidamente, y viceversa.

La solución de la ecuación (31) es:

$$i_{ds}^r(t) = i_{ds}^r(0) \cdot e^{-\frac{R_s}{L_d} \cdot t} \quad (35)$$

Esta es una función exponencial decreciente, que se puede observar que decrece muy rápidamente a cero según el factor  $-\frac{R_s}{L_d}$ . Por lo que, debido a que  $i_{ds}^r(t)$  se hace 0 rápidamente, entonces se puede despreciar el acoplamiento residual NL sin error significativo en régimen forzado, es decir que se puede no considerar en las ecuaciones.

En los casos en los que  $i_{ds(0)}^r \neq 0$  tenemos un acoplamiento residual no lineal con el eje q dado por el último término de la ecuación en el eje de cuadratura  $v_{qs}^r(t) = R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) + L_q \cdot \frac{di_{qs}^r}{dt}(t) + [\lambda_m'^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot \omega_r(t)$ . En régimen forzado, sin embargo, éste término es despreciable.

## VI) Restricción o Ley de Control complementaria mínima en el eje q

De la ecuación (15a):  $v_{qs}^r(t) = R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) + L_q \cdot \frac{di_{qs}^r}{dt}(t) + [\lambda_m'^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot \omega_r(t)$

Se busca compensar los efectos inductivos no lineales debido al acoplamiento del eje directo para que al aplicar la ley de control mínima con  $i_{ds}^r(t) \neq 0$  ambos ejes, directo y de cuadratura queden desacoplados en todo momento, conduciendo a la ley de control complementaria mínima (en el eje q):

$$v_{qs}^r(t) = v_{qs}^{r*}(t) + L_d \cdot i_{ds}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \quad (31a)$$

Donde  $v_{qs}^{r*}(t)$  es equivalente a la tensión aplicada y el término  $L_d \cdot i_{ds}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t)$  corresponde al desacoplamiento del eje directo por realimentación no lineal. Entonces obtenemos el modelo LTI aumentado:

$$\begin{cases} \frac{d\theta_m}{dt}(t) = \omega_m(t) \\ \frac{d\omega_m}{dt}(t) = \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m'^r \cdot i_{qs}^r(t) - T_{leq}(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t)}{J_{eq}} \\ \frac{di_{qs}^r}{dt}(t) = \frac{v_{qs}^r(t) - R_s \cdot i_{qs}^r(t) - \lambda_m'^r \cdot P_p \cdot \omega_m(t)}{L_q} \\ \frac{di_{ds}^r}{dt}(t) = -\frac{R_s}{L_d} \cdot i_{ds}^r(t) \\ \frac{dT_s^\circ}{dt}(t) = \frac{P_{sperd}^*(t) - \frac{T_s^\circ(t) - T_{amb}^\circ(t)}{R_{ts-amb}}}{C_{ts}} \end{cases} \quad (31b)$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\theta_m(t)}{dt} \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} \\ \frac{dT_s^\circ(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m'^r}{J_{eq}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda_m'^r \cdot P_p}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{R_s}{L_d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{T_s^\circ(t)}{R_{ts-amb} \cdot C_{ts}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ i_{ds}^r(t) \\ T_s^\circ(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_q} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot v_{qs}^r(t) \quad (32)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r \cdot J_{eq}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_{ts-amb} \cdot C_{ts}} & \frac{1}{C_{ts}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ T_l(t) \\ 0 \\ T_{amb}^\circ(t) \\ P_{sperd}^*(t) \end{bmatrix} \quad (33)$$

El diagrama de bloques queda determinado de la siguiente manera:

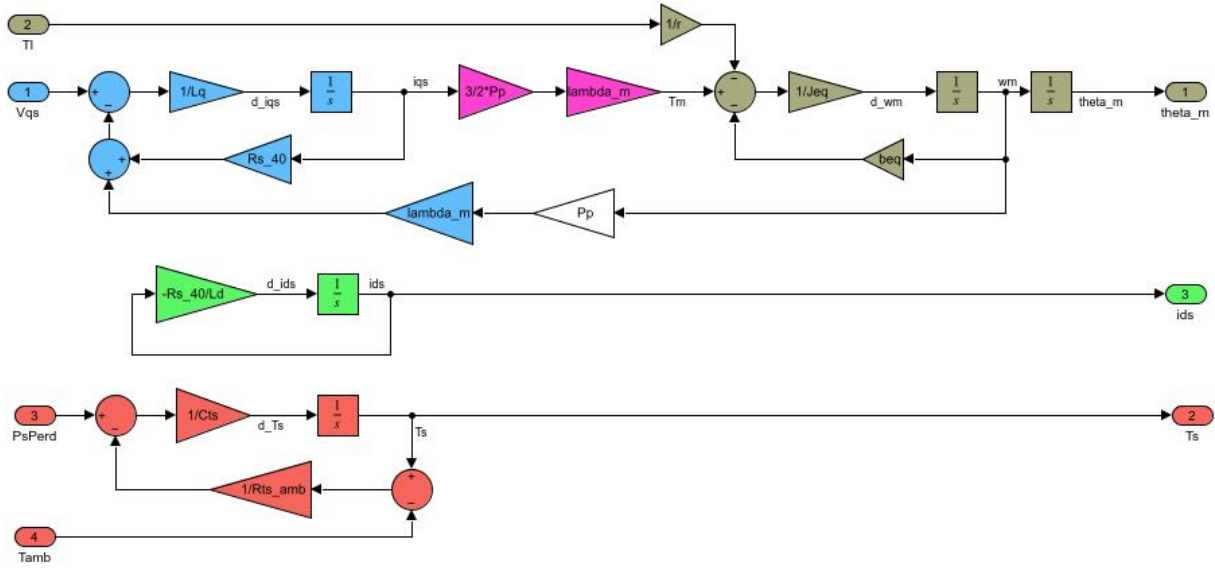


Figura 7: Diagrama de bloques del Modelo simplificado LTI equivalente aumentado.

#### d) Comparación del modelo dinámico global LPV vs el modelo dinámico LTI equivalente aumentado

El modelo LPV con  $i_{ds}^r(t) \neq 0$  representa mejor al sistema real ya que contempla sus no linealidades mientras que el modelo LTI logrado con la estrategia por control vectorial de campo orientado haciendo a  $i_{ds}^r(t) = 0$  es mucho más simple. Si en el modelo LPV condicionamos con  $i_{ds}^r(t) = 0$  (de manera que  $i_{dso}^r \equiv 0$  y no hay pequeñas variaciones alrededor de éste valor dadas por  $\Delta i_{ds}^r(t)$ ), teniendo en cuenta también que el sistema está eléctricamente equilibrado, se obtienen las anulaciones de términos en rojo sobre el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Delta\theta_m}{dt}(t) = \Delta\omega_m(t) \\ \frac{d\Delta\omega_m}{dt}(t) = \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [(\lambda_m'^r + (L_d - L_q) \cdot i_{dso}^r) \Delta i_{qs}^r(t) + (L_d - L_q) \cdot i_{qso}^r \cdot \Delta i_{ds}^r(t)] - \frac{\Delta T_d(t)}{r} - b_{eq} \cdot \Delta\omega_m(t) - \frac{k_l}{r^2} \cdot \cos(\frac{\theta_{mo}}{r}) \cdot \Delta\theta_m(t)}{J_{eq}} \\ \frac{d\Delta i_{qs}^r}{dt}(t) = \frac{\Delta v_{qs}^r(t) - R_s(t_o) \cdot \Delta i_{qs}^r(t) - P_p \cdot [\Delta\omega_m(t) \cdot (L_d \cdot i_{dso}^r + \lambda_m'^r) + L_d \cdot \omega_{mo} \cdot \Delta i_{ds}^r(t)] - R_{sref} \cdot \alpha_{cu} \cdot \Delta T_s^o(t) \cdot i_{dso}^r}{L_q} \\ \frac{d\Delta i_{ds}^r}{dt}(t) = \frac{\Delta v_{ds}^r(t) - R_s(t_o) \cdot \Delta i_{ds}^r(t) + L_q \cdot P_p \cdot [\omega_{mo} \cdot \Delta i_{qs}^r(t) + \Delta\omega_m(t) \cdot i_{qso}^r] - R_{sref} \cdot \alpha_{cu} \cdot \Delta T_s^o(t) \cdot i_{dso}^r}{L_d} \\ \frac{d\Delta i_{os}^r}{dt}(t) = \frac{\Delta v_{os}^r(t) - R_s(t_o) \cdot \Delta i_{os}^r(t) - R_{sref} \cdot \Delta T_s^o(t) \cdot \alpha_{cu}}{L_{ls}} \\ \frac{d\Delta T_s^o}{dt}(t) = \frac{\frac{3}{2} \cdot R_s(t_o) \cdot (2 \cdot i_{qso}^r \Delta i_{qs}^r(t) + 2 \cdot i_{dso}^r \cdot \Delta i_{ds}^r(t) + 2 \cdot \Delta i_{os}^r(t)) - \frac{\Delta T_s^o(t) - \Delta T_{amb}^o(t)}{R_{ts-amb}} + \frac{3}{2} \cdot R_{sref} \cdot \Delta T_s^o(t) \cdot \alpha_{cu} \cdot [i_{qso}^r{}^2 + i_{dso}^r{}^2 + 2 \cdot i_{os}^r(t)]}{C_{ts}} \end{array} \right. \quad (34)$$

Descartando los términos resaltados, el sistema de ecuaciones LPV resulta igual al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Delta\theta_m}{dt}(t) = \Delta\omega_m(t) \\ \frac{d\Delta\omega_m}{dt}(t) = \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m'^r \cdot \Delta i_{qs}^r(t) - \frac{\Delta T_d(t)}{r} - b_{eq} \cdot \Delta\omega_m(t) - \frac{k_l}{r^2} \cdot \cos(\frac{\theta_{mo}}{r}) \cdot \Delta\theta_m(t)}{J_{eq}} \\ \frac{d\Delta i_{qs}^r}{dt}(t) = \frac{\Delta v_{qs}^r(t) - R_s(t_o) \cdot \Delta i_{qs}^r(t) - P_p \cdot [\Delta\omega_m(t) \cdot \lambda_m'^r]}{L_q} \\ \frac{d\Delta T_s^o}{dt}(t) = \frac{\frac{3}{2} \cdot R_s(t_o) \cdot (2 \cdot i_{qso}^r \Delta i_{qs}^r(t) + 2 \cdot \Delta i_{os}^r(t)) - \frac{\Delta T_s^o(t) - \Delta T_{amb}^o(t)}{R_{ts-amb}} + \frac{3}{2} \cdot R_{sref} \cdot \Delta T_s^o(t) \cdot \alpha_{cu} \cdot i_{qso}^r{}^2}{C_{ts}} \end{array} \right. \quad (35)$$

Estas ecuaciones representan un caso particular del modelo LPV en el que se fuerza a la corriente  $i_{ds}^r(t)$  a ser igual a cero, lo que lo hace equivalente al modelo LTI equivalente aumentado. Debemos recordar que  $T_{leq}(t) = \frac{T_d(t) + k_l \cdot \sin(\theta_m(t))}{r}$  y que el modelo LPV es sólo una aproximación lineal al modelo global

no lineal alrededor de un punto de operación. Evaluando los modelos para otros puntos de operación de  $i_{ds}^r(t)$  podemos ver que el cambio de este valor afecta a la velocidad  $\omega_m(t)$  y al torque motor  $T_m(t)$ . Con las siguientes expresiones podemos ver el impacto de la variación de  $i_{ds}^r(t)$ :

$$T_m(t) = \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m'^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^r(t) \quad (36)$$

$$\omega_m(t) = \frac{R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) - v_{ds}^r(t)}{P_p \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t)} \quad (37)$$

Considerando que  $v_{ds}^r(t) = R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + L_d \cdot \frac{di_{ds}^r}{dt}(t) - L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot \omega_m(t) \cdot P_p$ , entonces sabemos que  $v_{ds}^r(t) > R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t)$ . Evaluamos los dos escenarios siguientes:

- $i_{ds}^r(t) > 0 \rightarrow$  Aumenta el torque motor, mientras que la velocidad disminuye.
- $i_{ds}^r(t) < 0 \rightarrow$  Disminuye el torque motor, mientras que la velocidad aumenta.

### e) Funciones de Transferencia para el modelo LTI equivalente aumentado

Para poder analizar la estabilidad del sistema, se puede realizar un análisis de los polos a lazo abierto del mismo. Partiendo del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt}(t) = \omega_m(t) \\ \frac{d\omega}{dt}(t) = \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m'^r \cdot i_{qs}^r(t) - T_{leq}(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t)}{J_{eq}} \\ \frac{di_{qs}^r}{dt}(t) = \frac{\lambda_m'^r \cdot P_p \cdot \omega_m(t) - R_s \cdot i_{qs}^r(t) + v_{qs}^r(t)}{L_q} \\ \frac{di_{ds}^r}{dt}(t) = \frac{-R_s \cdot i_{qs}^r(t)}{L_d} \end{cases} \quad (38a)$$

Considerando condiciones iniciales nulas, aplicamos la transformada de Laplace a cada una de las ecuaciones:

$$\begin{cases} s \cdot \Theta_m(s) = \Omega_m(s) \\ s \cdot \Omega_m(s) = \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m'^r \cdot I_{qs}^r(s) - T_{leq}(s) - b_{eq} \cdot \Omega_m(s)}{J_{eq}} \\ s \cdot I_{qs}^r(s) = \frac{V_{qs}^r(s) - \lambda_m'^r \cdot P_p \cdot \Omega_m(s) - R_s \cdot I_{qs}^r(s)}{L_q} \\ s \cdot I_{ds}^r(s) = \frac{-R_s \cdot I_{qs}^r(s)}{L_d} \end{cases} \quad (38b)$$

Nos interesa manipular la salida  $\theta_m(t)$  a través de las entradas  $v_{qs}^r(t)$  y  $T_l(t)$ . De esta forma logramos llegar a dos funciones de transferencia  $G_1(s)$  y  $G_2(s)$ , partiendo de la expresión:

$$\Theta_m(s) = \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m'^r \cdot V_{qs}^r(s) - (R_s + L_q \cdot s) \cdot T_{leq}(s)}{L_q \cdot J_{eq} \cdot s^3 + (R_s \cdot J_{eq} + L_q \cdot b_{eq}) \cdot s^2 + (\frac{3}{2} \cdot P_p^2 (\lambda_m'^r)^2 + R_s \cdot b_{eq}) \cdot s} \quad (38c)$$

Que dividimos en dos sumas para obtener:

$$G_1(s) = \frac{\Theta_m(s)}{V_{qs}^r(s)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot \lambda_m'^r}{L_q \cdot J_{eq} \cdot s^3 + (R_s \cdot J_{eq} + L_q \cdot b_{eq}) \cdot s^2 + (\frac{3}{2} \cdot P_p^2 (\lambda_m'^r)^2 + R_s \cdot b_{eq}) \cdot s} \quad (38d)$$

$$G_2(s) = \frac{\Theta_m(s)}{T_l(s)} = -\frac{R_s + L_q \cdot s}{r \cdot [L_q \cdot J_{eq} \cdot s^3 + (R_s \cdot J_{eq} + L_q \cdot b_{eq}) \cdot s^2 + (\frac{3}{2} \cdot P_p^2 (\lambda_m'^r)^2 + R_s \cdot b_{eq}) \cdot s]} \quad (38e)$$

### 3.1.3. Análisis de Estabilidad a lazo abierto para el modelo LTI equivalente aumentado

#### a) Determinación de polos y ceros, cálculo de frecuencias naturales y amortiguamiento

Para hallar las frecuencias naturales, se debe llegar a una ecuación de la siguiente forma:

$$s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_m \cdot s + \omega_m^2 = 0 \quad (39a)$$

Entonces igualando la ecuación (39a) con el denominador de las funciones de transferencia, se obtienen las expresiones:

$$2 \cdot \zeta \cdot \omega_m = \frac{R_s \cdot J_{eq} + L_q \cdot b_{eq}}{J_{eq} \cdot L_q} \tag{39b}$$

$$\omega_m^2 = \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m'^2 + R_s \cdot b_{eq}}{J_{eq} \cdot L_q} \tag{39c}$$

Como  $b_l = 0,1 \pm 0,03$ ,  $J_{l_{min}} = J_{l_{nom}} = 0,0833$  y  $J_{l_{max}} = 0,4583$ .

Se han tomado  $b_{eq_{min}} = 1,9861 \cdot 10^{-5}$ ,  $b_{eq_{nom}} = 2,1944 \cdot 10^{-5}$ ,  $b_{eq_{max}} = 2,4028 \cdot 10^{-5}$ ,  $J_{eq_{min}} = J_{eq_{nom}} = 1,9785 \cdot 10^{-3}$ ,  $J_{eq_{max}} = 4,5826 \cdot 10^{-5}$ ,  $R_{s_{min}} = 1,02$  y  $R_{s_{max}} = 1,32$  como los parámetros que se modificarán en la búsqueda de los valores de  $\omega_m$  y de  $\zeta$ .

A continuación, se muestran los resultados de las frecuencias naturales y factores de amortiguamiento relativo obtenidos con MatLab, al variar los parámetros del sistema a lazo abierto.

$R_{s_{min}}$					
$\omega_{m_{min}}$	$\omega_{m_{nom}}$	$\omega_{m_{max}}$	$\zeta_{min}$	$\zeta_{nom}$	$\zeta_{max}$
174,0512	174,1044	114,4325	0,5081	0,5082	0,7707

Cuadro 1: Frecuencias naturales y factores de amortiguamiento con resistencia mínima en el estator

$R_{s_{max}}$					
$\omega_{m_{min}}$	$\omega_{m_{nom}}$	$\omega_{m_{max}}$	$\zeta_{min}$	$\zeta_{nom}$	$\zeta_{max}$
174,2003	174,2691	114,5510	0,6561	0,6562	0,9957

Cuadro 2: Frecuencias naturales y factores de amortiguamiento con resistencia máxima en el estator

Observando los Cuadros 1 y 2 podemos ver que, al aumentar los valores de los parámetros del sistema, las frecuencias naturales tienden a disminuir y los factores de amortiguamiento tienden a aumentar.

A su vez, al llevar la resistencia del estator al máximo, el amortiguamiento aumenta aproximadamente un 29 %. Lo cual, nos lleva a la conclusión de que el sistema está más cercano al amortiguamiento crítico ( $\zeta = 1$ ) y por ende alcanza más rápido la estabilidad.

A partir de los valores de  $\omega_m$  y de  $\zeta$ , se obtienen los polos conjugados  $s_{1,2,3_{min}} = 0; -88,43 \pm 149,9$ ,  $s_{1,2,3_{nom}} = 0; -88,49 \pm 149,94$  y  $s_{1,2,3_{max}} = 0; -88,54 \pm 149,97$  para el mínimo valor de resistencia y  $s_{1,2,3_{min}} = 0; -114,3 \pm 131,46$ ,  $s_{1,2,3_{nom}} = 0; -114,35 \pm 131,51$  y  $s_{1,2,3_{max}} = 0; -114,4 \pm 131,55$  para el máximo valor de resistencia. También se presentan polos en cero para los valores mínimos, nominales y máximos de ambos valores de resistencia. Todos los polos se grafican en las figuras siguientes.

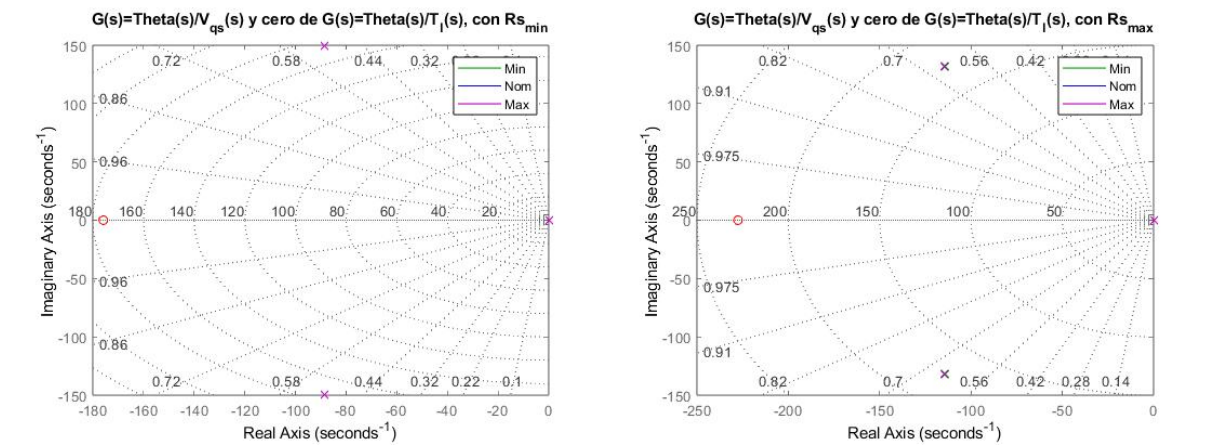


Figura 8: Gráficas de polos y ceros con  $R_{s_{min}}$  y  $R_{s_{max}}$

Al observar los diagramas de polos y ceros del sistema con respecto a la posición sobre la tensión en cuadratura del estator respecto al rotor, se observa que el comportamiento del sistema es subamortiguado,

debido a que cuenta con dos polos compuestos conjugados. La posición respecto al torque de carga aporta un cero al sistema en  $-\frac{R_{s_{min}}}{L_q} = -175,8621$  y en  $-\frac{R_{s_{max}}}{L_q} = -227,5862$ .

Ampliando las imágenes sobre uno de los grupos de polos conjugados podemos diferenciar los polos respecto a los valores mínimos, nominales y máximos de la frecuencia natural y del factor de amortiguamiento para cada valor de resistencia.

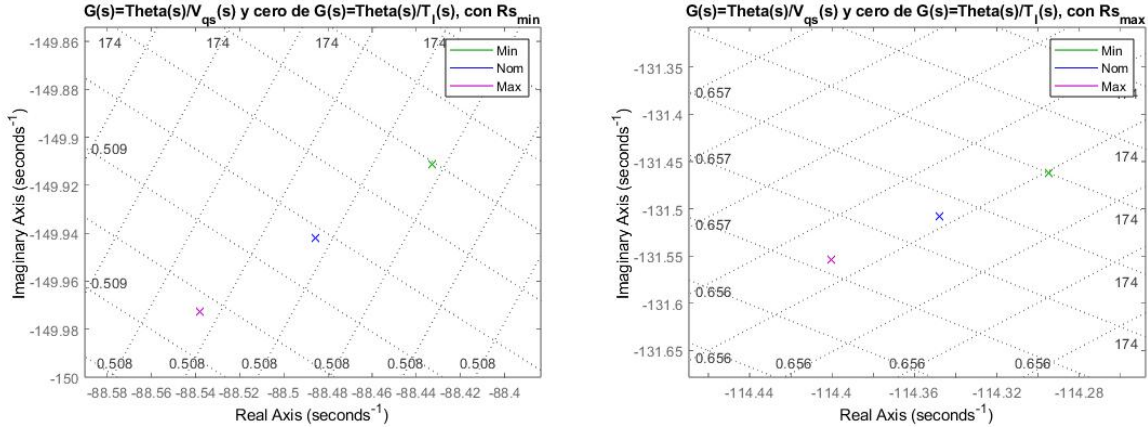


Figura 9: Grupo de polos para  $R_{s_{min}}$  y  $R_{s_{max}}$

#### b) Evaluar estabilidad parcial y completa, y dinámica de los ceros

La estabilidad es una propiedad fundamental, que hay que se debe tener en cuenta en los sistemas dinámicos, y fundamentalmente cuando se aplica control. La estabilidad depende únicamente de la matriz de estado A del sistema, ya que tiene que ver con los modos naturales de vibrar, los cuales se relacionan con los polos que producen los valores dentro de dicha matriz A.

Un sistema LTI es estable, si para toda excitación  $u(t)$  acotada en  $t > t_0$  (respuesta forzada) todos sus estados  $x_i(t)$  toman valores acotados; y si desaparece la excitación  $u(t)0$  (respuesta natural), el estado tiende al origen del espacio de estado  $x = 0$ .

El criterio de estabilidad establece que un sistema LTI es estable si todos los autovalores de A tienen parte real negativa. Por esto, el sistema posee estabilidad completa, ya que los 3 polos del sistema se encuentran en el semiplano negativo del plano de Laplace.

#### 3.1.4. Análisis de Observabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado

Un sistema es observable en un instante inicial si, a partir del estado del sistema en este instante inicial, es posible determinar dicho estado mediante la observación de la salida  $y(t)$  durante un intervalo de tiempo finito. Esto solo es posible si cada cambio en el estado afecta a cada componente del vector de salida  $y(t)$ . Por lo tanto, la observabilidad depende de la matriz de salida C del sistema y también de su matriz de estado A.

Para analizar la observabilidad completa del estado se emplea el criterio de Kalman, que establece que un sistema LTI de rango n es totalmente observable si el rango de la matriz de observabilidad  $\vartheta$  es igual al número de variables de estado n del sistema. Esto refleja que los vectores de la matriz de observabilidad son linealmente independientes.

La matriz de observabilidad está dada por la siguiente matriz:

$$\vartheta = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ \vdots \\ C \cdot A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (40a)$$

En donde la matriz de entrada A del sistema LTI equivalente aumentado resulta:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & -\frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot \lambda'_m \cdot r}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda'_m \cdot r \cdot P_p}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{R_s}{L_d} \end{bmatrix} \quad (40b)$$

No se toma en cuenta la variable  $\frac{dT_s}{dt}(t)$  ya que contiene no linealidades.  
La matriz de salida C será:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (40c)$$

Por lo que la matriz de observabilidad está dada por:

$$\vartheta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & -\frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot \lambda'_m \cdot r}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & \frac{b_{eq}^2 + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda'_m \cdot r^2}{J_{eq}^2} & \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{P_p \cdot \lambda'_m \cdot r \cdot b_{eq}}{J_{eq}^2} + \frac{P_p \cdot \lambda'_m \cdot r \cdot R_s}{J_{eq} \cdot L_q} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (40d)$$

La matriz de observabilidad tiene rango de 3, mientras que la cantidad de variables de estado es 4, entonces el sistema no es totalmente observable desde  $\theta_m(t)$  ya que no se puede estimar el valor de la variable de estado no observable, la corriente  $i_{ds}^r(t)$ , la cual no tiene conexión con la salida en la figura 7.

Si colocamos un sensor para medir la corriente, la matriz de salida queda:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (40e)$$

Entonces la matriz de observabilidad resulta:

$$\vartheta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{R_s}{L_d} \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & -\frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot \lambda'_m \cdot r}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{R_s^2}{L_d^2} \\ 0 & \frac{b_{eq}^2 + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda'_m \cdot r^2}{J_{eq}^2} & \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{P_p \cdot \lambda'_m \cdot r \cdot b_{eq}}{J_{eq}^2} + \frac{P_p \cdot \lambda'_m \cdot r \cdot R_s}{J_{eq} \cdot L_q} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{R_s^3}{L_d^3} \end{bmatrix} \quad (40f)$$

El rango de la matriz resultante es de 4, igual que la cantidad de variables de estado del sistema, entonces el sistema es totalmente observable.

Analizando la observabilidad desde  $\omega_m(t)$  tenemos la siguiente matriz de salida:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (40g)$$

Por lo que la matriz de observabilidad está dada por:

$$\vartheta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & -\frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot \lambda'_m \cdot r}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & \frac{b_{eq}^2 + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda'_m \cdot r^2}{J_{eq}^2} & \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{P_p \cdot \lambda'_m \cdot r \cdot b_{eq}}{J_{eq}^2} + \frac{P_p \cdot \lambda'_m \cdot r \cdot R_s}{J_{eq} \cdot L_q} \right) & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq} \cdot \left( \frac{b_{eq}^2 + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda'_m \cdot r^2}{J_{eq}^2} \right) + \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda'_m \cdot r \cdot \left( \frac{P_p \cdot b_{eq} \cdot \lambda'_m \cdot r}{J_{eq}^2} + \frac{P_p \cdot \lambda'_m \cdot r \cdot R_s}{J_{eq} \cdot L_q} \right)}{J_{eq}} & -\frac{3}{2} \cdot \frac{b_{eq} \cdot \left( \frac{P_p \cdot b_{eq} \cdot \lambda'_m \cdot r}{J_{eq}^2} + \frac{P_p \cdot R_s \cdot \lambda'_m \cdot r}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q} \right) + P_p \cdot \lambda'_m \cdot r \cdot \left( \frac{R_s^2}{L_q^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p^2 \cdot \lambda'_m \cdot r^2}{J_{eq}^2} \right)}{J_{eq}} & 0 \end{bmatrix} \quad (40h)$$

Se observa que el rango es de 2, se puede concluir que las dos variables que no son observables desde  $\omega_m(t)$  son  $\theta_m(t)$  e  $i_{ds}^r(t)$ . La primer variable solo se podría medir mediante integración y conociendo la posición inicial en simultáneo, la segunda no se observa desde el vector de salida como se ve en la figura 7.

Si agregamos un sensor para medir la posición y otro para medir la corriente, entonces la matriz de salida queda:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (40i)$$

Entonces la matriz de observabilidad resulta:

$$\vartheta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot \lambda'_m \cdot r}{J_{eq}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_s}{L_d} \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot \lambda'_m \cdot r}{J_{eq}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b_{eq}^2 + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda'_m \cdot r^2}{J_{eq}^2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{P_p \cdot \lambda'_m \cdot r \cdot b_{eq}}{J_{eq}^2} + \frac{P_p \cdot \lambda'_m \cdot r \cdot R_s}{J_{eq} \cdot L_q} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R_s^2}{L_d^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R_s^2}{L_d^2} \\ 0 & \frac{b_{eq}^2 + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda'_m \cdot r^2}{J_{eq}^2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{P_p \cdot \lambda'_m \cdot r \cdot b_{eq}}{J_{eq}^2} + \frac{P_p \cdot \lambda'_m \cdot r \cdot R_s}{J_{eq} \cdot L_q} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq} \cdot \left( \frac{b_{eq}^2 + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda'_m \cdot r^2}{J_{eq}^2} \right) + \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda'_m \cdot r \cdot \left( \frac{P_p \cdot b_{eq} \cdot \lambda'_m \cdot r}{J_{eq}^2} + \frac{P_p \cdot \lambda'_m \cdot r \cdot R_s}{J_{eq} \cdot L_q} \right)}{J_{eq}} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \cdot \frac{b_{eq} \cdot \left( \frac{P_p \cdot b_{eq} \cdot \lambda'_m \cdot r}{J_{eq}^2} + \frac{P_p \cdot R_s \cdot \lambda'_m \cdot r}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q} \right) + P_p \cdot \lambda'_m \cdot \left( \frac{R_s^2}{L_q^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p^2 \cdot \lambda'_m \cdot r^2}{J_{eq}^2} \right)}{J_{eq}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_s^3}{L_d^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (40j)$$

Al agregar el sensor de corriente, el sistema es ahora completamente observable, ya que el rango de la matriz es 4, al igual que el número de variables de estado del sistema.

### 3.1.5. Análisis de Controlabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado

Un sistema es controlable en un instante inicial, si es posible llevarlo desde cualquier estado inicial  $x(t_0)$  a cualquier otro estado mediante un vector de control  $u(t)$  no restringido, en un intervalo de tiempo finito. Que sea no restringido se debe a que, matemáticamente, las ecuaciones pueden demostrar que el sistema es controlable, pero desde el punto de vista ingenieril, la acción del vector de entradas puede no ser suficiente para modificar correctamente el comportamiento dinámico del sistema.

Mediante la controlabilidad del sistema, se puede influir en las variables de estado a partir de la manipulación del vector de entradas. Por lo tanto, la controlabilidad depende de la matriz de entrada B del sistema y también de su matriz de estado A.

Para analizar la controlabilidad completa del estado se utiliza el criterio de Kalman, que establece que un sistema es totalmente controlable si el rango de la matriz de controlabilidad  $\varrho$  es igual al número de variables de estado del sistema. Esto significa que los vectores de esta matriz de controlabilidad deben ser linealmente independientes.

En base a la matriz de estado definida en (40b) y la matriz de entrada B siguiente:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_q} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (41a)$$

La matriz de controlabilidad está definida como sigue:

$$\varrho = [B \quad A \cdot B \quad A^2 \cdot B \quad A^3 \cdot B] \quad (41b)$$

Entonces la controlabilidad de nuestro sistema está dado por:

$$\varrho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot \lambda_m}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{P_p \cdot b_{eq} \cdot \lambda_m}{J_{eq}^2} + \frac{P_p \cdot R_s \cdot \lambda_m}{J_{eq} \cdot L_q}}{L_q} \\ 0 & -\frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot \lambda_m}{J_{eq} \cdot L_q} & \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{P_p \cdot b_{eq} \cdot \lambda_m}{J_{eq}^2} + \frac{P_p \cdot R_s \cdot \lambda_m}{J_{eq} \cdot L_q}}{L_q} & -\frac{3}{2} \cdot \frac{b_{eq} \cdot \left( \frac{P_p \cdot b_{eq} \cdot \lambda_m}{J_{eq}^2} + \frac{P_p \cdot R_s \cdot \lambda_m}{J_{eq} \cdot L_q} \right) + P_p \cdot \lambda_m \cdot \left( \frac{R_s^2}{L_q^2} + \frac{P_p^2 \cdot \lambda_m^2}{J_{eq}^2} \right)}{J_{eq} \cdot L_q} \\ \frac{1}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q^2} & \frac{\frac{R_s^2}{L_q^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p^2 \cdot \lambda_m^2}{J_{eq}^2}}{L_q} & -\frac{R_s \cdot \left( \frac{R_s^2}{L_q^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p^2 \cdot \lambda_m^2}{J_{eq}^2} \right) + \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot \lambda_m \cdot \left( \frac{P_p \cdot b_{eq} \cdot \lambda_m}{J_{eq}^2} + \frac{P_p \cdot R_s \cdot \lambda_m}{J_{eq} \cdot L_q} \right)}{J_{eq}}}{L_q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (41c)$$

El rango de esta matriz es de 3, por lo que el sistema no es totalmente controlable. Entonces se procede a agregar como consigna de control la entrada  $v_{ds}^r(t)$ .

Ahora el vector de entradas resulta en:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{L_q} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_d} \end{bmatrix} \quad (41d)$$



Por lo que la matriz de controlabilidad queda determinada por:

$$\varrho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot \lambda_m}{J_{eq} \cdot L_q} & 0 & \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{P_p \cdot b_{eq} \cdot \lambda_m}{J_{eq}^2} + \frac{P_p \cdot R_s \cdot \lambda_m}{J_{eq} \cdot L_q}}{L_q} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot \lambda_m}{J_{eq} \cdot L_q} & 0 & \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{P_p \cdot b_{eq} \cdot \lambda_m}{J_{eq}^2} + \frac{P_p \cdot R_s \cdot \lambda_m}{J_{eq} \cdot L_q}}{L_q} & 0 & -\frac{3}{2} \cdot \frac{b_{eq} \cdot (\frac{P_p \cdot b_{eq} \cdot \lambda_m}{J_{eq}^2} + \frac{P_p \cdot R_s \cdot \lambda_m}{J_{eq} \cdot L_q}) + P_p \cdot \lambda_m \cdot (\frac{R_s^2}{L_q^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p^2 \cdot \lambda_m^2}{J_{eq}^2})}{J_{eq} \cdot L_q} & 0 \\ \frac{1}{L_q} & 0 & -\frac{R_s}{L_q^2} & 0 & \frac{\frac{R_s^2}{L_q^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p^2 \cdot \lambda_m^2}{J_{eq}^2}}{L_q} & 0 & \frac{R_s \cdot (\frac{R_s^2}{L_q^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p^2 \cdot \lambda_m^2}{J_{eq}^2})}{L_q} + \frac{P_p \cdot \lambda_m \cdot \frac{3}{2} \cdot (\frac{P_p \cdot b_{eq} \cdot \lambda_m}{J_{eq}^2} + \frac{P_p \cdot R_s \cdot \lambda_m}{J_{eq} \cdot L_q})}{L_q} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_d} & 0 & -\frac{R_s}{L_d^2} & 0 & \frac{R_s^2}{L_d^3} & 0 & -\frac{R_s^3}{L_d^4} \end{bmatrix} \quad (41e)$$

El rango resultante es de 4, igual a la cantidad de variables de estado. Por lo que el sistema es totalmente controlable ya que, controlando  $v_{ds}^r(t)$  se puede influir en la variable  $i_{ds}^r(t)$ .

### 3.1.6. Simulación dinámica

#### a) Respuesta del estado interno a pulsos $v_{qs}^r(t)$ y $T_l(t)$

Realizamos el análisis de la respuesta del estado interno del modelo del sistema global NL desacoplado con ley de control NL y del sistema LTI equivalente aumentado, para ello se excitan las entradas manipulada y de perturbación con un pulso de tensión y con un doble pulso de torque de carga como se muestra a continuación.

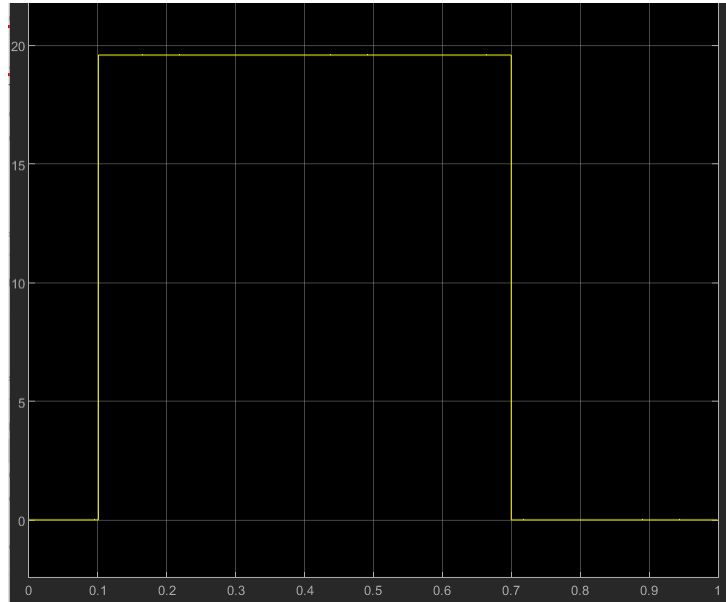


Figura 10: Pulso de  $v_{qs}^*(t)$ .

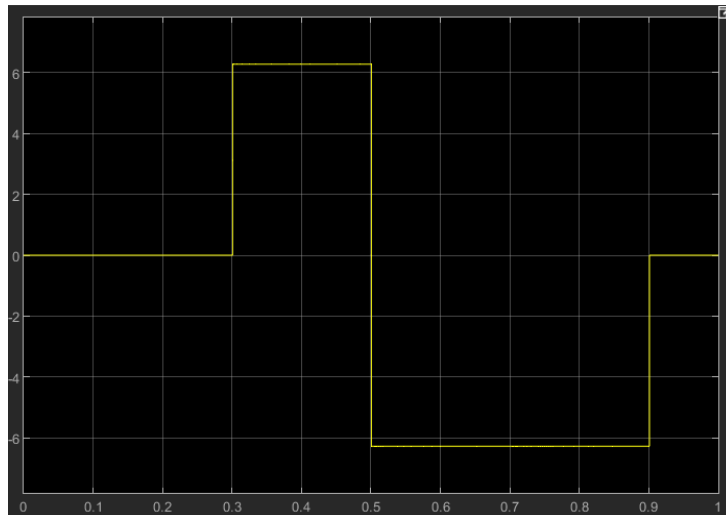


Figura 11: Pulso de  $T_d(t)$ .

Los resultados para posición angular, velocidad angular y torque electromagnético son:

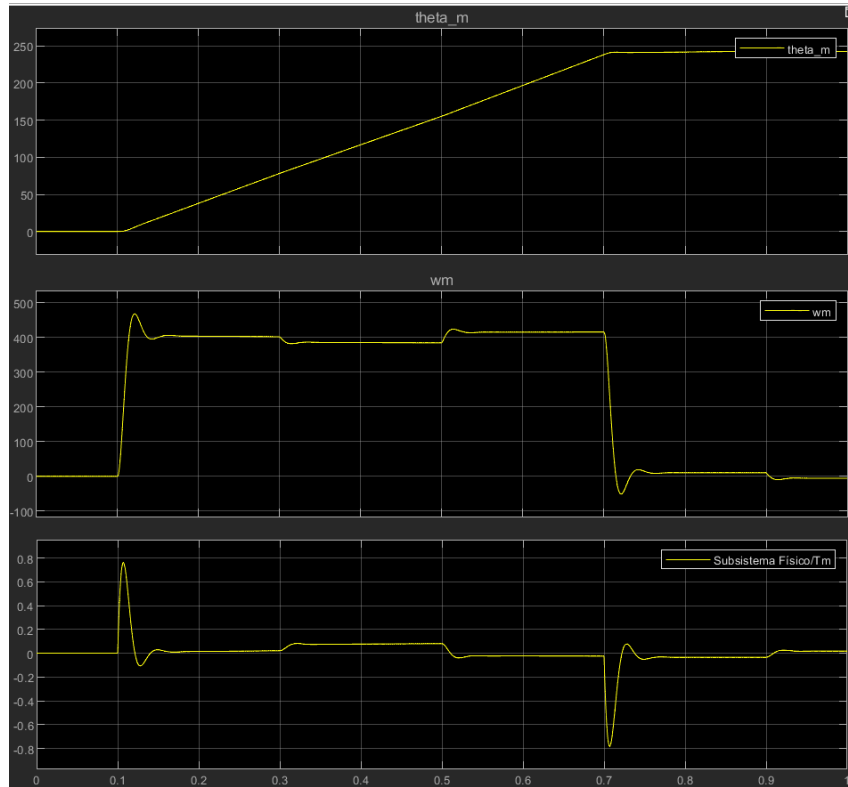


Figura 12: Posición angular  $\theta_m(t)$ , velocidad angular  $\omega_m(t)$  y torque electromagnético  $T_m(t)$ .

A los 0,1s se establece una tensión de 19,596V y puede verse como la velocidad del rotor asciende a un pico y oscilar, hasta alcanzar una velocidad de equilibrio dinámico cercana a  $400 \frac{rad}{s}$ . El torque electromagnético oscila con un pico de  $0,8Nm$  y vuelve a un valor positivo pequeño, dado que aún no hay un torque de carga aplicado. Tanto en nuestro modelo LTI equivalente aumentado como en el modelo global NL se incorpora la ley de control mínima (y la ley de control complementaria mínima), por lo que  $i_{ds}^r(t) = 0$  y el torque electromagnético es proporcional a la corriente  $i_{qs}^r(t)$ , y la tensión en el eje de cuadratura se relaciona con la velocidad angular del rotor mediante  $v_{qs}^r(t) = R_s \cdot i_{qs}^r(t) + L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + \lambda_m' \cdot P_p \cdot \omega_m(t)$ .

Recordamos que hemos impuesto  $v_{ds}^r(t) = -P_p \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t)$  como ley de control mínima, por lo que la tensión en el eje directo es proporcional y de sentido contrario a la corriente en el eje en cuadratura.

El próximo momento de interés corresponde al pulso de torque de carga positivo a los 0,3s. La velocidad oscila un poco hasta llegar al equilibrio dinámico de vuelta, en un valor ligeramente menor. Al comparar éste nuevo valor de velocidad en estado estacionario con el anterior podemos ver que el motor a frenado un poco. El torque electromagnético ha aumentado en respuesta al torque de carga. A los 0,5s el torque de carga es negativo, razón por la cuál esta vez la velocidad aumenta y el torque electromagnético disminuye.

Posteriormente, se desenergizan las bobinas del estator, la tensión corresponde a 0V, y la velocidad angular tiende a cero una vez que el torque de carga es cero después de los 0,9s.

La evolución de la temperatura del estator se puede observar a continuación.

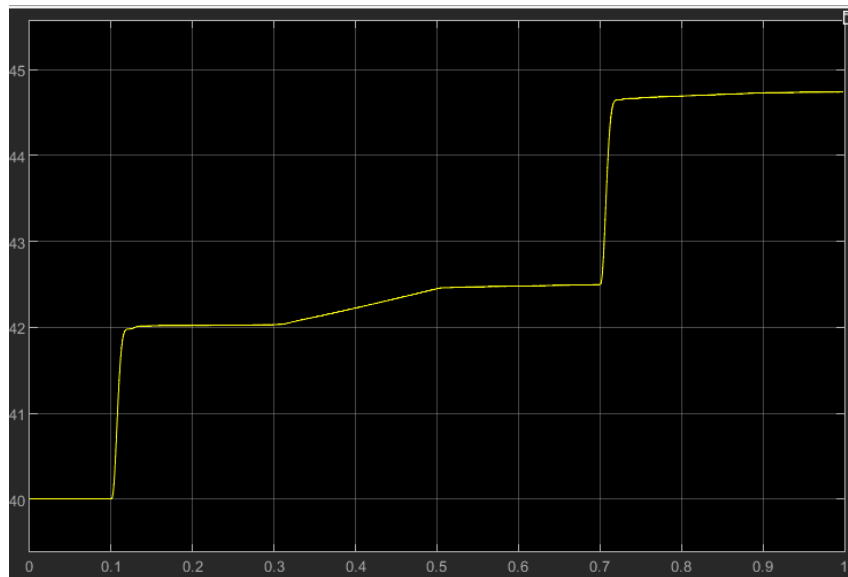


Figura 13: Temperatura del estator  $T_s(t)$ , vista en el modelo NL.

Por ultimo, observamos el comportamiento de las tensiones y corrientes en coordenadas 'qd0' y 'abc' para el modelo NL con ley de control NL solamente, ya que para el modelo LTI equivalente aumentado el único valor de tensión utilizado es el de  $v_{qs}^r(t)$ .

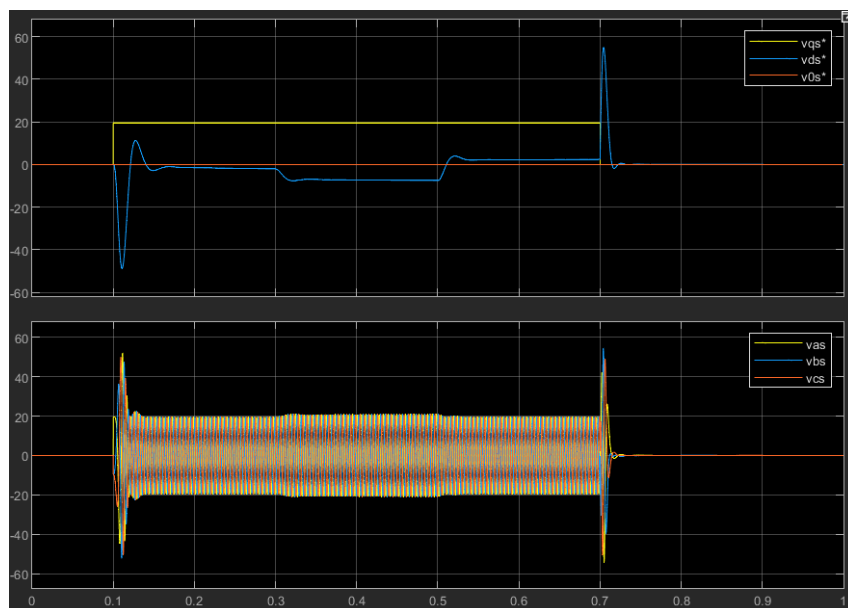


Figura 14: Gráficas de tensiones en coordenadas “abc” y “qd0”.

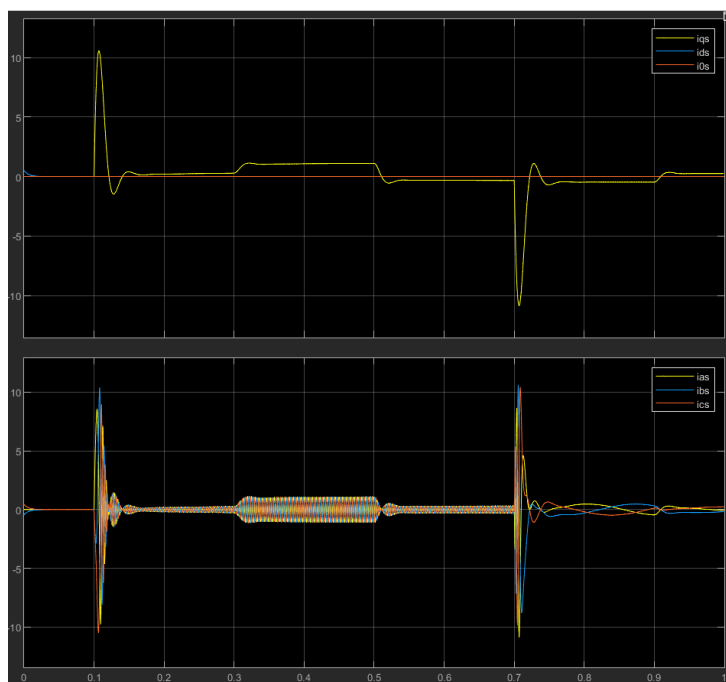


Figura 15: Gráficas de corrientes en coordenadas “abc” y “qd0”.

A continuación, se muestran las curvas obtenidas de torque contra velocidad, para confirmar que el motor está trabajando en los 4 cuadrantes de operación (giro y frenado directos e inversos).

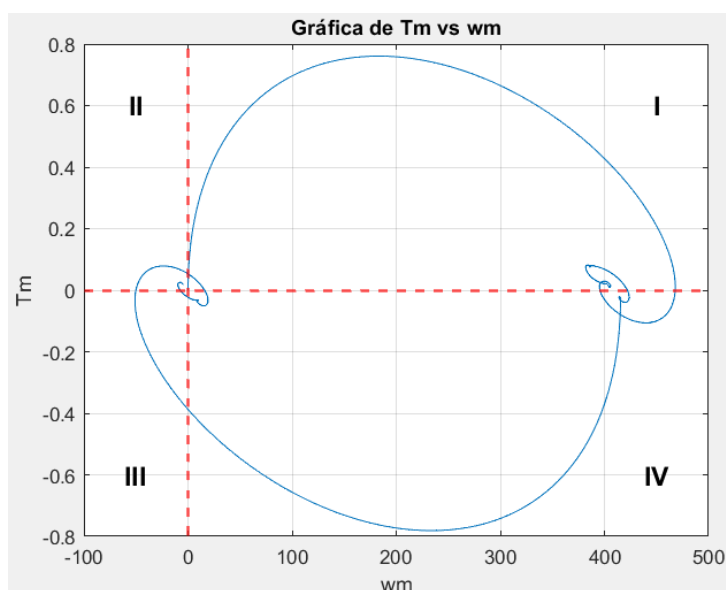


Figura 16: Curvas paramétricas de Torque vs Velocidad angular.

- En el primer cuadrante la máquina eléctrica está en modo de “motorización directa”. La velocidad es positiva y el torque electromagnético tiene el mismo sentido. La máquina eléctrica se comporta entonces como un motor.
- En II el torque electromagnético es positivo, pero la velocidad angular es negativa. La máquina actúa como generador, devolviéndole energía eléctrica al sistema transformada de la energía cinética almacenada por la inercia del rotor. Estamos en un caso de “frenado regenerativo en dirección inversa”.
- En el tercer cuadrante la máquina funciona otra vez en régimen de motorización, esta vez en sentido inverso, dado que la velocidad es negativa (al igual que el torque electromagnético, en éste caso).
- Por último, en el cuarto cuadrante, sólo el torque electromagnético es negativo y el motor se encuentra en frenado regenerativo en dirección directa.

b) Determinación de velocidad y corriente final de establecimiento luego de cada transitorio.

Cuadro 3: Resultados para  $\omega_m(t)$  y  $i_{qs}^r(t)$

Para $\omega_m(t)$							
Tiempo de aplicación de la perturbación	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	-	[s]
Valor final de $\omega_m(t)$	403,79	385,4	414	10	-5,57	-	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$
Tiempo de crecimiento	9,4	6,06	3,5	9,56	1,364	-	[ms]
Tiempo de establecimiento	0,1491	0,307	0,532	0,777	0,95611	-	[s]
Sobrepico	64,28	-3,4	10	-40	-3,99	-	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Para $i_{qs}^r(t)$							[s]
Tiempo de aplicación de la perturbación	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	-	[s]
Valor final de $i_{qs}^r(t)$	0,2	1,068	-0,325	-0.445	0,25585	-	[A]
Tiempo de crecimiento	0,05	18,45	28	0,0285	9,353	-	[ms]
Tiempo de establecimiento	0,186	0,388	0,545	0,775	0,9666	-	[s]
Sobrepico	10,38	0,0685	-0,183	-10,371	0,1034	-	[A]

c) Comparación de rendimiento para distintos valores iniciales de  $i_{ds}^r(t)$ .

En los modelos analizados anteriormente bajo las consignas de tensión y torque especificadas, se consideró en todo momento que  $i_{ds}^r(0) = 0$  como condición inicial (control vectorial con campo orientado). Esto no nos ha permitido poner a prueba el cumplimiento de la restricción de control mínima dada anteriormente, que permitiría que la corriente en el eje directo se acerque a cero de manera exponencial. Ahora se realizará el análisis de las respuestas de los modelos para los siguientes casos:

$$i_{ds}^r(0) = 0,5 \text{ A}$$

$$i_{ds}^r(0) = -0,5 \text{ A}$$

En las siguientes imágenes se ve cómo el valor de  $i_{ds}^r(t)$  disminuye rápidamente a cero para las condiciones iniciales especificadas, por lo tanto se verifica para nuestro modelo global NL desacoplado con ley de control NL, que la ley de control aplicada funciona de forma correcta y se establece  $i_{ds}^r(t) = 0$  de forma exponencial, comportándose como el modelo LTI equivalente aumentado que ha sido descrito anteriormente.

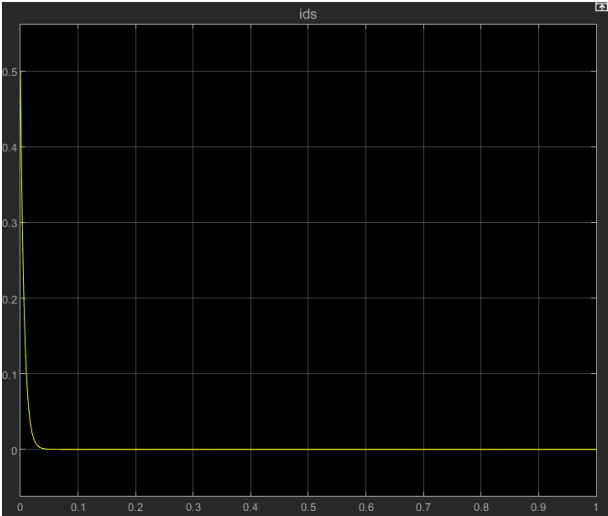


Figura 17: Evolución de corriente  $i_{ds}^r(t)$  para condición inicial  $i_{ds}^r(0) = 0,5 \text{ A}$ .

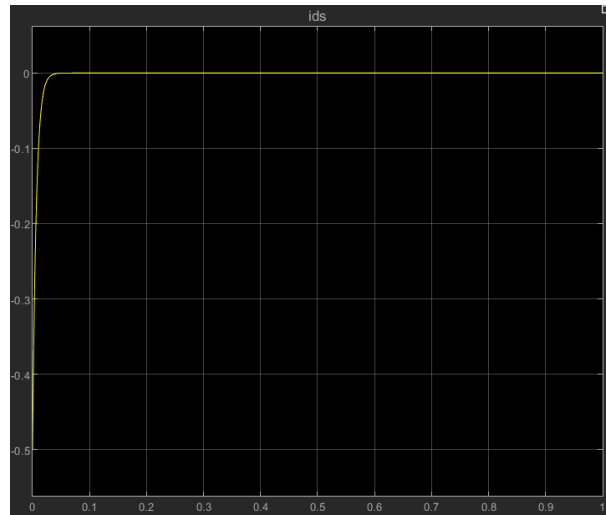


Figura 18: Evolución de corriente  $i_{ds}^r(t)$  para condición inicial  $i_{ds}^r(0) = -0,5A$ .

#### d) Consigna de tensión en el eje d.

Trabajando sobre el modelo NL desacoplado con ley de control NL, se agregan nuevas consignas de tensión para el eje 'd' de la forma:

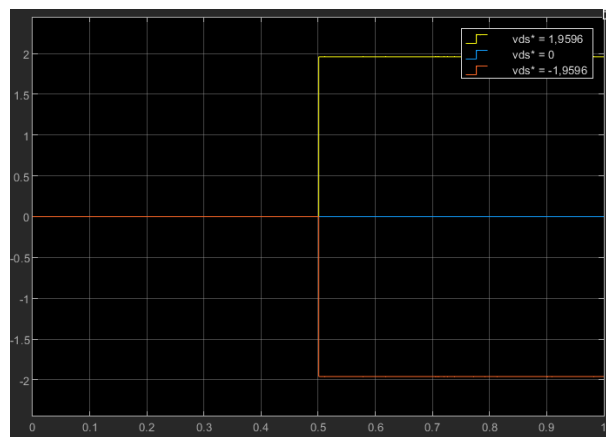


Figura 19: Nueva consigna de tensión con  $v_{ds}^r(t) = 1,9596V$ ,  $v_{ds}^r(t) = 0V$  y  $v_{ds}^r(t) = -1,9596V$ .

En el gráfico anterior se puede observar el agregado de tres consignas en  $v_{ds}^r$ , de las cuales encontramos dos diferencias que nos ayudan a lograr los efectos de 'field forcing' o reforzamiento de campo cuando  $v_{ds}^r = 1,9596$  y 'field weakening' o debilitamiento de campo cuando  $v_{ds}^r = -1,9596$ . Las respuestas del modelo NL desacoplado con ley de control NL se ven reflejadas en las siguientes figuras.

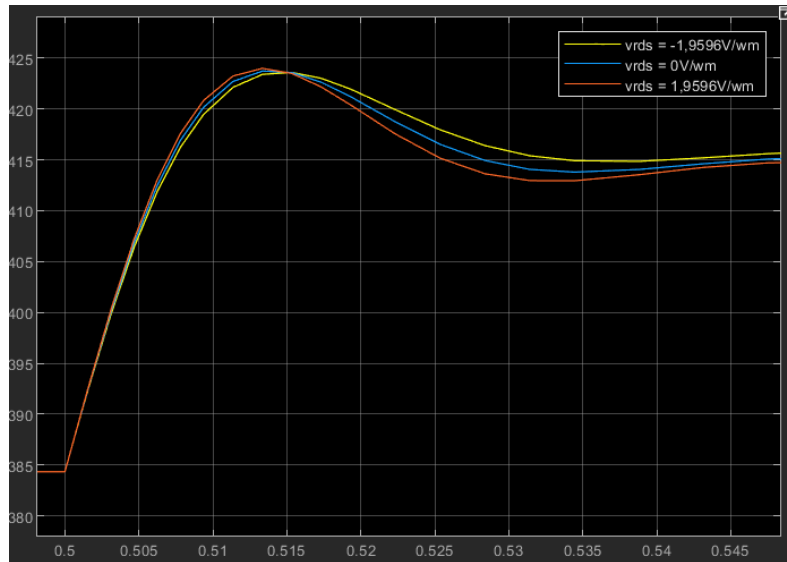


Figura 20: Velocidad angular  $\omega_m(t)$  para  $v_{ds}^r(t) = 1,9596V$ ,  $v_{ds}^r(t) = 0V$  y  $v_{ds}^r(t) = -1,9596V$ .

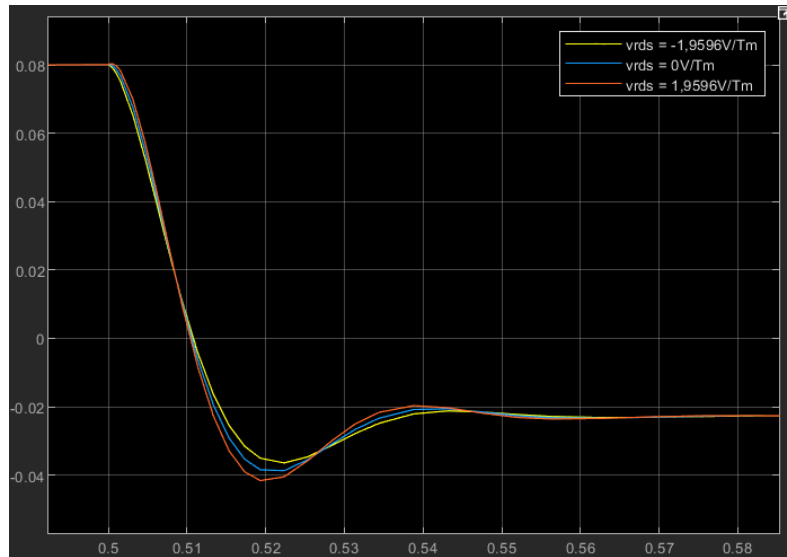


Figura 21: Torque electromagnético  $T_m(t)$  para  $v_{ds}^r(t) = 1,9596V$ ,  $v_{ds}^r(t) = 0V$  y  $v_{ds}^r(t) = -1,9596V$ .

Podemos observar el efecto sobre la velocidad y el torque de aumentar o disminuir  $v_{ds}^r(t)$ . Cuando aumenta  $v_{ds}^r(t)$ , la corriente  $i_{ds}^r(t)$  tiene el mismo sentido que el campo, reforzando al mismo, aumentando el torque y disminuyendo la velocidad del motor. Éste efecto se conoce como 'field forcing' o reforzamiento de campo. El efecto contrario se produce cuando  $v_{ds}^r(t)$  disminuye, esto significa que la corriente cambia de sentido, generando una disminución del torque y por ello un aumento de velocidad. Éste efecto se llama 'field weakening' o debilitamiento de campo, en esta situación el campo y la corriente tienen sentidos distintos. El "field forcing" y el "field weakening" son posibles gracias a que la inductancia en el estator en el eje directo  $L_d$  es mayor que la del eje en cuadratura  $L_q$ .

### 3.2. Segunda parte: Diseño, Análisis y Simulación con CONTROLADOR de Movimiento en Cascada con Modulador de Torque equivalente (Control Vectorial)

En esta segunda parte del proyecto, se propone una estrategia de control alternativa al clásico control por realimentación completa de estado, denominada control en cascada. Este enfoque es más efectivo, tiene más sentido práctico que matemático, y es muy utilizado actualmente en la industria y en accionamientos comerciales de alta potencia. Consiste en la implementación de dos lazos de control: uno interno y otro externo. El lazo interno es un control rápido de corriente y torque, mientras que el lazo externo es un control de movimiento.

La estrategia se basa en desacoplar o anular los efectos de las realimentaciones del modelo físico. Esto se consigue añadiendo a la señal de control del manipulador de tensiones cada variable involucrada, multiplicada por su respectiva constante de realimentación (y con signo opuesto), para contrarrestar sus efectos. De esta manera, las fuentes de tensión se transforman en fuentes de corriente, implementando finalmente un modulador de torque.

En el caso ideal, si se tuviera un modelo perfecto del sistema físico, con parámetros perfectamente conocidos y exactos, y sensores ideales (que miden las distintas variables), se podría contrarrestar completamente los efectos de dichas realimentaciones. Sin embargo, debido a la incertidumbre en el modelo, el error de estimación de los parámetros y el error de medición de los sensores, solo se puede contrarrestar parcialmente estos efectos. El resto se ajusta mediante el segundo lazo de control, en el cual se realimenta la variable de salida para obtener un controlador de movimiento. Así, se garantiza un acceso directo para manipular el torque de la máquina, sin los efectos de las realimentaciones físicas.

Para el diseño del sistema de control automático de posición y movimiento, consideraremos las siguientes especificaciones:

- (a) Corriente nula en el eje directo:  $i_{ds}^r(t)$  (estrategia de Control Vectorial con campo orientado, que permite el desacoplamiento de los canales de flujo y torque en el controlador).
- (b) Diseño en tiempo continuo  $t \in \mathbb{R}$ .
- (c) Acceso a todas las variables de estado para realimentación, que luego será sustituido por una estimación mediante un Observador de Estado reducido basado en la salida medida.
- (d) Valores nominales de inercia y amortiguamiento de la carga mecánica.

#### 3.2.1. Modulador de Torque equivalente (Controlador interno vectorial de corriente/torque)

##### a) “Desacoplamiento” o Compensación de todas las realimentaciones físicas naturales de estado hacia la entrada

Para desacoplar todas las realimentaciones físicas consideramos que podemos acceder a todas las variables de estado del sistema. Más adelante se analizará el caso donde no podremos acceder a todas y tendremos que utilizar un observador de estado.

Las entradas del modulador de torque son las corrientes en coordenadas  $qd0$ , y las salidas son las consignas de tensiones también en coordenadas  $qd0$ , las cuales luego se convierten a coordenadas  $abc$  mediante la transformación de Park.

Para empezar definiremos la consigna de tensión que será la salida de nuestro modulador de torque. El balance de tensiones está dado por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} v_{qs}^r(t) = R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) + L_q \cdot \frac{di_{qs}^r}{dt}(t) + [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot \omega_r(t) \\ v_{ds}^r(t) = R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + L_d \cdot \frac{di_{ds}^r}{dt}(t) - L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot \omega_r(t) \\ v_{0s}^r(t) = R_s(t) \cdot i_{0s}^r(t) + L_{ls} \cdot \frac{di_{0s}^r}{dt}(t) \end{cases} \quad (42a)$$

Las consignas de tensión para cada eje que serán salidas del modulador de torque están dadas por:

$$\begin{cases} v_{qs}^{r*}(t) = R_q \cdot (i_{qs}^{r*}(t) - i_{qs}^r(t)) \\ v_{ds}^{r*}(t) = R_d \cdot (i_{ds}^{r*}(t) - i_{ds}^r(t)) \\ v_{0s}^{r*}(t) = R_0 \cdot (i_{0s}^{r*}(t) - i_{0s}^r(t)) \end{cases} \quad (42ba)$$



Hacemos una suma de estas consignas de tensión y de los términos que queremos desacoplar.

$$\begin{cases} v_{qs}^{r*}(t) = v_{qs}^{r*'}(t) + R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) + [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot \omega_r(t) \\ v_{ds}^{r*}(t) = v_{ds}^{r*'}(t) + R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) - L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot \omega_r(t) \\ v_{0s}^{r*}(t) = v_{0s}^{r*'}(t) + R_s(t) \cdot i_{0s}^r(t) \end{cases} \quad (42ca)$$

Al igualar estas ecuaciones con las ecuaciones correspondientes para cada eje del balance de tensiones, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} v_{qs}^{r*'}(t) = L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = R_q \cdot (i_{qs}^{r*}(t) - i_{qs}^r(t)) \\ v_{ds}^{r*'}(t) = L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = R_d \cdot (i_{ds}^{r*}(t) - i_{ds}^r(t)) \\ v_{0s}^{r*'}(t) = L_{ls} \cdot \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} = R_0 \cdot (i_{0s}^{r*}(t) - i_{0s}^r(t)) \end{cases} \quad (42da)$$

#### b) Diseño de lazos de control de corrientes $i_{qd0s}^r(t)$

Las consignas de tensión quedan expresadas de la siguiente manera:

$$\begin{cases} v_{qs}^{r*}(t) = L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = (i_{qs}^{r*}(t) - i_{qs}^r(t)) \cdot R_q \\ v_{ds}^{r*}(t) = L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = (i_{ds}^{r*}(t) - i_{ds}^r(t)) \cdot R_d \\ v_{0s}^{r*}(t) = L_{ls} \cdot \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} = (i_{0s}^{r*}(t) - i_{0s}^r(t)) \cdot R_0 \end{cases} \quad (42ea)$$

Aplicando Laplace a las ecuaciones (42ea), se obtienen las funciones de transferencia de primer orden:

$$V_{qs}^{r*}(s) = L_q \cdot s \cdot I_{qs}^r(s) = (I_{qs}^{r*}(s) - I_{qs}^r(s)) \cdot R_q \quad (42eb)$$

$$\frac{L_q}{R_q} \cdot s \cdot I_{qs}^r(s) = (I_{qs}^{r*}(s) - I_{qs}^r(s)) \quad (42ec)$$

$$G_{i_q}(s) = \frac{I_{qs}^r(s)}{I_{qs}^{r*}(s)} = \frac{1}{\frac{L_q \cdot s}{R_q} + 1} \quad (42ed)$$

Solo se muestra el procedimiento para la primer ecuación correspondiente al eje q, ya que el desarrollo es similar para los ejes d y 0. Las respectivas funciones de transferencia son:

$$G_{i_d}(s) = \frac{I_{ds}^r(s)}{I_{ds}^{r*}(s)} = \frac{1}{\frac{L_d \cdot s}{R_d} + 1} \quad (42ee)$$

$$G_{i_0}(s) = \frac{I_{0s}^r(s)}{I_{0s}^{r*}(s)} = \frac{1}{\frac{L_{ls} \cdot s}{R_0} + 1} \quad (42ef)$$

Los valores de las ganancias  $R_q$ ,  $R_d$  y  $R_0$ , se obtienen mediante el método de asignación de polos. Siendo el polo deseado igual a -5000 rad/s.

$$\frac{L_q \cdot s}{R_q} + 1 = \frac{1}{5000} \cdot s + 1 \quad (42eg)$$

$$R_q = L_q \cdot 5000 = 29\Omega \quad (42eh)$$

De igual manera, para las otras ganancias:

$$R_d = L_d \cdot 5000 = 33\Omega \quad (42ei)$$

$$R_0 = L_{ls} \cdot 5000 = 4\Omega \quad (42ej)$$

Al realizar este procedimiento cambia la dinámica del sistema, ya que el polo correspondiente a la corriente se traslada a -5000 rad/s, los polos restantes se mantienen en el mismo lugar.

Con esta asignación de los polos de los ejes  $qd0$ , se logra que el lazo de control interno sea de alta velocidad (debido a la alta frecuencia que genera un valor de polo de -5000 rad/s), con lo que se evita la interferencia en la dinámica con el lazo de control externo, (el cual es lento, respecto al interno como se verá más adelante).

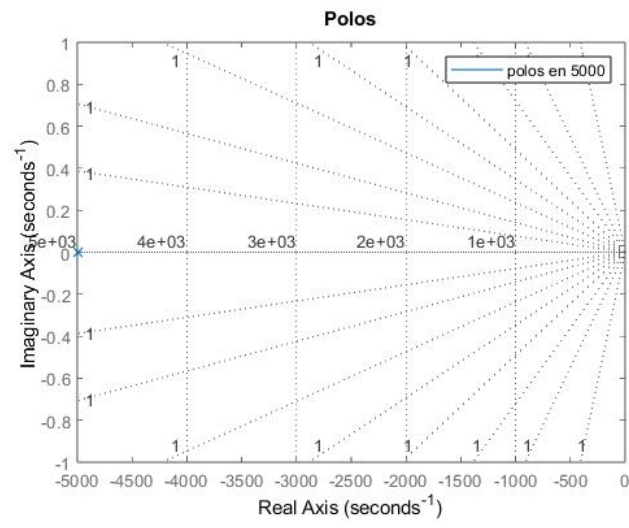


Figura 22: Polos del controlador de corriente.

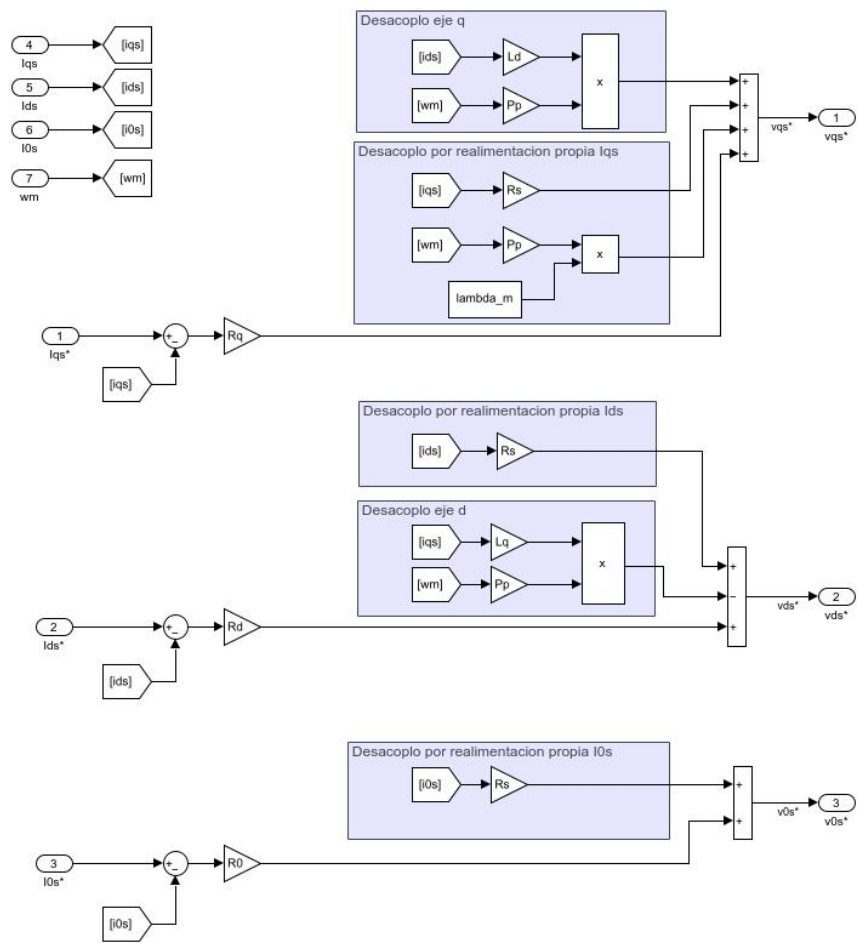


Figura 23: Controlador de corriente.

En la Figura 23 se puede ver la implementación del modulador de corriente en Simulink, con las correspondientes realimentaciones y las ganancias calculadas previamente.

**c) Incorporación adecuada de consigna de torque**

Partiendo de la siguiente ecuación, se agrega una consigna de torque:

$$T_m^*(t) = \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m' + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^{r*}(t)] \cdot i_{qs}^{r*}(t) \tag{42fa}$$

Despejando de la ecuación  $i_{qs}^{r*}(t)$ , obtenemos la consigna que se asignará al modulador de corriente:

$$i_{qs}^{r*}(t) = \frac{T_m^*(t)}{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m' r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^{r*}(t)]} \quad (42\text{fb})$$

De esta manera se puede ver que  $T_m$  es ahora la variable manipulada. Cabe destacar que el torque es  $T_m^*(t) = T_m^{*'}(t) + b_{eq} \cdot \omega_m$ . Luego nos encargaremos de desacoplar el torque restitutivo por acción de la gravedad, además del torque resistivo por fricción que podemos ver desacoplado ahora. Para el caso especial de  $i_{ds}^*(t) = 0$  la consigna de corriente de entrada al controlador de corriente termina siendo proporcional al torque electromagnético, de manera análoga a un motor de corriente continua y se reduce a:

$$i_{qs}^{r*}(t) = \frac{T_m^*(t)}{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_r'} \quad (42\text{fc})$$

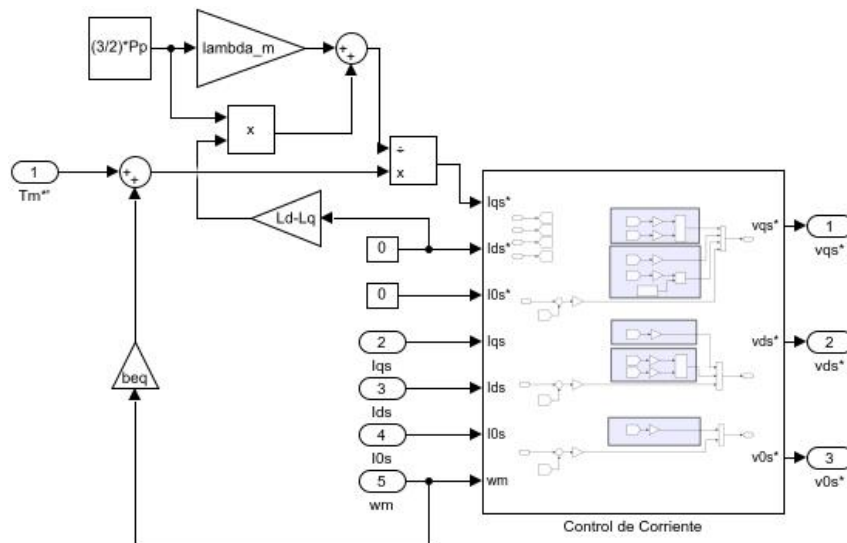


Figura 24: Modulador de Torque.

En la Figura 24 se puede ver la implementación del modulador de torque con  $i_{ds}^{r*}(t) = 0$  A, en el mismo se puede observar que la consigna de torque y la fricción equivalente desacoplada son la entrada del controlador de corriente.

d) “Desacoplamiento” o Compensación del Torque de carga por gravedad

Una vez planteado el modulador de torque con su consigna, se procede a desacoplar la componente del torque de carga influenciada por la gravedad. En la figura 25 se muestra el modulador de torque resultante.

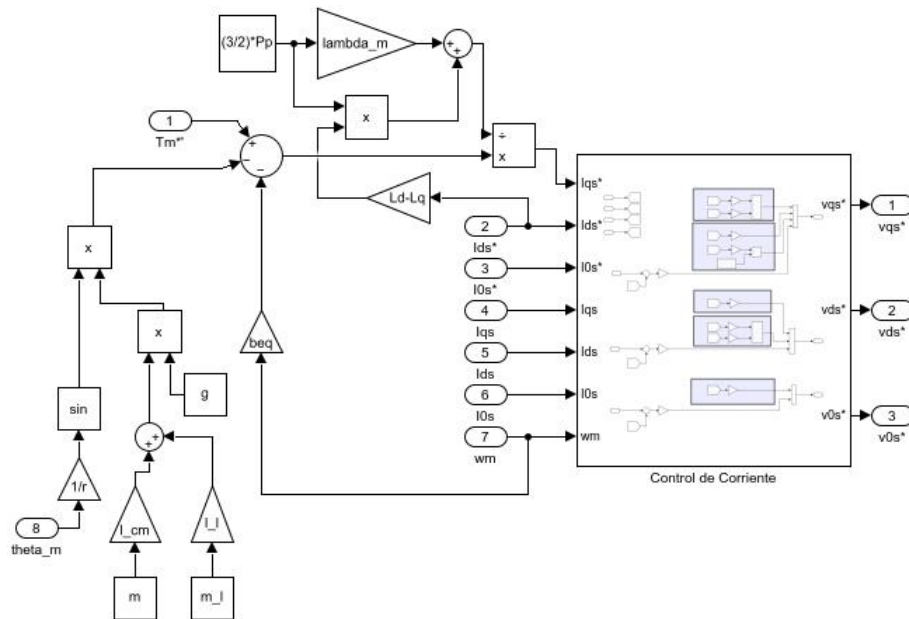


Figura 25: Modulador de Torque con torque de carga desacoplado.

Al desacoplar el torque restitutivo de la gravedad, la consigna de corriente en el eje en cuadratura queda dada por:

$$i_{qs}^*(t) = \frac{T_m^*(t) + k_l \cdot \sin(\theta_l(t)) + b_{eq} \cdot w_m(t)}{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^*(t)]} \quad (42g)$$

### 3.2.2. Controlador externo de movimientos

Como se explicó al inicio de esta segunda parte, el control en Cascada se presenta como una alternativa superior al enfoque clásico de realimentación completa de estado. Este último método muestra una inconsistencia donde, ante un error de posición, realiza un cambio de posición con consigna de velocidad cero. Aunque el sistema logra alcanzar la posición deseada, lo hace de manera poco efectiva, lo cual no lo hace adecuado para ciertos sistemas de control dinámico. En contraste, el control en Cascada asegura que todas las consignas sean completamente coherentes mediante un lazo de control externo que opera como un controlador PID.

Mediante este controlador, se procederá a dar consignas específicas de posición/velocidad para el motor, a través de consignas de torque  $T_m^{*'}(t)$ . Se usará un controlador PID (Proporcional-Integral-Derivativo) mostrado en la figura 26 para cumplir con el perfil planteado que es un perfil trapezoidal de posición.

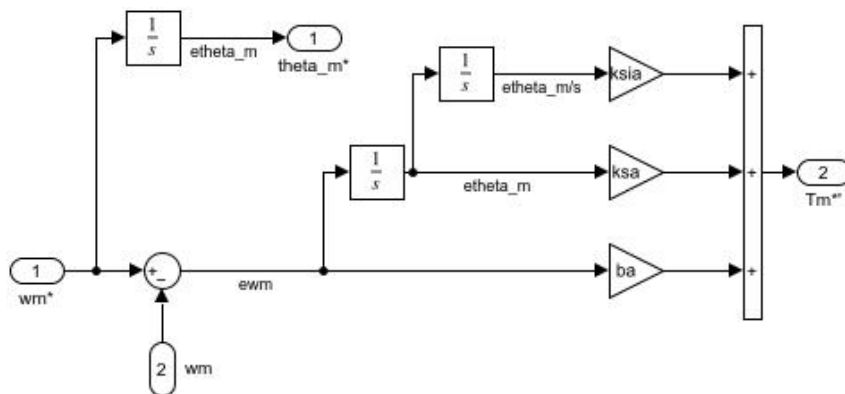


Figura 26: Control de movimiento PID.

Aunque se pretende seguir un perfil de posición, se opta por evitar el uso directo de una consigna de posición, ya que esto requeriría utilizar un derivador para obtener la consigna de velocidad angular correspondiente.

El uso de un derivador podría amplificar el ruido presente en la señal de entrada, especialmente porque la señal podría oscilar a frecuencias altas y la derivación es sensible a estos ruidos. Para mitigar este problema, se prefiere derivar manualmente el perfil de posición para obtener el perfil de velocidad, de modo que la velocidad resultante se convierta en la nueva consigna para el controlador.

La ecuación del controlador tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} T_m^{*'}(t) = e_\theta \cdot K_{sa} + K_{sia} \cdot \int e_\theta dt + e_\omega \cdot b_a \\ e_\omega = \omega_m^*(t) - \omega_m(t) \end{cases} \quad (42ha)$$

El modelo mecánico simplificado es:

$$J_{eq} \cdot \frac{d\omega_m}{dt}(t) = T_m^{*'}(t) - T_d(t) \quad (42hb)$$

Se considera que el modulador de torque tiene un ancho de banda infinito, por lo tanto, su función de transferencia actúa como una ganancia unitaria, (lo que se puede deducir al considerar una constante de tiempo tendiendo a cero, en la fórmula de la función de transferencia) entonces  $T_m^* = G_{Tl} \cdot T_m^{*'} \rightarrow T_m^* \approx T_m^{*'}$

Reemplazando en (42ha) y sabiendo que  $e_\omega = \frac{de_\theta}{dt}(t)$ , luego se puede representar (42ha) en el dominio de Laplace:

$$\begin{cases} J_{eq} \cdot s \cdot \Omega_m(s) = T_m^*(s) - T_d(s) = Kd \cdot (\Omega_m^*(s) - \Omega_m(s)) + K_p \cdot (\Theta_m^*(s) - \Theta_m(s)) + \frac{K_i}{s} \cdot (\Theta_m^*(s) - \Theta_m(s)) - T_d(s) \\ \Omega_m(s) = \Theta_m(s) \cdot s \end{cases} \quad (42hc)$$

Reemplazando las ecuaciones (42hc) se obtiene:

$$J_{eq} \cdot s^2 \cdot \Theta_m(s) = Kd \cdot s \cdot (\Theta_m^*(s) - \Theta_m(s)) + K_p \cdot (\Theta_m^*(s) - \Theta_m(s)) + \frac{K_i}{s} \cdot (\Theta_m^*(s) - \Theta_m(s)) - T_d(s) \quad (42hd)$$

Operando en (42hd) se llega a:

$$(J_{eq} \cdot s^2 + Kd \cdot s + K_p + \frac{K_i}{s}) \cdot \Theta_m(s) = (Kd \cdot s + K_p + \frac{K_i}{s}) \cdot \Theta_m^*(s) - T_d(s) \quad (42he)$$

De donde se pueden obtener las funciones de transferencia de la posición ( $\Theta_m(s)$ ) con respecto a la consigna de posición ( $\Theta_m^*(s)$ ) y de la posición ( $\Theta_m(s)$ ) con respecto al torque de perturbación externa ( $T_d(s)$ ):

$$G_{\frac{\Theta_m(s)}{\Theta_m^*(s)}} = \frac{Kd \cdot s + K_p + \frac{K_i}{s}}{J_{eq} \cdot s^2 + Kd \cdot s + K_p + \frac{K_i}{s}} \quad (42hf)$$

$$G_{\frac{\Theta_m(s)}{T_d(s)}} = -\frac{1}{J_{eq} \cdot s^2 + Kd \cdot s + K_p + \frac{K_i}{s}} \quad (42hg)$$

Si en (42hf) se multiplica y divide por s, se obtiene:

$$G_{\frac{\Theta_m(s)}{\Theta_m^*(s)}} = \frac{Kd \cdot s^2 + K_p \cdot s + K_i}{J_{eq} \cdot s^3 + Kd \cdot s^2 + K_p \cdot s + K_i} \quad (42hh)$$

$$G_{\frac{\Theta_m(s)}{T_d(s)}} = -\frac{s}{J_{eq} \cdot s^3 + Kd \cdot s^2 + K_p \cdot s + K_i} \quad (42hi)$$

De la ecuación (42hh) y (42hi) se puede observar que cuando  $K_i \neq 0$ , no se obtiene un error de estado estacionario ante un Escalón de torque de carga. Lo que se puede apreciar al aplicar el teorema del valor final, es decir haciendo  $s \rightarrow 0$  en donde obtenemos el valor final en régimen permanente:  $\Theta_m(s) = \Theta_m^*(s)$ .

Si  $K_i = 0$ , obtenemos un error de estado estacionario ya que si  $s \rightarrow 0 \Rightarrow \Theta_m(s) = \Theta_m^*(s) - \frac{T_l(s)}{K_p}$ .

De esta manera se observa que la acción integral compensa las perturbaciones de carga constante en estado estacionario.

Se desea calcular las constantes del controlador PID. Se aplica el método de Sintonía Serie, el cual define que los polos deben tener la misma distancia radial al origen (en el diagrama de Laplace los polos formaran una circunferencia), es decir que tienen la misma frecuencia ( $\omega_{pos}$ ) para obtener un filtro de Butterworth de tercer orden. Para realizar el método de asignación de polos se parte del polinomio deseado dado por la ecuación (42hj), donde  $n = 2 \cdot \xi + 1 = 2,5$  y  $\omega_{pos} = 800 \frac{rad}{s}$ , la cual se iguala al

polinomio característico (42hk), y por medio del método de asignación de polos se obtienen las constantes  $K_d$ ,  $K_p$  y  $K_i$ :

$$p_{des} = J_{eq} \cdot (s + \omega_{pos}) \cdot (s^2 + (n - 1) \cdot \omega_{pos} \cdot s + \omega_{pos}^2) \tag{42hj}$$

$$p_{caract} = J_{eq} \cdot s^3 + K_d \cdot s^2 + K_p \cdot s + K_i \tag{42hk}$$

Luego de igualar  $p_{des}$  y  $p_{caract}$ , obtenemos las siguientes relaciones:

$$K_d = J_{eq} \cdot n \cdot \omega_{pos} = b_a \tag{42hl}$$

$$K_p = J_{eq} \cdot n \cdot \omega_{pos}^2 = k_{sa} = b_a \cdot \omega_{pos} \tag{42hm}$$

$$K_i = J_{eq} \cdot \omega_{pos}^3 = k_{sia} = k_{sa} \cdot \frac{\omega_{pos}}{n} \tag{42hn}$$

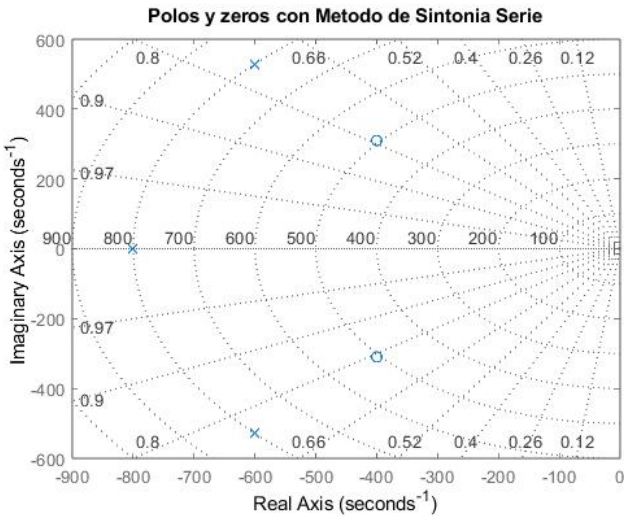


Figura 27: Polos y ceros del Sistema después de aplicar el Método de Sintonía Serie.

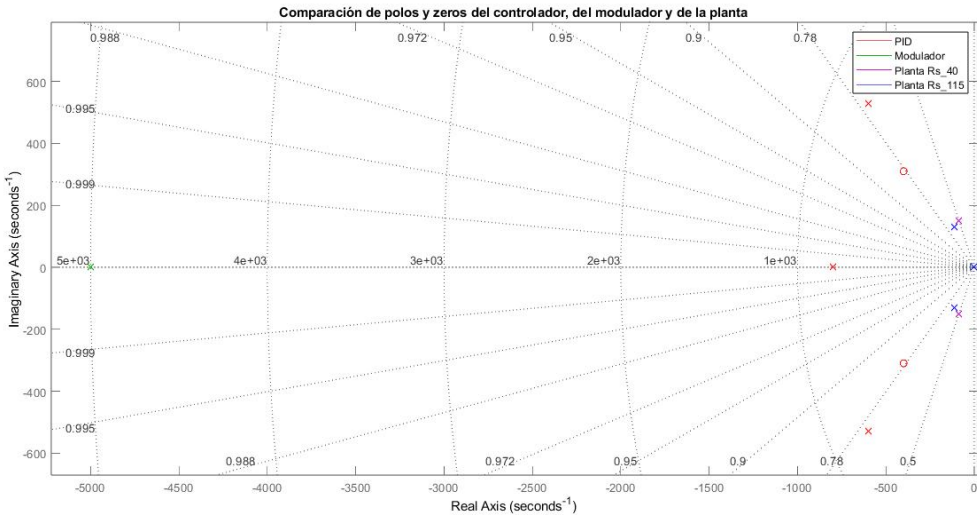


Figura 28: Comparación de polos y ceros del controlador, modulador y de la planta.

### 3.2.3. Observador de Estado de orden reducido

Un observador de estado (también conocido como estimador de estado) es un sistema dinámico utilizado en control de sistemas para estimar el estado interno de un sistema a partir de sus entradas y salidas. En muchas aplicaciones de control, no es posible medir directamente todos los estados del sistema, por lo que se utiliza un observador para inferir estos estados a partir de las mediciones disponibles.

Al tener un encoder, no podemos obtener de forma directa los valores de velocidad angular  $\omega_m$ , y el uso de un derivador para adquirirlos mediante la derivada de  $\theta_m(t)$  no es recomendable. Esta es la justificación para el uso de un observador de estado de orden reducido en nuestro caso. Estimaremos entonces la velocidad angular del rotor.

El observador incorpora únicamente el subsistema mecánico. Tendrá como entradas la consigna de torque  $T_m^{*'}(t)$  y la posición angular del motor  $\theta_m(t)$ , a partir de ello estimará la posición y la velocidad que van a ser utilizadas como entradas al controlador PID. Para plantear esto suponemos que la realimentación física de  $b_{eq} \cdot \omega_m(t)$  está desacoplada.

Modelamos el observador como:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt}(t) = A \cdot \tilde{x}(t) + B \cdot u(t) + K_e \cdot (y(t) - \tilde{y}(t)) \\ \tilde{y}(t) = C \cdot \tilde{x}(t) \end{cases} \quad (42i)$$

Donde la matriz  $K_e$  es la matriz que contiene los parámetros de ajuste del observador, definida por la forma:

$$K_e = \begin{bmatrix} K_{e\theta} \\ K_{e\omega} \end{bmatrix} \quad (42j)$$

Podemos continuar desarrollando el modelo del observador, de manera que termina viéndose así:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt}(t) = [A - K_e \cdot C] \cdot \tilde{x}(t) + B \cdot u(t) + K_e \cdot C \cdot x(t) \\ \tilde{y}(t) = C \cdot \tilde{x}(t) \end{cases} \quad (42k)$$

A partir del polinomio característico del sistema, conseguiremos los parámetros dentro del vector  $K_e$  para el ajuste de los polos del observador. Buscamos entonces el polinomio característico de  $A' = A - K_e \cdot C$ :

$$A' = [A - K_e C] = \begin{bmatrix} -K_{e\theta} & 1 \\ -K_{e\omega} & 0 \end{bmatrix}$$

$$|sI - A'| = \begin{vmatrix} s + K_{e\theta} & -1 \\ K_{e\omega} & s \end{vmatrix} = s^2 + s \cdot K_{e\theta} + K_{e\omega}$$

Sabiendo que los dos polos del observador son reales e iguales a  $-3200 \frac{rad}{s}$ , podemos escribir el polinomio de orden dos deseado como sigue:

$$(s + 3200)^2 = s^2 + 6400s + 3200^2 \quad (42l)$$

Hacemos una comparación de términos entre el polinomio característico de nuestro observador y el polinomio deseado. Por lo tanto:

$$K_{e\theta} = 6400 \frac{rad}{s} \quad K_{e\omega} = 1,024 \cdot 10^7 \frac{rad^2}{s^2} \quad (42m)$$

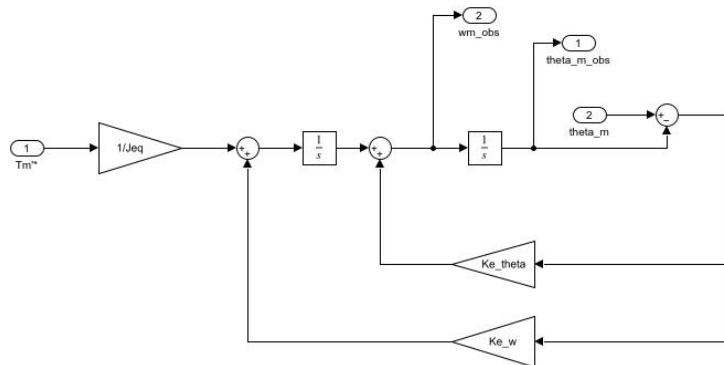


Figura 29: Diagrama de bloques del observador de estados reducido.

3.2.4. Simulación en tiempo continuo

a) Seguimiento de consignas de movimiento:

Para corroborar el funcionamiento del controlador y el observador, se usará una consigna de posición trapezoidal como se muestra en la siguiente figura:

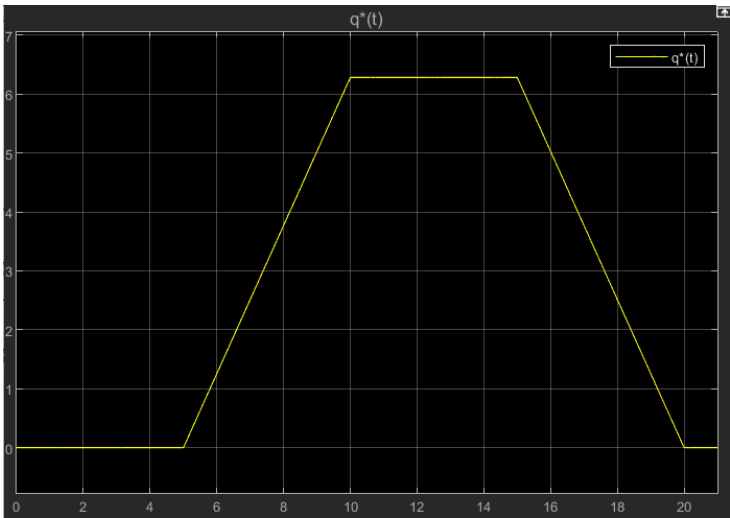


Figura 30: Consigna de posición trapezoidal a un valor de  $2\pi$  entre 10 y 20 segundos.

Se muestra la respuesta tanto medida como la estimada por el observador, y acercamientos en un estado transitorio de ejemplo. La posición real  $\theta_m(t)$  tiene cierto error de estado estacionario con respecto a  $\theta_m^*(t)$ , la posición angular de consigna, resultante de  $q_1^*(t)$ .

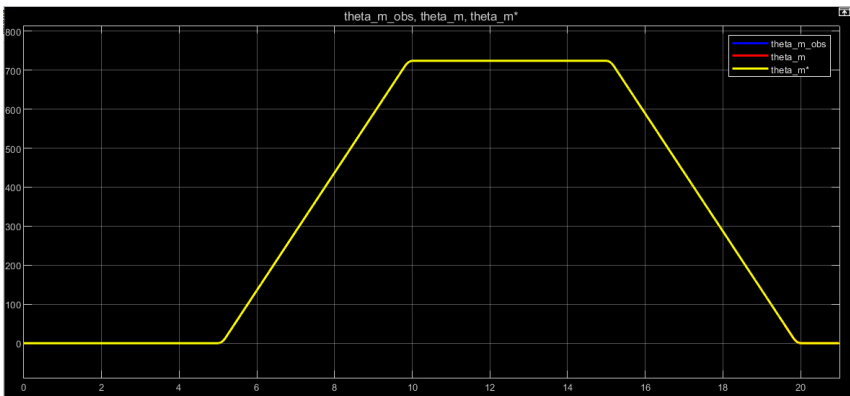


Figura 31: Posición angular medida  $\theta_m(t)$ , consigna  $\theta_m^*(t)$ , y observada.



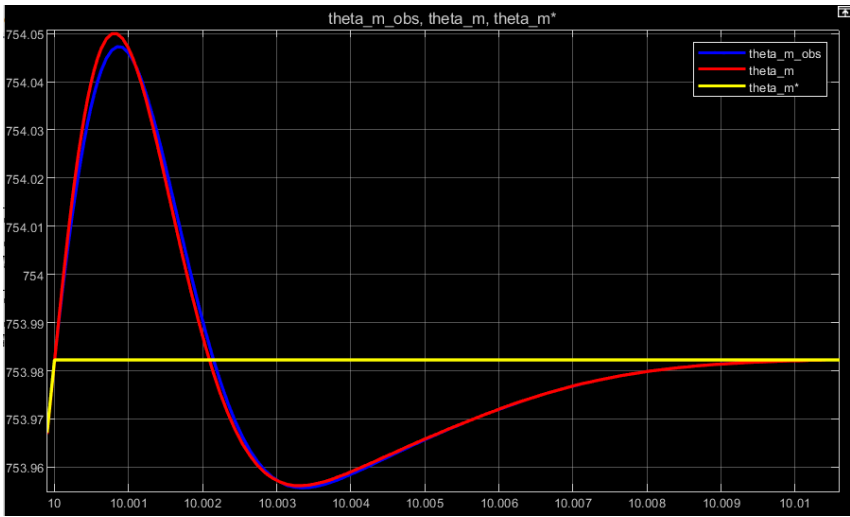


Figura 32: Acercamiento a posiciones de consigna, real y observada a los 10s.

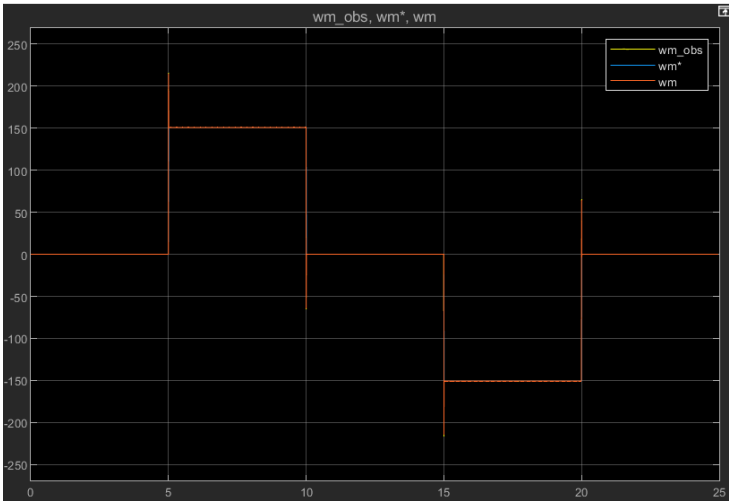


Figura 33: Velocidad medida, consigna y observada para la consigna de posición empleada.

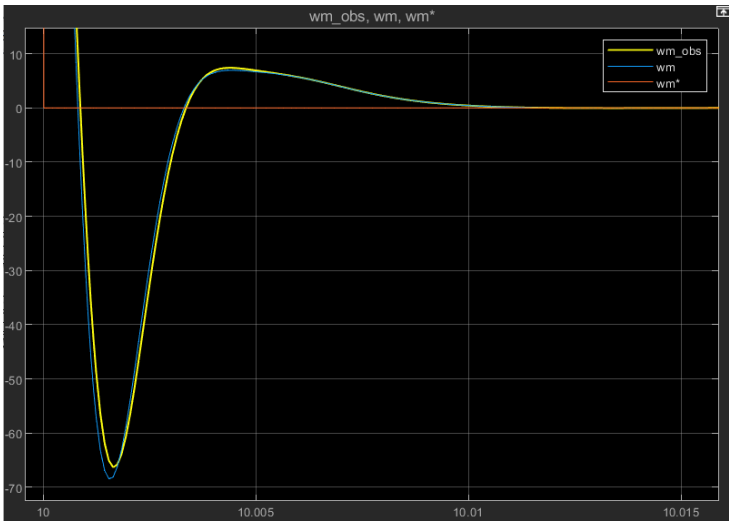


Figura 34: Acercamiento a velocidad medida, consigna y observada para la consigna de posición empleada a los 10s.

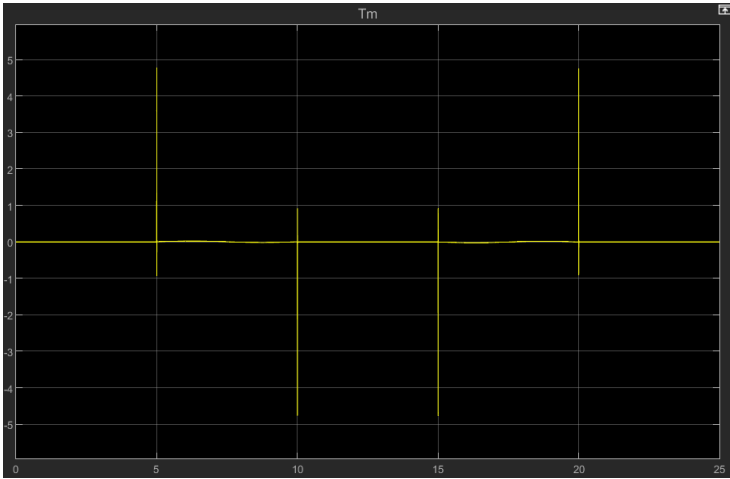


Figura 35: Torque electromagnético  $T_m(t)$  necesario para cumplir con las velocidades consigna.

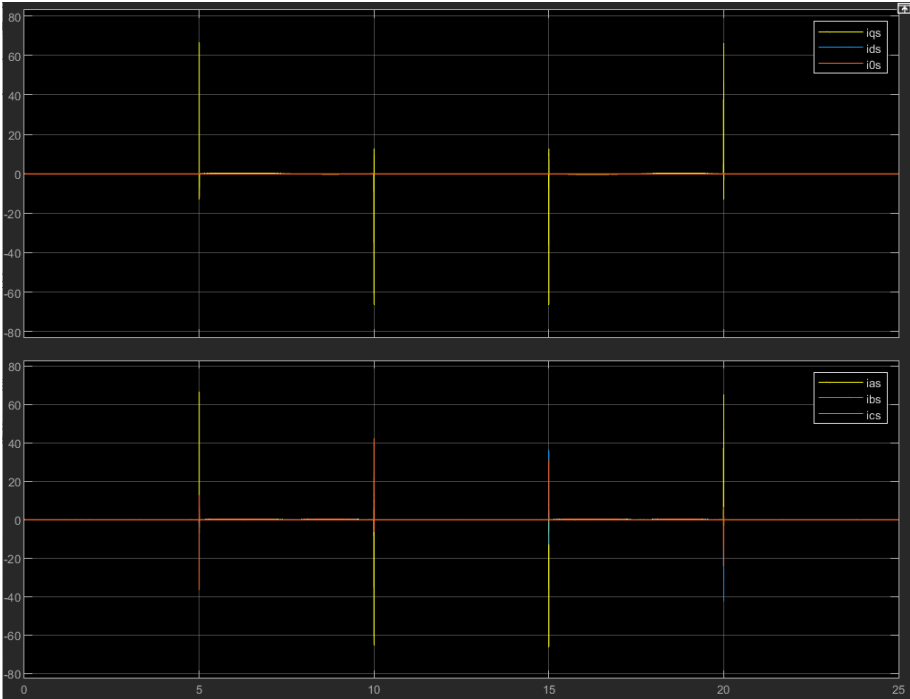


Figura 36: Corrientes en coordenadas “abc” y qd0 necesarias para cumplir con la consigna.

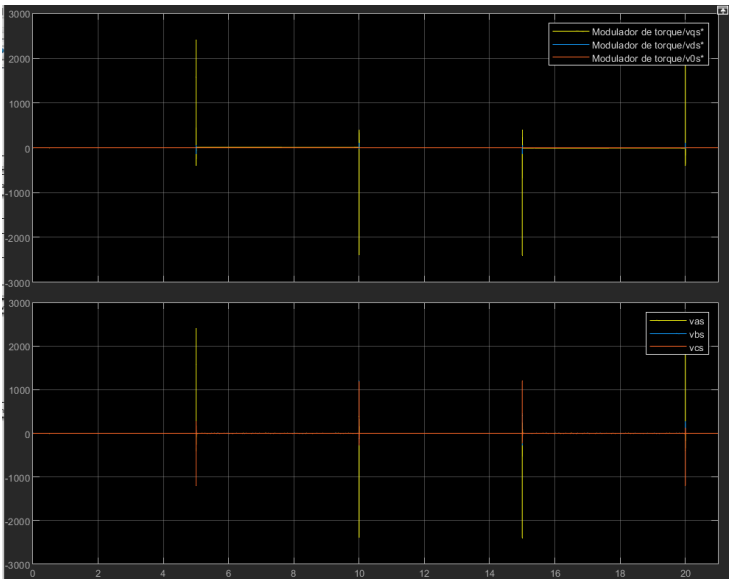


Figura 37: Tensiones en coordenadas “abc” y ”qd0” necesarias para cumplir con la consigna.

**b) Rechazo a perturbaciones:**

Ahora analizaremos cómo se comporta el sistema frente a una perturbación de carga representada como escalón a  $5Nm$ .

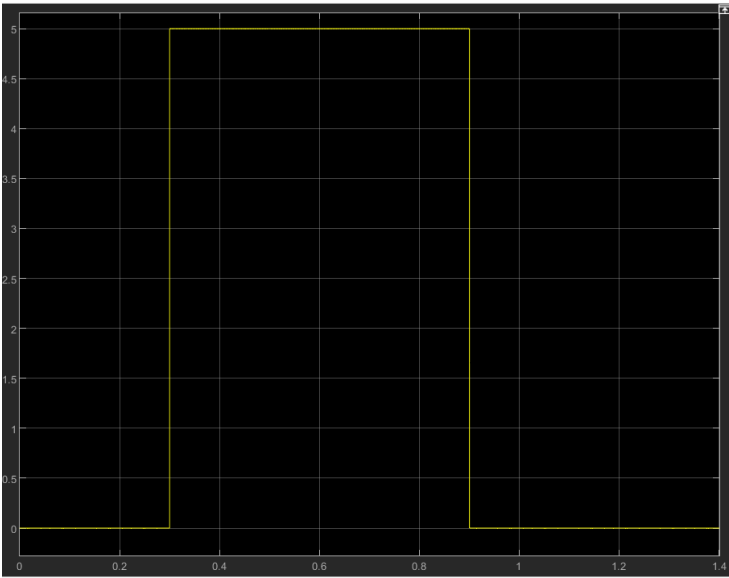


Figura 38: Torque de carga aplicado en  $t = 0,3$  s.

Luego de la perturbación, se generó un error de estado estacionario en la posición angular del motor. Dicho efecto se ve en la siguiente imagen:

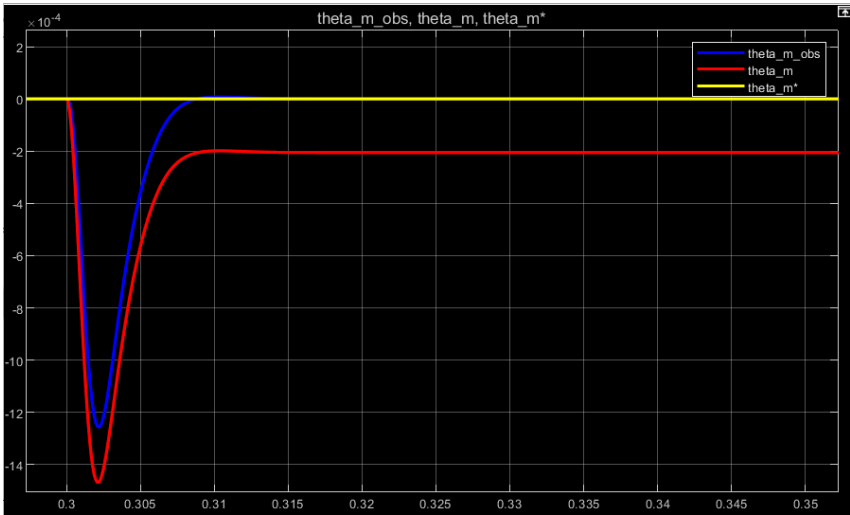


Figura 39: Error de estado estacionario de la posición al aplicarse la carga  $T_l(t) = 5Nm$  a los 0,3 s.

3.2.5. Verificación de desempeño y/o mejoras

a) Especificaciones de operación (valores límites):

De la simulación anterior y los valores límites dados por el fabricante e impuestos en el sistema, se genera la siguiente tabla comparativa:

	Especificaciones de operación		Resultados obtenidos	
	Régimen continuo	Valor pico	Régimen continuo	Valor pico
$\omega_m$ [rad/s]	691,15	n/a	150,8	219,12
$T_m$ [Nm]	0,142	0,375	0,024	4,53
$i_s$ [A]	0,4	2	0,32	63,49
$v_s$ [V]	24	n/a	7	2403,35

Cuadro 4: Especificaciones de operación y resultados obtenidos

Al aplicar la consigna trapezoidal de posición y realizar el análisis del seguimiento de la misma se verifica que se han superado los valores máximos de operación establecidos en la primera sección de este informe. Estos picos se deben mayormente a los cambios rápidos en la velocidad, los cuales vienen provocados por el perfil de posición trapezoidal, lo que equivale a consignas cuadradas de velocidad (físicamente imposibles de realizar).

Esto puede solucionarse si se propone un perfil de posición trapezoidal con un cambio más suave (una curva) lo que se transmite como un cambio incremental suave en el motor. Para ello se dispone de una consigna trapezoidal de velocidad, generando los siguientes resultados:

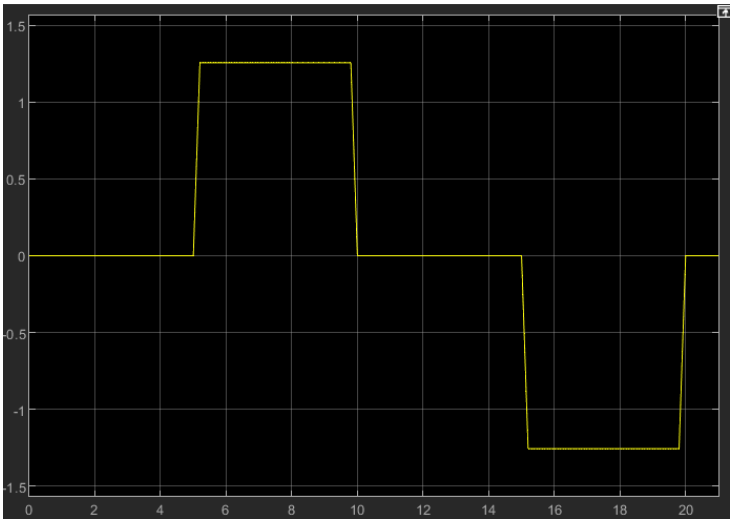


Figura 40: Nueva consigna trapezoidal de velocidad  $\omega_m^*(t)$ .

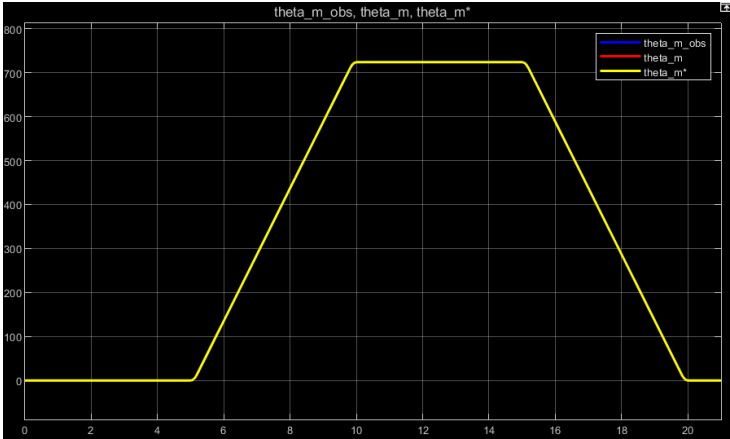


Figura 41: Nueva consigna curva de posición  $\theta_m^*(t)$  dada la nueva  $\omega_m^*(t)$ .

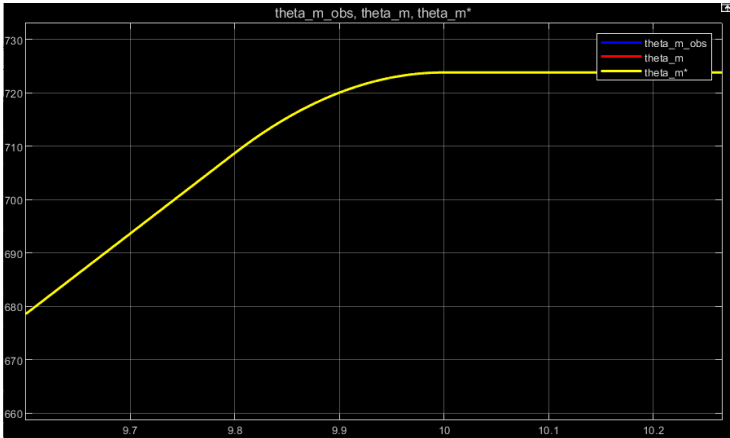


Figura 42: Acercamiento a nueva consigna curva de posición  $\theta_m^*(t)$  en  $t = 10s$ .

La utilización de este perfil asegura que el brazo realice el movimiento requerido dentro del tiempo estipulado, evitando el fenómeno de “jerk” y el sobrepaso de los valores límites. Vemos en la gráfica de velocidad que ya no existen picos en las zonas de cambio de pendiente.

Podemos observar los nuevos perfiles de Torque, Corrientes y Tensiones producidos por la consigna actual:

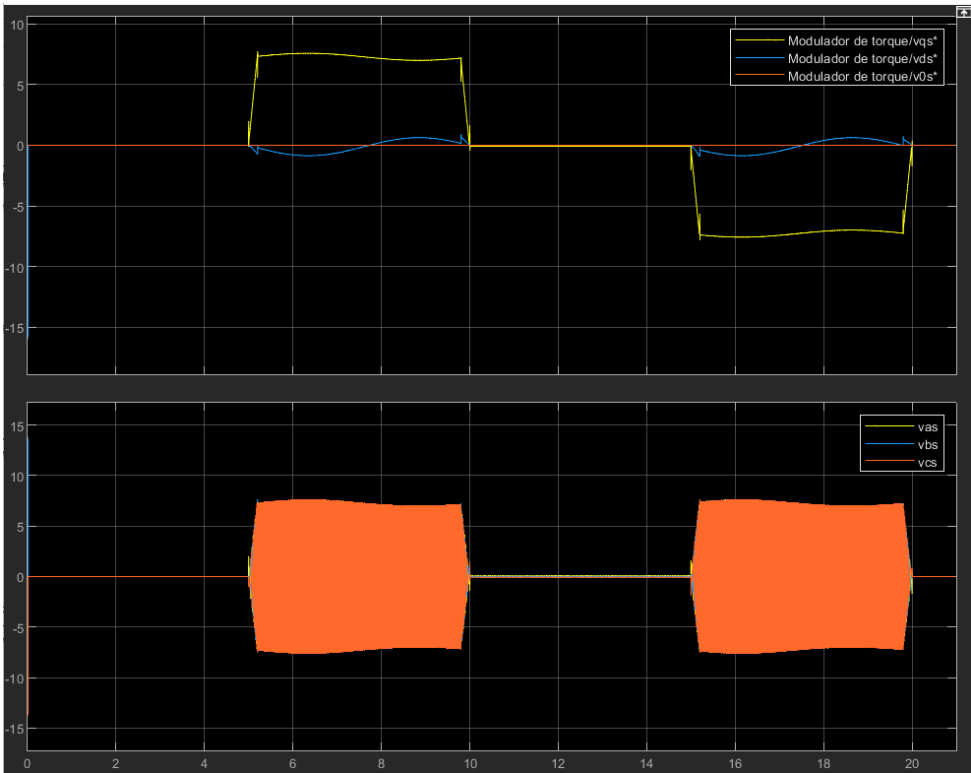


Figura 43: Tensiones dadas con la nueva consigna.

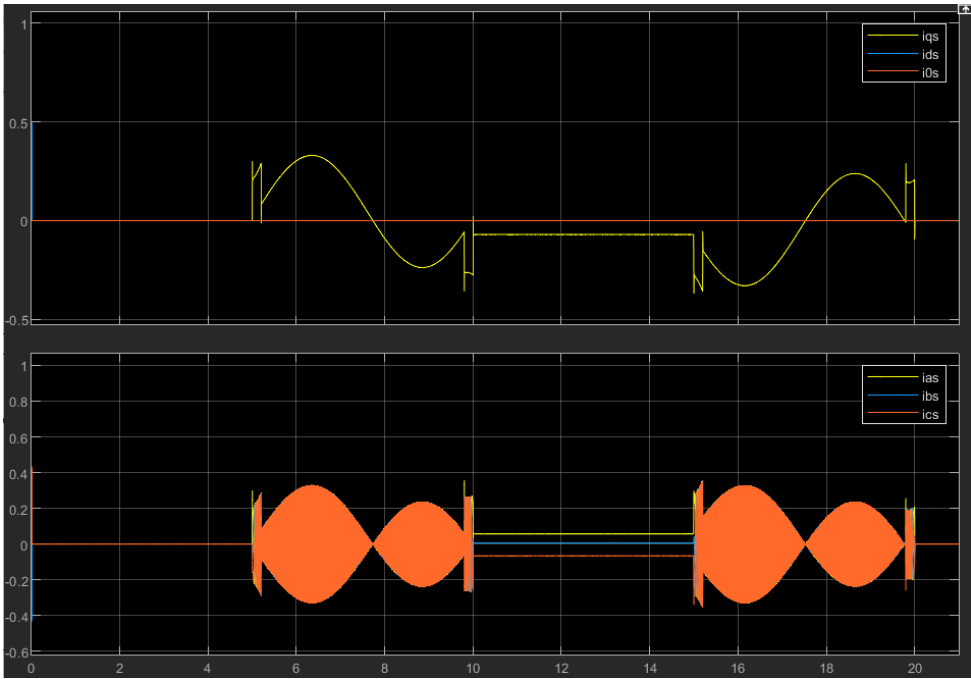


Figura 44: Corrientes dadas con la nueva consigna.

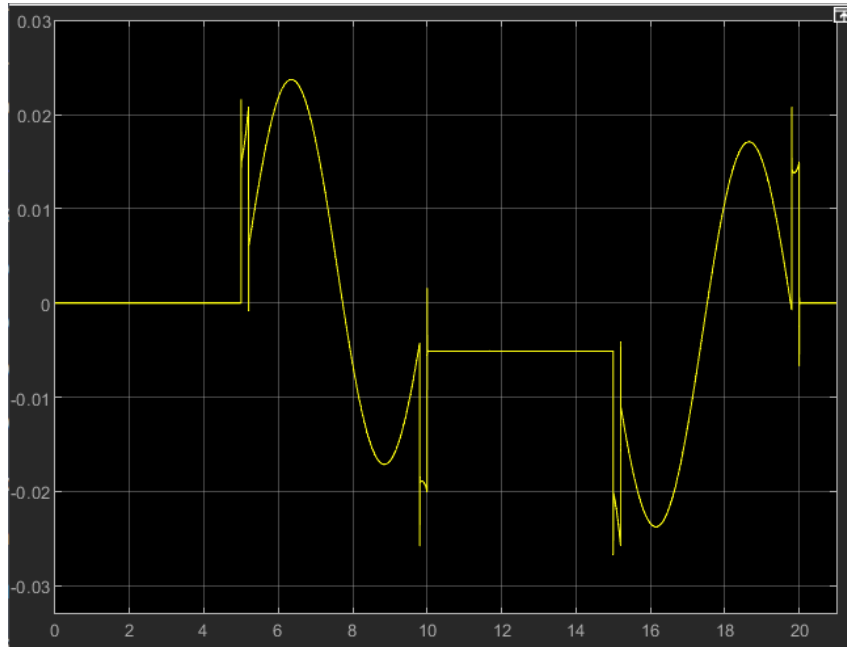


Figura 45: Torque electromagnético como resultado de la nueva consigna.

#### b) Mejoras al observador de estado:

Uno de los problemas que hemos podido observar, además del sobrepase de los límites eléctricos y/o mecánicos de nuestro sistema, es que al aplicar un torque de carga perturbador hemos encontrado un error de estado estacionario que hacía que no se cumpliera la consigna de posición. Esto se debe a que no tomamos en cuenta el torque perturbador en nuestro estimador de estados. Dado que éste es equivalente a un controlador proporcional derivativo, podemos agregar una acción integral que se encargué de eliminar éste error de estado estacionario. D

Se agrega entonces una sección de acción integral a través de un nuevo estado  $z(t)$  dado por:

$$z(t) = \int (\theta(t) - \hat{\theta}(t)) dt \quad (42n)$$

Se toma en cuenta entonces el tiempo que permanece la estimación de estado en un valor erróneo. El modelo del observador redefinido es:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\theta}}{dt}(t) = K_{e\theta} \cdot (\theta(t) - \hat{\theta}(t)) + \hat{\omega}(t) \\ \frac{d\hat{\omega}}{dt}(t) = K_{e\omega} \cdot (\theta(t) - \hat{\theta}(t)) + \frac{T_m^*(t)}{J_{eq}} + z(t) \\ \frac{dz}{dt}(t) = K_{ei} \cdot (\theta(t) - \hat{\theta}(t)) \end{cases} \quad (42ñ)$$

Para obtener los valores de las ganancias del observador, debemos encontrar la ecuación característica, a través de los autovalores de la matriz a lazo cerrado  $A' = [A - K_e \cdot C]$ :

$$A' = [A - K_e \cdot C] = \begin{bmatrix} -K_{e\theta} & 1 & 0 \\ K_{e\omega} & 0 & 1 \\ -K_{ei} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (42o)$$

$$|s \cdot I - A'| = \begin{vmatrix} s + K_{e\theta} & -1 & 0 \\ K_{e\omega} & s & -1 \\ K_{ei} & 0 & s \end{vmatrix} = s^3 + s^2 \cdot K_{e\theta} + s \cdot K_{e\omega} + K_{ei} \quad (42p)$$

Planteamos un polinomio de tercer orden con polos reales e iguales en  $s_{1,2,3} = -3200 \text{ rad/s}$ :

$$(s + 3200)^3 = s^3 + 3 \cdot s^2 \cdot 3200 + 3 \cdot s \cdot 3200^2 + 3200^3 \quad (42q)$$

$$\begin{cases} K_{e\theta} = 9,6 \cdot 10^3 \\ K_{e\omega} = 3,072 \cdot 10^7 \\ K_{ei} = 3,2768 \cdot 10^{10} \end{cases} \quad (42r)$$

A continuación, se ve el diagrama del observador modificado resultante:

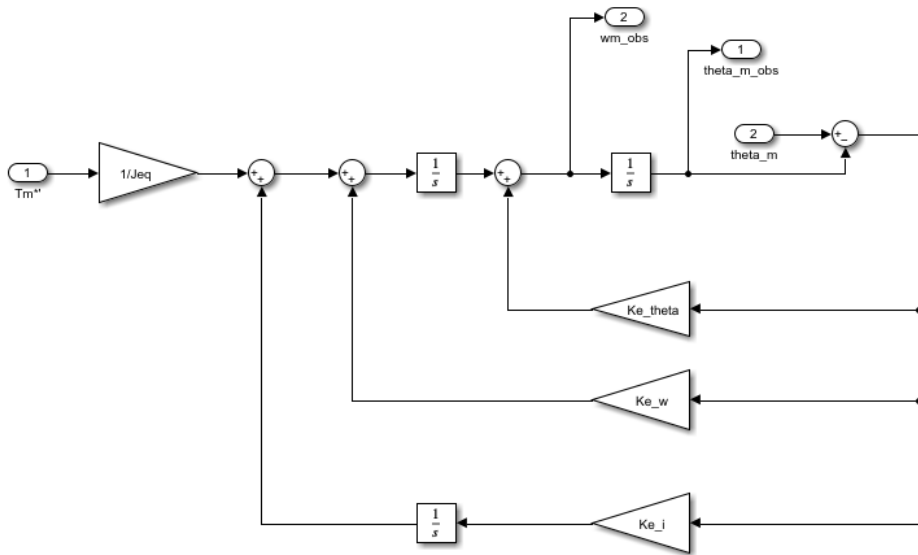


Figura 46: Observador con acción integral.

Se somete al sistema a la misma perturbación de torque de carga, y se ve que se ha eliminado el error en régimen estacionario al incluir la acción integral:

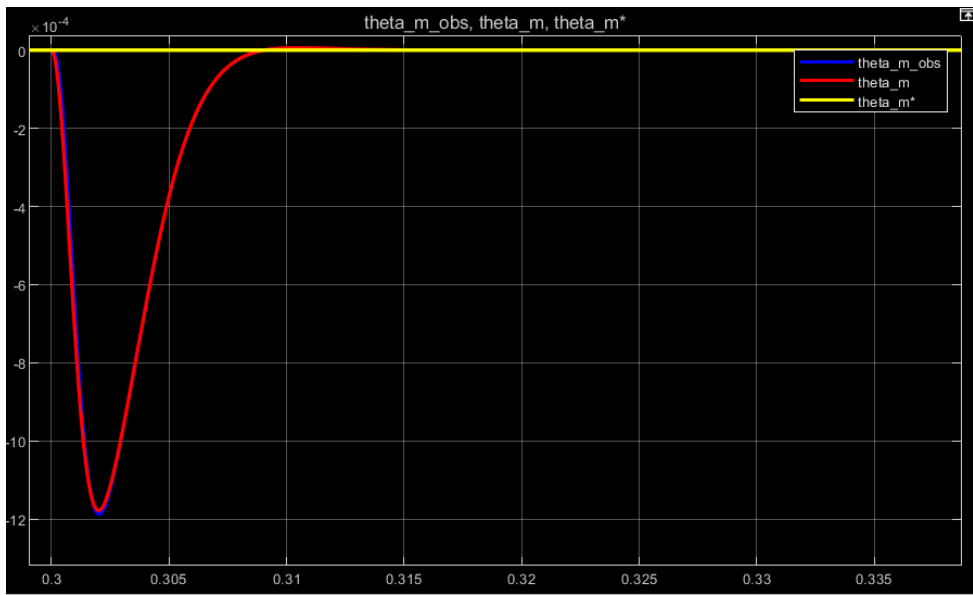


Figura 47: Corrección de error de estado estacionario con acción integral.

c) Comportamiento térmico del motor:

Para un esfuerzo continuo debemos tener en cuenta los valores de temperatura que pueda alcanzar el estator. Se debe corroborar entonces para un período extendido de tiempo con una operación continua repetitiva si los valores se mantienen dentro de los valores de operación admisibles.



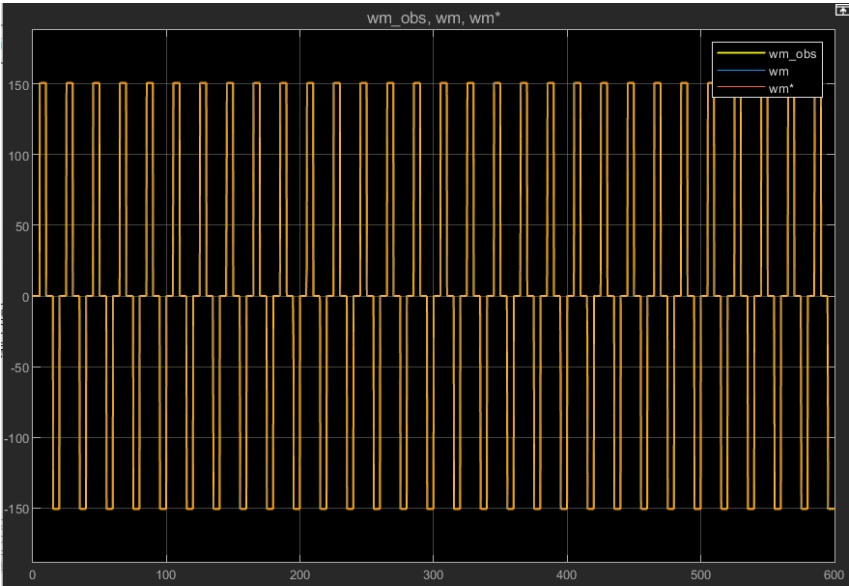


Figura 48: Consigna de velocidad cíclica.

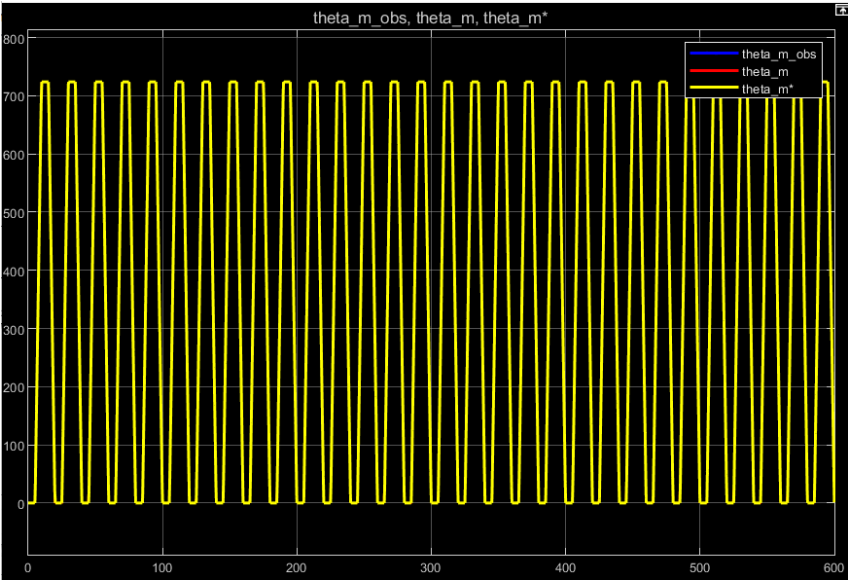


Figura 49: Consigna de posición cíclica.

Como se puede corroborar en la siguiente figura, la temperatura no supera los límites de operación establecidos para el bobinado del estator ( $115^{\circ}C$ ) al observarse que la misma converge asintóticamente cerca de  $46^{\circ}C$ .

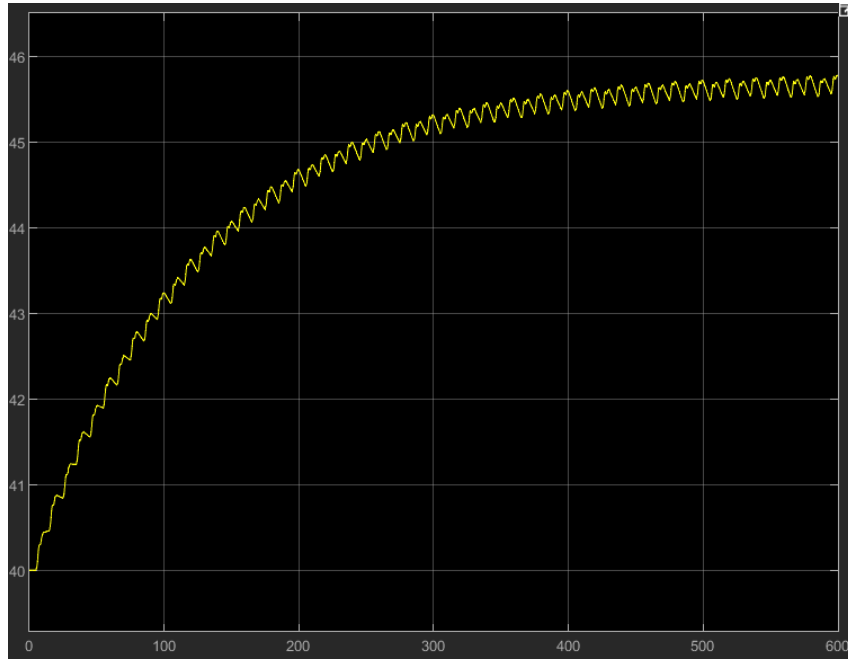


Figura 50: Consigna de posición cíclica.

**d) Degradación de desempeño del sistema al colocar sensores con ancho de banda finito.**

Ahora se evaluará si aparece alguna degradación de desempeño del sistema cuando se considera ancho de banda limitado de los sensores y acondicionadores de señal, reemplazando los sensores de función de transferencia la unidad usados hasta ahora por modelos aproximados equivalentes con características de *filtro Pasa Bajos* (LP) con *ganancia* ( $k$ ) *unitaria*, implementados en el Espacio de Estados (SS):

- Corrientes  $i_{as}(t), i_{bs}(t), i_{cs}(t)$ : modelo LP en SS 2do orden,  $\omega_n = 6000 \text{ rad/s}, \zeta = 1$ .
- Posición angular  $\theta_m(t)$ : modelo LP en SS 2orden,  $\omega_n = 2000 \text{ rad/s}, \zeta = 1$ .
- Temperatura  $T_s(t)$ : modelo LP en SS 1orden,  $\tau = 20s$ .

La función de transferencia de un filtro pasa bajo de primer orden es la ecuación (42s), y la de un filtro pasa bajo de segundo orden es la ecuación (42t).

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (42s)$$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (42t)$$

Las funciones de transferencia (42s) y (42t), se las pasó al espacio de estado, mediante la forma canónica controlable, obteniendo los siguientes resultados:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}(t) = \frac{1}{\tau} \cdot u(t) - \frac{1}{\tau} \cdot x_1(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (42u)$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}(t) = x_2(t) \\ \frac{dx_2}{dt}(t) = \omega_n^2 \cdot u(t) - \omega_n^2 \cdot x_1(t) - 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot x_2(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (42v)$$

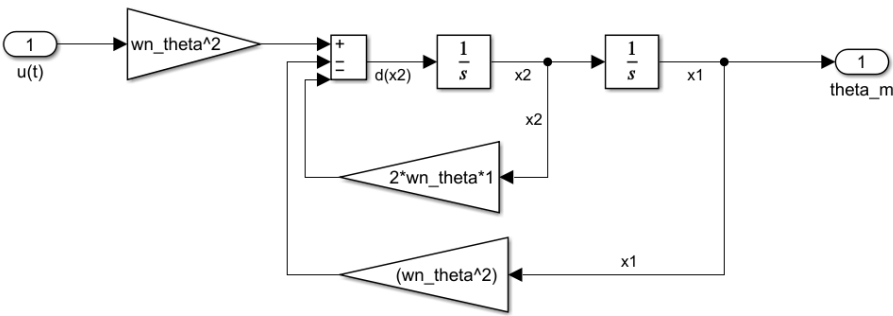


Figura 51: Diagrama de bloques de filtro LP de segundo orden para sensor de posición.

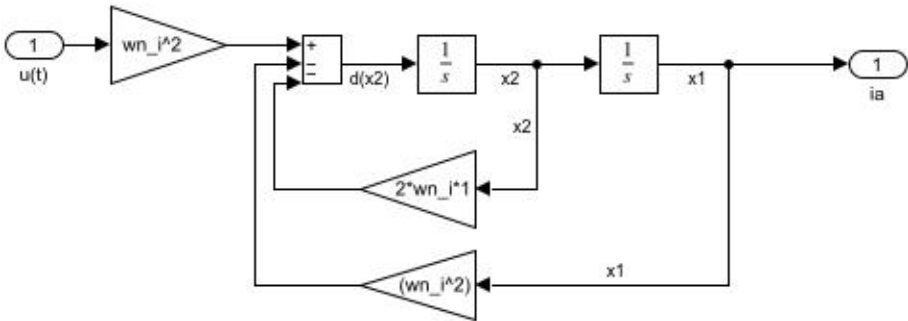


Figura 52: Diagrama de bloques de filtro LP de segundo orden para sensor de corriente.

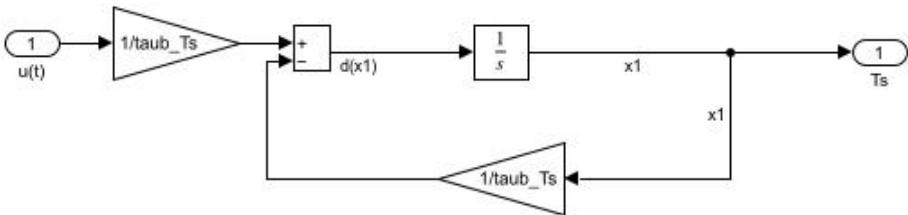


Figura 53: Diagrama de bloques de filtro LP de primer orden para sensor de temperatura.

Comenzamos a hacer pruebas en la simulación para distintos valores de  $\omega_n$  de cada sensor, para comprobar cómo afectan los cambios del cumplimiento de las consignas, las corrientes, tensiones y temperatura del estator. Evaluaremos cómo se ve afectada la temperatura al final, cuando consideremos que los valores de  $\omega_n$  óptimos se han encontrado. Con las frecuencias  $\omega_n = 6000rad/s$  para los sensores de corriente y  $\omega_n = 2000rad/s$  para el sensor de posición angular, el sistema diverge, las consignas no se cumplen y los valores límites impuestos para tensión, corriente, velocidad y torque se sobrepasan. Puede que esto se deba a que la frecuencia de corte de los filtros sean menores a las ideales para cada caso. Los resultados se muestran a continuación:

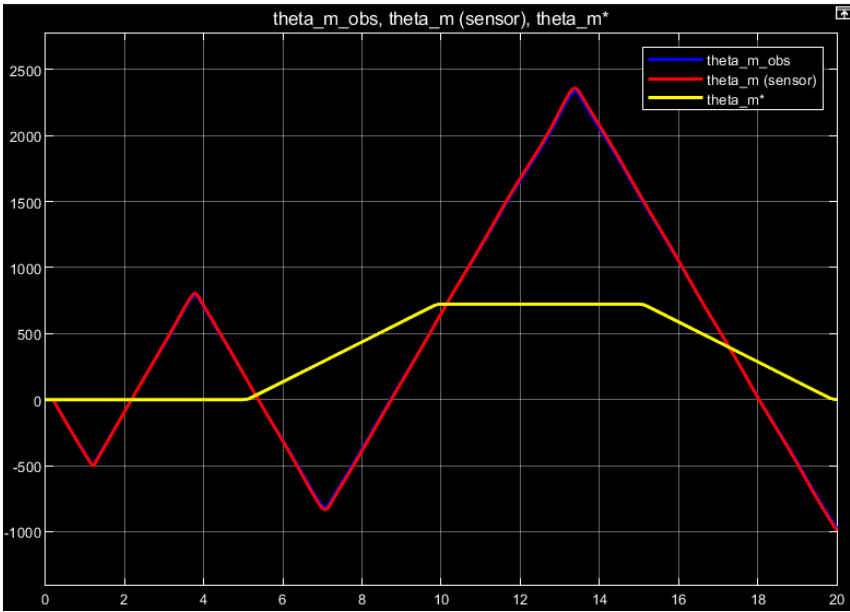


Figura 54:  $\theta_m(t)$  para  $\omega_n = 6000rad/s$  de los sensores de corriente y  $\omega_n = 2000rad/s$  del sensor de posición.

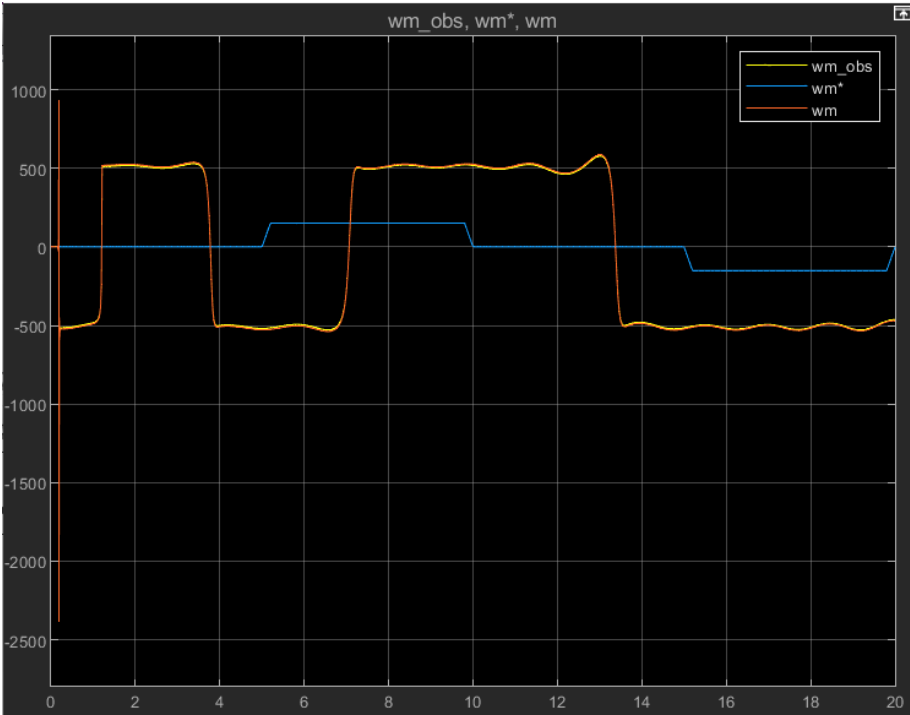


Figura 55:  $\omega_m(t)$  para  $\omega_n = 6000rad/s$  de los sensores de corriente y  $\omega_n = 2000rad/s$  del sensor de posición.

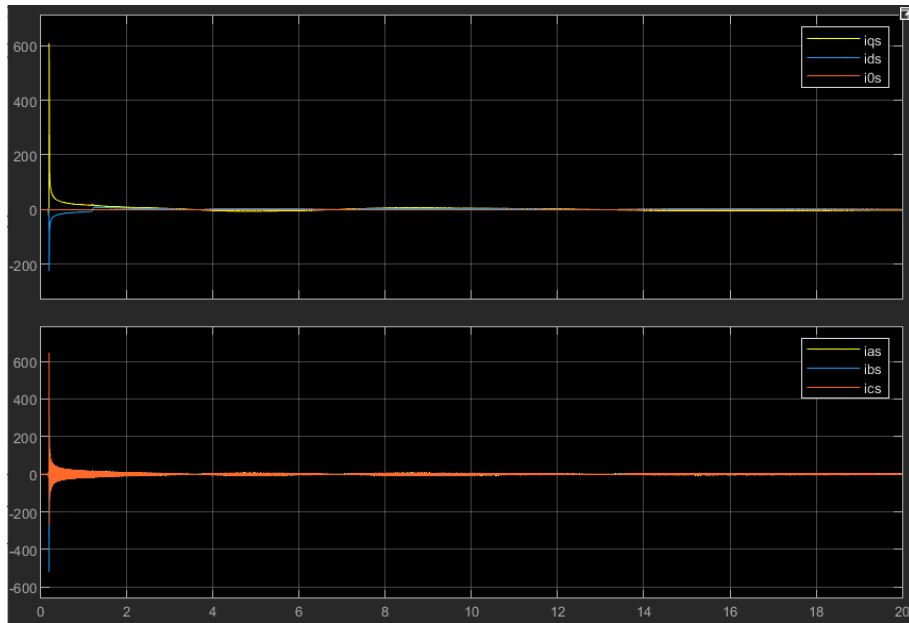


Figura 56:  $i_{a,b,c}^r(t)$  y  $i_{q,d,0}^r(t)$  para  $\omega_n = 6000\text{rad/s}$  de los sensores de corriente y  $\omega_n = 2000\text{rad/s}$  del sensor de posición.

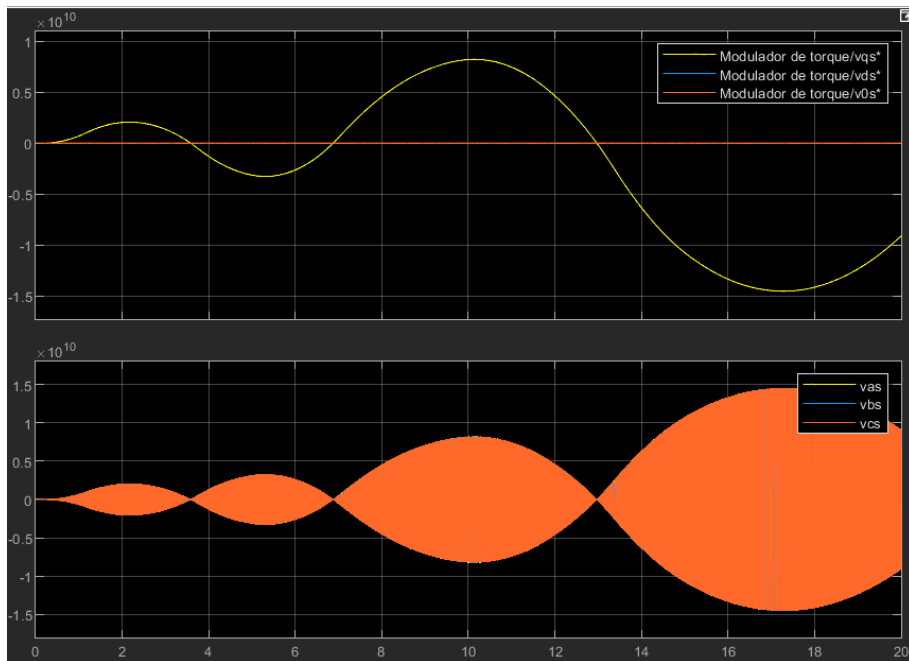


Figura 57:  $v_{a,b,c}^r(t)$  y  $v_{q,d,0}^r(t)$  para  $\omega_n = 6000\text{rad/s}$  de los sensores de corriente y  $\omega_n = 2000\text{rad/s}$  del sensor de posición.

Lo primero que vamos a cambiar es el valor de  $\omega_n$  correspondiente al sensor de posición, haciendo que se duplique en valor. Como vemos en las imágenes que siguen, esto es, aún, insuficiente.

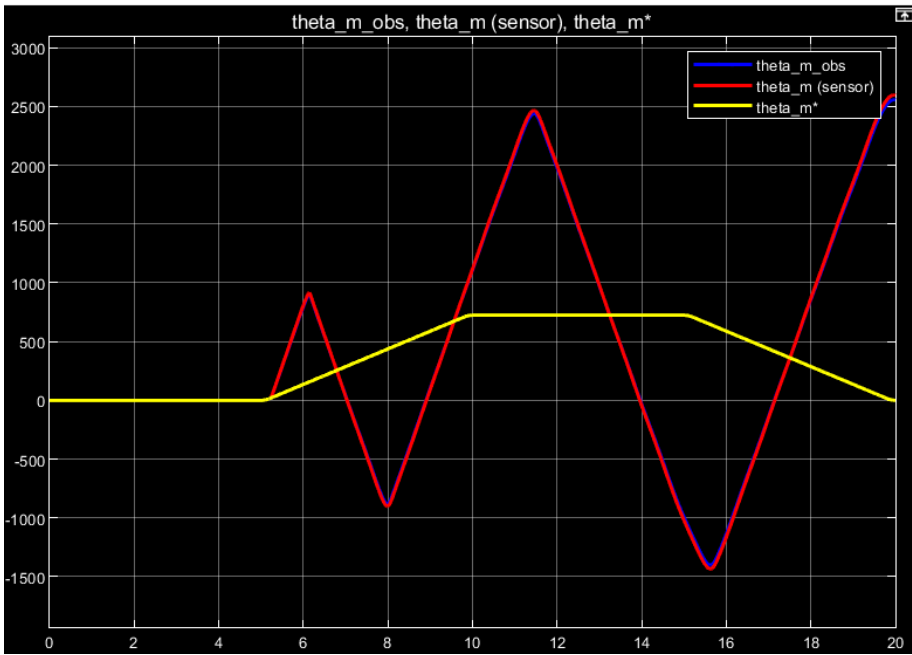


Figura 58:  $\theta_m(t)$  para  $\omega_n = 6000rad/s$  de los sensores de corriente y  $\omega_n = 4000rad/s$  del sensor de posición.

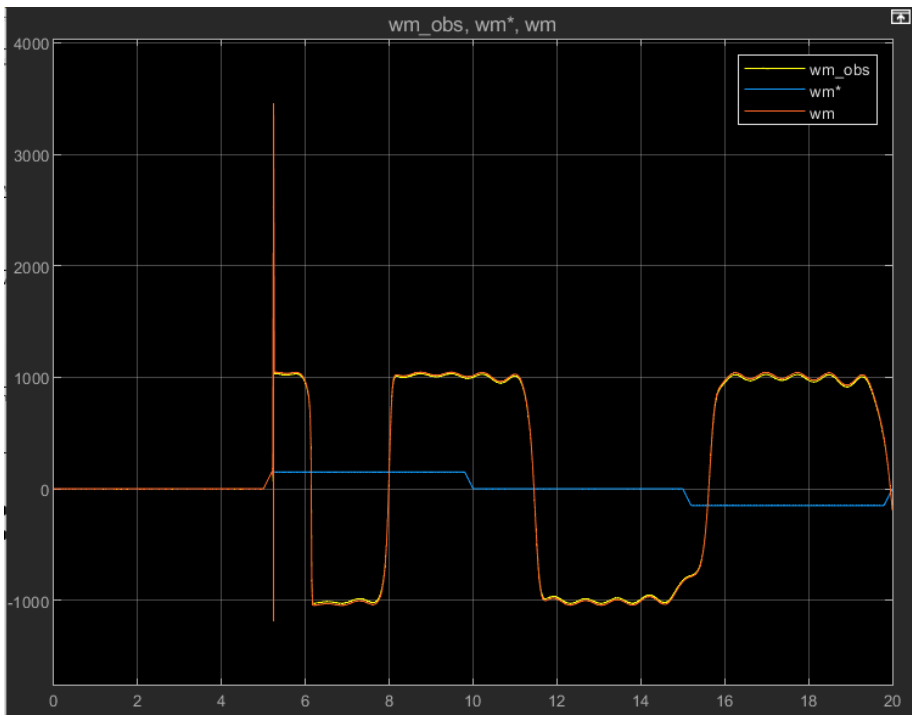


Figura 59:  $\omega_m(t)$  para  $\omega_n = 6000rad/s$  de los sensores de corriente y  $\omega_n = 4000rad/s$  del sensor de posición.

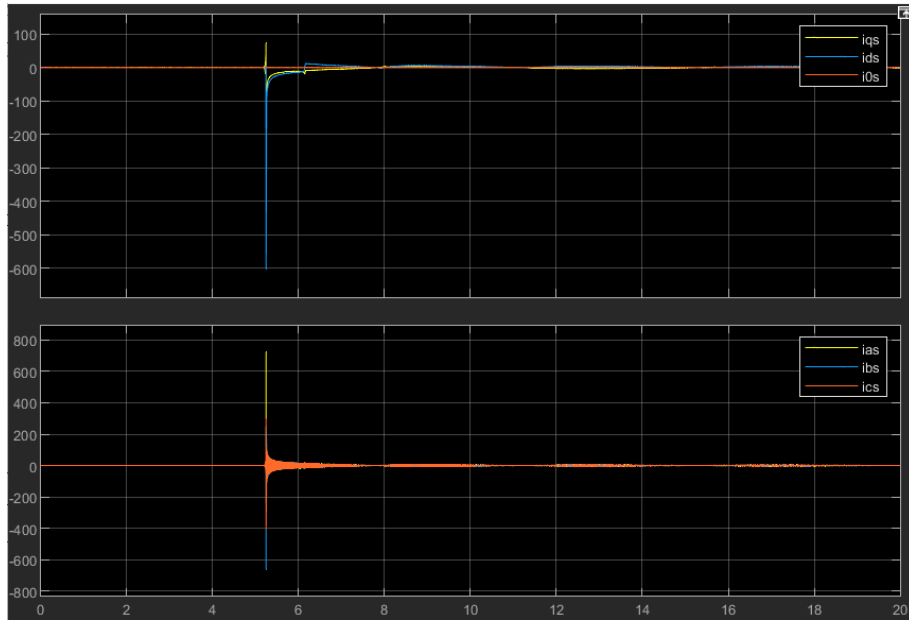


Figura 60:  $i_{a,b,c}^r(t)$  y  $i_{q,d,0}^r(t)$  para  $\omega_n = 6000rad/s$  de los sensores de corriente y  $\omega_n = 4000rad/s$  del sensor de posición.

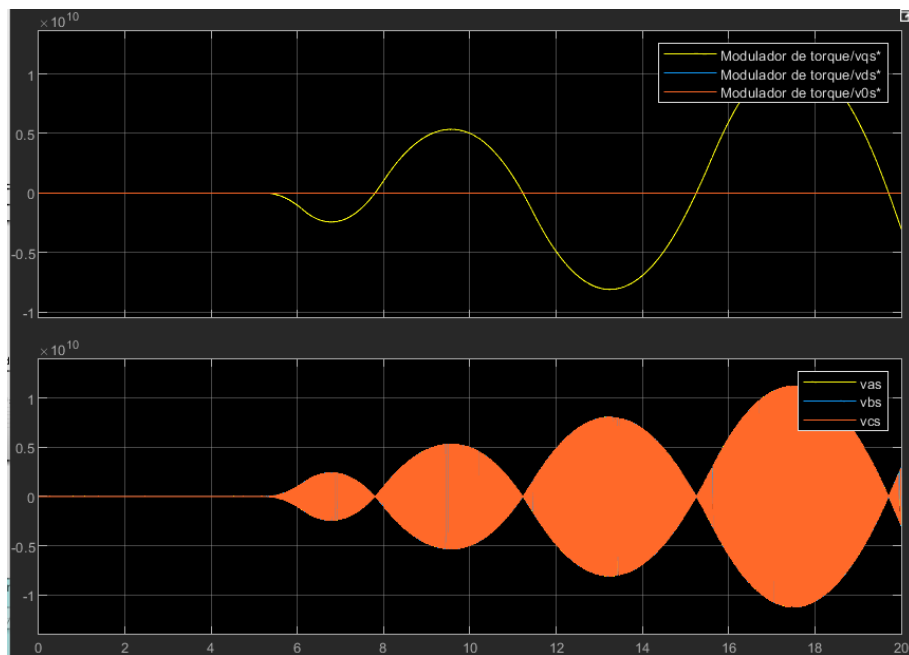


Figura 61:  $v_{a,b,c}^r(t)$  y  $v_{q,d,0}^r(t)$  para  $\omega_n = 6000rad/s$  de los sensores de corriente y  $\omega_n = 4000rad/s$  del sensor de posición.

El último cambio de  $\omega_n$  para el sensor de posición mejora por mucho las respuestas en términos de posición y velocidad, pero aún se superan los valores límites de tensión y corriente.

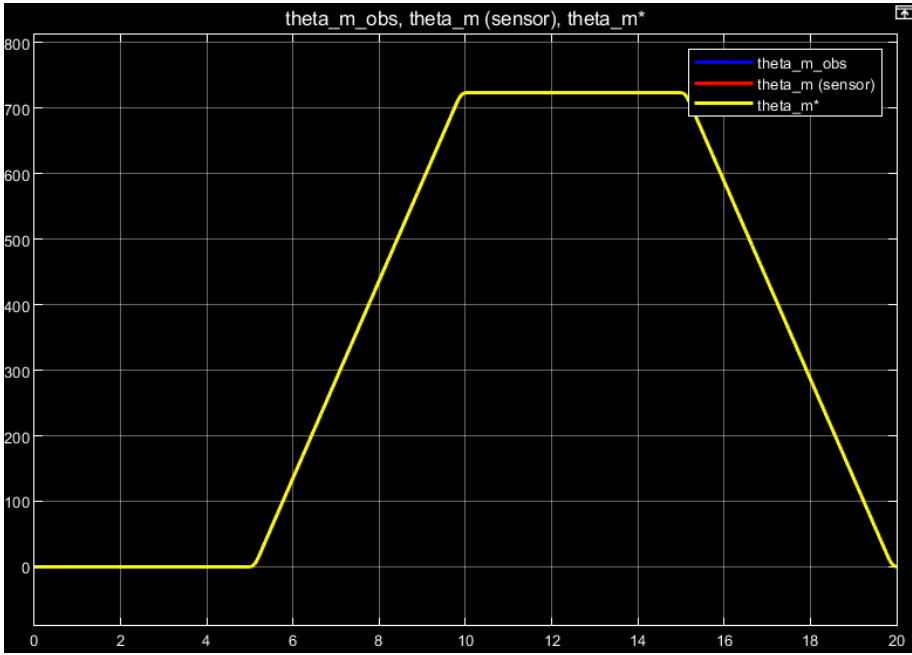


Figura 62:  $\theta_m(t)$  para  $\omega_n = 6000rad/s$  de los sensores de corriente y  $\omega_n = 6000rad/s$  del sensor de posición.

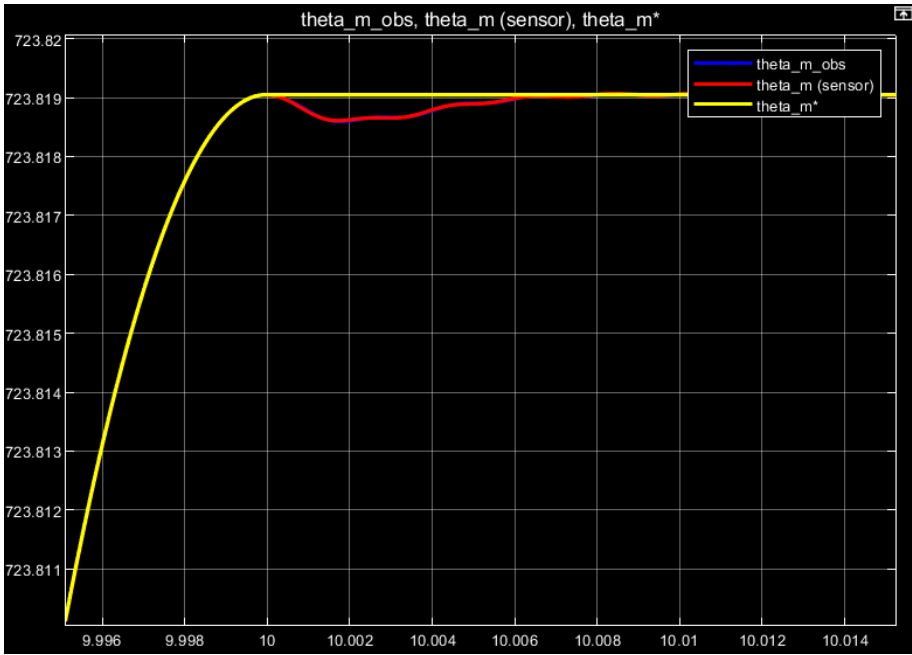


Figura 63:  $\theta_m(t)$  para  $\omega_n = 6000rad/s$  de los sensores de corriente y  $\omega_n = 6000rad/s$  del sensor de posición. Acercamiento en  $t = 10s$



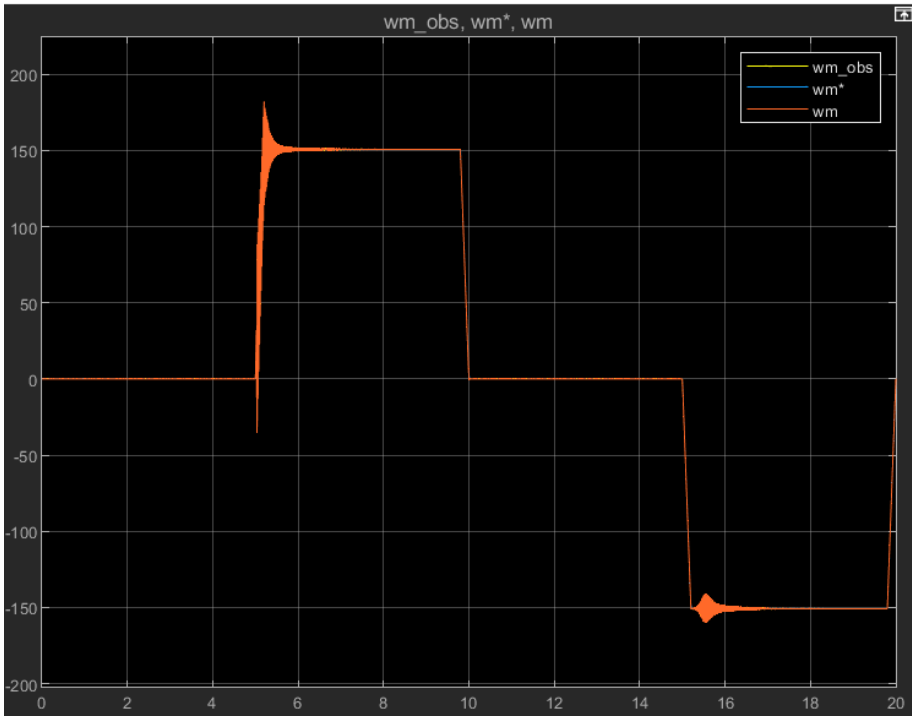


Figura 64:  $\omega_m(t)$  para  $\omega_n = 6000rad/s$  de los sensores de corriente y  $\omega_n = 6000rad/s$  del sensor de posición.

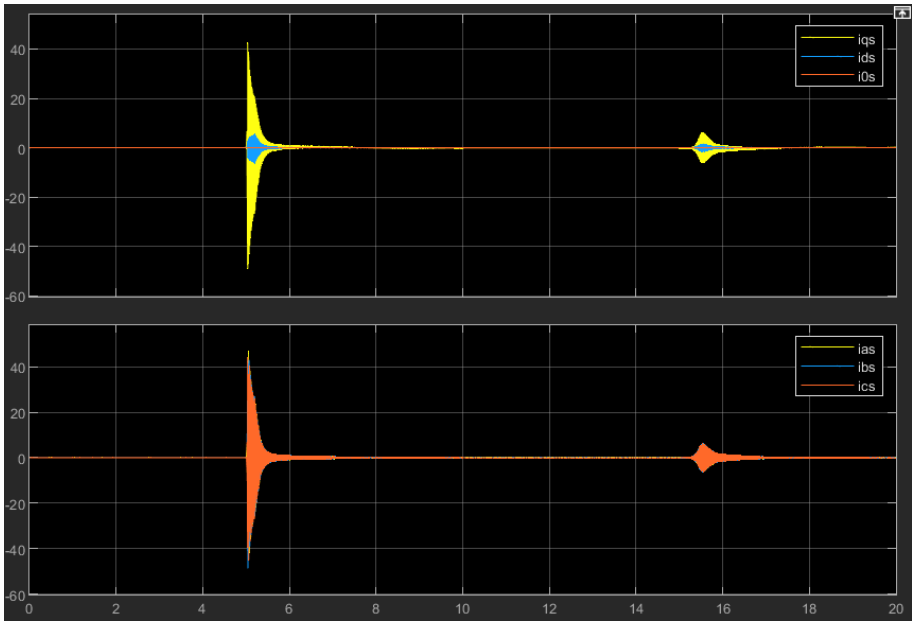


Figura 65:  $i_{a,b,c}^r(t)$  y  $i_{q,d,0}^r(t)$  para  $\omega_n = 6000rad/s$  de los sensores de corriente y  $\omega_n = 6000rad/s$  del sensor de posición.

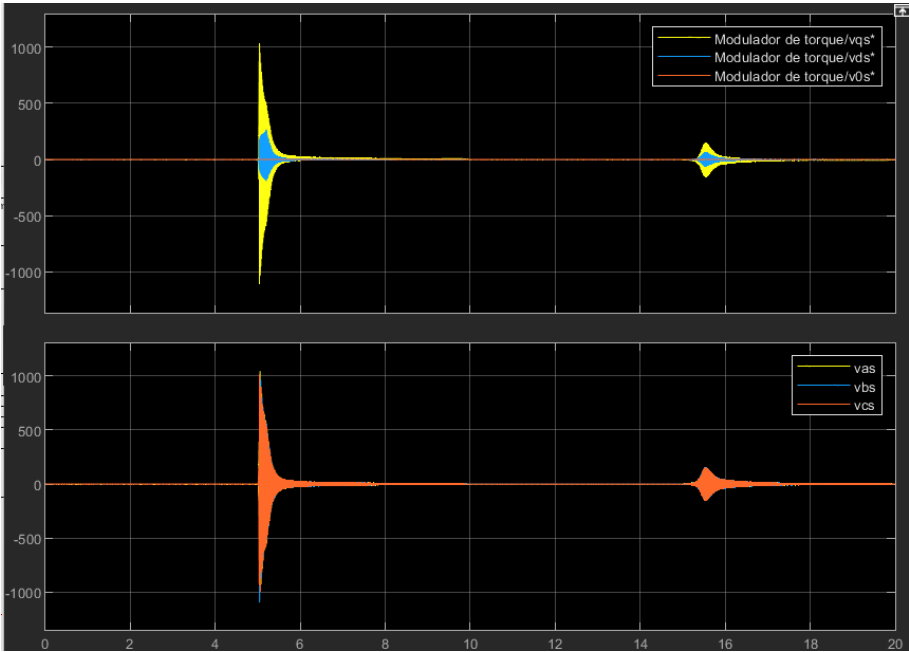


Figura 66:  $v_{a,b,c}^r(t)$  y  $v_{q,d,0}^r(t)$  para  $\omega_n = 6000rad/s$  de los sensores de corriente y  $\omega_n = 6000rad/s$  del sensor de posición.

Se procede entonces a hacer cambios equivalentes con la frecuencia natural de los sensores de corriente:

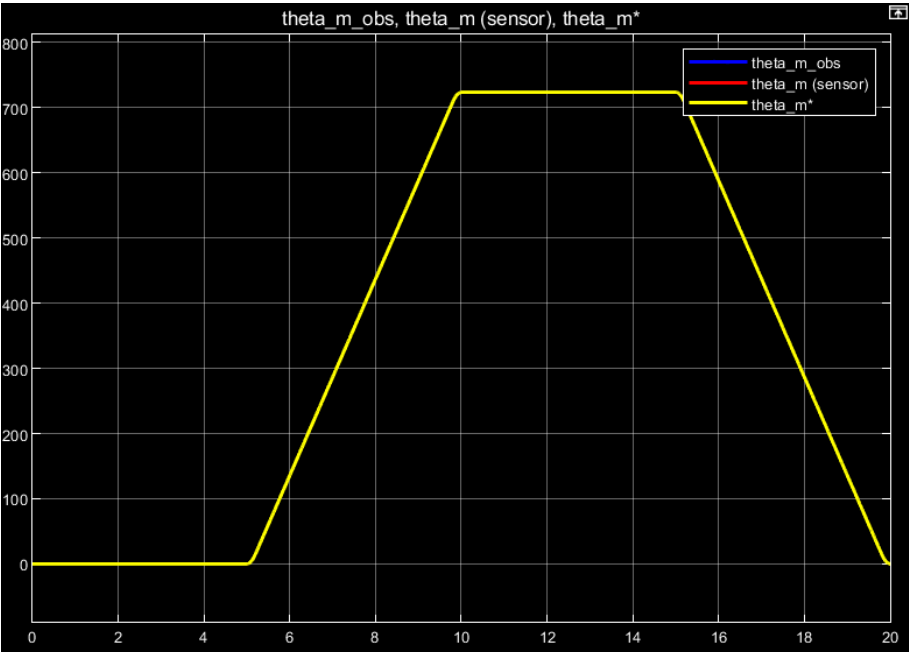


Figura 67:  $\theta_m(t)$  para  $\omega_n = 12000rad/s$  de los sensores de corriente y  $\omega_n = 6000rad/s$  del sensor de posición.

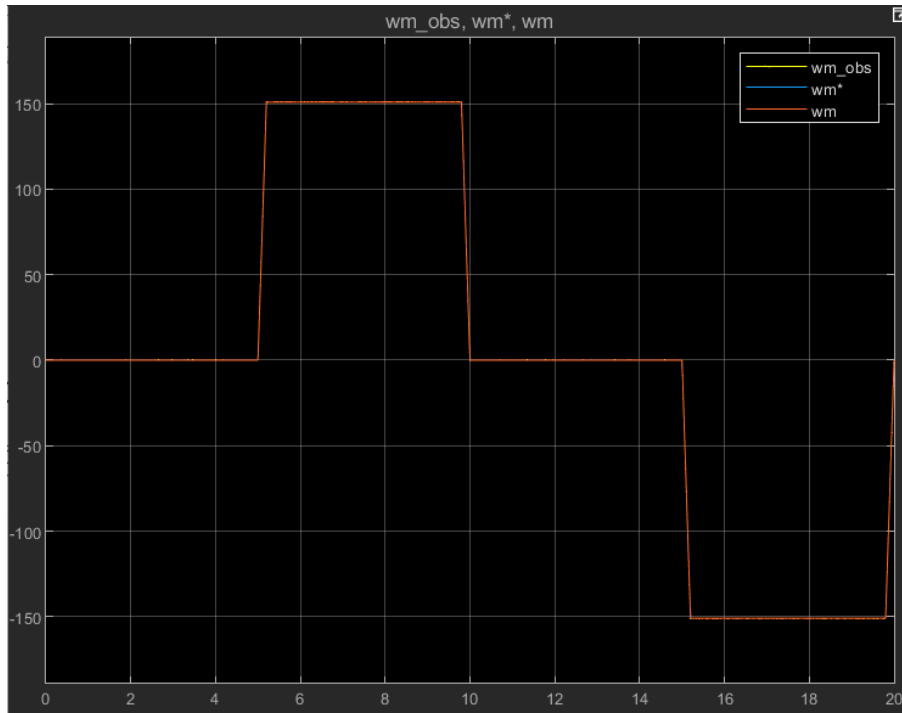


Figura 68:  $\omega_m(t)$  para  $\omega_n = 12000\text{rad/s}$  de los sensores de corriente y  $\omega_n = 6000\text{rad/s}$  del sensor de posición.

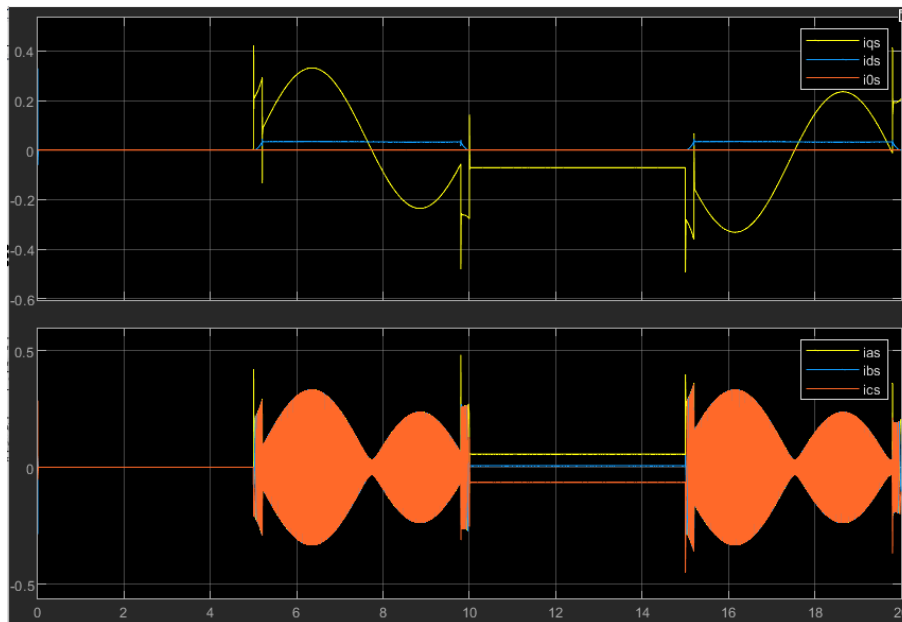


Figura 69:  $i_{a,b,c}^r(t)$  y  $i_{q,d,0}^r(t)$  para  $\omega_n = 12000\text{rad/s}$  de los sensores de corriente y  $\omega_n = 6000\text{rad/s}$  del sensor de posición.

Los resultados conseguidos en esta última prueba satisfacen los límites del sistema, pero para cumplir con la consigna impuesta hemos hecho la última prueba con  $\omega_n = 18000\text{rad/s}$ .

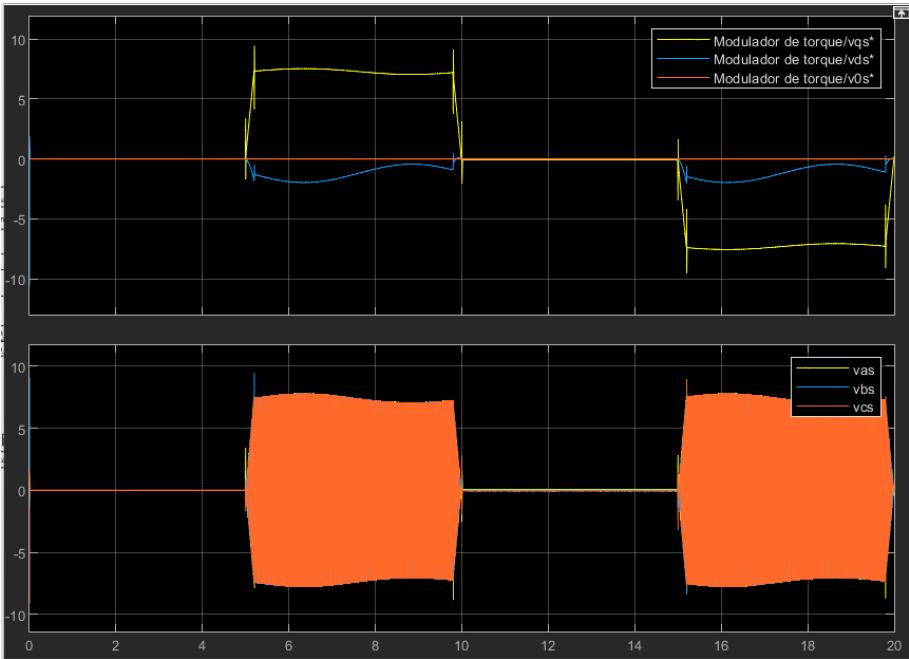


Figura 70:  $v_{a,b,c}^r(t)$  y  $v_{q,d,0}^r(t)$  para  $\omega_n = 12000rad/s$  de los sensores de corriente y  $\omega_n = 6000rad/s$  del sensor de posición.

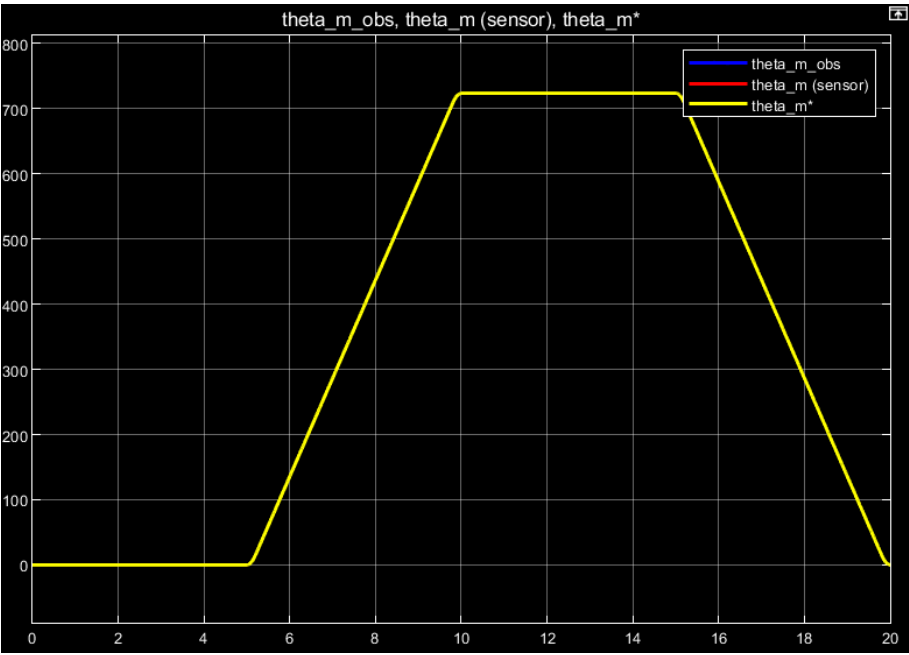


Figura 71:  $\theta_m(t)$  para  $\omega_n = 18000rad/s$  de los sensores de corriente y  $\omega_n = 6000rad/s$  del sensor de posición.

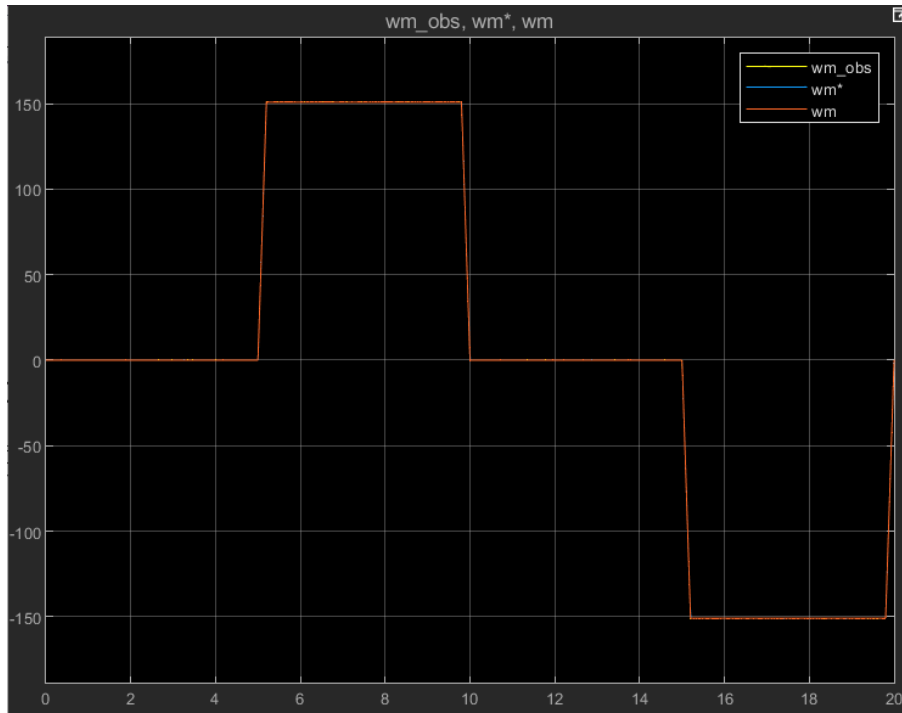


Figura 72:  $\omega_m(t)$  para  $\omega_n = 18000\text{rad/s}$  de los sensores de corriente y  $\omega_n = 6000\text{rad/s}$  del sensor de posición.

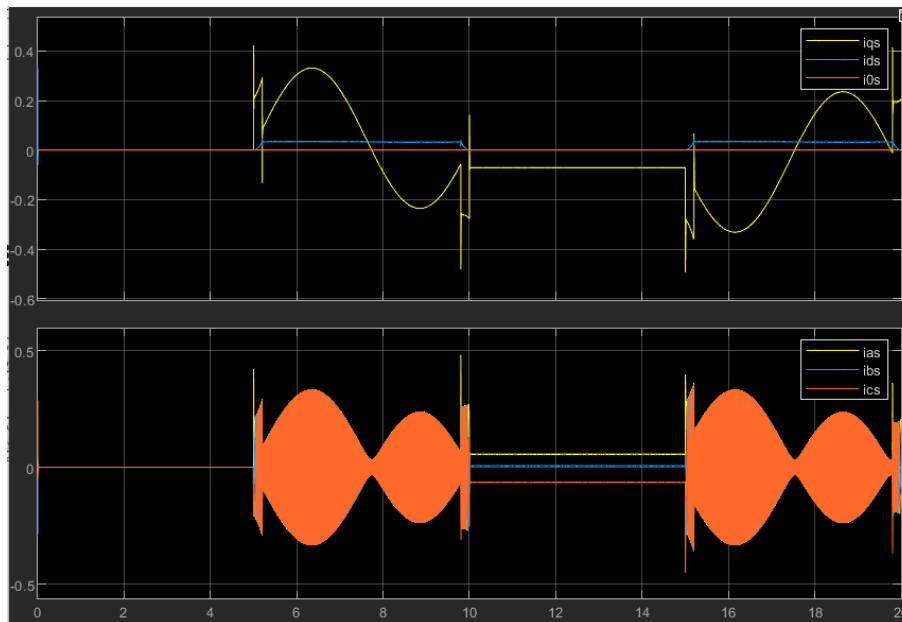


Figura 73:  $i_{a,b,c}^r(t)$  y  $i_{q,d,0}^r(t)$  para  $\omega_n = 18000\text{rad/s}$  de los sensores de corriente y  $\omega_n = 6000\text{rad/s}$  del sensor de posición.

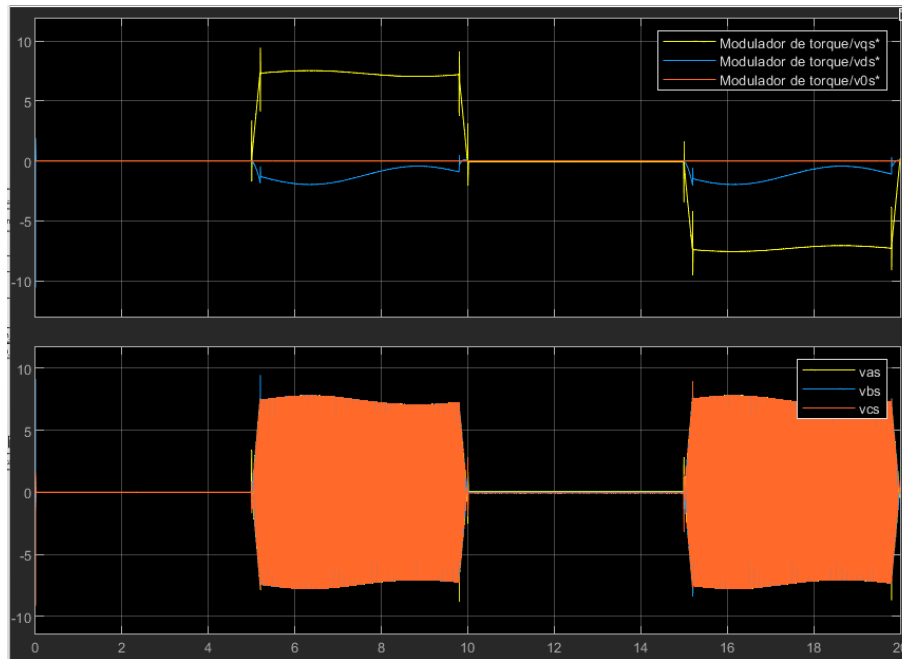


Figura 74:  $v_{a,b,c}^r(t)$  y  $v_{q,d,0}^r(t)$  para  $\omega_n = 18000\text{rad/s}$  de los sensores de corriente y  $\omega_n = 6000\text{rad/s}$  del sensor de posición.

Por último se evalúa si el valor de  $\tau$  debe cambiar también. La medición de temperatura parece darnos un resultado similar a la que teníamos con el sensor ideal, por lo que asumimos que está bien y dejamos los parámetros que cambiamos como están ahora.

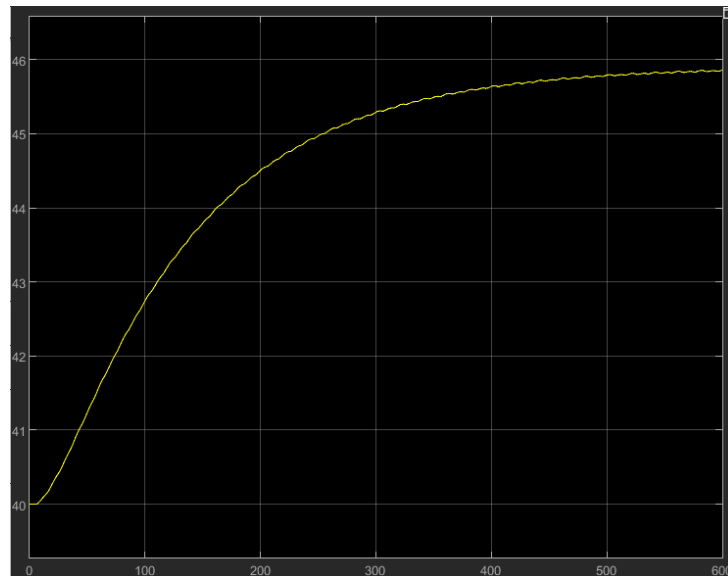


Figura 75:  $T_s(t)$  para  $\omega_n = 18000\text{rad/s}$  de los sensores de corriente,  $\omega_n = 6000\text{rad/s}$  del sensor de posición y  $\tau = 20\text{s}$ . Operación continua repetitiva.

#### e) Degradación de desempeño del sistema al colocar actuadores con ancho de banda finito.

El efecto del modelo de filtro pasa-bajo de segundo grado del modulador de tensión trifásico produce los mismos efectos que los estudiados en la sección de degradación de sensores, por lo tanto, no se repitió el análisis ni sus respectivas gráficas, ya que se extraen las mismas conclusiones y la solución a dicho problema es análoga.

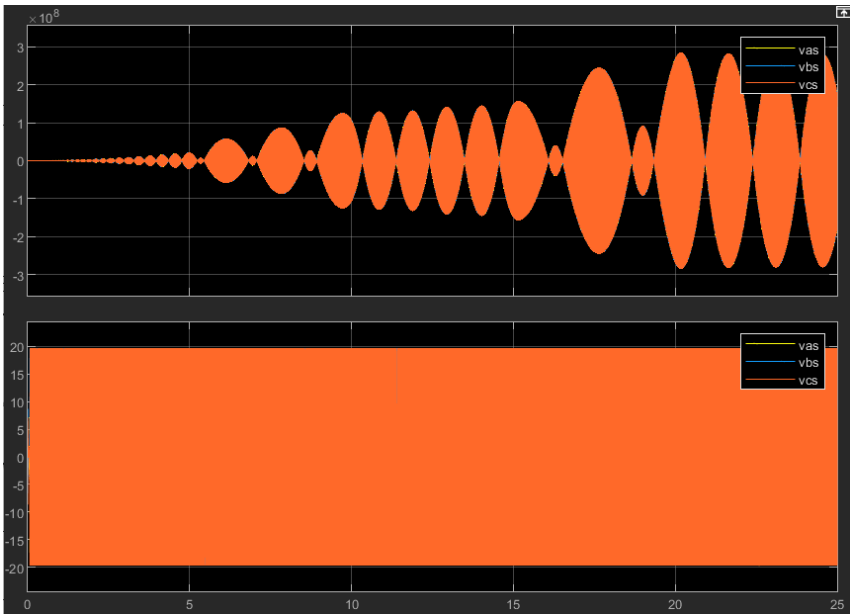


Figura 76:  $v_{a,b,c}(t)$  para  $\omega_n = 6000rad/s$  del modulador de tensión, antes y después del modulador de tensión respectivamente.

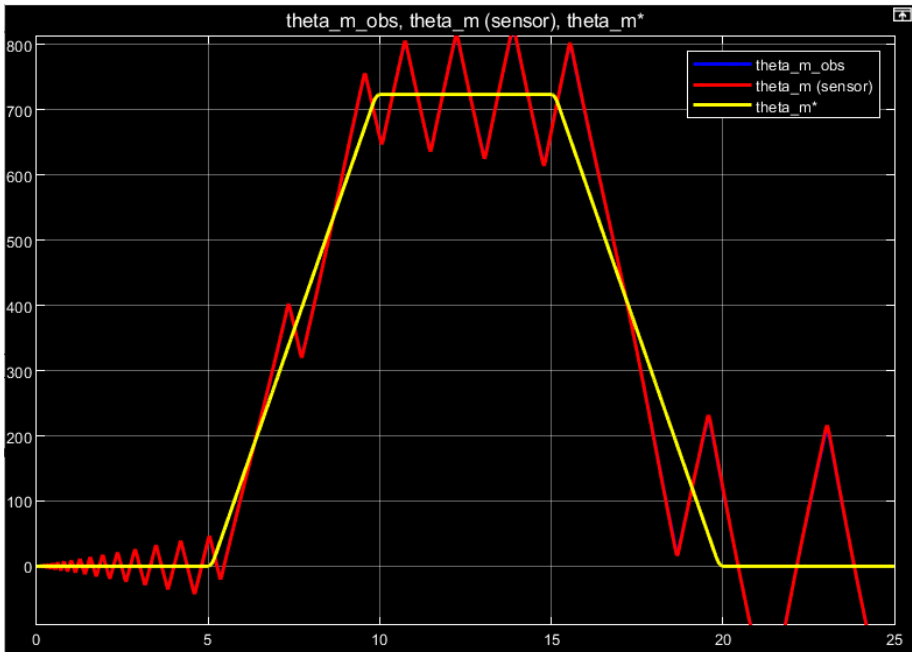


Figura 77:  $\theta_m(t)$ ,  $\theta_{obs}(t)$  y  $\theta_m^*(t)$  para  $\omega_n = 6000rad/s$  del modulador de tensión.

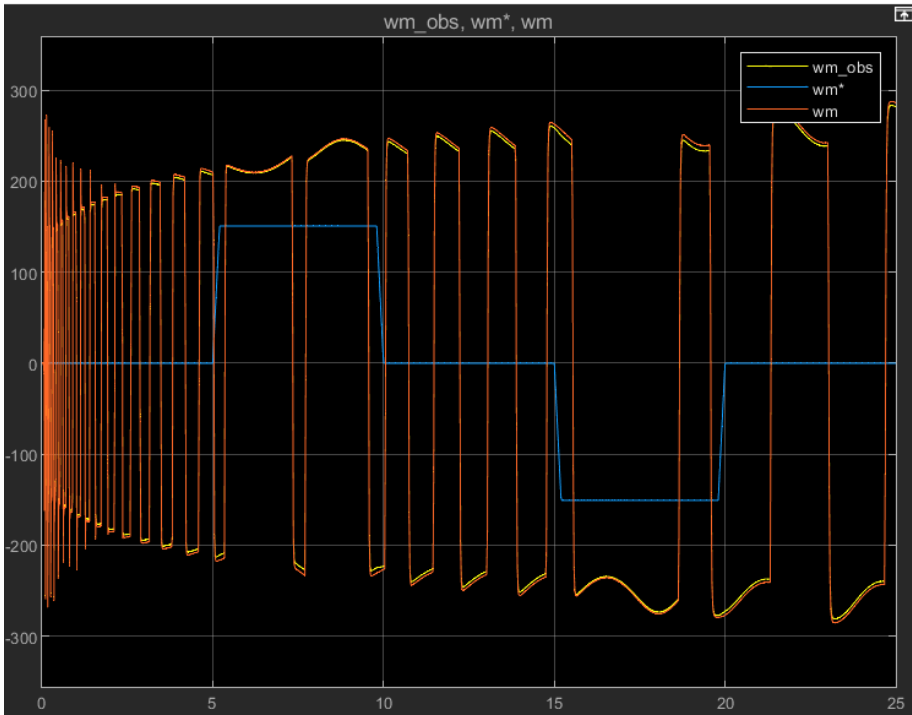


Figura 78:  $\omega_m(t)$ ,  $\omega_{obs}(t)$  y  $\omega_m^*(t)$  para  $\omega_n = 6000rad/s$  del modulador de tensión.

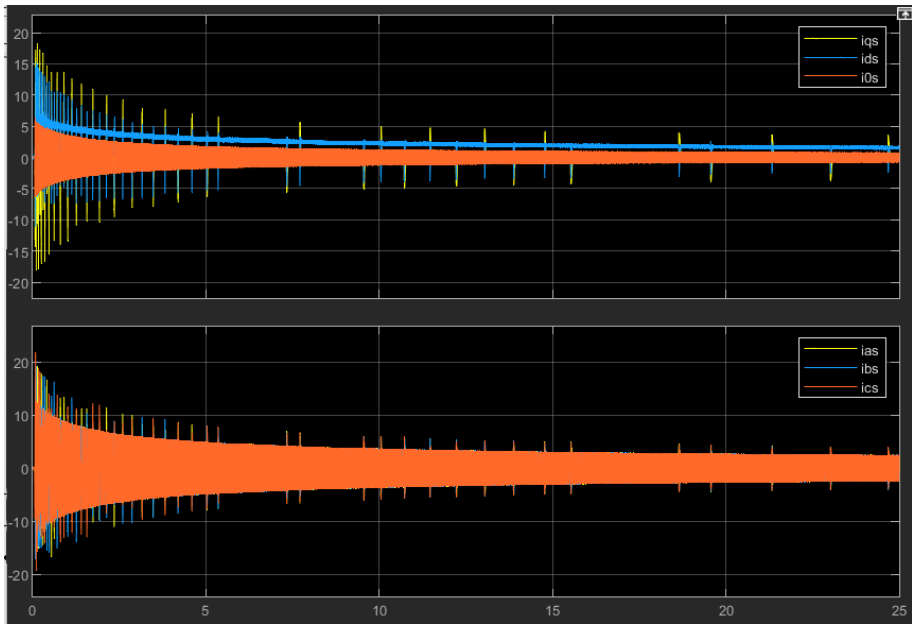


Figura 79:  $i_{a,b,c}^r(t)$  y  $i_{q,d,0}^r(t)$  para  $\omega_n = 6000rad/s$  del modulador de tensión.



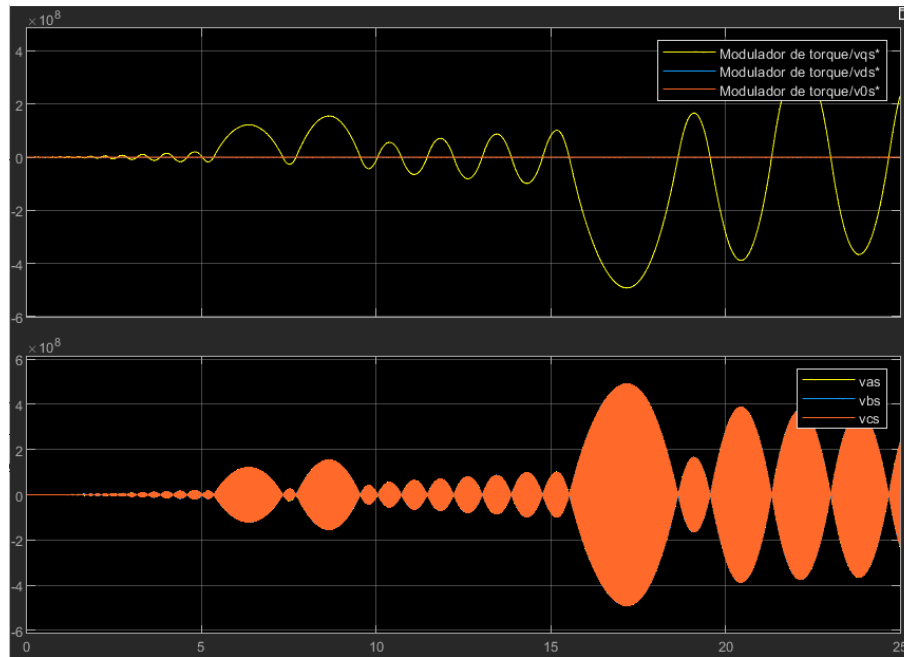


Figura 80:  $v_{a,b,c}^r(t)$  y  $v_{q,d,0}^r(t)$  para  $\omega_n = 6000\text{rad/s}$  del modulador de tensión.

Para la corrección se ha encontrado que un  $\omega_n = 30000\text{rad/s}$  es satisfactorio, así que dejamos ese valor. Los resultados se muestran a continuación:



Figura 81:  $v_{a,b,c}(t)$  para  $\omega_n = 30000\text{rad/s}$  del modulador de tensión, antes y después del modulador de tensión respectivamente.

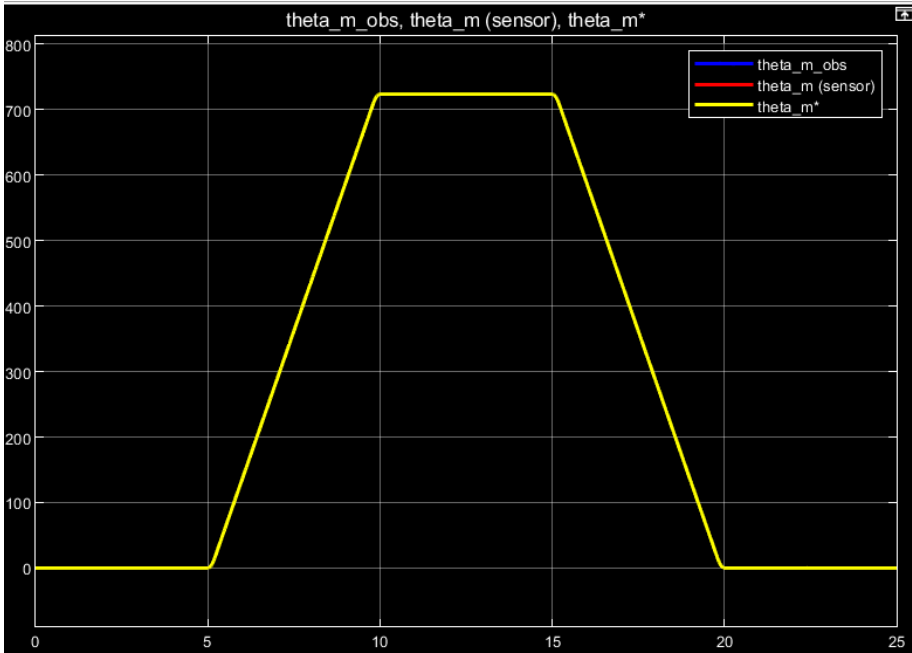


Figura 82:  $\theta_m(t)$ ,  $\theta_{obs}(t)$  y  $\theta_m^*(t)$  para  $\omega_n = 30000rad/s$  del modulador de tensión.

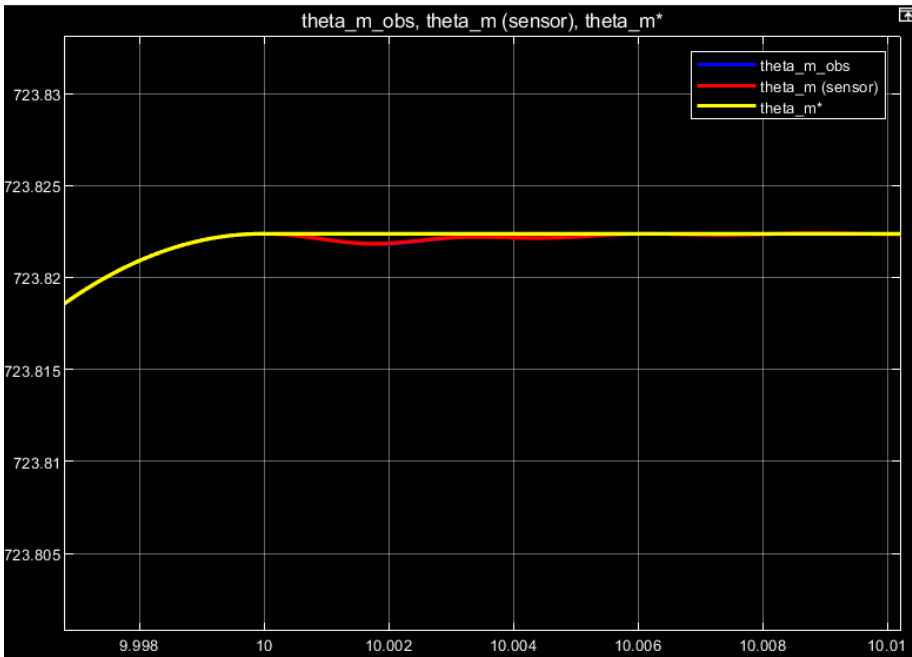


Figura 83:  $\theta_m(t)$ ,  $\theta_{obs}(t)$  y  $\theta_m^*(t)$  para  $\omega_n = 30000rad/s$  del modulador de tensión.

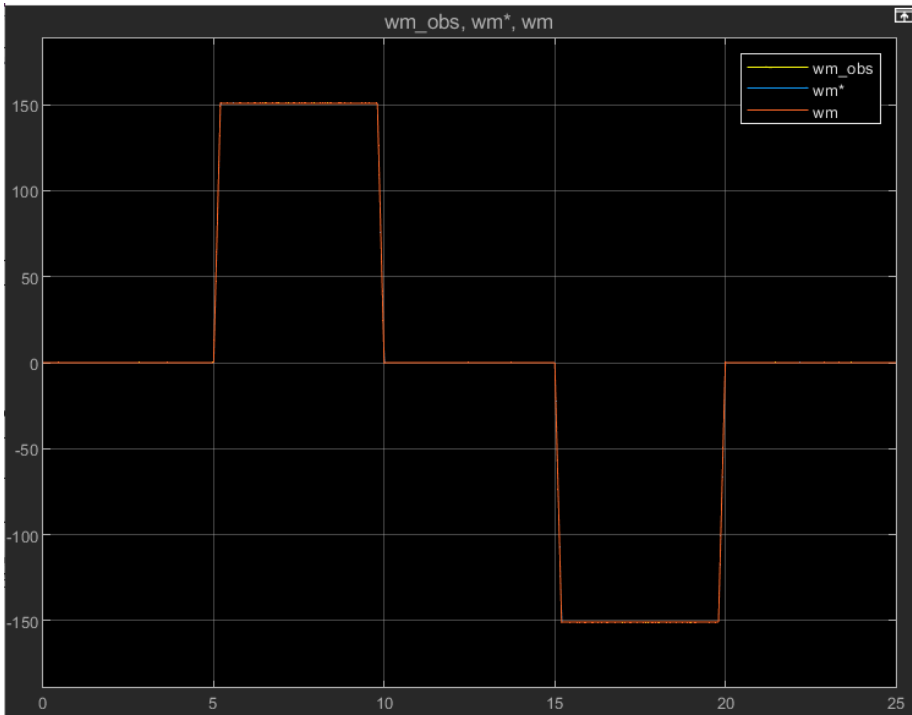


Figura 84:  $\omega_m(t)$ ,  $\omega_{obs}(t)$  y  $\omega_m^*(t)$  para  $\omega_n = 30000rad/s$  del modulador de tensión.

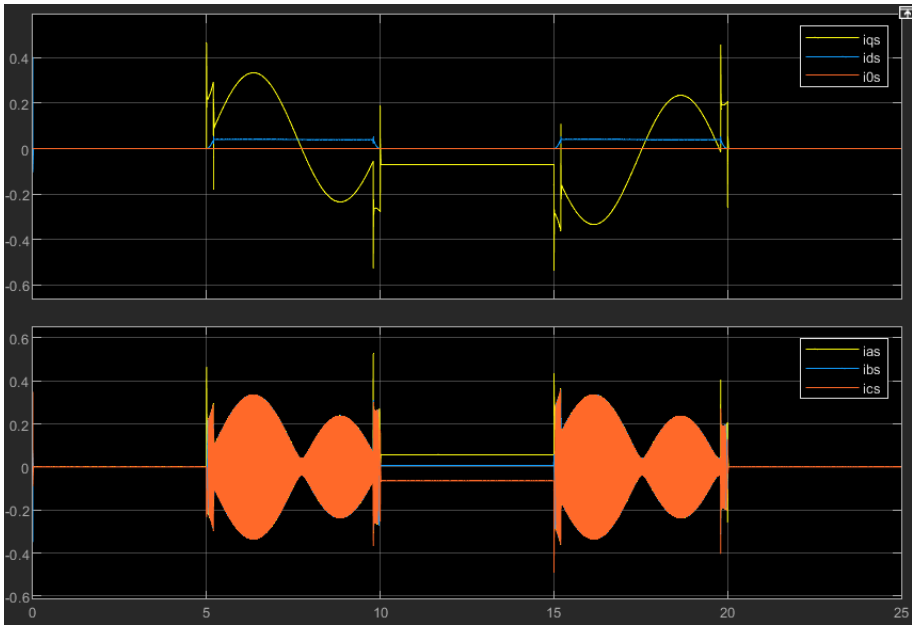


Figura 85:  $i_{a,b,c}^r(t)$  y  $i_{q,d,0}^r(t)$  para  $\omega_n = 30000rad/s$  del modulador de tensión.

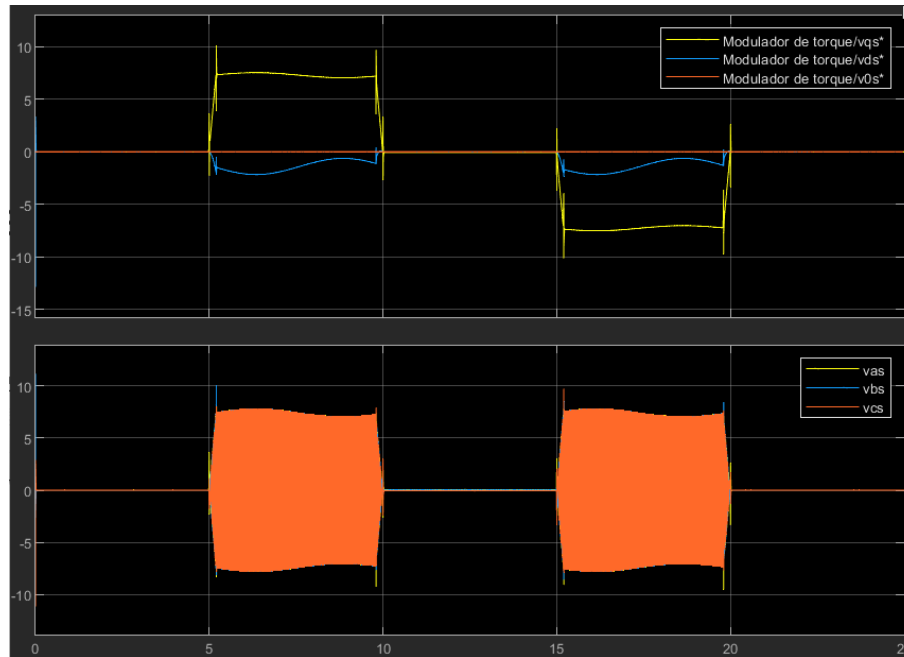


Figura 86:  $v_{a,b,c}^r(t)$  y  $v_{q,d,0}^r(t)$  para  $\omega_n = 30000\text{rad/s}$  del modulador de tensión.

### 3.2.6. Versión final

Sintetizando lo trabajado en las secciones anteriores, se muestra la versión final del controlador completo en la figura 87. Se modificó el controlador y el observador para que, discretizando las señales de control, el sistema completo esté mejor adaptado a la realidad y pueda implementarse en plataformas digitales que requieran señales discretas.

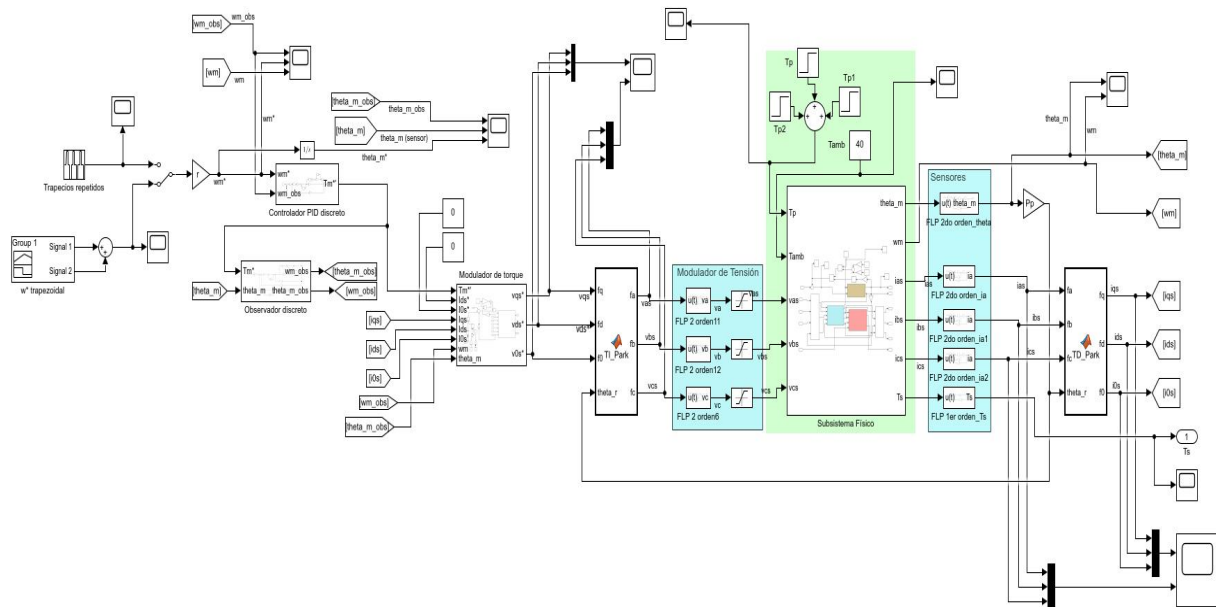


Figura 87: Versión final del controlador completo.

El controlador modificado se muestra en la figura 88.

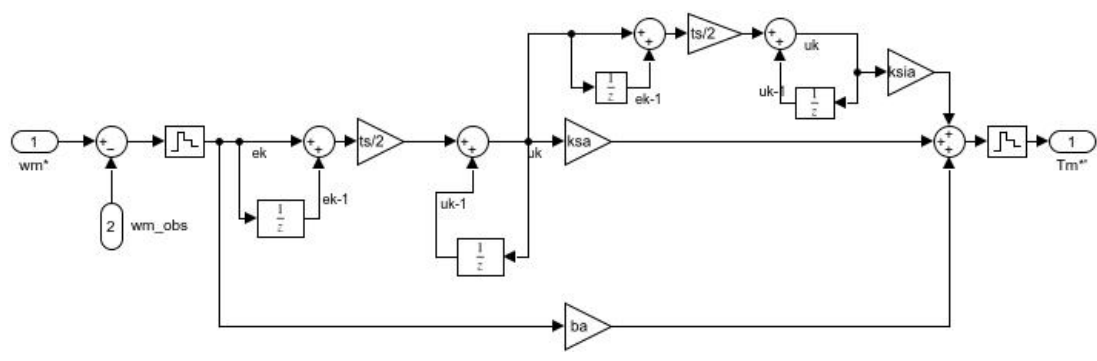


Figura 88: Controlador PID discreto.

El observador modificado se muestra en la figura 89.

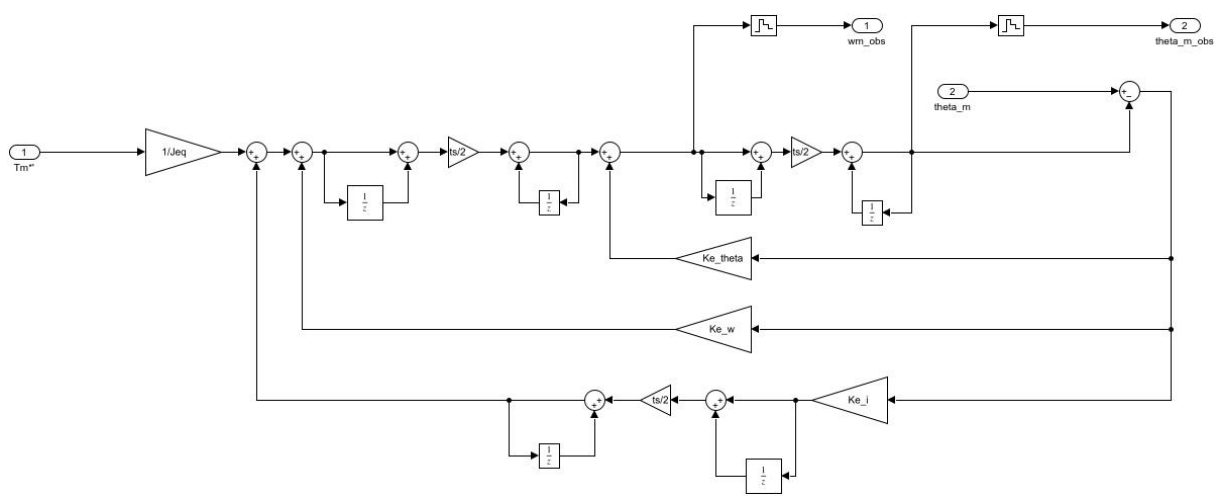


Figura 89: Observador discreto.

Utilizando el método Tustin (integración numérica por trapecios) con una correcta elección de periodo de muestreo único y constante  $T_s[s] \in \mathbb{R}$ , el uso de retenedores de orden cero (ZOH) para las señales de control, se logró una acción de control eficiente.

Esta técnica de discretización nos permite pasar del dominio continuo al dominio discreto mediante la integración trapezoidal entre los dos puntos de un periodo de muestreo. A continuación, se muestra la ecuación que se utilizó para discretizar el controlador PID y el observador:

$$u(k) = u(k - 1) + \frac{T_s}{2} \cdot [e(k - 1) + e(k)]$$

En las figuras presentadas a continuación, se puede obtener, variando el periodo de muestreo, una mejor adquisición de datos por parte del controlador. Los retenedores de orden cero lograron transformar un conjunto de valores discretos en señales escalonadas.

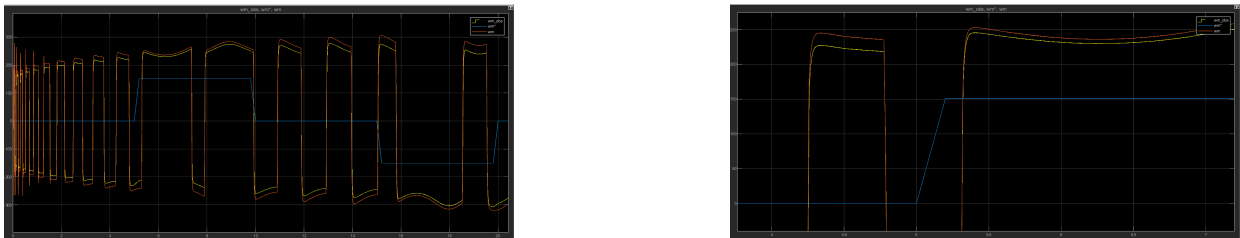


Figura 90: Velocidades  $\omega_{m_{obs}}$ ,  $\omega_{m^*}$  y  $\omega_m$  para un periodo de muestreo de  $10^{-3}$ .

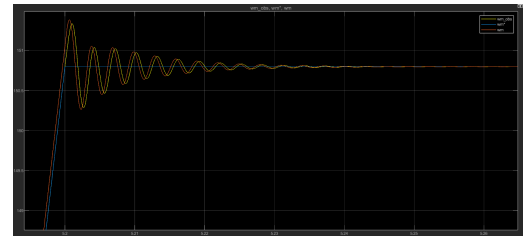
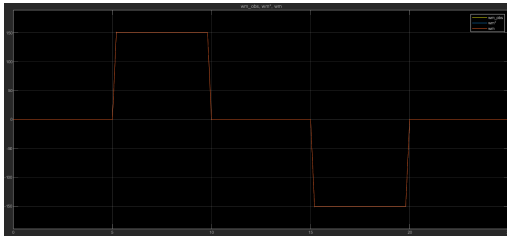


Figura 91: Velocidades  $\omega_{m_{obs}}$ ,  $\omega_{m^*}$  y  $\omega_m$  para un periodo de muestreo de  $10^{-4}$ .

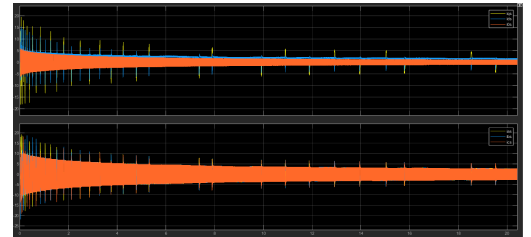
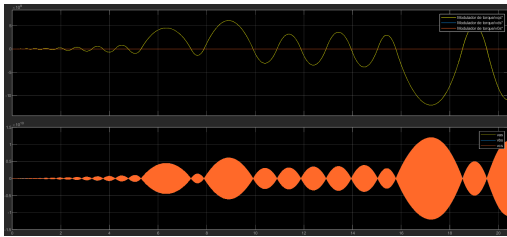


Figura 92: Tensiones y corrientes para un periodo de muestreo de  $10^{-3}$ .

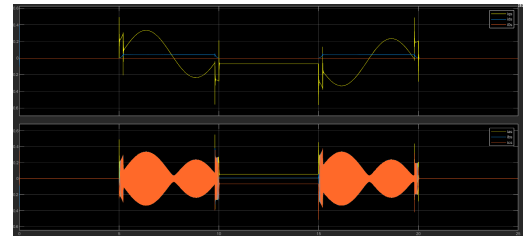
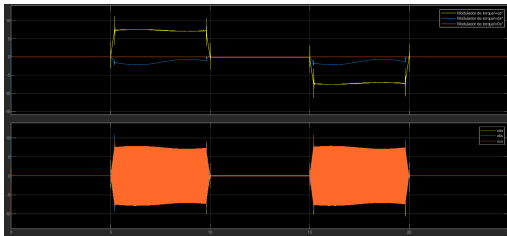


Figura 93: Tensiones y corrientes para un periodo de muestreo de  $10^{-4}$ .

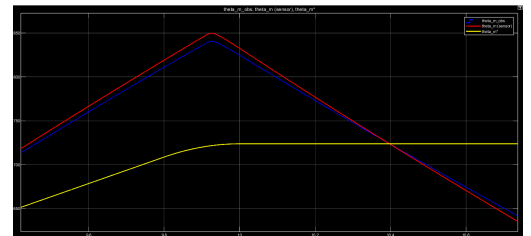


Figura 94: Posiciones  $\theta_{m_{obs}}$ ,  $\theta_{m^*}$  y  $\theta_m$  para un periodo de muestreo de  $10^{-3}$ .

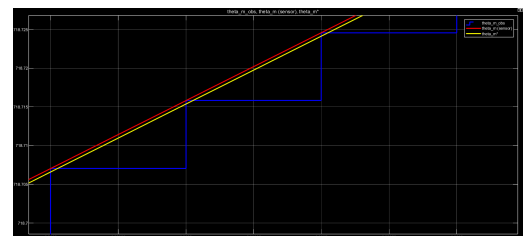
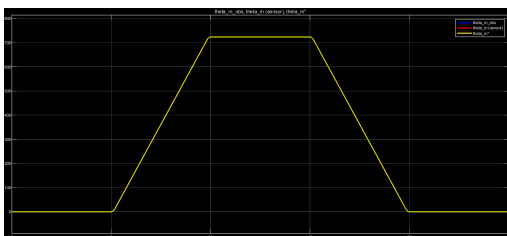


Figura 95: Posiciones  $\theta_{m_{obs}}$ ,  $\theta_{m^*}$  y  $\theta_m$  para un periodo de muestreo de  $10^{-4}$ .

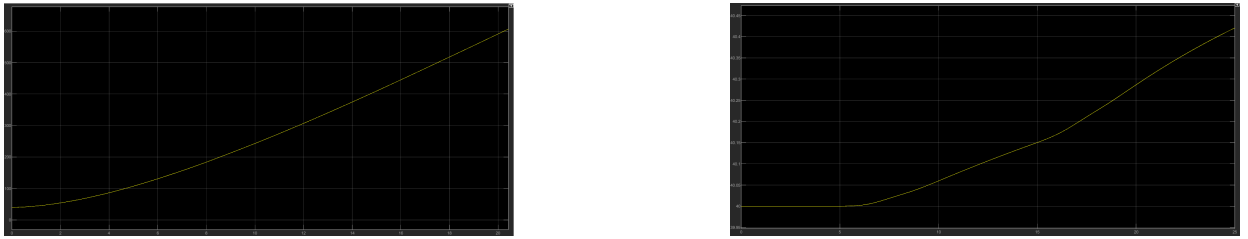


Figura 96: Variación de la temperatura para un periodo de muestreo de  $10^{-3}$  y  $10^{-4}$  respectivamente.



Figura 97: Torque electromagnético para un periodo de muestreo de  $10^{-3}$  y  $10^{-4}$  respectivamente.

## 4. Conclusiones

Mediante este trabajo, se logró controlar satisfactoriamente el brazo robótico. El diseño del sistema es robusto y cumple con las especificaciones de operación, siguiendo correctamente la consigna de posición establecida. Para ello, se modificó la consigna original (perfil de velocidad angular) para obtener una aproximación más suave (perfil de posición).

Se destacó la importancia de contar con un estimador, lo que permitió prescindir del uso de un sensor de velocidad angular. Se añadió un integrador en la planta del estimador para evitar errores en el estado estacionario. El controlador PID funcionó correctamente, y se utilizaron consignas de velocidad para minimizar el posible error generado al usar un derivador en el control.

El desarrollo de este trabajo integrador sirvió para consolidar los conceptos aprendidos durante la materia y para comprender de manera integral algunos métodos de control y su implementación práctica. También se comprendió que, en muchas ocasiones, el modelo teórico no puede ser aplicado tal cual en la práctica, o que su éxito depende de otras variables prácticas o económicas, lo que requiere llevar a cabo otras implementaciones.

## Referencias

- [1] G. Franklin. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Pearson, 2015.
- [2] W. J. Palm III. *System Dynamics*. McGraw-Hill, 2021.
- [3] G. Julián. *Guía de trabajo para el Proyecto Global Integrador*. Universidad Nacional de Cuyo, 2023.
- [4] G. Julián. *Material de cátedra*. 2023. URL: <https://aulaabierta.ingenieria.uncuyo.edu.ar/course/view.php?id=1806&section=2#tabs-tree-start>.
- [5] R. Kelly. *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. Springer, 2005.
- [6] P. Krause. *Analysis of Electric Machinery and Drive Systems*. IEEE-Wiley, 2013.
- [7] R. Krishnan. *Electric Motor Drives Modeling, Analysis, and Control*. Prentice Hall, 2001.
- [8] F. Sears M. Zemansky. *Física Universitaria Volumen II*. Pearson, 2009.
- [9] J. Fraile Mora. *Máquinas Eléctricas*. Mc Graw Hill, 2008.
- [10] K. Ogata. *Modern Control Engineering*. Pearson, 2010.
- [11] J. Weidauer R. Messer. *Electrical Drives*. Siemens, 2014.