

Control de suspensión semiactiva de automóvil

Javier Alejandro Llano López
llanojavier97@gmail.com

Control y Sistemas, Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo,
Mendoza, Argentina

Enero de 2025

Resumen

El presente proyecto estudia el desempeño de una suspensión semiactiva en un automóvil, comparando diferentes estrategias de control: skyhook, groundhook e híbrido, frente a una suspensión pasiva.

Se modeló un cuarto de vehículo de un Audi R8 circulando a 60 km/h sobre un reductor de velocidad, evaluando la controlabilidad y observabilidad del sistema. Para lograr una implementación realista, se consideraron las limitaciones del actuador mediante un bloque saturador y se modelaron los sensores con funciones cuantizadoras en C, cuyo ruido de cuantización se puede representar como ruido blanco uniforme.

Dado que no todas las variables de estado son medibles, se diseñó un filtro de Kalman para estimarlas a partir de las señales disponibles. Posteriormente, se evaluó el desempeño del control híbrido, destacando su balance entre confort y estabilidad, y se comparó con la suspensión pasiva.

Los resultados muestran que el control híbrido mejora significativamente el compromiso entre comodidad y adherencia al suelo, mientras que el filtro de Kalman permite una estimación precisa de las variables de estado incluso en presencia de ruido.

1. Introducción

En el ámbito automotriz, la suspensión semiactiva ha cobrado relevancia debido a su capacidad para mejorar el desempeño dinámico del vehículo con un costo energético reducido. Si bien la suspensión activa ofrece el mayor nivel de control, su alto consumo de energía y complejidad limitan su aplicación generalizada. En contraste, la suspensión semiactiva proporciona una mejora significativa frente a la suspensión pasiva sin incurrir en un consumo excesivo de energía, convirtiéndose en una alternativa viable para optimizar el confort y la estabilidad del vehículo.

El objetivo principal de este proyecto es evaluar el desempeño del control Híbrido en una suspensión semiactiva, comparándolo con los enfoques Skyhook, Groundhook y la suspensión pasiva. Para ello, se modela un cuarto de vehículo de un Audi R8 circulando en un entorno urbano, considerando distintos niveles de realismo en la simulación.

Inicialmente, se parte de un modelo ideal donde todas las variables de estado son accesibles. Luego, se introduce un filtro de Kalman para estimarlas a partir de mediciones ruidosas, lo que permite evaluar la efectividad del control híbrido en condiciones más cercanas a la realidad. Asimismo, se incorpora la cuantización de los sensores y se limita el comportamiento del actuador mediante un bloque saturador, con el fin de representar restricciones físicas reales.

Este enfoque permite no solo analizar el impacto del control híbrido en la suspensión semiactiva, sino también evaluar la robustez del sistema frente a perturbaciones y restricciones prácticas, contribuyendo al estudio de estrategias de control más eficientes y realistas en el ámbito automotriz.

2. Desarrollo

Este proyecto consiste en el diseño y simulación del control de la suspensión semiactiva de un Audi R8, ver Figura 1, dado que para este vehículo se encontraron especificaciones y simulaciones en artículos científicos y proyectos universitarios.



Figura 1: Audi R8.

Para esto se realiza el modelo del vehículo simplificado en Simulink. Esta es una herramienta para diseño y simulación de sistemas que forma parte de Matlab, un entorno de programación y cálculo numérico desarrollado por MathWorks.

Para una mejor claridad y estructura, se utiliza Overleaf para la realización de este informe técnico. Overleaf es un editor online de textos en formato LaTeX que permite la colaboración en tiempo real de los editores, así como escribir artículos científicos, técnicos, tesis, informes y cualquier documento que se quiera presentar en el formato indicado.

Por otro lado, la planta se modela como un cuarto de vehículo, se describen los sensores y actuadores, el diseño de un filtro de Kalman y de una ley de control. En cuanto a la ley de control se opta por utilizar Skyhook, Groundhook y luego se optimiza el controlador utilizando un control Híbrido entre ambas leyes de control.

2.1. Modelo de cuarto de vehículo

Para este modelo se simplifica el análisis a un cuarto del vehículo, por lo que se usa una masa suspendida (M_c) y una no suspendida (M_r), el contacto entre estas es un resorte (K_c) y un amortiguador (C_c) en paralelo y un resorte (K_r) entre la rueda y el suelo. El desplazamiento vertical absoluto del chasis está dado por Z_c y el desplazamiento vertical absoluto de la rueda es Z_r . Ver Figura 2.

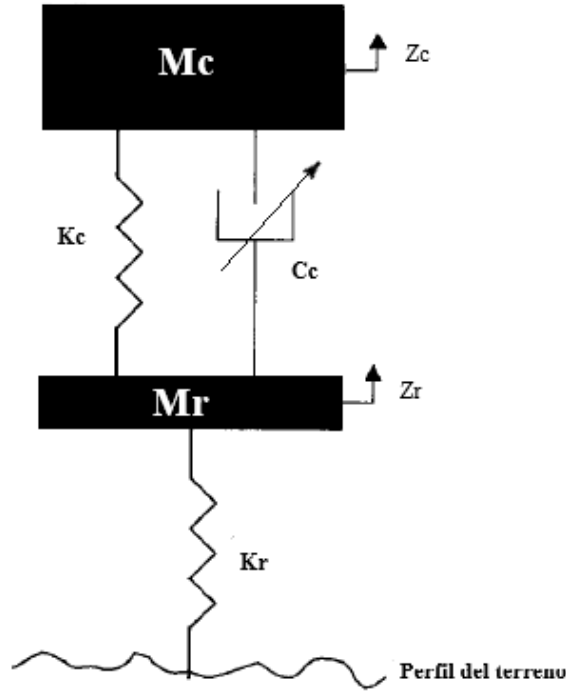


Figura 2: Modelo de un cuarto de vehículo.

Las ecuaciones matemáticas que definen a este modelo son las siguientes:

$$M_c \cdot \ddot{Z}_c + K_c \cdot (Z_c - Z_r) + C_c \cdot (\dot{Z}_c - \dot{Z}_r) + F_{sa}(t) = 0 \quad (1a)$$

$$M_c \cdot \ddot{Z}_c = -K_c \cdot (Z_c - Z_r) - C_c \cdot (\dot{Z}_c - \dot{Z}_r) - F_{sa}(t) \quad (1b)$$

$$M_r \cdot \ddot{Z}_r = -K_c \cdot (Z_r - Z_c) - C_c \cdot (\dot{Z}_r - \dot{Z}_c) - K_r \cdot (Z_r - Z_t) + F_{sa}(t) \quad (1c)$$

Donde $F_{sa}(t)$ es la fuerza semiactiva.

El modelo físico posee muchas entradas y muchas salidas que se relacionan entre sí de una forma complicada. Para analizar un sistema de este tipo, es esencial reducir la complejidad de las expresiones matemáticas, además de recurrir a computadoras que realicen una gran parte de los tediosos cálculos que son necesarios. El enfoque en el espacio de estados para el análisis de sistemas es el más conveniente desde este punto de vista.

Las variables de estado se definen de la siguiente forma:

$$x_1(t) = Z_c(t) - Z_r(t) \quad (2a)$$

$$x_2(t) = Z_r(t) - Z_t(t) \quad (2b)$$

$$x_3(t) = \dot{Z}_c(t) \quad (2c)$$

$$x_4(t) = \dot{Z}_r(t) \quad (2d)$$

Reemplazando las variables de estado en (1b) se obtiene:

$$M_c \cdot \dot{x}_3(t) = -C_c \cdot [x_3(t) - x_4(t)] - K_c[x_1(t)] - F_{sa} \quad (3)$$

Por lo que la ecuación (1c) resulta en:

$$M_r \cdot \dot{x}_4(t) = -C_c \cdot [x_4(t) - x_3(t)] + K_c[x_1(t)] - K_r[x_2(t)] + F_{sa} \quad (4)$$

La perturbación externa causada por el perfil del terreno es:

$$P(t) = \dot{Z}_t(t) \quad (5)$$

Por lo que las derivadas respecto al tiempo de las variables de estado se definen de la siguiente manera:

$$\dot{x}_1(t) = x_3(t) - x_4(t) \quad (6a)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_4(t) - P(t) \quad (6b)$$

$$\dot{x}_3(t) = -\frac{K_c \cdot x_1(t)}{M_c} - C_c \cdot \frac{x_3(t)}{M_c} + C_c \cdot \frac{x_4(t)}{M_c} - \frac{F_{sa}}{M_c} \quad (6c)$$

$$\dot{x}_4(t) = -\frac{K_c \cdot x_1(t)}{M_r} - \frac{K_r \cdot x_2(t)}{M_r} + C_c \cdot \frac{x_3(t)}{M_r} - C_c \cdot \frac{x_4(t)}{M_r} + \frac{F_{sa}}{M_r} \quad (6d)$$

Matricialmente se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases} \quad (7)$$

Donde la matriz A es la matriz de estado, B es la matriz de entrada, C es la matriz de salida y D es la matriz de transmisión directa.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_c}{M_c} & 0 & -\frac{C_c}{M_c} & \frac{C_c}{M_c} \\ \frac{K_c}{M_r} & -\frac{K_r}{M_r} & \frac{C_c}{M_r} & -\frac{C_c}{M_r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{M_c} \\ \frac{1}{M_r} \end{bmatrix} \cdot U + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot P$$

Donde,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_c}{M_c} & 0 & -\frac{C_c}{M_c} & \frac{C_c}{M_c} \\ \frac{K_c}{M_r} & -\frac{K_r}{M_r} & \frac{C_c}{M_r} & -\frac{C_c}{M_r} \end{bmatrix} \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{M_c} \\ \frac{1}{M_r} \end{bmatrix} \quad B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K_c}{M_c} & 0 & -\frac{C_c}{M_c} & \frac{C_c}{M_c} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M_c} \end{bmatrix}$$

Una vez definido el modelo en espacio de estados, se analiza la observabilidad y la controlabilidad del sistema. Para los siguientes conceptos ver [1].

2.2. Observabilidad

Un sistema lineal es observable en un instante inicial t_0 si, a partir del estado del sistema en este instante inicial, $x(t_0)$, es posible determinar dicho estado mediante la observación de la salida $y(t)$ durante un intervalo de tiempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$. Por tanto, el sistema es completamente observable si todas las transiciones del estado afectan eventualmente a todos los elementos del vector de salida.

La observabilidad completa puede comprobarse si se cumple con la condición de que la matriz de observabilidad sea de rango n igual al número de variables de estado del sistema.

$$\vartheta = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Mediante la función $\text{rank}()$ de Matlab se calcula el rango de ϑ que es 4, por lo que el sistema es completamente observable.

2.3. Controlabilidad

Un sistema lineal es controlable en un instante inicial t_0 si se puede transferir desde cualquier estado inicial $x(t_0)$, a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo de tiempo finito.

El sistema es completamente controlable si la matriz de controlabilidad es de igual rango que la cantidad de variables de estado del sistema.

$$\zeta = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (9)$$

Mediante la función $\text{rank}()$ de Matlab se calcula el rango de ζ que es 4, por lo que el sistema es completamente controlable.

2.4. Tipos de control

Como se introdujo anteriormente, para este proyecto se analizarán dos acciones de control, Skyhook y Groundhook.

El control Skyhook se basa en implementar un amortiguador sobre chasis que esté conectado al cielo como se observa en la Figura 3, de esta manera se reducen las oscilaciones verticales aislando la masa suspendida del perfil del terreno. Por medio de una fuerza amortiguadora podemos reproducir el comportamiento del control Skyhook al ser este ideal y no ser teóricamente posible. Este control se concentra en la confortabilidad del conductor y los pasajeros por sobre la estabilidad del vehículo.

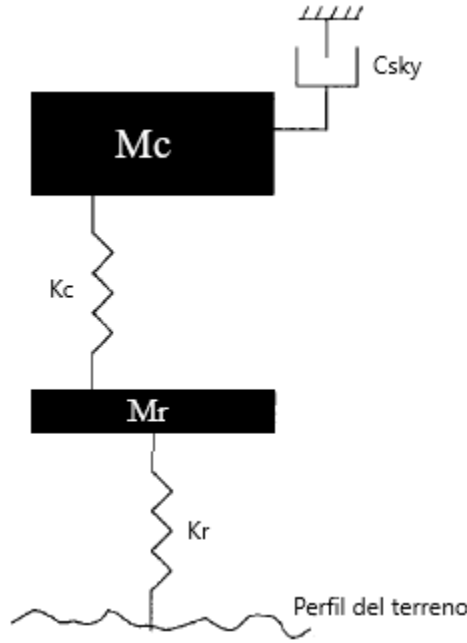


Figura 3: Control skyhook ideal.

El primer caso que se analiza para este control es cuando m_c asciende y las dos masas se separan. En una configuración ideal, la fuerza ejercida por el amortiguador Skyhook es:

$$F_{sky} = -c_{sky} \cdot \dot{z}_c \quad (10a)$$

La fuerza del amortiguador semiactivo es:

$$F_{sa} = -c_{sa} \cdot (\dot{z}_c - \dot{z}_r) \quad (10b)$$

Entonces para que el modelo semiactivo sea equivalente al modelo Skyhook, las ecuaciones (10a) y (10b) deben ser iguales:

$$F_{sky} = -c_{sky} \cdot \dot{z}_c = -c_{sa} \cdot (\dot{z}_c - \dot{z}_r) = F_{sa} \quad (10c)$$

$$c_{sa} = c_{sky} \quad (10d)$$

La fuerza del amortiguador semiactivo, cuando \dot{z}_c y $\dot{z}_c - \dot{z}_r$ son positivas, resulta en:

$$F_{sa} = c_{sky} \cdot (\dot{z}_c - \dot{z}_r) \quad (10e)$$

El segundo caso es cuando \dot{z}_c y $\dot{z}_c - \dot{z}_r$ son negativas, esto implica que m_c está descendiendo y las masas se están acercando, ver Figura 3. La fuerza del amortiguador Skyhook tiene dirección positiva y está definida de la siguiente manera:

$$F_{sky} = c_{sa} \cdot \dot{z}_c \quad (11a)$$

De la misma forma, como el amortiguador semiactivo está en compresión, la fuerza de este es positiva:

$$F_{sa} = c_{sa} \cdot (\dot{z}_c - \dot{z}_r) \quad (11b)$$

El mismo proceso que en el primer caso es aplicado y se obtiene el mismo amortiguamiento semiactivo. Cuando el producto de \dot{z}_c y $\dot{z}_c - \dot{z}_r$ es positivo, la fuerza semiactiva está definida por la ecuación (10e).

El tercer caso se da cuando m_c asciende y las masas se acercan. La fuerza aplicada por el amortiguador Skyhook en la masa del chasis es en dirección negativa. Pero, en este caso, el amortiguador semiactivo está comprimido y no puede ejercer una fuerza en la misma dirección que el amortiguador Skyhook. Por esto el amortiguamiento debe minimizarse para aplicar la mínima fuerza sobre la masa del chasis.

Las ecuaciones que definen los casos anteriores son las siguientes:

$$\begin{cases} \dot{z}_c \cdot (\dot{z}_c - \dot{z}_r) \geq 0 & F_{sa} = c_{sky_{max}} \cdot (\dot{z}_c - \dot{z}_r) \\ \dot{z}_c \cdot (\dot{z}_c - \dot{z}_r) < 0 & F_{sa} = c_{sky_{min}} \cdot (\dot{z}_c - \dot{z}_r) \end{cases} \quad (12)$$

Expresadas en variables de estado:

$$\begin{cases} x_3 \cdot (x_3 - x_4) \geq 0 & F_{sa} = c_{sky_{max}} \cdot (x_3 - x_4) \\ x_3 \cdot (x_3 - x_4) < 0 & F_{sa} = c_{sky_{min}} \cdot (x_3 - x_4) \end{cases} \quad (13)$$

Donde c_{sky} puede tomar valores máximos y mínimos, estos son no son de fabricantes sino que se estipulan de acuerdo a los resultados de confort que se quiere lograr.

En el control Groundhook se propone un amortiguador entre el chasis y el suelo. Al igual que Skyhook, este control es ideal y no es teóricamente posible. En este predomina la estabilidad del vehículo por sobre la confortabilidad.

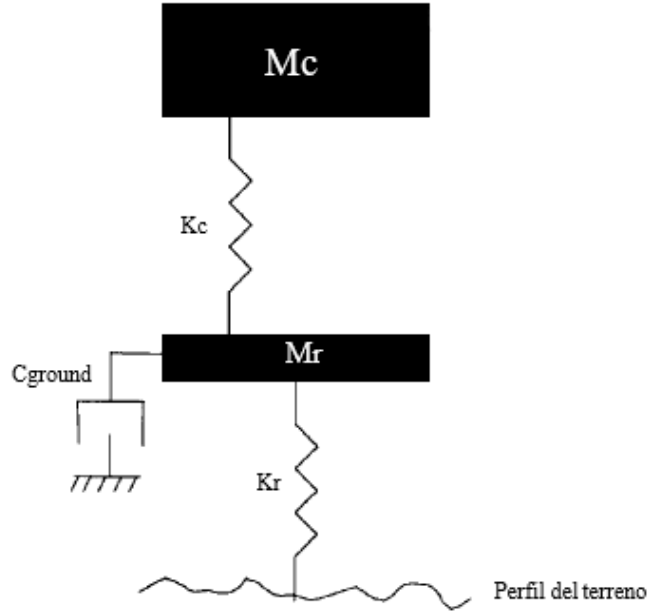


Figura 4: Control groundhook ideal.

Las ecuaciones expresadas en variables de estado que definen a los casos, reiterando un razonamiento similar que para Skyhook, son las siguientes:

$$\begin{cases} x_4 \cdot (x_3 - x_4) \leq 0 & F_{sa} = c_{ground_{max}} \cdot (x_3 - x_4) \\ x_4 \cdot (x_3 - x_4) > 0 & F_{sa} = c_{ground_{min}} \cdot (x_3 - x_4) \end{cases} \quad (14)$$

En el control Híbrido se combinan las acciones de los esquemas anteriores con la finalidad de encontrar un punto medio donde se controle la oscilación de ambas masas. En esta estrategia de control se manipula una variable α en el rango de 0 a 1, lo cual permite aumentar o disminuir la influencia de cada estrategia. La Figura 5 muestra el esquema correspondiente a este control.

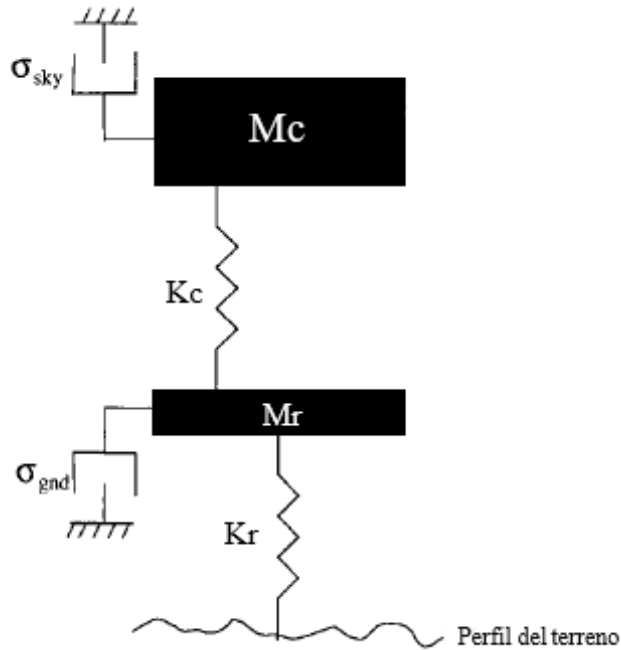


Figura 5: Control Híbrido.

Las ecuaciones de control correspondientes al control Híbrido son:

$$\begin{cases} x_3 \cdot (x_3 - x_4) \geq 0 & \sigma_{sky} = c_{sky_{max}} \\ x_3 \cdot (x_3 - x_4) < 0 & \sigma_{sky} = c_{sky_{min}} \\ x_4 \cdot (x_3 - x_4) \leq 0 & \sigma_{ground} = c_{ground_{max}} \\ x_4 \cdot (x_3 - x_4) > 0 & \sigma_{ground} = c_{ground_{min}} \end{cases} \quad (15)$$

La ecuación que describe la fuerza del amortiguador semiactivo híbrido es:

$$F_{sa} = (x_3 - x_4) \cdot [\alpha \cdot \sigma_{sky} + (1 - \alpha) \cdot \sigma_{ground}] \quad (16)$$

Donde las variables σ_{sky} y σ_{ground} son los coeficientes de amortiguamiento de los controles Skyhook y Groundhook respectivamente, α es la razón relativa entre el control Skyhook y el Groundhook. Cuando $\alpha = 1$ el control Híbrido se reduce a un control Skyhook puro, cuando $\alpha = 0$, se convierte en un control Groundhook puro.

2.5. Sensores

Como siguiente paso se busca dar realidad a los sensores, para esto hay que plantear que no todas las variables son medibles directamente en la realidad. Por esto se toma en cuenta que solamente x_1 y \dot{x}_3 pueden medirse, x_1 mediante un sensor de desplazamiento lineal y \dot{x}_3 mediante un acelerómetro.

Para el sensor de desplazamiento lineal se propone un sensor inductivo de la marca Turck.

Este sensor está fijo al chasis, dentro del sensor se encuentra un oscilador, una bobina y un circuito de disparo y salida. El oscilador de corriente permite que la bobina genere un campo electromagnético, de esta manera cuando el objeto metálico (eje de rueda) ingresa al campo electromagnético se genera una corriente de inducción sobre el objeto. A medida que el objeto se acerca al sensor, el flujo de corriente aumenta y también lo hace la carga en el circuito de oscilación, entonces la oscilación se atenúa o se detiene. El sensor detecta este cambio en el estado de oscilación con el circuito de detección de amplitud y emite una señal de detección.

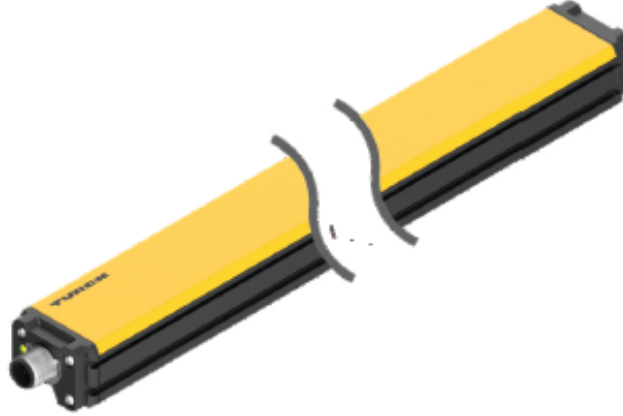


Figura 6: Sensor de desplazamiento lineal inductivo.

El acelerómetro que se propone es el AIS3624DQ de STMicroelectronics. Este sensor consta de una masa de prueba que, al aplicarse una aceleración sobre el sensor, la masa se desplaza de su posición nominal causando un desequilibrio en el puente capacitivo, mediante un pulso de voltaje aplicado se puede medir el cambio de carga acumulada, este cambio se convierte en un valor de aceleración.

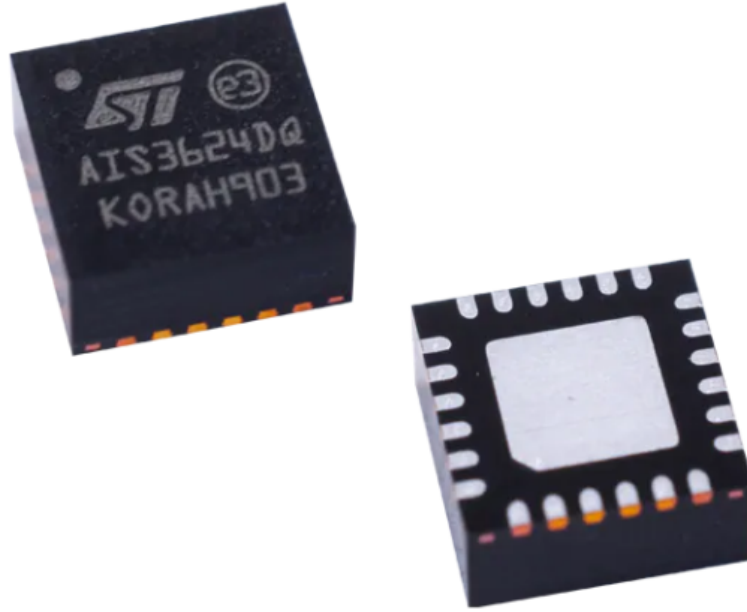


Figura 7: Acelerómetro AIS3624DQ.

Los sensores no actúan de manera ideal, al cuantizar la señal medida se pierde información. Es por esto que hay un error de cuantización que se debe atenuar, este error se puede representar como ruido blanco de distribución uniforme.

Para discretizar las señales recibidas por los sensores, se diseñan funciones de cuantización realizadas en C. Con el comando `mex` (MATLAB executable) se compila la función y se crea un archivo ejecutable para usar en Simulink. Este enfoque permite aprovechar la eficiencia y rapidez del lenguaje C en términos de tiempo de ejecución.

Por otra parte, la precisión del cuantizador es la diferencia mínima entre dos medidas muestreadas adyacentes. Esta se define como la razón del máximo rango medible por el instrumento y 2^n donde n es la cantidad de bits de resolución del sensor.

Según [2], el alcance máximo del sensor de desplazamiento lineal es de $500mm$ y su resolución es de 16 bits. Se supone un bit de guarda.

Según [3], para el acelerómetro el rango es de $\pm 6g$, donde g es el valor de la gravedad ($9,81 \frac{m}{s^2}$), y su resolución es de 12 bits, como la salida es de 16 bits entonces tiene 4 bits de guarda.

Los bits de guarda sirven para brindar mayor precisión al valor medido, en caso de anomalías se puede decidir si redondear o truncar.

En el caso del sensor de desplazamiento lineal se analiza el bit de guarda, si este vale 1 entonces se suma un bit al número definido por los 15 bits.

En el caso del acelerómetro se analizan los 4 bits de guarda.

Si el primer bit vale 0, se truncará al número definido por los 12 bits.

Si el primer bit vale 1 y alguno de los otros bits de guarda vale 1, se redondeará hacia arriba el número de 12 bits.

Si el primer bit vale 1 pero los otros bits valen 0, se dice que hay *tie-break* y según el bit menos significativo de los 12 bits se determina el resultado final. Si este bit vale 0 entonces se trunca, si vale 1 se redondea hacia arriba.

2.6. Actuador

Los amortiguadores que utilizan fluido viscoso se basan en las propiedades que tenga el fluido para contrarrestar los efectos de la vibración; sin embargo, tienen como desventaja el hecho de que las propiedades del fluido sean constantes, principalmente su coeficiente de amortiguamiento y el valor de la fuerza que logra generar.

De este inconveniente surgen los amortiguadores magnetorreológicos, los cuales utilizan fluidos magnéticos que pueden cambiar sus propiedades ante la presencia de un campo magnético externo.

Este tipo de amortiguadores presenta varias ventajas:

- Posee un tiempo reacción que es diez veces más rápida que el amortiguador basado en electroválvulas.
- Es posible modificar la fluidez del líquido hasta mil veces por segundo, lo que asegura la posibilidad de una regulación prácticamente instantánea.
- Su fiabilidad.
- Bajo requerimiento energético: 20 W por amortiguador.
- Permite asegurar el control dinámico en todo el vehículo (independiente en cada rueda).
- No requiere válvulas ni electroválvulas complejas, lo que garantiza su relativa simplicidad mecánica.

No obstante también tiene sus desventajas:

- Costo elevado.
- Sobrecosto por la necesaria optimización de los amortiguadores magnetorreológicos.
- Por tratarse de sistemas semiactivos, requieren de un aporte de energía para que funcionen los elementos que la componen, que no requeriría un sistema pasivo.

En este proyecto se selecciona como actuador el amortiguador magnetorreológico RD-8040-1 de la empresa LORD. A continuación se presenta su curva de comportamiento.

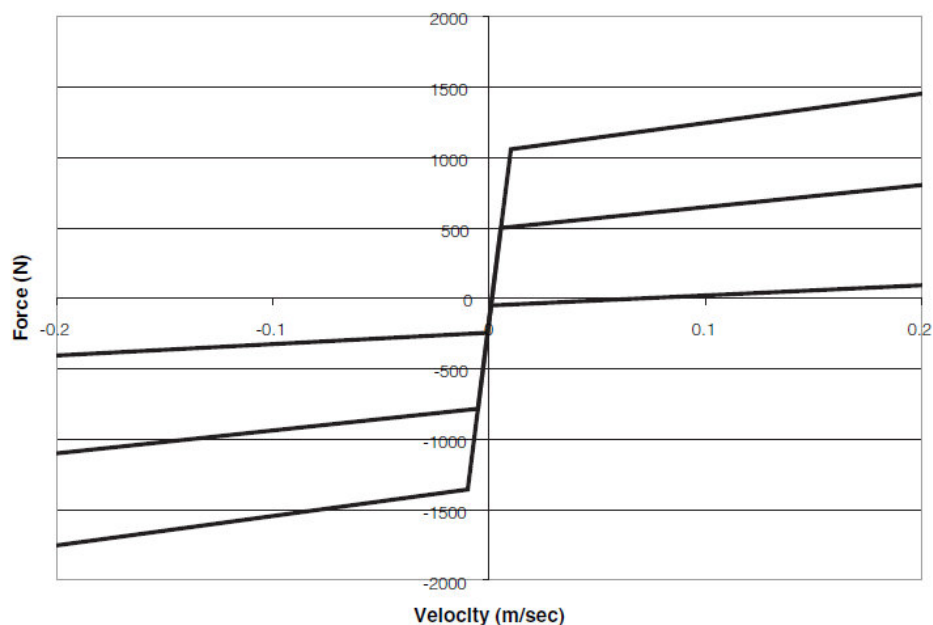


Figura 8: Curva de Fuerza vs Velocidad.

El bloque de saturación linealiza la curva de la figura 8 dado que en esta, la viscosidad del fluido depende de la corriente impuesta. En este sistema no se tiene en cuenta las múltiples curvas que pueden generarse, por lo que se opta por la máxima que permite el amortiguador MR.

2.7. Filtro de Kalman

Una vez elegidos los sensores y el actuador, se procede a seleccionar el método de estimación de las variables de estado.

Para esto se considera que los sensores presentan ruido de cuantización representado por ruido blanco uniforme. Estos sensores son el sensor de desplazamiento lineal y el acelerómetro, lo que indica que solo dos variables de estado pueden medirse directamente. Por ello, se implementa un filtro de Kalman discreto mediante el bloque Kalman Filter de Simulink, ver Figura 9, el cual estimará todas las variables, ya sean medibles o no, y atenuará el ruido de cuantización.

Este filtro provee un balance óptimo entre dos problemas: dar una reconstrucción rápida del estado, que requiere una rápida tasa de decaimiento y magnifica el efecto del ruido de proceso, y atenuar este efecto.

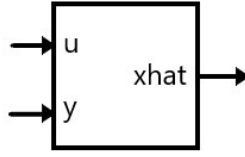


Figura 9: Filtro de Kalman discreto.

El filtro de Kalman es un algoritmo recursivo que consta de dos pasos: predicción y corrección.

Predicción

La predicción del estado se realiza mediante la ecuación:

$$\hat{x}_k^- = A_d \cdot \hat{x}_{k-1} + B_d \cdot u_{k-1} \quad (17)$$

La predicción de la covarianza del error es:

$$P_k^- = A_d \cdot P_{k-1} \cdot A_d^T + Q_d \quad (18)$$

donde:

- \hat{x}_k^- es la estimación del estado en el paso k antes de la medición (predicción).
- \hat{x}_{k-1} es la estimación del estado en el paso anterior.
- P_k^- es la covarianza del error predicha.
- P_{k-1} es la covarianza del error del paso anterior.
- Q_d es la matriz de covarianza del ruido de proceso (representa la incertidumbre en el modelo).

Corrección

Una vez realizada la predicción, se actualizan las estimaciones con las mediciones disponibles:

$$K_k = P_k^- \cdot C_d^T \cdot (C_d \cdot P_k^- \cdot C_d^T + R_d)^{-1} \quad (19)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k \cdot (y_k - C_d \cdot \hat{x}_k^- - D_d \cdot u_k) \quad (20)$$

$$P_k = (I - K_k \cdot C_d) \cdot P_k^- \quad (21)$$

donde:

- K_k es la ganancia de Kalman, que determina cuánto confiar en la predicción versus la medición.

- R_d es la matriz de covarianza del ruido de medición.
- \hat{x}_k es la estimación del estado después de incorporar la medición.
- y_k es la medición en el paso k .
- P_k es la covarianza del error actualizada.

Puede apreciarse que las matrices del modelo en espacio de estados tienen un subíndice "d", lo que indica que representan el modelo en espacio de estados discreto ($x[k+1] = A_d \cdot x[k] + B_d \cdot u[k] + w[k]$). A continuación, se definen las matrices discretas análogas a las del modelo en tiempo continuo:

$$\begin{aligned}
A_d &= e^{AT}, \\
B_d &= A^{-1} \cdot (A_d - I) \cdot B, \\
C_d &= C, \\
D_d &= D, \\
Q_d &= A_d \cdot (A_d^{-1} \cdot Q), \\
R_d &= \frac{R}{T},
\end{aligned} \tag{22}$$

donde T es el tiempo de muestreo.

Debido a las operaciones exponenciales de matrices e integrales involucradas en la discretización exacta, ver [4], es más práctico calcular un modelo discreto aproximado. En este caso, se elige la transformación bilineal o transformada de Tustin, donde:

$$e^{AT} \approx \left(I + \frac{1}{2}AT\right) \cdot \left(I - \frac{1}{2}AT\right)^{-1} \tag{23}$$

Esta transformada se utiliza en el procesamiento digital de señales y en la teoría de control discreto para transformar representaciones de sistemas en tiempo continuo a tiempo discreto y viceversa. Como el sistema continuo es estable, la transformada bilineal mantiene esta propiedad en el sistema discreto.

3. Resultados

Con el modelo matemático definido, se diseña el sistema y se define la perturbación externa en Simulink. Para realizarlo, el siguiente esquema muestra los próximos cambios que darán realidad al sistema considerado:

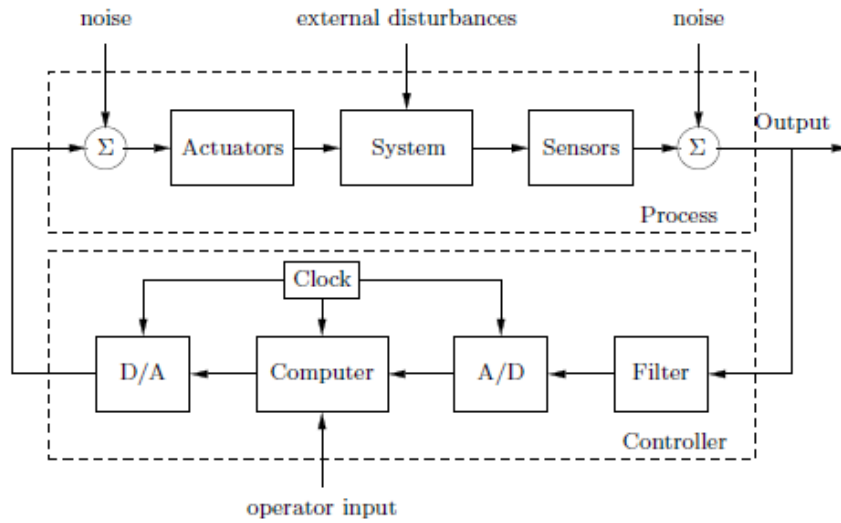


Figura 10: Esquema general de un sistema con ruido.

3.1. Sistema ideal

Se realiza el modelo de la planta junto con los sensores cuya ganancia es igual a 1, estos se consideran ideales y libres de ruido. El observador es capaz de estimar perfectamente las variables necesarias. La ley de control puede establecerse en skyhook, groundhook o híbrido. El actuador, un amortiguador MR, posee una curva de comportamiento histerética con amplios rangos de manera de no tener limitaciones en cuanto a la magnitud de fuerza a brindar, en un primer momento.

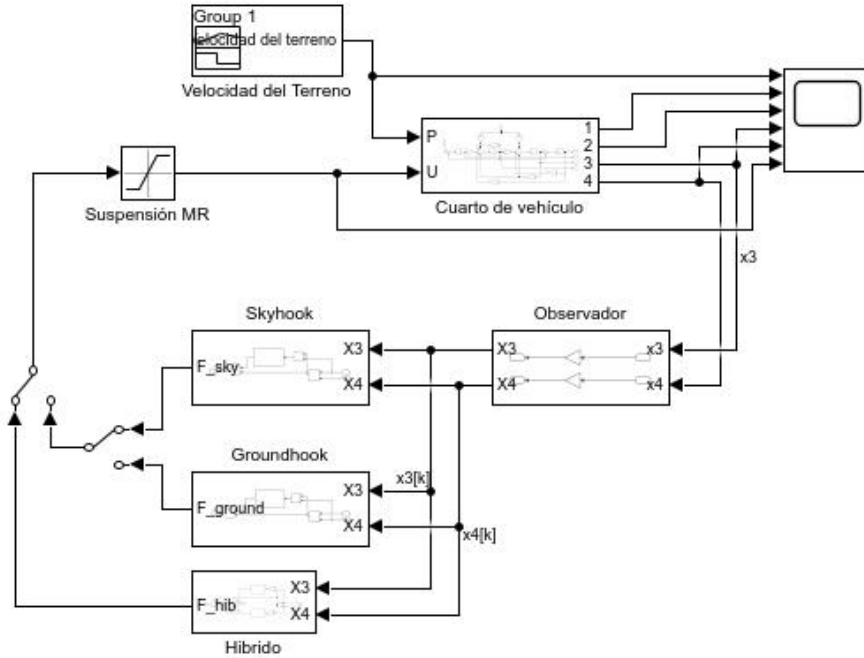


Figura 11: Modelo del sistema para un cuarto del vehículo.

A continuación se muestran los parámetros del vehículo a utilizar. Estos se extrajeron de [5].

Parámetro	Símbolo	Magnitud
Masa del chasis	M_c	$250kg$
Masa de la rueda	M_r	$45kg$
Coefficiente de rigidez de la suspensión	K_c	$16000N/m$
Coefficiente de rigidez de la rueda	K_r	$160000N/m$
Coefficiente de amortiguamiento del amortiguador	C_c	$1000N \cdot s/m$

Tabla 1: Parámetros del modelo del sistema. Extraídos de [6].

La perturbación externa es un lomo de burro de 170mm de ancho por 50 mm de alto, estas dimensiones se encuentran en [7]. Para el diseño de esta se utilizó el bloque Signal Builder.



Figura 12: Lomo de burro reductor de velocidad.

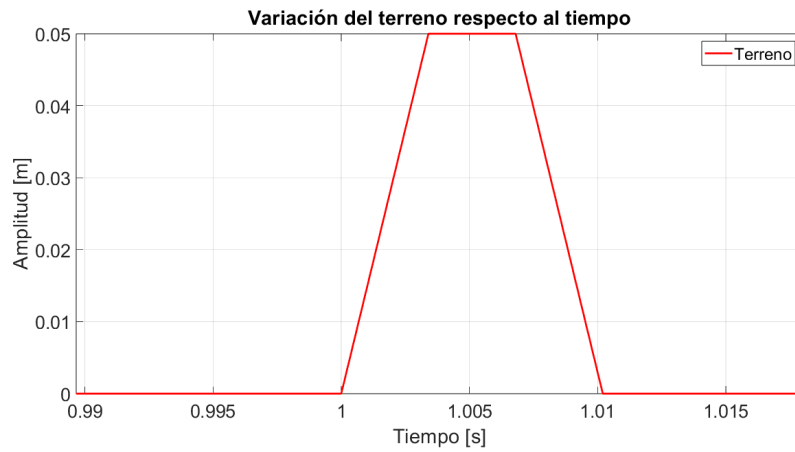


Figura 13: Silueta del terreno.

Como la perturbación sobre el sistema es la velocidad vertical de la silueta del terreno, esta se modela en la siguiente figura.

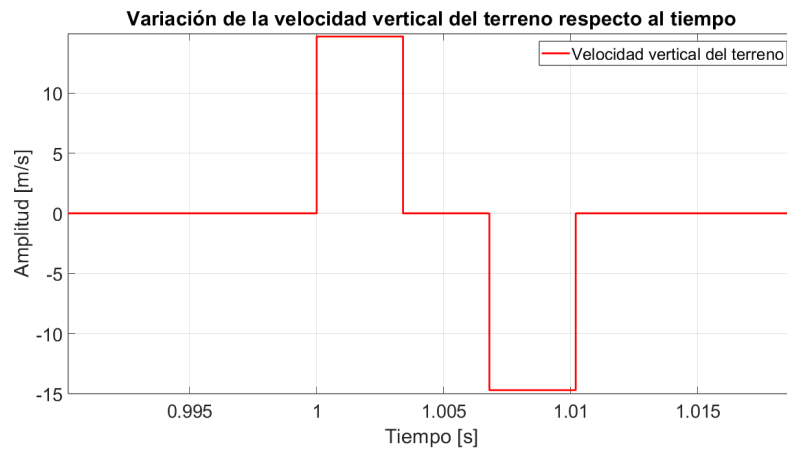


Figura 14: Perturbación externa que representa la velocidad de la silueta del terreno.

El vehículo circula a $60 \frac{km}{h}$, por lo que las variaciones en la velocidad de la silueta del terreno alcanzan una magnitud máxima y mínima de $\pm 14,71 \frac{m}{s}$.

El modelo de la planta es el siguiente:

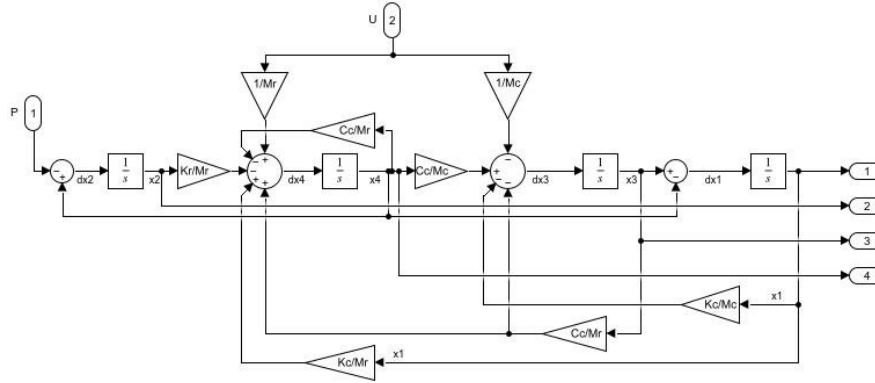


Figura 15: Modelo de la planta para un cuarto del vehículo.

Los coeficientes máximos y mínimos para Skyhook, Groundhook e Híbrido son $C_{max} = 900 \frac{N \cdot s}{m}$ y $C_{min} = 100 \frac{N \cdot s}{m}$ respectivamente.

Se compara la acción de control utilizando diferentes tipos de control. El mismo procedimiento se aplica al desplazamiento del chasis, las velocidades absolutas de la rueda y del chasis, así como a la aceleración absoluta del chasis.

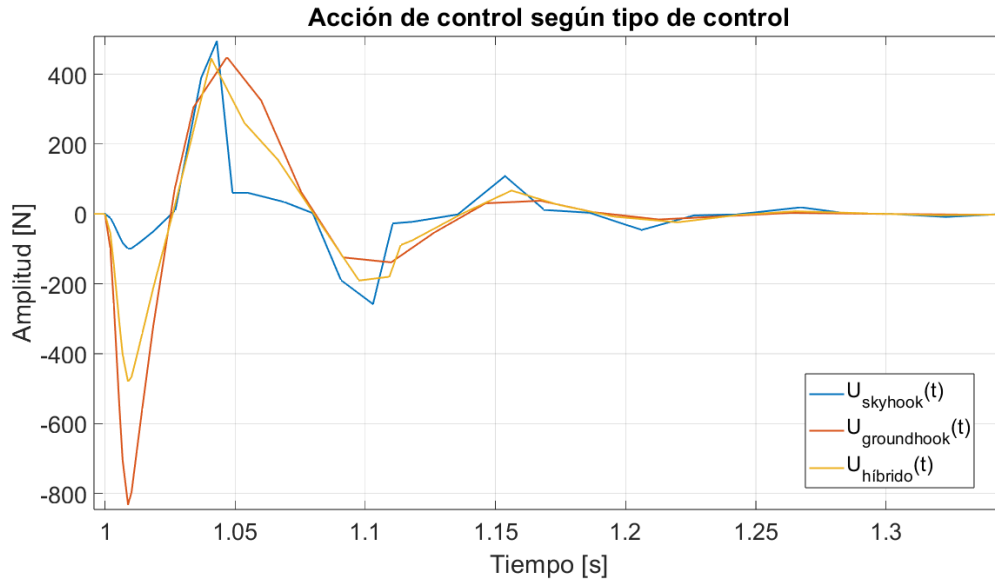


Figura 16: Acción de control con diferentes tipos de control.

Se puede observar que el control skyhook implementa la menor magnitud de fuerza, el control híbrido resulta en una acción de control de magnitud intermedia. Por otro lado, el control Groundhook realiza fuerzas mayores pero estabiliza más rápido el sistema.

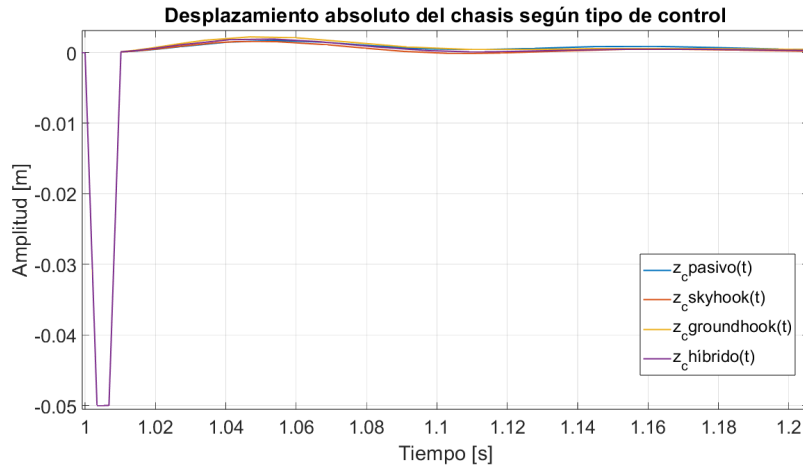


Figura 17: Desplazamiento absoluto del chasis.

Por otra parte, el control skyhook es el que produce menor desplazamiento sobre el chasis.

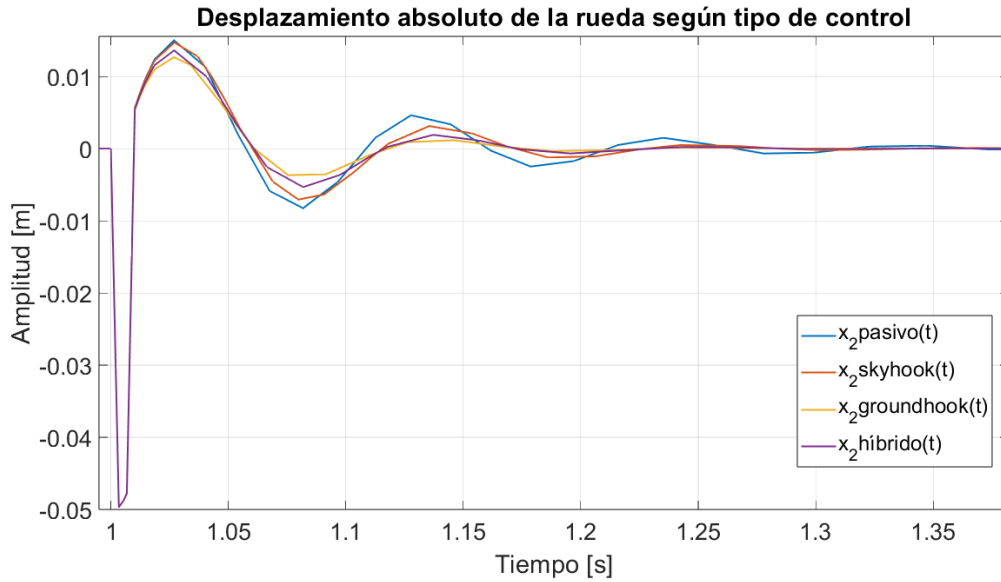


Figura 18: Desplazamiento de la rueda respecto al terreno.

Se observa que la suspensión pasiva presenta los mayores picos, el control Groundhook es el que mejor estabiliza el desplazamiento de la rueda.

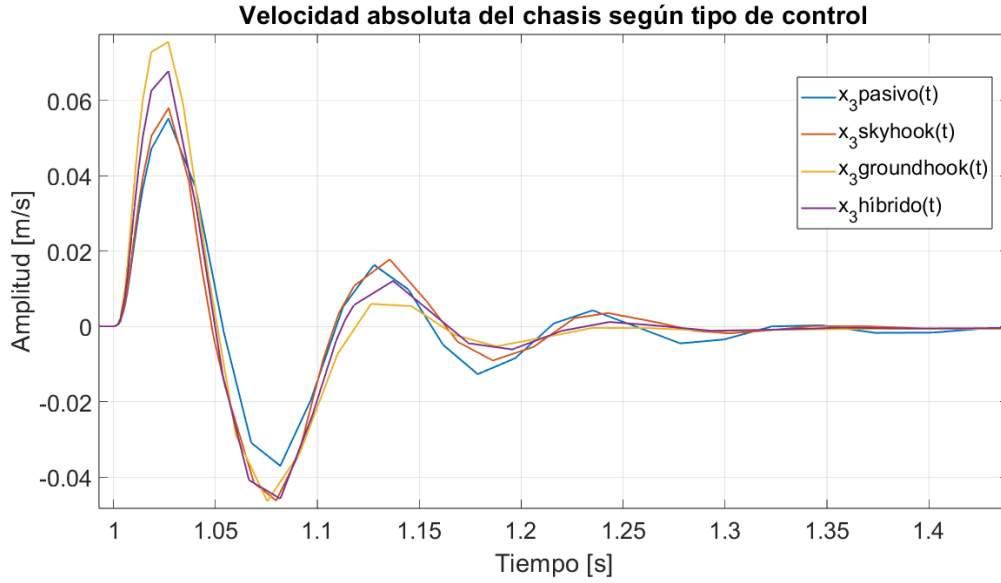


Figura 19: Velocidad absoluta del chasis.

El control skyhook brinda una velocidad del chasis sin cambios de dirección. El control híbrido tampoco oscila pero sus valores son menores. Por otra parte, el control groundhook ofrece menores magnitudes de velocidad pero esta cambia de dirección.

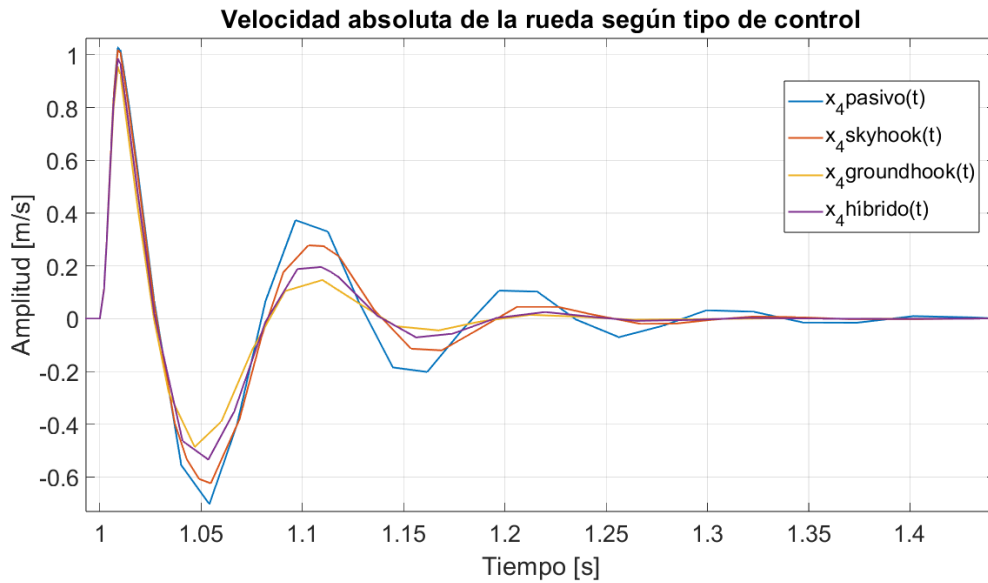


Figura 20: Velocidad absoluta de la rueda.

En cuanto a la velocidad de las ruedas, el control híbrido brinda oscilaciones intermedias.

Figura 21: Aceleración absoluta del chasis.

Se puede observar que, hasta la décima de segundo, la suspensión pasiva presenta menor oscilación. Sin embargo, a partir de ese punto, los otros tipos de controles atenúan la aceleración más rápidamente. El control Skyhook es el que mejor mantiene el control en la disminución de la magnitud de las oscilaciones durante la simulación.

3.2. Sensores y actuador reales

A partir de este punto, se trabajará únicamente con el control híbrido, ya que, como se observó previamente, sus resultados ofrecen un punto intermedio entre el control Skyhook y el Groundhook.

A continuación, se presenta el diseño del sistema con sensores y actuador reales, considerando el ruido de cuantización y aplicando el filtro de Kalman.

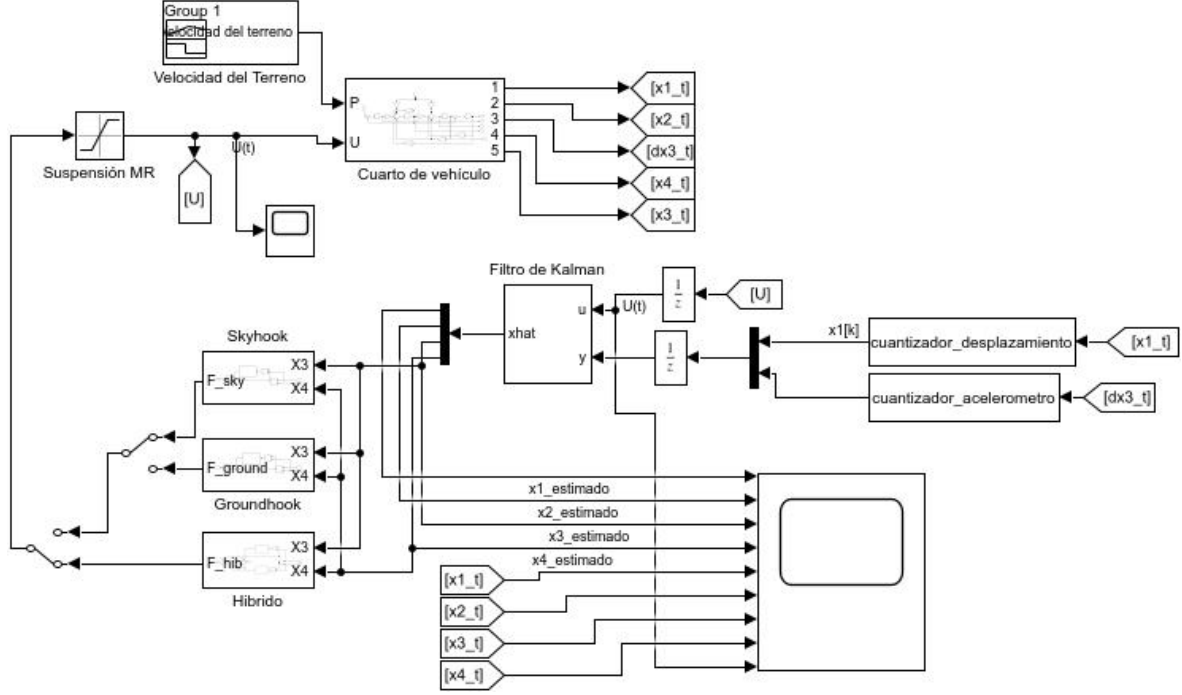


Figura 22: Modelo del sistema con sensores y actuador reales.

Para estimar correctamente las variables de estado, se seleccionaron los valores de la matriz de covarianza del ruido de medición R en función del error de medición de cada sensor, y los valores de la matriz de covarianza del ruido de proceso Q mediante prueba y error. La varianza representa las fluctuaciones respecto a la media, mientras que la covarianza refleja la relación entre dos variables. La matriz R representa la incertidumbre respecto a las mediciones de los sensores. Dado que los sensores no están correlacionados, la matriz R es diagonal.

La matriz Q , por su parte, representa la incertidumbre asociada a la predicción de las variables de estado a partir del modelo del sistema. Las dos primeras componentes de su diagonal son cero, ya que la perturbación afecta únicamente a las variables de estado que representan las velocidades.

El ruido de cuantización de los sensores puede modelarse como ruido blanco con distribución uniforme, dado que este error no tiene preferencia por un valor específico en el tiempo y es igualmente probable en todo el intervalo de estudio.

El ruido de cuantización tiene una varianza igual al MSE (Error Cuadrático Medio), por lo que se puede calcular a partir de la precisión del cuantizador de cada sensor.

El rango del sensor de desplazamiento lineal (x_1) es de 500mm , con una resolución de 15 bits más un bit de guarda. La precisión del cuantizador es de $1,5 \cdot 10^{-5}\text{m}$. La varianza se obtiene de:

$$\frac{q^2}{12} = \frac{(1,5 \cdot 10^{-5})^2}{12} = 1,94 \cdot 10^{-11}$$

El rango del acelerómetro (\dot{x}_3) es de $12 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, con una resolución de 12 bits más 4 bits de guarda. La precisión del cuantizador es de $0,0287 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. La varianza se obtiene de:

$$\frac{q^2}{12} = \frac{(0,0287)^2}{12} = 6,88 \cdot 10^{-5}$$

Entonces la matriz R es:

$$R = \begin{bmatrix} 1,94 \cdot 10^{-11} & & & \\ & 6,88 \cdot 10^{-5} & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Para comprobar la validez de los resultados, se calcula la desviación estándar de cada sensor y se multiplica por $\frac{\sqrt{12}}{2}$, dado que el intervalo de probabilidad de los errores se describe como $[-\frac{\sigma\sqrt{12}}{2}, \frac{\sigma\sqrt{12}}{2}]$.

Para el sensor de desplazamiento lineal, el intervalo es $[-7,63 \cdot 10^{-6}; 7,63 \cdot 10^{-6}]$, y para el acelerómetro, el intervalo es $[-0,0144; 0,0144]$.

En las siguientes gráficas se muestra que los errores son cercanos a estos intervalos.

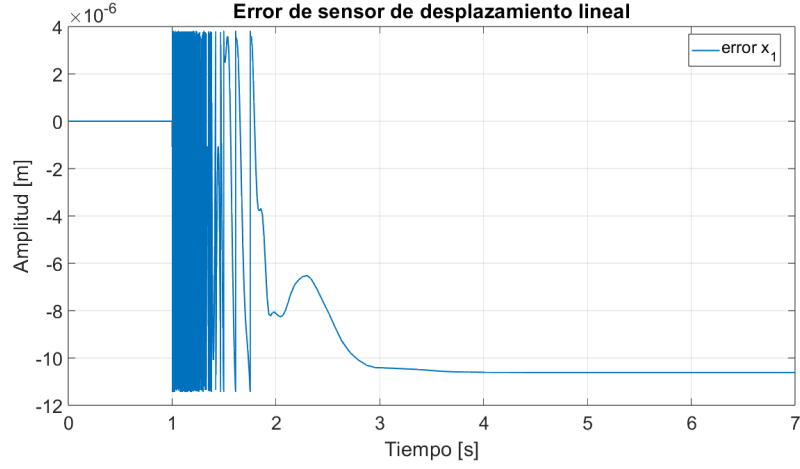


Figura 23: Error del sensor de desplazamiento lineal.

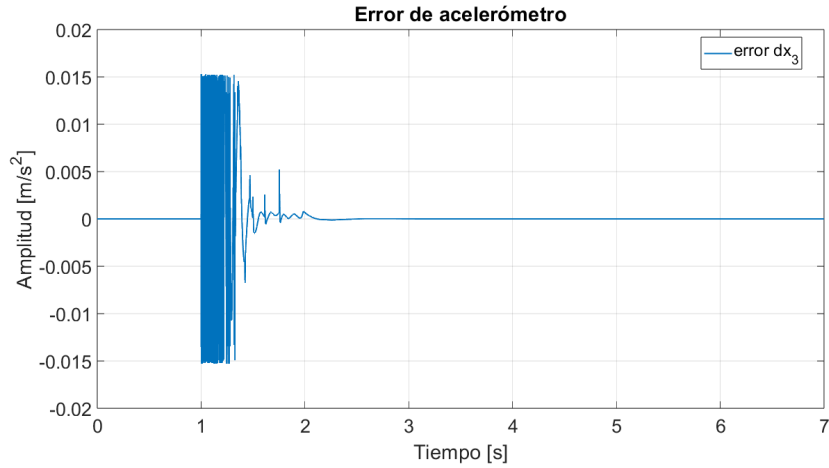


Figura 24: Error del acelerómetro.

Por otro lado, la matriz Q se definió de la siguiente manera:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,6 \end{bmatrix}$$

Una vez definidas R y Q , se obtuvieron R_d y Q_d para implementarlas en el filtro discreto. Nuevamente se realizó prueba y error con la matriz Q_d dando como resultado:

$$Q_d = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,94 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,458 \end{bmatrix} \quad R_d = \begin{bmatrix} 0,0194 & 0 \\ 0 & 0,688 \end{bmatrix}$$

Esta configuración se determinó mediante prueba y error. Cuando se disminuía la incertidumbre en las dos primeras componentes de la diagonal de Q_d , las gráficas de x_1 y x_2 no presentaban atenuación de ruido, pero surgían distorsiones las otras gráficas.

Como resultado de estas implementaciones, se observan las estimaciones de las variables de estado respecto a los valores reales.

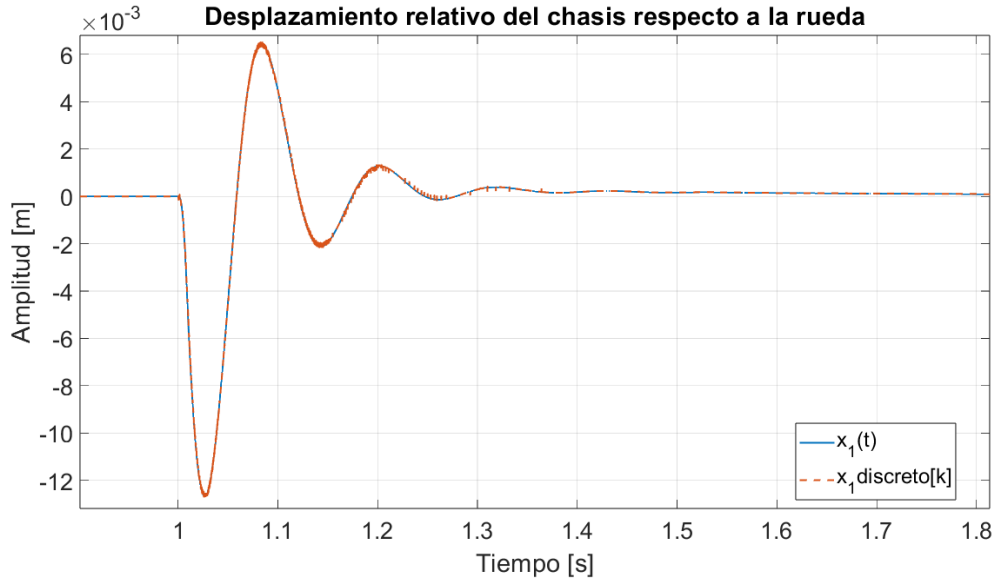


Figura 25: Comparación del desplazamiento relativo del chasis estimado y real.

La variable estimada de x_1 sigue constantemente el comportamiento de la real.

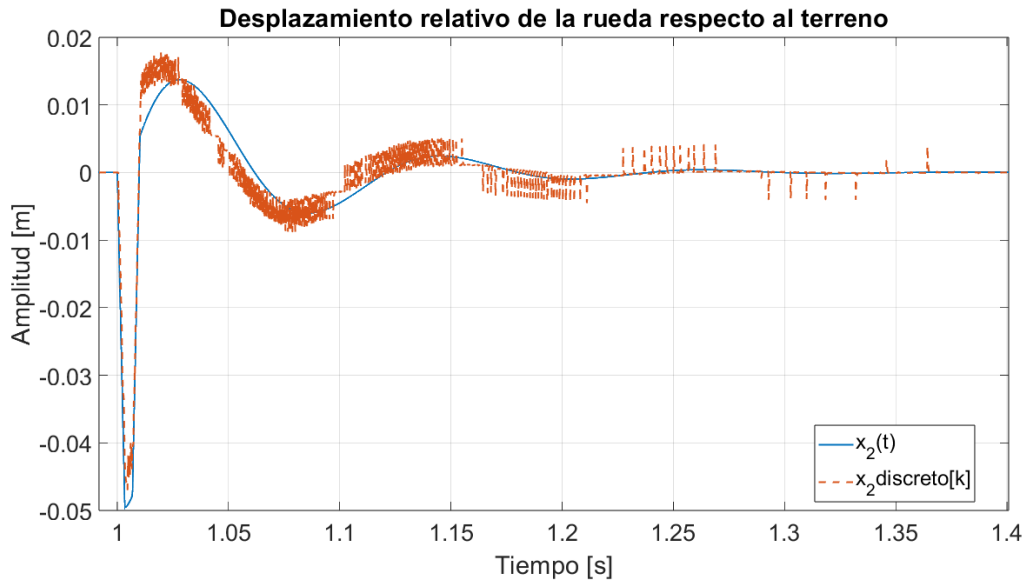


Figura 26: Comparación del desplazamiento absoluto de la rueda estimado y real.

Respecto a la variable x_2 , no se logra estimar un valle que dura una centésima de segundo, pero sí lo hace durante el resto de la simulación.

La velocidad relativa del chasis respecto a la rueda estima correctamente aunque en el tramo de 1,11s a 1,15s se aleja de la curva real.

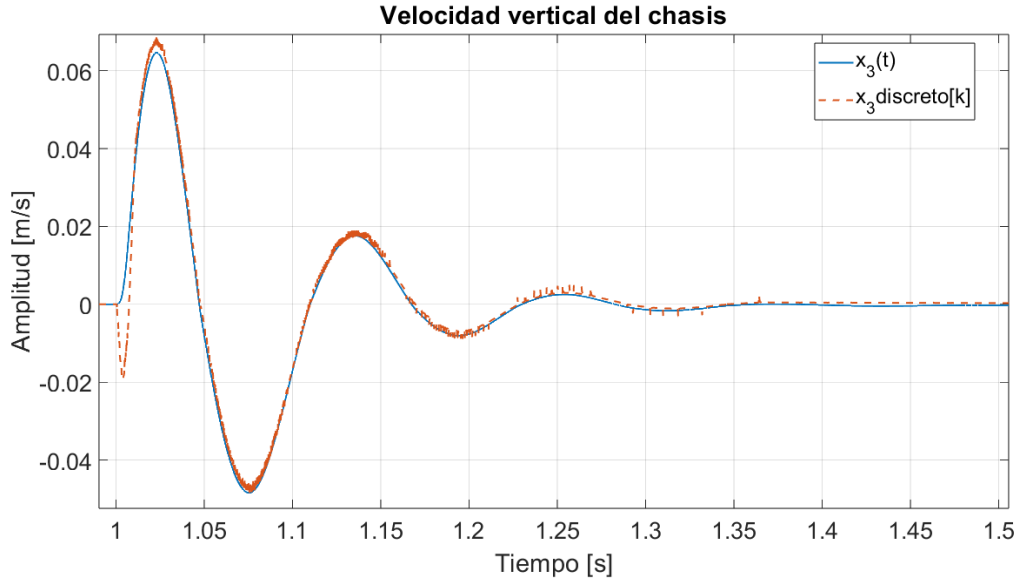


Figura 27: Comparación de la velocidad relativa del chasis respecto de la rueda, estimada y real.

La velocidad absoluta de la rueda es la variable que presenta más errores respecto al valor real. Hay dos distorsiones notables entre 1,025s y 1,053s, y entre 1,085s y 1,124s. No obstante, se recupera rápidamente tendiendo al valor real.

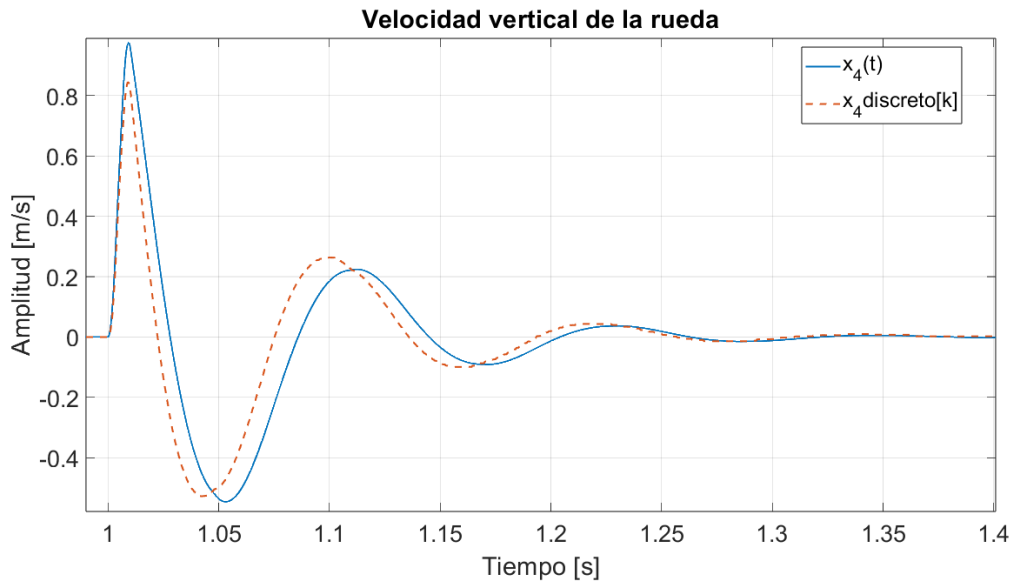


Figura 28: Comparación de la velocidad absoluta de la rueda, estimada y real.

En cuanto a la acción de control, se presenta la siguiente gráfica que la compara con la velocidad relativa del chasis respecto a la rueda.

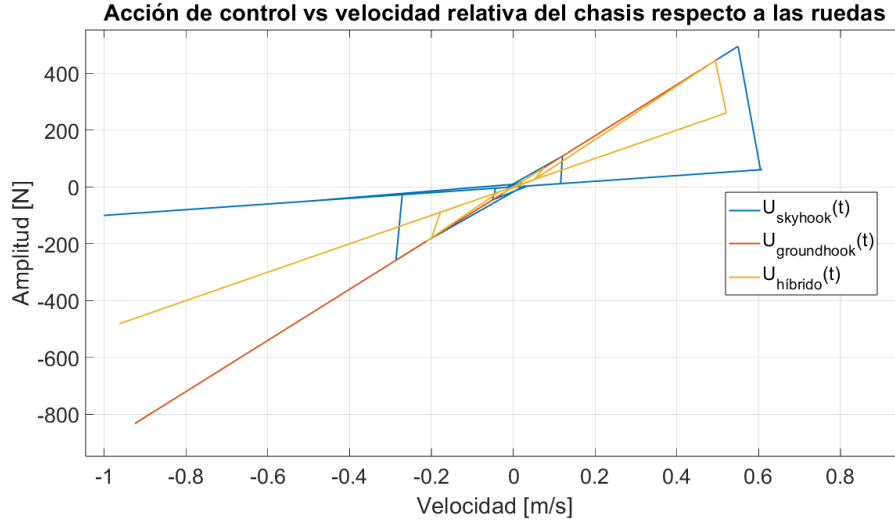


Figura 29: Acción de control respecto a $x_3 - x_4$.

Se puede observar que la acción de control se encuentra en el primer y tercer cuadrante, de manera que actúa en oposición al movimiento.

4. Conclusiones

Los resultados obtenidos muestran que el control híbrido logra un equilibrio entre confort y estabilidad, mientras que los otros enfoques tienden a priorizar una de estas características sobre la otra.

El filtro de Kalman estima adecuadamente las variables de estado, aunque se observan distorsiones transitorias que tienden a atenuarse con el tiempo. Una vez que el sistema alcanza el estado estacionario, la acción de control se estabiliza.

Entre las variables estimadas, x_2 presenta el mayor nivel de ruido, mientras que x_1 es la mejor observada, lo que se debe a la naturaleza y precisión de los sensores utilizados.

En este proyecto se ha utilizado un modelo de cuarto de vehículo para representar la dinámica de la suspensión. Como trabajo futuro, se podría extender el análisis a un modelo de medio vehículo o incluso a un modelo completo, lo que permitiría capturar mejor el comportamiento tridimensional del automóvil. Sin embargo, esto implicaría un aumento en la complejidad del sistema y en las consideraciones dinámicas necesarias para su modelado y control.

Además, en la etapa de adquisición de datos, se podría incorporar un bloque Sample Hold en los conversores ADC para mejorar la fidelidad de la cuantización y evitar la saturación del conversor.

Otra mejora importante sería la incorporación de la dinámica del actuador magnetorreológico (MR) en el modelo, utilizando representaciones como el modelo de Bouc-Wen. Esto permitiría evaluar el impacto de las características no ideales del actuador en el desempeño del sistema de suspensión y diseñar estrategias de control más realistas.

Finalmente, una posible línea de investigación sería la implementación del filtro de Kalman en hardware embebido como parte del sistema de control de la suspensión semiactiva, lo que permitiría evaluar su desempeño en tiempo real y su factibilidad para aplicaciones prácticas en la industria automotriz.

Bibliografía

Overleaf. Bibliography management in LaTeX. [URL](#).

LaTeX. Manual de LaTeX. [URL](#)

VirtualBrain. Cómo Funciona un Acelerómetro 6 Tipos de Acelerómetros. [Video](#)

MATLAB. Diseño de filtros digitales con MATLAB. [Video](#)

D. Alfonso Fernández Viveros. Modelos de un amortiguador magneto-reológico. [URL](#)

H. Unuh, P. Muhamad, F. Yakub, M. A. Ismail and Z. Tanasta. Experimental Validation to a Prototype Magnetorheological (MR) Semi-Active Damper for C-Class Vehicle. [URL](#)

Electricity-Magnetism. Sensores de desplazamiento inductivo. [Artículo](#)

Changning Liu, Long Chen, Xiaofeng Yang, Xiaoliang Zhang, Yi Yang. General Theory of Skyhook Control and Its Application to Semi-active Suspension Control Strategy Design. [URL](#)

Mecánico automotriz. Sensores en el automóvil. <https://www.mecanicoautomotriz.org/>

S.J. Dyke, B.F. Spencer Jr., M.K. Sain and J.D. Carlson. Modeling and Control of Magnetorheological Dampers for Seismic Response Reduction. [URL](#)

B.F. Spencer Jr., S.J. Dyke, M.K. Sain and J.D. Carlson. Phenomenological Model of a Magnetorheological Damper. [URL](#)

Geoffrey Geldhof. Semi-Active Vibration Dynamics Control of Multi-Cart Systems Using a Magnetorheological Damper.

C. Steven Díaz-Choque, L. C. Félix-Herrán, and Ricardo A. Ramírez-Mendoza. Optimal Skyhook and Groundhook Control for Semiactive Suspension: A Comprehensive Methodology. [URL](#)

H. Eric Tseng, Davor Hrovat. State of the art survey: active and semi-active suspension control. [URL](#)

Dishant, Er.Parminder Singh, Er.Mohit Sharma. Suspension Systems: A Review. [URL](#)

LORD. RD-8040-1 and RD-8041-1 Dampers. [Datasheet](#)

Mehdi Ahmadian and Christopher A. Pare. A Quarter-Car Experimental Analysis of Alternative Semiactive Control Methods. [URL](#)

Luis Carlos Félix Herrán. Control de una suspensión semi-activa con un amortiguador magneto-reológico. [URL](#)

Mohsin Jamil, Salman Zafar, and Syed Omer Gilani. Designing PID Controller Based Semi-active Suspension System Using MATLAB Simulink. [URL](#)

Francesc Pozo, Mauricio Zapateiro, Leonardo Acho, Yolanda Vidal, NingsuLuo. Experimental study of semiactive VSC techniques for vehicle vibration reduction. [URL](#)

K.Dhananjay Rao. Modeling, Simulation and Control of Semi Active Suspension System for Automobiles under MATLAB Simulink using PID Controller. [URL](#)

Vishisht Bhaiya, M.K. Shrimali, S.D. Bharti, T.K. Datta. Modified semiactive control with MR dampers for partially observed systems. [URL](#)

Jorge Hurel Ezeta, Anthony Mandow, Alfonso García Cerezo. Los Sistemas de Suspensión Activa y Semiactiva: Una Revisión. [URL](#)

Bilin Aksun Güvenç, Emre Kural, Bülent Keşli, Kemal Gülbudak, Serdar Güngör, Ahmet Kanbolat. Semi Active Suspension Control System Development for a Light Commercial Vehicle. [URL](#)

Sergio M. Savaresi, Charles Poussot-Vassal, Cristiano Spelta, Oliver Sename, Luc Dugard. Semi-Active Suspension Control Design for Vehicles. [URL](#)

Mike Blundell, Damian Harty. The Multibody Systems Approach to Vehicle Dynamics. [URL](#)

Karl Johan Aström, Richard M. Murray. Feedback Systems. [URL](#)

Oppenheim, Schafer. Tratamiento de señales en tiempo discreto. [URL](#)

Aström Karl Johan, Murray Richard M.. FeedbackSystems. [URL](#)

Gonzalez Rodrigo. Manual de estilo para la redacción de reportes técnicos. [URL](#)

Model Based Development. What Is Algebraic Loop Error And How To Resolve It Simulink. [Video](#)

Referencias

- [1] Ogata Katsuhiko. *Ingeniería De Control Moderna*. Pearson, 2010. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4614-1433-9>.
- [2] Turck. Sensor de recorrido lineal inductivo. https://www.turck.com.mx/datasheet/_es/edb_100001936_es1_es.pdf.
- [3] STMicroelectronics. Acelerómetro ais3624dq. <https://www.st.com/resource/en/datasheet/ais3624dq.pdf>.
- [4] Wikipedia. Discretization. <https://en.wikipedia.org/wiki/Discretization>.

- [5] Marcoantonio Alamo-Viera. *Modelación y Control de un sistema de suspensión Semiactiva con Amortiguador Magnetorreológico*. PhD thesis, Universidad de Piura, 2016. <https://repositorio.concytec.gob.pe/entities/publication/4eabccb7-11a5-4d48-b1ea-5add7b9f3440>.
- [6] Rajamani Rajesh. *Vehicle Dynamics and Control*. Springer, 2006. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4614-1433-9>.
- [7] SeguridadPVC. Lomo de burro reductores de velocidad pvc. <https://seguridadpvc.com.ar/LOMO-DE-BURRO-PVC.html>.