Aprendizaje no supervisado

Agrupamiento basado en modelos probabilísticos. Algoritmo EM.

Javier Sevilla

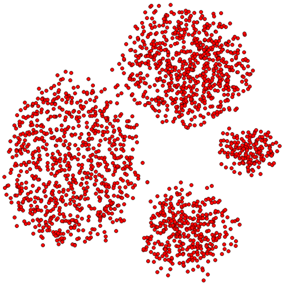
Universidad Internacional de Valencia

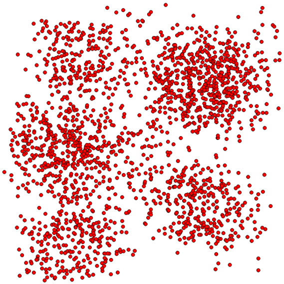
14.03.2020

Agrupamiento

Tipos de algoritmos de agrupamiento

- Basados en particiones
- Jerárquicos
- Espectrales
- Basados en densidad
- Probabilísticos

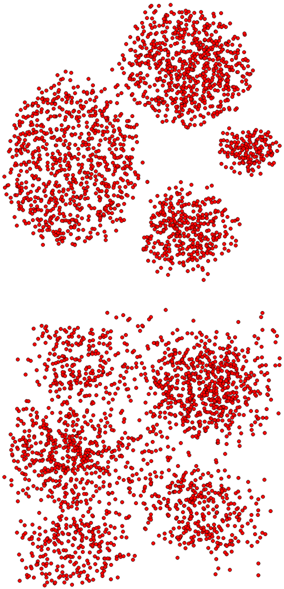




Agrupamiento

Tipos de algoritmos de agrupamiento

- Basados en particiones
- Jerárquicos
- Espectrales
- Basados en densidad
- **Probabilísticos**



Agrupamiento

Agrupamiento probabilístico

- Se asume la existencia de un **modelo probabilístico** a partir del cual se han **generado** los datos observados.
- **Agrupamiento**: encontrar, a partir de los datos de entrenamiento, el mejor **ajuste del modelo generador** que se asume.

  Procedimiento de estimación de los parámetros del modelo generador asumido
- Se asume la existencia de una variable oculta (no observada) que asigna los ejemplos a los clústeres

  Sin esta información, es necesario acudir a técnicas de estimación en presencia de datos incompletos (algoritmo EM)

- Variable aleatoria, X
  Función que asigna un valor al resultado de un experimento aleatorio

  No se conoce el valor que tomará al ser medida, pero se sabe cuál es la distribución de probabilidad asociada al conjunto de valores posibles

  Discretas vs. continuas

  Ej., cara obtenida al lanzar un dado (todos los valores, misma probabilidad 1/6)
  Ej., peso de una persona tomada al azar en una población (escuela, pueblo, etc.)

- Variable aleatoria, X

  Función que asigna un valor al resultado de un experimento aleatorio

  No se conoce el valor que tomará al ser medida, pero se sabe cuál es la distribución de probabilidad asociada al conjunto de valores posibles

  Discretas vs. continuas

  Ej., cara obtenida al lanzar un dado (todos los valores, misma probabilidad $1/6$)
  Ej., peso de una persona tomada al azar en una población (escuela, pueblo, etc.)

- Distribución de probabilidad, $p(X; \theta)$

  Función que asigna, a cada valor posible x de la variable X, la probabilidad de que se obtenga dicho valor

  Discretas vs. continuas

  Ej., prob. de las caras de un dado (discreta, 6 valores)
  Ej., prob. del peso las personas de una población (continua, infinitos valores)
  Ej., prob. del número de quejas diarias de un negocio (discreta, infinitos valores)

- **Variable aleatoria, X**
  Función que asigna un valor al resultado de un experimento aleatorio

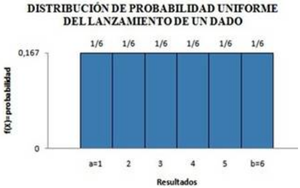
  No se conoce el valor que tomará al ser medida, pero se sabe cuál es la distribución de probabilidad asociada al conjunto de valores posibles

  Discretas vs. continuas

  Ej., cara obtenida al lanzar un dado (todos los valores, misma probabilidad $1/6$)
  Ej., peso de una persona tomada al azar en una población (escuela, pueblo, etc.)

- **Distribución de probabilidad, $p(X;\theta)$**
  Función que asigna, a cada valor posible x de la variable X, la probabilidad de que se obtenga dicho valor

  Discretas vs. continuas



Ej., prob. de las caras de un dado (discreta, 6 valores)
Ej., prob. del peso las personas de una población (continua, infinitos valores)
Ej., prob. del número de quejas diarias de un negocio (discreta, infinitos valores)

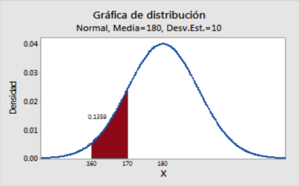
- **Variable aleatoria, X**
  Función que asigna un valor al resultado de un experimento aleatorio

  No se conoce el valor que tomará al ser medida, pero se sabe cuál es la distribución de probabilidad asociada al conjunto de valores posibles

  Discretas vs. continuas

  Ej., cara obtenida al lanzar un dado (todos los valores, misma probabilidad 1/6)
  Ej., peso de una persona tomada al azar en una población (escuela, pueblo, etc.)
- **Distribución de probabilidad, $p(X;\theta)$**
  Función que asigna, a cada valor posible x de la variable X, la probabilidad de que se obtenga dicho valor

  Discretas vs. continuas



Ej., prob. de las caras de un dado (discreta, 6 valores)
Ej., prob. del peso las personas de una población (continua, infinitos valores)
Ej., prob. del número de quejas diarias de un negocio (discreta, infinitos valores)

Agrupamiento probabilístico

Conceptos básicos

- **Variable aleatoria, X**
  Función que asigna un valor al resultado de un experimento aleatorio

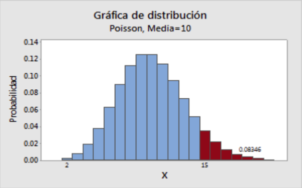
  No se conoce el valor que tomará al ser medida, pero se sabe cuál es la distribución de probabilidad asociada al conjunto de valores posibles

  Discretas vs. continuas

  Ej., cara obtenida al lanzar un dado (todos los valores, misma probabilidad 1/6)
  Ej., peso de una persona tomada al azar en una población (escuela, pueblo, etc.)

- **Distribución de probabilidad, $p(X;\theta)$**
  Función que asigna, a cada valor posible x de la variable X, la probabilidad de que se obtenga dicho valor

  Discretas vs. continuas

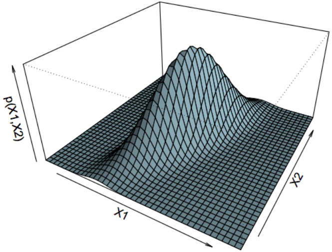


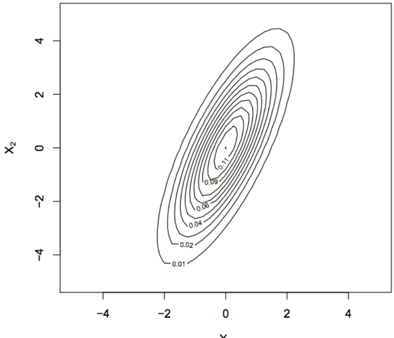
Ej., prob. de las caras de un dado (discreta, 6 valores)
Ej., prob. del peso las personas de una población (continua, infinitos valores)
Ej., prob. del número de quejas diarias de un negocio (discreta, infinitos valores)

- Vector aleatorio (multi-variada), $(X_1, \ldots, X_v)$
  Función que asigna un vector de valores al resultado de un experimento aleatorio

  La distribución de probabilidad asociada es multivariada, $p(X_1, \ldots, X_v)$

  Ej., coordenadas (x, y) en las que bota un balón al dejarlo caer desde un tercer piso
  Ej., caras obtenidas al lanzar un dado y una moneda

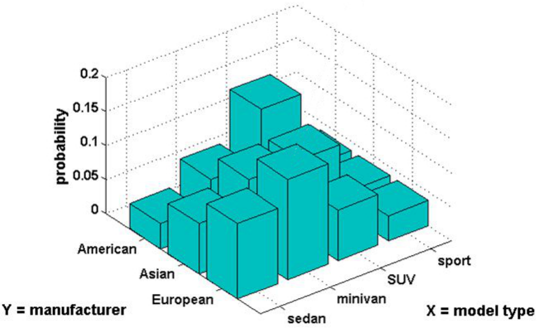




- Vector aleatorio (multi-variada), $(X_1, \ldots, X_v)$
  Función que asigna un vector de valores al resultado de un experimento aleatorio

  La distribución de probabilidad asociada es multivariada, $p(X_1, \ldots, X_v)$

  Ej., coordenadas (x, y) en las que bota un balón al dejarlo caer desde un tercer piso
  Ej., caras obtenidas al lanzar un dado y una moneda



- Vector aleatorio (multi-variada), $(X_1, \ldots, X_v)$
  Función que asigna un vector de valores al resultado de un experimento aleatorio

  La distribución de probabilidad asociada es multivariada, $p(X_1, \ldots, X_v)$

  Ej., coordenadas (x, y) en las que bota un balón al dejarlo caer desde un tercer piso
  Ej., caras obtenidas al lanzar un dado y una moneda

- Modelo generativo

  Es el modelo probabilístico que produjo un conjunto de datos dado

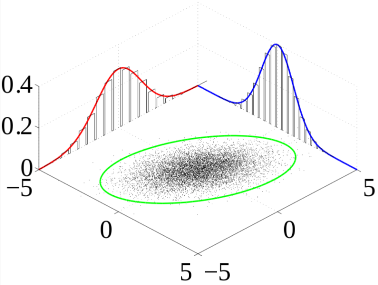
- Vector aleatorio (multi-variada), $(X_1, \ldots, X_v)$
  Función que asigna un vector de valores al resultado de un experimento aleatorio

  La distribución de probabilidad asociada es multivariada, $p(X_1, \ldots, X_v)$

  Ej., coordenadas (x, y) en las que bota un balón al dejarlo caer desde un tercer piso
  Ej., caras obtenidas al lanzar un dado y una moneda
- Modelo generativo

  Es el modelo probabilístico que produjo un conjunto de datos dado
- Caso de una muestra

  Es una instanciación del modelo generativo. Un valor (vector) producto de muestrear la distribución de prob. generadora.



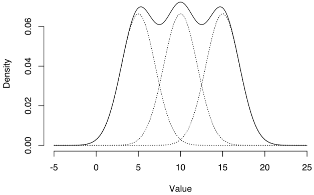
- Mixtura de distribuciones (Gaussianas)
  Función que asigna, a cada valor posible x de la variable X, la probabilidad de que se obtenga dicho valor

  La probabilidad de cada valor se obtiene usando una serie de variables aleatorias (una de selección, y varias componentes):

  - Una variable de selección que indica a qué componente pertenece (distribuida según $\{\pi_k\}_{k=1}^{K}$)
  - La variable de la componente seleccionada (distribuida según $p_k(x;\theta_k)$)

$$p(x) = \sum_{k=1}^{K} \pi_k \cdot p_k(x;\theta_k)$$

  Ej., edad de las personas de una escuela (alumnos/as, docentes)



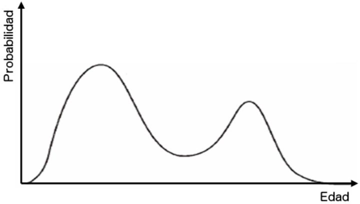
- Mixtura de distribuciones (Gaussianas)
  Función que asigna, a cada valor posible x de la variable X, la probabilidad de que se obtenga dicho valor

  La probabilidad de cada valor se obtiene usando una serie de variables aleatorias (una de selección, y varias componentes):

  - Una variable de selección que indica a qué componente pertenece (distribuida según $\{\pi_k\}_{k=1}^{K}$)
  - La variable de la componente seleccionada (distribuida según $p_k(x; \theta_k)$)

$$p(x) = \sum_{k=1}^{K} \pi_k \cdot p_k(x; \theta_k)$$

  Ej., edad de las personas de una escuela (alumnos/as, docentes)



Modelo generador de una Mixtura de Gaussianas sobre un vector aleatorio, $(x_1, \ldots, x_v)$. La función de densidad de la mixtura es:

$$p(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{K} \pi_k \cdot p_k(\boldsymbol{x}; \theta_k)$$

Coeficientes de mezcla, $\{\pi_1, \ldots, \pi_K\}$: denotan la probabilidad de que un punto sea la instanciación de cada una de las componentes. Cumplen que:

$$0 \leq \pi_k \leq 1, \forall k \in \{1, \ldots, K\} \wedge \sum_{k=1}^{K} \pi_k = 1$$

La distribución de probabilidad de la k-ésima componente:

$$p_k(\boldsymbol{x}; \theta_k) = \mathcal{N}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu}, \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^v |\Sigma|}} e^{-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})/2}$$

donde $\theta_k = \{\boldsymbol{\mu}, \Sigma\}$ son los parámetros de la componente.

Modelo generador de una Mixtura de Gaussianas sobre un vector aleatorio, $(x_1, \ldots, x_v)$. La función de densidad de la mixtura es:

$$p(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{K} \pi_k \cdot p_k(\boldsymbol{x}; \theta_k)$$

Coeficientes de mezcla, $\{\pi_1, \ldots, \pi_K\}$: denotan la probabilidad de que un punto sea la instanciación de cada una de las componentes. Cumplen que:

$$0 \leq \pi_k \leq 1, \forall k \in \{1, \ldots, K\} \wedge \sum_{k=1}^{K} \pi_k = 1$$

La distribución de probabilidad de la k-ésima componente:

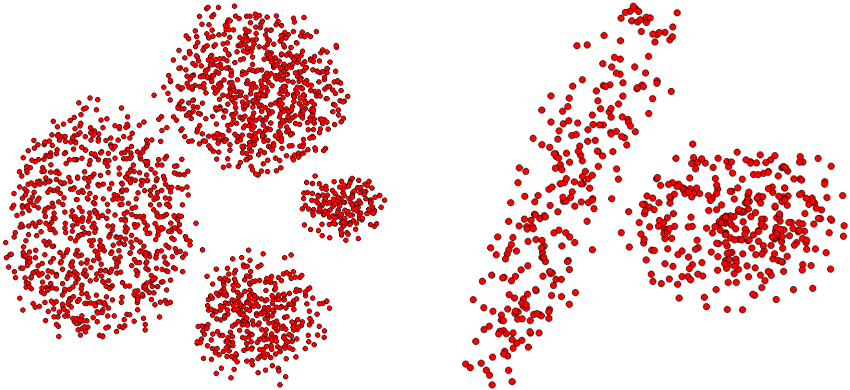
$$p_k(\boldsymbol{x}; \theta_k) = \mathcal{N}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu}, \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^v |\Sigma|}} e^{-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})/2}$$

donde $\theta_k = \{\boldsymbol{\mu}, \Sigma\}$ son los parámetros de la componente.

El proceso generador puede escalonarse en dos pasos:

(i) seleccionar la componente k; (ii) muestrear su distribución $p(x; \theta_k)$

Relación con el análisis de agrupamiento:



¿Qué queremos hacer?

- Plantear un modelo generador y entenderlo
- Estimar los parámetros del modelo generador dados los datos observados

La aproximación más habitual:

Asumir como modelo probabilístico generador de los datos una mixtura de distribuciones de probabilidad

- Mixtura de Gaussianas
- Cada componente (distribución) de la mixtura, un clúster
- Incertidumbre: asignación de los ejemplos a una u otra componente

- Un ejemplo pertenece a todos los clústeres (con distinta probabilidad)
- Al final, cada ejemplo pertenece al clúster cuya componente le otorga mayor probabilidad

La aproximación más habitual:

Asumir como modelo probabilístico generador de los datos una mixtura de distribuciones de probabilidad

- Mixtura de Gaussianas
- Cada componente (distribución) de la mixtura, un clúster
- Incertidumbre: asignación de los ejemplos a una u otra componente

  *** Algoritmo Esperanza-Maximización (EM) ***
- Un ejemplo pertenece a todos los clústeres (con distinta probabilidad)
- Al final, cada ejemplo pertenece al clúster cuya componente le otorga mayor probabilidad

Proceso generador escalonado:

1. Muestrear $p(z)$ para seleccionar la componente k desde la que se generará la muestra

2. Muestrear la distribución de probabilidad seleccionada

$$p_k(\boldsymbol{x}; \theta_k) = \mathcal{N}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu}_k, \Sigma_k) \;\; \text{with} \;\; \theta_k = \{\boldsymbol{\mu}_k, \Sigma_k\}$$

Proceso generador escalonado:

1. Muestrear $p(z)$ para seleccionar la componente k desde la que se generará la muestra
   *** Existencia de una variable aleatoria latente que determina la selección de la componente a muestrear***
2. Muestrear la distribución de probabilidad seleccionada

$$p_k(\boldsymbol{x}; \theta_k) = \mathcal{N}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu}_k, \Sigma_k) \text{ with } \theta_k = \{\boldsymbol{\mu}_k, \Sigma_k\}$$

Asignación de casos a componentes

Variable aleatoria (multinomial con un único intento)

$$z \sim Mult(1, \{\pi_k\}_{k=1}^{K})$$

Una muestra z es un vector K-dimensional con valor 1 para la componente seleccionada, y 0 para el resto

La distribución marginal de z es:

$$p(z) = \prod_{k=1}^{K} \pi_k^{z_k}$$

y la distribución condicional del caso $\boldsymbol{x}$ dado z:

$$p(\boldsymbol{x}|z) = \prod_{k=1}^{K} p_k(\boldsymbol{x}; \theta_k)^{z_k}$$

Modelo completo

Distribución marginal de x:

$$p(\boldsymbol{x}) = \sum_{z} p(\boldsymbol{x}, z) = \sum_{z} p(\boldsymbol{x}|z) \cdot p(z) = \sum_{k=1}^{K} \pi_k \cdot p(\boldsymbol{x}; \theta_k)$$

La probabilidad condicionada de z dado $\boldsymbol{x}$ (usando la regla de Bayes):

$$p(z_k = 1|\boldsymbol{x}) = \frac{p(\boldsymbol{x}|z_k = 1) \cdot p(z_k = 1)}{\sum_{k'=1}^{K} p(\boldsymbol{x}|z_{k'} = 1) \cdot p(z_{k'} = 1)}$$

$$= \frac{\mathcal{N}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu}_k, \Sigma_k) \cdot \pi_k}{\sum_{k'=1}^{K} \mathcal{N}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu}_{k'}, \Sigma_{k'}) \cdot \pi_{k'}}$$

Aprendizaje

Verosimilitud: Plausibilidad, dado un conjunto de datos, de un conjunto de parámetros Θ para un modelo.

Se calcula como la probabilidad asignada al conjunto de datos por el modelo parametrizado mediante Θ:

$$\mathcal{L}(\Theta|\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}) = \prod_{i=1}^{n} p(\boldsymbol{x}_i; \Theta)$$

Parámetros del modelo: $\Theta = \{\pi_1, \ldots, \pi_K, \boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_K, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_K\}$

Aprendizaje: estimación máximo verosímil

$$\begin{aligned}\Theta_{ML} &= \arg\max_{\Theta} \log \mathcal{L}(\Theta | \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}) \\ &= \arg\max_{\Theta} \sum_{i=1}^{n} \log p(\boldsymbol{x}_i; \Theta)\end{aligned}$$

Aprendizaje de parámetros máximo verosímiles: fórmula cerrada.

Aprendizaje: estimación máximo verosímil

$$\begin{aligned}\Theta_{ML} &= \arg\max_{\Theta} \log \mathcal{L}(\Theta | \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}) \\ &= \arg\max_{\Theta} \sum_{i=1}^{n} \log p(\boldsymbol{x}_i; \Theta)\end{aligned}$$

Aprendizaje de parámetros máximo verosímiles: fórmula cerrada.

** Probabilidad de cada componente:

$$\hat{\pi}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{z}_{ik}}{n}$$

Aprendizaje: estimación máximo verosímil

$$\Theta_{ML} = \arg\max_{\Theta} \log \mathcal{L}(\Theta | \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\})$$

$$= \arg\max_{\Theta} \sum_{i=1}^{n} \log p(\boldsymbol{x}_i; \Theta)$$

Aprendizaje de parámetros máximo verosímiles: fórmula cerrada.

** Centro de la normal de la k-ésima componente:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{z}_{ik} \cdot \boldsymbol{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{z}_{ik}}$$

Aprendizaje: estimación máximo verosímil

$$\Theta_{ML} = \arg\max_{\Theta} \log \mathcal{L}(\Theta | \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\})$$

$$= \arg\max_{\Theta} \sum_{i=1}^{n} \log p(\boldsymbol{x}_i; \Theta)$$

Aprendizaje de parámetros máximo verosímiles: fórmula cerrada.

** Matriz de covarianza de la normal de la k-ésima componente:

$$\hat{\Sigma}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{z}_{ik} (\boldsymbol{x}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}_k)(\boldsymbol{x}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}_k)^T}{\sum_{i=1}^{n} \hat{z}_{ik}}$$

Aprendizaje: estimación máximo verosímil

$$\Theta_{ML} = \arg\max_{\Theta} \log \mathcal{L}(\Theta | \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\})$$
$$= \arg\max_{\Theta} \sum_{i=1}^{n} \log p(\boldsymbol{x}_i; \Theta)$$

Aprendizaje de parámetros máximo verosímiles: fórmula cerrada.

Calcular la asignación prob. de cada ejemplo a componentes:

$$\hat{z}_{ik} = p(z_{ik} = 1 | \boldsymbol{x}_i) = \frac{\hat{\pi}_k \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{x}_i | \hat{\boldsymbol{\mu}}_k, \hat{\Sigma}_k)}{\sum_{k'=1}^{K} \hat{\pi}_{k'} \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{x}_i | \hat{\boldsymbol{\mu}}_{k'}, \hat{\Sigma}_{k'})}$$

Aprendizaje: inter-dependencia

Calcular asignación prob. de cada ejemplo a componentes:

$$\hat{z}_{ik} = \hat{\pi}_k \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{x}_i | \hat{\boldsymbol{\mu}}_k, \hat{\Sigma}_k) / \Big(\textstyle\sum_{k'=1}^{K} \hat{\pi}_{k'} \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{x}_i | \hat{\boldsymbol{\mu}}_{k'}, \hat{\Sigma}_{k'}) \Big)$$

Aprender los parámetros:

- Probabilidad de cada componente:

$$\hat{\pi}_k = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \hat{z}_{ik} / n$$

- Centro de la normal de la k-ésima componente:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_k = \Big(\textstyle\sum_{i=1}^{n} \hat{z}_{ik} \cdot \boldsymbol{x}_i \Big) / \Big(\textstyle\sum_{i=1}^{n} \hat{z}_{ik} \Big)$$

- Matriz de covarianza de la normal de la k-ésima componente:

$$\hat{\Sigma}_k = \Big(\textstyle\sum_{i=1}^{n} \hat{z}_{ik} (\boldsymbol{x}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}_k)(\boldsymbol{x}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}_k)^T \Big) / \Big(\textstyle\sum_{i=1}^{n} \hat{z}_{ik} \Big)$$

Aprendizaje: algoritmo Esperanza-Maximización

Paso E: Calcular asignación prob. de cada ejemplo a componentes:

$$\hat{z}_{ik} = \hat{\pi}_k \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{x}_i | \hat{\boldsymbol{\mu}}_k, \hat{\Sigma}_k) / \Big(\sum_{k'=1}^{K} \hat{\pi}_{k'} \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{x}_i | \hat{\boldsymbol{\mu}}_{k'}, \hat{\Sigma}_{k'}) \Big)$$

Paso M: Aprender los parámetros

- Probabilidad de cada componente:

$$\hat{\pi}_k = \sum_{i=1}^{n} \hat{z}_{ik} / n$$

- Centro de la normal de la k-ésima componente:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_k = \Big(\sum_{i=1}^{n} \hat{z}_{ik} \cdot \boldsymbol{x}_i \Big) / \Big(\sum_{i=1}^{n} \hat{z}_{ik} \Big)$$

- Matriz de covarianza de la normal de la k-ésima componente:

$$\hat{\Sigma}_k = \Big(\sum_{i=1}^{n} \hat{z}_{ik} (\boldsymbol{x}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}_k)(\boldsymbol{x}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}_k)^T \Big) / \Big(\sum_{i=1}^{n} \hat{z}_{ik} \Big)$$

Aprendizaje: algoritmo Esperanza-Maximización

Inicialización aleatoria

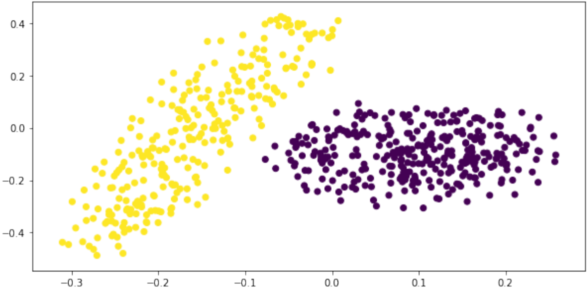
Paso E: Calcular asignación prob. de cada ejemplo a componentes

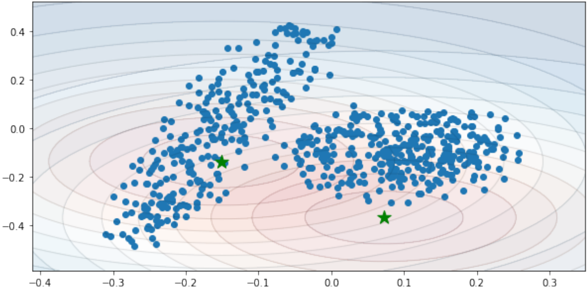
Paso M: Aprender los parámetros

Convergencia a un óptimo local de la función de verosimilitud

Agrupamiento probabilístico

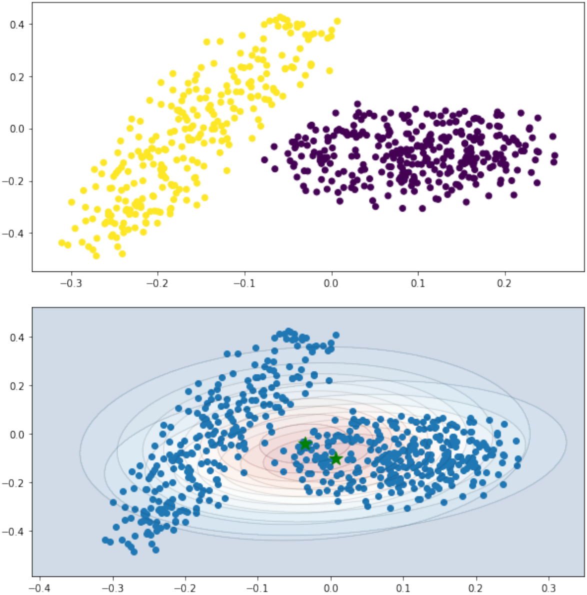
Mixtura de Gaussianas





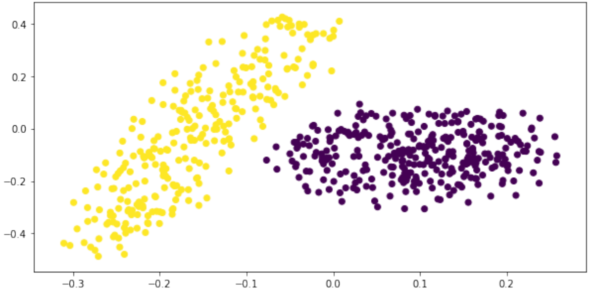
Agrupamiento probabilístico

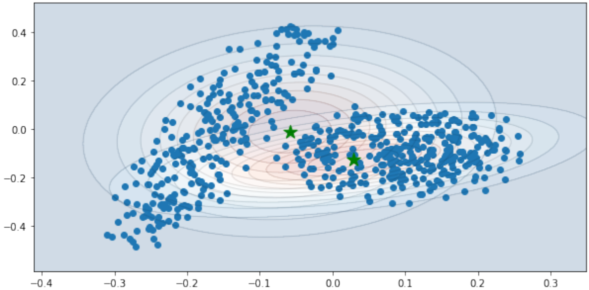
Mixtura de Gaussianas

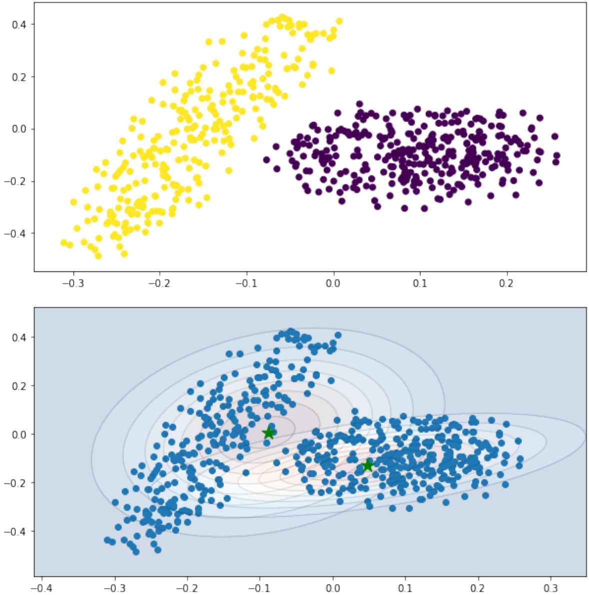


Agrupamiento probabilístico

Mixtura de Gaussianas

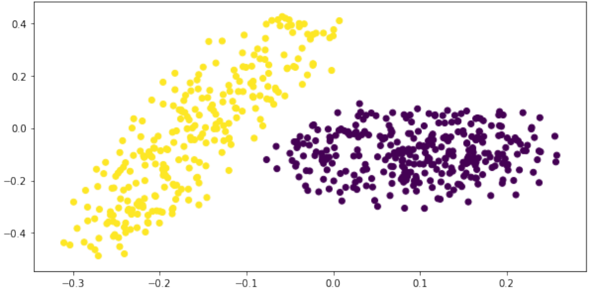


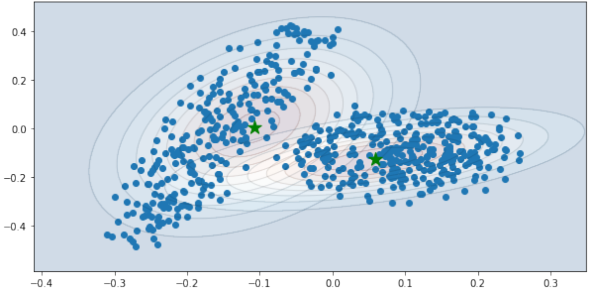



0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.3
−0.2
−0.1
0.0
0.1
0.2
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.4
−0.3
−0.2
−0.1
0.0
0.1
0.2
0.3

Agrupamiento probabilístico

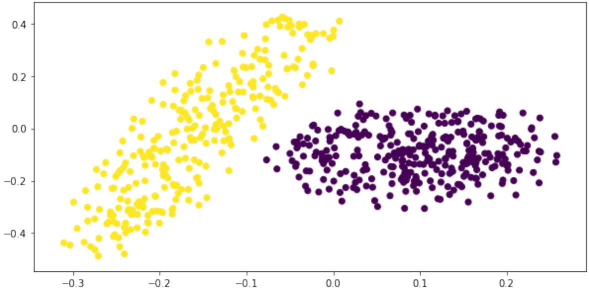
Mixtura de Gaussianas

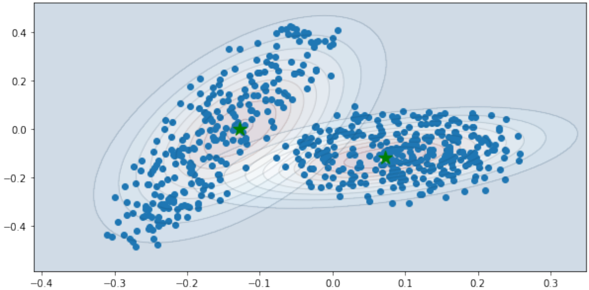




Agrupamiento probabilístico

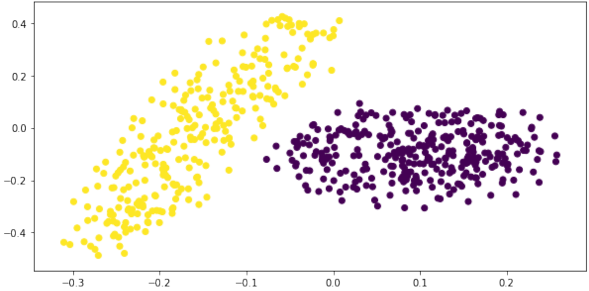
Mixtura de Gaussianas

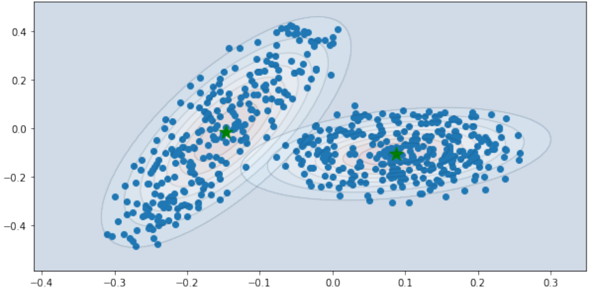


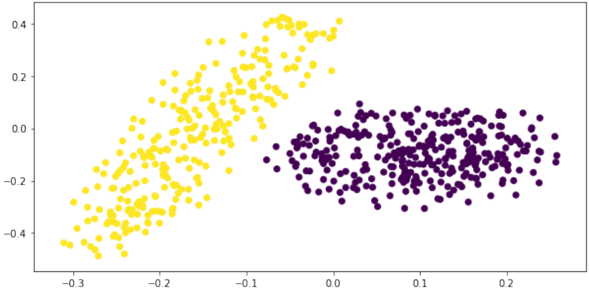


Agrupamiento probabilístico

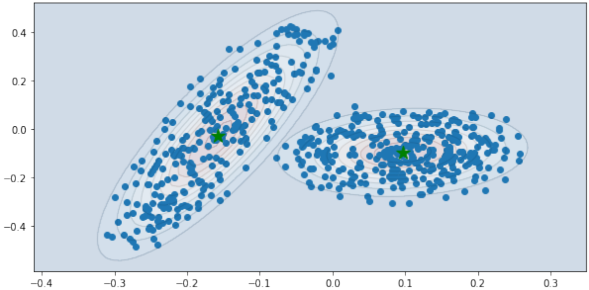
Mixtura de Gaussianas







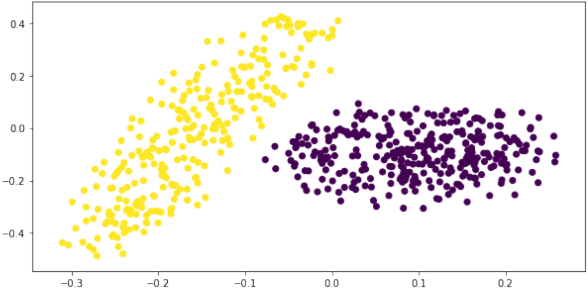
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.3
−0.2
−0.1
0.0
0.1
0.2

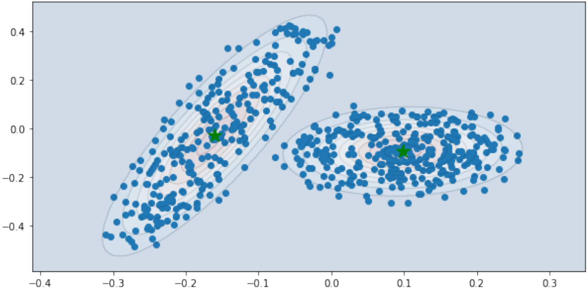


0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.4
−0.3
−0.2
−0.1
0.0
0.1
0.2
0.3

Agrupamiento probabilístico

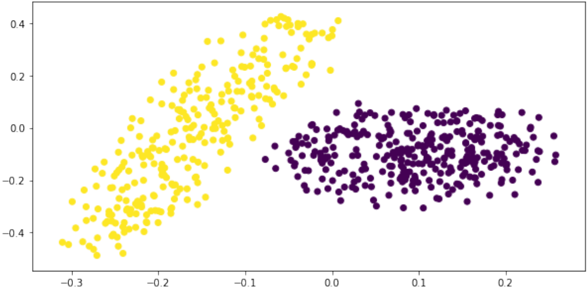
Mixtura de Gaussianas

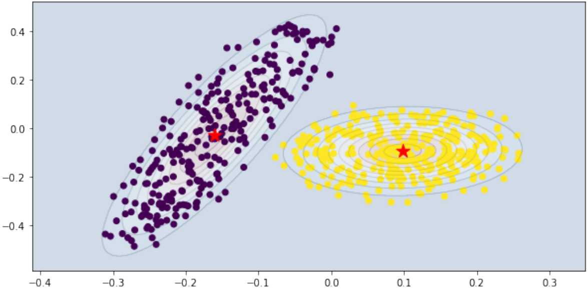




Agrupamiento probabilístico

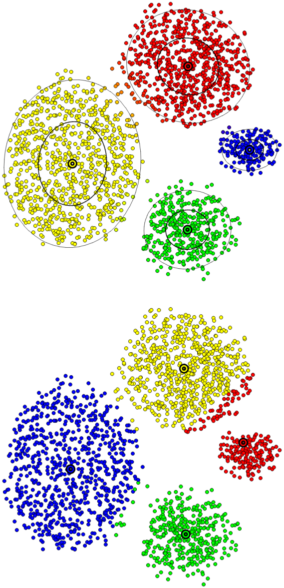
Mixtura de Gaussianas





Ventajas

- Definición basada en probabilidad
- Definición sencilla
- Podría funcionar con diferentes distribuciones
- Funciona con clústeres cóncavos elípticos (vs. K-means)

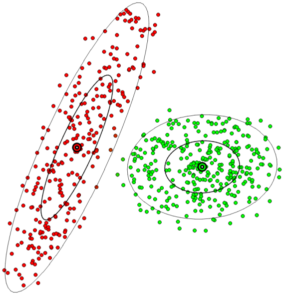


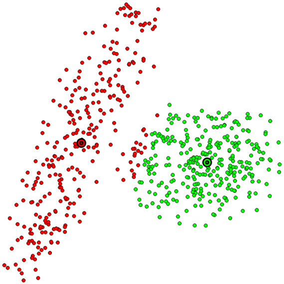
Relación con K-means

- Asignación probabilística vs. determinista
- Clústeres elípticos vs. circulares

Relación con K-means

- Asignación probabilística vs. determinista
- Clústeres elípticos vs. circulares

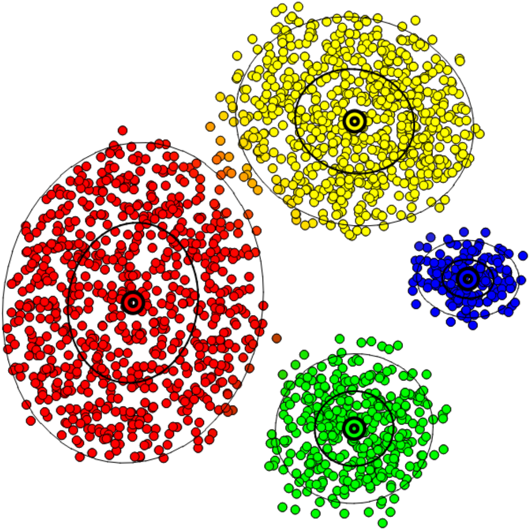




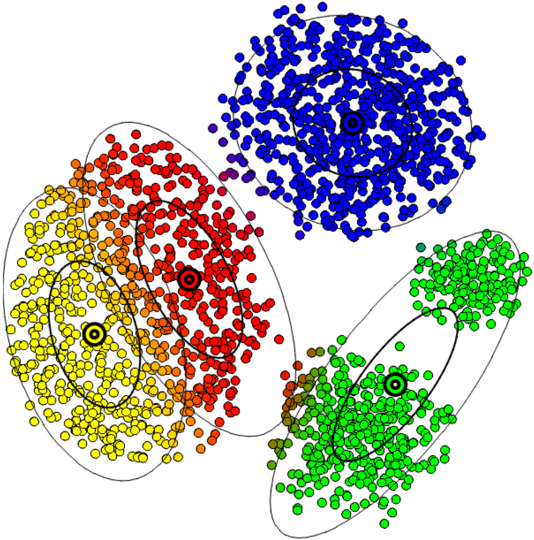
Desventajas

- Depende de K (parámetro)
- Asume clústeres cóncavos
- Problemas al lidiar con clústeres de diferente forma
- Depende de la inicialización

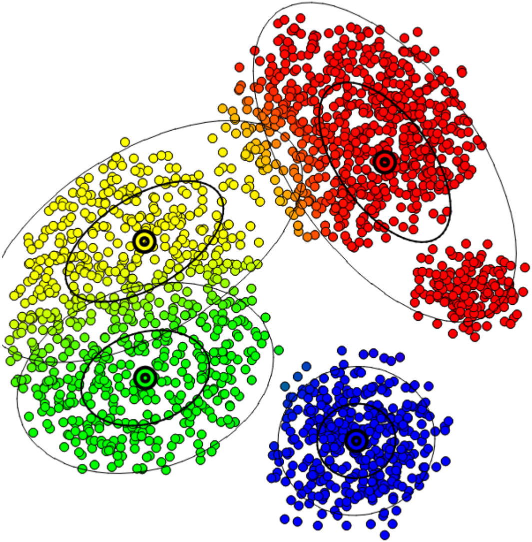
Dependencia de la inicialización



Dependencia de la inicialización



Dependencia de la inicialización



Gracias

viu Universidad Internacional de Valencia