

Práctica en clase

Tema: Espacios vectoriales, subespacios y combinación lineal

Guía Interactiva

Formación de Figuras con Drones mediante Combinaciones Lineales

Contexto

Un grupo de ingenieros diseña un espectáculo de drones luminosos que deben formar figuras en el aire (una estrella, una espiral, una letra, etc.). Inicialmente, los drones están en una posición ordenada (por ejemplo, en una cuadrícula o en el primer cuadrante del plano).

Para formar la figura, cada dron debe desplazarse desde su posición inicial hasta una nueva posición final.

El reto es modelar estos movimientos usando los conceptos de espacio vectorial, subespacio y combinación lineal.

Objetivo

Representar el desplazamiento coordinado de drones como combinaciones lineales de vectores base, y analizar qué subespacios y relaciones vectoriales surgen en la transformación de una formación inicial a una figura final.

Paso a paso

1. Elegir la figura

Cada grupo selecciona una figura geométrica simple (estrella, triángulo, corazón, letra, símbolo).

→ La figura representará las coordenadas finales de los drones.

Ejemplo: figura “estrella” formada por 5 puntos (coordenadas finales).

Según la figura seleccionada, así será la cantidad de drones

2. Posición inicial de los drones

Supongamos que inicialmente los drones están en posiciones:

$$P_i = (x_i, y_i)$$

por ejemplo, formando una cuadrícula o línea recta en el primer cuadrante.

Hacer:

- Defina las coordenadas iniciales de los drones.
- Represente sus posiciones en un gráfico.

3. Posición final (figura deseada)

Cada dron debe moverse a una posición final:

$$F_i = (x'_i, y'_i)$$

correspondiente a un punto de la figura elegida.

Hacer:

- Defina la posición final de cada dron.
- Represente en el mismo gráfico las posiciones iniciales y finales.

4. Calcular los vectores de desplazamiento

Cada dron realiza un desplazamiento:

$$\vec{d}_i = F_i - P_i$$

→ Este conjunto de desplazamientos forma un **subconjunto de un espacio vectorial** $V = \mathbb{R}^2$ o $V = \mathbb{R}^3$.

Hacer:

- Calcule cada vector de desplazamiento.
- Determine si los desplazamientos son linealmente independientes.
- Describa el subespacio que generan:
 - Si todos los desplazamientos son proporcionales → subespacio de dimensión 1 (una línea).
 - Si hay al menos dos direcciones independientes → subespacio de dimensión 2 (un plano).
 - Si hay tres direcciones independientes (en 3D) → subespacio de dimensión 3 (el espacio completo).

Nota:

La dimensión del subespacio indica cuántas direcciones de movimiento independientes existen entre los drones.

5. Representar los movimientos mediante combinaciones lineales

Cada desplazamiento puede representarse como una combinación lineal de vectores base:

$$\vec{d}_i = a_i \vec{v}_1 + b_i \vec{v}_2 + c_i \vec{v}_3$$

Los **vectores base** $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots)$ representan los **movimientos fundamentales** que generan todos los desplazamientos posibles del grupo de drones.

Hacer:

- Encuentre un conjunto de vectores base para los desplazamientos calculados.
- Verifique que los demás desplazamientos puedan expresarse como combinaciones lineales de esa base.
- Indique la dimensión del subespacio generado.

Nota:

Una base es el conjunto mínimo de vectores necesarios para describir todos los desplazamientos posibles. Su cantidad define la dimensión del subespacio donde se mueven los drones.

6. Programar la simulación (código de ejemplo)

```

import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

# Posiciones iniciales (cuadrícula)
P = np.array([[0,0],[1,0],[2,0],[0,1],[1,1]])

# Figura: estrella (posiciones finales)
F = np.array([[0,2],[1.5,0.5],[3,2],[0.5,1],[2.5,1]])

# Desplazamientos
D = F - P

plt.figure(figsize=(7,7))
for i in range(len(P)):
    plt.plot([P[i,0], F[i,0]], [P[i,1], F[i,1]], 'k--', alpha=0.5)
    plt.quiver(P[i,0], P[i,1], D[i,0], D[i,1], angles='xy', scale_units='xy', scale=1, color='b')
    plt.scatter(F[i,0], F[i,1], color='r')

plt.title("Formación de figura (estrella) con drones")
plt.xlim(-1,4)
plt.ylim(-1,3)
plt.grid(True)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.show()

```

- ◆ Cada flecha representa el vector de desplazamiento de un dron.
- ◆ El conjunto de todos esos vectores forma un subespacio vectorial del plano.

7. Análisis

- Calcule el rango de la matriz formada por los vectores de desplazamiento y a partir de ese resultado, determine si todos los drones se movieron en el mismo subespacio (por ejemplo, si los desplazamientos son proporcionales o independientes).

```
A = D.T
rango = np.linalg.matrix_rank(A)
print("Rango del conjunto de desplazamientos:", rango)
```

- Explique qué representa la **base** en el contexto del espectáculo.
- Interprete la **dimensión** como el número de direcciones independientes que permiten a los drones formar la figura.

Preguntas de reflexión

1. ¿El conjunto de desplazamientos de los drones genera todo el plano \mathbb{R}^2 ? ¿Por qué?
2. Si el rango es 1, ¿qué significa en términos del movimiento?
3. ¿Podríamos obtener la misma figura usando menos vectores base?
4. ¿Cómo influye la independencia lineal en la flexibilidad de las formaciones del dron?

Ampliaciones posibles

- Extiende el ejercicio a 3D (formar una figura en el espacio, como una estrella flotante o una pirámide).
- Incluye animación con `matplotlib.animation` o `pygame` para simular el vuelo de los drones.
- Calcula la energía total (sumatoria de normas de desplazamientos) y analiza cómo minimizarla (conexión con optimización).

Conexión con Álgebra Lineal

Concepto	Aplicación en la simulación
Espacio vectorial	Las posiciones y desplazamientos viven en el espacio \mathbb{R}^2 .
Subespacio vectorial	Los movimientos posibles pueden restringirse a un plano o a una dirección (por ejemplo, todos los drones moviéndose sobre una línea).
Combinación lineal	Cada nuevo punto se obtiene sumando vectores base (movimientos elementales).
Independencia lineal	Si los desplazamientos no son linealmente independientes, algunos drones repiten trayectorias redundantes.